МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

РЕКУРСИВНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Р. Л. ГУДСТЕЙН

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
А. О. СЛИСЕНКО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. Е. МИНЦА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
Г 93
УДК 164

Рейбен Луис Гудстейн

РЕКУРСИВНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(Серия: «Математическая логика и основания математики»)

М., 1970 г. 472 стр.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 19/VII 1969 г. Подписано к печати 3/IV 1970 г.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 14,75.
Условн. печ. л. 24,78. Уч.-изд. л. 21,45. Тираж 8000 экз.
Цена книги 1 р. 78 к. Заказ № 267.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

2-2-3
209-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р. Л. Гудстейна

Н. А. Шанин

§ 1. В настоящее время интенсивно развивается конструктивное направление в математике, в частности, конструктивный математический анализ. Р. Л. Гудстейн является автором весьма интересного и своеобразного подхода к построению некоторых фрагментов конструктивного математического анализа. Этот подход существенно отличается (как по общему замыслу, так и по характеру центральных понятий) от подходов, использованных другими математиками; он тесно связан с введенным Гудстейном исчислением равенств, представляющим собой аксиоматический фрагмент теории рекурсивных арифметических функций, обладающий рядом важных достоинств. Аксиомы исчисления равенств и выводимые в этом исчислении объекты представляют собой формулы вида $T_1 = T_2$, где T_1 и T_2 — функциональные выражения (термы), составляемые обычным способом из натуральных чисел, предметных переменных (допустимыми значениями которых считаются натуральные числа) и знаков примитивно рекурсивных функций *). При этом, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — список всех

*) *Примитивно рекурсивные функции* (сокращенное название — п. р. функции) представляют собой алгорифмически определяемые арифметические функции одного частного, но (как было выяснено еще в первой трети текущего столетия) весьма важного и достаточного для очень многих целей типа.

В этом параграфе функциональные выражения (термы) указанного выше типа называются *примитивно рекурсивными термами* (п. р. термами), а формулы вида $T_1 = T_2$, где T_1 и T_2 — п. р. термы, называются *примитивно рекурсивными равенствами* (п. р. равенствами).

предметных переменных, входящих в формулу $T_1 = T_2$, то эта формула воспринимается как утверждение: «При любом α_1, ..., при любом α_n верно равенство $T_1 = T_2$».

Можно провести рассуждение, опирающееся на формирующиеся в опыте обобщенные представления о натуральных числах и о процессах вычисления значений рекурсивных функций, результатом которого является заключение: любая формула, выводимая в исчислении равенств, представляет собой равенство, верное при любых значениях входящих в него предметных переменных. Далее, несмотря на отсутствие в языке исчисления равенств логических связок (логическая связка «при любом» подразумевается, но явно в язык исчисления не вводится), это исчисление оказывается достаточным для многих целей; в частности, в него может быть „вложен" ряд разделов элементарной теории натуральных чисел и на его основе (с привлечением понятия «вывод из данных равенств при фиксации данных переменных») может быть построен обширный фрагмент оригинально задуманного варианта конструктивного математического анализа *).

Основу этой книги составляют две монографии Р. Л. Гудстейна: «Рекурсивная теория чисел» и «Рекурсивный анализ» (в дальнейшем изложении используются их сокращенные наименования — РТЧ и соответственно РА). Монография РТЧ содержит систематическое и обстоятельное описание и исследование построенного Гудстейном исчисления п. р. равенств **) и некоторых модификаций этого исчисления; в ней описываются и изучаются также некоторые „надстройки" над исчислением равенств, использующие определенные расширения языка исчисления равенств и допускающие „переводы" в исчисление равенств; излагаются и некоторые традиционные разделы теории рекурсивных функций, а также некоторые разделы элементарной теории чисел, допускающие „вложение" в исчисление равенств. В монографии РТЧ устанавливается также, что теорема о неполноте аксиоматизаций арифметики, доказанная К. Гёделем для традиционной аксиоматизации арифметики и ее расширений, переносится и на исчисление равенств и его расширения. Монография РА суммирует основные результаты ее автора в области рекурсивного анализа (этим термином Гудстейн называет разрабатываемый им вариант конструктивного математического анализа).

*) В тексте этой статьи кавычки вида « » используются для выделения некоторых терминов и оборотов речи, примененных в их прямом смысле, а также для выделения цитируемых текстов и названий. Кавычки вида „ " используются для выделения терминов и оборотов речи, примененных в данном месте в переносном смысле.

**) В значительной части текста монографии РТЧ речь фактически идет не только об исчислении п. р. равенств, но также и об аналогичных исчислениях равенств для рекурсивно определяемых функций некоторых более общих типов, чем п. р. функции.

Эта книга содержит также: (а) две работы Р. Л. Гудстейна (см. Приложение 1 и Приложение 2), тесно связанные по содержанию соответственно с РТЧ и РА, (б) работу Х. Б. Карри «Формализация рекурсивной арифметики» (см. Приложение 3; в дальнейшем изложении используется сокращенное наименование этой работы — ФРА), посвященную описанию и исследованию иного, чем у Гудстейна, исчисления равенств, и (в) тесно связанную с РТЧ и ФРА работу Ю. С. Шестова (см. Приложение 4), посвященную „прямому" доказательству равнообъемности (эквивалентности) исчислений п. р. равенств, построенных Карри и Гудстейном *).

Весь материал, содержащийся в книге (кроме нескольких небольших „вкраплений"), принадлежит *конструктивному направлению в математике* (*конструктивной математике*). Монографии Гудстейна и работа Карри, включенные в эту книгу, написаны так, что для их понимания не требуются какие-либо специальные знания в области конструктивной математики. Однако читатели, для которых эта книга окажется первым серьезным источником знаний о конструктивном направлении в математике, могут встретиться с затруднениями, обусловленными как отсутствием общей ориентировки в

*) Ранее было известно об эквивалентности упомянутых исчислений лишь на основании установленной Карри и Гудстейном эквивалентности их исчислений определенному исчислению, построенному для бескванторных логико-арифметических формул в монографии Д. Гильберта и П. Бернайса [5]. В статье Ю. С. Шестова устанавливается „прямая" связь между выводами в исчислении Карри и выводами в исчислении Гудстейна.

принципиальных особенностях конструктивной математики, так и характером изложения в книге некоторых фрагментов и деталей. В расчете прежде всего на таких читателей и написана эта вступительная статья.

* * *

Язык, состоящий лишь из п. р. равенств, может показаться слишком „бедным". Однако в результате исследований Т. Сколема и К. Гёделя (см. [19] и [2]) выяснилось, что любая формула значительно более „богатого" логико-арифметического языка, называемого в этом параграфе *языком арифметики Сколема* (сокращенно — ЯАС), может быть истолкована (на основе того отчетливо характеризуемого понимания фигурирующих в ЯАС логических символов, которое используется в математических теориях с конечной областью объектов изучения) как специального вида запись некоторого п. р. равенства. Логическими символами ЯАС являются *пропозициональные логические знаки* $\sim$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (читаемые соответственно «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда, когда») и два составных знака — *ограниченные кванторные комплексы* $(A)_{\alpha}^{T}$ и $(E)_{\alpha}^{T}$ (читаемые соответственно «при любом α, не превосходящем T» и «существует α, не превосходящее T»)*), где α — какая-либо предметная переменная и T — какой-либо п. р. терм, не содержащий α. Простейшими (*атомарными*) формулами этого языка являются знакосочетания видов $(T_1 = T_2)$, $(T_1 \neq T_2)$, $(T_1 < T_2)$, $(T_1 \leqslant T_2)$, где T_1 и T_2 —

*) Выше воспроизведены логические символы, использованные Гудстейном в РТЧ. В языке исчисления предикатов первой ступени и в традиционных логико-арифметических языках *кванторным комплексом* называется любое знакосочетание вида $Q\alpha$, где α — какая-либо предметная переменная и Q — *квантор общности* (знак (A), читаемый «при любом») или *квантор существования* (знак (E), читаемый «существует»). Такие кванторные комплексы иногда называют (чтобы подчеркнуть их отличие от ограниченных кванторных комплексов) *неограниченными кванторными комплексами*. В значительной части современной математической и логической литературы в качестве кванторов используются не буквы (A) и (E) (как в символике Гудстейна), а соответственно знаки $\forall$ и $\exists$. В тексте этой вступительной статьи в качестве кванторов будут использоваться знаки $\forall$ и $\exists$.

п. р. термы; *формулой* этого языка называется, во-первых, любая атомарная формула и, во-вторых, любое знакосочетание, которое может быть получено из атомарных формул при помощи перечисленных логических символов по таким же правилам построения, по каким формулы языка исчисления предикатов первой ступени и формулы традиционных логико-арифметических языков *) строятся из простейших (*атомарных*) формул этих языков, но с использованием в роли неограниченных кванторных комплексов (являющихся логическими символами упомянутых языков) ограниченных кванторных комплексов. Вхождения предметных переменных в формулы ЯАС таким же способом, как в только что упомянутых языках, классифицируются на *связанные* и *свободные* **). Если F — какая-либо формула ЯАС и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — список всех предметных переменных, имеющих хотя бы одно свободное вхождение в F, то F представляет собой запись определенного условия с переменными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Однако эту формулу можно рассмат-

*) Правила построения формул всех упомянутых сейчас языков существенно отличаются друг от друга лишь в исходном пункте, характеризующем простейшие формулы (см. [9], §§ 17, 18, 31; [3], § 3).

**) Применяя термин «язык арифметики Сколема», я имею в виду логико-арифметический язык, построенный по образцу таких традиционных логико-арифметических языков, в которых фигурируют предметные переменные для натуральных чисел (т. е. переменные, допустимыми значениями которых считаются натуральные числа) только одного рода, и вхождения этих переменных в формулы классифицируются на связанные и свободные (см., например, [9], § 17 и § 18). У ЯАС имеется „близнец", построенный по образцу таких традиционных логико-арифметических языков, в которых фигурируют предметные переменные (для натуральных чисел) двух родов: связанные предметные переменные и свободные предметные переменные (см., например, [3], § 3); в языках этого типа определение понятия «формула» сложнее, чем в языках первого типа. В разделе 3.6 монографии РТЧ описывается (к сожалению, без достаточно пунктуальных определений), по-видимому, именно „близнец" ЯАС (говоря точнее, „близнец" того расширения ЯАС, о котором говорится ниже в подстрочном примечании на стр. 14); однако это описание сопровождается замечанием, из которого следует, что фактически будет использоваться язык первого типа. Логико-арифметические языки первого типа по своей структуре ближе к „разговорному математическому языку", чем языки второго типа. В этой вступительной статье фигурируют лишь логико-арифметические языки первого типа.

ривать и как запись определенного утверждения, а именно утверждения «при любом α_1, ..., при любом α_n верно F». Таким образом, ЯАС предоставляет довольно широкие возможности для записи арифметических утверждений.

Т. Сколем в работе [19], оказавшейся основополагающей для принципиально нового круга идей в области исследований оснований математики и для разработки принципиально новых методов построения математических теорий *), выяснил, что многие арифметические определения и утверждения, формулируемые обычно посредством языка, использующего неограниченные кванторные комплексы, могут быть переформулированы на языке, названном выше языком арифметики Сколема (ЯАС). При этом Сколем выяснил, что новые формулировки рассмотренных им утверждений могут быть обоснованы посредством «рекурсивного способа мышления». Сколем не уточнил, какой смысл он вкладывает в последний термин, но пояснил это на многих примерах. Из этих примеров видно, что характерными чертами «рекурсивного способа мышления» он считает, в частности, использование для определения арифметических функций метода рекурсивных определений в сочетании с методом явных определений **) и использование для определения новых арифметических предикатов (т. е. понятий и отношений) также метода рекурсивных определений в сочетании с общеупотребительным способом использования для этой же цели простейшего арифметического предиката «равенство» и пропозициональных логических знаков. Сколем установил возможность исключения ограниченных кванторных комплексов посредством рекурсивных определений предикатов. В результате

*) Название работы [19] начинается словами, формулирующими целую программу: «Обоснование элементарной арифметики посредством рекурсивного способа мышления...». Эта работа Сколема была выражением его реакции на обнаруженные к тому времени парадоксы теоретико-множественного способа математического мышления.

**) Арифметические функции, получаемые из алгорифмически определенных функций в результате комбинирования определений этих типов, представляют собой алгорифмически определенные функции.

исключения ограниченных кванторных комплексов из логико-арифметической формулы, не содержащей неограниченных кванторных комплексов, получается б е с к в а н т о р н а я ф о р м у л а, т. е. формула, составленная из рекурсивно определенных арифметических предикатов при помощи лишь пропозициональных знаков (но содержащая, вообще говоря, предметные переменные). Среди логических средств, использованных Сколемом для обоснования бескванторных формул (истолковываемых указанным выше способом как записи утверждений), фигурируют, в частности, классическое исчисление высказываний, правило подстановки термов вместо предметных переменных и метод математической индукции (в варианте, соответствующем бескванторным формулам).

В [19] на обширном конкретном материале было осуществлено значительное развитие метода рекурсивных определений арифметических функций и арифметических предикатов *). Дальнейшее развитие метод рекурсивных определений арифметических функций получил в работах Д. Г и л ь б е р т а [4], В. Аккермана, К. Гёделя, Р. Петер, Ж. Эрбрана, С. К. Клини и многих других авторов.

Важный этап в развитии этого метода и теории рекурсивно определяемых арифметических функций связан с именем К. Гёделя. В частности, в его работе [2]: 1) было введено общеупотребительное в настоящее время понятие примитивно рекурсивной функции **) (подготовленное в значительной степени работами Р. Дедекинда и Т. Сколема); 2) было установлено, что использованные Сколемом рекурсивные определения арифметических предикатов (в частности, те определения, посредством которых Сколем исключал ограниченные кванторные комплексы) могут быть заменены определениями подходящих примитивно рекурсивных функций и что *любая*

*) Рекурсивные (рекуррентные) определения конкретных арифметических функций используются в математике очень давно; примерами могут служить определения арифметической и геометрической прогрессий. Изучение возможностей, предоставляемых методом рекурсивных определений функций при исследованиях оснований математики, было начато Р. Дедекиндом.

**) В работе [2] К. Гёдель связал с введенным им понятием термин «рекурсивная функция», применяемый в настоящее время в значительно более широком смысле.

формула ЯАС *может быть „расшифрована" в виде некоторого равенства, имеющего форму* $T = 0$, *где* T *— примитивно рекурсивный терм* *); 3) значительно расширен набор существенных конкретных примеров арифметических определений и утверждений, естественным образом записываемых на ЯАС или на том расширении ЯАС, которое упомянуто в последнем подстрочном примечании.

В монографии Д. Гильберта и П. Бернайса [5] для бескванторных формул ЯАС (т. е. для формул, которые могут быть построены из п. р. равенств при помощи пропозициональных логических знаков) была построена аксиоматическая теория **), достаточная, в частности, для построения выводов „переводов" в бескванторную форму всех рассмотренных Сколемом и многих других арифметических утверждений. Эта теория включает в себя, в частности, все перечисленные выше логические средства, использованные Сколемом. Дедуктивные средства этой теории достаточны для того, чтобы для любой бескванторной формулы H рассматриваемого языка вывести формулу $H \leftrightarrow (T = 0)$, где $(T = 0)$ — то

*) Последнее утверждение фактически обосновано Гёделем для языка, представляющего собой определенное расширение ЯАС — такое расширение, в котором в той же роли, в какой в ЯАС фигурируют п. р. термы, могут фигурировать как п. р. термы, так и термы более сложного типа. В этом языке термы и формулы характеризуются посредством единого определения, в котором наряду с правилами построения термов и формул, заимствуемыми из ЯАС, фигурирует еще следующее правило: если F — формула, T — терм и α — предметная переменная, не входящая в T, то выражение $\mathsf{L}_\alpha^T F$ считается термом (это выражение читается так: «наименьшее из тех натуральных чисел α, которые удовлетворяют условию F и не превосходят T, если такие числа существуют, и 0 в противоположном случае»). При классификации вхождений предметных переменных в формулы на связанные и свободные выражение L_α^T рассматривается на тех же правах, как и ограниченные кванторные комплексы. Если F — формула только что описанного языка, то, как установил Гёдель, выражение $\mathsf{L}_\alpha^T F$ может быть „расшифровано" в виде некоторого п. р. терма. Операция L_α^T полноценно заменяет аналогичную, но не всегда определенную операцию, упоминаемую Сколемом в [19], — она полностью соответствует „примитивно рекурсивному характеру" ЯАС.

**) В другой терминологии — логико-математическое исчисление.

п. р. равенство, которое является „расшифровкой" формулы H.

Новый важный шаг в исследовании и преобразовании логических основ теории п. р. функций был сделан Х. Б. Карри и Р. Л. Гудстейном. В 1940 году Карри представил в печать работу ФРА (опубликованную в 1941 году), в которой построено и исследовано весьма интересное исчисление равенств — аксиоматическая теория, в которой аксиомы и выводимые объекты представляют собой п. р. равенства (содержащие, вообще говоря, предметные переменные). Он доказал, что любое п. р. равенство, выводимое в его исчислении, выводимо и в бескванторном исчислении Гильберта и Бернайса и что „расшифровки" (в виде п. р. равенств) всех аксиом исчисления Гильберта и Бернайса выводимы в его исчислении, а „расшифровки" всех правил вывода исчисления Гильберта и Бернайса являются допустимыми в его исчислении правилами вывода. В 1941 году Гудстейн представил в печать работу [6] (опубликованную в 1945 году), в которой построено исчисление равенств, существенно отличающееся по своему типу от исчисления Карри. Гудстейн доказал в этой работе (ссылаясь на некоторые результаты Бернайса и Сколема), что его исчисление обладает всеми упомянутыми свойствами исчисления Карри. Следовательно, исчисления п. р. равенств, построенные Карри и Гудстейном, равнообъемны (эквивалентны).

Выводы в исчислении Гудстейна представляют собой списки п. р. равенств, в которых каждый член или является аксиомой исчисления, или получается из одного или нескольких предшествующих ему членов списка по одному из правил вывода. В исчислении Карри понятие вывода существенно сложнее, оно опирается на вспомогательные выводы из допущений методом индукции. При естественной интерпретации вспомогательных выводов при помощи понятия секвенции, введенного Генценом (см. [3]), можно придать выводам в исчислении Карри такую же форму, как в исчислении Гудстейна. Однако выводы в этом новом смысле будут представлять собой списки секвенций, т. е. по существу списки утверждений, в которых под иным

названием фигурирует (вообще говоря) логическая связка «если..., то». С этой точки зрения исчисление равенств Гудстейна имеет ощутимое преимущество перед исчислением равенств Карри.

В монографии РТЧ Гудстейн развил в значительном объеме теорию построенного им исчисления равенств. В частности, он доказал, что при рассмотрении формул ЯАС как нерасшифрованных записей некоторых п. р. равенств оказывается допустимым в его исчислении равенств не только весь аппарат логического вывода классического исчисления высказываний, дополненный правилом подстановки термов вместо свободных вхождений предметных переменных и правилом индукции, но допустима и естественная модификация применительно к ограниченным кванторным комплексам всего аппарата логического вывода классического исчисления предикатов первой ступени *). Конкретный материал, имеющийся в РТЧ, свидетельствует о хорошей приспособленности построенного Гудстейном исчисления п. р. равенств для роли отчетливо обоснованного и весьма простого по своей структуре логико-математического фундамента ряда разделов теории натуральных чисел. Вопрос о том, как далеко можно продвинуться „вглубь" теории чисел, оставаясь по существу в рамках этого исчисления (т. е. используя для логических выводов лишь такие языковые и формально-дедуктивные расширения исчисления п. р. равенств, которые оказываются эквивалентными этому исчислению), еще ждет своих исследователей.

Исчисление равенств в определенном смысле (более широком, чем тот, который имеется в виду в предыдущей фразе) является фундаментом разрабатываемого Гудстейном варианта конструктивного математического анализа; этот вариант Гудстейн называет рекурсивным математическим анализом. Изложению определенной части рекурсивного математического анализа посвящена монография РА.

*) Для языка, описанного в подстрочном примечании на стр. 14, Гудстейн указывает ряд дополнительных выводимых формул и допустимых правил вывода, связанных с операцией ограниченного поиска наименьшего натурального числа, удовлетворяющего данному условию.

§ 2. Из истории науки известно, что традиционный (классический) математический анализ длительное время разрабатывался на весьма неотчетливой логической базе. Несмотря на это и несмотря на возникавшие иногда парадоксы, созданные математические аппараты в целом оказались весьма „работоспособными" — они дали возможность решить огромное количество проблем механики, физики и астрономии и привели к колоссальному прогрессу в разработке теоретических основ этих наук. Это обстоятельство оттеснило на задний план вопросы, связанные с уточнением основных понятий и логической базы в целом, — в центре внимания оказались разнообразные соотношения, выражаемые посредством формул, и применения этих соотношений в естествознании и в задачах прикладного характера. Однако с течением времени вопрос об уточнении основных понятий и доказательств теорем начал привлекать значительное внимание математиков. Это внимание стимулировалось не только свойственным математикам стремлением к возможно большей отчетливости, но и конкретными затруднениями и недоразумениями, возникавшими в математическом анализе (например, при оперировании с бесконечными рядами). В результате обострения внимания к логической базе математического анализа эта база прошла ряд уточнений и преобразований (главным образом в трудах Коши, Больцано, Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора).

Опубликованные в конце XIX столетия работы Г. Кантора и Р. Дедекинда по теории множеств и теории вещественных чисел (а также работа Ш. Мерэ, в которой сформулировано такое же определение понятия вещественного числа, какое несколько позже было сформулировано Кантором *)) завершили в главных чертах

*) Мерэ и Кантор в основу понятия вещественного числа положили понятие фундаментальной (т. е. удовлетворяющей условию Коши) последовательности рациональных чисел; для таких последовательностей вводится отношение равенства, и равные друг другу фундаментальные последовательности рациональных чисел мысленно объединяются в одно вещественное число.

создание той логической базы математического анализа, которая (после некоторых уточнений) завоевала весьма широкий круг сторонников и в настоящее время большинством математиков расценивается как удовлетворительная.

Основу этой логической базы математического анализа (и канторовской теории множеств в целом) составляют специфические акты воображения, в результате которых в сознании математика возникают представления о бесконечных совокупностях одновременно существующих объектов; математик, принимающий эту логическую базу, разрешает себе рассуждать о воображаемых бесконечных совокупностях в основном так же, как о конечных совокупностях реальных предметов, используя навыки мышления, выработанные традиционной (заимствовавшей исходные принципы у Аристотеля) логикой.

В период, предшествовавший созданию теории множеств, математический анализ строился и излагался при помощи понятий «переменная величина», «бесконечно малая величина», «бесконечно большая величина» и т. п., причем с этими терминами обычно связывались представления о некоторых процессах, т. е. представления, которые были близки к представлениям античных математиков о «потенциальной бесконечности»*). Однако вопрос о том, какие именно процессы имеются при

*) Известно, что уже античные математики различали «потенциальную бесконечность», связывая этот термин с процессами, и «актуальную бесконечность», связывая этот термин с представлениями о совокупностях одновременно существующих объектов. Парадоксы Зенона (такие, как «Ахиллес и черепаха», «летящая стрела», «бесконечная делимость» и др.), а также, конечно, отсутствие в опыте людей примера бесконечной совокупности одновременно существующих реальных предметов какого-либо отчетливо охарактеризованного типа, склонили античных математиков к отказу от использования в математике представлений об актуально бесконечных совокупностях. Однако фактически отказ от этих представлений был лишь частичным, так как использование античными математиками некоторых логических принципов и средств (закона исключенного третьего, рассуждений «от противного» при доказательствах существования „объектов" с определенными свойствами и др.) представляло собой неосознанное апеллирование к этим представлениям.

этом в виду, не получил отчетливого разъяснения — соответствующие представления имели расплывчатый характер. Переход к теоретико-множественному способу математического мышления представлял собой переход к таким идеализациям, которые вызывают в воображении математика статические картины и освобождают от необходимости оперировать с расплывчатыми представлениями о некоторых процессах. Это обстоятельство весьма импонировало многим математикам, в частности, потому, что предоставляло возможность строить математические теории, не отклоняясь от навыков мышления, выработанных традиционной логикой, и вызывало ощущение „строгости" определений и рассуждений.

Известно, что в теории множеств на начальных этапах ее развития были обнаружены парадоксы (логические противоречия). Эти парадоксы вызвали у разных математиков различные реакции. Некоторые математики направили усилия на устранение обнаруженных парадоксов посредством уточнения допускаемых способов введения понятий — им удалось создать такие аксиоматические построения теории множеств, в которых обнаруженные к тому времени парадоксы не удавалось воспроизвести. Совершенно иной характер имела реакция А. Пуанкаре, Л. Э. Я. Брауэра, Г. Вейля, Т. Сколема и некоторых других математиков.

Брауэр подверг критике фундамент теории множеств — представления об актуально бесконечных множествах. Он возобновил дискуссии об этих представлениях, начатые еще античными математиками. По мнению Брауэра, представления об актуально бесконечных множествах не соответствуют математической интуиции. Конечно, если бы вся проблема сводилась к особенностям человеческой интуиции, критика теории множеств, предпринятая Брауэром и присоединившимся к нему Г. Вейлем*), не имела бы тех последствий, которые она

*) Г. Вейль до знакомства с работами Брауэра критиковал теорию множеств с иной точки зрения — его критика касалась непредикативных определений и не затрагивала способов рассуждений. В дальнейшем он признал свою критику недостаточной и присоединился к точке зрения Брауэра.

фактически вызвала. В действительности же Брауэр и Вейль привлекли внимание математиков к глубокому разрыву между представлениями, лежащими в основе теоретико-множественного способа математического мышления, и данными экспериментального исследования природы. Возникшую в связи с этим методологическую проблему Д. Гильберт характеризует следующим образом: «Раньше мы уже выяснили, что какие бы опыты и наблюдения и какую бы отрасль науки мы ни рассматривали, нигде в действительности мы не находим бесконечности. Должны ли мысли о вещах быть столь непохожими на то, что происходит с вещами, должны ли они сами по себе идти другим путем, совершенно в стороне от действительности?» *). Ответом Гильберта на этот вопрос было предложение ограничиваться рассуждениями, не использующими представлений об актуально бесконечных множествах, в тех случаях, когда речь идет о доказательстве непротиворечивости той или иной формально-дедуктивной теории (при таком доказательстве объектами рассмотрения являются знаковые конфигурации — логико-математические формулы и списки таких формул), и снять с обсуждения вопрос о смысле самих теорем формально-дедуктивных теорий, кроме теорем, имеющих очень простую логическую структуру (например, имеющих вид равенства между двумя функциональными выражениями, составленными на основе алгорифмически определенных арифметических функций). По мнению Гильберта, теоремам, содержащим неограниченные кванторы, отводится, вообще говоря, роль «идеальных высказываний», вводимых «для того, чтобы удержать формально простые законы обычной аристотелевой логики» ([4]).

Брауэр (в отличие от Гильберта) на первый план выдвигал вопрос о смысле математических теорем и, считая неудовлетворительными разъяснения смысла,

*) См. [4]. В приведенной цитате (см. стр. 350 русского перевода) Гильберт, применяя термин «бесконечность», имеет в виду актуальную бесконечность. Этой цитате в работе Гильберта предшествует анализ данных физики и астрономии, касающихся как микроструктуры реального мира, так и строения Вселенной в целом.

апеллирующие к представлениям об актуально бесконечных множествах, предложил вариант математического анализа, в основу которого была положена идея „становящейся“ бесконечности. При этом он подчеркивал недопустимость механического заимствования принципов и способов рассуждений, выработанных класической логикой. Вейль, излагая точку зрения Брауэра на классическую логику, писал следующее: «Согласно его взглядам и пониманию истории, классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств... Забывая об этом ограниченном происхождении, впоследствии эту логику приняли ошибочно за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и в конце концов стали применять ее без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств» ([1]).

Вейль, исходя из иных, чем Брауэр, идей, предложил такой вариант математического анализа, в котором язык теории строится в виде последовательности „слоев“, простейшими объектами изучения являются натуральные и рациональные числа, а объектами более сложных типов являются условия с одной свободной переменной («множества») и условия с несколькими свободными переменными («отношения» и «функции»), допускающие запись в виде символических выражений используемого языка; допустимыми значениями переменных, фигурирующих в записи какого-либо условия (или суждения), считаются некоторые символические выражения, принадлежащие более низким „слоям“ языка, чем тот „слой“, которому принадлежит рассматриваемое условие (суждение). Вейль разрабатывал этот вариант математического анализа на основе классической логики, которая не дает возможности учитывать конструктивный характер символических выражений, оказывающихся в его теории непосредственными объектами изучения, и не предусматривает конструктивного истолкования суждений и условий, формулируемых посредством использованного Вейлем языка.

Варианты математического анализа, предложенные Брауэром и Вейлем, вызвали большой интерес. Однако они обладали многими существенными недостатками и

не удовлетворили математиков*). В то же время, многие принципиальные идеи Брауэра и Вейля подготовили почву для конструктивного математического анализа, их плодотворность в полной мере проявилась после того как в математике были выработаны точное понятие алгорифма и точное понятие порождаемого множества (точное понятие исчисления). В результате введения этих понятий сложились реальные предпосылки для разработки таких вариантов математического анализа (объединяемых здесь общим наименованием «конструктивный математический анализ»), в которых: 1) объектами изучения являются знакосочетания некоторых типов (примерами таких объектов могут служить натуральные числа, рациональные числа, матрицы, составленные из рациональных чисел, схемы алгорифмов, схемы порождаемых множеств и т. п.) **) и некоторые процессы построения знакосочетаний, каждый из которых определяется посредством некоторых знакосочетаний (примерами могут служить процессы применения алгорифмов к исходным данным — каждый такой процесс определяется схемой алгорифма и исходным данным); 2) при теоретическом рассмотрении знакосочетаний какого-либо типа не допускается акт воображения, приводящий к представлению об актуально бесконечном множестве знакосочетаний, — эти объекты не рассматриваются как одновременно существующие, они рассматриваются

*) См. введение к статье: Н. А. Шанин «Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства» ([14]). Заметим, что некоторые варианты «интуиционистского математического анализа» Брауэра и «предикативного математического анализа» Вейля рассматриваются в литературе и в настоящее время. По мнению автора этой статьи, они в той же степени уязвимы для критики, как и первоначальные варианты Брауэра и Вейля.

**) Знакосочетания каждого конкретного типа характеризуются посредством (а) списка конкретных знаков, из копий которых формируются знакосочетания рассматриваемого типа, (б) списка исходных знакосочетаний, (в) списка правил построения (производящих правил) и (г) условия, предназначенного для „выделения“ некоторых знакосочетаний среди всевозможных знакосочетаний, характеризуемых посредством (а), (б) и (в); во многих случаях „выделяющее условие“ отсутствует.

лишь как потенциально осуществимые; 3) понимание математических суждений о знакосочетаниях и процессах построения (прежде всего суждений о существовании знакосочетаний, обладающих определенными свойствами) основывается на способе определения этих объектов, в частности, на том, что знакосочетания являются, вообще говоря, результатами осуществления процессов построения.

Еще одним существенным источником идей конструктивной математики явилась упомянутая выше работа Т. Сколема [19]. По общему замыслу она существенно отличается от работ Брауэра и Вейля, хотя и близка к ним в некоторых отношениях. Эта работа Сколема явилась одним из результатов его поисков путей построения математических теорий, свободных от парадоксов (в частности, от парадоксов, обнаруженных в первоначальном варианте теории множеств). Об основополагающей работе Сколема в области рекурсивной арифметики и о дальнейшем развитии рекурсивной арифметики речь уже шла в § 1. Весьма существенна общая программная идея этой работы — идея построения математических теорий на основе бесквантворных (или иных, но как можно более простых) языков — таких языков, в которых суждения допускают достаточно отчетливое понимание.

Гудстейн распространил (воспользовавшись языком, в котором допускаются неограниченные кванторные комплексы, но не допускаются сложные сочетания логических связок) программную идею Сколема и на математический анализ — это распространение ему удалось осуществить при помощи весьма интересных и своеобразных конструктивных аналогов понятия равномерно непрерывной (в сегменте с рациональными концами) функции и понятия k раз равномерно дифференцируемой (в таком же сегменте) функции (см. § 9 этой статьи)*).

*) Характер этих конструктивных аналогов таков, что конструктивные функции упомянутых типов в смысле Гудстейна естественно называть «аппроксимативно определенными конструктивными функциями».

Подход к построению конструктивного математического анализа, разработанный Гудстейном, был первым последовательно конструктивным и обстоятельно исследованным подходом *), фактически продемонстрировавшим свою результативность на довольно обширном материале. Главная особенность этого подхода — его тесная связь с упомянутой программной идеей Сколема. Эта связь проявляется в том, что рассматриваемые утверждения формулируются на языке, не использующем сложных комбинаций логических связок, и допускают благодаря этому достаточно отчетливое понимание.

Кроме подхода, предложенного Гудстейном, разрабатываются и другие подходы. Значительное развитие получил подход, основы которого были разработаны А. А. Марковым. На формирование этого подхода сильное влияние оказало стремление оперировать такими конструктивными аналогами понятий традиционного (классического) математического анализа, которые были бы возможно ближе по форме к их „прообразам“ **). Однако для достижения этой цели во многих случаях приходится пользоваться формулировками, имеющими более сложную логическую структуру, чем в рекурсивном анализе Гудстейна. В качестве первых литературных источников для ознакомления с этим подходом и полученными на его основе результатами можно рекомендовать работы А. А. Маркова и его учеников, опубликованные в четырех сборниках под общим названием «Проблемы конструктивного направления в математике» ([13] — [16]). В этих же сборниках содержатся и работы по конструктивной математической логике, тесно

*) Первые публикации Гудстейна вышли в свет в 1945 и 1950 гг. (см. [6], [7]).

**) Такой характер имеет, в частности, предложенный А. А. Марковым и исследованный им конструктивный аналог общеупотребительного в классической математике понятия вещественной функции вещественной переменной (понятия отображения множества всех вещественных чисел или его подмножества в множество всех вещественных чисел) — см. работу А. А. Маркова «О конструктивных функциях» ([13]). Конструктивные функции в смысле А. А. Маркова естественно называть «точечно определенными конструктивными функциями».

связанные с представленным в них вариантом конструктивного математического анализа. Общей основой всех только что упомянутых работ является монография А. А. Маркова «Теория алгорифмов» ([11]).

При построении конструктивного математического анализа на основе определений, имеющих „достаточно сложную“ логическую структуру, возникают серьезные осложнения принципиального характера: несмотря на определенные успехи, достигнутые в проблеме конструктивного истолкования математических суждений, в вопросе о конструктивном понимании „достаточно сложных“ математических суждений до настоящего времени нет желаемой ясности. Поэтому общий замысел Сколема и его конкретные реализации (в частности, рекурсивный анализ Гудстейна) заслуживают пристального внимания. По мнению автора этой статьи, в настоящее время сложились реальные предпосылки для сближения подхода, сложившегося в научной школе А. А. Маркова, и подхода Р. Л. Гудстейна.

§ 3. Первые стимулы к разработке конструктивного математического анализа имели (как уже отмечено выше) методологический характер — к поискам новой базы для математического анализа побуждали характер идеализаций, используемых при теоретико-множественном способе мышления, и степень разрыва между этими идеализациями и „экспериментально осязаемыми“ понятиями, при помощи которых в экспериментальных науках описываются реальные объекты и явления. Однако в процессе разработки конструктивного математического анализа выяснилось, что имеются и серьезные стимулы практического характера, связанные с недостаточностью информации, которую может предоставлять классический математический анализ при рассмотрении вопросов вычислительного характера.

Классический математический анализ, основанный на представлениях об актуально бесконечных множествах, и его разнообразные обобщения, также основанные на этих представлениях (функциональный анализ, топология и др.), оказались весьма плодотворными инструментами исследования природы и практической деятельности

людей, несмотря на большой произвол человеческого воображения, допускаемый при формировании представлений об актуально бесконечных множествах. Это утверждение касается математического анализа и его обобщений, рассматриваемых в целом. При рассмотрении этих же разделов математики по частям и в деталях приходится констатировать, что различные понятия и теоремы и даже различные фрагменты теорий во многих случаях радикально отличаются друг от друга и по их роли в работоспособных в целом разделах математики, и с точки зрения возможности какого-либо экспериментально осязаемого истолкования. Примером теоремы, для которой невозможно предложить какое-либо экспериментально осязаемое истолкование, может служить следующая теорема Хаусдорфа (озадачивающая даже самых ортодоксальных приверженцев теоретико-множественного способа мышления): «Существуют такие подмножества P, Q, R, S трехмерного шара K, что 1) любая пара этих множеств имеет пустое пересечение, 2) объединение этих четырех множеств совпадает с K, 3) трехмерная мера Лебега множества S равна нулю, 4) каждое из множеств P, Q, R конгруэнтно каждому из остальных двух множеств, 5) множество P конгруэнтно объединению множеств Q и R» *).

Но математики, придерживающиеся мнения об удовлетворительности теоретико-множественной логической базы математического анализа, обычно игнорируют такого рода „сюрпризы“ теории множеств и подчеркивают действенность всей теории в целом, многочисленность и разнообразие тех теорем классического математического анализа, которые фактически оказываются полезными при решении задач, выдвигаемых естествознанием и практической деятельностью людей.

Но действительно ли „работоспособность“ математического анализа, например, в традиционных областях его приложений, не оставляет желать лучшего?

В приложениях математики систематически встречаются задачи (предусматривающие, вообще говоря, варьирование исходных данных), в которых как исход-

*) См., например, [12], гл. XI, § 5.

ные данные, так и искомые объекты представляют собой некоторые „конкретные информации“, т. е. знакосочетания некоторых типов, играющие „достаточно осязаемые“ роли при знаковом моделировании наблюдаемых или представляющихся возможными ситуаций, процессов и т. п. Примерами таких „конкретных информаций“ могут служить натуральные числа, рациональные числа, списки и матрицы, составленные из рациональных чисел, схемы алгорифмов *) (например, схемы конструктивных вещественных чисел, схемы конструктивных функций, ставящих в соответствие рациональным или конструктивным вещественным числам рациональные или конструктивные вещественные числа, схемы алгорифмов, представляющих собой последовательности таких функций), списки и матрицы, составленные из схем алгорифмов, и т. п.

В задачах, о которых здесь идет речь, желательно иметь алгорифм, дающий возможность по любой исходной „конкретной информации“ построить искомую „конкретную информацию“, т. е. построить знакосочетание определенного типа, находящееся в определенном отношении к предъявленному исходному знакосочетанию.

При обсуждении какой-либо конкретной задачи рассматриваемого сейчас типа прежде всего возникает вопрос: возможен ли желаемый алгорифм? При отрицательном ответе на этот вопрос возникают дополни-

*) В дальнейшем изложении, применяя термин «алгорифм» без каких-либо уточняющих пояснений, мы всегда будем иметь в виду одно из тех точно охарактеризованных понятий, которые рассматриваются в настоящее время как математические понятия, пригодные для стандартизации общего описательно определяемого понятия алгорифма (это означает, что любой алгорифм рассматриваемого точно охарактеризованного типа можно моделировать посредством некоторой машины Тьюринга, и обратно). Говоря о схемах алгорифмов как о примерах „конкретных информаций“, мы имеем в виду как алгорифмы какого-либо универсального (в только что указанном смысле) типа, так и алгорифмы того или иного более узкого, но точно охарактеризованного типа, достаточные для математического моделирования рассматриваемых реальных ситуаций. Одним из элементов точной характеризации алгорифмов какого-либо конкретного типа является определение схем алгорифмов, т. е. определение тех знакосочетаний, которые играют роль описаний конкретных алгорифмов рассматриваемого типа.

тельные вопросы. В частности, нельзя ли алгорифмически получать искомые результаты, добавляя к исходным данным некоторые дополнительные „конкретные информации"? (В дальнейшем изложении этот вопрос и предыдущий рассматриваются как варианты вопроса о достаточных исходных данных.) Нельзя ли при тех же исходных данных алгорифмически получать некоторую существенную часть искомого результата или же некоторую „конкретную информацию", способную заменить в том или ином отношении искомую? Не обстоит ли дело так, что подобные надежды несостоятельны и могут быть разрушены подходящими примерами или рассуждениями?

При рассмотрении этих вопросов на основе классической математики часто используют в качестве ориентиров параметрические теоремы существования, т. е. утверждения вида:

«Каков бы ни был объект X типа P, существует объект Y типа Q такой, что X и Y удовлетворяют условию U». (1)

При этом в качестве понятий, обозначенных здесь символами P и Q, обычно фигурируют некоторые понятия, основанные на общих понятиях теории множеств.

Математик, выбирая в качестве ориентира некоторую теорему вида (1), обычно руководствуется надеждой, что окажется доказуемой следующая модификация теоремы (1):

«Каков бы ни был объект X' типа P', можно построить объект Y' типа Q' такой, что X' и Y' удовлетворяют условию U'». (2)

Здесь P' и Q' обозначают некоторые конструктивные понятия (типы „конкретных информаций"), являющиеся с точки зрения классической математики частными случаями соответственно понятий P и Q и в то же время воспринимаемые как подходящие (с той или иной точки зрения) конструктивные аналоги понятий P и Q; U' обозначает условие, получаемое в результате „конструктивного прочтения" условия U. Более того, в таких

случаях математик обычно надеется, что из доказательства теоремы (1) удастся „извлечь" некоторый конструктивный метод (алгорифм), дающий возможность обосновать утверждение (2) при следующем истолковании этого утверждения:

«Можно указать конструктивный метод (алгорифм) F, строящий по любому конструктивному объекту X' типа P' конструктивный объект $F(X')$ типа Q' такой, что X' и $F(X')$ удовлетворяют условию U'». (3)

Однако хорошо известно, что далеко не всякая параметрическая теорема существования оправдывает эту надежду. Уже давно математики стремятся различать „эффективные" теоремы существования и, так сказать, „чистые" теоремы существования. Давно известно, что использование в доказательстве теоремы (1) рассуждения «от противного» может оказаться неодолимым препятствием к извлечению из ее доказательства желаемого метода построения. Позже выяснилось, что применение в доказательстве теоремы (1) закона исключенного третьего к условию, не допускающему алгорифмической проверки, также может оказаться таким неодолимым препятствием. Еще позже выяснилось, что „источники неэффективности" (в указанном смысле) параметрических теорем существования не исчерпываются упомянутыми „опасными" логическими средствами; при этом характер некоторых „источников неэффективности" оказался неожиданным. Рассмотрим, например, следующую параметрическую теорему существования (теорему о полноте континуума):

«Какова бы ни была фундаментальная последовательность вещественных чисел φ, существует вещественное число x, являющееся пределом последовательности φ». (4)

Чтобы иметь дело с понятиями классической математики, достаточно удобными для перехода к соответствующим конструктивным понятиям, мы будем основываться на следующих определениях. *Вещественным числом* называется всякая последовательность рацио-

нальных чисел f, для которой существует *регулятор сходимости в себе*, т. е. существует последовательность натуральных чисел g такая, что, каковы бы ни были натуральные числа i, k, l,

$$\text{если } k \geqslant g(i) \text{ и } l \geqslant g(i), \text{ то } |f(k) - f(l)| < 2^{-i}.$$

Последовательностью вещественных чисел называется всякая двойная последовательность рациональных чисел φ, удовлетворяющая следующему условию: существует двойная последовательность натуральных чисел ψ такая, что, каковы бы ни были натуральные числа n, i, k, l,

$$\text{если } k \geqslant \psi(n, i) \text{ и } l \geqslant \psi(n, i), \text{ то } |\varphi(n, k) - \varphi(n, l)| < 2^{-i}.$$

(В варианте теории множеств, использующем аксиому выбора, эти определения эквивалентны обычно используемым определениям понятий вещественного числа и последовательности вещественных чисел.) Всякую двойную последовательность натуральных чисел ψ, обладающую указаным свойством, будем называть *последовательностью, сопряженной с* φ.

Доказательство теоремы (4), которое может претендовать на указание конструктивного метода построения искомого вещественного числа при конструктивном исходном данном φ, проводится следующим образом. Пусть φ — фундаментальная последовательность вещественных чисел. Тогда существует (хотя бы одна) последовательность, сопряженная с φ. Пусть ψ — какая-либо последовательность, сопряженная с φ. Тогда функция χ такая, что $\chi(n) = \varphi(n, \psi(n, n))$, представляет собой фундаментальную последовательность рациональных чисел, т. е. вещественное число, и это вещественное число является пределом последовательности вещественных чисел φ.

Если φ' — конструктивная последовательность конструктивных вещественных чисел, т. е. алгорифм, для которого может быть построен сопряженный с ним алгорифм (сопряженная с φ' алгорифмическая последовательность), и если ψ' — какой-либо алгорифм, сопряженный с φ', то алгорифм χ' такой, что $\chi'(n) = \varphi'(n, \psi'(n, n))$, представляет собой алгорифмическую

последовательность рациональных чисел. Можно доказать, что если φ' — фундаментальная в конструктивном смысле последовательность вещественных чисел, то χ' является фундаментальной в конструктивном смысле последовательностью рациональных чисел и конструктивное вещественное число χ' является пределом в конструктивном смысле последовательности φ'. Может показаться, что описан конструктивный метод (алгорифм), строящий по любому алгорифму φ' указанного типа искомое конструктивное вещественное число. Однако в действительности алгорифм χ' построен не по одному алгорифму φ', а по паре исходных данных — по алгорифмам φ' и ψ', находящимся в определенном отношении. При этом в проведенном рассуждении никакой конкретный способ построения алгорифма ψ' по алгорифму φ' не указан и построение алгорифма χ' проведено при предположении, что как-либо угадан алгорифм, сопряженный с φ', что этот алгорифм как-то выделен среди всевозможных алгорифмов, сопряженных с φ'. Таким образом, проведенное рассуждение обосновывает не утверждение вида (3), сформулированное применительно к (4), а лишь следующее более слабое утверждение:

> «Можно указать алгорифм, строящий по любой паре алгорифмов φ', ψ' такой, что φ' является фундаментальной (в конструктивном смысле) последовательностью конструктивных вещественных чисел, а ψ' представляет собой алгорифм, сопряженный с φ', некоторое конструктивное вещественное число, являющееся пределом (в конструктивном смысле) последовательности φ'». (5)

В связи со сказанным заметим, что используемые в конструктивной математике правила конструктивного истолкования математических суждений (правила построения *конструктивной расшифровки*) таковы, что лишь в некоторых случаях конструктивной расшифровкой утверждения (2) оказывается утверждение (3). Вид конструктивной расшифровки утверждения (2) существенно зависит (в частности) от логического типа условия,

характеризующего понятие P'. Вообще говоря, конструктивная расшифровка утверждения (2) имеет вид более сложный, чем (3). Примером утверждения вида (2), для которого имеет место как раз такая ситуация, может служить следующий конструктивный аналог утверждения (4):

«Какова бы ни была конструктивная фундаментальная (в конструктивном смысле) последовательность конструктивных вещественных чисел φ', можно построить конструктивное вещественное число x', являющееся пределом (в конструктивном смысле) последовательности φ'». (6)

Оказывается, что конструктивная расшифровка утверждения (6) такова, что, обосновав утверждение (5), мы тем самым обосновали и утверждение (6).

Возвращаясь к проведенному выше рассуждению [результатом которого было обоснование утверждения (5)], заметим, что мы могли бы не считать ψ' отдельно задаваемым исходным данным для построения искомого предела алгорифмической последовательности φ' и ограничиться одним исходным данным φ', если бы удалось указать конструктивный метод (алгорифм), строящий по всякому алгорифму φ' рассматриваемого сейчас типа некоторый конкретный алгорифм, сопряженный с φ'. Для конструктивных последовательностей некоторых частных типов такой конструктивный метод действительно возможен (например, для последовательностей, определяемых равенствами вида

$$\varphi'(n, k) = \rho(n) + \sum_{l=1}^{k} \tau(n, l) \cdot 10^{-l},$$

где ρ — алгорифмическая последовательность целых чисел и τ — двойная алгорифмическая последовательность натуральных чисел такая, что $0 \leqslant \tau(n, l) \leqslant 9$ при любых n и l). Частные случаи такого рода могут создать впечатление, что и в любом случае второе исходное данное является лишним в том смысле, что его можно получить алгорифмическим методом из первого. Однако

в действительности это не так — *невозможен алгорифм, строящий по любой конструктивной фундаментальной* (в конструктивном смысле) *последовательности конструктивных вещественных чисел* (предъявленной без какой-либо сопряженной с ней алгорифмической последовательности!) *такое конструктивное вещественное число, которое является пределом этой последовательности* (это доказал Б. А. Кушнер [10] *)).

Однако в классической математике теорема (4) рассматривается как достаточное основание для введения „операции“ предельного перехода lim, у которой исходными данными считаются фундаментальные последовательности вещественных чисел без какой-либо дополнительной информации, и этим способом совершается переход от отношения «число x является пределом последовательности вещественных чисел φ» и от построения теории пределов в предикатной форме (т. е. на основе этого отношения) к „операции“ lim и к „операторной“ форме построения этой теории. Переход к этой „операции“ представляет собой шаг, который сразу усложняет ориентировку в вопросе о достаточных исходных данных **). Такой шаг совершается уже в самом начальном „этаже“ классического математического анализа. Шаги такого же рода систематически и в последовательно усложняющихся формах

*) Значительно раньше этой теоремы была установлена следующая теорема (родственная с упомянутой в некоторых отношениях): *«Невозможен алгорифм, строящий по любой конструктивной фундаментальной (в конструктивном смысле) последовательности рациональных чисел* (предъявленной без какого-либо алгорифмического регулятора сходимости в себе!) *некоторый алгорифмический регулятор сходимости в себе рассматриваемой последовательности».* Эта теорема опубликована в 1958 году Гудстейном [8] (доказательство проведено Гудстейном недостаточно детально); этот же результат (с точным доказательством) был доложен Г. С. Цейтиным в 1955 году в Ленинградском семинаре по математической логике и опубликован в его работе «Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе» ([14]).

**) Ситуация существенно меняется, если переход к операции предельного перехода осуществляется на основе теоремы (5) — именно так вводится операция предельного перехода в конструктивном математическом анализе [эта операция определяется для пар алгорифмов φ', ψ' указанного в теореме (5) типа].

происходят и на всех более высоких „этажах“ математического анализа, например, в связи с отношениями «число x является точной верхней границей непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции F», «число x является интегралом Римана функции G в сегменте $[a, b]$», «функция V является производной функции U» и т. д. — вводимые в классической математике „операции“, соответствующие этим отношениям, имеют такой же характер, как и „операция“ предельного перехода.

Эти шаги в процессе развертывания математических теорий разными способами переплетаются друг с другом (а также с применениями упомянутых выше „опасных“ логических средств) и в целом приводят к такому положению, когда математик лишается возможности правильно и отчетливо ориентироваться в вопросе о достаточных исходных данных и в других связанных с ним вопросах.

Теорема (4) представляет собой пример такой теоремы классической математики, буквальный перевод которой на язык „конкретных информаций“ (т. е. на язык конструктивной математики) *) является теоремой конструктивной математики. В то же время весьма многие теоремы классического математического анализа (в частности, весьма многие параметрические теоремы существования) оказываются в значительно менее благополучном положении, чем теорема (4). Использование в классической математике без каких-либо ограничений закона исключенного третьего, рассуждений «от противного» и некоторых других логических средств часто приводит к таким параметрическим теоремам существования и теоремам иных типов, буквальные конструктивные аналоги которых оказываются опровержимыми утверждениями **). Постепенно выяснилось, что для весьма многих параметрических теорем существования (и теорем иных типов), имеющихся в классическом математическом анализе, доказуемы лишь приблизитель-

*) Буквальным переводом на язык конструктивной математики (а также буквальным конструктивным аналогом) конкретного утверждения вида (1) называется соответствующее утверждение вида (2).

**) В логическом выводе теоремы (4) упомянутые логические средства не используются.

ные конструктивные аналоги, а для некоторых теорем невозможны даже „умеренно отдаленные“ доказуемые конструктивные аналоги.

Гудстейном были найдены приблизительные, но вполне удовлетворительные с прагматической точки зрения доказуемые конструктивные аналоги теоремы Коши о существовании корня у любой меняющей свой знак непрерывной функции, теорем Ролля, Лагранжа и Тейлора (см. «Рекурсивный анализ»). В упомянутой выше работе Г. С. Цейтина имеются иные, чем у Гудстейна, доказуемые приблизительные конструктивные аналоги теорем Коши, Ролля и Лагранжа; там же доказана невозможность алгорифмов, осуществимость которых утверждают конструктивные расшифровки буквальных конструктивных аналогов упомянутых теорем классической математики [такие опровержения утверждений вида (2) иногда называют опровержениями «в слабом смысле»], и доказана невозможность опровержения этих же конструктивных аналогов «в сильном смысле», т. е. посредством предъявления конкретного примера, опровергающего общее утверждение.

Примером параметрической теоремы существования, которая не имеет даже „умеренно отдаленного“ доказуемого конструктивного аналога и для которой буквальный конструктивный аналог может быть опровергнут «в сильном смысле», является теорема о существовании предела любой монотонной и ограниченной последовательности вещественных чисел. Э. Шпеккер [21] построил конкретную монотонную и ограниченную алгорифмическую последовательность рациональных чисел, для которой невозможен алгорифмический регулятор сходимости в себе. Ни одно конструктивное вещественное число не является пределом этой последовательности. Для теоремы о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности вещественных чисел удается найти лишь весьма отдаленный доказуемый конструктивный аналог, использующий понятие конструктивного вещественного псевдочисла.

Поиски доказательств и опровержений («в слабом смысле» и «в сильном смысле») „близких“ и „отдаленных“ конструктивных аналогов различных параметриче-

ских теорем существования и теорем иных типов, имеющихся в классическом математическом анализе, выявили наличие обширного спектра разнообразных ситуаций, возникающих при попытках „конструктивизации" совершенно однотипных с точки зрения классической математики теорем, — две однотипные теоремы могут радикально отличаться друг от друга по своей потенциальной „работоспособности" в качестве ориентиров для правильных ответов на вопросы, касающиеся связей алгорифмического характера между различными „конкретными информациями", и, в частности, для правильного ответа на вопрос о достаточных исходных данных.

Однако эти вопросы постоянно возникают во многих разделах математики. В некоторых случаях на них удается находить удовлетворительные ответы. Но возможности, предоставляемые классической математикой для поиска ответов на эти вопросы, весьма ограничены, особенно при анализе сложных ситуаций. На практике обычно выручают не какие-либо точно формулируемые теоремы классической математики, а лично приобретенный опыт и выработанная на его основе интуиция (подсказывающая, в частности, реалистичные модификации постановок задач), выручают и индивидуальные особенности рассматриваемых конкретных задач, дающие возможность в отдельных случаях „непосредственно усматривать" необходимую, но не предусматриваемую теоремами классической математики дополнительную информацию. В рамках классической математики принципиально невозможно достичь желаемой ясности в упомянутых вопросах, из-за того, что в ней конструктивные понятия рассматриваются, вообще говоря, как ничем не примечательные частные случаи соответствующих теоретико-множественных понятий, из-за отвлечения от особенностей различных типов определений конструктивных понятий, из-за слишком большой „свободы" при выборе идеализаций и формировании понятий, а также при выборе средств логического вывода теорем.

Конструктивный математический анализ представляет собой особый вариант математического анализа, который специально строится так, чтобы на любом „этаже" математического „здания" обеспечивалась правильная и отчетливая ориентировка в связях алгорифмического характера между „конкретными информациями" и, в частности, в вопросе о достаточных исходных данных, обеспечивалось корректное введение операций на основе параметрических теорем существования и аналогичных им теорем. Постепенно выяснилось, что для достижения этих целей необходим ряд предпосылок.

Во-первых, необходима новая система понятий, основанная в значительной степени на понятии алгорифма (а также на понятии порождаемого множества). Существенно новым явлением, в сравнении с классической математикой, оказалось систематическое введение в качестве объектов изучения наборов конструктивных объектов, не имеющих прямых аналогов в классической математике, — таких наборов, которые оказываются подходящими исходными данными для конструктивных операций (алгорифмов), соответствующих тем или иным отношениям, и дают возможность развивать не только предикатный вариант той или иной теории (т. е. вариант, излагаемый при помощи отношений), но и ее операторный вариант. Примером может служить введение в качестве объектов изучения пар алгорифмов, о которых говорится в утверждении (5).

Во-вторых, для достижения упомянутой цели необходимо особое конструктивное понимание логических связок, прежде всего связок «существует» и «или». Новый смысл связки «существует» выражается словами «потенциально осуществим» или же словами «можно построить». Необходимо также особое конструктивное понимание сочетаний логических связок в суждениях. На этом понимании основан *алгорифм выявления конструктивной задачи* (*алгорифм построения конструктивной расшифровки*)*), имеющий существенное значение для правильной ориентировки в вопросе о достаточных исходных данных.

В-третьих, необходим особый аппарат логического вывода, основанный на конструктивном понимании

*) См. статью Н. А. Шанина «О конструктивном понимании математических суждений» ([13]).

суждений. Этот аппарат ощутимо отличается от аппарата логического вывода классической математики.

Все это в целом приводит к тому, что переосмысливание какой-либо уже сложившейся математической теории на конструктивной основе является, в общем, сложной задачей, требующей в ряде случаев серьезных технических средств конструктивной математики и часто таящей в себе много неожиданностей. По существу, приходится строить новую теорию с резко выраженной спецификой, и при таком построении исходная теория классической математики может служить лишь приблизительным ориентиром. Уже подбор удовлетворительных конструктивных аналогов для основных понятий, отношений и операций классического математического анализа представляет собой в ряде случаев сложную задачу, решение которой часто достигается лишь посредством корректирований в процессе развития теории. Этот подбор наталкивается на тонкости, не проявляющиеся в классической математике. Он осложняется тем, что эквивалентные в классической математике понятия во многих случаях приводят к неэквивалентным конструктивным аналогам. В этих случаях приходится или искать веские основания для предпочтения одного из вариантов, или искать веские основания для параллельной разработки нескольких теорий, соответствующих различным конструктивным аналогам одного и того же понятия.

Кроме того, необходимо корректно осуществить выбор таких понятий, на основе которых возможно построение основных разделов теории в операторной форме, которая для приложений безусловно предпочтительнее предикатной формы.

Конкретная теория классической математики, оказавшаяся плодотворной в приложениях, представляет собой теоретическую модель, отвечающую на определенные запросы естественных или иных наук. Конструктивная математика предлагает вместо этой модели теоретическую модель иного типа, разрабатываемую так, чтобы она удовлетворяла тем же самым запросам, но более полноценно, чтобы она предоставляла возможность правильно и отчетливо ориентироваться в связях алгорифмического характера между „конкретными информациями“. Важно подчеркнуть, что такие преимущества перед соответствующей теорией классической математики достигаются в результате перехода к рассмотрению лишь конструктивно определяемых объектов и одновременного отказа от использования представлений об актуально бесконечных множествах — эти методологические принципы, вводя математическое мышление в русло более „осязаемых“, чем в классической математике, понятий и уменьшая произвол человеческого воображения, приводят к таким усовершенствованиям математических теорий, которые могут облегчить применение математики к задачам прикладного характера. Направленность какой-либо теории классической математики и ее конструктивного варианта на моделирование одних и тех же связей между реальными предметами, явлениями, процессами и т. п. обычно приводит к тому, что конструктивный вариант во многих своих частях оказывается внешне похожим на исходную теорию классической математики. Однако упомянутые выше серьезные дополнительные требования, предъявляемые к теориям конструктивной математики, в значительном числе случаев приводят к существенным, иногда радикальным расхождениям даже во внешнем облике теоретических моделей, предлагаемых для одной и той же ситуации конструктивной математикой и классической математикой.

§ 4. Переосмысливание на основе принципов конструктивной математики уже сформировавшихся разделов классической математики составляет лишь одно из направлений развития конструктивной математики. Интенсивно развиваются и математические теории, формирующиеся под воздействием проблем, специфичных именно для конструктивной математики. „Три кита“, на которых основывается конструктивная математика, — теория порождаемых множеств конструктивных объектов (называемая также общей теорией исчислений), теория алгорифмов и конструктивная математическая логика — представляют собой ветви математики, не имеющие „близких родственников“ в классической

математике. В этих сравнительно новых ветвях математики уже достигнуты значительные успехи.

В частности: аппараты теории алгорифмов и общей теории исчислений доведены до высокого уровня „технической оснащенности“ *), обстоятельно исследованы связи между различными вариантами этих аппаратов; огромную роль в разъяснении ряда коренных вопросов оснований математики сыграл созданный К. Гёделем конструктивный метод арифметизации формально-дедуктивных систем и арифметической интерпретации понятия выводимости; широкую известность получили теоремы о невозможности алгорифмов, решающих некоторые (длительное время привлекавшие внимание математиков) массовые проблемы теории логических и логико-математических исчислений, алгебры, топологии, математического анализа и других разделов математики; значительные результаты достигнуты в изучении различных способов сведения одних массовых проблем к другим и в исследовании иерархии „сложностей“ массовых проблем; введение в обиход математики разнообразных критериев сложности конструктивных объектов (например, алгорифмов) и конструктивных процессов (например, процессов применения алгорифмов к исходным данным) привело к формированию новых многообещающих направлений исследований, уже зарекомендовавших себя серьезными результатами; шаг за шагом уточнялись и углублялись принципы конструктивного понимания математических суждений о конструктивных объектах; были разработаны и получили значительное развитие аппараты логического вывода, согласованные с конструктивным пониманием математических суждений.

Специфическая проблематика упомянутых базисных разделов конструктивной математики и достигнутые здесь успехи не отодвигают на задний план задачу переосмысливания на конструктивной основе все новых и новых разделов классической математики (как уже

*) Особенно принципиальным результатом в этой области является теорема о существовании универсального алгорифма (первый вариант этой теоремы принадлежит А. М. Тьюрингу).

сформировавшихся, так и формирующихся в настоящее время) *). Решать эту задачу во все большем и большем объеме побуждают как соображения, изложенные выше в § 3, так и серьезность давно беспокоящей многих математиков методологической проблемы, сформулированной в приведенном выше (в § 2) высказывании Гильберта. Обратим сейчас внимание именно на эту методологическую проблему.

Естественно возникает подозрение, что в тех случаях, когда какая-либо конкретная теория классической математики (или какая-либо часть обширной теории классической математики) оказывается „работоспособной“ в некоторой области приложений (т. е. оказывается способной предоставлять некоторые ориентиры), „далеко идущие“ идеализации (прежде всего представления об актуально бесконечных множествах) представляют собой дезориентирующие излишества принятого способа математического моделирования реальных явлений. Возникает подозрение, что „источниками работоспособности“ такой теории (или такой части теории) являются некоторые „достаточно осязаемые“ понятия и отдельные объекты, которые или фигурируют в рассматриваемой теории в качестве самостоятельно используемых понятий (соответственно объектов)**), или воспринимаются в классической математике как ничем не примечательные частные случаи некоторых фигурирующих в рассматриваемой теории математических и логических понятий (или некоторых модификаций таких понятий), но отличаются от последних тем, что при их формировании допускается существенно меньший произвол воображения, чем при формировании охватывающих их более общих

*) Процесс развития базисных разделов конструктивной математики и процесс переосмысливания на конструктивной основе классической математики стимулируют и обогащают друг друга, и именно сочетание этих двух процессов формирует облик конструктивной математики в целом.

**) Простыми примерами таких понятий и конкретных объектов могут служить понятия натурального и рационального числа, понятие полинома с рациональными коэффициентами, алгорифмически определяемые иррациональные числа π, $\sqrt{2}$, e, алгорифмы, определяющие коэффициенты разложений в степенные ряды функций $\sin x$, e^x и т. п.

понятий *). Представляется правдоподобным, что эти „достаточно осязаемые", но, быть может, отдельно не выделяемые понятия и объекты, хотя и теряют свое специфическое „лицо" на фоне охватывающих их более общих понятий (в результате того, что теория в целом ориентирована на эти более общие понятия и строится на основе характерных для них „далеко идущих" идеализаций), но все же в некоторых ситуациях проявляют (быть может, лишь частично и в деформированном виде) свои „потенциальные возможности". Эти предположения рождают надежду, что „работоспособная" в приложениях теория классической математики может быть усовершенствована посредством ограничения такого рода частными случаями математических и логических понятий и посредством как можно более полного и отчетливого выявления их „потенциальных возможностей". Надлежащая перестройка всей первоначальной теории в целом на основе учета специфических особенностей этих более „осязаемых" понятий может дать (как показывает уже накопленный в математике опыт) не только методологический эффект — она может привести к существенному повышению „качества ориентирования" в математических проблемах, связанных с областью применений первоначальной теории.

Общий замысел конструктивной математики и его конкретные воплощения представляют собой определенные выражения такого рода надежд и устремлений. При реализации этих устремлений естественно желание получать такие теории конструктивной математики, кото-

*) Например, на роли подходящих (при определенных ситуациях) частных случаев понятия вещественного числа могут претендовать: понятие конструктивного (алгорифмически определенного) вещественного числа, основанное на понятии общерекурсивной функции или на каком-либо ином эквивалентном ему понятии алгорифма, понятие примитивно рекурсивного вещественного числа, понятие элементарно рекурсивного (в смысле Л. Кальмара) вещественного числа и др. Еще плодотворнее оказываются аналогичные конструктивные частные случаи такой модификации классического понятия вещественного числа, при которой вещественным числом называется любая пара функций такая, что первый член пары представляет собой последовательность рациональных чисел, а второй член является регулятором сходимости в себе этой последовательности.

рые проясняют как можно отчетливее „источники и границы работоспособности" исходных теорий классической математики (и в этом смысле как можно полнее „демистифицируют" исходные теории) при помощи как можно более „осязаемых" математических и логических понятий. Пионерская роль в разработке „достаточно осязаемых" математических и логических понятий конструктивной математики, способных удовлетворить значительный круг запросов именно этого характера, принадлежит Т. Сколему и его последователю Р. Л. Гудстейну *). Эта книга суммирует основные результаты Гудстейна.

§ 5. Много вопросов и недоумений может вызвать «Введение» к РТЧ, посвященное понятиям «натуральное число» и «счет числа членов совокупности предметов» и имеющее в значительной степени философскую тональность. Многое из того, что говорится во «Введении», непонятно автору этой статьи, многие высказывания вызвали возражения (однако эти обстоятельства не были препятствиями к пониманию дальнейших глав РТЧ!).

«Введение» начинается с замечания, что первое из упомянутых выше понятий «неуловимо, как блуждающий огонек, когда мы пытаемся определить его». Далее Гудстейн говорит о некоторых встречающихся в литературе «попытках определения» понятия «натуральное число», критикует их одну за другой и предлагает свой вариант, который, по его словам, приводит к тому, что «наконец мы обнаруживаем ответ на вопрос о природе чисел». Таким образом, речь идет не об определении некоторого понятия, которое автор считает полезным с определенной точки зрения и намерен рассматривать в дальнейшем изложении и с которым он связывает термин «натуральное число»; речь идет и не о простом констатиро-

*) Иной характер имеет выдающийся вклад Брауэра и Вейля в формирование предпосылок конструктивного направления в математике. Многие их логические и математические идеи сыграли существенную роль при формировании более широких, но в то же время и менее отчетливых (в логическом аспекте), чем у Сколема и Гудстейна, теорий конструктивной математики. Идеи Брауэра, Вейля, Сколема и Гудстейна плодотворно дополняют друг друга.

вании различий между понятием, с которым он связывает этот термин, и некоторыми другими фактически встречающимися пониманиями этого же термина, а о чем-то другом. Создается впечатление, что обсуждается вопрос: каково правильное понимание термина «натуральное число»? Точку зрения многих математиков и логиков (в частности, и автора этой вступительной статьи) на дискуссии о „правильном понимании" терминов удачно выражает следующее высказывание А. Тарского: «В большинстве случаев создается впечатление, что данная фраза *) употребляется в почти мистическом смысле, основанном на вере, что каждое слово имеет только одно „реальное" значение (нечто вроде идеи Платона или Аристотеля) и что все конкурирующие понимания действительно пытаются ухватиться за это одно значение; однако из-за того, что они противоречат друг другу, только одна попытка может быть успешной, а из этого следует, что только одно понимание является „правильным"» ([20]).

Предлагаемое Гудстейном понимание термина «натуральное число» выражено им следующей фразой: «Числа один, два, три и т. д. являются действующими лицами в игре арифметика, фигуры, которые исполняют их роли, являются числовыми знаками **), а то, что делает некоторый знак числовым знаком, соответствующим конкретному числу, — это та роль, которую он играет, ..., это правила преобразования данного знака». Никаких уточняющих пояснений о понимании им оборота речи «действующее лицо в игре арифметика» и других встречающихся в этой цитате оборотов речи Гудстейн не дает и ограничивается иллюстрацией на примере игры в шахматы. Гудстейн подчеркивает обязательность различения понятий «натуральное число» и «числовой знак». При

*) А. Тарский имеет в виду фразу «правильное понимание».

**) В английском оригинале — слово «numeral». Переводчик монографий Гудстейна, включенных в эту книгу, предпочел использовать в качестве русского синонима этого слова термин «цифра». Такой перевод представляется мне не вполне удачным, так как этот термин часто используется в качестве наименования числовых знаков того или иного конкретного типа, не расщепляющихся на более простые числовые знаки этого же типа.

этом термину «числовой знак» он придает весьма широкий смысл, о чем свидетельствует описание предлагаемого им понимания процесса счета числа членов какой-либо совокупности предметов. Это понимание таково, что даже простое созерцание какой-либо совокупности конкретных предметов, при котором игнорируются индивидуальные материальные особенности ее членов, но осознается существование некоторых различий между рассматриваемыми предметами, признается завершенным актом счета числа членов совокупности и сама рассматриваемая совокупность (например, совокупность планет солнечной системы) трактуется как числовой знак, „играющий роль" числа членов рассматриваемой совокупности. Кроме такого тривиального способа счета Гудстейн рассматривает и более сложные способы; при этом каждый из них трактуется как некоторое преобразование только что упомянутого числового знака в знак какого-либо другого типа (например, в знак вида $0 + 1 + 1 + \ldots + 1$ или в знак позиционной десятичной числовой системы и т. п.).

Автору этой статьи (и, по-видимому, читателям этой книги — тоже) не приходилось раньше встречаться с использованием термина «числовой знак» в столь широком смысле и с использованием термина «натуральное число» в столь абстрактном (и охарактеризованном Гудстейном совершенно недостаточно) смысле. Наблюдения над практикой речевого общения людей показывают, что типичной является следующая ситуация: если человек А спрашивает у человека В, сколько членов у некоторой (достаточно отчетливо охарактеризованной) совокупности предметов, то В понимает, что А не удовлетворит в качестве ответа на этот вопрос фраза «число членов есть некоторое действующее лицо игры арифметика», не удовлетворит и предложение обозреть эту совокупность, игнорируя индивидуальные особенности ее членов, не удовлетворит и предъявление списка индивидуальных наименований членов совокупности — спрашивающего удовлетворит лишь некоторое знакосочетание (или звукосочетание) одного из тех немногочисленных конкретных типов, которые фактически используются членами некоторой группы людей, в

которую входят A и B, в качестве ответов на вопросы о количестве членов конкретных совокупностей.

Одна из сильных сторон математики состоит в том, что математика способна предоставлять другим наукам и человеческой практике весьма „работоспособные" теоретические модели, „составные части" которых представляют собой знакосочетания некоторых конкретных типов, формируемые из отчетливо отличимых друг от друга „элементарных" знаков, умещающихся на небольших участках „более или менее плоских" материальных носителей*). При этом не очень обширный набор типов используемых знакосочетаний оказывается способным удовлетворять потребности в „знаковом моделировании" весьма отличающихся друг от друга во многих отношениях реальных объектов, процессов, ситуаций и т. п.

В частности, знакосочетания некоторых весьма просто характеризуемых конкретных типов (а при рассмотрении чисто теоретических вопросов — даже знакосочетания какого-либо одного подходящего типа) способны удовлетворить потребность в таком „знаковом моделировании" совокупностей реальных предметов**), которое претендует лишь на достаточно полное отражение тех свойств совокупностей предметов, которые одинаковы у чрезвычайно разнообразных, но подобных друг другу совокупностей.

Используя оборот речи «совокупность предметов P подобна совокупности предметов Q», я имею в виду (в отличие от Гудстейна) следующее операционально-физическое определение: условимся говорить, что совокупность предметов P подобна совокупности предметов Q, если осуществим утвердительно заканчивающийся процесс почленного сравнения совокупности P с совокупностью Q. Здесь *процессом почленного сравнения P с Q* называется любой осуществляемый каким-либо человеком или подходящим механизмом процесс, удовлетворяющий следующим условиям: (а) первый шаг процесса состоит в фиксировании внимания человека или соответственно воспринимающей части механизма сначала на некотором (выбираемом, вообще говоря, произвольно) члене совокупности P, а затем на некотором (выбираемом, вообще говоря, произвольно) члене совокупности Q, в запоминании некоторых индивидуальных особенностей как первого предмета, так и второго, позволяющих отличать каждый из этих предметов от всех остальных членов соответствующей совокупности, и в мысленном или каком-либо материальном соединении в упорядоченную пару комплекса запомненных признаков первого предмета и комплекса запомненных признаков второго предмета; (б) каждый новый шаг процесса производится так же, как первый, но выбор некоторого члена первой (второй) совокупности производится лишь среди тех членов первой (соответственно второй) совокупности, которые не были выделены на предыдущих шагах*); (в) процесс обрывается тогда, когда члены хотя бы одной из двух рассматриваемых совокупностей окажутся исчерпанными. Процесс будем называть *утвердительно заканчивающимся*, если в момент окончания окажутся исчерпанными члены обеих совокупностей.

Согласно сформулированному выше определению отношения подобия, для обоснования утверждения «совокупность P подобна совокупности Q» необходимо фактическое осуществление некоторого утвердительно заканчивающегося процесса почленного сравнения P с Q. Однако знание некоторых фактов и законов природы часто позволяет ограничиваться обоснованиями косвенного характера. Например, иногда практически достаточно осу-

*) В устных вариантах математических теорий такими „составными частями" являются звукосочетания, составляемые из коротких звуков.

**) Имеются в виду практически достаточно отчетливо охарактеризованные (применительно к рассматриваемой ситуации) конечные совокупности одновременно существующих и практически достаточно отчетливо охарактеризованных реальных предметов. Прилагательное «конечные» фактически является лишним, так как экспериментальное исследование природы не предоставило примера бесконечной совокупности одновременно существующих реальных объектов какого-либо отчетливо охарактеризованного типа.

*) Если совокупности P и Q имеют общие члены, то может оказаться, что некоторый предмет, уже фигурировавший до данного шага процесса в качестве выделенного члена одной из рассматриваемых совокупностей, еще не фигурировал в качестве выделенного члена другой совокупности.

ществить процесс почленного сравнения двух наборов, каждый из которых состоит из индивидуальных наименований, или „словесных портретов", или фотографий всех членов одной из двух рассматриваемых совокупностей предметов.

Типы „знаковых моделирований" конкретных совокупностей предметов варьируются в соответствии с преследуемыми целями. В некоторых случаях имеется в виду лишь присвоение членам рассматриваемой совокупности индивидуальных наименований. Процесс такого „знакового моделирования" некоторой совокупности предметов P аналогичен процессу почленного сравнения двух совокупностей, только в этом случае не обязательно наличие „в готовом виде" какой-либо совокупности знакосочетаний — в роли членов совокупности Q, выделяемых на отдельных шагах процесса почленного сравнения двух совокупностей, могут фигурировать знакосочетания какого-либо фиксированного типа *) Ω, конструируемые, когда возникает необходимость, посредством некоторой (выбираемой в рамках предварительно заданных ограничений, вообще говоря, произвольно) цепочки применений правил построения, фигурирующих в определении знакосочетаний типа Ω, или посредством осуществления какого-либо детерминированного процесса, приводящего к знакосочетанию типа Ω. Процесс обрывается тогда, когда все члены совокупности P окажутся исчерпанными.

Процессом присвоения индивидуальных наименований является, в частности, общеупотребительный процесс счета числа членов какой-либо совокупности предметов P посредством десятичных числовых знаков (этим термином здесь и ниже называются знакосочетания позиционной десятичной числовой системы). В этом процессе знакосочетание, присваиваемое в качестве индивидуального наименования очередному выделенному члену совокупности P, строится посредством определенного алгорифма из знакосочетания, присвоенного некоторому члену совокупности P на непосредственно предшествующем шаге процесса (на первом шаге процесса строится знак 1), и, следовательно, процесс построения последовательно „вводимых в действие" знакосочетаний детерминирован.

*) См. подстрочное примечание **) на стр. 22.

Гудстейн утверждает, что такое описание процессов счета посредством десятичных числовых знаков не выявляет «истинной природы счета». Его описание процесса счета посредством десятичных числовых знаков состоит в следующем. Сначала рассматриваемая совокупность предметов трактуется как исходный числовой знак и этот числовой знак преобразуется в некоторое знакосочетание (трактуемое тоже как числовой знак), имеющее вид схематичной копии исходного числового знака, например в знакосочетание, имеющее вид «один и один и... и один», или в ряд черточек $\| \ldots |$, или в знакосочетание вида $a\&b\& \ldots \&k$, где $a, b, \ldots, k$ — буквы, играющие роль индивидуальных наименований членов рассматриваемой совокупности. Искомый десятичный числовой знак, играющий роль числа членов рассматриваемой совокупности, получается в результате преобразования посредством подходящего рекурсивного процесса полученной схематичной копии исходного числового знака, и лишь с чисто практической точки зрения можно считать, что процесс построения искомого десятичного числового знака протекает одновременно с процессом построения схематичной копии исходного числового знака.

Однако опыт показывает, что процесс построения схематичной копии рассматриваемой совокупности предметов осуществляется людьми лишь в редких случаях. Обычно он не фигурирует даже в воображении, но это ничуть не мешает людям считать число членов совокупности. По мнению автора этой статьи, рассмотрение упомянутого процесса в качестве обязательной (в принципе) части любого нетривиального *) процесса счета числа членов совокупности представляет собой искусственную идеализацию; эта идеализация оказалась одним из источников следующего тезиса Гудстейна: любой нетривиальный процесс счета числа членов совокупности предметов представляет собой процесс преобразования исходного числового знака (т. е. рассматриваемой совокупности предметов) в числовой знак другого типа,

*) См. стр. 45.

играющий роль того же самого натурального числа, что и исходный числовой знак.

В связи с этим тезисом Гудстейна и в связи с предложенным Гудстейном чрезвычайно широким пониманием термина «числовой знак» хочется обратить внимание читателей на следующие два обстоятельства. (а) Процессы, посредством которых осуществляются преобразования схематичных копий исходных числовых знаков в десятичные числовые знаки, определяются некоторыми алгорифмами, и, следовательно, эти процессы детерминированы. Совершенно иначе охарактеризованы процессы преобразования исходных числовых знаков (т. е. разнообразных совокупностей предметов) в их схематичные копии — каждый из этих процессов представляет собой или включает в себя процесс присвоения индивидуальных наименований всем членам рассматриваемой совокупности (например, наименований |, ||, ||| и т. д.), и из описаний этих процессов невозможно исключить разрешение актов произвольного выбора тех членов рассматриваемой совокупности, на которых фиксируется внимание при выполнении очередных шагов процесса; процессы этого типа в принципиальном отношении ничем не отличаются от процессов непосредственного наименования членов рассматриваемой совокупности десятичными числовыми знаками. (б) Рассмотрение произвольных совокупностей предметов в качестве числовых знаков вызывает вопрос: какой числовой знак естественно считать суммой двух таких числовых знаков, если две рассматриваемые совокупности имеют общие члены? Если для определения суммы придется предварительно преобразовывать исходные числовые знаки, например, в отдельно расположенные ряды черточек, то какова реальная польза от столь широкого понятия?

Одно из широко распространенных пониманий термина «натуральное число» (упоминаемое Гудстейном в качестве одной из неудачных, по его мнению, «попыток определения» понятия «натуральное число») состоит в том, что натуральными числами называют знакосочетания некоторого (подходящего) конкретного типа, мысленно отождествляемые друг с другом всякий раз,

когда выполняется некоторое условие равенства знакосочетаний, игнорирующее весьма многие материальные свойства этих объектов. При этом как в повседневной жизни, так и при занятиях математикой люди, используя в различных ситуациях термин «натуральное число», часто имеют в виду знакосочетания различных типов, т. е. фактически используют различные понимания этого термина. Однако различные „знаковые“ понимания этого термина обладают некоторыми общими чертами, позволяющими обычно (но не всегда!)*) „моделировать“ одно понимание посредством других пониманий и математические теории, основанные на одном понимании, посредством математических теорий, основанных на других пониманиях. Фактически термин «натуральное число» при его „знаковом“ понимании используется как неаккуратное сокращение термина «натуральное число числовой системы **N**», где **N** — наименование некоторого конкретного типа знакосочетаний (или звукосочетаний), а термин «счет числа членов совокупности предметов» используется как неаккуратное сокращение термина «счет числа членов совокупности предметов посредством натуральных чисел числовой системы **N**» **).

Не расплывчатые и никак не поддающиеся отчетливому описанию представления, связываемые некоторыми авторами с сокращенными терминами «натуральное число» и «счет числа членов совокупности», а конструктивно или операционально определяемые понятия, называемые упомянутыми выше полными терминами, являются подлинными „действующими лицами“ арифметики и ее приложений. Фактически и Гудстейн констатирует отсут-

*) В повседневной жизни люди часто используют такое „знаковое“ понимание термина «натуральное число», при котором натуральными числами называются определенные слова разговорного языка (в русском языке — слова «ноль», «один», «два» и т. д.). Однако, ввиду отсутствия в грамматиках разговорных языков правила „сколь угодно далекого“ продолжения процессов построения терминов этого семантического типа, такое понимание термина «натуральное число» не может в необходимой для математики степени „моделировать“ используемые в математике понимания.

**) Последнее выражение означает процесс такого же типа, как описанный выше процесс счета посредством десятичных числовых знаков.

ствие „работоспособности“ у того весьма абстрактного представления, которое он связывает с термином «натуральное число» и пояснению которого он посвятил несколько страниц. Это видно из следующих слов: «*...объектом нашего изучения является не само число, а правила преобразования числовых знаков*, и в последующих главах у нас больше не будет причины рассматривать понятие числа».

При построении общетеоретических разделов арифметики достаточно остановиться на каком-либо одном варианте „знакового“ понимания термина «натуральное число», т. е. достаточно рассматривать натуральные числа какой-либо одной числовой системы: все распространенные в современной математике варианты „знакового“ понимания этого термина простыми способами моделируют друг друга *), и любой из них может играть роль эталона для связывания друг с другом остальных вариантов и соответствующих им математических теорий.

В теории рекурсивных арифметических функций удобно основываться на следующем определении: *натуральными числами* называются знак 0 и любое сочетание знаков, которое может быть построено в результате процесса **), первый шаг которого состоит в написании знака 0 и каждый новый шаг (если он совершается) состоит в переходе от знакосочетания N, полученного в результате предшествующего шага, к знакосочетанию $S(N)$. Таким образом, при этом соглашении натуральными числами называются знакосочетания 0, $S(0)$, $S(S(0))$, ... ***).

*) Утверждая это, мы отвлекаемся от возможных трудностей при практическом осуществлении переводов чисел одной числовой системы в числа другой числовой системы.

**) При теоретических рассмотрениях имеются в виду не только реально осуществимые процессы построения и их результаты, но также и представления о «сколь угодно далеких продолжениях» таких процессов и представления о результатах этих продолжений.

***) В качестве компактных обозначений натуральных чисел этой числовой системы обычно используются натуральные числа позиционной десятичной системы. В таких ситуациях для предотвращения путаницы желательно натуральные числа десятичной числовой системы называть каким-либо термином, отличным от сокращенного термина «натуральное число» (например, термином «десятичный код натурального числа»).

§ 6. В монографиях РТЧ и РА определения примитивно рекурсивных (в другой терминологии — 1-рекурсивных) функций и рекурсивных функций более общих типов (например, 2-рекурсивных функций, т. е. функций, рекурсивных по двум переменным, и т. п.) формулируются без уточнения некоторых деталей технического характера. Иное по форме определение примитивно рекурсивных функций, весьма привлекательное своей отчетливостью, детальностью описания используемой символики и достоинствами технического характера, дано в работе Х. Б. Карри ФРА. Определения и символика, введенные в ФРА, могут оказаться полезными читателям этой книги для уточнения понимания некоторых деталей в монографиях Гудстейна (см. ниже). Символика теории примитивно рекурсивных функций, введенная Карри, не содержит функциональных переменных (Гудстейн при изложении рекурсивной арифметики также не упоминает о функциональных переменных). Однако вполне отчетливое понимание некоторых разделов монографий Гудстейна может быть достигнуто лишь при использовании языка с функциональными переменными. Во многих случаях подходящим оказывается язык, представляющий собой весьма экономное расширение предложенной Карри символики посредством присоединения функциональных переменных и соответствующих обобщений некоторых языковых понятий. Поэтому здесь уместно дать краткое описание этого языка (включающее в себя, в частности, определение примитивно рекурсивных функций в форме, предложенной Карри)*).

Исходным определением является сформулированное в предыдущем параграфе определение натуральных чисел. В дальнейших определениях буквы k, l, m и n символизируют конкретные положительные целые числа (т. е. натуральные числа, отличные от нуля). Знакосочетания вида x_k называются *предметными переменными* и зна-

*) В приводимом ниже описании языка допущены отступления от упомянутой работы Карри в некоторых деталях чисто технического характера, а также при выборе некоторых обозначений и терминов (в частности, в качестве функциональных знаков исходных примитивно рекурсивных функций использованы символы, принятые в монографиях Гудстейна).

косочетания вида f_k^n называются *n-местными функциональными переменными*. Буквы S и Z называются *исходными 1-местными (одноместными) функторами*; знакосочетания вида I_k^n, где $k \leqslant n$, называются *исходными n-местными функторами*.

Любой n-местный исходный функтор и любая n-местная функциональная переменная называется *n-местным функторным термом*; если φ — k-местный функторный терм и $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — n-местные функторные термы, то знакосочетание $[\mathscr{S}\varphi\psi_1 \ldots \psi_k]$ называется n-местным *функторным термом*; если ψ — n-местный функторный терм и χ — $(n+2)$-местный функторный терм, то знакосочетание $[\mathscr{R}\psi\chi]$ называется *$(n+1)$-местным функторным термом*. Любой n-местный функторный терм, не содержащий функциональных переменных, называется *n-местным функтором* и рассматривается как обозначение (функциональный знак) определенной n-местной примитивно рекурсивной функции; это обозначение таково, что оно, рассматриваемое совместно с определяющими равенствами (см. ниже), полностью характеризует определенный арифметический алгорифм, перерабатывающий любую n-членную систему натуральных чисел в некоторое натуральное число (см. ниже) *).

Знак 0 и предметные переменные называются *предметными термами*; если φ — k-местный функторный терм и $T_1, \ldots, T_k$ — предметные термы, то знакосочетание $\varphi(T_1, \ldots, T_k)$ называется *предметным термом*. Предметный терм T называется *функционально постоянным*, если он не содержит функциональных переменных, и называется *постоянным*, если он не содержит ни функциональных, ни предметных переменных.

Если T_1 и T_2 — предметные термы, то знакосочетание $T_1 = T_2$ называется *равенством*. При истолковании равенств допустимыми значениями любой предметной переменной считаются натуральные числа и допустимыми значениями любой n-местной функциональной переменной считаются n-местные функторы. В тех случаях, когда равенство $T_1 = T_2$ рассматривается как запись утверждения, полная формулировка соответствующего утверждения имеет вид: «Каковы бы ни были $\xi_1, \ldots, \xi_m$, верно равенство $T_1 = T_2$»; здесь $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — список всех переменных (как предметных, так и функциональных), входящих в данное равенство.

*) Здесь сделано следующее отступление от языка, используемого Х. Б. Карри: не введены 1-местные функторы вида $[\mathscr{R}T\chi]$, где T — постоянный предметный терм (см. ниже) и χ — 2-местный функтор. Введение таких функторов усложняет язык и в то же время не является необходимым (см. ниже § 8).

Функтору Z и функторам видов I_k^n, $[\mathscr{S}\varphi\psi_1 \ldots \psi_k]$ и $[\mathscr{R}\psi\chi]$ ставятся в соответствие следующие *определяющие равенства*:

$$(E_1)\ Z(\alpha_1) = 0; \qquad (E_2)\ I_k^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n) = \alpha_k;$$

$$(E_3)\ [\mathscr{S}\varphi\psi_1 \ldots \psi_k](\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varphi(\psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n));$$

$$(E_4')\ [\mathscr{R}\psi\chi](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$(E_4'')\ [\mathscr{R}\psi\chi](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, S(\alpha_{n+1})) = \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, [\mathscr{R}\psi\chi](\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})).$$

Здесь φ — k-местный функтор, $\psi_1, \ldots, \psi_k$ и ψ — n-местные функторы, χ — $(n+2)$-местный функтор и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — произвольные, но различные предметные переменные.

Если R — какое-либо равенство одного из видов (E_1), (E_2), (E_3), (E_4'), (E_4''), то любое равенство R^*, получаемое в результате подстановки в R вместо каждой входящей в R предметной переменной какого-либо натурального числа, рассматривается как определение значения постоянного предметного терма, стоящего в R^* слева от знака $=$, через значение постоянного предметного терма, стоящего в R^* справа от этого же знака. Например, значением терма $[\mathscr{R}\psi\chi](N_1, \ldots, N_n, S(N_{n+1}))$, где $N_1, \ldots, N_{n+1}$ — какие-либо натуральные числа, считается значение терма $\chi(N_1, \ldots, N_{n+1}, [\mathscr{R}\psi\chi](N_1, \ldots, N_{n+1}))$. Это соглашение является основой описания детерминированного процесса вычисления значения любого постоянного терма вида $\omega(M_1, \ldots, M_l)$, где ω — l-местный функтор и $M_1, \ldots, M_l$ — натуральные числа. Значением примитивно рекурсивной функции ω на

системе натуральных чисел $M_1, \ldots, M_l$ называется значение терма $\omega(M_1, \ldots, M_l)$ *).

Определяющие равенства для функторов (т. е. равенства видов (E_1), (E_2), (E_3), (E_4'), (E_4'')) верифицируемы; это означает, что они верны при всех значениях входящих в них переменных. Если T_1 и T_2 — какие-либо предметные термы такие, что знакосочетание $T_1 = T_2$ содержит переменные, но не является определяющим равенством для какого-либо функтора, то вопрос о верифицируемости равенства $T_1 = T_2$ может оказаться весьма трудным. Алгорифм для распознавания верифицируемых равенств среди всевозможных равенств невозможен; более того, невозможно исчисление (формально-дедуктивная система)**), в котором выводимые объекты представляют собой верифицируемые равенства и любое верифицируемое равенство выводимо (см. РТЧ, гл. VIII). Однако на основе упомянутой выше основополагающей работы Т. Сколема в работах Гильберта и Бернайса [5], Х. Б. Карри и Р. Л. Гудстейна были построены отличающиеся друг от друга по своему типу, но равнообъемные (эквивалентные) исчисления ***), обладающие следующим свойством: любое выводимое в исчислении равенство верифицируемо (таким образом, выводимость равенства в каком-либо из этих исчислений является достаточным условием верифицируемости рассматриваемого равенства). При этом обнаружилось, что верифицируемые равенства, выводимые в этих исчислениях, достаточны для обоснования многих существенных теорем арифметики, а понятие вывода в этих исчислениях из заданных равенств при фиксации заданных переменных может служить подходящей основой для обо-

*) По образцу языка, предложенного Карри для определения примитивно рекурсивных функций, могут быть введены языки для определения 2-рекурсивных, 3-рекурсивных и т. д. функций.

**) Имеется в виду такое понятие исчисления (формально-дедуктивной системы), при котором выводимые в исчислении объекты алгорифмически перечислимы.

***) Эти исчисления и эквивалентные им исчисления в литературе часто объединяются термином «примитивно рекурсивная арифметика».

снования многих существенных теорем конструктивного математического анализа.

В монографии РТЧ описывается и обстоятельно исследуется несколько эквивалентных друг другу исчислений равенств для примитивно рекурсивных функций. Исчисление, введенное во второй главе, обобщается и на 2-рекурсивные, 3-рекурсивные и т. д. функции*). К сожалению, рассуждение, предложенное в разделе 2.98 в качестве обоснования верифицируемости равенств, выводимых в рассматриваемых Гудстейном исчислениях, в действительности таким обоснованием не является. Корректное обоснование можно получить, раздельно проведя два рассуждения: рассуждение, обосновывающее вычислимость и единственность значения любой примитивно рекурсивной (2-рекурсивной и т. д.) функции при произвольно выбранных значениях предметных переменных (это рассуждение опирается на описание процесса вычисления значений рекурсивных функций рассматриваемого типа и проводится методом индукции по шагам процесса построения рассматриваемого функтора), и рассуждение, обосновывающее верифицируемость любого равенства, выводимого в исчислении (это рассуждение проводится методом индукции по шагам процесса вывода рассматриваемого равенства).

Ниже формулируются применительно к описанному выше языку с функциональными переменными два эквивалентных друг другу исчисления Гудстейна: исчисление, положенное в основу гл. II, и одно из исчислений, упомянутых в гл. V. Мы будем пользоваться в дальнейшем изложении следующим обозначением. Пусть T — предметный терм, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — различные переменные и $H_1, \ldots, H_n$ — знакосочетания, такие, что если ξ_l — предметная переменная, то H_l — предметный терм, а если

*) В настоящее время опубликовано уже значительное количество работ различных авторов, посвященных исчислениям равенств для рекурсивных функций, функционалов и операторов различных конкретных типов. Настоящая книга отражает лишь один из существенных этапов развития этого круга идей. Из работ, непосредственно примыкающих по своей тематике к РТЧ, упомянем лишь [17] и [18] (во второй работе исправляется существенная ошибка, допущенная в первой).

ξ_l — k-местная функциональная переменная, то H_l — k-местный функторный терм ($l = 1, \ldots, n$); выражение $\left[T\,|^{\xi_1, \ldots, \xi_n}_{H_1, \ldots, H_n}\right]$ будет обозначать результат одновременной подстановки терма H_1 вместо всех вхождений ξ_1 в T, ..., терма H_n вместо всех вхождений ξ_n в T.

Первое исчисление равенств Гудстейна. Аксиомами исчисления считаются, во-первых, равенства видов (E_1), (E_2), (E_3), (E_4'), (E_4''), в которых в качестве φ, ψ_1, ... ψ_n, ψ и χ могут фигурировать не только функторы, но и функторные термы с функциональными переменными, и, во-вторых, равенства вида

(I) $\quad T = T,$

где T — произвольный предметный терм. Правилами вывода считаются следующие правила (II), (III) и (IV):

(II) $\dfrac{U = V \quad P = Q}{P^* = Q^*}$

Здесь P^* и Q^* — предметные термы, получаемые в результате подстановки предметного терма V вместо некоторых вхождений предметного терма U в P и соответственно в Q (количество заменяемых вхождений может равняться нулю).

(III) $\dfrac{U = V}{\left[U\,|^{\xi}_{H}\right] = \left[V\,|^{\xi}_{H}\right]}$

Здесь U и V — предметные термы, ξ — предметная или k-местная функциональная переменная и H — предметный или, соответственно, k-местный функторный терм. (В каждом применении этого правила выделенная переменная ξ называется *собственной переменной рассматриваемого применения* *).)

*) Если не иметь в виду формулируемого ниже обобщения понятия вывода в исчислении равенств (см. определение понятия вывода из данных равенств при фиксации данных переменных), то правило (III) достаточно формулировать для случая, когда ξ — предметная переменная; правило (III) в общей формулировке является следствием аксиом и комплекса всех правил вывода, в котором правило (III) сформулировано в „урезанном" виде.

(IV) $\dfrac{\begin{array}{c}\omega_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \omega_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \omega_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, S(\alpha_{n+1})) = \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \omega_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})) \\ \omega_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, S(\alpha_{n+1})) = \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \omega_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}))\end{array}}{\omega_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \omega_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})}$

Здесь ψ, χ, ω_1 и ω_2 — функторные термы и α_1, ..., α_n, α_{n+1} — различные предметные переменные. (В каждом применении этого правила переменная α_{n+1} называется *собственной переменной* рассматриваемого применения.)

Второе исчисление равенств Гудстейна. Аксиомами считаются такие же равенства, как в предыдущем исчислении, кроме равенств вида $T = T$. Правилами вывода считаются следующие правила (I′), (II′), (III′), (IV′):

(I′) $\dfrac{U = V \quad U = W}{V = W}$ (II′) $\dfrac{\begin{array}{c}U_1 = V_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_k = V_k\end{array}}{\varphi(U_1, \ldots, U_k) = \varphi(V_1, \ldots, V_k)}$

Здесь U, V, W, U_1, ..., U_k, V_1, ..., V_k — предметные термы и φ — k-местный функторный терм.

Правило (III′) совпадает с правилом (III). Правило (IV′) получается в результате замены в правиле (IV) первых двух посылок одной посылкой $\omega_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = \omega_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0)$.

Следующие ниже определения и утверждения формулируются одновременно для обоих исчислений.

Выводом в исчислении равенств называется всякий список равенств R_1, ..., R_l такой, что при каждом k ($k = 1, \ldots, l$) равенство R_k или является аксиомой, или получается из одного или нескольких предшествующих ему в данном списке равенств по одному из правил

вывода. О равенстве R говорят, что оно *выводимо в исчислении*, если можно построить вывод в исчислении, последним членом которого является R.

Важную роль в понимании некоторых разделов этой книги играет следующее обобщение понятия вывода в исчислении равенств. Пусть

$$L_1, \ldots, L_m \tag{7}$$

— произвольный список равенств и

$$\xi_1, \ldots, \xi_n \tag{8}$$

— произвольный список переменных. Говорят, что список равенств $R_1, \ldots, R_l$ является *выводом в исчислении равенств из списка* (7) *при фиксации переменных* (8), если при каждом k ($k = 1, \ldots, l$) равенство R_k или является аксиомой исчисления, или входит в список (7), или получается из одного или нескольких предшествующих ему в списке $R_1, \ldots, R_l$ равенств по одному из правил вывода, примененному так, что собственная переменная этого применения не фигурирует в списке (8) [последнее условие касается правил (III), (IV), (III′) и (IV′)].

Это понятие необходимо для правильной формулировки дедукционной теоремы, сформулированной в гл. V монографии РТЧ неточно (см. соответствующее примечание редактора перевода). Это же понятие Гудстейн использует (не вводя его явно) в монографии РА при обосновании (говоря точнее, при истолковании) некоторых утверждений, формулируемых посредством языка, использующего неограниченные кванторы и, следовательно, существенно выходящего за рамки языка, рассматриваемого в РТЧ. Роль рассматриваемого понятия в истолковании теорем некоторых типов обусловлена следующими свойствами исчисления равенств:

1) *Если в каком-либо конкретном применении какого-либо правила вывода все посылки оказываются верифицируемыми равенствами, то и заключение является верифицируемым равенством*;

2) *если равенство R выводимо из равенств $L_1, \ldots, L_m$ при фиксации переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то, каковы бы ни были допустимые значения $C_1, \ldots, C_n$ (соответственно) переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, из равенств*

$$\left[L_1 \begin{vmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ C_1, \ldots, C_n \end{vmatrix}\right], \ldots, \left[L_m \begin{vmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ C_1, \ldots, C_n \end{vmatrix}\right] \tag{9}$$

выводимо равенство

$$\left[R \begin{vmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ C_1, \ldots, C_n \end{vmatrix}\right] \tag{10}$$

и (следовательно) *если все равенства* (9) *верифицируемы, то и равенство* (10) *верифицируемо* [при этом, если обоснование верифицируемости равенств (9) осуществимо посредством их вывода в исчислении равенств, то и обоснование верифицируемости (10) осуществимо таким же способом].

§ 7. Для упрощения техники выводов в исчислениях равенств при использовании описанной выше символики Карри полезна следующая теорема (представляющая собой переформулированную применительно к исчислениям Гудстейна теорему 3.3 из ФРА):

(А) *Каковы бы ни были предметный терм T и список различных предметных переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ ($i \geqslant 0$), содержащий все предметные переменные, входящие в T, можно построить функторный терм φ (i-местный, если $i > 0$, и 1-местный, если $i = 0$), не содержащий функциональных переменных, отличных от тех, которые входят в T, и такой, что в исчислении равенств можно вывести (притом без использования правил* (III) *и* (IV) *в первом исчислении и правил* (III′) *и* (IV′) *— во втором) равенство*

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) = T \tag{11}$$

[*если $i = 0$, то левая часть равенства* (11) *имеет вид* $\varphi(0)$].

Доказательство этой теоремы состоит в построении (индукцией по шагам процесса построения предметного терма T) искомого функторного терма*) и

*) Описание этого построения представляет собой описание определенного алгорифма.

в построении (индукцией по шагам того же процесса) вывода равенства (11).

В монографиях Гудстейна используется иное по форме, чем у Карри, понятие примитивно рекурсивной функции, и теореме (А) соответствует предусмотренный определением этого понятия способ введения новых функций посредством явных определений.

Непосредственным следствием теоремы (А) является следующая теорема (представляющая собой переформулированную применительно к исчислениям Гудстейна теорему 3.4 из ФРА):

(Б) *Каковы бы ни были предметные термы* T_1 *и* T_2 *и список различных предметных переменных* $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}$ $(i \geqslant 0)$, *такие, что все предметные переменные, входящие в* T_1, *содержатся в списке* $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ *и все предметные переменные, входящие в* T_2, *содержатся в списке* $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}$, *можно построить* $(i+1)$*-местный функторный терм* ω, *не содержащий функциональных переменных, отличных от тех, которые входят хотя бы в один из термов* T_1, T_2, *и такой, что в исчислении равенств выводимы* (*притом при фиксации всех переменных, кроме* α_{i+2}) *равенства*

$$\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, 0) = T_1,$$

$$\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, S(\alpha_{i+1})) = \left[T_2 |^{\alpha_{i+2}}_{\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1})}\right].$$

В монографиях Гудстейна этой теореме соответствует используемая форма определения новых функций посредством примитивной рекурсии.

Непосредственными следствиями теоремы (А) являются также следующие две теоремы (В) и (В′) (представляющие собой аналоги в исчислениях Гудстейна теоремы 3.5 из ФРА):

(В) *Каковы бы ни были предметные термы* T_1, T_2, U, V *и различные предметные переменные* α, β *такие, что* α *и* β *не входят в* U *и* β *не входит в* T_1 *и* T_2, *в исчислении равенств из списка равенств*

$$\left.\begin{array}{ll} [T_1 |^{\alpha}_{0}] = U, & [T_2 |^{\alpha}_{0}] = U, \\ [T_1 |^{\alpha}_{S(\alpha)}] = [V |^{\beta}_{T_1}], & [T_2 |^{\alpha}_{S(\alpha)}] = [V |^{\beta}_{T_2}] \end{array}\right\} \qquad (12)$$

при фиксации всех β*переменных, кроме* α *и* β, *выводимо равенство*

$$T_1 = T_2.$$

Заменив в списке (12) первые два равенства одним равенством $[T_1 |^{\alpha}_{0}] = [T_2 |^{\alpha}_{0}]$, исключив из текста теоремы (В) упоминания о терме U и сохранив остальной текст этой теоремы, мы получим формулировку теоремы (В′).

В монографиях Гудстейна теоремам (В) и (В′) соответствуют используемые формы правил вывода (IV) и (IV′).

§ 8. В гл. VI и в некоторых других главах монографии РТЧ имеется ряд теорем о представимости в форме примитивно рекурсивных функций некоторых арифметических функций, характеризуемых посредством таких определяющих равенств, которые отличаются от определяющих равенств для примитивно рекурсивных функций и включают в себя (вообще говоря) функциональные знаки, символизирующие некоторые примитивно рекурсивные функции. Теоремы этого типа фактически представляют собой утверждения, записи которых посредством общеупотребительной логической символики (использующей, в частности, квантор общности $\forall$ и квантор существования $\exists$) имеют вид

$$\forall\eta_1 \ldots \eta_k \exists\eta_{k+1} \ldots \eta_{k+l} G; \qquad (13)$$

здесь G — формула *) вида

$$\left(\forall\alpha^1_1 \ldots \alpha^1_{i_1}(U_1 = V_1) \& \ldots \& \forall\alpha^n_1 \ldots \alpha^n_{i_n}(U_n = V_n)\right), \qquad (14)$$

*) Здесь и ниже *формулами* называются логико-арифметические формулы, т. е. знакосочетания, которые строятся, исходя из равенств, при помощи логических знаков $\sim$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ по таким же правилам построения, по каким в языке исчисления предикатов строятся формулы этого языка, исходя из простейших (атомарных) формул.

Если F — какая-либо формула и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ — какие-либо переменные, то выражения $\forall\xi_1\xi_2 \ldots \xi_m F$ и $\exists\xi_1\xi_2 \ldots \xi_m F$ мы будем использовать в качестве сокращенных записей (соответственно) формул $\forall\xi_1\forall\xi_2 \ldots \forall\xi_m F$ и $\exists\xi_1\exists\xi_2 \ldots \exists\xi_m F$.

где $U_1, \ldots, U_n$, $V_1, \ldots, V_n$ — некоторые предметные термы и $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_{i_m}^m (i_m \geqslant 0)$ — список всех предметных переменных, входящих в равенство $U_m = V_m$ $(m = 1, \ldots, n)$; $\eta_1, \ldots, \eta_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_{k+l}$ — список (без повторений) всех функциональных переменных, входящих в G.

Примером теоремы этого типа может служит теорема о представимости в форме примитивно рекурсивных функций таких арифметических функций, которые определяются, исходя из примитивно рекурсивных функций, посредством одновременной рекурсии по одной и той же переменной. Частный случай этой теоремы, рассмотренный в разделе 6.2 монографии РТЧ, имеет вид

$$\forall f_1^2 f_2^2 \exists f_1^1 f_2^1 (((f_1^1(0) = 0) \& (f_2^1(0) = 0) \& \\ \& \forall x_1 (f_1^1(S(x_1)) = f_1^2(f_1^1(x_1), f_2^1(x_1))) \& \\ \& \forall x_1 (f_2^1(S(x_1)) = f_2^2(f_1^1(x_1), f_2^1(x_1))))). \quad (15)$$

Во многих случаях утверждения вида (13) удается обосновать в следующем смысле: удается построить функторные термы $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, не содержащие функциональных переменных, отличных от $\eta_1, \ldots, \eta_k$, и такие, что в исчислении равенств при фиксации переменных $\eta_1, \ldots, \eta_k$ выводимы равенства

$$U_1^* = V_1^*, \ldots, \quad U_n^* = V_n^*,$$

где U_m^* и V_m^* обозначают соответственно термы

$$\left[U_m \left|{}^{\eta_{k+1}, \ldots, \eta_{k+l}}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_l}\right.\right], \quad \left[V_m \left|{}^{\eta_{k+1}, \ldots, \eta_{k+l}}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_l}\right.\right] \quad (m = 1, \ldots, n).$$

Для уяснения формы, которую в монографии РТЧ в некоторых случаях имеют такого рода обоснования утверждений вида (13), рассмотрим (15). Для обоснования в указанном смысле утверждения (15) достаточно (на основании теоремы (A)) построить какие-либо предметные термы T_1 и T_2, не содержащие функциональных переменных, отличных от f_1^2 и f_2^2, и предметных переменных, отличных от x_1, и такие, что в исчислении равенств при фиксации переменных f_1^2 и f_2^2 выводимы равенства

$$[T_1 |_0^{x_1}] = 0, \qquad [T_2 |_0^{x_1}] = 0,$$
$$\left[T_1 \left|_{S(x_1)}^{x_1}\right.\right] = f_1^2(T_1, T_2), \quad \left[T_2 \left|_{S(x_1)}^{x_1}\right.\right] = f_2^2(T_1, T_2).$$

(Такие предметные термы и строятся в РТЧ.)

В качестве пояснения подстрочного примечания на стр. 54 заметим, что в таком же смысле, как выше, может быть обосновано утверждение

$$\forall f_1^1 f_1^2 \exists f_2^1 ((f_2^1(0) = f_1^1(0)) \& \forall x_1 (f_2^1(S(x_1)) = f_1^2(x_1, f_2^1(x_1)))).$$

Одноместный функторный терм, при помощи которого достигается искомое обоснование, имеет вид $[\mathscr{S}\varphi Z I_1^1]$, где φ обозначает 2-местный функторный терм $[\mathscr{R} f_1^1 [\mathscr{S} f_1^2 I_2^3 I_3^3]]$.

В языке, используемом Гудстейном в гл. III монографии РТЧ, знаки $\neq, <, \leqslant, \sim, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ играют роль символов, предназначенных для сокращенной записи некоторых р а в е н с т в. Ввиду такой роли указанных знаков в формулах, не содержащих неограниченных кванторных комплексов, к виду (13) приводимы и некоторые утверждения, имеющие несколько иную форму, чем только что рассмотренные. Примером может служить следующая теорема о „склеивании" примитивно рекурсивных функций:

$$\forall f_1^1 f_2^1 f_3^1 \exists f_4^1 \forall x_1 (((f_3^1(x_1) = 0) \rightarrow (f_4^1(x_1) = f_1^1(x_1))) \& \\ \& ((f_3^1(x_1) \neq 0) \rightarrow (f_4^1(x_1) = f_2^1(x_1)))).$$

Теоремы вида (13) представляют собой утверждения о возможности решения системы функциональных уравнений относительно выбранных функциональных переменных. В рассмотренных выше и подобных им примерах важен вопрос о единственности решения. Чтобы избежать громоздких записей, рассмотрим в качестве примеров теоремы вида

$$\forall f_1^1 f_1^2 \exists f_2^2 (\forall x_1 (U_1 = V_1) \& \forall x_1 x_2 (U_2 = V_2)). \quad (16)$$

Утверждение о единственности решения, соответствующее утверждению (16), имеет вид

$$\forall f_1^1 f_1^2 f_2^2 f_3^2((\forall x_1(U_1 = V_1) \& \forall x_1 x_2(U_2 = V_2) \& \forall x_1(U_1^* = V_1^*) \& \& \forall x_1 x_2(U_2^* = V_2^*)) \to \forall x_1 x_2(f_2^2(x_1, x_2) = f_3^2(x_1, x_2))). \quad (17)$$

Здесь U_1^*, V_1^*, U_2^*, V_2^* — предметные термы, получаемые соответственно из термов U_1, V_1, U_2, V_2 в результате подстановки переменной f_3^2 вместо всех вхождений переменной f_2^2. Во многих случаях утверждения этого вида удается обосновать в следующем смысле: удается построить вывод равенства $f_2^2(x_1, x_2) = f_3^2(x_1, x_2)$ из равенств $U_1 = V_1$, $U_2 = V_2$, $U_1^* = V_1^*$, $U_2^* = V_2^*$ при фиксации переменных f_1^1, f_1^2, f_2^2, f_3^2*).

В монографии РА часто рассматриваются и обосновываются утверждения, логическая форма которых сложнее, чем во всех рассмотренных выше примерах (но не превосходит все же определенного „уровня сложности"). О типе утверждений, фигурирующих в рекурсивном анализе Гудстейна, и о характере обоснования этих утверждений речь будет идти ниже в § 10.

§ 9. Для подхода Гудстейна к построению конструктивного варианта математического анализа характерна, прежде всего, следующая черта: рассмотрения ведутся в рамках какого-либо фиксированного типа рекурсивных арифметических функций, такого, что для любой функции этого типа может быть обосновано утверждение о ее потенциальной вычислимости при любых значениях переменных (например, в рамках понятия «примитивно рекурсивная функция» или понятия «k-рекурсивная функция», где k — одно из чисел 2, 3, ..., и т. п.). В качестве функций, на примере которых подробно разъясняется предлагаемый подход, выбраны примитивно рекурсивные функции. Такое ограничение, налагаемое на тип используемых алгорифмов, может показаться весьма стеснительным с теоретической точки

*) Обоснования единственности решений функциональных уравнений Гудстейн не проводит.

зрения. Действительно, многие соображения теоретического характера побуждают разрабатывать такие варианты конструктивного математического анализа, в которых это ограничение снято или же значительно ослаблено. Однако одним из доводов в пользу целесообразности разработки и того варианта конструктивного анализа, который предложен Гудстейном, является следующее обстоятельство: конкретные алгорифмы, фактически используемые в различных областях приложений математического анализа, лишь в редких случаях не допускают представления посредством примитивно рекурсивных функций (говоря о представлении какого-либо алгорифма посредством примитивно рекурсивной функции, мы имеем в виду, что исходные данные для алгорифма закодированы натуральными числами). Возможности примитивно рекурсивных функций как технических средств определения конкретных конструктивных объектов изучения математического анализа широко проиллюстрированы в гл. V монографии РА и в Добавлении к РА. Еще один довод будет упомянут в конце § 10.

Второй характерной чертой подхода Гудстейна является своеобразие предложенных им конструктивных аналогов понятий равномерно непрерывной и равномерно дифференцируемой в сегменте (с рациональными концами) вещественной функции вещественной переменной. „Уровень логической сложности" условий, характеризующих эти понятия, не выше, чем для понятия примитивно рекурсивного вещественного числа: эти условия (а также условия, характеризующие отношение равенства и другие рассматриваемые в РА отношения, вводимые для упомянутых конструктивных аналогов) могут быть записаны посредством формул вида

$$\exists \xi_1 \ldots \xi_p \forall \xi_{p+1} \ldots \xi_{p+q}(U = V), \quad (18)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}$ — некоторые переменные, U и V — некоторые предметные термы. Формулы вида (18) *) называются в дальнейшем изложении *формулами типа* $\exists\forall$.

В определениях упомянутых конструктивных аналогов не фигурирует понятие конструктивного вещественного

*) Предполагается, что $p + q \geqslant 0$.

числа и даже понятие примитивно рекурсивного вещественного числа. Объекты, играющие роль аналогов упомянутых функций вещественной переменной, представляют собой (говоря несколько упрощенно) алгорифмически заданные последовательности примитивно рекурсивных рационально-значных функций рационально-значной переменной *), обладающие примитивно рекурсивным „регулятором сходимости в себе" и примитивно рекурсивным „регулятором равномерной непрерывности" (соответственно, „регулятором равномерной дифференцируемости"). Несмотря на то, что определения этих объектов не опираются на понятие конструктивного (примитивно рекурсивного) вещественного числа, любая функция в смысле Гудстейна, предъявленная вместе с упомянутыми „регуляторами", дает возможность построить ее значение на любом примитивно рекурсивном вещественном числе, представляющее собой такое же число (а при переходе к более широкой точке зрения, допускающей рассмотрение и общерекурсивных вещественных чисел, дает возможность строить ее значения и на таких числах). Более того, по любому k можно построить (посредством примитивно рекурсивной функции) такое l, что будет выполнено следующее условие: каково бы ни было рациональное число r из сегмента, в котором задана функция, можно построить (посредством примитивно рекурсивной функции) рациональное число s такое, что s будет приближенным значением данной функции с точностью до 10^{-k} в любой общерекурсивной (и, в частности, в любой примитивно рекурсивной) точке, для которой r служит приближенным значением с точностью до 10^{-l}. В этом смысле предложенный Гудстейном конструктивный аналог понятия равномерно непрерывной функции вещественной переменной представляет собой такое понятие конструктивной математики, которое весьма хорошо согласуется с идейной основой представлений математиков интуиционистского

*) Каждое рациональное число представимо посредством тройки натуральных чисел (см. РА, гл. I) и благодаря этому упоминаемые здесь функции описываются на языке примитивно рекурсивных арифметических функций, введенных в РТЧ.

направления (прежде всего — Л. Э. Я. Брауэра) о приемлемом с их точки зрения аналоге упомянутого понятия классической математики. Свой вариант такого аналога Брауэр определяет иным способом.

Весьма существенным для теории Гудстейна является тот факт, что в определении вводимого им аналога понятия равномерно непрерывной функции примитивно рекурсивные вещественные числа не фигурируют в качестве подлежащих рассмотрению значений аргумента. Это не означает, что при построении теории введенных им функций необходимо избегать рассмотрения значений этих функций в примитивно рекурсивных точках — как уже было упомянуто, любое такое значение может быть построено в виде примитивно рекурсивного вещественного числа. Однако Гудстейн почему-то стремится избегать рассмотрения значений функций в примитивно рекурсивных (даже в рациональных) точках. Эта тенденция лишает его возможности приблизить к формулировкам классического математического анализа, упростить, а в некоторых случаях и уточнить формулировки некоторых теорем, не выходя при этом за рамки допускаемого его подходом „уровня логической сложности" утверждений. Примером может служить теорема 2.4 из РА. Построенное в доказательстве этой теоремы примитивно рекурсивное вещественное число h представляет собой не только верхнюю границу функции f, но и ее точную верхнюю границу (ввиду равномерной непрерывности рассматриваемых функций понятие точной верхней границы можно определить, основываясь лишь на значениях функции в рациональных точках, — эти значения представляют собой примитивно рекурсивные вещественные числа).

Гудстейн строит свой вариант конструктивного математического анализа в предикатной форме *). „Составные" конструктивные объекты, необходимые для

*) По-видимому, Гудстейн является первым из тех математиков, которые отчетливо осознали недопустимость безоговорочного перенесения в конструктивную математику используемого в классической математике способа перехода от предикатной формы построения теорий к операторной форме.

корректного перехода к операторной форме построения теории [подобные тем, которые упоминаются в утверждении (5) из § 3 этой статьи], явно Гудстейном не вводятся. В их рассмотрении и нет необходимости при строгом соблюдении предикатной формы построения теории. К сожалению, некоторые используемые Гудстейном обозначения и обороты речи иногда приводят к нарушению отчетливости изложения. Примерами таких обозначений могут служить обозначение $R_f(p)$, введенное в разделе 1.35, и обозначение $I_f(n, a, b)$, введенное в разделе 4.1 и распространенное на функции более общего типа в разделе 4.2. Эти обозначения имеют операторный характер и используются автором именно как операторные обозначения; однако исходные данные, необходимые для выполнения соответствующих операций, отражены в этих обозначениях совершенно недостаточно*).

§ 10. Гудстейн в предисловии к монографии РА утверждает, что рекурсивный анализ (так он называет разрабатываемый им вариант конструктивного математического анализа) формализуем в исчислении равенств, однако нигде в тексте РА не поясняет, какой смысл он вкладывает здесь в термин «формализация». Конкретный материал, содержащийся в РА, свидетельствует о том, что это утверждение Гудстейна нельзя понимать в том смысле, что все теоремы рекурсивного анализа допускают запись в виде равенств и эти равенства выводимы в исчислении равенств. Ситуация значительно сложнее. Обычно теоремы рекурсивного анализа при записи их посредством общеупотребительной логической символики имеют вид

$$\forall \xi_1 \ldots \xi_l((F_1 \& \ldots \& F_k) \to F_{k+1}), \qquad (19)$$

*) Вообще приходится с сожалением констатировать, что в весьма интересных с идейной точки зрения монографиях Гудстейна читатели встретятся с некоторыми погрешностями изложения, в том числе с нарушающими отчетливость обозначениями и способами записи, с неточными и даже ошибочными утверждениями и рассуждениями. В наиболее существенных случаях в примечаниях переводчика и редактора перевода даются необходимые пояснения.

где $\xi_1, \ldots, \xi_l$ — переменные и $F_1, \ldots, F_k, F_{k+1}$ — формулы типа $\exists\forall$ *). Ввиду возможности корректного переименования переменных можно предполагать, что в (19) различные вхождения кванторов связывают различные переменные.

Формулы вида (19) не являются равенствами, но в РА обоснование утверждений этого вида (за которым скрывается определенное понимание таких утверждений) действительно основывается на исчислении равенств (хотя детали и не приводятся).

Для построенного Гудстейном фрагмента конструктивного математического анализа характерна следующая черта: „логическая сложность" рассматриваемых в нем теорем не превосходит (в определенном смысле) „логической сложности" формул вида (19); встречающиеся в РА теоремы рекурсивного анализа, имеющие более сложный вид, переводимы в утверждения вида (19) или в конъюнкции таких утверждений посредством небольшого набора преобразований, переводящих любую формулу в эквивалентную ей (с точки зрения конструктивной логики) формулу **).

Монография РА включает в себя не только понятия и теоремы, лежащие в рамках специфического рекурсивного анализа Гудстейна, но также некоторые понятия и теоремы, выходящие за рамки этой теории. Последние сконцентрированы главным образом в первой главе, но встречаются и в дальнейших главах. К сожалению, в монографии РА понятия и теоремы этих двух типов не отделены отчетливо друг от друга. Среди определений

*) Гудстейн обычно формулирует теоремы рекурсивного анализа без использования логической символики (лишь иногда используются знаки пропозициональных логических связок). При формулировании теорем вида (19) начальная часть формулировки, выраженная знакосочетанием $\forall \xi_1 \ldots \xi_l$, обычно им не выговаривается (но всегда подразумевается); в таких случаях список $\xi_1, \ldots, \xi_l$ состоит из всех переменных (как предметных, так и функциональных), имеющих хотя бы одно свободное (т. е. не связываемое никаким квантором) вхождение в формулу $((F_1 \& \ldots \& F_k) \to F_{k+1})$.

**) Обычно достаточны преобразования, состоящие в переходах от формул видов $(A \to (B \& C))$, $((A \vee B) \to C)$, $(A \to (B \to C))$ соответственно к формулам $((A \to B) \& (A \to C))$, $((A \to C) \& (B \to C))$, $((A \& B) \to C)$.

и теорем, имеющихся в РА, за рамки рекурсивного анализа Гудстейна выходят определения и теоремы, в которых фигурирует понятие общерекурсивной функции, и теоремы о невозможности эффективных методов (алгорифмов), удовлетворяющих определенным условиям. Эти теоремы имеют существенно более сложную (с определенной точки зрения) логическую структуру, чем теоремы вида (19), и их обоснование осуществляется посредством рассуждений совершенно иного характера, чем в случае теорем вида (19). В монографии РА теоремы этого типа играют роль дополнений к специфическому фрагменту конструктивного математического анализа, разработанному Гудстейном.

Гудстейн, говоря о формализации рекурсивного анализа посредством исчисления равенств, подразумевает, по-видимому, возможность обоснования рассмотренных им (и многих других) теорем вида (19) и упомянутых в § 8 видов в определенном „сильном" смысле, соответствующем определенному „сильному" конструктивному истолкованию утверждений этих видов, которое полностью согласуется с используемым в конструктивной математике более общим истолкнованием суждений о конструктивных объектах, но предполагает относительную простоту определенных конструкций и связей. Описание этого „сильного" истолкования утверждений вида (19) читатель без труда составит на основе следующего примера *). Рассмотрим утверждение вида

$$\forall x_1 f_1^2((F_1 \,\&\, F_2) \to F_3), \tag{20}$$

где F_1, F_2 и F_3 обозначают соответственно формулы

$$\exists x_2 f_1^1 \forall x_3 R_1, \quad \exists x_4 f_1^3 \forall x_5 f_2^2 R_2, \quad \exists x_6 f_2^3 f_2^1 \forall x_7 f_3^2 R_3;$$

здесь R_1, R_2 и R_3 — обозначения некоторых равенств. Первый шаг истолкнования утверждения (20) состоит в том, что (20) рассматривается как утверждение, имеющее точно такой же смысл, как утверждение

$$\forall x_1 f_1^2 x_2 f_1^1 x_4 f_1^3((G_1 \,\&\, G_2) \to F_3), \tag{21}$$

*) Мы ограничиваемся здесь конкретным примером, чтобы избежать громоздких записей.

где G_1 и G_2 обозначают соответственно формулы

$$\forall x_3 R_1, \quad \forall x_5 f_2^2 R_2.$$

Следующий шаг состоит в переходе от (21) к утверждению более „сильному" (с точки зрения используемого в конструктивной математике конструктивного понимания математических суждений), чем (21), а именно, к утверждению

$$\forall x_1 f_1^2 x_2 f_1^1 x_4 f_1^3 \exists x_6 f_2^3 f_2^1((G_1 \,\&\, G_2) \to G_3), \tag{22}$$

где G_3 обозначает формулу $\forall x_7 f_3^2 R_3$.

Утверждение (22) понимается в конструктивной математике как утверждение о возможности построения трех алгорифмов, строящих по любым допустимым значениям переменных x_1, f_1^2, x_2, f_1^1, x_4, f_1^3 некоторые допустимые значения (соответственно) переменных x_6, f_2^3, f_2^1, удовлетворяющие вместе с исходными данными условию $(G_1 \,\&\, G_2) \to G_3$). В используемом языке теории примитивно рекурсивных функций имеются технические средства, позволяющие описывать некоторые алгорифмы, строящие по допустимым значениям указанных переменных допустимые значения переменной x_6 (натуральные числа); такими техническими средствами являются предметные термы; но в этом языке нет технических средств для непосредственного описания алгорифмов, строящих по тем же исходным данным функторы. Положение станет иным, если мы расширим понятия функторного терма и предметного терма, объединив правила построения функторных термов и предметных термов в одном определении и включив в него следующее новое правило построения функторных термов: если φ — k-местный функторный терм, $T_1, \ldots, T_m$ — предметные термы и $m < k$, то знакосочетание $[\mathscr{K}\varphi T_1 \ldots T_m]$ называется *$(k-m)$-местным функторным термом*. Функторам (т. е. постоянным функторным термам) нового типа поставим в соответствие *определяющие равенства* вида

$$[\mathscr{K}\varphi T_1 \ldots T_m](\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-m}) = \\ = \varphi(T_1, \ldots, T_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-m}). \tag{23}$$

Конструктивные операции, характеризуемые функторными термами только что описанного типа, принадлежат „нижним этажам" иерархии разнообразных конструктивных операций; их „уровень сложности" вполне соответствует общему замыслу Гудстейна.

Расширив понятия функторного терма и предметного терма, мы расширим также исчисление равенств посредством нового понимания терминов «функторный терм» и «предметный терм» и посредством присоединения к аксиомам ранее указанных типов новых аксиом — равенств вида (23), в которых в качестве $T_1, \ldots, T_m$ могут фигурировать любые предметные термы (в новом смысле) и в качестве φ — любой k-местный функторный терм (в новом смысле) такой, что $m < k$. Располагая этим расширением исчисления равенств, мы можем следующим образом сформулировать „сильное" истолкование утверждения (22) и одновременно утверждения (20): эти утверждения называются *обоснованными в сильном смысле*, если построены предметный терм H, 3-местный функторный терм Φ и 1-местный функторный терм Ψ, не содержащие переменных, отличных от x_1, f_1^2, x_2, f_1^1, x_4, f_1^3, и такие, что равенство $\left[R_3 \left|{}^{x_6,\, f_2^3,\, f_2^1}_{H,\, \Phi,\, \Psi}\right.\right]$ окажется выводимым из равенств R_1 и R_2 при фиксации переменных x_1, f_1^2, x_2, f_1^1, x_4, f_1^3.

Можно рассматривать также „особенно сильное" истолкование утверждений (22) и (20) — такое истолкование, при котором в качестве Φ и Ψ допускаются лишь функторные термы вида $[\mathscr{K}\varphi\beta_1 \ldots \beta_m]$, где φ — функторный терм первоначального типа и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — предметные переменные. При этом, если в равенстве R_3 функциональные переменные f_2^3 и f_2^1 не входят в какие-либо отличные от них самих функторные термы, то знакосочетания вида $[\mathscr{K}\varphi\beta_1 \ldots \beta_m]$ можно рассматривать не как самостоятельно вводимые объекты, а лишь как символические выражения, используемые для удобной записи некоторых предметных термов (в первоначальном смысле), — любое выражение, имеющее вид $[\mathscr{K}\varphi\beta_1 \ldots \beta_m](H_1, \ldots, H_{k-m})$, где $H_1, \ldots, H_{k-m}$ — предметные термы, можно воспринимать как специальную

запись предметного терма $\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_m, H_1, \ldots, H_{k-m})$. В этом состоит определенный способ косвенного описания некоторых алгорифмических операций, и Гудстейн фактически часто прибегает к этому способу (не используя, однако, какой-либо специальной символики).

По-видимому, для всех встречающихся в РА и подходящих по своему типу теорем возможно обоснование в этом „особенно сильном" смысле; однако проверить это предположение нелегко.

Варианты конструктивного математического анализа, в которых фигурируют понятия, основанные на понятии частично рекурсивной функции или на понятии общерекурсивной функции (или на каких-либо эквивалентных им понятиях), представляют собой теории более общего типа, чем рекурсивный анализ Гудстейна. Однако возникающие в этих теориях осложнения логического характера побуждают в максимальной степени использовать ценные черты, имеющиеся в более узком, но в то же время более четком в логическом отношении (и вполне достаточном для многих целей) варианте Гудстейна, который уже оказал значительное идейное воздействие и на исследования, выходящие за рамки некоторых принципов этого варианта.

Читатель, познакомившийся с этой книгой, приобщится ко многим плодотворным идеям общематематического и общелогического характера и получит хорошую основу как для дальнейшего изучения конструктивной математики, так и для размышлений о глубинных процессах, происходящих в настоящее время в математике и колеблющих представление о безупречности того «рая, который создал нам Кантор» *).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вейль (Weyl H.), Mathematics and logic, Amer. Math. Monthly **53** (1946), 2—13.
[2] Гёдель (Gödel K.), Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, Monatsh. f. Math. und Phys. 38 (1931), 173—198.
[3] Генцен (Gentzen G.), Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. **112**, N 4 (1936), 493—565 [русский

*) Гильберт [4].

перевод: Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел, сб. «Математическая теория логического вывода», «Наука», 1967].
[4] Гильберт (Hilbert D.), Über das Unendliche, Math. Ann. 95 (1926), 161—190. [Русский перевод: см. добавление VIII к книге Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.]
[5] Гильберт и Бернайс (Hilbert D., Bernays P.), Grundlagen der Mathematik, I, Berlin, 1934.
[6] Гудстейн (Goodstein R. L.), Function theory in an axiom-free equation calculus, Proc. London Math. Soc. (2) 48 (1945), 401—434.
[7] Гудстейн (Goodstein R. L.), Mean value theorems in recursive functions theory, I, там же 52 (1950), 81—106.
[8] Гудстейн (Goodstein R. L.), On the nature of mathematical systems, Dialectica 12, N 3—4 (1958), 296—316.
[9] Клини (Kleene S. C.), Introduction to metamathematics, N. Y., 1952 [русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957].
[10] Кушнер Б. А., Цейтин Г. С., Некоторые свойства F-чисел, Записки научных семинаров ЛОМИ 8 (1968), 107—120.
[11] Марков А. А., Теория алгорифмов, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, XLII, изд. АН СССР, 1954.
[12] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950.
[13] Проблемы конструктивного направления в математике, 1. Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, LII, изд. АН СССР, 1958.
[14] Проблемы конструктивного направления в математике, 2, там же, LXVII, изд. АН СССР, 1962.
[15] Проблемы конструктивного направления в математике, 3, там же, LXXII, «Наука», 1964.
[16] Проблемы конструктивного направления в математике, 4, там же, XCIII, «Наука», 1967.
[17] Роуз (Rose H. E.), On the consistency and undecidability of recursive arithmetic, Z. math. Logik Grundl. Math. 7 (1961), 124—135.
[18] Роуз (Rose H. E.), Some metamathematical results in recursive arithmetic, там же 13 (1967), 381—384.
[19] Сколем (Skolem T.), Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich, Videnskapsselskapets skrifter, I, Matem.-naturvid. klasse, no. 6 (1923).
[20] Тарский (Tarski A.), The Semantic Conception of Truth, Readings in Philosophycal Analysis, N. Y., 1947.
[21] Шпеккер (Specker E.), Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, J. Symbolic Logic 14 (1949), 145—158.

I

РЕКУРСИВНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

РАЗВИТИЕ РЕКУРСИВНОЙ АРИФМЕТИКИ В ИСЧИСЛЕНИИ РАВЕНСТВ, СВОБОДНОМ ОТ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

R. L. GOODSTEIN

RECURSIVE NUMBER THEORY

A DEVELOPMENT OF RECURSIVE ARITHMETIC IN A LOGIC-FREE EQUATION CALCULUS

AMSTERDAM
1957

ПРЕДИСЛОВИЕ

Открытие рефлексивного парадокса, состоящего в том, что понятие класса всех классов, которые не являются членами самих себя, является противоречивым, привело к возникновению трех новых направлений в математике. Первым из них была теория типов Рассела, одна из частей которой разделяла объекты на типы (так что классы объектов одного типа образовывали объекты следующего, более высокого типа) и запрещала образование классов смешанного типа. Эта теория привела к значительным усложнениям в построении арифметики, ибо она исключала не только парадоксы, но также и некоторые конструкции, лежащие в основе теории вещественных чисел, такие, как наименьшая верхняя граница ограниченного класса чисел, а восстановление возможности этих конструкций вызвало необходимость введения аксиомы, связывающей с пропозициональной функцией (пропозициональной формой с одной переменной), аргумент которой имеет своей областью изменения объекты данного типа, некоторую пропозициональную форму с теми же истинностными значениями, аргумент которой имеет своей областью изменения объекты первого типа. В более поздних формулировках теории множеств были предложены альтернативы теории типов (и аксиомы сводимости); эти альтернативные рассмотрения зиждутся на некоторых ограничениях на право быть элементом множества, усиленных (в случае систе-

мы Куайна) тем, что можно назвать возможностью соотнесения типов, согласно которой в любой истинной формуле в символизме без типов можно так приписать номера символам объектов, что каждый объект получит номер на единицу меньший, чем номер класса, которому он принадлежит.

Вторым направлением исследований, вызванных к жизни открытием рефлексивного парадокса, была «интуиционистская» логика и арифметика Брауэра, наиболее новаторской чертой которых был отказ от *закона исключенного третьего* (tertium non datur), — логического принципа, утверждающего, что всякое предложение является или истинным или ложным, причем не представляется никакой третьей возможности. Отвержение *закона исключенного третьего* устраняет рефлексивный парадокс*), ибо этот парадокс опирается на допущение, что всякий класс или является или не является членом самого себя, но оно также делает неверными обычные *интерпретации* значительной части арифметики (хотя Гёдель показал, что интуиционистская арифметика включает в себя всю классическую арифметику в том смысле, что любой формуле, доказуемой с помощью классической логики, соответствует формула, доказуемая средствами интуиционистской логики).

Третьей системой, которая была развита для того, чтобы избавиться от рефлексивного парадокса, была *рекурсивная* арифметика Сколема. Сколем заметил, что он может избежать этого парадокса без обращения к ограничениям теории типов и без удаления каких бы то ни было правил классической логики, если он не будет

*) Как заметил Х. Б. Карри, рефлексивный парадокс можно получить без использования закона исключенного третьего (с помощью импликации $(x \in x \leftrightarrow (x \in x \to A)) \to A$, выводимой средствами конструктивного исчисления высказываний без знака отрицания). — *Прим. ред.*

употреблять *существование* в качестве одного из первичных понятий логики. В исчислении, которое выражает всеобщность только при помощи свободных переменных, это приводит к *недопущению* применения *закона исключенного третьего* в тех случаях, когда это могло бы привести к парадоксу, так как исключено отрицание предложений, начинающихся со всеобщности.

Пожертвовав существованием как первоначальным понятием, Сколем лишился классического метода определения функций, и на его место он ввел *определения с помощью рекурсии*. Говорят, что функция $f(n)$ определяется с помощью рекурсии, если вместо того, чтобы определить ее явно (т. е. как сокращение для некоторого другого выражения), дается значение $f(0)$, и $f(n+1)$ выражается как некоторая функция от $f(n)$. Другими словами, рекурсивное определение определяет не саму $f(n)$, а дает процесс, следуя которому значения $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ и т. д. определяются одно за другим.

В следующем далее изложении рекурсивной арифметики мы показываем, что логику и арифметику можно строить одновременно в исчислении равенств со свободными переменными, в котором единственными утверждениями являются равенства вида $a = b$, где «a» и «b» означают функциональные выражения. С помощью этого исчисления равенств можно построить логику и арифметику *с самого начала, с полной строгостью* и *со всеми деталями* на значительно более элементарном уровне, чем было возможно до сих пор, и есть надежда, что первая половина этой книги окажется доступной первокурснику университета, специализирующемуся по математике. В этой части значительное количество более мелких деталей отделено от текста и представлено в виде примеров (с полными решениями

в конце книги) как для того, чтобы сделать текст более удобочитаемым, так и для того, чтобы помочь читателю усвоить новую технику на простых ситуациях.

Я хочу выразить сердечную благодарность профессору Гейтингу за тот благожелательный интерес, который он проявил к подготовке этой книги от первого рукописного наброска до окончательного машинописного текста; Джону Хулею за подготовку указателя и за щедрую помощь в чтении корректур и наборщикам Северо-Голландской издательской компании за великолепное качество их работы.

Р. Л. Гудстейн

Лейчестер, Англия

ВВЕДЕНИЕ

Природа чисел. Арифметика и игра в шахматы. Определение счета. Эволюция концепции формальной системы.

Природа чисел

Вопрос «какова природа математических сущностей?» является вопросом, который занимал мыслителей более двух тысяч лет и на который, оказывается, очень трудно ответить. Даже первое и наиболее существенное из этих понятий — натуральное число — неуловимо как блуждающий огонек, когда мы пытаемся определить его.

Один из источников трудностей определения того, чем же являются числа, — это отсутствие в окружающем мире чего бы то ни было, на что мы могли бы указать при поиске определения числа. Число семь, например, — это не какая-нибудь конкретная совокупность из семи объектов, ибо, если бы это было так, то ни о какой другой совокупности нельзя было бы сказать, что она имеет семь членов; действительно, если мы отождествляем свойство быть семью со свойством быть некоторой *конкретной* совокупностью, то быть семью является свойством, которым не обладает никакая *другая* совокупность. Более приемлемой попыткой определения числа семь было бы высказывание о том, что свойство быть семью является тем общим свойством, которым обладают *все* совокупности из семи объектов. Трудность, возникающая при этом определении, состоит в описании как раз того, что же на самом деле общего у всех совокупностей из семи объектов (даже если мы сделаем вид, что всегда можем рассмотреть *все* совокупности из семи объектов). Конечно, число объектов в некоторой совокупности не является свойством этой совокупности в том смысле, в каком цвет двери является ее свойством, ибо мы можем изменить цвет двери, но мы не

можем изменить число объектов в совокупности, не изменив самой совокупности. Утверждение о том, что дверь, бывшая красной, теперь зеленая, вполне согласуется со здравым смыслом, тогда как утверждение о том, что некоторая совокупность из семи бусин является той же самой совокупностью, что и некоторая совокупность из восьми бусин, есть чепуха. Если число членов совокупности является свойством совокупности, то оно является *определяющим* свойством совокупности, ее существенной характеристикой.

Это тем не менее нисколько не приближает нас к ответу на вопрос «Что общего у всех совокупностей из семи объектов?» Хороший способ продвинуться в решении проблемы такого рода — это задать себе вопрос «Как мы узнаем, что некоторая совокупность имеет семь членов?», потому что ответ на этот вопрос непременно должен привести к прояснению того, что́ является общим у совокупностей из семи объектов. Очевидный ответ состоит в том, что мы находим число членов совокупности, *считая* члены совокупности, но этот ответ не представляется убедительным, ибо, когда мы считаем члены совокупности, мы, оказывается, делаем не что иное, как «навешиваем» на каждый член совокупности «бирку» с некоторым числом. (Вообразите строй солдат, рассчитывающихся по порядку.) Ясно, что мы не получим определение числа, если скажем, что число есть свойство совокупности, которое находится сопоставлением чисел членам этой совокупности.

Определение Фреге — Рассела

Приписывание каждому члену совокупности некоторого числа, как мы, очевидно, делаем при счете, является на самом деле установлением соответствия между членами двух совокупностей: объектов, которые надо сосчитать, и натуральных чисел. Считая, например, совокупность из семи объектов, мы устанавливаем соответствие между считаемыми объектами и числами от одного до семи. Каждому объекту приписывается единственное число и каждое число (от одного до семи) приписывается некоторому объекту данной совокупности. Если мы говорим, что две совокупности *подобны*, когда каждый объект одной из них имеет единственный соответствующий ему объект в другой, то можно сказать, что пересчет некоторой совокупности означает нахождение совокупности чисел, подобной данной. Так как подобие является транзитивным свойством, т. е. две совокупности подобны, если каждая из них подобна третьей, то, следовательно, подобие мы можем считать свойством, общим всем совокупностям, содержащим одно и то же число членов, — свойством, которое мы искали, а так как само подобие определяется безотносительно к числу, оно, конечно, может быть использовано в определении числа. Чтобы завершить определение, нам нужно только выделить определенные стандартные совокупности из одного, двух, трех и т. д. членов; тогда будем говорить, что некоторая совокупность имеет определенное число членов, если только она подобна стандартной совокупности, имеющей то же число членов. Сами числа можно сделать требуемыми стандартами следующим образом. Мы определяем пустую совокупность как свойство не быть тождественным себе, и тогда число нуль определяется как свойство быть подобным пустой совокупности. Затем мы определяем стандартную единичную совокупность как совокупность, единственным членом которой является число нуль, и число один определяется как свойство быть подобным единичной совокупности. Далее в качестве стандартной пары берется совокупность, членами которой являются нуль и единица, и число два определяется как свойство быть подобным стандартной паре, и т. д. Это фактически определение числа, открытое Фреге в 1884 году и независимо Расселом в 1904 году. Его нельзя, однако, принять как полный ответ на вопрос о природе чисел. Согласно этому определению число есть отношение подобия между совокупностями, при котором каждый элемент одной совокупности ставится в *соответствие* определенному элементу другой, и наоборот. Недостаток этого определения кроется в понятии *соответствия*. Как мы узнаем, что два элемента находятся в соответствии? Чашки и блюдца в совокупности чашек, стоящих на своих блюдцах, находятся в очевидном соответствии, но каково соответствие между,

например, планетами и музами? Мало помогает упоминание о том, что хотя нет явного соответствия между планетами и музами, мы можем легко установить его; ибо, как мы узнаем об этом, и, что важнее, какого рода соответствие мы допускаем? Определяя число в терминах подобия, мы, в сущности, заменили неуловимую концепцию числа столь же неуловимой концепцией соответствия.

*Число и цифра *)*

Некоторые математики пытались избежать трудностей в определении чисел, отождествляя числа с цифрами. Число один отождествляется с цифрой I, число два с цифрой II, число три с III и т. д. Но эта попытка неудачна, так как каждый осознает, что свойства цифр не являются свойствами чисел. Цифры могут быть синими или красными, печатными или рукописными, потерянными или найденными, но совершенно бессмысленно приписывать эти свойства числам, и, наоборот, числа могут быть четные или нечетные, простые или составные, но это — не свойства цифр. При более тонком варианте той же попытки определить числа в терминах цифр числа считаются не тем же самым, что и цифры, а *именами* цифр; при этом устраняются нелепости, возникающие при попытке *отождествить* число и цифру, но это приводит к равно абсурдному заключению, что некоторое одно *обозначение* является квинтэссенцией числа. Дело в том, что если числа являются именами цифр, то мы должны решить, которые цифры они называют; мы не можем считать число десять, например, названием как римской, так и арабской цифры. А если говорится, что число десять является именем всех цифр десять, то мы приходим к абсурдному заключению, что значение слова, сопоставленного числу, меняется с введением каждого нового обозначения.

Противоположность «числа» и «цифры» является противоположностью, обычной для языка, и, возможно, ее

*) Термином «цифра» переведено английское слово «numeral». — *Прим. перев.*

наиболее характерную черту можно обнаружить в паре терминов «высказывание» и «предложение».

Предложение является некоторой физической реализацией высказывания, но его нельзя отождествлять с высказыванием, так как разные предложения (например, в разных языках) могут выражать одно и то же высказывание. Если же мы попытаемся сказать, что же такое выражают предложения, то обнаружим, что охарактеризовать концепцию высказывания так же трудно, как и концепцию числа. Иногда считается, что высказывание — это нечто в нашем сознании в противоположность предложению, которое находится во внешнем мире; но если это означает, что высказывание есть некоторый вид мысленного образа, то это является лишь очередным случаем путаницы высказывания с предложением, ибо все, что бы ни возникало в нашем мозгу, — будь то мысль в словах, или картина, или даже более или менее аморфное чувство, — все это является *представлением* данного высказывания, отличным от написанного или произнесенного слова только потому, что оно не является средством общения. Таким же образом можно видеть, что точка зрения, считающая, что число неопределимо, а есть нечто, познаваемое нашей интуицией, снова путает число с цифрой, т. е. путает число с одним из его представлений.

Арифметика и игра в шахматы

Как часто замечалось, можно провести замечательную параллель между игрой в шахматы и математикой (или даже самим языком). Цифрам ставятся в соответствие шахматные фигуры, а операциям арифметики — ходы этой игры. Но параллель продолжается даже дальше, ибо проблеме определения числа соответствует проблема определения сущности игры. Если мы зададимся вопросом «Что такое шахматный король?», то мы обнаружим точно те же трудности при попытке ответить на этот вопрос, какие мы встретили при наших рассмотрениях проблемы определения понятия числа. Несомненно, шахматный король, ходы которого описываются

правилами игры, не есть фигура с характерными очертаниями, которую мы *называем* королем, так же как цифра не есть число, ибо любой другой объект, например, спичка или кусочек угля, столь же хорошо служил бы королем для игры. Вместо вопроса «Что такое шахматный король?» давайте спросим: «Что делает некоторую конкретную фигуру королем?». Ясно, что это не очертания этой фигуры и не ее размер, ибо и то, и другое может быть по желанию изменено. То, что делает фигуру королем, — это ее *ходы*. Та фигура является королем, которая может ходить как король. А шахматный король сам по себе? Шахматный король — это просто одна из *ролей*, которые играют фигуры в шахматах, так же как Король Лир — это роль в драме Шекспира; актер, играющий Короля, является королем в силу той *роли*, которую он исполняет, благодаря тем предложениям, которые он произносит, и тем действиям, которые он совершает (а не просто потому, что он одет как король) и фигура на шахматной доске, играющая роль короля в игре, является фигурой, которая совершает ходы короля.

Теперь, наконец, мы обнаруживаем ответ на вопрос о природе чисел. Мы видим, прежде всего, что для понимания смысла чисел нам надо обратиться к той «игре», в которую играют числами, т. е. к арифметике. Числа один, два, три и т. д. являются действующими лицами в игре арифметика, фигуры, которые исполняют их роли, являются цифрами, а то, что делает некоторый знак цифрой, соответствующей конкретному числу, — это та роль, которую она играет, или, как можно сказать словами, более подходящими контексту, — это *правила преобразования* данного знака. Поэтому, следовательно, *объектом нашего изучения является не само число*, а *правила преобразования числовых знаков*, и в последующих главах у нас больше не будет причины рассматривать понятие числа. Но так же, как шахматные правила обычно формулируют в терминах шахматных понятий, так что, например, мы говорим, что шахматный король ходит только на одну клетку за один ход (исключая рокировку), вместо полностью эквивалентной формулировки «фигура, играющая роль короля (или просто фигура-

король) передвигается на одну клетку за ход (исключая рокировку)», так и мы будем продолжать формулировать в чисто описательных местах операции арифметики в терминах арифметических сущностей, а не в терминах арифметических знаков. Например, мы можем говорить о «сумме чисел два и три», а не придерживаться формулировки в знаках «2 + 3», где «+» это знак, роль которого в арифметике — это то, что называется сложением, а «2» и «3» — цифры, которые играют роль чисел два и три. Другими словами, при определении роли, которую играет в арифметике знак, подобный «+», мы будем говорить, что определяемый нами объект является функцией сумма, но само определение будет относиться лишь к операциям для преобразования *выражений*, содержащих знак «+».

Числовые переменные

Аналогия между шахматами и арифметикой перестает иметь место, когда мы противопоставляем определенное множество фигур в игре в шахматы и имеющееся в арифметике разрешение строить цифры по желанию. В этом отношении арифметика больше похожа на *язык*, который не налагает в принципе никакого ограничения на длину своих слов. Обычное обозначение для цифр изображает их как слова в алфавите «0», «1» и «+»; каждое «слово» начинается с «0», за которым следуют пары «+1». Так, например, мы образуем по очереди «0», «0 + 1», «0 + 1 + 1», «0 + 1 + 1 + 1». Образование цифр может быть *полностью* охарактеризовано с помощью двух операций следующим образом. Мы расширяем алфавит введением нового знака «x» и образуем «слова», подставляя вместо «x» или «0», или «$x + 1$»; например, мы можем по очереди образовать «x», «$x + 1$», «$x + 1 + 1$», «$x + 1 + 1 + 1$», «0+1+1+1»; последнее из этих выражений является цифрой. Этот новый знак мы называем «цифровой переменной». Правила, разрешающие подстановку «$x + 1$» или «0» вместо «x», фактически позволяют подстановку *любого числа* вместо x; цель формулировки, принятой нами, состоит в том, что она служит для определения понятия *произволь-*

ной цифры и одновременно понятия *цифровой переменной*. Впоследствии не только буква x, но и другие буквы тоже будут употребляться как цифровые переменные.

Цифра, получаемая подстановкой некоторой цифры вместо «x» в «$x + 1$», называется цифрой, *следующей за* данной. Например, написав «$0 + 1 + 1$» вместо «x» в «$x + 1$», мы получаем «$0 + 1 + 1 + 1$» — цифру, следующую за «$0 + 1 + 1$». По этой причине «$x + 1$» называется *функцией* (знаком функции) *следования*. Однозначность этого названия является, однако, несколько вводящей в заблуждение, ибо вместо x мы можем писать любую другую букву, употребляемую как цифровая переменная; в системе, где x, y и z все являются цифровыми переменными, каждое из выражений «$x+1$», «$y + 1$», «$z + 1$» является знаком функции следования. Тем не менее мы будем говорить о *единственности* функции следования, поскольку единственность, о которой идет речь, есть единственность знака, который мы получаем в результате подстановки некоторой определенной цифры вместо переменной, будь то x, y или z.

С целью стандартизации обозначений мы в нужный момент вместо „алфавита" «0», «1» и «+» введем для записи цифр „алфавит" «0», «S», в котором цифрами являются «0», «$S0$», «$SS0$», «$SSS0$» и т. д. В этих обозначениях знаком функции следования является «Sx», а правилами преобразований для цифр — (i) Sx можно писать вместо x, (ii) 0 можно писать вместо x. В качестве еще одного общеупотребительного обозначения для функции следования используется «x'»; в этом случае цифры записываются так: «0», «0′», «0″», «0‴» и т. д.

Определение счета

Никакая теория натуральных чисел не является завершенной, если она не учитывает ту роль, которую числа играют *вне* арифметики. Свойством числа девять является не только то, что оно есть квадрат, но и то, что оно есть число планет, а это последнее свойство не является просто следствием законов арифметики. Согласно определению числа по Фреге — Расселу число членов некоторой совокупности отыскивается путем проверки ее подобия со стандартными одно-, двух-, трех- и т. д. элементными совокупностями, в то время как в свою очередь эта проверка производится с помощью процесса счета, но поскольку мы предложили определение числа, не опирающееся на не определенное понятие соответствия подобия, то мы не можем принять счет в смысле Фреге — Рассела как средство нахождения числа членов класса без того, чтобы снова допустить это неопределенное понятие. Имеется, однако, совсем другая интерпретация процесса счета, которая делает счет приемлемым для нас в качестве средства регистрирования числа членов совокупности без нарушения наложенного нами ограничения выражать свойства чисел в терминах правил преобразования числовых знаков. Мы начнем с разделения двух отчетливых этапов в процессе счета. Первый из них — тот, который мы будем называть «использование совокупности в качестве цифры», — состоит в том, что игнорируются индивидуальные „черты характера" элементов данной совокупности, и они считаются все одинаковыми (но не тождественными) для нашей цели. Это просто (возможно, довольно крайняя) форма рассмотрения знаков, одинаковых на всех этапах чтения, письма и разговора; например, буквы «a» на печатной странице имеют некоторые различия, а будучи подвергнуты достаточно внимательному осмотру, оказываются столь же различными, сколь, скажем, солдаты во взводе, но для целей чтения мы игнорируем эти различия и рассматриваем разные a как один и тот же знак. Точно так же при разговоре мы считаем одним и тем же звуком несколько слегка разных звуков. В другом контексте знаки, которые мы считали бы одними и теми же при чтении, являются различными — например, когда мы проверяем качество печати. Этот процесс, при котором мы замечаем одни различия и не замечаем другие, играет в языке фундаментальную роль; он является процессом, с помощью которого мы объединяем объекты с „фамильным сходством" некоторым родовым именем, и процессом, который делает возможным употребление в языке терминов обобщающих понятий. Без него никогда бы не возникло понятие числа элементов класса. Второй этап процесса счета состоит в переходе от одного числового

обозначения к другому по правилам «один и один — два», «два и один — три», «три и один — четыре» и т. д. Это чтение указанных правил (в сокращенной форме, где « и один» каждый раз опускается или заменяется указанием на считаемый объект или прикосновением к нему) создает иллюзию, что при счете мы связываем некоторое число с каждым из пересчитываемых элементов, тогда как на самом деле мы делаем перевод с обозначений, в которых числовыми знаками являются «один», «один и один», « один и один и один» и т. д., в обозначения, в которых этими знаками являются «один», «два», «три» и т. д. Истинная природа счета, возможно, выявится наиболее ясно, если мы снова введем ранее упомянутый процесс счета с помощью бирки*). Счет данной совокупности с помощью бирки состоит в некотором формализованном представлении элементов этой совокупности, скажем, посредством черточек на листе бумаги, так что при счете по бирке мы *переписываем* числовой знак в некотором стандартном обозначении — находим число членов данной совокупности, рассматривая ее как числовой знак и переписывая этот знак. Бирка для числа планет состоит из ряда черточек

$$111111111.$$

Если теперь мы перейдем к преобразованию этого знака с помощью наших правил преобразований $11=2$, $21=3$, $31=4$, $41=5$, $51=6$, $61=7$, $71=8$, $81=9$, мы последовательно получим $111111111 = 21111111 = 3111111 = 411111 = 51111 = 6111 = 711 = 81 = 9$, что завершает преобразование. При таком счете, какому мы учим сегодня, процесс построения отметок на бирке и преобразование знаков выполняются одновременно, тем самым избегается повторное переписывание „хвоста" числового знака в процессе преобразования к арабской цифре. Важно понять, что счет не находит число членов некоторой совокупности, *а преобразует цифру, которой*

*) «Бирка» — дощечка, на которой нарезками отмечают счет. — *Прим. перев.*

является сама эта совокупность, из одних обозначений в другие. Сказать, что любая совокупность имеет число членов, — это все равно, что сказать, что любую совокупность можно использовать как числовой знак.

Формализация счета

Счет можно формализовать в некоторой знаковой системе посредством формулирования правил преобразования для пересчитывающего оператора «N». Мы представляем объекты пересчитываемых совокупностей буквами a, b, c, ..., а совокупности — посредством конъюнкций вида $a\&b$, $a\&b\&c$, ...; причем единичный объект рассматривается так же как совокупность. Букву l мы используем в качестве переменной для объектов, т. е. как букву, вместо которой можно написать любой объект; прописная буква L служит для совокупностей и может быть в любом тексте заменена определенной совокупностью или выражением «$L\,\&\,l$». Цифрами системы являются знаки (кроме x), получаемые из l, x и функции следования $x+1$ подстановкой. Далее мы определяем

$$N(l)=1, \quad N(L\,\&\,l)=N(L)+1.$$

Эти равенства достаточны для определения числа членов любой совокупности*). Например, подставляя «a» вместо знака переменной «l», во-первых, мы получаем $N(a)=1$, и во-вторых, подставляя затем «a» вместо «L» и «b» вместо «l» мы получаем

$$N(a\,\&\,b)=N(a)+1,$$

и, значит,

$$N(a\,\&\,b)=1+1.$$

Далее, подставляя «$a\,\&\,b$» вместо «L» и «c» вместо «l», мы имеем

$$N(a\,\&\,b\,\&\,c)=N(a\,\&\,b)+1=1+1+1.$$

Мы видим, что $N(L)$ определяется с помощью рекурсии, т. е. $N(L)$ не есть просто сокращение для

*) Имеются в виду совокупности, заданные списками. — *Прим. ред.*

некоторого другого выражения, как, например, когда мы полагаем $2 = 1 + 1$, знак «2» можно заменить на выражение «1 + 1», для которого он, в сущности, является сокращением, а $N(L)$ определяется только *шаг за шагом* путем введения членов пересчитываемого класса по одному (или отбрасывания их по одному) на каждом шаге. Мы можем выразить это, сказав, что для переменной L само $N(L)$ не определено, и лишь результат подстановки каждого конкретного класса (вроде $a \& b \& c$) вместо L определен с помощью рекурсивного определения. Это рекурсивное определение является, так сказать, *схемой* или *шаблоном*, по которому для любого конкретного класса $a \& b \& \ldots \& k$ можно получить определение (значение) $N(a \& b \& \ldots \& k)$.

Эволюция понятия формальной системы

В последующих главах мы будем излагать арифметику как *формальную систему*. Идея формальной системы — это идея, которая развилась из построения геометрии Евклидом, но это понятие значительно развилось за последнее столетие. Намерение Евклида в «*Началах*» состояло в том, чтобы вывести все геометрические знания его времени из немногих самоочевидных истин (называемых аксиомами) с помощью чисто логических рассуждений. Евклид, однако, не уточнял природу „логических рассуждений", а первая попытка сделать это была предпринята Джорджем Булем в 1847 году в его *Математическом анализе логики*. Буль построил символический язык, в котором „законы мышления", сформулированные в виде аксиом, можно изучать с помощью математической техники. Полное развитие этого понятия привело к тому, что формальная система слагается из набора знаков, разделенных на различные категории, из разнообразных соглашений об их употреблении (аксиомы и правила преобразований); при этом система предназначена для образования последовательностей формул (которые сами суть последовательности знаков с некоторыми специфическими правилами образования), связанных друг с другом определенным образом так, чтобы получилась некоторая специальная фигура, называемая *доказательством*. Формальная система может содержать как математические, так и логические знаки (различие между которыми условно), и математические и логические аксиомы; ее существенной чертой *как формальной системы* является то, что ее операции не предполагают никакого знания смысла знаков этой системы, кроме того, который дан аксиомами и правилами преобразований. Математические аксиомы не являются больше «самоочевидными истинами», — они суть произвольные начальные позиции в некоторой игре, а логические аксиомы выражают не «законы мышления», а произвольные соглашения об использовании логических знаков.

В той формальной системе, с которой мы прежде всего столкнемся в этой книге, — в исчислении равенств, — знаками будут только знаки для функций, цифровые переменные и знак равенства. Там нет никаких аксиом, кроме равенств, вводящих функциональные знаки, и нет никакого обращения к „логике", причем работа системы определяется просто правилами преобразования для математических знаков. Показывается, что некоторая часть логики *определима в исчислении равенств*, а логические знаки и теоремы вводятся как удобные *сокращения* для некоторых функций и формул. Эта часть логики характеризуется тем, что *существование* числа с данным свойством в ней может утверждаться только тогда, когда искомое число может быть найдено за точно определенное число шагов.

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПО РЕКУРСИИ

Арифметические операции. Определение итерации и рекурсии. Сокращенная символика. Одинарные и кратные рекурсии.

1. *Переменные*

Мы уже имели случай — при определении цифры — использовать букву в качестве знака для переменной.

В терминах двух операций

(1) заменить x на $x+1$,

(2) заменить x на 0,

мы определили цифры как знаки, получаемые из x путем повторного применения операции (1), за которым следует применение операции (2). Начинающийся со знака x процесс построения цифр можно рассматривать как процесс исключения x с использованием лишь операций (1) и (2). Например, цифра $0+1+1+1$ строится из x с помощью трех применений операции (1), за которыми следует применение операции (2). Определяющим свойством цифровой переменной x является то, что ее можно заменять на нуль или $x+1$. Конечно, любая буква может служить цифровой переменной, но в настоящей главе будут использованы только буквы x, y, z и w. Употребляя переменные, мы можем формулировать общие утверждения о числах — утверждения, которые истинны, если вместо переменной подставить любую конкретную цифру.

1.1. *Сложение*

Основной операцией арифметики является *сложение*. Сложение — это операция соединения двух цифр с помощью знака сложения «+». Например, соединяя две цифры, $0+1+1+1+1$ и $0+1+1$, мы получаем (опуская начальную часть 0+ во второй цифре) цифру

$0+1+1+1+1+1+1+1$, которая называется *суммой* $0+1+1+1+1$ и $0+1+1$.

Однако сказать, что сложение есть операция соединения двух цифр, не значит дать *математическое* представление этой операции, ибо мы просто заменили слово *сложение* неопределенным термином *соединение*. Очевидно, что имеется много способов, которыми мы могли бы соединять две цифры, но лишь один из них дает то, что мы подразумеваем под сложением. Математическое определение сложения нужно формулировать в терминах только цифровых переменных и знака сложения «+»; не следует вводить никаких посторонних элементов. Ребенок сначала учится складывать с помощью простого присоединения цифр; например, для того чтобы найти сумму 3 и 4, он из ··· и ···· комбинирует ····· и «считает эти точки», т. е. преобразует ····· в 7. Позже он учится из 3 получать 7 повторным прибавлением 1, и этот значительно более экономичный процесс является основой следующего формального определения:

A

$$x+0=x, \qquad A_1$$

$$x+(y+1)=(x+y)+1. \qquad A_2$$

Знак «=» здесь означает, что выражения, стоящие с каждой стороны от него, *эквивалентны* в том смысле, что каждое из них может быть замещено другим; иначе говоря, A_1 и A_2 выражают правила преобразования, по которым одно знаковое выражение может быть преобразовано в другое. (Конечно, знак равенства «=» используется в математике и в совсем другом смысле, к которому у нас будет случай обратиться позже.)

Переменная x в равенстве A_1 может быть по определению заменена на 0 или на $x+1$; следовательно, x может быть заменена *любой цифрой*, ибо цифры строятся из x с помощью этих же самых подстановок. И, аналогично, как x, так и y в A_2 могут быть замещены любой цифрой.

Чтобы проиллюстрировать преобразования A, мы выразим цифрой сумму 5 и 4. Подставляя 5 вместо x

в A_1 и A_2 и по очереди 0, 1, 2, 3 вместо y в A_2, мы получаем

$$5+0=5, \quad 5+1=6,$$
$$5+2=(5+1)+1=6+1=7,$$
$$5+3=(5+2)+1=7+1=8,$$
$$5+4=(5+3)+1=8+1=9.$$

Каждый промежуточный результат после первого получается с помощью предыдущего результата; например, мы переходим от $(5+2)+1$ к $7+1$ с помощью ранее полученного равенства $5+2=7$.

1.11. Сложение трех или более цифр определяется в терминах повторного сложения пар. Так, например, мы определяем:

$$A' \qquad x+y+z=(x+y)+z,$$
$$A'' \qquad x+y+z+w=((x+y)+z)+w$$

и т. д.

В эти определения, как и в определение A, складываемые числа входят *несимметрично*. В определение A переменные x и y входят не на одинаковых основаниях, и совсем не очевидно, что $x+y=y+x$. В A′ все три слагаемых x, y, z складываются именно в этом порядке и так же в A″. Мы докажем в следующей главе, что сумма двух цифр не зависит от порядка, в котором они складываются; отсюда следует, например, что

$$y+x+z=(y+x)+z=(x+y)+z=x+y+z.$$

Это равенство $x+y+z$ и $y+x+z$ требует тем не менее отдельного доказательства, а общее доказательство того, что сложение любого числа слагаемых полностью симметрично, значительно более трудно. Определение суммы *переменного* числа слагаемых является задачей, к которой мы вернемся позже; но имеется специальный случай, который мы рассмотрим сейчас, — это случай *повторного сложения* одного и того же числа.

1.2. *Умножение*

Повторное сложение одного и того же числа называется *умножением*; суммы $x+x$, $x+x+x$, $x+x+x+x$ и т. д. обозначаются соответственно через $2\cdot x$, $3\cdot x$, $4\cdot x$ и т. д., при этом первый член пары обозначает число повторений второго члена. Формальное определение умножения следующее:

$$0\cdot x=0, \qquad M_1$$

M

$$(y+1)\cdot x=(y\cdot x)+x. \qquad M_2$$

Подставляя по очереди 0, 1, 2 и т. д. вместо y в M_2 (и используя M_1), мы имеем поочередно:

$$1\cdot x=0+x=x, \quad 2\cdot x=1\cdot x+x=x+x, \quad 3\cdot x=2\cdot x+x=x+x+x$$

и т. д. Выражение $x\cdot y$ называется *произведением* x и y; когда это не вызывает двусмысленности, мы будем обозначать произведение x и y через xy, опуская точку между сомножителями.

1.21. Произведение трех или более членов определяется в терминах произведений пар. Так,

$$x\cdot y\cdot z=(x\cdot y)\cdot z,$$
$$x\cdot y\cdot z\cdot w=(x\cdot y\cdot z)\cdot w.$$

Умножение, как и сложение, — симметричная операция, но доказательство этого также следует отложить до тех пор, пока у нас не будет в распоряжении необходимых средств доказательства.

1.3. *Возведение в степень*

Повторное умножение одного и того же числа называется *возведением в степень*; произведения $x\cdot x$, $x\cdot x\cdot x$, $x\cdot x\cdot x\cdot x$ и т. д. обозначаются соответственно через x^2, x^3, x^4 и т. д.; «показатель» означает число повторений основания. Формальное определение x^y такое:

$$x^0=1, \qquad E_1$$

E

$$x^{(y+1)}=(x^y)\cdot x. \qquad E_2$$

Подставляя по очереди 0, 1, 2 и т. д. вместо y в E_2 (и используя E_1), мы получаем соответственно

$$x^1 = 1 \cdot x = x, \quad x^2 = x^1 \cdot x = x \cdot x, \quad x^3 = x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x$$

и т. д.

Возведение в степень не является симметричной операцией; иначе говоря, x^y и y^x в общем случае различны. Точно так же, как мы переходим от сложения к умножению и от умножения к возведению в степень, итерируя одно и то же число, мы можем определить итерацией дальнейшие операции. Эти операции не имеют установившихся названий, так что мы будем называть их просто тетрация, пентация, гексация, гептация и т. д. Обозначая возведения в степень x^x, x^{x^x}, $x^{x^{x^x}}$ и т. д. соответственно через ${}^2x$, ${}^3x$, ${}^4x$ и т. д., мы определим ${}^yx$ так:

T
$$ {}^0x = 1, \qquad T_1$$
$$ {}^{(y+1)}x = x^{({}^yx)}, \qquad T_2$$

так что, полагая $y = 0, 1, 2$, мы имеем поочередно

$${}^1x = x, \quad {}^2x = x^x, \quad {}^3x = x^{(x^x)} = x^{x^x}$$

и т. д.

Аналогично, если мы обозначим x, ${}^xx$, ${}^{x^x}x$, ... соответственно через ${}_1x$, ${}_2x$, ${}_3x$, ..., мы можем определить

P
$$ {}_0x = 1, \qquad P_1$$
$$ {}_{(y+1)}x = {}_{({}^yx)}x. \qquad P_2$$

1.4. *Вычитание*

Осталось определить еще одну фундаментальную операцию арифметики натуральных чисел, а именно *вычитание*, обратную сложению. Сначала мы введем обращение операции $+1$, которое мы обозначим через $\dot{-}1$, следующим формальным определением:

$$0 \dot{-} 1 = 0,$$
$$(x+1) \dot{-} 1 = x,$$

и затем разность $x \dot{-} y$ определяется так:

S
$$x \dot{-} 0 = x,$$
$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1.$$

Употреблением модифицированного знака вычитания $\dot{-}$ вместо обычного — мы подчеркиваем существенное различие между приведенным определением вычитания и определением вычитания в элементарной арифметике. Если x не меньше, чем y, то $x \dot{-} y$ имеет свое обычное значение, и, как мы впоследствии покажем, $y + (x \dot{-} y) = x$; но если x меньше, чем y, определение S приписывает $x \dot{-} y$ значение 0, так что $y + (x \dot{-} y) = y$.

Наконец, мы определим $|x, y|$ — *положительную разность* между x и y — равенством

$$|x, y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x).$$

1.5. *Функции*

Выражения, получаемые из переменных, такие как x^3, $x + y$ или $x \cdot y \cdot z$, называются *функциями* *); более точно, функция — это операция над числами, определяемая с помощью переменных. Те несколько обозначений, с помощью которых мы выражали функции до сих пор, имеют существенное историческое и техническое значения, но их пестрота ведет к тому, что скрывается их основная структура; поэтому мы введем стандартизованные обозначения. Мы будем обозначать функцию именем операции (если необходимо, сокращенным), предшествующим используемым переменным. Так, функция следования $x + 1$ будет обозначаться через $S(x)$ (и поэтому цифры — через 0, $S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ и т. д.), функция сложения $x + y$ — через $\mathrm{Sum}(x, y)$, произведение $x \cdot y$ — через $\mathrm{Prod}(x, y)$ и возведение в степень — через $\mathrm{Exp}(x, y)$; скобки в этих выражениях, так же как и запятая между переменными, являются

*) Автор не различает функциональные выражения (в другой терминологии — термы) и символы функций. Чаще всего автор называет функциями именно термы. Более четкая терминология введена в статье Х. Б. Карри «Формализация рекурсивной арифметики» (см. настоящую книгу). — *Прим. перев.*

несущественными частями этих выражений, но они включены для удобства чтения и будут опускаться, когда это не будет приводить к двусмысленности.

В стандартизованных обозначениях определения A, M, E, T и S принимают вид

A
$$\mathbf{Sum}(x, 0) = x,$$
$$\mathbf{Sum}(x, Sy) = S(\mathbf{Sum}(x, y)),$$

M
$$\mathbf{Prod}(x, 0) = 0,$$
$$\mathbf{Prod}(x, Sy) = \mathbf{Sum}(x, \mathbf{Prod}(x, y)),$$

E
$$\mathbf{Exp}(x, 0) = 1,$$
$$\mathbf{Exp}(x, Sy) = \mathbf{Prod}(x, \mathbf{Exp}(x, y)),$$

T
$$\mathbf{Tet}(x, 0) = 1,$$
$$\mathbf{Tet}(x, Sy) = \mathbf{Exp}(x, \mathbf{Tet}(x, y)),$$

S
$$\mathbf{Dif}(x, 0) = x,$$
$$\mathbf{Dif}(x, Sy) = P(\mathbf{Dif}(x, y)),$$

где $P(x)$ — это $x \dot{-} 1$, определяемый так:

$$P(0) = 0,$$
$$PSx = x.$$

Общая черта всех определений от A до S очевидна; каждое определение имеет вид

I
$$F(x, 0) = a(x),$$
$$F(x, Sy) = b(x, F(x, y)),$$

где $F(x, y)$ — определяемая функция, а $a(x)$, $b(x, y)$ — или ранее определенные функции, или переменные, или конкретные цифры.

Схема определения I называется *итерацией*; определение с помощью итерации является частным случаем

определения с помощью рекурсии, схема которой такова:

R
$$F(x, 0) = a(x),$$
$$F(x, Sy) = b(x, y, F(x, y)).$$

(Разница между итерацией и рекурсией состоит в том, что в последней функция b зависит не только от x и $F(x, y)$, но и от y.)

Примером функции, которую можно определить по схеме R, является сумма геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = G(x, n),$$

которая удовлетворяет равенствам

$$G(x, 0) = 1,$$
$$G(x, Sn) = B(x, n, G(x, n)),$$

где $B(x, y, z) = \mathrm{Sum}(\mathrm{Exp}(x, y + 1), z)$.

Более точно, схема R называется *рекурсией по* y; вторая переменная x называется *параметром* этой схемы. На число параметров не налагается никаких ограничений, так что, например, схема

R*
$$F(0, y, z, w) = a(y, z, w),$$
$$F(Sx, y, z, w) = b(x, y, z, w, F(x, y, z, w))$$

также называется рекурсией (по x).

Переменные в выражении некоторой функции, такие как x, y, z в $F(x, y, z)$, иногда называются *аргументами* этой функции. Если можно найти (единственную) цифру f такую, что $F(a, b, \ldots) = f$, где a, b, ... обозначают определенные цифры, то f называется *значением* функции $F(x, y, \ldots)$ для значений a, b, ... аргументов x, y, ... функции $F(x, y, \ldots)$. Характеристическим свойством функции $F(x, y, \ldots)$, определяемой с помощью рекурсии, является то, что значение $F(x, y, \ldots)$ определено для любого множества значений аргументов в предположении, что вспомогательные функции в определяющей схеме обладают этим же свойством;

действительно, $F(0, y, \ldots)$ — известная функция, а значение $F(Sx, y, \ldots)$ определено, если известно значение $F(x, y, \ldots)$, ибо $F(Sx, y, \ldots)$ выражается в терминах $F(x, y, \ldots)$ с помощью некоторой функции с известными значениями.

1.6. В следующей главе будет видно, что введение вспомогательных параметров, как в схеме R*, является на самом деле излишним, и что достаточно рассматривать только простейшую схему рекурсии

$$F(0) = 0,$$
$$F(Sx) = b(F(x)),$$

в которой совсем нет параметров. Мы перечислим здесь для будущих ссылок три функции, играющие в этом сведении важную роль. Это

$$\mathrm{Alt}\, x, \quad \mathrm{Hf}\, x = [x/2] \quad \text{и} \quad \mathrm{Rt}\, x = [x^{1/2}],$$

определяемые следующими рекурсиями:

(i) $\mathrm{Alt}\, 0 = 0, \quad \mathrm{Alt}\, Sx = 1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, x,$

так что $\mathrm{Alt}\, 1 = 1$, $\mathrm{Alt}\, 2 = 0$, $\mathrm{Alt}\, 3 = 1$ и т. д.,

(ii) $\mathrm{Hf}\, 0 = 0, \quad \mathrm{Hf}\, Sx = \mathrm{Hf}\, x + \mathrm{Alt}\, x,$

так что $\mathrm{Hf}\, 1 = 0$, $\mathrm{Hf}\, 2 = 1$, $\mathrm{Hf}\, 3 = 1$, и т. д., т. е. $\mathrm{Hf}\, 2x = \mathrm{Hf}(2x + 1) = x$;

(iii) $\mathrm{Rt}\, 0 = 0, \quad \mathrm{Rt}\, Sx = \mathrm{Rt}\, x + \{1 \dot{-} p(x, \mathrm{Rt}\, x)\},$

где $p(x, y) = (Sy)^2 \dot{-} Sx$; поэтому $\mathrm{Rt}\, Sx$ получается из $\mathrm{Rt}\, x$ прибавлением 1, если Sx — следующий после $(\mathrm{Rt}\, x)^2$ квадрат, и прибавлением 0 в противоположном случае, т. е. $\mathrm{Rt}\, x$ есть наибольшее число, квадрат которого не превосходит x.

1.61. *Сокращенное обозначение*

Когда функция определена простейшей рекурсией

$$F(0) = 0, \quad F(Sx) = b(F(x)),$$

ее последовательные значения $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, ... представляются выражениями $b(0)$, $bb(0)$, $bbb(0)$, ..., и естественно обозначать их через $b^1(0)$, $b^2(0)$, $b^3(0)$, ...,

так что $F(x)$ можно выразить в виде $b^x(0)$, где $b^0(0)$ есть 0. Поэтому, так как $x + y$ определяется так, что

$$x + 0 = 0, \quad x + Sy = S(x + y),$$

то $x + 1 = Sx$, $x + 2 = S^2(x)$, $x + 3 = S^3(x)$, ...; следовательно, $x + y$ можно представить в виде $S^y(x)$, где $S^0(x)$ обозначает x.

1.7. *Подстановка*

Простейшей операцией, с помощью которой можно построить новую функцию из данных функций, является *подстановка.*

Если дана некоторая функция произвольного числа переменных, например, функция $P(a, b, c, d)$ четырех переменных, и даны произвольные четыре функции, скажем, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$, $D(x, y, z)$, то можно определить новую функцию $F(x, y, z)$ с помощью равенства

Subst $$F(x, y, z) = P(A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z), D(x, y, z)).$$

Говорят, что так определенная функция F построена из функций P, A, B, C и D с помощью подстановки в P. Например, в определении сложения $x + Sy$ построена из $x + y$ и S с помощью подстановки в Sx.

Об определении типа *Subst* говорят еще, что оно является *явным* определением функции F, в противовес рекурсивному определению. В явном определении каждая переменная, входящая в правую часть уравнения, должна также входить в новую функцию слева, но в левой части могут быть и дополнительные переменные *).

1.8. *Исходные функции*

Часто бывает удобно уметь выражать какую-либо переменную или некоторую цифру в виде функции.

*) Например, введение функции I_i^n посредством равенства $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ является определением типа *Subst*. — *Прим. ред.*

Для этой цели мы вводим ряд специальных функций. Первая из них — это нулевая функция $Z(x)$, определяемая равенством

$$Z(x) = 0.$$

Это определение можно представить рекурсивно в виде

$$Z(0) = 0, \quad ZS(x) = Z(x),$$

но явное определение потребуется в дальнейшем. В дополнение к нулевой функции мы определяем также тождественную функцию $\mathcal{I}$ равенством

$$\mathcal{I}(x) = x.$$

Из нулевой функции мы можем получить любую константную функцию с помощью подстановки в функцию следования Sx. Например, функция $C(x)$ со значением 2 для любых значений x определяется так:

$$C(x) = S^2Z(x).$$

1.9. *Однократно рекурсивные функции*

Говорят, что функция *однократно рекурсивна* (или *примитивно рекурсивна*), если она может быть определена из нулевой функции, функции следования и тождественной функции с помощью подстановок и рекурсий. Мы можем также выразить это определение, сказав, что нулевая функция, функция следования и тождественная функция однократно рекурсивны и, далее, что функция однократно рекурсивна, если она определяется подстановкой однократно рекурсивных функций в однократно рекурсивную функцию или определяется однократно рекурсивной схемой с использованием только однократно рекурсивных функций. Таким образом, все функции, определенные до сих пор, однократно рекурсивны, и любая функция, получаемая из них подстановкой, будет однократно рекурсивной.

В некотором смысле, который будет уточнен в следующей главе, всякая рекурсивная функция является *вполне устранимой*, иначе говоря, если вместо всех ее аргументов подставить конкретные цифры, то эту функцию можно преобразовать в единственное число. Действительно, исходные функции, конечно, устранимы и

подстановка устранимых функций в устранимую функцию дает в результате устранимую функцию; наконец, функция $F(x)$, которая может содержать параметры, определяемая в терминах устранимых функций с помощью однократно рекурсивной схемы, является устранимой, ибо $F(0)$ устранима и $F(Sx)$ устранима, если $F(x)$ устранима.

1.91. *Дважды рекурсивные функции*

Совокупность арифметических операций — сложение, умножение, возведение в степень, тетрацию, пентацию и т. д. — можно выразить одной функцией. Если мы определим функцию $H(p, n, a)$ равенствами

$$H(0, n, a) = Sn, \quad H(1, 0, a) = a, \quad H(2, 0, a) = 0,$$

H

$$H(p+3, 0, a) = 1$$

(так что $H(p+1, 0, a) = a(1 \dot{-} p) + \{1 \dot{-} (2 \dot{-} p)\}$)

и $H(p+1, n+1, a) = H(p, H(p+1, n, a), a)$,

то значение $H(p, n, a)$ определено для любого значения p, n и a; ибо $H(0, n, a)$ дано, и если для некоторого p и произвольных n и a дано $H(p, n, a)$, то $H(p+1, n, a)$ определяется однократной рекурсией по n. Функции $H(1, n, a)$, $H(2, n, a)$, $H(3, n, a)$, $H(4, n, a)$, ... определяют соответственно сложение, умножение, возведение в степень, тетрацию, ..., ибо

$$H(1, 0, a) = a, \quad H(1, n+1, a) = SH(1, n, a),$$

так что $H(1, n, a) = n + a$, и поэтому

$$H(2, 0, a) = 0, \quad H(2, n+1, a) = H(2, n, a) + a,$$

так что $H(2, n, a) = na$, и отсюда мы по очереди находим, что

$$H(3, 0, a) = 1, \quad H(3, n+1, a) = H(3, n, a) \cdot a,$$

так что $H(3, n, a) = a^n$,

$$H(4, 0, a) = 1, \quad H(4, n+1, a) = a^{H(4, n, a)},$$

так что $H(4, n, a) = {}^n a$ и т. д.

Равенства H не подпадают под схему однократной рекурсии R, ибо в них используются как Sn, так и Sp.

Равенства H являются примером определения с помощью *двойной рекурсии.*

Общий вид определения с помощью двойной рекурсии таков:

О функции $G(p, n)$, которая может еще зависеть от одного или более параметров, говорят, что она определяется с помощью двойной рекурсии из некоторых данных функций, если

$$R_2\begin{cases} G(0, n) \text{ является одной из данных функций,} \\ G(p+1, 0) = a(p, G(p, b(p))), \\ G(p+1, n+1) = \\ = c\{p, n, G(p, d[p, n, G(p+1, n)]), G(p+1, n)\}, \end{cases}$$

где $a(x, y)$, $b(x)$, $c(x, y, z, w)$ и $d(x, y, z)$ — данные функции. Мы видим, что $G(p+1, 0)$ получается подстановкой некоторой данной функции в $G(p, n)$ вместо n и подстановкой результата в одну из данных функций; $G(p+1, n+1)$ получается тоже подстановкой $G(p+1, n)$ в данные функции и подстановкой в $G(p, n)$ вместо n. *Мы покажем в примере* 1.9, *что первые два равенства можно заменить на* $G(0, n) = G(p+1, 0) = 1$.

Если данные функции однократно рекурсивны, то равенства R_2 показывают, что для любого данного значения p функция $G(p, n)$ однократно рекурсивна по n, ибо $G(0, n)$ задана как однократно рекурсивная, а если для некоторого p $G(p, n)$ однократно рекурсивна по n, то $G(p+1, n+1)$ выражается с помощью однократной рекурсии в терминах $G(p+1, n)$. Однако $G(p, n)$ не обязана быть однократно рекурсивной функцией n с параметром p, и мы впоследствии покажем, что имеются дважды рекурсивные функции, которые, как можно доказать, отличны от любой однократно рекурсивной функции; в частности, это верно для дважды рекурсивной функции $H(p, n, a)$, определенной выше (см. Петер [1])*).

По аналогии с равенствами R_2 можно без труда определить рекурсии по трем и более переменным, но

*) Число в квадратных скобках относится к библиографии. — *Прим. ред.*

у нас не будет случая использовать более чем двойную рекурсию.

1.92. С помощью однократных и многократных рекурсий мы устанавливаем общее понятие рекурсивной функции. Говорят, что функция *рекурсивна* *), если она однократно рекурсивна или определяется рекурсией по произвольному числу переменных из данных рекурсивных функций, или определяется из данных рекурсивных функций подстановкой.

Мы покажем, что *все процессы классической арифметики* **) *можно описать с помощью рекурсивных функций.*

Примеры к гл. I

1. Сформулируйте рекурсивные определения арифметических процессов гексации и гептации.

1.1. Вычислите $\mathrm{Tet}(2, 3)$ и $\mathrm{Pent}(2, 3)$ и выразите $\mathrm{Hex}(2, 3)$ как повторное возведение в степень.

1.2. При условии, что $f(0, n) = 1$, $f(p, 0) = p+1$ и $f(p+1, n+1) = f(p, pn) \cdot f(p+1, n)$, найдите значения $f(2, n)$, $f(3, n)$ и $f(4, 4)$.

1.3. Докажите, что если $\varphi(x)$ рекурсивна и $f(0) = 0$, $f(x+1) = \varphi(x+1)$, то $f(x)$ рекурсивна.

1.31. Докажите, что если $g(x)$ и $h(x)$ обе рекурсивны и

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \leqslant 2, \\ h(x) & \text{при } x > 2, \end{cases}$$

то $f(x)$ рекурсивна.

1.4. Докажите, что следующие функции рекурсивны:

1.41. Остаток и частное от деления x на 2; наибольший общий делитель x и 2 и их наименьшее общее кратное.

1.42. То же, что в 1.41, с «3» вместо «2».

1.5. Покажите, что если $g(x)$ и $h(x)$ рекурсивны и

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \text{ четно,} \\ h(x), & \text{если } x \text{ нечетно.} \end{cases}$$

то $f(x)$ рекурсивна.

*) Обычно термин «рекурсивная функция» употребляют в ином смысле, а именно как синоним термина «общерекурсивная функция» (см. А. И. Мальцев, «Алгоритмы и рекурсивные функции», «Наука», 1965). — *Прим. ред.*

**) Термин «классическая арифметика» автор понимает здесь, по-видимому, в гораздо более узком смысле, чем это обычно принято (см., например, Р. Л. Гудстейн, «Математическая логика», ИЛ, 1961). — *Прим. ред.*

1.6. Покажите, что коэффициент при x^r в разложении $(1 + x)^n$ является дважды рекурсивной функцией.

1.7. Предполагая, что $a + b = b + a$ и $(a + b) + c = a + (b + c)$, докажите, что сумма $a + b + c + d$ не зависит от порядка слагаемых.

1.8. Определите примитивно рекурсивные функции $i(x)$, $j(x, y)$, $k(x, y)$ так, что $i(0) = 1$, $i(x + 1) = 0$; $j(0, y) = 0$, $j(x + 1, 0) = 1$, $j(x + 1, y + 1) = 0$; $k(0, y) = 0$, $k(x + 1, 0) = 0$, $k(x + 1, y + 1) = 1$.

1.81. Докажите, что если $a(x)$, $b(x)$ и $c(x, y)$ примитивно рекурсивные функции и

$$f(0, y) = a(y),$$
$$f(x + 1, 0) = b(x),$$
$$f(x + 1, y + 1) = c(x, y),$$

то $f(x, y)$ примитивно рекурсивна.

1.9. Докажите, что если

$$\lambda(p, n, u, v) = i(p) \cdot a(n) + j(p, n) \cdot b(p \dot{-} 1, u) + k(p, n) \cdot c(p \dot{-} 1, n \dot{-} 1, u, v)$$

и

$$\mu(p, n, w) = i(p) + j(p, n) \cdot Sd(p \dot{-} 1) + k(p, n) \cdot Se(p \dot{-} 1, n \dot{-} 1, w)$$

и если $\psi(p, n)$ определяется двойной рекурсией:

$$\psi(0, n) = \psi(p + 1, 0) = 1,$$
$$\psi(p + 1, n + 1) = \lambda(p, n, \psi(p, \mu[p, n, \psi(p + 1, n)]), \psi(p + 1, n)),$$

то из $G(p, n) = \psi(p + 1, n + 1)$ следует

$$G(0, n) = a(n), \quad G(p + 1, 0) = b(p, G(p, d(p))),$$
$$G(p + 1, n + 1) = c(p, n, G(p, e[p, n, G(p + 1, n)]), G(p + 1, n)).$$

1.91. Сформулируйте равенства, вводящие функцию $f(x, y, z)$ с помощью тройной рекурсии.

ИСЧИСЛЕНИЕ РАВЕНСТВ

Определение доказательства. Коммутативное и ассоциативное свойство сложения. Равенства $x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y)$ и $(1 \dot{-} | x, y |) f(x) = (1 \dot{-} | x, y |) f(y)$. Функции Σ_f, Π_f и μ_f. Неравенства. Верифицируемость и непротиворечивость.

2. Мы описали два процесса — подстановку и рекурсию, с помощью которых можно определять новые функции из введенных ранее, и показали, как строятся все рекурсивные функции из нулевой функции и функции следования. Теперь мы переходим от построения функций к *доказательствам* равенств. Рассматриваемые нами равенства выражают тот факт, что некоторые функциональные выражения можно подставлять вместо других, например, равенство $x + y = y + x$ указывает, что $x + y$ можно подставить вместо $y + x$, и наоборот. Общий вид таких равенств — $F = G$, где F и G — рекурсивные функции *).

2.1. *Определение доказательства*

Доказательство — это таблица равенств, каждое из которых представляет собой или определение (часть определения) некоторой функции, или равенство вида $F = F$, или *доказанное равенство*. Если $F = G$ — одно из равенств доказательства, то с помощью замены функции F на функцию G в одном или более вхождениях F в некоторое равенство доказательства получается доказанное равенство.

Далее, равенство, получаемое заменой некоторой переменной во всех ее вхождениях другой переменной, или конкретной цифрой, или функцией, является доказанным равенством.

Наконец, $F = G$ является доказанным равенством, если некоторые равенства доказательства получаются

*) См. примечание переводчика на стр. 101. — *Прим. ред.*

подстановкой функции F вместо некоторой функции H и подстановкой функции G вместо H в равенствах, которые определяют функцию H *).

Если результаты подстановки F и G в определяющие равенства некоторой функции являются равенствами доказательства, мы будем говорить, что F и G *удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам.* Правило, по которому $F = G$, если F и G удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам, является лишь другой формой выражения того, что процессы рекурсии и подстановки определяют *единственные* функции. Например, равенства $x + 0 = x$, $x + Sy = S(x + y)$, которые вводят функцию суммы, определяют эту функцию полностью, так что любая $f(x, y)$, которая удовлетворяет тем же равенствам, а именно: $f(x, 0) = x$, $f(x, Sy) = Sf(x, y)$ — является лишь другим обозначением для той же самой функции.

2.11. Для иллюстрации техники доказательства и в качестве подготовки к последующим приложениям мы здесь собираем вместе доказательства основных свойств функций, которые мы ввели в предыдущей главе.

Свойства суммы

В качестве первого примера доказательства мы рассмотрим коммутативность сложения, которая выражается равенством

2.2. $x + y = y + x.$

Для того чтобы было легче следить, мы разобьем это доказательство на две части, начав с доказательства равенства

$$Sx + y = S(x + y).$$

Доказательство состоит из девяти равенств:

2.21. $x + 0 = x,$

2.22. $Sx + 0 = Sx,$

2.23. $Sx = Sx,$

*) Ср. со схемами T и U_1 главы V (см. также примечание редактора на стр. 186). — *Прим. перев.*

2.24. $S(x + 0) = Sx,$

2.25. $x + Sy = S(x + y),$

2.26. $Sx + Sy = S(Sx + y),$

2.27. $S(x + Sy) = S(x + Sy),$

2.28. $S(x + Sy) = SS(x + y),$

2.29. $Sx + y = S(x + y).$

Мы видим, что 2.21 и 2.25 являются определяющими равенствами суммы; 2.22 выводится из 2.21 подстановкой Sx вместо x; 2.24 выводится из 2.23 подстановкой $x + 0$ вместо x (в левую часть) в силу 2.21; 2.26 выводится из 2.25 подстановкой Sx вместо x; 2.28 получается из 2.25 и 2.27. Равенства 2.22, 2.24, 2.26 и 2.28 показывают, что как $Sx + y$, так и $S(x + y)$ удовлетворяют вводящим равенствам

$$\varphi(x, 0) = Sx,$$
$$\varphi(x, Sy) = S\varphi(x, y),$$

так что 2.29 является доказанным равенством. Подставляя x вместо y и y вместо x в 2.29, мы получаем

2.291. $Sy + x = S(y + x).$

Следующим шагом является доказательство равенства

2.3. $0 + x = x;$

пара равенств

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + Sx = S(0 + x),$$

которые получаются подстановкой из 2.21 и 2.25, показывает, что функция $0 + x$ удовлетворяет вводящим равенствам

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(Sx) = S\varphi(x),$$

которым удовлетворяет также тождественная функция $\mathcal{I}(x)$, что доказывает 2.3. Четыре равенства 2.21, 2.3, 2.25 и 2.291 показывают, что $x + y$ и $y + x$ удовлетворяют вводящим равенствам

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, Sy) = S\varphi(x, y),$$

что завершает доказательство равенства

$$x + y = y + x.$$

В качестве следующего примера мы возьмем важное равенство

2.4. $(x + y) + z = x + (y + z)$,

которое выражает ассоциативность сложения.

Так как $(x + y) + Sz = S\{(x + y) + z\}$ и $x + (y + Sz) = x + S(y + z) = S\{x + (y + z)\}$ (где мы используем сокращения вида $a = b = c$ для обозначения пары равенств $a = b$, $b = c$), то обе функции $(x + y) + z$ и $x + (y + z)$ удовлетворяют равенству $\varphi(x, y, Sz) = S\varphi(x, y, z)$; далее $(x + y) + 0 = x + y = x + (y + 0)$, так что эти функции также удовлетворяют равенству

$$\varphi(x, y, 0) = x + y,$$

и поэтому 2.4 доказано.

2.5. *Произведения*

Коммутативность умножения, выражаемая равенством

$$xy = yx,$$

без труда доказывается с помощью равенств 2.2 и 2.4. Определяющие равенства для произведения yx таковы:

2.51. $0 \cdot x = 0$, $(Sy) \cdot x = (y \cdot x) + x$;

как и в доказательстве 2.2, мы начинаем с установления пары равенств

2.52. $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$.

Первое из них доказывается с помощью двух равенств $0 \cdot 0 = 0$, $Sx \cdot 0 = x \cdot 0$ (частные случаи вводящих равенств для произведения), которые вместе с $Z(0) = 0$, $ZSx = Zx$ (где Zx — нулевая функция) показывают, что

$$x \cdot 0 = Zx = 0.$$

Для доказательства второго равенства заметим, что

$$0 \cdot Sy = 0 = 0 \cdot y + 0, \quad Sx \cdot Sy = x \cdot Sy + Sy$$

и

$$\begin{aligned} Sx \cdot y + Sx &= (x \cdot y + y) + Sx = \\ &= (x \cdot y + Sx) + y = && \text{(в силу 2.4)} \\ &= S(x \cdot y + x) + y = \\ &= S((x \cdot y + x) + y) = && \text{(в силу 2.29)} \\ &= (x \cdot y + x) + Sy; \end{aligned}$$

это показывает, что $x \cdot Sy$ и $x \cdot y + x$ удовлетворяют вводящим равенствам

$$\varphi(0, y) = 0, \quad \varphi(Sx, y) = \varphi(x, y) + Sy,$$

что доказывает 2.52. Равенства 2.51 и 2.52 показывают, что функции $y \cdot x$ и $x \cdot y$ удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам, что завершает доказательство.

2.53. Если для некоторой $f(x)$ доказуемы $f(0) = 0$ и $f(Sx) = 0$, то доказуемо $f(x) = 0$. Ибо из $f(Sx) = 0$ и $0 \cdot f(x) = 0$ мы выводим $f(Sx) = 0 \cdot f(x)$, а так как $ZSx = 0 \cdot Zx$, то как $f(x)$, так и Zx удовлетворяют вводящим равенствам

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(Sx) = 0 \cdot \varphi(x),$$

так что $f(x) = Zx$ и $f(x) = 0$ доказуемы.

2.6. *Свойства разности*

Мы начинаем с доказательства важного равенства.

2.61. $x \dot{-} y = Sx \dot{-} Sy$.

Из равенств

$$x \dot{-} 0 = x, \quad Sx \dot{-} S0 = (Sx \dot{-} 0) \dot{-} 1 = Sx \dot{-} 1 = x$$

и

$$x \dot{-} Sy = (x \dot{-} y) \dot{-} 1, \quad Sx \dot{-} SSy = (Sx \dot{-} Sy) \dot{-} 1$$

(которые являются частными случаями вводящих равенств для разности) следует, что $x \dot{-} y$ и $Sx \dot{-} Sy$ удовлетворяют вводящим равенствам

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, Sy) = \varphi(x, y) \dot{-} 1,$$

так что $x \dot{-} y = Sx \dot{-} Sy$. Следовательно,

2.611. $(x + y) \dot{-} y = x$,

ибо $(x + Sy) \dot{-} Sy = S(y + x) \dot{-} Sy = (x + y) \dot{-} y$ и поэтому если $I_1(x, y)$ явно определена равенством $I_1(x, y) = x$, то и $(x + y) \dot{-} y$, и $I_1(x, y)$ удовлетворяют равенствам

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, Sy) = \varphi(x, y).$$

Из равенств $0 \dot{-} 0 = 0$, $0 \dot{-} Sx = (0 \dot{-} x) \dot{-} 1$ и $Z0 = 0$, $ZSx = Zx \dot{-} 1$ следует, что $0 \dot{-} x = 0$, и, аналогичным образом используя $Z(x, y)$, явно определяемую равенством $Z(x, y) = 0$, мы можем доказать, что $y \dot{-} (x + y) = 0$ и поэтому $y \dot{-} y = 0$.

Мы *определяем* положительную разность*) x и y — $|x, y|$ — с помощью равенства

$$|x, y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x).$$

Имеем $|x, y| = |y, x|$ и, используя 2.61,

2.612. $|x, y| = |Sx, Sy|$.

Применения правил приравнивания функций, которые встречались у нас до сих пор, ограничивались лишь случаем однократных рекурсий. Однако следующее доказательство равенства

2.62. $x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y)$

требует применения этого правила к двойной рекурсии**). Мы замечаем, что

$$x + (0 \dot{-} x) = x = 0 + (x \dot{-} 0),$$
$$0 + (Sy \dot{-} 0) = Sy = Sy + (0 \dot{-} Sy)$$

и

$$Sx + (Sy \dot{-} Sx) = Sx + (y \dot{-} x) = S(x + (y \dot{-} x)),$$
$$Sy + (Sx \dot{-} Sy) = Sy + (x \dot{-} y) = S(y + (x \dot{-} y)),$$

*) В терминологии некоторых авторов — *симметрическая разность*. — *Прим. ред.*

**) В главе V приведено доказательство равенства 2.62, в котором правило приравнивания функций применяется только к однократным рекурсиям. — *Прим. ред.*

так что и $x + (y \dot{-} x)$, и $y + (x \dot{-} y)$ удовлетворяют дважды рекурсивным равенствам

$$\varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi(0, Sy) = Sy,$$
$$\varphi(Sx, Sy) = S\varphi(x, y),$$

что завершает доказательство. Общее значение $x + (y \dot{-} x)$ и $y + (x \dot{-} y)$ является наибольшим из x и y, которое обозначается через $\max(x, y)$.

Теперь, подготовляя доказательство теоремы, связывающей равенство с обращением в нуль положительной разности, мы докажем, что для любой рекурсивной функции $f(x)$ имеет место

2.63. $(1 \dot{-} |x, y|) f(x) = (1 \dot{-} |x, y|) f(y)$.

Частный случай 2.63, получаемый подстановкой $x + y$ вместо x, а именно

2.631. $(1 \dot{-} x) f(x + y) = (1 \dot{-} x) f(y)$

очевиден, ибо и $(1 \dot{-} x) f(x + y)$, и $(1 \dot{-} x) f(y)$ удовлетворяют равенствам

$$\varphi(0, y) = f(y), \quad \varphi(Sx, y) = Z\varphi(x, y).$$

Подставляя $x \dot{-} y$ вместо x в 2.631, мы получаем

2.64. $(1 \dot{-} (x \dot{-} y)) f(y) = (1 \dot{-} (x \dot{-} y)) f(y + (x \dot{-} y))$

и после умножения на $1 \dot{-} |x, y|$ с использованием доказуемого равенства $\{1 \dot{-} (x \dot{-} y)\}\{1 \dot{-} |x, y|\} = \{1 \dot{-} |x, y|\}$ (см. пример 2.241) это переходит в

2.65. $(1 \dot{-} |x, y|) f(y) = (1 \dot{-} |x, y|) f(y + (x \dot{-} y))$.

Подставляя x вместо y и y вместо x в 2.65 и учитывая $|x, y| = |y, x|$, мы получаем

2.66. $(1 \dot{-} |x, y|) f(x) = (1 \dot{-} |x, y|) f(x + (y \dot{-} x))$

и поэтому 2.63 следует в силу 2.62.

Взяв в 2.63 в качестве $f(x)$ тождественную функцию $\mathcal{J}(x) = x$, мы имеем

2.67. $(1 \dot{-} |x, y|) x = (1 \dot{-} |x, y|) y$

и поэтому, если $|F, G| = 0$ доказано для некоторых функций F и G, то, подставляя F, G вместо x, y в 2.67, мы видим, что $F = G$ — доказанное равенство. Обратно, из $F = G$ мы выводим, используя $F \dot{-} F = 0$, как $F \dot{-} G = 0$, так и $G \dot{-} F = 0$ и, следовательно, $|F, G| = 0$.

Таким образом, мы показали, что каждое из равенств

$$|F, G| = 0, \quad F = G$$

может быть выведено из другого.

Равенство 2.63 можно представить в другой форме, более удобной для использования; если мы умножаем 2.63 на $1 \dot{-} f(x)$ и используем равенство

$$(1 \dot{-} f(x)) f(x) = 0,$$

которое получается подстановкой $f(x)$ вместо x в доказуемое равенство $x(1 \dot{-} x) = 0$ (см. пример 2.1), то мы получаем

2.68. $(1 \dot{-} |x, y|)(1 \dot{-} f(x)) f(y) = 0$ *).

2.7. В качестве первого примера использования эквивалентности равенств $|F, G| = 0$ и $F = G$ мы докажем равенство двух функций f и g, о которых известно, что они удовлетворяют равенствам

$$f(0) = g(0), \quad f(Sx) = g(Sx).$$

Мы определяем $\varphi(x) = |f(x), g(x)|$, так что доказуемы $\varphi(0) = 0$, $\varphi(Sx) = 0$, и поэтому $\varphi(Sx) = Z\varphi(x)$. Так как Zx также удовлетворяет вводящим равенствам

$$Z(0) = 0, \quad ZSx = ZZx,$$

то $\varphi(x) = Z(x)$ и, следовательно, $\varphi(x) = 0$ являются доказанными равенствами; значит, по предыдущей теореме доказанным равенством будет $f(x) = g(x)$. Обобщение этого результата приведено в примере 2.73.

*) Умножение равенства на некоторый множитель — это сокращенный способ описания вывода равенства $ca = cb$ из равенства $a = b$; этот вывод, конечно, можно произвести на самом деле, подставляя «b» вместо «a» в правую часть равенства $ca = ca$.

Для выражения того факта, что доказательство некоторого равенства $F = G$ можно получить, комбинируя доказательства одного или более равенств $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, ..., $f_k = g_k$, мы пишем просто

$$\frac{\begin{array}{c} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \\ \cdots \\ f_k = g_k \end{array}}{F = G}$$

и называем это *схемой доказательства* *). Так, предыдущую теорему можно представить схемой

$$\frac{\begin{array}{c} f(0) = g(0) \\ f(Sx) = g(Sx) \end{array}}{f(x) = g(x)}.$$

2.8. Если для некоторой функции $f(x)$ доказуемы равенства

$$f(0) = 0, \quad (1 \dot{-} f(x)) f(Sx) = 0,$$

то доказуемо равенство $f(x) = 0$, или, в виде схемы,

$$\frac{\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ (1 \dot{-} f(x)) f(Sx) = 0 \end{array}}{f(x) = 0}$$

В силу примера 2.232 $(1 \dot{-} a) b = b \dot{-} ab$ и, следовательно, из $(1 \dot{-} f(x)) f(Sx) = 0$ мы выводим

$$(1 \dot{-} f(x))(1 \dot{-} f(Sx)) = \\ = (1 \dot{-} f(x)) \dot{-} (1 \dot{-} f(x)) f(Sx) = 1 \dot{-} f(x),$$

и поэтому, если $g(x)$ определена рекурсией

$$g(0) = 1, \quad g(Sx) = g(x)(1 \dot{-} f(x))$$

и если $h(x) = g(Sx)$, то

$$h(Sx) = g(Sx)(1 \dot{-} f(Sx)) = g(x)(1 \dot{-} f(x)) = g(Sx);$$

*) По-видимому, автор имеет в виду, что $F = G$ выводимо в расширении рассматриваемого исчисления, которое получается добавлением к нему равенств $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, ..., $f_k = g_k$ в качестве аксиом. — *Прим. ред.*

но $h(0) = g(0)$ (ибо $f(0) = 0$) и, следовательно, $h(x) = g(x)$.

Таким образом, $g(0) = 1$, $g(Sx) = g(x)$ и, следовательно (в силу примера 2.7304), $g(x) = 1$ и поэтому $1 \dot{-} f(x) = 1$. Отсюда, используя пример 2.1, получаем $f(x) = f(x)\,(1 \dot{-} f(x)) = 0$.

Мы покажем позже, что теорема 2.8 устанавливает справедливость метода доказательства, известного как математическая индукция.

2.9. *Функции* $\sum_f$, $\prod_f$ *и* μ_f.

Для любой функции $f(x)$ мы определяем

$$\sum_f(0) = f(0), \quad \sum_f(n+1) = \sum_f(n) + f(n+1),$$
$$\prod_f(0) = f(0), \quad \prod_f(n+1) = \prod_f(n) \cdot f(n+1),$$

так что для любой цифры $\boldsymbol{p}$

$$\sum_f(\boldsymbol{p}) = f(0) + f(1) + \ldots + f(\boldsymbol{p}),$$

и

$$\prod_f(\boldsymbol{p}) = f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(\boldsymbol{p});$$

для функции $f(x, a)$, зависящей также от параметра a, мы полагаем

$$\sum_f(0, a) = f(0, a), \quad \sum_f(n+1, a) = \sum_f(n, a) + f(n+1, a);$$

аналогичная формулировка дается и для случая более, чем одного параметра. Подразумевается, что подобное определение сформулировано и для функции $\prod$.

Для любой конкретной цифры $\boldsymbol{p}$ мы имеем

$$\sum_f(\boldsymbol{p}, a) = f(0, a) + f(1, a) + \ldots + f(\boldsymbol{p}, a)$$

и

$$\prod_f(\boldsymbol{p}, a) = f(0, a) \cdot f(1, a) \cdot \ldots \cdot f(\boldsymbol{p}, a).$$

При использовании функций $\sum_f$, $\prod_f$ мы принимаем *первую* переменную в f за оперативную переменную; для изучения суммы вида

$$f(a, 0) + f(a, 1) + \ldots + f(a, \boldsymbol{p}),$$

мы вводим $\varphi(x, a)$ явным определением $\varphi(x, a) = f(a, x)$ и представляем $f(a, 0) + f(a, 1) + \ldots + f(a, \boldsymbol{p})$ как $\sum_\varphi(\boldsymbol{p}, a)$.

2.91. Если для некоторых функций $f(x)$, $g(x)$ доказуемо равенство

$$(1 \dot{-} g(n))\,(Sn \dot{-} a) f(a) = 0, \tag{i}$$

то доказуемо

$$(1 \dot{-} g(n))\,\sum_f(n) = 0. \tag{ii}$$

Обозначим $(Sn \dot{-} m)(1 \dot{-} g(n))\,\sum_f(m)$ через $A(m)$; тогда в силу (i) $A(0) = 0$ и

$$A(Sm) = (Sn \dot{-} Sm)(1 \dot{-} g(n))\,\{\sum_f(m) + f(Sm)\} =$$
$$= (Sn \dot{-} Sm)(1 \dot{-} g(n))\,\sum_f(m) = A(m) \dot{-} (1 \dot{-} g(n))\,\sum_f(m),$$

так что $\{1 \dot{-} A(m)\}A(Sm) = 0$ и поэтому в силу 2.8 $A(m) = 0$. В частности, $A(n) = 0$, т. е. $\{1 \dot{-} g(n)\}\sum_f(n) = 0$.

2.92. Если для некоторых $f(x)$, $g(x)$

$$(Sn \dot{-} a)\,(1 \dot{-} f(a))\,g(n) = 0,$$

то $\{1 \dot{-} \prod_f(n)\}\,g(n) = 0$.

Пусть $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ обозначают соответственно

$$(Sn \dot{-} m)(1 \dot{-} \prod_f(m))\,g(n), \qquad (Sn \dot{-} Sm)(1 \dot{-} \prod_f(m))\,g(n)$$

и $(Sn \dot{-} Sm)\,(1 \dot{-} f(Sm))\,g(n)$. По предположению $C(m) = 0$ и, следовательно, $\{1 \dot{-} A(m)\}C(m) = 0$; более того,

$$\{1 \dot{-} A(m)\}\,B(m) =$$
$$= \{1 \dot{-} A(m)\}\,\{A(m) \dot{-} (1 \dot{-} \prod_f(m))\,g(n)\} = 0$$

и, следовательно (в силу примера 2.47 с $\prod_f(m)$ вместо a, $f(Sm)$ вместо b и $(1 \dot{-} A(m))\,(Sn \dot{-} Sm)\,g(n)$ вместо c),

$$\{1 \dot{-} A(m)\}A(Sm) = 0,$$

и поэтому $A(m) = 0$; значит, $A(n) = 0$, т. е.

$$\{1 \dot{-} \prod_f(n)\}\,g(n) = 0.$$

2.921. $\{1 \dot{-} f(x)\} \prod_f(x) = 0.$

Действительно,

$$\{1 \dot{-} f(0)\} \prod_f(0) = \{1 \dot{-} f(0)\} f(0) = 0$$

и

$$\{1 \dot{-} f(Sx)\} \prod_f(Sx) = \{1 \dot{-} f(Sx)\} f(Sx) \prod_f(x) = 0.$$

2.93. В следующем разделе нам потребуется ряд элементарных свойств функции $\alpha(x) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} x)$, которые доказаны в примерах 2.26. В частности, мы будем использовать равенства

$$\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x), \quad \alpha(1 \dot{-} x) = 1 \dot{-} \alpha(x),$$

$$x \cdot \alpha(x) = x \quad \text{и} \quad \alpha(xy) = \alpha(x) \cdot \alpha(y).$$

Функция $\alpha(x)$, очевидно, удовлетворяет равенствам

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(Sx) = 1.$$

Для данной $f(x)$ мы определяем $\rho(x) = \alpha(f(x))$. Имеем

$$\alpha(\rho(x)) = \alpha(\alpha(f(x))) = \alpha(f(x)) = \rho(x)$$

и

$$\alpha(1 \dot{-} \rho(x)) = 1 \dot{-} \alpha(\rho(x)) = 1 \dot{-} \rho(x).$$

Более того,

$$\alpha(\prod_\rho(x)) = \prod_\rho(x),$$

ибо

$$\alpha(\prod_\rho(0)) = \rho(0),$$

$$\alpha(\prod_\rho(Sx)) = \alpha(\prod_\rho(x)) \cdot \rho(Sx),$$

так что $\alpha(\prod_\rho(x))$ удовлетворяет тем же вводящим равенствам, что и сама $\prod_\rho(x)$.

2.931. $\{1 \dot{-} \rho(x)\} f(x) = 0.$

Действительно,

$$\{1 \dot{-} \rho(x)\} f(x) = f(x) \dot{-} f(x) \cdot \alpha(f(x)) = f(x) \dot{-} f(x) = 0.$$

2.932. $\{1 \dot{-} f(x)\} \rho(x) = 0.$

Действительно, $1 \dot{-} f(x) = 1 \dot{-} \rho(x)$.

2.933. $f(x) \cdot |\rho(x), 1| = 0.$

Так как $\alpha(x) \dot{-} 1 = 0$ и, следовательно, $\rho(x) \dot{-} 1 = 0$, то $f(x)(\rho(x) \dot{-} 1) = 0$; но $f(x)(1 \dot{-} \rho(x)) = 0$ и, следовательно, складывая, получаем $f(x) \cdot |\rho(x), 1| = 0$.

2.934. *Если* $\rho(x) = \alpha(f(x))$, *то* $\prod_\rho(x) = \alpha(\prod_f(x))$.

Так как

$$\alpha(\prod_f(Sx)) = \alpha \prod_f(x) \cdot \alpha f(Sx) = \alpha \prod_f(x) \cdot \rho(Sx)$$

и

$$\prod_\rho(Sx) = \prod_\rho(x) \cdot \rho(Sx),$$

и

$$\alpha \prod_f(0) = \alpha f(0) = \rho(0) = \prod_\rho(0),$$

следовательно, $\prod_\rho(x)$ и $\alpha \prod_f(x)$ удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам.

2.935. *Если* $\alpha(f(x)) \cdot g(x) = 0$, *то* $f(x) \cdot g(x) = 0$. Действительно,

$$0 = f(x) \cdot \alpha(f(x)) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x).$$

2.94. Для любой функции $f(x)$ мы полагаем *)

$$\theta_f(n) = \prod_\rho(n) \dot{-} \prod_\rho(Sn)$$

и

$$\mu_f(0) = 0, \quad \mu_f(Sn) = Sn \cdot \theta_f(n) + \mu_f(n) \cdot (1 \dot{-} \theta_f(n)),$$

где $\rho(x) = \alpha(f(x))$. Отметим, что непосредственно из определений следует

$$(1 \dot{-} \theta_f(n)) \mu_f(Sn) = (1 \dot{-} \theta_f(n)) \mu_f(n),$$

$$\theta_f(n) \mu_f(Sn) = \theta_f(n) \cdot Sn$$

(ибо $\theta_f(n) \cdot \theta_f(n) = \alpha \prod_f(n) \cdot (1 \dot{-} \rho(Sn)) \cdot \alpha \prod_f(n) \times (1 \dot{-} \rho(Sn)) = \alpha \prod_f(n) \cdot (1 \dot{-} \rho(Sn)) = \theta_f(n)$). Если для некоторого a $\prod_\rho(a) = 1$ и $\rho(Sa) = 0$, то $\theta_f(a) = 1$ и,

*) Смысл оператора μ разъясняется перед разделом 2.95. — *Прим. ред.*

следовательно, $\mu_f(Sa) = Sa$; если или $\prod_\rho(a) = 0$ или $\rho(Sa) = 1$, то $\mu_f(Sa) = \mu_f(a)$.

2.941. *Если* $R_f(x) = 1 \dot{-} \theta_f(x)$, *то*

$$f(0)(1 \dot{-} \prod_f(Sx)) \prod_{R_f}(x) = 0.$$

Посредством $A(x)$ обозначим

$$\rho(0)(1 \dot{-} \prod_\rho(Sx)) \prod_{R_f}(x);$$

тогда

$$A(0) = \rho(0)(1 \dot{-} \prod_\rho(1))(1 \dot{-} \theta_f(0)) = \rho(0)(1 \dot{-} \rho(0))(1 \dot{-} \prod_\rho(1)) = 0$$

и

$$A(Sx) = \rho(0)(1 \dot{-} \prod_\rho(SSx)) \prod_{R_f}(x) \{1 \dot{-} (\prod_\rho(Sx) \dot{-} \dot{-} \prod_\rho(SSx))\} = \rho(0)(1 \dot{-} \prod_\rho(SSx)) \prod_{R_f}(x)(1 \dot{-} \prod_\rho(Sx)) = \{1 \dot{-} \prod_\rho(SSx)\} A(x),$$

так что $(1 \dot{-} A(x)) A(Sx) = 0$ и поэтому $A(x) = 0$. Так как

$$\rho(0)(1 \dot{-} \prod_\rho(Sx)) = \alpha f(0)(1 \dot{-} \alpha \prod_f(Sx)) = \alpha(f(0)(1 \dot{-} \prod_f(Sx))),$$

то 2.941 теперь следует из 2.935.

2.942. $\mu_f(x) \dot{-} x = 0$.

Действительно,

$$\{1 \dot{-} \theta_f(x)\}\{\mu_f(Sx) \dot{-} \mu_f(x)\} = 0$$

и

$$\theta_f(x)\{\mu_f(Sx) \dot{-} Sx\} = 0;$$

поэтому в силу примера 2.36

$$(\mu_f(Sx) \dot{-} Sx)(\mu_f(Sx) \dot{-} \mu_f(x)) = 0;$$

отсюда в силу примера 2.422

$$\{Sx \dot{-} \mu_f(x)\}\{\mu_f(Sx) \dot{-} Sx\} = 0.$$

Так как (в силу примера 2.41)

$$Sx \dot{-} \mu_f(x) = \{x \dot{-} \mu_f(x)\} + \{1 \dot{-} (\mu_f(x) \dot{-} x)\},$$

то

$$\{1 \dot{-} (\mu_f(x) \dot{-} x)\}\{\mu_f(Sx) \dot{-} Sx\} = 0,$$

но $\mu_f(0) \dot{-} 0 = 0$ и, следовательно, по теореме 2.8 $\mu_f(x) \dot{-} x = 0$.

2.943. $\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx) = 0$.

Как и в предыдущем доказательстве,

$$\{\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx)\}\{Sx \dot{-} \mu_f(Sx)\} = 0.$$

Отсюда, так как в силу 2.942 $\mu_f(x) \dot{-} x = 0$, то (используя пример 2.423) $\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx) = 0$.

2.944. $(Sa \dot{-} x)(\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(a)) = 0$.

В силу примера 2.461 из $\mu_f(x + r) \dot{-} \mu_f(x + Sr) = 0$ мы выводим

$$\{1 \dot{-} (\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(x + r))\}\{\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(x + Sr)\} = 0;$$

отсюда, так как $\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(x + 0) = 0$, то получаем $\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(x + r) = 0$ и поэтому в силу примера 2.71 $(Sa \dot{-} x)(\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(a)) = 0$.

2.945. $\prod_f(x) \mu_f(x) = 0$.

Мы имеем $\prod_\rho(0) \mu_f(0) = 0$ и

$$\{1 \dot{-} \prod_\rho(x) \mu_f(x)\} \prod_\rho(Sx) \mu_f(Sx) = \{1 \dot{-} \prod_\rho(x) \mu_f(x)\} \prod_\rho(x) \rho(Sx)\{Sx \cdot \theta_f(x) + \mu_f(x)(1 \dot{-} \theta_f(x))\} = \{1 \dot{-} \prod_\rho(x) \mu_f(x)\} \prod_\rho(x) \rho(Sx) \mu_f(x) = 0,$$

ибо $\rho(Sx) \cdot \theta_f(x) = 0$; это доказывает, что $\prod_\rho(x) \mu_f(x) = 0$. Но $\prod_\rho(x) = \alpha(\prod_{\ }(x))$, следовательно, по 2.935

$$\prod_{\ }(x) \mu_f(x) = 0.$$

2.946. $(1 \dot{-} \prod_{\ }(x)) \cdot |\mu_f(x + r),\ \mu_f(x)| = 0$.

Из двух равенств $(1 \dot{-} \theta_f(x))(\mu_f(Sx) \dot{-} \mu_f(x)) = 0$ и $(1 \dot{-} \theta_f(x))(\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx)) = 0$ мы выводим

$$(1 \dot{-} \theta_f(x)) \cdot |\mu_f(x),\ \mu_f(Sx)| = 0,$$

что вместе с $\{1 \dot{-} \prod_\rho(x)\}\theta_f(x) = 0$ дает (в силу примера 2.36)

$$(1 \dot{-} \prod_\rho(x))|\mu_f(Sx), \mu_f(x)| = 0,$$

и поэтому

$$\{1 \dot{-} \prod_\rho(x+r)\}|\mu_f(x+Sr),\ \mu_f(x+r)| = 0.$$

Так как (в силу примера 2.74)

$$\{1 \dot{-} \prod_\rho(x)\}\prod_\rho(x+r) = 0,$$

то

$$\{1 \dot{-} \prod_\rho(x)\}|\mu_f(x+Sr), \mu_f(x+r)| = 0.$$

Отсюда в силу примера 2.452

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} \prod_\rho(x)) \cdot |\mu_f(x+r), \mu_f(x)|\} \times \\ \times (1 \dot{-} \prod_\rho(x))|\mu_f(x+Sr), \mu_f(x)| = 0,$$

что вместе с $\{1 \dot{-} \prod_\rho(x)\}|\mu_f(x),\ \mu_f(x)| = 0$ доказывает, что

$$\{1 \dot{-} \prod_\rho(x)\}|\mu_f(x+r), \mu_f(x)| = 0.$$

Так как $1 \dot{-} \prod_\rho(x) = \alpha(1 \dot{-} \prod_f(x))$, то по 2.935 имеем

$$\{1 \dot{-} \prod_f(x)\}|\mu_f(x+r), \mu_f(x)| = 0.$$

2.947. $(\mu_f(Sx) \dot{-} x) f(Sx) = 0.$

2.9471. $(\mu_f(Sx) \dot{-} x) \prod_f(Sx) = 0.$

Из $\mu_f(x) \dot{-} x = 0$ мы выводим в силу примера 2.46

$$\{\mu_f(Sx) \dot{-} x\}\{S\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx)\} = 0,$$

а так как (в силу примера 2.41)

$$S\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx) = \{\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(Sx)\} + \\ + \{1 \dot{-} (\mu_f(Sx) \dot{-} \mu_f(x))\},$$

то, умножая на $1 \dot{-} \theta_f(x)$, получаем

$$(\mu_f(Sx) \dot{-} x)(1 \dot{-} \theta_f(x)) = 0$$

и отсюда

$$\rho(Sx)(\mu_f(Sx) \dot{-} x)(1 \dot{-} \theta_f(x)) = 0;$$

но $\rho(Sx)\theta_f(x) = 0$, так что

$$\rho(Sx)(\mu_f(Sx) \dot{-} x)\theta_f(x) = 0,$$

поэтому, складывая, имеем

$$\{\mu_f(Sx) \dot{-} x\}\rho(Sx) = 0,$$

откуда 2.947 следует по теореме 2.935.

Теорема 2.9471 следует из 2.947 с помощью примера 2.741.

2.948. $\{\mu_f(Sx) \dot{-} x\} f(\mu_f(Sx + r)) = 0.$

Из 2.946 и 2.9471 мы получаем (в силу примера 2.36)

$$\{\mu_f(Sx) \dot{-} x\}|\mu_f(Sx + r), \mu_f(Sx)| = 0 \qquad \text{(i)}$$

и, следовательно, в силу примера 2.472

$$\{1 \dot{-} |\mu_f(Sx), Sx|\}|\mu_f(Sx + r), \mu_f(Sx)| = 0$$

и аналогично из 2.947

$$\{1 \dot{-} |\mu_f(Sx), Sx|\} f(Sx) = 0;$$

но

$$\{1 \dot{-} |\mu_f(Sx), Sx|\} f(\mu_f(Sx)) = \{1 \dot{-} |\mu_f(Sx), Sx|\} f(Sx)$$

и, следовательно,

$$\{1 \dot{-} |\mu_f(Sx), Sx|\} f(\mu_f(Sx)) = 0,$$

что в силу примера 2.481 преобразуется в

$$\{\mu_f(Sx) \dot{-} x\} f(\mu_f(Sx)) = 0. \qquad \text{(ii)}$$

Из (i), (ii) и теоремы 2.63 мы получаем 2.948, что можно переписать в виде

$$\{1 \dot{-} |\mu_f(Sx), Sx|\} f(\mu_f(Sx + r)) = 0.$$

2.949. $\{1 \dot{-} \prod_f(x)\} f(\mu_f(x)) = 0.$

Так как

$$\alpha\theta_f(x) = \alpha \prod_\rho(x) \cdot \alpha(1 \dot{-} \rho Sx) = \prod_\rho(x)(1 \dot{-} \rho Sx) = \theta_f(x),$$

то $1 \dot{-} R_f(x) = \theta_f(x)$ и $\theta_f(x) \cdot \theta_f(x) = \theta_f(x)$, и, следовательно, $\{1 \dot{-} R_f(x)\}|\mu_f(Sx), Sx| = 0$; отсюда и из последней теоремы следует

$$\{1 \dot{-} R_f(x)\} f(\mu_f(Sx + r)) = 0.$$

Из примера 2.711 следует, что

$$(Sx \dot{-} a)\,(1 \dot{-} R_f(a))\,f(\mu_f Sx) = 0$$

и поэтому по теореме 2.92

$$\{1 \dot{-} \textstyle\prod_{R_f}(x)\}\,f(\mu_f(Sx)) = 0;$$

отсюда в силу теоремы 2.941 (и примера 2.36)

$$f(0)\,(1 \dot{-} \textstyle\prod_f(Sx))\,f(\mu_f(Sx)) = 0. \qquad \text{(i)}$$

Так как в силу 2.63

$$\{1 \dot{-} \mu_f(r)\}f(\mu_f(r)) = \{1 \dot{-} \mu_f(r)\}f(0) \qquad \text{(ii)}$$

и в силу 2.946 (полагая $x = 0$) $\{1 \dot{-} f(0)\}\mu_f(r) = 0$, то, умножая (ii) на $1 \dot{-} f(0)$, имеем

$$(1 \dot{-} f(0))\,f(\mu_f(r)) = 0$$

и, следовательно, $(1 \dot{-} f(0))\,(1 \dot{-} \prod_f(Sx))\,f(\mu_f(Sx)) = 0$, что сложенное с (i), дает

$$(1 \dot{-} \textstyle\prod_f(Sx))\,f(\mu_f(Sx)) = 0.$$

Наконец, мы видим, что $(1 \dot{-} \prod_f(0))\,f(\mu_f(0)) = (1 \dot{-} f(0))\,f(0) = 0$, а это завершает доказательство.

2.9491. $f(0)\,(1 \dot{-} f(x))\,(1 \dot{-} \mu_f(x)) = 0.$

Так как $(1 \dot{-} f(x))\prod_f(x) = 0$, то, следовательно, по предыдущей теореме $(1 \dot{-} f(x))\,f(\mu_f(x)) = 0$; но $(1 \dot{-} \mu_f(x))\,f(\mu_f(x)) = (1 \dot{-} \mu_f(x))\,f(0)$ и поэтому 2.9491 получается умножением на $1 \dot{-} f(x)$. Из 2.9491 и 2.944, используя пример 2.462, мы выводим

$$(Sa \dot{-} x)\,(1 \dot{-} f(x))\,f(0)\,(1 \dot{-} \mu_f(a)) = 0$$

и поэтому в силу 2.92 имеем

2.9492. $f(0)\,(1 \dot{-} \prod_f(a))\,(1 \dot{-} \mu_f(a)) = 0.$

Далее мы докажем

2.9493. $\{1 \dot{-} f(a)\}\,\{\mu_f(x) \dot{-} a\} = 0.$

Сначала мы докажем, что $\{1 \dot{-} f(a)\}\{\mu_f(a+n) \dot{-} a\} = 0$. Обозначим $\{1 \dot{-} f(a)\}\mu_f(a+n)$ через $g(n)$; тогда, поскольку в силу примера 2.74 $\{1 \dot{-} f(a)\}\theta_f(a+n) = 0$, мы имеем $g(Sn) = g(n)$ и поэтому $g(n) = g(0)$, т. е.

$$\{1 \dot{-} f(a)\}\mu_f(a+n) = \{1 \dot{-} f(a)\}\mu_f(a).$$

Но $\mu_f(a) \dot{-} a = 0$ и поэтому $\{1 \dot{-} f(a)\}\{\mu_f(a+n) \dot{-} a\} = 0$, что можно выразить в виде

$$(Sx \dot{-} a)\,(1 \dot{-} f(a))\,\{\mu_f(x) \dot{-} a\} = 0. \qquad \text{(i)}$$

Но по 2.944 и 2.942

$$(Sa \dot{-} x)\,(\mu_f(x) \dot{-} \mu_f(a)) = 0, \quad \mu_f(a) \dot{-} a = 0$$

и, следовательно,

$$(Sa \dot{-} x)\,(\mu_f(x) \dot{-} a) = 0; \qquad \text{(ii)}$$

умножая (ii) на $1 \dot{-} f(a)$ и прибавляя (i), мы получаем, учитывая

$$(Sx \dot{-} a) + (Sa \dot{-} x) = 1 + \{1 \dot{-} (a \dot{-} x)\} + (a \dot{-} x) + (x \dot{-} Sa)$$

(см. примеры 2.245 и 2.41),

$$(1 \dot{-} f(a))\,(\mu_f(x) \dot{-} a) = 0.$$

Мы покажем в следующей главе, что из теорем 2.945, 2.949 *и* 2.9493 *следует, что если* $f(x)$ *обращается в нуль для некоторого* x *от* 0 *до* n, *то* $\mu_f(n)$ *— это наименьшее из тех* x *между* 0 *и* n, *для которого* $f(x)$ *есть нуль, но если каждое из чисел* $f(0), f(1), \ldots, f(n)$ *не равно нулю, то* $\mu_f(n) = 0$.

2.95. *Дальнейшие свойства функции* μ_f.

2.951. *Если* $\lambda_f(0) = 0$ и

$$\lambda_f(Sn) = \lambda_f(n) + Sn \cdot \{1 \dot{-} (\lambda_f(n) + f(Sn))\},$$

то $\mu_f(n) = \rho(0) \cdot \lambda_f(n)$.

В нижеследующем доказательстве мы будем для упрощения записи опускать индекс и писать просто $\lambda(n)$ и $\mu(n)$ вместо $\lambda_f(n)$ и $\mu_f(n)$.

Доказательство опирается на следующие свойства $\lambda(x)$, получаемые из определяющих равенств умножением на подходящий множитель:

$$\rho(Sn)\cdot\lambda(Sn)=\rho(Sn)\cdot\lambda(n), \tag{i}$$

$$\lambda(n)\cdot\lambda(Sn)=\lambda(n)\cdot\lambda(n), \tag{ii}$$

$$\{1\dot{-}\lambda(n)\}\{1\dot{-}\rho(Sn)\}\lambda(Sn)=\{1\dot{-}\lambda(n)\}\{1\dot{-}\rho(Sn)\}Sn. \tag{iii}$$

Легко видеть, что (не считая введения множителя $\rho(0)$) эти равенства выполняются, если мы заменим λ на μ. Равенства, получаемые из (i) и (ii) заменой λ на μ, доказываются с помощью ранее установленных соотношений $\rho(Sn)\cdot\theta(n)=0$ и $\mu(n)\cdot\prod(n)=0$; вместо (iii) мы имеем

$$\rho(0)\{1\dot{-}\rho(Sn)\}\{1\dot{-}\mu(n)\}\mu(Sn)=$$
$$=\rho(0)\{1\dot{-}\rho(Sn)\}\{1\dot{-}\mu(n)\}\cdot\prod(n)\cdot Sn=$$
$$=\rho(0)\{1\dot{-}\rho(Sn)\}\{1\dot{-}\mu(n)\}\cdot Sn,$$

ибо $\prod(n)(1\dot{-}\mu(n))=\prod(n)$ и $\rho(0)\prod(n)=\rho(0)(1\dot{-}\mu(n))$; последнее доказывается с помощью 2.631, 2.949, 2.93 и примера 2.26. Из (i) и соответствующего равенства для μ мы имеем

$$\rho(Sn)\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\rho(Sn)\lambda(Sn),\rho(Sn)\mu(Sn)|=$$
$$=\rho(Sn)\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\lambda(n),\mu(n)|=0,$$

т. е.

$$\rho(Sn)\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=0, \tag{iv}$$

а из (ii) и аналогичного ему

$$\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}\mu(n)|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\mu(n)\lambda(Sn),\mu(n)\mu(Sn)|=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\lambda(n)\lambda(Sn),\mu(n)\mu(Sn)|=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\lambda(n)\lambda(n),\mu(n)\mu(n)|=0,$$

т. е.

$$\mu(n)\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=0. \tag{v}$$

Наконец, используя (iii) и соответствующее равенство для μ, получим

$$\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}\mu(n))\mu(Sn)=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}\mu(n))\cdot Sn=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}\lambda(n))\cdot Sn=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}\lambda(n))\lambda(Sn)=$$
$$=\{1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|\}\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}\mu(n))\lambda(Sn)$$

и, следовательно,

$$(1\dot{-}\mu(n))\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|)\times$$
$$\times|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=0; \tag{vi}$$

прибавляя (v) к (vi) $\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))$ раз и учитывая, что $\mu+(1\dot{-}\mu)=1+(\mu\dot{-}1)$, имеем равенство

$$\rho(0)(1\dot{-}\rho(Sn))(1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|)|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=0,$$

прибавляя к которому (iv) $\rho(0)$ раз, получаем

$$\rho(0)(1\dot{-}|\lambda(n),\mu(n)|)|\lambda(Sn),\mu(Sn)|=0.$$

Используя пример 2.471, имеем поэтому

$$\{1\dot{-}|\rho(0)\lambda(n),\rho(0)\mu(n)|\}|\rho(0)\lambda(Sn),\rho(0)\mu(Sn)|=0,$$

что в сочетании с $|\rho(0)\lambda(0),\rho(0)\mu(0)|=0$ дает

$$|\rho(0)\lambda(x),\rho(0)\mu(x)|=0$$

и, следовательно,

$$\rho(0)\lambda(x)=\rho(0)\mu(x);$$

по теореме 2.9493 имеем $(1\dot{-}\rho(0))\mu(x)=0$; следовательно, $\mu(x)=\rho(0)\lambda(x)$, что и требовалось установить.

2.96. *Неравенства*

2.961. Мы определяем *неравенство* $a\geqslant b$ как обозначение для равенства

$$a=b+(a\dot{-}b),$$

а неравенство $a\leqslant b$ — как обозначение для

$$a=b\dot{-}(b\dot{-}a).$$

Неравенство $a \geqslant b$ читается: «a больше или равно b», а $a \leqslant b$ — «a меньше или равно b».

Мы вводим также еще два неравенства:

$a < b$ (a меньше b),

$a > b$ (a больше b), которые *определяются* как обозначения соответственно для $Sa \leqslant b$ и $a \geqslant Sb$.

Из примера 2.5 следует, что неравенство $a \leqslant b$ можно вывести из равенства $a \dot{-} b = 0$ и обратно, и что, аналогично, неравенства $a \leqslant b$ и $b \geqslant a$ (и поэтому также неравенства $a < b$ и $b > a$) можно вывести одно из другого.

Следующие простые неравенства сразу же получаются из определений и свойств разности

$$a + x \geqslant a,\ a \geqslant a \dot{-} x,\ a + Sx \geqslant a,\ Sa > a \dot{-} x.$$

2.962. Отношения неравенства транзитивны, иначе говоря,

2.9621. $a \geqslant c$ следует из $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$,

2.9622. $a > c$ следует из $a > b$ и $b > c$.

Так как $a \leqslant b$ эквивалентно $b \geqslant a$ (т. е. каждое из них выводимо из другого), транзитивность отношений $\leqslant$ и $<$ следует из 2.9621 и 2.9622. Доказательство 2.9621 содержится в примере 2.461; далее мы видим, что поскольку $(y \dot{-} Sx) = (y \dot{-} x) \dot{-} 1$, то $Sx \geqslant y$ следует из $x \geqslant y$, и поэтому 2.9622 следует из 2.9621. Действительно, 2.9622 есть следствие

2.963. $a > c$ следует из $a > b$ и $b \geqslant c$, что следует из 2.9621 и

2.964. *если* $b \geqslant c$, *то* $Sb \geqslant Sc$;

для доказательства последнего заметим, что из

$$b = c + (b \dot{-} c)$$

мы выводим $Sb = Sc + (b \dot{-} c)$, и, следовательно,

$$Sb = Sc + (Sb \dot{-} Sc).$$

2.97. Неравенства $a \geqslant b$, $a + c \geqslant b + c$ могут быть выведены одно из другого, то же верно и для неравенств $a \geqslant b$, $a \cdot Sc \geqslant b \cdot Sc$.

Действительно, $(b + c) \dot{-} (a + c) = b \dot{-} a$, $b \cdot Sc \dot{-} a \cdot Sc = (b \dot{-} a) \cdot Sc$ и $(b \dot{-} a)Sc = 0$ тогда и только тогда, когда $b \dot{-} a = 0$, ибо $(b \dot{-} a)Sc = (b \dot{-} a)c + (b \dot{-} a)$.

2.98. Рекурсивная арифметика, такая, какой она была введена в 2.1, непротиворечива в том смысле, что мы можем показать, что если $p = q$, где p и q — определенные цифры, является доказуемым равенством, то p и q — *одна и та же цифра*. Другими словами, в рекурсивной арифметике невозможно доказать равенство $0 = 1$.

Если мы будем говорить, что равенство $F = G$ *верифицируемо*, когда F и G — одна и та же цифра или когда подстановка цифр вместо переменных в F и G *) всегда переводит F и G в одну и ту же цифру, то мы можем выразить непротиворечивость словами: *только верифицируемые равенства доказуемы.*

Как мы заметили в 1.9, если переменные на местах аргументов заменены цифрами, то знак рекурсивной функции полностью устраним, иначе говоря, для любой рекурсивной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ от p переменных и для любого набора из p цифр $N_1, N_2, \ldots, N_p$ имеется одна и только одна цифра V такая, что доказуемо равенство

$$f(N_1, N_2, \ldots, N_p) = V.$$

Это, очевидно, верно для исходных функций $Z(x)$, $S(x)$, $\mathcal{I}(x)$ **), и это свойство сохраняется при подстановке; например, если $f(u, v)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, устранимы, то для любого данного набора цифр M, N имеются единственные цифры U, V, W такие, что доказуемы равенства

$$g(M, N) = U,\quad h(M, N) = V,\quad f(U, V) = W,$$

поэтому для функции

$$\varphi(x, y) = f(g(x, y), h(x, y)),$$

*) И вычисление значений функций. — *Прим. ред.*

**) Даже для исходных функций утверждение о *единственности* цифры V, обладающей упомянутым выше свойством, не является очевидным (и требует для своего доказательства рассмотрения всего исчисления равенств). — *Прим. перев.*

определяемой из f, g и h подстановкой, равенство

$$\varphi(M, N) = W$$

доказуемо для одного и только одного W, соответствующего данной паре M, N.

Дальше мы замечаем, что это свойство сохраняется при рекурсии. Если $f(a, n)$ (с любым числом параметров) вводится однократной рекурсией

$$f(a, 0) = \alpha(a),$$
$$f(a, n+1) = \beta(a, n, f(a, n)),$$

где α и β — устранимые функции, то f устранимо, ибо для любого набора цифр A, N имеются цифры V_1, $V_2, \ldots, V_N$ такие, что мы можем последовательно доказать

$$\alpha(A) = V_0, \quad \beta(A, 0, V_0) = V_1,$$
$$\beta(A, 1, V_1) = V_2, \ \ldots, \ \beta(A, N-1, V_{N-1}) = V_N$$

и

$$f(A, 0) = V_0, \quad f(A, 1) = V_1, \ \ldots, \ f(A, N) = V_N.$$

Если $f(a, m, n)$ дважды рекурсивна, то для любого конкретного набора цифр A, M функция $f(A, M, n)$ однократно рекурсивна и, следовательно, любому данному N соответствует единственное V, так что доказуемо $f(A, M, N) = V$. Аналогичные соображения можно применить для доказательства того, что k-рекурсивная функция устранима (для любого k).

Так как подстановка любой цифры вместо x в равенство $x = x$ дает верифицируемое равенство, то для завершения доказательства того, что только верифицируемые равенства доказуемы, мы должны показать, что допустимые преобразования в выводе дают из верифицируемых равенств снова верифицируемые. Надо рассмотреть лишь два случая. Первый из них — это подстановка G вместо F в некоторое равенство, содержащее F, в случае, когда $F = G$ — верифицируемое равенство. Если F и G — уже цифры, и так как по предположению $F = G$ верифицируемо, то F и G — одна и та же цифра и подстановка не изменяет равенства; если F и

G — функции *), то по предположению результат подстановки цифр вместо переменных в F и G должен переводить и F и G в одну и ту же цифру v, следовательно, если мы подставим G вместо F в некоторое верифицируемое равенство и затем подставим в это равенство цифры вместо переменных, то места, где G заменило F, заполняется цифрой v так же, как если бы подстановки не было.

Мы, наконец, приходим к случаю, когда равенство $F = G$ доказано в силу того, что F и G удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам; обозначим посредством φ функцию, вводящим равенствам которой удовлетворяют как F, так и G.

Если φ однократно рекурсивна и если ее вводящие равенства имеют вид

$$\varphi(a, 0) = \alpha(a), \ \varphi(a, n+1) = \beta(a, n, \varphi(a, n)),$$

то по предположению равенства

$$F(a, 0) = \alpha(a), \quad F(a, n+1) = \beta(a, n, F(a, n)),$$
$$G(a, 0) = \alpha(a), \quad G(a, n+1) = \beta(a, n, G(a, n))$$

верифицируемы. Значит, если для некоторого набора цифр A, N значения $F(A, 0)$, $F(A, 1), \ldots, F(A, N)$ и $G(A, 0)$, $G(A, 1), \ldots, G(A, N)$ суть соответственно $V_0, V_1, \ldots, V_N$ и $W_0, W_1, \ldots, W_N$, то как V_0, так и W_0 равно $\alpha(A)$, откуда

$$V_1 = \beta(A, 1, V_0) = \beta(A, 1, W_0) = W_1,$$
$$V_2 = \beta(A, 2, A_1) = \beta(A, 2, W_1) = W_2$$

и т. д. до $V_N = W_N$, что показывает верифицируемость равенства $F = G$.

Если φ дважды рекурсивна, а ее вводящие равенства суть

$$\varphi(a, 0, n) = \varphi(a, p+1, 0) = 1,$$
$$\varphi(a, p+1, n+1) = c(a, p, n, \varphi(a, p, d(a, p, n, \varphi(a, p+1, n))), \varphi(a, p+1, n)),$$

*) Точнее, если F или G не является цифрой. — *Прим. ред.*

то $F(A, 0, N) = G(A, 0, N)$ для любой цифры N, и, полагая $F(A, 1, 0) = G(A, 1, 0) = v_{10}$, $d(A, 0, 0, v_{10}) = d_{00}$, $F(A, 1, 1) = c(A, 0, 0, v_0, d_{00}, v_{10}) = G(A, 1, 1) = v_{11}$ и $d(A, 0, 1, v_{11}) = d_{01}$, имеем

$$F(A, 1, 2) = c(A, 0, 1, v_0, d_{01}, v_{11}) = G(A, 1, 2)$$

и т. д. до $F(A, 1, N) = G(A, 1, N) = v_{1N}$ для любой цифры N.

Далее, полагая $F(A, 2, 0) = G(A, 2, 0) = v_{20}$, $d(A, 1, 0, v_{20}) = d_{10}$, имеем

$$F(A, 2, 1) = G(A, 2, 1) = c(A, 1, 0, v_1, d_{10}, v_{20})$$

и т. д. до $F(A, 2, N) = G(A, 2, N)$.

Таким образом, шаг за шагом мы приходим к

$$F(A, P, N) = G(A, P, N)$$

для любого набора цифр (A, P, N), и, следовательно, $F = G$ верифицируемо. Аналогичные рассуждения применимы, если φ — рекурсивная функция более высокого порядка. Это завершает доказательство того, что всякое доказуемое равенство верифицируемо. *Впоследствии мы покажем, что обратное не имеет места, ибо имеются верифицируемые равенства, которые недоказуемы.*

Примеры к гл. II

2. Докажите, что если $f(0, y) = y$ и $f(Sx, y) = f(x, y)$, то $f(x, y) = y$.

Докажите равенства:

2.01. $a(b + c) = ab + ac$. **2.02.** $(ab)c = a(bc)$.
2.03. $(ab) \cdot (cd) = (ac) \cdot (bd)$. **2.1.** $x(1 \dot{-} x) = 0$. **2.2.** $1 \dot{-} x = 0^x$.
2.201. $(1 \dot{-} x) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\} = 1$. **2.21.** $a \dot{-} (b + c) = (a \dot{-} b) \dot{-} c$.
2.22. $(a \dot{-} b) \dot{-} c = (a \dot{-} c) \dot{-} b$. **2.23.** $(a + x) \dot{-} (b + x) = a \dot{-} b$.
2.231. $a(x \dot{-} 1) = ax \dot{-} a$. **2.232.** $a(b \dot{-} c) = ab \dot{-} ac$. **2.233.** $x \dot{-} x^2 = 0$.
2.234. $(1 \dot{-} x)(1 \dot{-} x) = 1 \dot{-} x$. **2.24.** $(1 \dot{-} |a, b|)(b \dot{-} a) = 0$.
2.241. $(1 \dot{-} |a, b|)(1 \dot{-} (b \dot{-} a)) = 1 \dot{-} |a, b|$.
2.242. $(b \dot{-} a)(Sa \dot{-} b) = 0$. **2.243.** $\{1 \dot{-} (Sa \dot{-} b)\}\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\} = 0$.
2.244. $(Sa \dot{-} b)(Sb \dot{-} a) \mid a, b \mid = 0$.
2.2441. $\{1 \dot{-} (Sa \dot{-} b)\} + \{1 \dot{-} |a, b|\} = 1 \dot{-} (a \dot{-} b)$.
2.245. $(b \dot{-} a) + (Sa \dot{-} b) = 1 + (a \dot{-} b) + (b \dot{-} Sa)$.
2.246. $Sa \dot{-} b = (a \dot{-} b) + \{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\}$.
2.25. $1 \dot{-} (p + q) = (1 \dot{-} p)(1 \dot{-} q)$.
2.251. $\{1 \dot{-} (q + r)\} + (1 \dot{-} q) r = (1 \dot{-} q) + (1 \dot{-} q)(r \dot{-} 1)$.

2.26. Докажите, что если $\alpha(x) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} x)$, то

$$\alpha(x) \dot{-} 1 = 0, \quad \alpha(x) + \{1 \dot{-} \alpha(x)\} = 1, \quad \alpha(x) \dot{-} x = 0, \quad x \cdot \alpha(x) = x,$$
$$\alpha(1 \dot{-} x) = 1 \dot{-} \alpha(x), \quad \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x), \quad 1 \dot{-} \alpha(x) = 1 \dot{-} x,$$
$$\alpha(x) \cdot \alpha(x) = \alpha(x), \quad \alpha(xy) = \alpha(x) \cdot \alpha(y),$$

и что $\alpha(f) \cdot g = 0$ следует из $f \cdot g = 0$.

2.261. Докажите, что если $\alpha(x, y) = \alpha(|x, y|)$, то

$$\{1 \dot{-} \alpha(x, y)\} x = \{1 \dot{-} \alpha(x, y)\} y \quad \text{и} \quad \{b \dot{-} b \cdot \alpha(c, b)\} + c \cdot \alpha(c, b) = c$$

2.27. Докажите равенства:

2.271. $(1 \dot{-} c) \dot{-} (1 \dot{-} ac) = 0$.
2.272. $(1 \dot{-} ac) \dot{-} (1 \dot{-} c) = (1 \dot{-} a)\alpha(c)$.
2.273. $(1 \dot{-} (1 \dot{-} a) b)(1 \dot{-} ac) b = (1 \dot{-} (1 \dot{-} a) b)(1 \dot{-} c) b$.
2.274. $(1 \dot{-} (1 \dot{-} ab) c)(1 \dot{-} a) c = 0$.

2.28. Докажите правила для показателей:

2.281. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. **2.282.** $(x^m)^n = x^{mn}$. **2.283.** $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

2.29. Докажите, что $3 \cdot 2 = 6$, $4 \cdot 2 = 8$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 7 = 28$ и $34 \cdot 27 = 918$.

2.3. Установите следующие схемы доказательств:

2.31. $\dfrac{f + g = 0}{f = 0}$. **2.32.** $\dfrac{\{x + (1 \dot{-} x)\} f = 0}{f = 0}$. **2.33.** $\dfrac{\{1 \dot{-} (g \dot{-} f)\} h = 0}{(Sf \dot{-} g) h = 0}$.

2.331. $\dfrac{(Sf \dot{-} g) h = 0}{\{1 \dot{-} (g \dot{-} f)\} h = 0}$. **2.332.** $\dfrac{(f \dot{-} g) h = 0}{(f \dot{-} Sg) h = 0}$.

2.34. $\dfrac{\{1 \dot{-} (Sf \dot{-} g)\} h = 0}{\{1 \dot{-} |f, g|\} h = 0}$. **2.341.** $\dfrac{f \cdot \alpha(g) = 0}{(1 \dot{-} f)(1 \dot{-} \alpha(g)) = 0}$.

2.35. $\dfrac{fg = fh}{f \mid g, h \mid = 0}$. **2.351.** $\dfrac{f^2 g = 0}{fg = 0}$.

2.36. $\dfrac{fg = 0 \quad (1 \dot{-} g) h = 0}{fh = 0}$. **2.37.** $\dfrac{(1 \dot{-} f)\{g + (1 \dot{-} h)(1 \dot{-} g)\varphi\} = 0 \quad h = 0}{(1 \dot{-} f)\varphi = 0}$.

2.4. Докажите, что:

2.41. $(x + y) \dot{-} z = (x \dot{-} z) + \{y \dot{-} (z \dot{-} x)\}$
2.42. $Sx \dot{-} (x \dot{-} a) = S(x \dot{-} (x \dot{-} a))$.
2.421. $a \dot{-} (a \dot{-} b) = b \dot{-} (b \dot{-} a)$.

2.422. $\dfrac{(a \dot{-} b)(a \dot{-} c) = 0}{(a \dot{-} b)(Sb \dot{-} c) = 0}$. **2.423.** $\dfrac{(a \dot{-} b)(Sc \dot{-} b) + (a \dot{-} c) = 0}{a \dot{-} b = 0}$.

2.43. $|b, a + (b \dot{-} a)| = a \dot{-} b$. **2.44.** $|a, b \dot{-} (b \dot{-} a)| = a \dot{-} b$.

2.45. $\dfrac{b \dot{-} a = 0 \quad a \dot{-} b = c}{b + c = a}$, **2.451.** $\dfrac{p \mid b, c \mid = 0}{p \mid a, b \mid = p \mid a, c \mid}$.

2.452. $\dfrac{p \mid b, c \mid = 0}{\{1 \dot{-} p \mid a, b \mid\} p \mid a, c \mid = 0}$. **2.453.** $\dfrac{p \mid a, b \mid + p \mid a, c \mid = 0}{p \mid b, c \mid = 0}$.

2.46. $\dfrac{a \dot{-} b = 0}{(c \dot{-} b)(Sa \dot{-} c) = 0}$. **2.461.** $\dfrac{b \dot{-} c = 0}{\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\}(a \dot{-} c) = 0}$.

2.462. $\dfrac{p\{(a \dot{-} b) + (b \dot{-} c)\} = 0}{p(a \dot{-} c) = 0}$. **2.47.** $\dfrac{\{(1 \dot{-} a) + (1 \dot{-} b)\} c = 0}{(1 \dot{-} ab) c = 0}$.

2.4701. $\dfrac{(1 \dot{-} ab) c = 0}{\{(1 \dot{-} a) + (1 \dot{-} b)\} c = 0}$. **2.471.** $\dfrac{(1 \dot{-} a) bc = 0}{(1 \dot{-} ab) bc = 0}$.

2.472. $\dfrac{(Sa \dot{-} b) c = 0}{\{1 \dot{-} \mid a, b \mid\} c = 0}$. **2.473.** $\dfrac{1 \dot{-} (a \dot{-} b) = 0}{a = b + (a \dot{-} b)}$.

2.48. $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} x) y\}(1 \dot{-} xz) yz = 0$.

2.4801. $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} ab) c\}\{(1 \dot{-} a) + (1 \dot{-} b)\} c = 0$.

2.481. $\dfrac{(1 \dot{-} \mid a, b \mid) c = 0}{(Sa \dot{-} b) c = 0}$.

2.49. $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a) b\}(1 \dot{-} a) = (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)$.

2.491. $\dfrac{(1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b) c = 0}{\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a) b\}(1 \dot{-} ad) c = 0}$.

2.5. Докажите, что каждое из равенств

(α) $b = a + (b \dot{-} a)$, (β) $a = b \dot{-} (b \dot{-} a)$, (γ) $a \dot{-} b = 0$

следует из любого другого.

2.6. Докажите равенство

$$\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} + \{1 \dot{-} (Sb \dot{-} a)\} = 1.$$

2.7. Обоснуйте схемы:

2.701. $\dfrac{f(a, a + c) = 0}{\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} f(a, b) = 0}$. **2.71.** $\dfrac{f(a, a + c) = 0}{(Sb \dot{-} a) f(a, b) = 0}$.

2.711. $\dfrac{f(b + Sc, b) = 0}{(a \dot{-} b) f(a, b) = 0}$. **2.72.** $\dfrac{f(a, a + c) = 0 \quad f(a + Sc, a) = 0}{f(a, b) = 0}$.

2.7201. Докажите равенства:

$$a \dot{-} (a \dot{-} (a \dot{-} b)) = a \dot{-} b,$$
$$\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\}\{b \dot{-} (a \dot{-} (a \dot{-} b))\} = 0.$$

2.73. Докажите, что для любой конкретной цифры $\boldsymbol{p}$ имеет место

2.7301. $\dfrac{f(\boldsymbol{p} \dot{-} r) = 0 \quad f(\boldsymbol{p} + Sr) = 0}{f(x) = 0}$ **2.7302.** $\dfrac{f(0) + f(1) + \ldots + f(\boldsymbol{p}) = 0 \quad f(\boldsymbol{p} + Sr) = 0}{f(x) = 0}$.

2.7303. $\dfrac{f(\boldsymbol{p} \dot{-} Sr) = 0 \quad f(\boldsymbol{p}) = 0 \quad f(\boldsymbol{p} + Sr) = 0}{f(x) = 0}$. **2.7304.** $\dfrac{f(0) = \boldsymbol{p} \quad f(Sx) = f(x)}{f(x) = \boldsymbol{p}}$.

2.74. Докажите, что если $\varphi(x, 0) = f(Sx)$ и $\varphi(x, Sr) = \varphi(x, r) \times$ $\times f(x + SSr)$, то $\prod_f (x + Sr) = \prod_f (x) \cdot \varphi(x, r)$, и выведите, что $\left\{1 \dot{-} \prod_f (x)\right\} \prod_f (x + r) = 0$.

2.741. Докажите, что

$$\{1 \dot{-} f(x)\} \prod_f (x) = 0.$$

2.8. В обозначениях из § 1.6 докажите:

2.81. $\mathrm{Alt}\, x \cdot \mathrm{Alt}\, Sx = 0$, $\mathrm{Alt}\, x + \mathrm{Alt}\, Sx = 1$, $\mathrm{Alt}\, 2x = 0$, $\mathrm{Alt}\,(2x + 1) = 1$, $\alpha(\mathrm{Alt}\, x) = \mathrm{Alt}\, x$. **2.82.** $\mathrm{Hf}\,(2x) = \mathrm{Hf}\,(2x + 1) = x$.

2.83. $Sx \dot{-} (S\,\mathrm{Rt}\, x)^2 = 0$, $(\mathrm{Rt}\, x)^2 \dot{-} x = 0$.

2.9. Докажите, что если функция $n!$ определена равенствами

$$0! = 1, \quad (Sn)! = (n!)\, Sn,$$

то $1 \dot{-} n! = 0$ и $(Sn)! = \prod_S (n)$.

2.91. Докажите равенство

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)\}(1 \dot{-} ac)\{1 \dot{-} (b + (1 \dot{-} c))\} = 0.$$

ГЛАВА III

ЛОГИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Пропозициональное исчисление. Пропозициональные функции. Ограниченные операторы всеобщности, существования и минимизации A_x^n, E_x^n и L_x^n. Математическая индукция. Считающий оператор N_x^n.

3. Если a и b — натуральные числа и если равенство $|a, b| = 0$ доказуемо, то мы называем равенство $a = b$ *истинным высказыванием*, а если доказуемо неравенство $|a, b| > 0$, то равенство $a = b$ называется *ложным высказыванием*. Так как каждое из равенств $a = b$, $|a, b| = 0$ можно вывести из другого, то истинное высказывание является доказуемым равенством и обратно.

Более того, поскольку $|x, y|$ — рекурсивная функция, то для любых натуральных чисел a, b имеется единственное натуральное число c такое, что доказуемо

$$|a, b| = c;$$

если это число c есть нуль, то $a = b$ является истинным высказыванием, а если c — не нуль, то доказуемо $1 \dot{-} |a, b| = 0$, так что $a = b$ является ложным высказыванием. Таким образом, *любое высказывание* *) *или истинно, или ложно, и никакое высказывание не является одновременно истинным и ложным.*

3.1. Мы называем $\alpha(|a, b|)$ *номером* высказывания $a = b$, так что истинное высказывание имеет номер 0, а номер ложного высказывания есть единица. Обратно, если $\alpha(|a, b|) = 0$, то $|a, b| = 0$, так что высказывание $a = b$ истинно, а если $\alpha(|a, b|) = 1$, то $|a, b| > 0$ и $a = b$ ложно, и поэтому номер некоторого высказывания есть нуль тогда и только тогда, когда это высказывание

*) Здесь автор, видимо понимает под высказыванием любое равенство вида $a = b$. — *Прим. ред.*

истинно, и есть единица тогда и только тогда, когда это высказывание ложно.

3.11. Высказывание $1 \dot{-} |a, b| = 0$ называется *отрицанием высказывания* $a = b$. Так как

$$\alpha(1 \dot{-} |x, y|) = 1 \dot{-} |x, y|,$$

то если высказывание $a = b$ истинно, так что $|a, b| = 0$, то номер отрицания $a = b$ есть единица, а если $a = b$ ложно, то номер его отрицания есть нуль. Поэтому отрицание истинного высказывания есть ложное высказывание, а отрицание ложного высказывания является истинным высказыванием.

3.12. Мы обозначаем высказывания просто буквами p, q, r или этими буквами с цифровыми нижними индексами. Отрицание высказывания p обозначается через $\sim p$, что читается «не p». Если контекст позволяет избежать двусмысленности, то мы будем писать просто «p» вместо «p истинно» и «$\sim p$» вместо «p ложно».

3.13. Если p, q обозначают соответственно высказывания $a = b$, $c = d$, то высказывание

$$|a, b| + |c, d| = 0$$

обозначается через $p \,\&\, q$, что читается «p и q»; высказывание

$$|a, b| \cdot |c, d| = 0$$

обозначается через $p \vee q$, что читается «p или q», а

$$(1 \dot{-} |a, b|) \cdot |c, d| = 0$$

обозначается через $p \to q$, что читается «p влечет q». $p \to q$ — это то же самое высказывание, что и $\sim p \vee q$. Наконец, мы обозначаем равенство

$$(1 \dot{-} |a, b|) \cdot |c, d| + (1 \dot{-} |c, d|) \cdot |a, b| = 0$$

через $p \leftrightarrow q$, что читается «p эквивалентно q», так что $p \leftrightarrow q$ — это то же самое высказывание, что и $(p \to q) \,\&\, (q \to p)$.

Мы видим, что поскольку $||a, b|, 0| = |a, b|$, то

$$(a = b) \leftrightarrow (|a, b| = 0),$$

а поскольку

$$(1 \dot{-} x)\alpha(x) = x(1 \dot{-} \alpha(x)) = 0$$

и $\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)$, то

$$(x = 0) \leftrightarrow (\alpha(x) = 0),$$
$$(x > 0) \leftrightarrow (\alpha(x) = 1).$$

Мы обоснуем предложенное чтение знаков &, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ в следующем разделе.

3.14. Из равенства $|a, b| + |c, d| = 0$ следует, что $|a, b| = 0$ и $|c, d| = 0$, и обратно; поэтому $p \,\&\, q$ истинно тогда и только тогда, когда и p, и q истинно.

3.141. Произведение $|a, b| \cdot |c, d|$ обращается в нуль, если $|a, b| = 0$ или $|c, d| = 0$, а если и $|a, b| > 0$, и $|c, d| > 0$, то $|a, b| \cdot |c, d| > 0$ и, следовательно, $p \vee q$ истинно тогда и только тогда, когда p истинно или q истинно.

3.142. Теперь видно, что $p \rightarrow q$ истинно тогда и только тогда, когда p ложно или q истинно, — это мы считаем смыслом выражения «*p влечет q*».

3.15. По определению эквивалентности p и q эквивалентны тогда и только тогда, когда p и q оба истинны или оба ложны. Из высказывания $p \leftrightarrow q$ и доказательства q мы извлекаем доказательство p, ибо если равенства

$$\{1 \dot{-} |a, b|\} \cdot |c, d| + \{1 \dot{-} |c, d|\} \cdot |a, b| = 0$$

и $|c, d| = 0$ доказаны, то равенство $|a, b| = 0$ доказано; таким образом, для доказательства некоторого высказывания p достаточно доказать высказывание, эквивалентное p.

3.16. Знаки &, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ известны как логические константы; их введение дает значительную экономию в технике доказательства, выявляя много легко узнаваемых блоков, которые можно использовать при этом.

3.2. *Свойства логических констант*

$$\frac{(1 \dot{-} x)\, y = 0 \qquad (1 \dot{-} y)\, z = 0}{(1 \dot{-} x)\, z = 0},$$

и поэтому, если p, q, r — произвольные высказывания,

к примеру, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, то, взяв $|a_1, a_2|$ вместо x, $|b_1, b_2|$ вместо y и $|c_1, c_2|$ вместо z, мы получаем схему доказательства

$$\frac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow r}{p \rightarrow r},$$

сущность которой можно коротко выразить словами: «$\rightarrow$» является *транзитивным* отношением. Аналогично, из схемы

$$\frac{x = 0 \qquad (1 \dot{-} x)\, y = 0}{y = 0}$$

мы извлекаем фундаментальную схему для импликации (известную как *модус поненс* *))

$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q}.$$

3.22. Поскольку сложение и умножение коммутативны, то имеют место следующие схемы доказательства:

$$\frac{p \,\&\, q}{q \,\&\, p}, \quad \frac{p \vee q}{q \vee p}, \quad \frac{p \leftrightarrow q}{q \leftrightarrow p}.$$

Они показывают, что «&», «$\vee$« и «$\leftrightarrow$» являются симметричными отношениями.

3.23. Из равенства $x(1 \dot{-} x) = 0$ мы выводим как $p \rightarrow p$, так и $p \leftrightarrow p$; это показывает, что «$\rightarrow$» и «$\leftrightarrow$» являются рефлексивными отношениями.

3.24. Поскольку $f = 0$ и $g = 0$ следуют из $f + g = 0$ и обратно, мы имеем

$$\frac{p \,\&\, q}{p}, \quad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q}, \quad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$$

и

$$\frac{p \qquad q}{p \,\&\, q}, \quad \frac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}.$$

Следовательно, «$\leftrightarrow$», как и «$\rightarrow$», транзитивно.

*) Эта схема называется также схемой *сокращения посылки*. — *Прим. ред.*

3.3. Теперь мы рассмотрим некоторые важные соотношения, которые имеются между логическими константами.

Поскольку $1 \dot{-} \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\} = 1 \dot{-} x$, то

3.31. $\sim \sim p \leftrightarrow p.$

Из равенства $1 \dot{-} (x + y) = (1 \dot{-} x)(1 \dot{-} y)$ мы выводим

3.32. $\sim (p \,\&\, q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q,$

а из $1 \dot{-} xy = \alpha((1 \dot{-} x) + (1 \dot{-} y))$ следует

3.321. $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \,\&\, \sim q.$

Далее, поскольку $x(y + z) = xy + xz$, то $p \vee (q \,\&\, r)$ — это то же самое высказывание, что и $(p \vee q) \& (p \vee r)$, так что

3.33. $p \vee (q \,\&\, r) \leftrightarrow (p \vee q) \,\&\, (p \vee r),$

а поскольку

$$\{1 \dot{-} (x + yz)\}(x + y)(x + z) = \{1 \dot{-} (x + y)(x + z)\}(x + yz) = 0,$$

то

3.331. $p \,\&\, (q \vee r) \leftrightarrow (p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r).$

Для эквивалентных высказываний мы можем доказать *взаимозаменяемость*; точнее, имеет место следующая теорема:

3.34. *Если* $p_1 \leftrightarrow p_2$ *и* $q_1 \leftrightarrow q_2$, *то*

$$\sim p_1 \leftrightarrow \sim p_2, \quad p_1 \,\&\, q_1 \leftrightarrow p_2 \,\&\, q_2, \quad p_1 \vee q_1 \leftrightarrow p_2 \vee q_2,$$
$$(p_1 \to q_1) \leftrightarrow (p_2 \to q_2) \quad \text{и} \quad (p_1 \leftrightarrow q_1) \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow q_2).$$

Прежде всего мы заметим, что поскольку индексы 1, 2 взаимозаменяемы в данных посылках $p_1 \leftrightarrow p_2$, $q_1 \leftrightarrow q_2$, то достаточно доказать требуемые высказывания с импликацией вместо эквивалентности. Поскольку $p \to q$ — это то же самое, что и $\sim p \vee q$, то истинность четвертого высказывания следует из истинности первого и третьего, а тогда пятое получается с использованием второго.

То, что $\sim p_2 \to \sim p_1$ следует из $p_1 \to p_2$, показывается с помощью равенства

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} x_2)\}(1 \dot{-} x_1) = (1 \dot{-} x_1) \dot{-} \{(1 \dot{-} x_1) \dot{-} x_2(1 \dot{-} x_1)\},$$

в силу которого $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} x_2)\}(1 \dot{-} x_1) = 0$ следует из $(1 \dot{-} x_1)x_2 = 0$.

Так как $\sim \sim r \leftrightarrow r$, из 3.321 мы выводим, что

3.341. $p \vee q \leftrightarrow \sim (\sim p \,\&\, \sim q),$

так что истинность третьего высказывания следует из истинности первого и второго.

Осталось лишь доказать схему

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 \to p_2 \\ q_1 \to q_2 \end{array}}{p_1 \,\&\, q_1 \to p_2 \,\&\, q_2},$$

а она следует из равенства

$$\{1 \dot{-} (x_1 + y_1)\}(x_2 + y_2) = \{(1 \dot{-} x_1)x_2 \dot{-} y_1x_2\} + \{(1 \dot{-} y_1)y_2 \dot{-} x_1y_2\},$$

с помощью которого мы выводим

$$\{1 \dot{-} (x_1 + y_1)\}(x_2 + y_2) = 0$$

из равенств $(1 \dot{-} x_1)x_2 = 0$, $(1 \dot{-} y_1)y_2 = 0$.

3.342. Важность результатов, содержащихся в теореме 3.34, заключается в том, что она позволяет нам заменить любое высказывание в выражении, составленном с использованием логических констант, на эквивалентное; выражение, получающееся в результате такой замены, будет эквивалентно исходному и, следовательно, в силу 3.15 доказательства преобразованного выражения достаточно для доказательства исходного. В частности, поскольку высказывания $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}| = 0$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ эквивалентны, *мы можем без потери общности предположить, что любое высказывание имеет вид* $\boldsymbol{c} = 0$.

3.343. В качестве примера использования этого принципа мы подробно рассмотрим доказательство высказывания

P: $(p \to q) \to \{(r \vee p) \to (r \vee q)\}.$

Если p', q', r' эквивалентны соответственно p, q, r, то $p' \to q'$, $r' \vee p'$, $r' \vee q'$ эквивалентны соответственно $p \to q$, $r \vee p$, $r \vee q$, и, следовательно, P эквивалентно

$$\text{P}': \quad (p' \to q') \to \{(r' \vee p') \to (r' \vee q')\}.$$

Каковы бы ни были высказывания p, q, r, мы можем считать, что p', q', r' имеют соответственно вид $\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{b} = 0$, $\boldsymbol{c} = 0$ и, следовательно, P эквивалентно

$$\text{P}^*: \quad \{1 \dot{-} (1 \dot{-} \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\}(1 \dot{-} \boldsymbol{ca})\boldsymbol{cb} = 0,$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — конкретные цифры, которые можно получить из доказуемого равенства (пример 2.48)

$$\text{G}: \quad \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)y\}(1 \dot{-} zx)zy = 0$$

(где x, y, z — цифровые переменные) подстановкой $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ соответственно вместо x, y и z.

Если мы допускаем, что p, q, r играют как роль имен для высказываний, так и роль цифровых переменных, мы можем написать G прямо в виде

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} p)q\}(1 \dot{-} rp)rq = 0;$$

иначе говоря, мы можем сформулировать эквивалент P, просто написав $(1 \dot{-} p)q$ вместо $p \to q$, rp вместо $r \vee p$ и т. д. (хотя, конечно, мы изменяем значение букв, когда мы делаем эту транскрипцию).

3.35. Из доказуемых равенств

$$x(1 \dot{-} x) = 0, \quad 1 \dot{-} \{x + (1 \dot{-} x)\} = 0$$

мы получаем, что истинны высказывания

$$p \vee \sim p \quad \text{и} \quad \sim (p \,\&\, \sim p),$$

которые известны соответственно как *принцип исключенного третьего* (или *tertium non datur*) и как *принцип непротиворечивости.*

3.4. *Пропозициональные функции*

Если x — переменная, а $f(x)$, $g(x)$ — две данные рекурсивные функции, то равенство

$$f(x) = g(x)$$

называется *пропозициональной функцией*; если для некоторого значения $\boldsymbol{a}$ переменной x доказуемо $f(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})$, то говорят, что эта пропозициональная функция истинна для данного значения $\boldsymbol{a}$; если $|f(\boldsymbol{a}), g(\boldsymbol{a})| > 0$ доказуемо, то говорят, что эта пропозициональная функция ложна для значения $\boldsymbol{a}$. Более точно, равенство $f(x) = g(x)$ называется пропозициональной функцией с одной переменной, а $f(x, y) = g(x, y)$ — пропозициональной функцией с двумя переменными и т. д. Пропозициональные функции обозначаются посредством $p(x)$, $p(x, y)$ и т. д. в соответствии с числом переменных *).

3.41. Как и в случае высказываний, если $p(x)$ и $q(x)$ обозначают пропозициональные функции

$$F(x) = f(x), \quad G(x) = g(x),$$

то мы обозначаем $1 \dot{-} |F(x), f(x)| = 0$ через $\sim p(x)$,

$$\begin{array}{rll} |F(x), f(x)| + |G(y), g(y)| & \text{через} & p(x) \,\&\, q(y), \\ |F(x), f(x)| \cdot |G(y), g(y)| & \text{через} & p(x) \vee q(y), \\ \sim p(x) \vee q(y) & \text{через} & p(x) \to q(y) \quad \text{и} \\ \{p(x) \to q(y)\} \,\&\, \{q(y) \to p(x)\} & \text{через} & p(x) \leftrightarrow q(y). \end{array}$$

3.42. Те соотношения между логическими константами, которые мы установили для высказываний, также имеют место для пропозициональных функций, причем соответствующие доказательства проводятся с использованием тех же формул, которые имеются в доказательствах указанных соотношений для высказываний; например, мы получаем

$$p(x) \vee \sim p(x)$$

из $y(1 \dot{-} y) = 0$, подставляя $|F(x), f(x)|$ вместо y. Мы охватываем термином *формула* и высказывания, и пропозициональные функции.

В обозначениях этой главы фундаментальная теорема 2.68 приобретает вид

3.43. $x = y \to \{p(x) \to p(y)\}$.

*) В действительности автор считает пропозициональной функцией любое равенство, даже если количество переменных, входящих в левую часть равенства, не равно количеству переменных, входящих в правую часть. — *Прим. перев.*

3.5. Логические константы позволяют нам вводить условные равенства элементарной алгебры. В отличие от переменной x, которая характеризуется тем свойством, что ее можно заменить нулем или Sx, куда бы она не входила, x в условном равенстве является знаком неизвестной цифры, который можно заместить некоторой конкретной цифрой. Например, когда мы говорим, что $x = 3$ является решением равенства $x^2 = 9$, мы имеем в виду, что в результате замены x на 3 во втором из этих равенств получается истинное равенство, но ни в $x = 3$, ни в $x^2 = 9$ мы не можем заменить x на нуль или на Sx. На самом деле, $x = 3$ и $x^2 = 9$ являются не равенствами *), а пропозициональными функциями, и тот факт, что 3 есть то значение x, которое удовлетворяет условию $x^2 = 9$, выражается импликацией

$$\mathrm{F}: \quad (x = 3) \to (x^2 = 9).$$

Формула F выполняется, как легко проверить, для любого значения x, ибо $1 \dot{-} |3 + Sr,\ 3| = 0$ и $1 \dot{-} |3 \dot{-} Sr,\ 3| = 0$ (в силу примера 2.42), и $|3^2, 9| = 0$, так что (в силу примера 2.7303)

$$\{1 \dot{-} |x, 3|\} \cdot |x^2, 9| = 0,$$

что завершает доказательство формулы F.

Подобным же образом тот факт, что «равенство» $x^2 \dot{+} 6 = 5x$ имеет лишь два решения, $x = 2$ и $x = 3$, выражается импликацией

$$(x^2 + 6 = 5x) \to (x = 2) \vee (x = 3),$$

т. е. $\{1 \dot{-} |x^2 + 6, 5x|\} \cdot |x, 2| \cdot |x, 3| = 0$; обозначая левую часть этого равенства через $f(x)$, мы имеем

$$f(3 + r) = \{1 \dot{-} r(r + 1)\} r(r + 1) = 0$$

и $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, что доказывает $f(x) = 0$.

3.6. В дополнение к логическим константам мы вводим *ограниченные операторы всеобщности, существования* и *минимизации* A^n_x, E^n_x и L^n_x следующим образом: $A^n_x(f(x) = 0)$ обозначает пропозициональную функцию $\sum_f(n) = 0$; $E^n_x(f(x) = 0)$ — пропозициональную функцию $\prod_f(n) = 0$ и $L^n_x(f(x) = 0)$ — функцию $\mu_f(n)$. Операторы «A^n_x», «E^n_x», «L^n_x» читаются так: «для всех x от 0 до n», «для некоторого x от 0 до n» и «наименьшее x от 0 до n»; мы переходим к обоснованию этих предложенных названий. (Мы используем термин «обосновать» в неформальном обсуждении — здесь не может быть речи о формальном доказательстве, ибо в формальном построении участвует только сам знак, а не его интерпретация.)

*) Имеются в виду истинные равенства. — *Прим. ред.*

3.61. Логические константы и операторы можно рассматривать просто как сокращения для тех выражений, с помощью которых они были введены: в этом случае во всяком формальном доказательстве логические константы и операторы следует устранить, заменив их теми выражениями, которые они обозначают. В противоположном случае мы можем рассматривать эти знаки как дополнительную часть формальной системы, удовлетворяющую, *по определению*, соотношениям

$$\{(a = b) \vee (c = d)\} \leftrightarrow \{|a, b| \cdot |c, d| = 0\},$$
$$\{(a = b) \,\&\, (c = d)\} \leftrightarrow \{|a, b| + |c, d| = 0\},$$
$$\{(a = b) \to (c = d)\} \leftrightarrow \{(1 \dot{-} |a, b|) \cdot |c, d| = 0\},$$
$$\{(a = b) \leftrightarrow (c = d)\} \leftrightarrow \{(1 \dot{-} |a, b|) |c, d| + (1 \dot{-} |c, d|) |a, b| = 0\},$$

$$A^n_x(f(x) = 0) \leftrightarrow \left(\sum_f(n) = 0\right),$$
$$E^n_x(f(x) = 0) \leftrightarrow \left(\prod_f(n) = 0\right),$$
$$L^n_x(f(x) = 0) = \mu_f(n),$$

которые следует добавить к списку формул, допустимых в доказательстве; в этом случае эти новые знаки нельзя полностью устранить, но выражения, содержащие их, можно преобразовать в эквивалентные равенства, в которых они не встречаются.

Знак x в операторах *) $A^n_x(f(x)=0)$, $E^n_x(f(x)=0)$ и $L^n_x(f(x)=0)$ является не настоящей переменной, а вспомогательным знаком, известным как *связанная переменная*. Нас бы не затруднило обозначать связанные переменные особыми знаками, но поскольку риск путаницы мал, обычно для них используют те же знаки, что и для переменных. Тот факт, что x в $A^n_x(f(x)=0)$ является связанной переменной, можно формально выразить правилом: $A^n_x(f(x)=0)$ можно заменять на $A^n_y(f(y)=0)$ или на выражение, получаемое замещением x на любую другую переменную, однако подстановка вместо связанной переменной не разрешается; для остальных операторов можно сформулировать аналогичные правила.

Иначе мы можем сформулировать это правило в виде эквивалентности

$$A^n_x(f(x)=0) \leftrightarrow A^n_y(f(y)=0),$$

в которой x и y можно замещать на любые другие переменные; для прочих операторов эквивалентности аналогичны.

3.62. $A^0_x(f(x)=0)$ есть высказывание $\sum_f(0)=0$, т. е. $f(0)=0$, и если для некоторого p $A^p_x(f(x)=0)$ эквивалентно

$$f(0)=0\,\&\,f(1)=0\,\&\,\ldots\,\&f(p)=0,$$

то, поскольку $\sum_f(n+1)=\sum_f(n)+f(n+1)$ и, значит, $A^{p+1}_x(f(x)=0)$ есть высказывание $A^p_x(f(x)=0)\,\&\,f(p+1)=0$, имеем, что $A^{p+1}_x(f(x)=0)$ эквивалентно

$$f(0)=0\,\&\,f(1)=0\,\&\ldots\&f(p+1)=0,$$

поэтому для любого конкретного p выражение $A^p_x(f(x)=0)$ эквивалентно

$$f(0)=0\,\&\,f(1)=0\,\&\ldots\&f(p)=0.$$

*) Здесь автор не различает операторы и операторные термы (см. сноску на стр. 101). — *Прим. ред.*

Аналогично, поскольку

$$\prod_f(n+1)=\prod_f(n)\cdot f(n+1),$$

то $E^p_x(f(x)=0)$ эквивалентно

$$f(0)=0\vee f(1)=0\vee\ldots\vee f(p)=0.$$

Для интерпретации оператора L^n_x мы напомним характеристические свойства функции $\mu_f(n)$, установленные в предыдущей главе.

Из доказанных равенств (2.942 и 2.949) мы имеем

$$\mu_f(n)\leqslant n$$

и

$$\{1\dot{-}\prod_f(n)\}f(\mu_f(n))=0,$$

откуда мы получаем формулу

$$E^n_x(f(x)=0)\to\{f(\mu_f(n))=0\,\&\,\mu_f(n)\leqslant n\},$$

которая утверждает, что если для некоторого значения x между 0 и n функция $f(x)$ обращается в нуль, то $\mu_f(n)$ есть одно из таких значений. Из равенства 2.9493

$$\{1\dot{-}f(n)\}\{\mu\ (x)\dot{-}n\}=0$$

мы имеем

$$f(n)=0\to\mu_f(x)\leqslant n,$$

что эквивалентно

$$n<\mu_f(x)\to f(n)>0,$$

т. е. тому, что $f(n)$ не обращается в нуль ни при каком n, меньшем $\mu_f(x)$. Поэтому если $f(x)$ обращается в нуль при некотором значении x от 0 до n, то $\mu_f(n)$ — наименьшее из таких значений.

Если $f(x)>0$ для всех x от 0 до n, то из равенства 2.945

$$\prod_f(n)\mu_f(n)=0$$

следует

$$L^n_x(f(x)=0)=\mu_f(n)=0,$$

3.7. *Математическая индукция.*

Из теоремы 2.8 следует, что справедлива схема доказательств

$$\frac{p(0)\qquad p(x)\to p(x+1)}{p(x)}.$$

Эта схема известна как схема *математической индукции*. Соответствующую ей формулу

3.8. $[p(0)\,\&\,A_x^n\{p(x)\to p(x+1)\}]\to p(n)$

можно назвать принципом математической индукции.

Мы выводим формулу 3.8 из

3.81. $[p(0)\,\&\,A_x^n\{p(x)\to p(x+1)\}]\to p(n+1)$;

любая $p(x)$ имеет эквивалентную пропозициональную функцию, скажем, $f(x)=0$; в силу примеров 3.01, 3.02 и 3.322 мы видим, что формула 3.81 эквивалентна $\varphi(n)=0$, где

$$\varphi(n)=\{1\dot{-}f(0)\}\prod_{\theta}(n)f(n+1),$$
$$\theta(x)=f(x)+\{1\dot{-}f(x+1)\}.$$

Действительно, $\varphi(0)=\{1\dot{-}f(0)\}\{f(0)+(1\dot{-}f(1))\}f(1)=0$ и

$$\varphi(n+1)=\{1\dot{-}f(0)\}\prod_{\theta}(n)\{f(n+1)+$$
$$+(1\dot{-}f(n+2))\}f(n+2)=\varphi(n)f(n+2),$$

так что $\{1\dot{-}\varphi(n)\}\varphi(n+1)=0$, отсюда $\varphi(n)=0$ следует по схеме индукции.

Если мы обозначим пропозициональную функцию 3.8 через $P(n)$, то $P(0)$ есть

$$p(0)\,\&\,\{p(0)\to p(1)\}\to p(0),$$

что имеет место в силу примера 3.031, а $P(n+1)$ эквивалентно

$$p(0)\,\&\,A_x^n\{p(x)\to p(x+1)\}\,\&\,\{p(n+1)\to p(n+2)\}\to p(n+1),$$

что следует из 3.81 (и примера 3.031). Так как $P(0)$ и $P(n+1)$ доказаны, то $P(n)$ получается в силу 2.7.

3.9. Здесь мы соберем для ссылок основные свойства операторов A, E и L; дробная часть номеров следующих формул та же, что и у номеров теорем предыдущей главы, переформулировками которых являются эти формулы.

3.91 *). $\dfrac{q(n)\to\{a\leqslant n\to p(a)\}}{q(n)\to A_a^n p(a)}$;

3.92. $\dfrac{\{a\leqslant n\,\&\,p(a)\}\to q(n)}{E_a^n p(a)\to q(n)}$;

3.921. $p(n)\to E_a^n p(a)$;

3.942. $L_x^n p(x)\leqslant n$;

3.945. $\sim E_x^n p(x)\to\{L_x^n p(x)=0\}$;

3.949. $E_x^n p(x)\to p(L_x^n p(x))$;

3.9493. $p(a)\to\{L_x^n p(x)\leqslant a\}$.

3.95. Рассмотрим еще несколько теорем об этих операторах, которые потребуются в дальнейшем. В нижеследующих доказательствах мы систематически употребляем строчные буквы для обозначения функций, представляющих **) предикаты, обозначенные соответствующими заглавными буквами. Произведение $\prod_f(n)$ и сумма $\sum_f(n)$ будут также обозначаться соответственно $\prod\limits_{x\leqslant n} f(x)$ и $\sum\limits_{x\leqslant n} f(x)$.

3.951 ***). $\dfrac{H\to\{F(x)\to G(x)\}}{H\to\{E_x^n F(x)\to E_x^n G(x)\}}$.

В терминах представляющих функций нам надо вывести равенство

(i) $(1\dot{-}h)(1\dot{-}\prod_f(n))\prod_g(n)=0$

из $(1\dot{-}h)(1\dot{-}f(x))g(x)=0$.

*) Для обоснования этой и ряда дальнейших схем (см., например, 3.92, 3.951 и т. д.) используется правило подстановки вместо (свободной) переменной. В связи с этим импликации, соответствующие этим схемам, не будут, вообще говоря, выводимы (ср. теорему о дедукции, гл. V). — *Прим. ред.*

**) Под представляющей функцией предиката F автор имеет в виду такую функцию f, что $f(x)=0\leftrightarrow F(x)$. — *Прим. ред.*

***) Переменная x не входит свободно в H. — *Прим. ред.*

Для $n = 0$ требуемый вывод очевиден.

В силу 2.7 имеет место $(1 \dot{-} p) \dot{-} pq = 1 \dot{-} p$, отсюда с помощью 2.7 (по q)

$$1 \dot{-} pq = (1 \dot{-} p)\{1 \dot{-} (1 \dot{-} q)\} + (1 \dot{-} q).$$

Следовательно,

$$\left[1 \dot{-} \{(1 \dot{-} h)(1 \dot{-} \textstyle\prod_f(n))\prod_g(n)\}\right](1 \dot{-} h)(1 \dot{-} \textstyle\prod_f(n+1)) \times$$
$$\times \textstyle\prod_g(n+1) = \left[1 \dot{-} \{(1 \dot{-} h)(1 \dot{-} \prod_f(n))\prod_g(n)\}\right](1 \dot{-} h) \times$$
$$\times g(n+1)\textstyle\prod_g(n)\{(1 \dot{-} \prod_f(n))(1 \dot{-} (1 \dot{-} f(n+1))) +$$
$$+ (1 \dot{-} f(n+1))\} = 0,$$

что с помощью 2.8 завершает доказательство (i).

3.9511*). $\dfrac{H \to \{F(x) \to G(x)\}}{H \to \{A_x^n F(x) \to A_x^n G(x)\}}$.

Действительно, имеем

$$\left[1 \dot{-} \{(1 \dot{-} h)(1 \dot{-} \textstyle\sum_f(n))\sum_g(n)\}\right](1 \dot{-} h) \times$$
$$\times \{(1 \dot{-} \textstyle\sum_f(n)) \dot{-} f(n+1)\}(\textstyle\sum_g(n) + g(n+1)) =$$
$$= \left[1 \dot{-} \{(1 \dot{-} h)(1 \dot{-} \textstyle\sum_f(n))\sum_g(n)\right](1 \dot{-} h) \times$$
$$\times \{(1 \dot{-} f(n+1)) \dot{-} \textstyle\sum_f(n)\} \cdot g(n+1) = 0,$$

используя гипотезу $(1 \dot{-} h)(1 \dot{-} f(x))g(x) = 0$.

Аналогичное доказательство показывает также, что справедливо

3.952 **). $\dfrac{H \to (F(x) \to G)}{H \to (E_x^n F(x) \to G)}$.

Для каждой из этих схем, взяв $0 = 0$ в качестве H, мы видим, что эта схема верна также, если опустить H.

3.953. $E_x^n(x \leqslant n \,\&\, F(x)) \to E_x^n F(x)$.

Действительно, имеет место

$$x \leqslant n \,\&\, F(x) \to F(x),$$

откуда требуемый результат следует по 3.951 ***).

*) x не входит свободно в H. — *Прим. ред.*
**) x не входит свободно ни в H, ни в G. — *Прим. ред.*
***) Если взять в качестве H, например, $0 = 0$. — *Прим. ред.*

3.954. $A_x^n(x \leqslant n)$.

Совпадает с примером 3.831.

3.955. $E_x^n F(x) \,\&\, A_x^n G(x) \to E_x^n\{F(x) \,\&\, G(x)\}$.

Утверждение очевидно при $n = 0$. Далее,

$$[1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)c](1 \dot{-} (a+q))(1 \dot{-} bp)c(p+q) =$$
$$= [1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)c](1 \dot{-} (a+q))(1 \dot{-} b)cp =$$
$$= [1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)c]\{(1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)cp \dot{-} q(1 \dot{-} b)cp\} = 0$$

(ибо $(1 \dot{-} q)q = 0$ и $(1 \dot{-} bp)p = (1 \dot{-} b)p$), и потому

$$\left[1 \dot{-} \left(1 \dot{-} \sum_{x \leqslant n} g(x)\right)\left(1 \dot{-} \prod_{x \leqslant n} f(x)\right)\prod_{x \leqslant n}(f(x) + g(x))\right] \times$$
$$\times \left(1 \dot{-} \sum_{x \leqslant n+1} g(x)\right)\left(1 \dot{-} \prod_{x \leqslant n+1} f(x)\right)\prod_{x \leqslant n+1}(f(x) + g(x)) = 0,$$

откуда 3.955 получается с помощью 2.8.

3.956. $E_x^n F(x) \to E_x^n(x \leqslant n \,\&\, F(x))$.

Это следует из $A_x^n(x \leqslant n) \to \{E_x^n F(x) \to E_x^n(x \leqslant n \,\&\, F(x))\}$

3.957. $E_x^n F(x) \leftrightarrow E_x^n(x \leqslant n \,\&\, F(x))$.

Получается из 3.953 и 3.956.

3.958. $F(n) \to E_x^n F(x)$.

Получается из равенств $(1 \dot{-} f(0))f(0) = 0$ и

$$\{1 \dot{-} f(n+1)\}\left\{\prod_{x \leqslant n} f(x)\right\} f(n+1) = 0.$$

3.959. Если G не содержит переменной x, а n — переменная, не содержащаяся ни в F, ни в G, то

$$\frac{F(x) \to G}{E_x^n F(x) \to G}.$$

Случай $n = 0$ очевиден.

Поскольку, как нетрудно доказать, $(p \to q) \,\&\, (r \to q) \to (p \vee r \to q)$, то

$$(E_x^n F(x) \to G) \,\&\, (F(n+1) \to G) \to (E_x^{n+1} F(x) \to G)$$

и, следовательно, из $F(n+1) \to G$ вытекает

$$(E_x^n F(x) \to G) \to (E_x^{n+1} F(x) \to G),$$

и доказательство завершается с помощью 3.7.

Отсюда следует, что справедлива схема *)

$$\frac{x \leqslant n \,\&\, F(x, n) \to G(n)}{E_x^n (x \leqslant n \,\&\, F(x, n)) \to G(n)},$$

и, значит, в частности, схема

$$\frac{x \leqslant n \,\&\, F(x, n) \to G(n)}{E_x^n F(x, n) \to G(n)}.$$

3.96. $\dfrac{F \to G(x)}{F \to A_x^n G(x)}$.

Очевидно, что при $n = 0$ схема верна.

Поскольку

$$\left\{1 \dot{-} (1 \dot{-} f) \sum_{x \leqslant n} g(x)\right\}(1 \dot{-} f)\left\{\sum_{x \leqslant n} g(x) + g(n+1)\right\} =$$
$$= \left\{1 \dot{-} (1 \dot{-} f) \sum_{x \leqslant n} g(x)\right\}(1 \dot{-} f)\, g(n+1) = 0$$

(здесь использовалось предположение $(1 \dot{-} f)\, g(x) = 0$), доказательство также завершается с помощью 3.7.

3.961. $A_x^n G(x) \to E_x^n G(x)$.

Это верно в силу $G(0) \to G(0)$ и

$$\left\{1 \dot{-} \sum_{x \leqslant n+1} g(x)\right\} \prod_{x \leqslant n+1} g(x) =$$
$$= \left\{(1 \dot{-} g(n+1)) \dot{-} \sum_{x \leqslant n} g(x)\right\} g(n+1) \prod_{x \leqslant n} g(x) = 0.$$

3.962. $\dfrac{F \to G(x)}{F \to E_x^n G(x)}$.

Получается с помощью 3.96 и 3.961.

3.963. $\dfrac{F(x) \leftrightarrow G(x)}{E_x^n F(x) \leftrightarrow E_x^n G(x)}$, $\dfrac{F(x) \leftrightarrow G(x)}{A_x^n F(x) \leftrightarrow A_x^n G(x)}$.

Следует из 3.951 и 3.9511.

3.964. $\sim A_x^n G(x) \leftrightarrow E_x^n \sim G(x)$.

*) Из посылки этой схемы по 3.959 получается

$$E_x^m (x \leqslant n \,\&\, F(x, n)) \to G(n);$$

отсюда заключение схемы получается подстановкой n вместо m. — *Прим. ред.*

Случай $n = 0$ очевиден. Для доказательства $\sim A_x^n G(x) \to E_x^n \sim G(x)$ мы воспользуемся равенством

$$[1 \dot{-} \{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)\} b][1 \dot{-} (1 \dot{-} (a + c))\} b (1 \dot{-} c) = 0,$$

которое доказывается применением 2.8 к переменной c; если взять $\sum_{x \leqslant n} g(x)$ в качестве a, $\prod_{x \leqslant n} (1 \dot{-} g(x))$ в качестве b и $g(n+1)$ в качестве c, то доказательство завершается применением схемы 2.8. Подобным же образом для доказательства $E_x^n \sim G(x) \to \sim A_x^n G(x)$ мы используем равенство

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)\,(1 \dot{-} b)\}\{(1 \dot{-} b) \dot{-} bc\}\{(1 \dot{-} a) \dot{-} c\} = 0$$

(которое доказывается тоже применением 2.8 к переменной c) с той же подстановкой вместо a, b и c.

3.9641. Положив $F(x)$ в 3.957 равным $\sim G(x)$ и используя 3.964, мы имеем

$$A_x^n (x \leqslant n \to G(x)) \leftrightarrow A_x^n G(x).$$

Из пропозициональной схемы

$$\frac{p \to q}{\sim q \to \sim p}$$

и 3.964 сразу же получаем

3.965. $\dfrac{F(n) \to A_x^n G(x)}{E_x^n \sim G(x) \to \sim F(n)}$.

3.966. $x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to E_y^n \{y = x \,\&\, f(y) = 0\}$.

Обозначим эту импликацию через $P(n)$. $P(0)$ очевидно, и

$$\{x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0\} \to [P(n) \to E_y^n \{y = x \,\&\, f(y) = 0\}].$$

Но $E_y^n G(y) \to E_y^{n+1} G(y)$, так что

$$\{P(n) \to E_y^n G(y)\} \to \{P(n) \to E_y^{n+1} G(y)\},$$

откуда, взяв $y = x \,\&\, f(y) = 0$ в качестве $G(y)$, получаем

$$\{x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0\} \to [P(n) \to E_y^{n+1} \{y = x \,\&\, f(y) = 0\}].$$

Но

$$\{x = n+1 \,\&\, f(x) = 0\} \to (x = n+1) \,\&\, \{f(n+1) = 0\}$$
$$\to E_y^{n+1}\{x = y \,\&\, f(y) = 0\} \text{ (в силу 3.958),}$$

так что

$$x = n+1 \,\&\, f(x) = 0 \to [P(n) \to E_y^{n+1}\{y = x \,\&\, f(y) = 0\}].$$

Поскольку

$$x \leqslant n+1 \,\&\, f(x) = 0 \to$$
$$\to \{x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0\} \vee \{x = n+1 \,\&\, f(x) = 0\},$$

то

$$\{x \leqslant n+1 \,\&\, f(x) = 0\} \to [P(n) \to E_y^{n+1}\{y = x \,\&\, f(y) = 0\}],$$

откуда

$$P(n) \to [\{x \leqslant n+1 \,\&\, f(x) = 0\} \to E_y^{n+1}\{y = x \,\&\, f(y) = 0\}],$$

т. е. $P(n) \to P(n+1)$, что завершает доказательство.

Если F не зависит от x, то

3.9661. $A_x^n(F \,\&\, G(x)) \leftrightarrow F \,\&\, A_x^n G(x)$.

3.9662. $A_x^n(F \vee G(x)) \leftrightarrow F \vee A_x^n G(x)$.

3.9663. $E_x^n(F \,\&\, G(x)) \leftrightarrow F \,\&\, E_x^n G(x)$.

3.9664. $E_x^n(F \vee G(x)) \leftrightarrow F \vee E_x^n G(x)$.

Из $F \,\&\, G(x) \to G(x)$ с помощью 3.9511 мы выводим

$$A_x^n(F \,\&\, G(x)) \to A_x^n G(x),$$

а из $F \,\&\, G(x) \to F$ с помощью 3.959, 3.961 мы выводим

$$A_x^n(F \,\&\, G(x)) \to F,$$

откуда следует

$$A_x^n(F \,\&\, G(x)) \to F \,\&\, A_x^n G(x).$$

Обратно, из

$$A_y^n G(y) \to \{x \leqslant n \to G(x)\}$$

следует

$$F \,\&\, A_y^n G(y) \to F \,\&\, \{x \leqslant n \to G(x)\},$$

откуда получаем

$$F \,\&\, A_y^n G(y) \to \{x \leqslant n \to (F \,\&\, G(x))\}$$

и, следовательно, в силу 3.96, 3.9641

$$F \,\&\, A_y^n G(y) \to A_x^n(F \,\&\, G(x)),$$

что завершает доказательство утверждения 3.9661.

Снова в силу 3.9641 имеем

$$A_y^n G(y) \to \{x \leqslant n \to G(x)\}$$

и, следовательно,

$$F \vee A_y^n G(y) \to F \vee \{x \leqslant n \to G(x)\},$$

откуда получаем $F \vee A_y^n G(y) \to \{(x \leqslant n) \to (F \vee G(x))\}$ и, следовательно, как и выше,

$$F \vee A_y^n G(y) \to A_x^n(F \vee G(x)).$$

Обратно,

$$A_y^n(F \vee G(y)) \to \{x \leqslant n \to (F \vee G(x))\},$$

следовательно,

$$A_y^n(F \vee G(y)) \,\&\, \sim F \to \{x \leqslant n \to G(x)\}$$

и поэтому

$$A_y^n(F \vee G(y)) \,\&\, \sim F \to A_y^n G(y),$$

откуда следует 3.9662.

Теоремы 3.9663 и 3.9664 следуют из 3.9662, 3.9661, если взять $\sim F$ в качестве F и $\sim G(x)$ в качестве $G(x)$.

3.97. *Считающий оператор* $N_x^n F(x)$

Для того чтобы выразить число корней уравнения $f(x) = 0$ в области $0 \leqslant x \leqslant n$ или, что то же самое, число значений x в этой области, для которых пропозициональная функция $f(x) = 0$ истинна, мы вводим функцию $N_x^n\{f(x) = 0\}$, определяемую рекурсией

$$N_x^0\{f(x) = 0\} = 1 \dot{-} f(0),$$
$$N_x^{n+1}\{f(x) = 0\} = N_x^n\{f(x) = 0\} + \{1 \dot{-} f(n+1)\}.$$

Если $f(x)$ — представляющая функция пропозициональной функции $F(x)$, то мы пишем $N_x^n F(x) = N_x^n\{f(x) = 0\}$.

Первая теорема о считающем операторе, которую мы докажем, такова:

3.971. $\dfrac{F(x) \leftrightarrow G(x)}{N_x^n F(x) = N_x^n G(x)}$.

Если $D(a, b)$ обозначает положительную разность между $|1 \dot{-} a, 1 \dot{-} b|$ и $1 \dot{-} \{1 \dot{-} |(1 \dot{-} a)b, (1 \dot{-} b)a|\}$, то

$$D(a, 0) = 0,\ D(0, Sb) = D(Sa, Sb) = 0,$$

так что $D(a, Sb) = 0$ и поэтому $D(a, b) = 0$ и, наконец,

$$|1 \dot{-} a, 1 \dot{-} b| = 1 \dot{-} \{1 \dot{-} |(1 \dot{-} a)b, (1 \dot{-} b)a|\}.$$

Таким образом, из $\{1 \dot{-} f(x)\}g(x) = \{1 \dot{-} g(x)\}f(x) = 0$ мы выводим

$$1 \dot{-} f(x) = 1 \dot{-} g(x).$$

Следовательно, $N_x^0 F(x) = N_x^0 G(x)$ и

$$|N_x^{n+1} F(x),\ N_x^{n+1} G(x)| = |N_x^n F(x),\ N_x^n G(x)|,$$

откуда в силу 2.8 получаем $|N_x^n F(x),\ N_x^n G(x)| = 0$, что завершает доказательство.

3.972. $\{N_x^n F(x) = 0\} \leftrightarrow A_x^n \sim F(x)$.

При $n = 0$ эта эквивалентность есть просто

$$(1 \dot{-} f(0)) = 0 \leftrightarrow (1 \dot{-} f(0)) = 0.$$

Так как $N_x^{n+1}(f(x) = 0) = N_x^n(f(x) = 0) + (1 \dot{-} f(n+1))$, то $\{N_x^{n+1} F(x) = 0\} \leftrightarrow \{N_x^n F(x) = 0\}\ \&\ \sim F(n+1)$; кроме того, $A_x^{n+1} \sim F(x) \leftrightarrow \{A_x^n \sim F(x)\}\ \&\ \sim F(n+1)$ и, следовательно,

$$[\{N_x^n F(x) = 0\} \to A_x^n \sim F(x)] \to$$
$$\to [\{N_x^{n+1} F(x) = 0\} \to \{A_x^{n+1} \sim F(x)\}],$$

откуда в силу 3.7 получаем

$$\{N_x^n F(x) = 0\} \to A_x^n \sim F(x).$$

Обратно,

$$[A_x^n \sim F(x) \to \{N_x^n F(x) = 0\}] \to$$
$$\to [A_x^{n+1} \sim F(x) \to \{N_x^{n+1} F(x) = 0\}],$$

откуда следует $A_x^n \sim F(x) \to \{N_x^n F(x) = 0\}$.

Эквивалентность 3.972 можно также выразить в виде

$$\{N_x^n F(x) > 0\} \leftrightarrow E_x^n F(x).$$

3.973. $N_x^n F(x) = N_x^n(F(x)\ \&\ G(x)) + N_x^n(F(x)\ \&\ \sim G(x))$.

Пусть $S(n)$ обозначает положительную разность между левой и правой частью этого равенства. Доказанного равенства $1 \dot{-} p = \{1 \dot{-} (p+q)\} + [1 \dot{-} \{p + (1 \dot{-} q)\}]$ достаточно для доказательства и $S(0) = 0$, и $S(n) = S(n+1)$.

3.974. $N_x^n\{F(x) \vee G(x)\} = N_x^n F(x) + N_x^n(\sim F(x)\ \&\ G(x))$.

Доказывается, как и выше, с использованием равенства

$$1 \dot{-} pq = (1 \dot{-} p) + [1 \dot{-} \{q + (1 \dot{-} p)\}].$$

3.975. $N_x^n(F(x)\ \&\ G(x)) \leqslant N_x^n F(x)$.

В равенстве $\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\}\{[a + (1 \dot{-} (p+q))] \dot{-} \dot{-} [b + (1 \dot{-} p)]\} = 0$, которое доказывается применением схемы 2.7 к переменной q, мы берем $N_x^n(F(x)\ \&\ G(x))$ в качестве a, $N_x^n F(x)$ в качестве b, $F(n+1)$ в качестве p и $G(n+1)$ в качестве q.

3.976. $x > n \to \{N_y^n(y = x) = 0\}$.

Пусть $P(n)$ обозначает данную импликацию; тогда $P(0)$ эквивалентно

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\}(1 \dot{-} x) = 0.$$

Так как $x > n+1 \to x > n$ и $x > n+1 \to (1 \dot{-} |x, n+1|) = 0$, то $P(n) \to \{x > n+1 \to [N_y^n(y = x) = 0]\}$ и, следовательно,

$$P(n)\ \&\ x > n+1 \to \{N_y^n(y = x) + (1 \dot{-} |x, n+1|)\} = 0;$$

отсюда получаем $P(n) \to \{x > n+1 \to N_y^{n+1}(y = x) = 0\}$, т. е. $P(n) \to P(n+1)$.

3.977. $N_y^n(y = n) = 1$.

При $n=0$ это просто $1 \dot{-} (0 \dot{-} 0) = 1$, а

$$N_y^{n+1}(y = n+1) = N_y^n(y = n+1) + (1 \dot{-} |\, n+1,\ n+1\,|) = 1$$

в силу 3.976.

3.978. $N_y^{n+r}(y = r) = 1$.

Для $n=0$ это сводится к предыдущей теореме; кроме того,

$$N_y^{n+r+1}(y = r) = N_y^{n+r}(y = r) + \{1 \dot{-} |\, n+r+1,\ r\,|\} = N_y^{n+r}(y = r).$$

Отсюда следует $n \geqslant x \to N_y^n(y = x) = 1$, ибо

$$n \geqslant x \to n = x + (n \dot{-} x) \to \to N_y^n(y = x) = N_y^{x+(n \dot{-} x)}(y = x) = 1$$

в силу 3.978.

Из $x > n \to \{N_y^n(y = x) = 0\}$ следует $x > n \to \to \{N_y^n(y = x) \leqslant 1\}$, а из $x \leqslant n \to \{N_y^n(y = x) = 1\}$ следует $x \leqslant n \to \{N_y^n(y = x) \leqslant 1\}$, что дает $(x > n) \vee (x \leqslant n) \to \to N_y^n(y = x) \leqslant 1$, а так как $(x > n) \vee (x \leqslant n)$ доказуемо с помощью двойной рекурсии, мы получаем

3.979. $N_y^n(y = x) \leqslant 1$.

3.980. $N_x^p(x \leqslant n+1) = N_x^p(x \leqslant n) + N_x^p(x = n+1)$.

Так как $x \leqslant n+1 \leftrightarrow (x < n) \vee (x = n+1)$ и $x = n+1 \leftrightarrow \leftrightarrow (x = n+1) \,\&\sim (x \leqslant n)$, то требуемое получается в силу 3.971 и 3.974.

3.981. $N_x^n(x \leqslant n) = n+1$.

При $n=0$ это очевидно, а в силу 3.980

$$N_x^{n+1}(x \leqslant n+1) = N_x^{n+1}(x \leqslant n) + N_x^{n+1}(x = n+1) = N_x^n(x \leqslant n) + 1 \text{ (в силу 3.977),}$$

откуда следует требуемое.

3.982. $x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to [N_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} = 1]$.

Сначала рассмотрим случай $n = 0$. Так как $x \leqslant 0 \to \to \{f(x) = 0 \to f(0) = 0\}$, то $x \leqslant 0 \,\&\, f(x) = 0 \to f(0) = 0$ и, следовательно, $x \leqslant 0 \,\&\, f(x) = 0 \to x + f(0) = 0$, откуда получаем $x \leqslant 0 \,\&\, f(x) = 0 \to \{1 \dot{-} (x + f(0))\} = 1$, что доказывает случай $n = 0$.

В силу 3.972 $[N_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} = 0] \to A_y^n \sim \{y = x \,\&\, \& f(y) = 0\}$ и, следовательно, в силу 3.965

$$E_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} \to N_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} > 0,$$

откуда в силу 3.966

$$x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to N_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} > 0.$$

Но в силу 3.979 и 3.973 имеет место

$$N_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} \leqslant 1$$

и поэтому $x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to N_y^n\{y = x \,\&\, f(y) = 0\} = 1$.

3.983.

$$\{N_y^n(f(y) = 0) = k+1\} \leftrightarrow E_x^n\{f(x) = 0 \,\&\, N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) = k\}.$$

Из $N_y^n(f(y) = 0) = N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) + N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y = x)$ следует $x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to N_y^n(f(y) = 0) = N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) + 1$, откуда

$$x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to \{N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) = k\} \to \to N_y^n(f(y) = 0) = k+1\},$$

т. е.

$$x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \,\&\, \{N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) = k\} \to \to \{N_y^n(f(y) = 0) = k+1\},$$

отсюда получаем

$$E_x^n(f(x) = 0 \,\&\, \{N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) = k\}) \to \to \{N_y^n(f(y) = 0) = k+1\}.$$

Обратно, из

$$x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to \{N_y^n(f(y) = 0) = N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) + 1\}$$

следует

$$x \leqslant n \,\&\, f(x) = 0 \to \{N_y^n(f(y) = 0) = k+1 \to \to N_y^n(f(y) = 0 \,\&\, y \neq x) = k\},$$

откуда $\{N_y^n(f(y)=0)=k+1\}\to\{(x\leqslant n\ \&\ f(x)=0\to N_y^n(f(y)=0\ \&\ y\neq x)=k\}$ и, следовательно, $\{N_y^n(f(y)=0)=k+1\}\to[x\leqslant n\ \&\ f(x)=0\to\{x\leqslant n\ \&\ f(x)=0\ \&\ N_y^n(f(y)=0\ \&\ y\neq x)=k\}]$, откуда в силу 3.951 $\{N_y^n(f(y)=0)=k+1\}\to\{E_x^n(x\leqslant n\ \&\ f(x)=0)\to E_x^n(x\leqslant n\ \&\ f(x)=0\ \&\ N_y^n(f(y)=0\ \&\ y\neq x)=k)\}$ и поэтому в силу 3.957

$$\{N_y^n(f(y)=0)=k+1\}\to$$
$$\to\{E_x^n(f(x)=0)\to E_x^n(f(x)=0\ \&\ N_y^n(f(y)=0\ \&\ y\neq x)=k)\}.$$

Но в силу 3.972 $N_y^n(f(y)=0)=k+1\to E_x^n(f(x)=0)$ и, следовательно,

$$N_y^n(f(y)=0)=k+1\to E_x^n\{f(x)=0\ \&\ N_y^n(f(y)=0\ \&\ y\neq x)=k\},$$

что завершает доказательство.

Из 3.972 и 3.983 следует, что

$$\{N_t^n(f(t)=0)=1\}\leftrightarrow E_x^n\{f(x)=0\ \&\ N_t^n(f(t)=0\ \&\ t\neq x)=0\}$$
$$\leftrightarrow E_x^n\{f(x)=0\ \&\ A_t^n(f(t)=0\to t=x)\},$$
$$\{N_t^n(f(t)=0)=2\}\leftrightarrow E_x^n\{f(x)=0\ \&\ N_t^n(f(t)=0\ \&\ t\neq x)=1\}$$
$$\leftrightarrow E_x^n\{f(x)=0\ \&\ E_y^n[f(y)=0\ \&\ y\neq x\ \&$$
$$\&\ N_t^n(f(t)=0\ \&\ t\neq x\ \&\ t\neq y)=0]\}$$
$$\leftrightarrow E_x^nE_y^n\{f(x)=0\ \&\ f(y)=0\ \&\ x\neq y\ \&$$
$$\&\ A_t^n(f(t)=0\to(t=x)\vee(t=y))\};$$
$$\{N_t^n(f(t)=0)=3\}\leftrightarrow E_x^n\{f(x)=0\ \&\ N_t^n(f(t)=0\ \&\ t\neq x)=2\}$$
$$\leftrightarrow E_x^n[f(x)=0\ \&\ E_y^nE_z^n\{f(y)=0\ \&\ f(z)=0\ \&$$
$$\&\ x\neq y\ \&\ x\neq z\ \&\ y\neq z\ \&$$
$$\&\ A_t^n(f(t)=0\ \&\ t\neq x\to(t=y)\vee(t=z))\}]$$
$$\leftrightarrow E_x^nE_y^nE_z^n\{f(x)=0\ \&\ f(y)=0\ \&\ f(z)=0\ \&$$
$$\&\ x\neq y\ \&\ x\neq z\ \&\ y\neq z\ \&$$
$$\&\ A_t^n(f(t)=0\to(t=x)\vee(t=y)\vee(t=z))\}$$

и т. д.

Эти эквивалентности показывают, что оператор $N_x^n\{f(x)=0\}$ обладает требуемыми свойствами. А именно, $N_x^n(f(x)=0)$ принимает значение единица тогда и только тогда, когда имеется *единственное* x между 0 и n, для которого $f(x)=0$, и $N_x^n(f(x)=0)$ принимает значение 2 тогда и только тогда, когда имеются x и y между 0 и n такие, что x отличен от y, $f(x)=0$ и $f(y)=0$, а $f(t)$ не обращается в нуль ни для какого другого t между 0 и n, и т. д.

Примеры к гл. III

3. Докажите формулы;

3.01. $p\ \&\ q\leftrightarrow\sim(\sim p\vee\sim q)$. **3.02.** $\sim(p\to q)\leftrightarrow p\ \&\sim q$.
3.03. $p\vee p\to p$. **3.031.** $p\ \&\ q\to p$. **3.032.** $p\ \&\ (q\ \&\ r)\leftrightarrow(p\ \&\ q)\ \&\ r$.
3.04. $q\to(p\vee q)$. **3.041.** $(p\to q)\to(p\ \&\ r\to q)$. **3.05.** $(p\vee q)\to(q\vee p)$.

Обоснуйте схемы:

3.051. $\dfrac{p\to r}{(p\ \&\ q)\to r}$. **3.052.** $\dfrac{p\to(q\to r)}{(p\ \&\ q)\to r}$. **3.06.** $\dfrac{p\to(q\to r)}{q\to(p\to r)}$.

3.0601. $\dfrac{p\to q\ \&\ r}{p\to q}$. **3.061.** $\dfrac{q}{\dfrac{p\to(q\to r)}{p\to r}}$. **3.0611.** $\dfrac{p\to p^*}{\dfrac{q\to q^*}{p\ \&\ q\to p^*\ \&\ q^*}}$.

3.062. $\dfrac{p\to(q\to r)}{p\to(\sim r\to\sim q)}$. **3.063.** $\dfrac{p\to q}{(p\vee r)\to(q\vee r)}$.

3.064. $\dfrac{a\to\{p\to(p\to r)\}}{a\to(p\to r)}$. **3.07.** $\dfrac{p\to(q\to r)}{\dfrac{r\to s}{p\to(q\to s)}}$. **3.071.** $\dfrac{p\to(q\vee r)}{\dfrac{r\to s}{p\to(q\vee s)}}$.

3.08. $\dfrac{p\to q}{\dfrac{r\to(q\to s)}{p\to(r\to s)}}$. **3.081.** $\dfrac{p\to q\vee r}{\dfrac{q\to q^*}{\dfrac{r\to r^*}{p\to q^*\vee r^*}}}$. **3.082.** $\dfrac{q\to\{r\vee(p\to r)\}}{q\to(p\to r)}$.

3.083. $\dfrac{a\to b}{(p\to a)\to(p\to b)}$. **3.084.** $\dfrac{p\to(p\to q)}{p\to q}$.

3.085. $\dfrac{q\to s\vee t}{\dfrac{s\to r}{\dfrac{t\to(p\to r)}{(p\to q)\to(p\to r)}}}$. **3.09.** $\dfrac{p\to(q\to r)}{p\to(q^*\to r^*)}$.
$\dfrac{}{p\to\{(q\ \&\ q^*)\to(r\ \&\ r^*)\}}$.

3.091. $\dfrac{p\to(q\ \&\ r\to s)}{\dfrac{q\to r}{(p\ \&\ q)\to s}}$. **3.0911.** $\dfrac{p\ \&\ q\to r}{\dfrac{q\to(r\to s)}{p\ \&\ q\to s}}$.

3.092. $\dfrac{t\to(r\to s)}{\dfrac{t\to r}{t\to s}}$. **3.093.** $\dfrac{(p\ \&\ q)\to(r\to s)}{\dfrac{p\to r}{p\ \&\ q\to s}}$.

Докажите формулы:

3.1. $\sim(a \leqslant b) \to (a > b)$. 3.11. $(a \leqslant b) \to (a < b) \vee (a = b)$.
3.12. $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$. 3.121. $(a \leqslant b) \,\&\, (b \leqslant c) \to (a \leqslant c)$.
3.13. $(a \geqslant b) \,\&\sim(a = b) \to (a \geqslant Sb)$. 3.131. $(a = b) \,\&\, (b = c) \to (a = c)$.
3.132. $a = b \to |a, x| = |b, x|$. 3.14. $(ab = 0) \to (a = 0) \vee (b = 0)$.
3.15. $ab > 0 \to (a > 0) \,\&\, (b > 0)$. 3.16. $x^2 + 1 \geqslant 2x$.
3.161. $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. 3.17. $a \leqslant b \to \{b = a + (b \dot{-} a)\}$.
3.171. $(a = A) \,\&\, (b = B) \to \{f(a, b) = f(A, B)\}$.
3.18. $k \leqslant b \,\&\, l \leqslant a \to \{ka \dot{-} lb = (a \dot{-} l)\, b \dot{-} (b \dot{-} k)\, a\}$.
3.19. $b \geqslant c \to \{(a + b) \dot{-} c = a + (b \dot{-} c)\}$.
3.191. $l \leqslant n \,\&\, m \leqslant n \,\&\, n \dot{-} l < n \dot{-} m \to m < l$.
3.192. $p \geqslant q \,\&\, r \geqslant s \to \{(p \dot{-} q) \dot{-} (r \dot{-} s) = (p + s) \dot{-} (q + r)\}$.
3.193. $x \leqslant n \to \left\{f(x) \leqslant \sum_{t}^{t}(n)\right\}$.
3.194. $q \geqslant r \to \{(p \dot{-} r) \dot{-} (q \dot{-} r) = p \dot{-} q\}$.

3.2. Докажите схемы: $\dfrac{p(x, a)}{A_m^n p(m, a)}$, $\dfrac{p(x)}{E_n^x p(n)}$, $\dfrac{p(x, a)}{A_x^a p(x, a)}$.

3.3. Докажите формулы:

3.31. $(1 \dot{-} n)\, L_x^n \{\varphi(n, x) = 0\} = 0$. 3.32. $\sim A_x^n p(x) \to E_x^n \sim p(x)$.

3.321. $E_x^n p(x) \to \sim A_x^n \sim p(x)$. 3.322. $\sim A_x^n p(x) \leftrightarrow E_x^n \sim p(x)$.

3.33. $A_x^n p(x) \to p(n)$. 3.34. $A_x^{m+n} p(x) \to A_x^m p(x)$.

3.35. $E_x^n p(x) \to E_r^n p(n \dot{-} r)$. 3.36. $A_t^{x+c} \{g(t, y) = 0\} \to g(x, y) = 0$.

3.37. $A_t^a \{f(t, a) = 0\} \,\&\, A_u^x \{f(x, u) = 0\} \to \{f(x, a) = 0\}$.

3.38. $E_x^m (f(x) = a) \,\&\, p(a) \to E_x^m p(f(x))$ (используйте пример 3.42; см. ниже).

Докажите схемы:

3.39. $\dfrac{(a = a) \to p(a)}{p(a)}$; 3.391. $\dfrac{p(a) \to \sim (a = a)}{\sim p(a)}$;

3.392. $\dfrac{p(a + r) \to q(a)}{p(b) \to q(b \dot{-} r)}$.

3.4. Докажите формулы:

3.41. $E_x^n p(x) \to E_x^{Sn} p(x)$. 3.42. $a \leqslant b \,\&\, p(a) \to E_x^b p(x)$.

3.5. Обоснуйте схему $\dfrac{A_x^p q(x)\; q(p + Sr)}{q(n)}$, где p — произвольная конкретная цифра.

3.6. Докажите, что если $l = L_x^n p(n \dot{-} x)$ и $g = n \dot{-} l$, то

(i) $E_x^n p(x) \to p(g)$, (ii) $g < a \,\&\, a \leqslant n \to \sim p(a)$,

так что g есть наибольшее из тех x, не превосходящих $\overline{n}$, для которого выполняется $p(x)$.

3.7. Докажите, что если $ab > 0$, то имеется наибольшее значение n, для которого $nb \leqslant x \,\&\, na \leqslant y$.

3.8. Докажите схемы (x не входит в p):

3.81. $\dfrac{p \to q(x)}{p \to A_x^n q(x)}$; 3.82. $\dfrac{q(x) \to p}{E_x^n q(x) \to p}$.

3.83. Докажите формулы *):

3.831. $A_x^n (x \leqslant n)$. 3.832. $A_x^n p(x) \to (y \leqslant n \to p(y))$.

3.833. $A_x^n (p \vee q(x)) \leftrightarrow (p \vee A_x^n q(x))$.

3.834. $A_x^n (p \to q(x)) \leftrightarrow (p \to A_x^n q(x))$.

3.84. Докажите схему

$$\frac{p \to (q \to r(x))}{p \to (q \to A_x^n r(x))}.$$

3.9. Докажите следующие формулы:

3.91. $p \to A_x^n (p \vee q(x))$. 3.92. $A_x^n (p \,\&\, q(x)) \leftrightarrow p \,\&\, A_x^n q(x)$.

3.93. $A_x^n (p(x) \,\&\, q(x)) \leftrightarrow A_x^n p(x) \,\&\, A_x^n q(x)$.

3.931. $E_x^n (p(x) \vee q(x)) \leftrightarrow E_x^n p(x) \vee E_x^n q(x)$.

3.94. $A_x^n (p(x) \to q(x)) \to (A_x^n p(x) \to A_x^n q(x))$.

3.95. $A_x^n (x \leqslant n \to p(x)) \leftrightarrow A_x^n p(x)$.

3.96. $E_x^n (x \leqslant n \,\&\, p(x)) \leftrightarrow E_x^n p(x)$.

3.97. $A_x^n (p(x) \to q(x)) \to (E_x^n p(x) \to E_x^n q(x))$.

3.98. $A_x^n (p(x) \leftrightarrow q(x)) \to (E_x^n p(x) \leftrightarrow E_x^n q(x))$.

3.981. $A_x^n (p(x) \to q) \leftrightarrow (E_x^n p(x) \to q)$.

3.982. $A_x^n A_y^n p(x, y) \leftrightarrow A_y^n A_x^n p(x, y)$.

3.983. $E_x^n E_y^n p(x, y) \leftrightarrow E_y^n E_x^n p(x, y)$. 3.984. $E_x^n A_y^n p(x, y) \to A_y^n E_x^n p(x, y)$.

3.99. $E_x^n E_y^n (p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, x > y) \leftrightarrow E_x^n E_y^n (p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, y > x) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow E_x^n E_y^n (p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, x \neq y)$.

---

*) В примерах 3.831—3.92 буква p (в примерах 3.84, 3.981 буква q) обозначает формулу, не содержащую свободно x.

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ АРИФМЕТИКИ

Основные теоремы арифметики. Простые числа. Единственность разложения на простые сомножители. Наибольший общий делитель.

4. Понятия *частного* и *остатка* вводятся в рекурсивную теорию чисел с помощью рекурсивных функций $Q(a, b)$ и $R(a, b)$, которые мы определяем следующим образом.

Для упрощения формул мы пишем $\alpha(c, d)$ вместо $\alpha(|c, d|)$, так что $\alpha(c, d) = 0, 1$ в соответствии с тем, равны c и d или нет. Полагаем

$$R(0, b) = 0,$$
$$R(Sa, b) = SR(a, b) \cdot \alpha(SR(a, b), b)$$

и

$$Q(0, b) = 0,$$
$$Q(Sa, b) = Q(a, b) + \{1 \dot{-} \alpha(SR(a, b), b)\}.$$

То, что эти функции на самом деле обладают требуемыми свойствами, видно из следующих формул:

4.01. $a = b \cdot Q(a, b) + R(a, b)$.

4.02. $b > 0 \to R(a, b) < b$.

4.03. $\{(a = bc + r) \ \& \ (r < b)\} \to \{c = Q(a, b) \ \& \ r = R(a, b)\}$.

Доказательство 4.01. Если

$$f(a) = bQ(a, b) + R(a, b),$$

то

$$f(0) = bQ(0, b) + R(0, b) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} f(Sa) &= bQ(Sa, b) + R(Sa, b) = \\ &= bQ(a, b) + b(1 \dot{-} \alpha(SR(a, b), b)) + \\ &+ SR(a, b) \cdot \alpha(SR(a, b), b) = \\ &= bQ(a, b) + SR(a, b) \text{ (в силу примеров 2.27 и 2.08)} \\ &= Sf(a), \end{aligned}$$

так что $f(a) = a$.

Доказательство 4.02. Из вводящих равенств для $R(a, b)$ следует, что

$$\alpha(SR(a, b), b) = 0 \to R(Sa, b) = 0$$

и, следовательно, по теореме 3.43

4.021. $\alpha(SR(a, b), b) = 0 \to \{0 < b \to R(Sa, b) < b\}$.

Так как $x \cdot \alpha(x) = x$, то $x > 0 \to \alpha(x) = 1$ и, поскольку $x < y \to |x, y| > 0$, то

$$SR(a, b) < b \to \alpha(SR(a, b), b) = 1.$$

По теореме 3.43

$$\{\alpha(SR(a, b), b) = 1\} \to \{[R(Sa, b) = SR(a, b) \cdot \alpha(SR(a, b), b)] \to [R(Sa, b) = SR(a, b)]\},$$

откуда

$$\alpha(SR(a, b), b) = 1 \to R(Sa, b) = SR(a, b)$$

и, следовательно,

$$SR(a, b) < b \to R(Sa, b) = SR(a, b).$$

Но $R(Sa, b) = SR(a, b) \to \{SR(a, b) < b \to R(Sa, b) < b\}$, так что

4.022. $SR(a, b) < b \to R(Sa, b) < b$.

Так как $x = y \to \alpha(x, y) = 0$, то

4.023. $R(a, b) < b \to \{SR(a, b) < b \vee \alpha(SR(a, b), b) = 0\}$.

Обозначая формулу $0 < b \to \{R(a, b) < b\}$ через $P(a)$, мы выводим из 4.021, 2.3 (и примера 3.085)

$$P(a) \to P(Sa).$$

Поскольку $P(0)$ выполнено в силу определения $R(a, b)$, то 4.02 доказано.

Доказательство 4.03. Употребляя Q, R соответственно вместо $Q(a, b)$, $R(a, b)$, имеем по теореме 3.43

$$a = bQ + R \to \{(a = bc + r) \to (bc + r = bQ + R)\},$$

откуда в силу 4.01 получаем

4.031. $a = bc + r \to (bc + r = bQ + R)$;

но

$$\{Q = Sc + (Q \dot{-} Sc)\} \to \\ \to [\{bc + r = bQ + R\} \to \{r = b + b(Q \dot{-} Sc) + R\}]$$

и, следовательно (используя пример 3.061),

$$(a = bc + r) \to (Q > c \to r \geqslant b),$$

откуда (в силу примера 3.062)

$$(a = bc + r) \to (r < b \to Q \leqslant c).$$

Аналогично получаем

$$(a = bc + r) \to (R < b \to Q \geqslant c)$$

и, следовательно (используя примеры 2.043, 3.09),

$$(a = bc + r) \to \{(r < b) \& (R < b) \to Q = c\}.$$

Так как $r < b \to 0 < b$ и $0 < b \to R < b$, то (в силу примера 3.091)

4.032. $\{(a = bc + r) \& (r < b)\} \to (Q = c)$,

но

4.033. $(Q = c) \to \{(bc + r = bQ + R) \to (r = R)\}$

и, следовательно (в силу 4.031, 2.3 и примера 3.093),

4.034. $\{(a = bc + r) \& (r < b)\} \to (r = R)$.

Поскольку $r = R \to \{(bc + r = bQ + R) \to (bc = bQ)\}$ и

$$(a = bc + r) \to (bc + r = bQ + R),$$

из 4.034 следует, что

$$(a = bc + r) \& (r < b) \to (bc = bQ),$$

но имеет место $r < b \to 0 < b$, и, используя пример 3.095, получаем $r < b \to (bc = bQ \to Q = c)$, следовательно (используя пример 3.0911), $a = bc + r \,\&\, r < b \to Q = c$, что завершает доказательство 4.03.

4.1. Из формулы 4.03 следует, что если $a = bc$, то $R(a, b) = 0$ и обратно, если $R(a, b) = 0$, то $a = bQ(a, b)$, так что истинность равенства $R(a, b) = 0$ необходима и достаточна для делимости a на b.

4.2. *Простые числа*

Если $p(n) = 0$ обозначает пропозициональную функцию *)

$$n > 1 \,\&\, A_a^n \{a \leqslant 1 \vee a = n \vee R(n, a) > 0\},$$

то равенство $p(n) = 0$ утверждает, что *n больше единицы, и всякое число от 0 до n, большее единицы, но не совпадающее с n, не делит n*, т. е. что у n нет делителей, кроме него самого и единицы, так что n — простое число.

Таким образом, $p(n) = 0$ утверждает, что n — простое число.

4.21. Если $q(n)$ есть наименьший делитель n, больший единицы, т. е. если

$$q(n) = L_x^n \{R(n, x) = 0 \,\&\, x > 1\},$$

то, используя примеры 4, 4.1, имеем

$$R(n, q(n)) = 0, \quad q(n) \leqslant n, \quad n > 1 \to q(n) > 1$$

и $a < q(n) \to \{R(n, a) > 0 \vee a \leqslant 1\}$, так что (используя теорему 2.91 и пример 3.063)

$$n > 1 \to \{q(n) > 1 \,\&\, A_a^{q(n)} (a \leqslant 1 \vee a = q(n) \vee R(n, a) > 0)\},$$

т. е. формулу $n > 1 \to p(q(n)) = 0$, которая утверждает что *$q(n)$ простое, если $n > 1$*.

Из формулы

$$\{q(n) = n\} \to \{p(q(n)) = 0 \to p(n) = 0\}$$

мы выводим, что

$$n > 1 \,\&\, q(n) = n \to p(n) = 0.$$

*) Имеется в виду, что p есть представляющая функция описанного предиката. — *Прим. ред.*

Из $R(n, n)=0$ и

$$(p(n)=0)\to(n>1)\,\&\,\{a<n\,\&\,a>1\to R(n, a)>0\}$$

мы выводим прежде всего

$$(p(n)=0)\to[\{q(n)>1\}\,\&\,\{R(n, a)=0\to a\leqslant 1\vee a\geqslant n\}],$$

откуда, поскольку $R(n, q(n))=0$, используя пример 2.37, получаем

$$p(n)=0\to\{q(n)\geqslant n\}.$$

С помощью доказанной формулы $q(n)\leqslant n$ мы выводим

$$p(n)=0\to q(n)=n.$$

4.22. *Таким образом, условие $q(n)=n$ необходимо и достаточно для того, чтобы n было простым числом.*

4.3. Следуя идее знаменитого доказательства Евклида о бесконечности простых чисел, мы можем легко построить формулу, дающую сколь угодно большие простые числа. Фактически мы доказываем, что для любого n между n и $n!+1$ имеется простое число.

В силу характеристических свойств $q(n)$, поскольку $n!+1>1$ (см. пример 2.82),

$$p(q(n!+1))=0 \text{ и } q(n!+1)\leqslant n!+1.$$

Далее из примера 4.44 мы имеем

$$\{R(n!+1, a)=0\,\&\,a>1\}\to a>n$$

и, следовательно,

$$\{R(n!+1, q(n!+1))=0\,\&\,q(n!+1)>1\}\to$$
$$\to(q(n!+1)>n),$$

откуда имеем $q(n!+1)>n$, а это доказывает, что $q(n!+1)$ является простым числом, бóльшим n, но не бóльшим $n!+1$.

4.4. *Последовательность простых чисел*

Если $\mathfrak{p}(0)=2$, $\mathfrak{p}(n+1)=L_x^{\mathfrak{p}(n)+1}\{x>\mathfrak{p}(n)\,\&\,p(x)=0\}$, то (для $n>0$) $\mathfrak{p}(n)$ *есть n-е нечетное простое число.*

Сначала мы показываем, что $\mathfrak{p}(n)$ является простым для любого n. Так как

$$q(\mathfrak{p}(k)!+1)>\mathfrak{p}(k)$$

и

$$p(q(\mathfrak{p}(k)!+1))=0,$$

то

$$\mathfrak{p}(k+1)>\mathfrak{p}(k),\quad p(\mathfrak{p}(k+1))=0$$

и

$$\mathfrak{p}(k+1)\leqslant q(\mathfrak{p}(k)!+1),$$

так что $\mathfrak{p}(k+1)$ простое; но в силу примера 4.45 $\mathfrak{p}(0)$ простое, и, следовательно, $\mathfrak{p}(n)$ простое при любом n.

Из примеров 4.5 и 4.61 следует, что $\mathfrak{p}(n+1)$ — нечетное простое число. Для того чтобы показать, что (для $n>0$) $\mathfrak{p}(n)$ на самом деле является n-м нечетным простым числом, мы покажем, что всякое простое число совпадает с $\mathfrak{p}(n)$ при некотором n, т. е.

$$p(m)=0\to E_k^m\{m=\mathfrak{p}(k)\}.$$

В силу свойств операции μ мы имеем

$$m<\mathfrak{p}(k+1)\to m\leqslant\mathfrak{p}(k)\vee p(m)>0,$$

т. е.

$$p(m)=0\to\sim\{\mathfrak{p}(k)<m\,\&\,m<\mathfrak{p}(k+1)\}.$$

Пусть $\varphi(m)=L_x^m\{m<\mathfrak{p}(x)\}$, тогда, поскольку в силу примера 4.51 $\mathfrak{p}(m)>m$, мы имеем

$$\mathfrak{p}(\varphi(m))>m \text{ и } \varphi(m)\leqslant m;$$

но

$$\{m>1\,\&\,\mathfrak{p}(x)>m\}\to\mathfrak{p}(x)>\mathfrak{p}(0)$$

и, следовательно,

$$\{m>1\,\&\,\mathfrak{p}(x)>m\}\to x>0;$$

отсюда получаем

$$m>1\to\varphi(m)\geqslant 1,$$

т. е.

$$m>1\to\varphi(m)=1+(\varphi(m)\dot{-}1).$$

Полагая $\psi(m)=\varphi(m)\dot{-}1$, так что $m>1\to\psi(m)<\varphi(m)$, мы имеем (поскольку $\varphi(m)$ — первое x, для которого

$\mathfrak{p}(x)$ превосходит m)

$$m > 1 \to \{\mathfrak{p}(\psi(m)) \leqslant m \,\&\, \mathfrak{p}(\psi(m)+1) > m\};$$

это дает

$$m > 1 \to \{[\mathfrak{p}(\psi(m)) < m \,\&\, \mathfrak{p}(\psi(m)+1) > m] \vee \vee \mathfrak{p}(\psi(m)) = m\}.$$

Поскольку $p(m) = 0 \to m > 1$ и

$$p(m) = 0 \to \sim \{\mathfrak{p}(k) < m \,\&\, m < \mathfrak{p}(k+1)\},$$

то

$$p(m) = 0 \to \mathfrak{p}(\psi(m)) = m.$$

Поэтому в силу примера 3.42

$$p(m) = 0 \to E_k^m(m = \mathfrak{p}(k)).$$

4.5. Для подготовки к теореме 4.51 ниже мы доказываем, что если $bd > 0$ и $R(ab, d) = 0$ и если

$$l = L_x^b\{x > 0 \,\&\, R(ax, d) = 0\},$$

то

$$R(b, l) = 0.$$

Мы видим, прежде всего, что

$$b > 0 \,\&\, R(ab, d) = 0 \to l > 0 \,\&\, R(al, d) = 0$$

и

$$d > 0 \,\&\, R(ad, d) = 0 \to l \leqslant d.$$

Пусть β, ρ обозначают соответственно $Q(b, l)$, $R(b, l)$, так что

$$b = \beta l + \rho \text{ и } \rho < l.$$

Так как $R(ab, d) = 0$, то $R(al\beta + a\rho, d) = 0$, откуда, поскольку $R(al, d) = 0$, мы имеем $R(a\rho, d) = 0$; но

$$\{x < l \,\&\, R(ax, d) = 0\} \to x = 0$$

и, следовательно, из неравенства $\rho < l$ следует, что $\rho = 0$, а это завершает доказательство.

4.51. Если p простое, то

$$R(ab, p) = 0 \,\&\, R(a, p) > 0 \to R(b, p) = 0,$$

ибо по предыдущему результату, поскольку $p > 0 \,\&\, R(ap, p) = 0$, имеем $R(p, l) = 0$ и $l \leqslant p$, и поэтому, так как p простое, или $l = 1$ или $l = p$. Но $R(al, p) = 0$ и $R(a, p) > 0$, так что $\sim (l = 1)$, и поэтому $l = p$. В силу 4.5 $R(b, l) = 0$ и, следовательно, $R(b, p) = 0$.

4.6. *Разложение на простые множители*

В этом и следующем разделах желательно снова ввести тот условный знак, которым выражается произведение произвольного числа сомножителей. Для любой функции $f(x)$ мы определяем (как в 3.95)

$$\prod_{x \leqslant n} f(x) = \prod_f(n).$$

Наш основной результат состоит в том, что любое число можно представить единственным способом как произведение простых сомножителей. Мы начнем с рассмотрения наивысшей степени, с которой данное простое число входит в заданное натуральное число. Мы определяем

$$\nu(0, k) = 0,$$

$$\nu(Sn, k) = L_x^n R(Sn, \{\mathfrak{p}(k)\}^{x+1}) > 0.$$

Поскольку $\mathfrak{p}(k) > 1$, то в силу примера 4.701 $\{\mathfrak{p}(k)\}^n > n$ и, следовательно,

$$R(Sn, \{\mathfrak{p}(k)\}^{n+1}) > 0,$$

а поэтому (по теореме 3.949)

$$R(Sn, \{\mathfrak{p}(k)\}^{\nu(Sn, k)+1}) > 0,$$

т. е.

4.61. $n > 0 \to R(n, \{\mathfrak{p}(k)\}^{\nu(n, k)+1}) > 0$

и (в силу 3.9493) $\nu(n, k) \leqslant n$ и

$$x < \nu(n, k) + 1 \to R(n, \{\mathfrak{p}(k)\}^x) = 0,$$

так что, в частности,

4.62. $R(n, \{\mathfrak{p}(k)\}^{\nu(n, k)}) = 0.$

Из формул 4.61 и 4.62 следует, что $\nu(n, k)$ есть показатель наибольшей степени, с которой k-е нечетное простое число входит в n.

4.63. $m > 0 \to m = \prod_{x \leqslant m} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m, x)}$.

В силу примера 4.86 m делится на $\prod_{x \leqslant m} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)}$ и, если Q — частное, то из формулы 4.61 и примера 4.87 следует, что

$$m > 0 \to R(Q,\ \mathfrak{p}(x)) > 0$$

и поэтому (в силу примера 4.84) $m > 0 \to Q = 1$.

4.64. Для того чтобы показать, что разложение единственно, мы изолируем индивидуальный сомножитель в произведении с помощью следующих теорем:

если $\varphi(m, r, 0) = 1$ и

$$\varphi(m, r, Sk) = \alpha(r \dot{-} k) \prod_{x \leqslant k} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)} + \\ + \{1 \dot{-} \alpha(r \dot{-} k)\}\{\mathfrak{p}(Sk)\}^{\nu(m,\,k)} \cdot \varphi(m, r, k),$$

то

4.641. $$r \leqslant k \to \prod_{x \leqslant k} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)} = \{\mathfrak{p}(r)\}^{\nu(m,\,r)} \cdot \varphi(m, r, k)$$

и

4.642. $$r \leqslant k \to R(\varphi(m, r, k),\ \mathfrak{p}(r)) > 0.$$

Обозначим формулы 4.641 и 4.642 соответственно посредством «$r \leqslant k \to H(k)$» и «$r \leqslant k \to J(k)$»; тогда очевидно, что $r \leqslant 0 \to H(0)$ и $r \leqslant 0 \to J(0)$.

Если $r = Sk$, то

$$\prod_{x \leqslant Sk} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)} = \{\mathfrak{p}(Sk)\}^{\nu(m,\,Sk)} \prod_{x \leqslant k} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)} = \\ = \{\mathfrak{p}(Sk)\}^{\nu(m,\,Sk)} \cdot \varphi(m, r, Sk),$$

так что

$$(r = Sk) \to H(Sk); \qquad \text{(i)}$$

если $r \leqslant k$, то $\varphi(m, r, Sk) = \{\mathfrak{p}(Sk)\}^{\nu(m,\,Sk)} \cdot \varphi(m, r, k)$ и, следовательно,

$$\{r \leqslant k\} \to \\ \to \left[H(k) \to \left\{\prod_{x \leqslant Sk} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)} = \{\mathfrak{p}(r)\}^{\nu(m,\,r)} \cdot \varphi(m, r, Sk)\right\}\right],$$

т. е.

$$(r \leqslant k) \to \{H(k) \to H(Sk)\}. \qquad \text{(ii)}$$

Из (i) и (ii) с помощью примера 2.491 следует, что

$$\{(r \leqslant k) \to H(k)\} \to \{(r \leqslant Sk) \to H(Sk)\},$$

а это завершает доказательство утверждения 4.641 по индукции.

Доказательство утверждения 4.642 происходит аналогично; если $r = Sk$, то $\varphi(m, r, Sk) = \prod_{x \leqslant k} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)}$ и, следовательно (в силу примеров 4.82, 4.85),

$$(r = Sk) \to R(\varphi(m, r, Sk),\ \mathfrak{p}(Sk)) > 0,$$

поэтому

$$(r = Sk) \to J(Sk).$$

Если $r \leqslant k$, то $\varphi(m, r, Sk) = \{\mathfrak{p}(Sk)\}^{\nu(m,\,Sk)} \cdot \varphi(m, r, k)$ и, следовательно, по теореме 4.51 (и снова в силу примера 4.82)

$$r \leqslant k \to \{J(k) \to J(Sk)\},$$

и доказательство завершается так же, как и прежде.

4.7. *Единственность разложения на простые множители.*

Нам надо доказать, что если m допускает два разложения на простые множители, скажем, $\prod_{x \leqslant m} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)}$ и $\prod_{x \leqslant m} \{\mathfrak{p}(x)\}^{\xi(m,\,x)}$, то $\xi(m, x) = \nu(m, x)$ при $x \leqslant m$.

Имеем

$$x \leqslant m \to R(m, \{\mathfrak{p}(x)\}^{\xi(m,\,x)}) = 0,$$

$$x \leqslant m \to m = \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)} \varphi(m, x, m)$$

и

$$x \leqslant m \to R(\varphi(m, x, m),\ \mathfrak{p}(x)) > 0,$$

так что (в силу примера 4.801)

$$x \leqslant m \to R(\{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m,\,x)},\ \{\mathfrak{p}(x)\}^{\xi(m,\,x)}) = 0$$

и, следовательно (в силу примера 4.711), $\nu(m, x) \geqslant \xi(m, x)$ при всех $x \leqslant m$. Аналогично, $\xi(m, x) \geqslant \nu(m, x)$, значит, $\xi(m, x) = \nu(m, x)$ при всех $x \leqslant m$.

4.71. $$\{m > 0 \,\&\, R(m,\ \mathfrak{p}(x)) = 0\} \to \nu(m, x) > 0.$$

Поскольку

$$\{\nu(m, x)=0\}\to\{[m>0\to R(m, \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m, x)+1})>0]\to \to[m>0\to R(m, \mathfrak{p}(x))>0]\}$$

и

$$m>0\to R(m, \{\mathfrak{p}(x)\}^{\nu(m, x)+1})>0,$$

то в силу примера 3.064

$$\nu(m, x)=0\to\{m>0\to R(m, \mathfrak{p}(x))>0$$

что доказывает 4.71.

Следовательно,

$$\{m>0\,\&\,R(m, \mathfrak{p}(x))=0\}\leftrightarrow\nu(m, x)>0,$$

так что если $m>0$, то $\nu(m, x)>0$ является необходимым и достаточным условием для делимости m на $\mathfrak{p}(x)$.

4.72. *Наибольший простой делитель*

Если $l(n)=L_x^n\{\nu(n, n\dot{-}x)>0\}$ и $g(n)=n\dot{-}l(n)$, то мы покажем, что $\mathfrak{p}(g(n))$ — наибольший простой делитель числа n.

Так как в силу примера 4.83

$$n>1\to E_x^n\{R(n, \mathfrak{p}(x))=0\},$$

то

$$n>1\to E_x^n\{\nu(n, x)>0\}.$$

Следовательно, в силу примера 3.35 имеет место

4.721. $n>1\longrightarrow\nu(n, g(n))>0$

и

4.722. $g(n)<a\,\&\,a\leqslant n\longrightarrow\nu(n, a)=0.$

Поскольку $a>n\longrightarrow R(n, \mathfrak{p}(a))=n$, то

$$a>n\longrightarrow\nu(n, a)=0$$

и 4.722 можно переписать в виде

4.723. $g(n)<a\longrightarrow\nu(n, a)=0.$

Формулы 4.721 и 4.723 показывают, что $\mathfrak{p}(g(n))$ — наибольший простой делитель числа n.

4.8. Функция $\nu(m, x)$ позволяет ставить в соответствие любой заданной совокупности чисел некоторое единственное число. Если дана совокупность $a_0, a_1, \ldots, \ldots, a_n$ с $a_n>0$, то мы ставим в соответствие этой совокупности число N такое, что

$$N=\prod_{x\leqslant n}\mathfrak{p}(x)^{a_x}.$$

Число N полностью определяется данным множеством чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с $a_n>0$, и обратно, само множество однозначно определяется одним числом N, ибо $N=\prod_{x\leqslant N}\mathfrak{p}(x)^{\nu(N, x)}$ в силу теоремы 4.63, и, следовательно, поскольку разложение единственно, то

$$x\leqslant g(N)\longrightarrow\nu(N, x)=a_x,$$

т. е. числа $\nu(N, 0), \nu(N, 1), \nu(N, 2), \ldots, \nu(N, g(N))$ воспроизводят данную совокупность (где $g(N)$ определяется так же, как в 4.72).

4.9. *Наибольший общий делитель*

Следуя примеру 3.36, мы можем без труда определить наибольшее число, которое делит каждое из двух отличных от нуля чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Мы предпочитаем, однако, действовать иначе и определять наибольший общий делитель как наименьшее ненулевое значение функции $\boldsymbol{ax}\dot{-}\boldsymbol{by}$. Мы определим функции $k(a, b)$ и $l(a, b)$ так, что $h(a, b)=ak(a, b)\dot{-}bl(a, b)$ имеет наименьшее возможное значение, не меньшее единицы.

Из равенства

$$b\cdot a\dot{-}0\cdot b=ab$$

мы выводим

$$E_l^a(b\cdot a\dot{-}l\cdot b=ab),$$

а отсюда в свою очередь мы выводим

$$E_k^b\{E_l^a(ka\dot{-}lb=ab)\}.$$

Отсюда и из неравенства $ab>0$ следует

$$E_c^{ab}\{c\geqslant 1\,\&\,E_k^b(E_l^a(ka\dot{-}lb=c))\}$$

и поэтому, если

$$h(a, b)=L_c^{ab}\{c\geqslant 1\,\&\,E_k^b(E_l^a(ka\dot{-}lb=c))\},$$

то для a, b таких, что $ab > 0$, мы имеем

$$E_k^b(E_l^a(ka \dot{-} lb = h(a, b))) \quad \text{и} \quad h(a, b) \geqslant 1.$$

Поэтому, если

$$k(a, b) = L_x^b\{E_l^a(xa \dot{-} lb = h(a, b))\}, \quad ab > 0,$$

то

$$E_l^a(a \cdot k(a, b) \dot{-} lb = h(a, b)) \quad \text{и} \quad k(a, b) \leqslant b$$

и, следовательно, если

$$l(a, b) = L_y^a(a \cdot k(a, b) \dot{-} yb = h(a, b)),$$

то мы имеем

$$ab \geqslant 1 \to \{a \cdot k(a, b) \dot{-} b \cdot l(a, b) = h(a, b) \,\&\, k(a, b) \leqslant b \,\&\, l(a, b) \leqslant a \,\&\, h(a, b) \geqslant 1\}.$$

4.91. Если одно из a или b есть нуль, то мы полагаем $h(a, b) = a + b$, так что

$$a \geqslant 0 \,\&\, b = 0 \to 1 \cdot a \dot{-} 0 \cdot b = h(a, b)$$

и

$$a = 0 \,\&\, b \geqslant 0 \to 1 \cdot b \dot{-} 0 \cdot a = h(a, b).$$

4.92. $k \leqslant b \,\&\, l \leqslant a \,\&\, c \geqslant 1 \,\&\, ka \dot{-} lb = c \to h(a, b) \leqslant c.$

Действительно,

$$k \leqslant b \,\&\, l \leqslant a \,\&\, ka \dot{-} lb = c \to E_k^b(E_l^a(ka \dot{-} lb = c))$$

и

$$E_k^b(E_l^a(ka \dot{-} lb = c)) \,\&\, c \geqslant 1 \to h(a, b) \leqslant c$$

(в силу теоремы 2.9493).

4.93. В силу примера 3.18

$$k \leqslant b \,\&\, l \leqslant a \to \{ka \dot{-} lb = (a \dot{-} l)\, b \dot{-} (b \dot{-} k)\, a\},$$

откуда, поскольку $a \dot{-} l(a, b) \leqslant a$, $b \dot{-} k(a, b) \leqslant b$, имеем

$$h(b, a) \leqslant h(a, b).$$

Аналогично, $h(a, b) \leqslant h(b, a)$, так что

$$\boldsymbol{h(a, b) = h(b, a)}.$$

4.94. $R(a, d) = 0 \,\&\, R(b, d) = 0 \longrightarrow R(h(a, b), d) = 0.$

Действительно, если $R(a, d) = 0$ и $R(b, d) = 0$, то, обозначая $Q(a, d)$ и $Q(b, d)$ соответственно через α и β, имеем

$$h(a, b) = \{\alpha k(a, b) \dot{-} \beta l(a, b)\}d.$$

4.95. *Если значение* $ra \dot{-} sb$ *не нуль, то оно кратно* $h(a, b)$.

Мы можем без потери общности предполагать, что $ab > 0$. Обозначая $k(b, a)$, $l(b, a)$ и $h(a, b)$ для краткости через k, l и h, имеем

$$kb \dot{-} la = h.$$

Пусть q — частное, а ρ — остаток от деления $ra \dot{-} sb > 0$ на h, так что $\rho < h$ и

$$ra \dot{-} sb = hq + \rho;$$

но $kqb \dot{-} lqa = hq$ и, следовательно,

$$(r + ql)a = (s + qk)b + \rho,$$

что для краткости мы запишем в виде

$$xa \dot{-} yb = \rho.$$

В силу примера 3.194, если $nb \leqslant x$, $na \leqslant y$ и $yb \leqslant ax$, то

$$a(x \dot{-} nb) \dot{-} b(y \dot{-} na) = \rho;$$

поэтому, если N — наибольшее n, удовлетворяющее условию $nb \leqslant x \,\&\, na \leqslant y$ (см. пример 3.7), и если мы обозначим $x \dot{-} Nb$, $y \dot{-} Na$ через X, Y, то мы имеем

$$aX \dot{-} bY = \rho.$$

Если $Y \geqslant a$, $X \geqslant b$, то в силу примера 2.41 из неравенств $Nb \leqslant x$, $Na \leqslant y$ мы выводим $x \geqslant (N + 1)b$, $y \geqslant (N + 1)a$, что противоречит определению N; следовательно, или $Y < a$, или $X < b$.

Если $X \geqslant b$ и $Y < a$, то $aX \dot{-} bY \geqslant ab \dot{-} bY = b(a \dot{-} Y) > 0$ и, следовательно,

$$X \geqslant b \,\&\, Y < a \to E_x^b E_y^a(ax \dot{-} by = c) \,\&\, c > 0 \,\&\, c < h,$$

поэтому из $E_x^b E_y^a(ax \dot{-} by = c) \,\&\, c > 0 \to c \geqslant h$ (теорема 4.92) мы заключаем, что

$$\sim (X \geqslant b \,\&\, Y < a).$$

Если $X < b$, то, поскольку $Yb \leqslant Xa$, мы имеем $Y < a$ (при $b > 0$); но $\rho < h$ и h — наименьшее ненулевое значение $ua \dot{-} vb$ при $u \leqslant b$, $v \leqslant a$, и поэтому $\rho = 0$, что завершает доказательство.

4.96. Из последнего результата следует, что $h(a, b)$ делит как a, так и b, ибо $1 \cdot a \dot{-} 0 \cdot b = a$ кратно $h(a, b)$, а $1 \cdot b \dot{-} 0 \cdot a = b$ кратно $h(b, a) = h(a, b)$.

Таким образом, h делит и a, и b. Так как всякий общий делитель a, b является делителем h, то h является *наибольшим общим делителем a и b*. В частности, если $h = 1$, то a и b взаимно просты.

4.97. Из равенства $ka \dot{-} lb = h$, где k, l и h обозначают $k(a, b)$, $l(a, b)$, $h(a, b)$ и $ab > 0$, следует (в силу примера 4.31), что

$$ka = h \pmod b,$$

а из $(a \dot{-} l)\, b \dot{-} (b \dot{-} k)\, a = h$ мы выводим

$$(a \dot{-} l)\, b = h \pmod a.$$

Так как $ka = 0 \pmod a$ и $(a \dot{-} l)\, b = 0 \pmod b$, мы находим, что для любых r и s (используя примеры 4.322, 4.323)

$$(a \dot{-} l)\, br + kas = rh \pmod a,$$
$$(a \dot{-} l)\, br + kas = sh \pmod b.$$

Отсюда в силу примера 4.91, если n обозначает $R((a \dot{-} l)\, br + kas, ab)$, получим

$$n = rh \pmod a,$$
$$n = sh \pmod b.$$

Таким образом, если a и b взаимно просты, так что $h = 1$, то мы доказали:

Если a и b взаимно просты и если r, s — любые два числа, то имеется число $n < ab$ такое, что

$$n = r \pmod a,$$
$$n = s \pmod b.$$

Примеры к гл. IV

Докажите формулы:

4. $R(n, n) = 0$. **4.01.** $R(a, 0) = a$, $Q(a, 0) = 0$. **4.011.** $R(x, y) = 0 \to (y > 0) \vee (x = 0)$. **4.012.** $R(a, b) = 0 \,\&\, R(b, c) = 0 \to R(a, c) = 0$. **4.013.** $R(a, x) = 0 \to R(ab, x) = 0$. **4.014.** $x > 0 \to \{R(ax, bx) = 0 \to R(a, b) = 0\}$. **4.02.** $R(p, a) = 0 \,\&\, R(q, b) = 0 \to R(pq, ab) = 0$. **4.03.** $R(x, 1) = 0$. **4.04.** $R(a, bc) = 0 \to R(a, b) = 0$. **4.1.** $R(a + b, c) = 0 \,\&\, R(a, c) = 0 \to R(b, c) = 0$. **4.2.** $R(ab, b) = 0$. **4.21.** $R(a, b) = 0 \,\&\, b > 1 \to R(a + 1, b) = 1$. **4.3.** $b > 1 \to R(ab + 1, b) = 1$.

4.31. Докажите, что если $a \dot{-} cd = b$ и $b > 0$, то

$$R(a, d) = R(b, d).$$

4.32. Покажите, что $a = b + dx \to a = b \pmod d$.

Докажите схемы:

4.321. $\dfrac{\begin{array}{l} a = b \pmod d \\ b = c \pmod d \end{array}}{a = c \pmod d}$; **4.322.** $\dfrac{a = b \pmod d}{ar = br \pmod d}$;

4.323. $\dfrac{\begin{array}{l} a_1 = b_1 \pmod d \\ a_2 = b_2 \pmod d \end{array}}{a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \pmod d}$.

Докажите, что:

4.4. $\prod_f(n)$ делится на $f(n)$. **4.41.** $\prod_f(r + n)$ делится на $\prod_f(r)$. **4.42.** Если $a \leqslant n$, то $\prod_f(n)$ делится на $\prod_f(a)$.

Докажите формулы:

4.43. $0 < a \,\&\, a \leqslant n \to R(n!, a) = 0$. **4.44.** $1 < a \,\&\, a \leqslant n \to R(n! + 1, a) = 1$. **4.45.** Докажите, что 2 — простое число. **4.46.** Докажите, что 3 — простое число.

Докажите формулы:

4.5. $\mathfrak{p}(n + 1) > 2$. **4.51.** $\mathfrak{p}(n) > n$. **4.6.** $n > 2 \,\&\, R(n, 2) = 0 \to p(n) > 0$. **4.61.** $p(n) = 0 \to (n = 2) \vee \{R(n, 2) = 1\}$. **4.7.** $(1 + x)^m \geqslant 1 + mx$. **4.701.** $a > 1 \to a^m > m$. **4.702.** $a > 1 \,\&\, p > q \to a^p > a^q$. **4.71.** $a > 0 \,\&\, b > a \to R(a, b) > 0$. **4.711.** $x > 1 \,\&\, R(x^a, x^b) = 0 \to b \leqslant a$.

Докажите, что если p — простое число, то

4.8. $R(x^{k+1}, p) = 0 \to R(x, p) = 0$. **4.801.** $R(a, p) > 0 \,\&\, R(ab, p^k) = 0 \to R(b, p^k) = 0$. **4.802.** $R(m, a) = 0 \,\&\, R(m, p^k) = 0 \,\&\, R(a, p) > 0 \to R(m, ap^k) = 0$.

Докажите формулы:

4.81. $R(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = 0 \to k = l$. **4.82.** $\sim (k = l) \to R(\mathfrak{p}_k^m, \mathfrak{p}_l) > 0$.

4.83. $m > 1 \to E_x^m R(m, \mathfrak{p}_x) = 0$.

4.84. Покажите, что

$$\frac{x \leqslant m \to R(m, \mathfrak{p}_x) > 0}{m = 1}.$$

Докажите формулы (где p — простое число):

4.85. $A_x^k R(f(x), p) > 0 \to R\left(\prod_{x \leqslant k} f(x), p\right) > 0.$

4.86. $R\left(m, \prod_{x \leqslant k} \mathfrak{p}_x^{v(m, x)}\right) = 0.$

Обоснуйте схему:

4.87. $$\frac{x \leqslant m \to R\left(a, \mathfrak{p}_x^{a_x}\right) = 0}{E_x^m\left\{R\left(ab, \mathfrak{p}_x^{a_x+1}\right) = 0\right\}}.$$

4.9. Докажите, что если $a(l) > 0$ и $N = \prod_{x \leqslant l} \mathfrak{p}(x)^{a(x)}$, то в обозначениях теоремы 4.7 $g(N) = l$.

4.91. Докажите, что если $b > 0$, то $R(a, bc) = a \pmod b$.

4.92. Докажите, что если $\boldsymbol{h}$ — Н. О. Д. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а $\boldsymbol{H}$ — Н. О. Д. $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{H}$ — Н. О. Д. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

4.93. Докажите, что Н. О. К. x и y является примитивно рекурсивной функцией.

ГЛАВА V

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНОЙ АРИФМЕТИКИ

Формализация рекурсивной арифметики. Дедукционная теорема. Редукция схемы единственности.

В этой главе мы рассмотрим формализацию примитивно рекурсивной арифметики, в которой единственными аксиомами являются явные и рекурсивные определения, а единственными правилами вывода являются схемы подстановок *)

$$\mathrm{Sb}_1 \quad \frac{F(x) = G(x)}{F(A) = G(A)};$$

$$\mathrm{Sb}_2 \quad \frac{A = B}{F(A) = F(B)};$$

$$\mathrm{T} \quad \frac{\begin{matrix}A = B\\ A = C\end{matrix}}{B = C},$$

где $F(x)$ и $G(x)$ — рекурсивные функциии и A, B, C — рекурсивные термы, и правило единственности примитивной рекурсии

$$\mathrm{U} \quad \frac{F(Sx) = H(x, F(x))}{F(x) = H^x F(0)},$$

где итеративная функция $H^x t$ определяется примитивной рекурсией $H^0 t = t$, $H^{Sx} t = H(x, H^x t)$; в схеме U функция F может содержать дополнительные параметры, H — функция не более чем двух переменных. В Sb_1 функцию

*) Схему Sb_1 следует понимать так: доказуемое равенство переходит в доказуемое в результате подстановки в него произвольного терма вместо всех вхождений некоторой переменной.

Схему Sb_2 следует понимать так: если доказуемо равенство $A = B$, то доказуемо и равенство $F = F'$, где F' получается из F в результате одновременной подстановки терма B вместо нескольких (не обязательно всех) вхождений терма A в F. — *Прим. ред.*

$G(x)$ можно заменить термом G, не зависящим от x, если $G(A)$ также заменено на G.

Особенность этой формализации состоит в выводимости ключевого равенства $a + (b \dot{-} a) = b + (a \dot{-} b)$ с помощью правила единственности примитивной рекурсии без использования правила приравнивания для двойной рекурсии, как раньше.

Мы начнем с того, что докажем несколько вспомогательных схем. Из определяющих равенств $x + 0 = x$, $x + 0 = x$ с помощью T следует $x = x$, отсюда в силу Sb_1 мы приходим к $A = A$. Так как $B = A$ следует из $A = B$ и $A = A$ по T, то мы доказали, что

$$\mathrm{K}\quad \frac{A = B}{B = A}.$$

Схемой, эквивалентной U, является следующая схема *):

$$\mathrm{U}_1\quad \frac{\begin{array}{c} f(0) = g(0) \\ f(Sx) = H(x, f(x)) \\ g(Sx) = H(x, g(x)) \end{array}}{f(x) = g(x)}.$$

Переход от U_1 к U очевиден; для обратного перехода **) мы выводим

$$f(x) = H^x f(0), \quad g(x) = H^x g(0)$$

из посылок с помощью U и выводим $H^x f(0) = H^x g(0)$ из $f(0) = g(0)$ с помощью Sb_2, откуда $f(x) = g(x)$ следует в силу T и K.

В качестве иллюстрации использования Sb_2 мы выведем $F(a, b) = F(A, B)$ из пары равенств $a = A$, $b = B$. Сначала мы выведем $F(a, b) = F(a, B)$ из $b = B$ по Sb_2 и аналогично $F(a, B) = F(A, B)$ из $a = A$; затем, применяя K и T, мы получаем $F(a, b) = F(A, B)$ из $a = A$, $b = B$.

*) Указанные выше (в первом абзаце настоящей главы) аксиомы вместе с правилами Sb_1, Sb_2, T и U_1 — это, по существу, полный перечень аксиом и правил главы II, относящихся к примитивно рекурсивным функциям. — *Прим. ред.*

**) Имеется в виду, что H — функция не более, чем двух переменных. — *Прим. ред.*

Две следующие важные схемы таковы:

$$\mathrm{E}_1\quad \frac{F(Sx) = F(x)}{F(x) = F(0)};$$

$$\mathrm{E}_2\quad \frac{F(0) = 0,\ F(Sx) = 0}{F(x) = 0}.$$

Для доказательства E_1 мы определяем $H_1(x, t)$, $C(t)$ явно с помощью аксиом

$$H_1(x, t) = t, \quad C(t) = F(0),$$

откуда мы без труда получаем $C(0) = F(0)$, $C(Sx) = H_1(x, C(x))$, $F(Sx) = H_1(x, F(x))$, что в силу U_1 влечет $F(x) = C(x)$, а отсюда мы приходим к $F(x) = F(0)$ с помощью Sb_1 и T. Для доказательства E_2 мы определяем $Z(t) = 0$, так что $Z(F(x)) = 0$; тогда из $F(Sx) = 0$ следует $F(Sx) = Z(F(x))$. Это равенство вместе с $Z(Sx) = Z(Z(x))$ и $F(0) = Z(0)$ влечет $F(x) = Z(x)$ в силу U_1, а отсюда следует E_2.

Далее мы установим несколько результатов для сложения, вычитания и умножения, взяв в качестве определяющих равенств для этих операций следующие:

$$a + 0 = a, \quad a + Sb = S(a + b);$$

$$0 \dot{-} 1 = 0, \quad Sa \dot{-} 1 = a, \quad a \dot{-} 0 = a, \quad a \dot{-} Sb = (a \dot{-} b) \dot{-} 1;$$

$$a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot Sb = a \cdot b + a.$$

5.01. $(a \dot{-} b) \dot{-} 1 = (a \dot{-} 1) \dot{-} b$.

Так как $(a \dot{-} 0) \dot{-} 1 = (a \dot{-} 1) \dot{-} 0$, $(a \dot{-} Sb) \dot{-} 1 = \{(a \dot{-} b) \dot{-} 1\} \dot{-} 1$, $(a \dot{-} 1) \dot{-} Sb = \{(a \dot{-} 1) \dot{-} b\} \dot{-} 1$, то этот результат получается по U_1.

5.02. $Sa \dot{-} Sb = a \dot{-} b$.

Действительно, мы получим $Sa \dot{-} Sb = (Sa \dot{-} 1) \dot{-} b = a \dot{-} b$, используя 5.01.

5.03. $a \dot{-} a = 0$.

Действительно, $Sa \dot{-} Sa = a \dot{-} a$ и, следовательно, $a \dot{-} a = 0 \dot{-} 0 = 0$.

5.04. $0 \dot{-} a = 0$.

Доказательство получается в силу E_1 с помощью $0 \dot{-} Sa = (0 \dot{-} 1) \dot{-} a = 0 \dot{-} a$.

5.05. $(a + b) \dot{-} b = a$.

В самом деле

$$(a + Sb) \dot{-} Sb = S(a + b) \dot{-} Sb = (a + b) \dot{-} b,$$

так что в силу E_1 имеет место $(a + b) \dot{-} b = a$.

5.051. $(a + n) \dot{-} (b + n) = a \dot{-} b$.

Действительно, $(a+Sn) \dot{-} (b+Sn) = S(a+n) \dot{-} S(b+n) = (a + n) \dot{-} (b + n)$ и $a + 0 \dot{-} (b + 0) = a \dot{-} b$.

5.052. $n \dot{-} (b + n) = 0$.

Получается в силу 5.051 и 5.04.

5.06. $0 + a = a$.

Так как $0 + 0 = 0$, $0 + Sa = S(0 + a)$, $Sa = Sa$, результат следует по U_1.

5.07. $a + Sb = Sa + b$.

Мы используем $a + S0 = Sa = Sa + 0$, $a + SSb = S(a + Sb)$, $Sa + Sb = S(Sa + b)$ и U_1.

5.08. $a + b = b + a$.

Из $a + 0 = 0 + a$, $a + Sb = S(a + b)$ с помощью 5.07 следует $Sb + a = b + Sa = S(b + a)$. Тогда 5.08 следует по U_1.

5.09. $a + b \dot{-} a = b$.

Получается с помощью 5.08 и 5.05.

5.10. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Применяем U_1 с c в качестве переменной.

5.11. $Sa \cdot b = a \cdot b + b$.

Так как $Sa \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$, $Sa \cdot Sb = Sa \cdot b + Sa$, $a \cdot Sb + Sb = (a \cdot b + a) + Sb = S\{(a \cdot b + a) + b\} = S\{(a \cdot b + b) + a\}$ в силу 5.08, 5.10 и, следовательно, $a \cdot Sb + Sb = (a \cdot b + b) + Sa$, то 5.11 следует отсюда по U_1.

5.12. $0 \cdot a = 0$.

Так как $0 \cdot Sa = 0 \cdot a$, то $0 \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$.

5.13. $a(1 \dot{-} a) = 0$.

Действительно, $0(1 \dot{-} 0) = 0$ и $Sa(1 \dot{-} Sa) = Sa(0 \dot{-} a) = Sa \cdot 0 = 0$.

5.14. $a \cdot b = b \cdot a$.

В самом деле, $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ и $a \cdot Sb = a \cdot b + a$, $Sb \cdot a = b \cdot a + a$.

5.15. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Это следует с помощью U_1 из следующих доказуемых равенств:

$$a(b + 0) = a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0,$$
$$a(b + Sc) = a \cdot S(b + c) = a(b + c) + a,$$
$$a \cdot b + a \cdot Sc = ab + (ac + a) = (ab + ac) + a.$$

5.151. $a(bc) = (ab)c$.

Поскольку $a(b \cdot 0) = 0 = (a \cdot b) \cdot 0$ и $a(b \cdot Sc) = a(bc + b) = a(bc) + ab$, имеем $ab \cdot Sc = (ab)c + ab$.

Теперь мы докажем расширение схемы E_2:

$$E_3 \quad \frac{f(0) = g(0)}{f(Sx) = g(Sx)}.$$

Определяем $H_2(x, t) = 0 \cdot t + g(Sx) = 0 \cdot t + f(Sx)$; тогда

$$f(Sx) = 0 \cdot f(x) + f(Sx) = H_2(x, f(x)),$$
$$g(Sx) = 0 \cdot g(x) + g(Sx) = H_2(x, g(x)),$$

откуда E_3 следует по U_1.

5.16. $(1 \dot{-} a)b = b \dot{-} ab$.

Действительно, $(1 \dot{-} 0)b = b = b \dot{-} 0 \cdot b$, $(1 \dot{-} Sa)b = (0 \dot{-} a)b = 0$ и $b \dot{-} Sa \cdot b = b \dot{-} (b + a \cdot b) = 0$.

Теперь мы докажем, ключевое равенство

5.17. $a + (b \dot{-} a) = b + (a \dot{-} b)$.

Определяем $f(a, b) = a + (b \dot{-} a)$, так что $f(a, 0) = a$, $f(0, b) = b$, $f(Sa, Sb) = Sf(a, b)$, и определяем $g(a, b) = b + (a \dot{-} b)$, так что $g(a, 0) = a$, $g(0, b) = b$, $g(Sa, Sb) = Sg(a, b)$. Мы начнем с доказательства

5.171. $f(a, b) = f(a \dot{-} 1,\ b \dot{-} 1) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} (a + b))\}$.

В силу E_3 имеет место $a = (a \dot{-} 1) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)\}$, откуда получаем $f(a, 0) = f(a \dot{-} 1, 0) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)\}$, что доказывает 5.171 при b, равном 0. При подстановке Sb вместо b 5.171 переходит в равенство

$$f(a, Sb) = Sf(a \dot{-} 1, b),$$

которое является следствием равенств $f(0, Sb) = Sb = Sf(0, b)$, $f(Sa, Sb) = Sf(a, b)$, что завершает доказательство 5.171.

Далее мы определяем

$$\varphi(0, a, b) = 0,\ \varphi(Sn, a, b) = \varphi(n, a, b) + \{1 \dot{-} [1 \dot{-} ((a \dot{-} n) + (b \dot{-} n))]\}$$

и докажем, что

$$f(a \dot{-} n, b \dot{-} n) + \varphi(n, a, b) = f(a \dot{-} Sn, b \dot{-} Sn) + \varphi(Sn, a, b);$$

в самом деле, в силу 5.171

$$f(a \dot{-} n, b \dot{-} n) + \varphi(n, a, b) = f(a \dot{-} Sn, b \dot{-} Sn) + \varphi(n, a, b) + \{1 \dot{-} [1 \dot{-} ((a \dot{-} n) + (b \dot{-} n))]\} = f(a \dot{-} Sn, b \dot{-} Sn) + \varphi(Sn, a, b),$$

так что $f(a \dot{-} n, b \dot{-} n) + \varphi(n, a, b) = f(a, b) + \varphi(0, a, b) = f(a, b)$, откуда получаем $f(a, b) = f(a \dot{-} b, 0) + \varphi(b, a, b) = (a \dot{-} b) + \varphi(b, a, b)$.

Аналогично получим, что $g(a, b) = (a \dot{-} b) + \varphi(b, a, b)$, откуда следует равенство 5.17.

Из 5.17 мы выводим схему

$$\frac{|A, B| = 0}{A = B};$$

ибо из $|A, B| = 0$ в силу 5.04 следует $|A, B| \dot{-} (B \dot{-} A) = 0$, откуда в силу 5.05 получаем $A \dot{-} B = 0$ и аналогично $B \dot{-} A = 0$; от этих равенств мы приходим к

$$A + (B \dot{-} A) = A,\quad B + (A \dot{-} B) = B$$

и поэтому в силу 5.17 имеет место $A = B$. Вывод $|A, B| = 0$ из $A = B$, конечно, тривиален.

Теперь мы переходим к некоторым схемам индукции. Пусть $P(x)$ обозначает равенство $f(x) = g(x)$.

Обычная схема индукции такова:

$$I_1\quad \frac{P(0),\quad P(x) \to P(Sx)}{P(x)}$$

или, полагая $p(x) = |f(x),\ g(x)|$,

$$\frac{p(0) = 0,\quad (1 \dot{-} p(x))\, p(Sx) = 0}{p(x) = 0}.$$

Так же как в доказательстве 2.8, мы полагаем $q(0) = 1$, $q(Sn) = q(n)\,(1 \dot{-} p(n))$; тогда

$$q(SSn) = q(Sn)\,(1 \dot{-} p(Sn)) = q(n)\,(1 \dot{-} p(n))\,(1 \dot{-} p(Sn)) = q(n)\{(1 \dot{-} p(n)) \dot{-} (1 \dot{-} p(n))\,p(Sn))\} = q(Sn),$$

где последнее равенство имеет место в силу посылки схемы, ибо

$$(1 \dot{-} p(n))\,p(Sn) = 0;$$

отсюда следует, что $q(Sn) = q(S0) = 1$, т. е. $q(n)\,(1 \dot{-} p(n)) = 1$, а умножая это на $p(n)$, получаем в силу 5.13 $p(n) = 0$.

$$I_2\quad \frac{f(a, 0) = 0,\ f(0, Sb) = 0,\ \{f(a, b) = 0\} \longrightarrow \{f(Sa, Sb) = 0\}}{f(a, b) = 0}.$$

Прежде всего, мы замечаем, что из $f(0, 0) = 0$, $f(0, Sb) = 0$ следует $f(0, b) = 0$. Посылка схемы, имеющая вид импликации, обозначает равенство

$$\{1 \dot{-} f(a, b)\} f(Sa, Sb) = 0.$$

Теперь имеем $\{1 \dot{-} f(0, b \dot{-} 1)\} f(0, b) = 0$ и из

$$\{1 \dot{-} f(a, 0)\} f(Sa, 0) = 0,\quad \{1 \dot{-} f(a, b)\} f(Sa, Sb) = 0$$

следует

$$\{1 \dot{-} f(a, b \dot{-} 1)\} f(Sa, b) = 0,$$

поэтому

$$\{1 \dot{-} f(a \dot{-} 1, b \dot{-} 1)\} f(a, b) = 0,$$

и, следовательно,

$$\{1 \dot{-} f(a \dot{-} Sn, b \dot{-} Sn)\} f(a \dot{-} n, b \dot{-} n) = 0$$

Далее мы покажем, что

(j) $f(a, b)\{1 \dot{-} f(a \dot{-} n, b \dot{-} n)\} = 0.$

С этой целью мы доказываем

$$[1 \dot{-} f(a, b)\{1 \dot{-} f(a \dot{-} n, b \dot{-} n)\}] \times \\ \times f(a, b)\{1 \dot{-} f(a \dot{-} Sn, b \dot{-} Sn)\} = 0.$$

Обозначим через p, q, r соответственно $f(a, b)$, $f(a \dot{-} n, b \dot{-} n)$ и $f(a \dot{-} Sn, b \dot{-} Sn)$, тогда левая часть этого равенства примет вид

$$\{1 \dot{-} p(1 \dot{-} q)\} p(1 \dot{-} r) = p\{(1 \dot{-} r) \dot{-} p(1 \dot{-} q)(1 \dot{-} r)\} = \\ = p\{(1 \dot{-} r) \dot{-} p(1 \dot{-} r)\} = p(1 \dot{-} r)(1 \dot{-} p) = 0, \\ \text{ибо } q(1 \dot{-} r) = 0,$$

что завершает доказательство (j) по I_1 (поскольку истинность (j) при n, равном 0, очевидна)*).

Если положить $|\varphi(a, b), \psi(a, b)| = f(a, b)$, то из I_2 следует, что верна схема

$$\varphi(a, 0) = \psi(a, 0),\ \varphi(0, Sb) = \psi(0, Sb),$$

$$I_3 \quad \frac{\{\varphi(a, b) = \psi(a, b)\} \to \{\varphi(Sa, Sb) = \psi(Sa, Sb)\}}{\varphi(a, b) = \psi(a, b)}.$$

В качестве частных случаев схем I_2 и I_3 отметим следующие: из $f(a, 0) = 0$, $f(0, Sb) = 0$ и $f(Sa, Sb) = 0$ следует $f(a, b) = 0$; из $f(a, 0) = 0$, $f(0, Sb) = 0$, $f(a, b) = f(Sa, Sb)$ следует $f(a, b) = 0$, и из $\varphi(a, 0) = \psi(a, 0)$, $\varphi(0, Sb) = \psi(0, Sb)$, $\varphi(a, b) = \varphi(Sa, Sb)$ и $\psi(a, b) = \psi(Sa, Sb)$ следует $\varphi(a, b) = \psi(a, b)$, ибо если мы обозначим $|\varphi(a, b), \psi(a, b)|$ через $f(a, b)$, то $f(a, 0) = 0$,

*) Полагая здесь $n = b$ и используя первую посылку I_2, получаем $f(a, b) = 0$. — *Прим. ред.*

$f(0, Sb) = 0$, а из $\varphi(a, b) = \varphi(Sa, Sb)$, $\psi(a, b) = \psi(Sa, Sb)$ следует $f(a, b) = f(Sa, Sb)$, откуда $f(a, b) = 0$ и, следовательно, $\varphi(a, b) = \psi(a, b)$.

Как частный случай этой последней схемы, мы упомянем

5.18. $c(a \dot{-} b) = ca \dot{-} cb$, $a \dot{-} (b + c) = (a \dot{-} b) \dot{-} c$.

Для завершения построения рекурсивной арифметики остается лишь доказать теорему о подстановке:

$$(x = y) \longrightarrow \{F(x) = F(y)\}.$$

Это легко выводится из равенства

$$(1 \dot{-} |x, y|) F(x) = (1 \dot{-} |x, y|) F(y).$$

Точно так же, как в 2.63, мы начинаем с равенства

$$(1 \dot{-} z) F(y + z) = (1 \dot{-} z) F(y),$$

которое доказывается применением E_2 с z в качестве переменной, и выводим

$$\{1 \dot{-} (x \dot{-} y)\} F(y + (x \dot{-} y)) = \{1 \dot{-} (x \dot{-} y)\} F(y),$$

а умножая на $1 \dot{-} |x, y|$, мы приходим к

$$(1 \dot{-} |x, y|) F(y + (x \dot{-} y)) = (1 \dot{-} |x, y|) F(y),$$

поскольку

$$\{1 \dot{-} [(x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)]\}\{1 \dot{-} (x \dot{-} y)\} = \\ = (1 \dot{-} |x, y|) \dot{-} (x \dot{-} y)\{[1 \dot{-} (x \dot{-} y)] \dot{-} (y \dot{-} x)\} = 1 \dot{-} |x, y|;$$

аналогично имеем

$$(1 \dot{-} |x, y|) F(x + (y \dot{-} x)) = (1 \dot{-} |x, y|) F(x),$$

а так как

$$x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y),$$

то требуемый результат следует по T.

Мы назовем описанную выше формализацию рекурсивной арифметики системой $\mathscr{R}$.

Дедукционная теорема

Если равенство $A = B$ выводимо в $\mathscr{R}$ из некоторого допущения $F = G$ (т. е. из некоторого недоказанного равенства) и если вывод не содержит подстановку вместо переменных этого допущения *), то в $\mathscr{R}$ доказуемо

$$(F = G) \longrightarrow (A = B).$$

Мы умножим каждое равенство вывода на $1 \dot{-} |F, G|$. Посылка перейдет в *доказанное* равенство

$$\{1 \dot{-} |F, G|\}F = \{1 \dot{-} |F, G|\}G,$$

а последнее равенство перейдет в равенство

$$\{1 \dot{-} |F, G|\}|A = \{1 \dot{-} |F, G|\}B,$$

из которого мы можем вывести

$$\{1 \dot{-} |F, G|\}|A, B| = 0, \text{ т. е. } (F = G) \longrightarrow (A = B).$$

Если $P = Q$ является доказанным равенством, то для любой функции R равенство

$$RP = RQ$$

является доказанным равенством, и, следовательно, умножение на $1 \dot{-} |F, G|$ переводит доказанное равенство в доказанное равенство.

Далее мы покажем, что умножение на некоторый множитель не нарушает правильности применения любой из схем Sb_1, Sb_2, T и U. Для Sb_1 нам надо доказать, что схема

$$\frac{R \cdot F(x) = R \cdot G(x)}{R \cdot F(A) = R \cdot G(A)}$$

верна, если множитель R не содержит переменной x, а это, конечно, является следствием самой Sb_1. Для случая Sb_2 нам надо доказать, что верен переход

$$\frac{R \cdot A = R \cdot B}{R \cdot F(A) = R \cdot F(B)}.$$

*) Подразумевается, что при использовании правила U (или U_1) совершается подстановка вместо переменной x. — *Прим. ред.*

С этой целью мы замечаем, что поскольку $R|A, B| = |RA, RB|$ в силу равенств 5.15 и 5.18, то

$$(RA = RB) \to (A = B) \vee (R = 0),$$
$$(F(A) = F(B)) \to (R \cdot F(A) = R \cdot F(B)),$$
$$(R = 0) \to (R \cdot F(A) = R \cdot F(B))$$

и по теореме о подстановке имеем

$$(A = B) \longrightarrow \{F(A) = F(B)\},$$

откуда, используя схемы

$$\frac{P_1 \to Q \quad P_2 \to Q}{P_1 \vee P_2 \to Q}, \qquad \frac{H \to K \quad K \to L}{H \to L},$$

которые следуют из доказуемых равенств

$$(1 \dot{-} p_1) + (1 \dot{-} p_2) = (1 \dot{-} p_1 p_2) + \{1 \dot{-} (p_1 + p_2)\},$$
$$k + (1 \dot{-} k) = 1 + (k \dot{-} 1),$$

мы доказываем

$$(R \cdot A = R \cdot B) \longrightarrow \{R \cdot F(A) = R \cdot F(B)\}$$

и, следовательно (взяв $0 = 0$ вместо H во второй из упомянутых выше схем), мы видим, что $R \cdot F(A) = R \cdot F(B)$ следует из $R \cdot A = R \cdot B$.

Для схемы T нам надо только доказать схему

$$\frac{RA = RB \quad RA = RC}{RB = RC},$$

а она следует по самой схеме T. Остается доказать, что применение U_1 остается корректным после умножения на R, т. е. что переход

$$\frac{\begin{array}{l} R \cdot F(0) = R \cdot G(0) \\ R \cdot F(Sx) = R \cdot H(x, F(x)) \\ R \cdot G(Sx) = R \cdot H(x, G(x)) \end{array}}{R \cdot F(x) = R \cdot G(x)}$$

корректен, если R не содержит переменной x. Мы начнем с доказательства схемы

$$\frac{P=Q}{\frac{R=S}{(P=R)\to(Q=S)}}$$

В силу Sb_2 имеем

$$\frac{P=Q}{|P,\ R|=|Q,\ R|}, \quad \frac{R=S}{|Q,\ R|=|Q,\ S|},$$

откуда по T получаем

$$\frac{P=Q}{\frac{R=S}{|P,\ R|=|Q,\ S|}},$$

и требуемый переход получается по схеме

$$\frac{a=b}{(1\dot{-}a)\,b=0},$$

которая тоже доказывается с помощью Sb_2.

Из формулы $(ka=kb)\longrightarrow\{kJ(a)=kJ(b)\}$, которая доказана выше, следует

$$\{R\cdot F(x)=R\cdot G(x)\}\longrightarrow\{R\cdot H(x,F(x))=R\cdot H(x,F(x))\};$$

отсюда и из данных посылок по упомянутой выше схеме следует

$$\{R\cdot F(x)=R\cdot G(x)\}\longrightarrow\{R\cdot F(Sx)=R\cdot G(Sx)\},$$

а это вместе с первой посылкой доказывает $R\cdot F(x)=R\cdot G(x)$ по схеме индукции I_1; дедукционная теорема доказана.

Дедукционная теорема имеет место для любого числа посылок. Например, если дан вывод $A=B$ из допущений $F_1=G_1$, $F_2=G_2$, то мы получаем доказательство импликации

$$(F_1=G_1)\longrightarrow\{(F_2=G_2)\longrightarrow(A=B)\},$$

умножая каждое равенство в этом выводе на множитель

$$(1\dot{-}|F_1,G_1|)\,(1\dot{-}|F_2,G_2|).$$

Аналогично, мы освобождаемся от допущений $F_1=G_1$, $F_2=G_2$, $F_3=G_3$, умножая каждое равенство в выводе из этих допущений на

$$(1\dot{-}|F_1,G_1|)\,(1\dot{-}|F_2,G_2|)\,(1\dot{-}|F_3,G_3|)$$

и т. д.

Сведение схемы U

Сначала мы рассмотрим систему $\mathfrak{R}^*$, в которой имеются только Sb_1, Sb_2, T, схема

E $\dfrac{f(0)=0,\ f(n)=f(Sn)}{f(n)=0}$,

аксиома

A $a+(b\dot{-}a)=b+(a\dot{-}b)$

и (вместо обычных вводящих равенств для функции предшествования) аксиома

P $Sa\dot{-}Sb=a\dot{-}b.$

Аксиома $a+(b\dot{-}a)=b+(a\dot{-}b)$ позволяет нам вывести $a=b$ из $a\dot{-}b=0$ и $b\dot{-}a=0$. В самом деле, в силу Sb_2

$$\frac{b\dot{-}a=0}{a+(b\dot{-}a)=a+0=a}, \quad \frac{a\dot{-}b=0}{b+(a\dot{-}b)=b+0=b},$$

а из $a+(b\dot{-}a)=a$, $b+(a\dot{-}b)=b$ и $a+(b\dot{-}a)=b+(a\dot{-}b)$ следует $a=b$. Вывод $a=b$ из $a\dot{-}b)=0$, $b\dot{-}a=0$ мы называем схемой A.

Для доказательства схемы E_1, а именно

$$\frac{F(Sx)=F(x)}{F(x)=F(0)},$$

мы определяем $\Phi(x)=F(x)\dot{-}F(0)$; тогда $\Phi(0)=0$ *) и

$$\Phi(Sx)=F(Sx)\dot{-}F(0)=F(x)\dot{-}F(0)=\Phi(x),$$

откуда в силу E получим $\Phi(x)=0$, т. е. $F(x)\dot{-}F(0)=0$. Аналогично, $F(0)\dot{-}F(x)=0$ и, следовательно (по схеме A), получаем $F(x)=F(0)$, что завершает доказательство схемы E_1.

*) См. сноску на следующей странице. — *Прим. ред.*

Теперь мы перейдем к пересмотру равенств и схем, доказанных в $\mathscr{R}$.

Равенство 5.01 мы оставили на конец. Равенство 5.02 теперь является аксиомой. Доказательства 5.03 *) и 5.05 остаются неизменными.

Доказательство 5.07 в $\mathscr{R}^*$.

$$(a + S0) \dot{-} (Sa + 0) = Sa \dot{-} Sa = 0,$$

$$(a + SSb) \dot{-} (Sa + Sb) = \\ = S(a + Sb) \dot{-} S(Sa + b) = (a + Sb) \dot{-} (Sa + b),$$

что доказывает $(a + Sb) \dot{-} (Sa + b) = 0$. Аналогично, $(Sa + b) \dot{-} (a + Sb) = 0$, откуда 5.07 следует по схеме А.

Доказательство 5.06.

$$(0 + Sa) \dot{-} Sa = S(0 + a) \dot{-} Sa = (0 + a) \dot{-} a,$$

так что $(0 + a) \dot{-} a = (0 + 0) \dot{-} 0 = 0$. Аналогично, $Sa \dot{-} (0 + Sa) = a \dot{-} (0 + a)$, откуда 5.06 следует по схеме А.

Доказательство 5.08.

$$(a + 0) \dot{-} (0 + a) = a \dot{-} a = 0,$$

$$(a + Sb) \dot{-} (Sb + a) = \\ = S(a + b) \dot{-} S(b + a) = (a + b) \dot{-} (b + a),$$

так что $(a + b) \dot{-} (b + a) = 0$, откуда $(b + a) \dot{-} (a + b) = 0$ и $a + b = b + a$ следует по схеме А.

Доказательство равенства 5.09 остается неизменным.

Доказательство 5.04.

$$a + (0 \dot{-} a) = 0 + (a \dot{-} 0) = a,$$

поэтому $\{a + (0 \dot{-} a)\} \dot{-} a = a \dot{-} a = 0$, откуда в силу 5.09 $0 \dot{-} a = 0$.

*) Равенство $a = a$ (5.03) используется при обосновании в $\mathscr{R}^*$ схемы E_1, поэтому его следует доказать с помощью E, P и равенства $a \dot{-} 0 = a$. — *Прим. ред.*

Схема

$$\frac{\begin{array}{c} f(0) = g(0) \\ f(Sa) = f(a) \\ g(Sa) = g(a) \end{array}}{f(a) = g(a)}$$

следует с помощью двух применений схемы E и двух применений схемы T.

Доказательства 5.051, 5.052 остаются неизменными, а из 5.051 следует, что

$$|a + n, b + n| = |a, b|.$$

Доказательство 5.10.

$$|a + (b + 0),\ (a + b) + 0| = 0,$$

$$|a + (b + Sn),\ (a + b) + Sn| = |a + (b + n),\ (a + b) + n|$$

и т. д.

Доказательство 5.11.

Поскольку $Sa \cdot Sb = Sa \cdot b + Sa$ и

$$a \cdot Sb + Sb = (ab + a) + Sb = S\{(ab + a) + b\} = \\ = S\{(ab + b) + a\} = (ab + b) + Sa,$$

то

$$|Sa \cdot Sb,\ a \cdot Sb + Sb| = |Sa \cdot b,\ a \cdot b + b|$$

и т. д.

Доказательство 5.12 остается неизменным.

Для доказательства 5.14, 5.15 и 5.151 мы замечаем, что

$$|a \cdot Sb,\ (Sb)a| = |ab + a,\ ba + a| = |ab,\ ba|,$$

$$|a(b + Sc),\ ab + a \cdot Sc| = \\ = |a(b + c) + a,\ (ab + ac) + a| = |a(b + c),\ ab + ac|,$$

$$|a(b \cdot Sc),\ ab \cdot Sc| = |a(bc) + ab,\ (ab)c + ab| = |a(bc),\ (ab)c|$$

и т. д. Схема

$$\frac{F(x) + G(x) = 0}{F(x) = 0}$$

доказывается с помощью равенств 5.09, 5.04, из которых

вытекает

$$\{F(x)+G(x)\}\dot{-}G(x)=F(x)$$

и

$$0\dot{-}G(x)=0.$$

Для доказательства схемы E_2

$$\frac{F(0)=0,\ F(Sx)=0}{F(x)=0}$$

мы полагаем $\Phi(0)=0$, $\Phi(Sx)=\Phi(x)+F(x)$, так что $\Phi(SSx)=\Phi(Sx)$, откуда получаем $\Phi(Sx)=\Phi(S0)=0$ и, следовательно, $\Phi(x)+F(x)=0$, откуда вытекает $F(x)=0$.

Доказательство 5.13 в $\mathscr{R}^*$ получается по E_2 так же, как и в $\mathscr{R}$, а доказательство 5.16 остается неизменным.

Следовательно, доказательства схем индукции I_1, I_2, I_3 и схемы подстановки тоже непосредственно переносятся из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}^*$.

Остается только доказать схему U_1:

$$\frac{\begin{array}{l}F(0)=G(0)\\ F(Sx)=H(x,\ F(x))\\ G(Sx)=H(x,\ G(x))\end{array}}{F(x)=G(x)}.$$

Полагаем $\Phi(x)=|F(x),\ G(x)|$, тогда $\Phi(0)=0$ и по схеме подстановки

$$\{1\dot{-}\Phi(x)\}|H(t,\ F(x)),\ H(t,\ G(x))|=0,$$

откуда

$$\{1\dot{-}\Phi(x)\}|H(x,\ F(x)),\ H(x,\ G(x))|=0$$

и, следовательно,

$$\{1\dot{-}\Phi(x)\}\Phi(Sx)=0,$$

откуда вытекает $\Phi(x)=0$ и поэтому $f(x)=g(x)$.

Доказательство равенства 5.01 в $\mathscr{R}$ поэтому верно и в $\mathscr{R}^*$.

Очевидно, что мы можем взять равенство $(a\dot{-}b)\dot{-}1=(a\dot{-}1)\dot{-}b$ в качестве аксиомы в $\mathscr{R}^*$ вместо $Sa\dot{-}Sb=a\dot{-}b$. Систему $\mathscr{R}^*$ можно модифицировать дальше, взяв схему

$$S\qquad\frac{a\dot{-}b=0}{a+(b\dot{-}a)=b}$$

вместо аксиомы A, в предположении, что мы добавляем аксиому

$$0\dot{-}1=0.$$

В самом деле, в силу S и Sb_2

$$\frac{a\dot{-}b=0,\ b\dot{-}a=0}{a=b}.$$

Для доказательства $0\dot{-}a=0$ мы используем $0\dot{-}Sa=(0\dot{-}a)\dot{-}1=(0\dot{-}1)\dot{-}a=0\dot{-}a$ и $0\dot{-}0=0$ (вместо аксиомы A).

Наконец, равенство $a+(b\dot{-}a)=b+(a\dot{-}b)$ доказывается точно так же, как в $\mathscr{R}$.

ГЛАВА VI

СВЕДЕНИЯ К ПРИМИТИВНОЙ РЕКУРСИИ

Сведения к примитивной рекурсии. Возвратная рекурсия. Рекурсия с подстановкой вместо параметра. Одновременная рекурсия. Схема обобщенной индукции. Перестановка.

6. *Возвратная рекурсия*

Имеется много видов рекурсивных определений, которые, хотя по форме они сильно отличаются от примитивной рекурсии, можно на самом деле преобразовать в примитивную рекурсию.

Рассмотрим, например, последовательность $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., в которой $f(0)=a$, $f(1)=b$, $f(2)=f(1)+f(0)=a+b$, $f(3)=f(2)+f(1)=a+2b$ и т. д. Общая закономерность этой последовательности такова: $f(n+1)=f(n)+f(n\dot{-}1)$, так что $f(n+1)$ зависит не только от $f(n)$, но также и от $f(n\dot{-}1)$.

Для того чтобы показать, что эту последовательность $f(n)$ можно также получить одной примитивной рекурсией, мы вводим функцию

$$g(n)=\prod_{r\leqslant n}\mathfrak{p}_r^{f(r)},$$

так что $f(n)$ равно $\nu(g(n), n)$ — показателю наибольшей степени простого числа $\mathfrak{p}_n$, которое делит $g(n)$.

Пусть $\gamma(n, b)=\nu(b, n)+\nu(b, n\dot{-}1)$, так что

$$\gamma(n, g(n))=f(n)+f(n\dot{-}1)=f(n+1).$$

Тогда

$$g(n+1)=\mathfrak{p}_{n+1}^{f(n+1)}\cdot g(n)=\mathfrak{p}_{n+1}^{\gamma(n, g(n))}\cdot g(n),$$

так что $g(n)$ примитивно рекурсивна и поэтому $f(n)$ тоже примитивно рекурсивна.

Функция $\prod_{r\leqslant n}\mathfrak{p}_r^{f(r)}$ называется *возвратной* функцией для $f(n)$, а рекурсия, в которой $f(n+1)$ зависит не только от $f(n)$, но также и от значений $f(x)$ при $x<n$, называется *возвратной* рекурсией. Описанный выше метод преобразования возвратной рекурсии в примитивную применим и в общем случае. Так, если $\beta(n, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ — примитивно рекурсивная функция от $(k+1)$ переменных и если $\lambda_r(n)$ примитивно рекурсивна и удовлетворяет неравенствам $\lambda_r(n)\leqslant n$ для $r=1, 2, \ldots, k$, то возвратная рекурсия

$$f(n+1)=\beta(n, f(\lambda_1(n)), f(\lambda_2(n)), \ldots, f(\lambda_k(n)))$$

преобразуется в примитивную рекурсию с помощью возвратной функции

$$g(n)=\mathfrak{p}_0^{f(0)}\cdot\mathfrak{p}_1^{f(1)}\cdot\ \ldots\ \cdot\mathfrak{p}_n^{f(n)},$$

т. е.

$$g(0)=\mathfrak{p}_0^{f(0)},\quad g(n+1)=g(n)\cdot\mathfrak{p}_{n+1}^{f(n+1)}.$$

Действительно, если выполняется следующее равенство: $\gamma(n, b)=\beta(n, \nu(b, \lambda_1(n)), \nu(b, \lambda_2(n)), \ldots, \nu(b, \lambda_k(n)))$, так что γ примитивно рекурсивна, то

$$\gamma(n, g(n))=\beta(n, f(\lambda_1(n)), f(\lambda_2(n)), \ldots, f(\lambda_k(n)))=f(n+1)$$

и

$$g(n+1)=g(n)\cdot\mathfrak{p}_{n+1}^{f(n+1)}=g(n)\cdot\mathfrak{p}_{n+1}^{\gamma(n, g(n))},$$

т. е. $g(n)$ определяется примитивной рекурсией, а $f(n+1)$ получается подстановкой из γ и g.

Аналогично, если $\lambda(n)$ примитивно рекурсивна и

$$f(0)=1,\quad f(n+1)=\prod_{x\leqslant n}(f(x)+\lambda(x)),$$

то мы берем $g(n)$, как и выше, и

$$\gamma(n, b)=\prod_{x\leqslant n}\{\nu(b, x)+\lambda(x)\},$$

так что $\gamma(n, g(n))=f(n+1)$ и

$$g(n+1)=g(n)\cdot\mathfrak{p}_{n+1}^{\gamma(n, g(n))},$$

как и прежде.

6.1. *Рекурсия с подстановкой вместо параметра*

Другая рекурсия, сводимая к примитивной рекурсии, — это рекурсия с подстановкой вместо параметра. В качестве примера такой рекурсии мы рассмотрим

$$f(0, a) = a, \quad f(n+1, a) = f(n, \gamma(n, a)).$$

Для определения $f(n+1, a)$ из второго из этих равенств нам надо знать значения $f(n, x)$ не только для $x = a$, но и для значения x, равного $\gamma(n, a)$, которое, конечно, изменяется с изменением n.

Метод сведения этой рекурсии (по Р. Петер) представляет собой значительный интерес помимо настоящего приложения. Вычисляя последовательно значения $f(n, a)$ для $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д., мы определяем последовательность термов

$$a, \quad \gamma(0, a), \quad \gamma(0, \gamma(1, a)), \quad \gamma(0, \gamma(1, \gamma(2, a)))$$

и т. д., которые строятся повторной подстановкой вместо параметра. Основная идея упомянутого сведения состоит в распутывании этих подстановок с помощью функции $\psi(n, a)$ со следующими свойствами:

для любого n мы можем найти p, q и для любых p, q мы можем найти n так, чтобы

$$\psi(n+1, a) = \gamma(p, \psi(q, a)).$$

При подходящем начальном условии, вроде $\psi(0, a) = a$, эта функция преобразует любой терм вида $\gamma(0, \gamma(1, \gamma(2, a)))$ последовательно в $\gamma(0, \gamma(1, \gamma(2, \psi(0, a))))$, $\gamma(0, \gamma(1, \psi(h_1, a)))$, $\gamma(0, \psi(h_2, a))$ и, наконец, в $\psi(h_3, a)$ при подходящих h_1, h_2, h_3 таких, что если ψ можно определить примитивной рекурсией, так же как и вспомогательную функцию h_r, то это же можно сделать и для $f(n, a)$.

Для того чтобы построить такую функцию $\psi(n, a)$, мы заметим, что $n+1$ для любого n единственным образом представимо в виде $2^p(2q+1)$; действительно, здесь $p = \nu(n+1, 0)$ и $q = [(n+1)/2^{p+1}]$, так что p и q являются примитивно рекурсивными функциями n (и, конечно, n является примитивно рекурсивной функцией p и q). Мы определяем

$$\psi(0, a) = a, \quad \psi(n+1, a) = \gamma(p, \psi(q, a))$$

(где p, q — только что введенные функции n); поскольку $q < n+1$, то это возвратная рекурсия, поэтому ψ примитивно рекурсивна. Для завершения преобразования остается показать, что имеется примитивно рекурсивная $k(n)$ такая, что $f(n, a) = \psi(k(n), a)$; но сначала мы введем $g(n, a)$ такую, что

$$\psi(n, \psi(s, a)) = \psi(g(n, s), a).$$

Для определения $g(n, a)$ мы рассмотрим соотношения

$$\psi(g(n+1, s), a) = \psi(n+1, \psi(s, a)) = \gamma(p, \psi(q, \psi(s, a))) =$$
$$= \gamma(p, \psi(g(q, s), a)) = \psi(2^p(2g(q, s)+1), a),$$

которые делают ясным определение с помощью возвратной рекурсии

$$g(n+1, s) = 2^{p+1} \cdot g(q, s) + 2^p;$$

определение g завершается, если положить $g(0, s) = s$. Аналогично, для определения $k(n)$ мы рассматриваем

$$\psi(k(n+1), a) = f(n+1, a) = f(n, \gamma(n, a)) = \psi(k(n), \gamma(n, a)) =$$
$$= \psi(k(n), \psi(2^n, a)) = \psi(g(k(n), 2^n), a),$$

откуда $k(n+1) = g(k(n), 2^n)$, что вместе с начальным условием $k(0) = 0$ является примитивно рекурсивным определением функции $k(n)$.

6.2. *Одновременные рекурсии*

В качестве последней иллюстрации косвенного определения примитивно рекурсивной функции мы рассмотрим *одновременные рекурсии*

$$f(0) = g(0) = 0,$$
$$f(n+1) = P(f(n), g(n)),$$
$$g(n+1) = Q(f(n), g(n)),$$

где P и Q примитивно рекурсивны.

Здесь снова мы вводим вспомогательную функцию

$$h(n) = 2^{f(n)} \cdot 3^{g(n)},$$

так что $f(n) = \nu(h(n), 0)$; $g(n) = \nu(h(n), 1)$. Остается показать, что $h(n)$ примитивно рекурсивна. Полагая

$p(x) = P(v(x, 0), v(x, 1))$, $q(x) = Q(v(x, 0), v(x, 1))$ и $\mu(x) = 2^{p(x)} \cdot 3^{q(x)}$, имеем

$$f(n+1) = P(f(n), g(n)) = p(h(n)),$$
$$g(n+1) = Q(f(n), g(n)) = q(h(n))$$

и, следовательно,

$$h(n+1) = 2^{f(n+1)} \cdot 3^{g(n+1)} = 2^{p(h(n))} \cdot 3^{q(h(n))} = \mu(h(n)),$$

что вместе с начальным условием $h(0) = 1$ завершает примитивно рекурсивное определение $h(n)$ в терминах данных функций $P(u, v)$, $Q(u, v)$.

6.3. *Обобщенные схемы индукции*

6.31. Теперь мы рассмотрим некоторые обобщения индукции, доказуемые в $\mathscr{R}$. Первым из них является схема

$$\mathrm{I_g}\quad \begin{matrix}(\mathrm{i}) \\ (\mathrm{j}) \\ (\mathrm{k})\end{matrix}\quad \frac{\begin{matrix}P(a, 0) \\ P(f(a, n), n) \to P(a, Sn)\end{matrix}}{P(a, n)}.$$

Эта схема очевидно похожа на рекурсию с подстановкой вместо параметра, и доказательство этой схемы зависит, по существу, от сведéния рекурсии с подстановкой вместо параметра к примитивной рекурсии. В приводимом ниже доказательстве эта связь, однако, не выявляется, поскольку упомянутое сведéние проделано заранее.

Для подготовки к доказательству мы установим равенства:

(l_1) $Sn \leqslant b \to n = b \dot{-} S(b \dot{-} Sn)$,

(l_2) $Sn \leqslant b \to S(b \dot{-} Sn) = b \dot{-} n$

и схему доказательства

$$(\mathrm{m})\quad \frac{\begin{matrix}p \to q \\ p \to (r \to s)\end{matrix}}{(q \to r) \to (p \to s)}.$$

Равенство (l_1) очевидно при b, равном 0; с Sb вместо b это равенство переходит в равенство

$$n \leqslant b \to n = b \dot{-} (b \dot{-} n),$$

которое следует по теореме о подстановке (3.43) из $b \dot{-} (b \dot{-} n) = n \dot{-} (n \dot{-} b)$ (пример 2.421). Для доказательства (l_2) мы имеем

$$\begin{aligned} Sn \leqslant b &\to b = Sn + (b \dot{-} Sn) \\ &\to b = n + S(b \dot{-} Sn) \\ &\to b \dot{-} n = S(b \dot{-} Sn). \end{aligned}$$

Для доказательства схемы (m) мы замечаем, что ее посылки эквивалентны $\sim p \vee q$ и $\sim p \vee \sim r \vee s$, и, следовательно, из них вытекает $\sim p \vee s \vee (\sim r \,\&\, q)$, что в свою очередь эквивалентно $(q \to r) \to (p \to s)$, что и требуется получить.

Для доказательства схемы $\mathrm{I_g}$ мы определим $g(n, a, b)$ следующей примитивной рекурсией:

$$g(0, a, b) = a,$$
$$g(Sn, a, b) = f(g(n, a, b), b \dot{-} Sn).$$

Из посылки (i) следует $P(g(b, a, b), 0)$, а отсюда следует

(n) $0 \leqslant b \to P(g(b \dot{-} 0, a, b), 0)$.

Из (l_1) и теоремы о подстановке (3.43) мы находим

$$Sn \leqslant b \to \{f(g(b \dot{-} Sn, a, b), n) = f(g(b \dot{-} Sn, a, b), b \dot{-} S(b \dot{-} Sn))\}$$

и, следовательно, в силу (l_2)

$$Sn \leqslant b \to \{f(g(b \dot{-} Sn, a, b), n) = g(b \dot{-} n, a, b)\}.$$

Но в силу посылки (j)

$$P(f(g(b \dot{-} Sn, a, b), n), n) \to P(g(b \dot{-} Sn, a, b), Sn),$$

откуда мы выводим

$$Sn \leqslant b \longrightarrow \{P(g(b \dot{-} n, a, b), n) \longrightarrow P(g(b \dot{-} Sn, a, b), Sn)\},$$

а поскольку $Sn \leqslant b \to n \leqslant b$, то по схеме (m) следует, что

$$\{(n \leqslant b) \to P(g(b \dot{-} n, a, b), n)\} \to \{(Sn \leqslant b) \to P(g(b \dot{-} Sn, a, b), Sn)\},$$

что вместе с (n) завершает индуктивное доказательство

$$n \leqslant b \to P(g(b \dot{-} n, a, b), n),$$

а подставляя n вместо b, мы выводим

$$n \leqslant n \to P(a, n),$$

откуда следует (k), поскольку доказуемо $n \leqslant n$.

6.32. Единственную посылку гипотезы (j) в схеме I_g можно заменить на последовательность посылок, фактически даже на последовательность переменной длины, что приводит к схеме:

$$I'_g \quad \begin{matrix}(i') \\ (j') \\ (k')\end{matrix} \quad \begin{matrix} P(a, 0) \\ A_x^{k(a,n)} P(f(x, a, n), n) \to P(a, Sn) \\ P(a, n)\end{matrix}$$

(посылка (j′) является конъюнкцией $k(a, n)$ членов $P(f_1, n) \& P(f_2, n) \& \ldots \& P(f_k, n)$, где f_r обозначает $f(r, a, n)$).

Для доказательства схемы I'_g мы сначала вводим функцию

$$F(a, n) = \sum_{x \leqslant k(a,n)} f(x, a, n),$$

которая в силу примера 3.193 удовлетворяет соотношению

$$x \leqslant k(a, n) \to \{f(x, a, n) \leqslant F(a, n)\}.$$

Затем мы определяем

$$G(0, n) = F(0, n)$$
$$G(Sa, n) = G(a, n) + F(Sa, n),$$

откуда легко следует, что

$$F(a, n) \leqslant G(a, n) \quad \text{и} \quad G(a, n) \leqslant G(Sa, n).$$

Из второго неравенства мы выводим с помощью индукции по m, что

$$G(a, n) \leqslant G(a + m, n),$$

а отсюда, подставив $b \dot{-} a$ вместо m и используя импликацию

$$a \leqslant b \to (a + (b \dot{-} a) = b)$$

мы выводим

$$(1') \quad a \leqslant b \to \{G(a, n) \leqslant G(b, n)\}.$$

Пусть $p(a, n)$ — представляющая функция $P(a, n)$ и пусть $Q(a, n)$ обозначает равенство $\sum_{x \leqslant a} p(x, n) = 0$, так что имеют место эквивалентности

$$Q(a, n) \leftrightarrow A_x^a P(x, n),$$
$$Q(0, n) \leftrightarrow P(0, n), \quad Q(Sa, n) \leftrightarrow Q(a, n) \& P(Sa, n).$$

Отсюда следует, что $Q(a, n) \to P(a, n)$ и $Q(Sa, n) \to Q(a, n)$. Рассматривая по очереди случаи, когда вместо a подставлен 0 и когда вместо a подставлено Sa, мы без труда доказываем

$$Q(a, n) \to Q(a \dot{-} 1, n),$$

а отсюда индукцией по m

$$Q(a, n) \to Q(a \dot{-} m, n).$$

Взяв m равным $a \dot{-} b$ и используя импликацию $b \leqslant a \to \{a \dot{-} (a \dot{-} b) = b\}$, мы выводим

$$b \leqslant a \to \{Q(a, n) \to Q(b, n)\},$$

а поэтому из (1′) получаем

$$(m') \quad b \leqslant a \to \{Q(G(a, n), n) \to Q(G(b, n), n)\},$$

а так как

$$x \leqslant k(b, n) \to \{f(x, b, n) \leqslant G(b, n)\},$$

то

$$x \leqslant k(b, n) \to \{Q(G(b, n) \to Q(f(x, b, n), n)\},$$

откуда мы по очереди выводим

$$x \leqslant k(b, n) \to \{Q(G(b, n), n) \to P(f(x, b, n), n)\},$$
$$Q(G(b, n), n) \to A_x^{k(b,n)} P(f(x, b, n), n)$$

и затем в силу посылки (j′)

$$Q(G(b, n), n) \to P(b, Sn).$$

Отсюда в силу (m′)

$$b \leqslant a \to \{Q(G(a, n), n) \to P(b, Sn)\},$$

откуда по очереди следует

$$Q(G(a, n), n) \to A_x^a P(x, Sn)$$

и

(n′) $Q(G(a, n), n) \to Q(a, Sn)$.

Наконец, из эквивалентностей

$$Q(0, 0) \leftrightarrow P(0, 0), \quad Q(Sa, 0) \leftrightarrow Q(a, 0) \& P(Sa, 0)$$

и посылки (i′) мы выводим

$$Q(0, 0) \quad \text{и} \quad Q(a, 0) \to Q(Sa, 0),$$

что доказывает $Q(a, 0)$.

Из $Q(a, 0)$ и (n′) мы с помощью I_g выводим (k′), доказав тем самым схему I_g'.

6.34. Последним обобщением индукции, которое мы рассмотрим, является схема:

$$I_g'' \quad \begin{array}{ll} (h'') & P(a, 0) \\ (i'') & P(f(0, n), n) \to P(0, Sn) \\ (j'') & P(f(Sa, n), n) \to \{P(a, Sn) \to P(Sa, Sn)\} \\ (k'') & \hline \\ & P(a, n) \end{array}.$$

Мы начинаем с определения

$$g(0, n) = f(0, n),$$
$$g(Sa, n) = g(a, n) + f(Sa, n),$$

из которого следует, что

$$g(a, n) \leqslant g(Sa, n)$$

и

$$f(a, n) \leqslant g(a, n)$$

и, значит,

(1″) $b \leqslant a \to \{g(b, n) \leqslant g(a, n)\}$.

Мы определяем $Q(a, n)$, как и выше, так что доказуемо $Q(a, 0)$ и, следовательно, доказуемо также

$$Q(a, n) \rightleftarrows P(a, n).$$

Следующим шагом доказательства является установление импликации

(m″) $Q(g(a, n), n) \to Q(a, Sn)$.

Случай $g = 0$ есть посылка (i″).

Для завершения индуктивного доказательства (m″) мы используем схему

$$\frac{A \to B, \qquad A \to D}{\{A \& (B \to C)\} \to (C \& D)},$$

которая доказывается, поскольку, как легко заметить, $\{A \& (B \to C)\} \to (C \& D)$ эквивалентно $\sim A \vee (B \& \sim C) \vee \vee (C \& D)$ и равенство

$$(1 \dot{-} a)(b + (1 \dot{-} c))(c + d) = 0$$

следует из равенства $(1 \dot{-} a)b = 0$, $(1 \dot{-} a)d = 0$.

Мы подставляем $Q(g(Sa, n), n)$, $Q(g(a, n), n)$ вместо A, B и $Q(a, Sn)$, $P(f(Sa, n), n)$ — вместо C, D.

Импликация $A \to B$ следует из (l″), поскольку $g(Sa, n) \geqslant g(a, n)$ и, аналогично, из $f(Sa, n) \leqslant g(Sa, n)$ следует

$$Q(g(Sa, n), n) \to Q(f(Sa, n), n);$$

но

$$Q(f(Sa, n), n) \to P(f(Sa, n), n)$$

и, следовательно, $Q(g(Sa, n), n) \to P(f(Sa, n), n)$, т. е.

$$A \to D.$$

Из $A \to B$, $A \to D$ мы выводим $\{A \& (B \to C)\} \to (C \& D)$, т. е. $Q(g(Sa, n), n) \& \{Q(g(a, n), n) \to Q(a, Sn)\} \to \to Q(a, Sn) \& P(f(Sa, n), n)$. Но

$$\begin{aligned} &Q(a, Sn) \& P(f(Sa, n), n) \to \\ &\quad \to Q(a, Sn) \& P(a, Sn) \& P(f(Sa, n), n) \to \\ &\quad \to P(a, Sn) \& P(f(Sa, n), n) \& Q(a, Sn) \to \\ &\quad \to P(Sa, Sn) \& Q(a, Sn) \to [\text{в силу посылки (j″)}] \\ &\quad \to Q(Sa, Sn). \end{aligned}$$

Поэтому мы доказали

$$[\{Q(g(a, n), n) \to Q(a, Sn)\} \& Q(g(Sa, n), n)] \to \to Q(Sa, Sn),$$

что эквивалентно

$$\{Q(g(a, n), n) \to Q(a, Sn)\} \to$$
$$\to \{Q(g(Sa, n), n) \to Q(Sa, Sn)\},$$

а это завершает индуктивное доказательство импликации (m″).

Из $Q(a, 0)$ и (m″) мы по I_g выводим $Q(a, n)$, а из $Q(a, n)$ мы выводим $P(a, n)$, чем доказывается I_g''.

6.4. *Перестановка*

В этом разделе мы определим с помощью рекурсии процессы транспозиции и перестановки и применим полученные результаты для доказательства того, что сумма переменного числа слагаемых

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(p+1)$$

не зависит от их порядка.

Мы начнем с определения функции $\tau(k, n)$ в терминах $a(k)$ с помощью следующей рекурсии:

$$\tau(k, 0) = a(k), \quad \tau(k, n+1) = \tau(k, n) + a(n+k+1).$$

С помощью индукции по r получаем, что

6.41. $\tau(p, q) + \tau(p+q+1, r) = \tau(p, p+q+r+1)$.

Обозначив $1 \dot{-} (1 \dot{-} x)$ через $\alpha(x)$, мы определяем

$$\sigma(p, q) = \tau(p, q \dot{-} p) \cdot \alpha(Sq \dot{-} p),$$

так что

$$\sigma(p, p+n) = \tau(p, n),$$
$$\sigma(q+n+1, q) = 0$$

и

$$\sigma(p, p+q+1) = \sigma(p, p+q) + a(p+q+1).$$

Теперь мы заметим, что

$$\sigma(p, p+q) + \sigma(p+q+1, p+q+r) = \sigma(p, p+q+r),$$

так как при r, равном 0, это равенство очевидно, а при $r+1$ вместо r это равенство переходит в 6.41.

Затем мы докажем равенство

6.42. $\sigma(1, p+q+1) = \sigma(1, p) + a(p+1) + \sigma(p+2, p+q+1)$.

Сначала рассмотрим это равенство при q, равном 0, т. е.

6.421. $\sigma(1, p+1) = \sigma(1, p) + a(p+1)$.

Это равенство очевидно при $p = 0$, а при $p+1$ вместо p оно переходит в

$$\sigma(1, p+2) = \sigma(1, p+1) + a(p+2),$$

что эквивалентно равенству $\tau(1, p+1) = \tau(1, p) + a(p+2)$, которое следует из определения τ.

При $q+1$ вместо q (используя 6.421) равенство 6.42 эквивалентно равенству

$$\tau(1, p+q+1) = \tau(1, p) + \tau(p+2, q),$$

которое следует из 6.41, и это завершает доказательство 6.42.

6.422. Из предыдущего следует

$$\sigma(1, r) + a(r+1) + \sigma(r+2, q+r+1) + a(q+r+2) +$$
$$+ \sigma(q+r+3, p+q+r+2) = \sigma(1, q+r+1) + a(q+r+2) +$$
$$+ \sigma(q+r+3, p+q+r+2) = \sigma(1, p+q+r+2).$$

6.43. Для определения перестановки $a(r)$ и $a(r+s)$ мы вводим функцию

$$\theta(r, s, k) = [k + \{(r+s) \dot{-} k\} | k, r|^*] \dot{-} (k \dot{-} r) | r+s, k|^*,$$

где $|x, y|^* = 1 \dot{-} \alpha(x, y)$, так что

$$\theta(r, s, k) = k, \quad \text{если} \quad k \neq r, \ k \neq r+s,$$
$$= r+s, \quad \text{если} \quad k = r,$$
$$= r, \quad \text{если} \quad k = r+s.$$

Тогда, если $b(r, s, k) = a(\theta(r, s, k))$, то

$$b(r, s, k) = a(k), \quad \text{если} \quad k \neq r, \ k \neq r+s,$$
$$= a(r+s), \quad \text{если} \quad k = r,$$
$$= a(r), \quad \text{если} \quad k = r+s.$$

Для построения суммы $a(1)+a(2)+\ldots+a(n)$, в которой переставлены $a(r)$ и $a(r+s)$, мы вводим функции $\tau^*(r, s, k, n)$ и $\sigma^*(r, s, p, q)$ следующими равенствами:

$$\tau^*(r, s, k, 0) = b(r, s, k),$$
$$\tau^*(r, s, k, n+1) = \tau^*(r, s, k, n) + b(r, s, n+k+1),$$
$$\sigma^*(r, s, p, q) = a(Sq \dot{-} p) \cdot \tau^*(r, s, p, q \dot{-} p).$$

Точно так же, как и выше в 6.422, получаем, что

6.431.

$$\sigma^*(r+1, q+1, 1, r) + b(r+1, q+1, r+1) + \sigma^*(r+1, q+1, r+2, r+q+1) + b(r+1, q+1, r+q+2) + \sigma^*(r+1, q+1, r+q+3, r+q+p+2) = \sigma^*(r+1, q+1, 1, r+q+p+2).$$

6.44. Далее мы докажем следующие три равенства:

6.45. $\sigma^*(r+1, q+1, 1, r) = \sigma(1, r)$;

6.46. $\sigma^*(r+1, q+1, r+2, r+q+1) = \sigma(r+2, r+q+1)$;

6.47. $\sigma^*(r+1, q+1, r+q+3, r+q+p+2) = \sigma(r+q+3, r+p+q+2)$.

Сначала рассмотрим 6.45. При r равном 0, это равенство очевидно, а при $r+1$ вместо r оно эквивалентно

6.451. $\tau^*(r+2, q+1, 1, r) = \tau(1, r)$.

Для доказательства 6.451 мы рассмотрим равенство

6.452. $\tau^*(r+k+2, q+1, 1, r) = \tau(1, r)$,

которое обозначим через $P(k, r)$. Тогда $P(k, 0)$ очевидно, ибо

$$\tau^*(r+k+2, q+1, 1, 0) = b(r+k+2, q+1, 1) = a(1) = \tau(1, 0).$$

Далее, поскольку

$$\tau^*(r+k+3, q+1, 1, r+1) = \tau^*(r+k+3, q+1, 1, r) + a(r+2)$$

и

$$\tau(1, r+1) = \tau(1, r) + a(r+2),$$

то

$$P(k+1, r) \to P(k, r+1)$$

и $P(k, r)$ следует по обобщенной схеме индукции I_g. Отсюда следует $P(0, r)$, а это и есть равенство 6.451, что завершает доказательство 6.45.

Доказательство 6.46 проходит аналогично; при $q=0$ это равенство очевидно. При $q+1$ вместо q это равенство эквивалентно равенству

6.461. $\tau^*(r+1, q+2, r+2, q) = \tau(r+2, q)$,

которое следует из

6.462. $\tau^*(r+1, q+k+2, r+2, q) = \tau(r+2, q)$.

Обозначим 6.462 через $R(k, q)$. Мы легко устанавливаем

$$R(k, 0) \text{ и } R(k+1, q) \to R(k, q+1),$$

откуда $R(k, q)$ следует по I_g, что завершает доказательство 6.46.

Доказательство 6.47 гораздо проще.

При $p=0$ это равенство очевидно; при $p+1$ вместо p это равенство эквивалентно

$$\tau^*(r+1, q+1, r+q+3, p) = \tau(r+q+3, p),$$

а последнее доказывается индукцией по p.

Из 6.422, 6.431 и 6.45—6.47 непосредственно следует

6.48. $\sigma^*(r+1, q+1, 1, r+q+p+2) = \sigma(1, r+p+q+2)$,

поскольку

$$b(r+1, q+1, r+1) = a(r+q+2),$$
$$b(r+1, q+1, r+q+2) = a(r+1)$$

и для любых j, k, l, m, n

$$j+k+l+m+n = j+m+l+k+n.$$

Равенство 6.48 эквивалентно равенству

6.481. $\tau^*(r+1, q+1, 1, r+q+p+1) = \tau(1, r+q+p+1)$

и, как мы сейчас докажем, эквивалентно также

6.482. $\{r \geqslant 1 \,\&\, s \geqslant 1 \,\&\, n \geqslant (r + s) \dot{-} 1\} \rightarrow$
$\rightarrow \{\tau^*(r, s, 1, n) = \tau(1, n)\}.$

Обозначим равенство $\tau^*(r, s, 1, n) = \tau(1, n)$ через $R(r, s, n)$. Тогда в силу 6.481 имеет место $R(r + 1, q + 1, r + q + p + 1)$ и поэтому выполняется $R(r + 1, q + 1, r + 1 + q + 1 + p)$; подставляя $r \dot{-} 1$ вместо r, мы выводим

$$R(1 + (r \dot{-} 1), q + 1, 1 + (r \dot{-} 1) + q + 1 + p),$$

а отсюда по теореме о подстановке, используя равенство $1 + (r \dot{-} 1) = r + (1 \dot{-} r)$, получаем

$$(1 \dot{-} r = 0) \rightarrow R(r, q + 1, r + 1 + q + p).$$

Подставляя $s \dot{-} 1$ вместо q, имеем

$$\{(1 \dot{-} s) = 0\} \rightarrow \{(1 \dot{-} r) = 0 \rightarrow R(r, s, r + (s \dot{-} 1) + p)\}.$$

Наконец, подставляя $n \dot{-} \{r + (s \dot{-} 1)\}$ вместо p, мы выводим

$$\{(r + (s \dot{-} 1)) \dot{-} n = 0\} \rightarrow [(1 \dot{-} s) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \{1 \dot{-} r = 0 \rightarrow R(r, s, n)\}],$$

что эквивалентно 6.482.

Равенство 6.482 доказывает, что сумма n членов не меняется при перестановке любых двух из них.

Поскольку перестановку можно рассматривать как результат транспозиций, остается только рекурсивно определить последовательность транспозиций. Если даны три функции, $r(n)$, $s(n)$ и $a(n)$, то мы определяем

$$B(0, k) = a(k),$$
$$B(n + 1, k) = B(n, \theta(r(n), s(n), k)),$$

поэтому в силу 6.1 B примитивно рекурсивна.

При любом n $B(n + 1, k)$ является транспозицией $B(n, k)$, так что

$$B(n+1, k) = B(n, k) \quad \text{если } k \neq r(n),\ k \neq r(n) + s(n),$$
$$= B(n, r(n) + s(n)), \text{ если } k = r(n),$$
$$= B(n, r(n)), \quad \text{если } k = r(n) + s(n),$$

Определим функцию суммы $T(n, k, p)$ с помощью равенств

$$T(n, k, 0) = B(n, k),$$
$$T(n, k, p + 1) = T(n, k, p) + B(n, k + p + 1),$$

затем, взяв в доказательстве 6.482 $B(n, k)$ вместо $a(k)$ и $B(n + 1, k)$ вместо $b(r, s, k)$ при $r = r(n)$, $s = s(n)$, мы получаем $T(n + 1, 1, p) = T(n, 1, p)$, и, следовательно, равенство $T(n, 1, p) = T(0, 1, p) = \tau(1, p)$, которое показывает, что сумма $a(1) + a(2) + \ldots + a(p + 1)$ не изменяется при изменении порядка ее членов.

ГЛАВА VII

УСТРАНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Устранение параметров. Исходные функции и порождение всех примитивно рекурсивных функций с помощью единственной схемы $Fx = A^x 0$. Нумерующая функция. Дважды рекурсивная функция, которая не может быть определена только примитивными рекурсиями и подстановками.

7. В этой главе мы произведем устранение параметров в схеме определения с помощью рекурсии, на которое мы ссылались в § 1.6.

Это устранение осуществляется с помощью подходящей нумерации всех пар натуральных чисел. Очень простая нумерация, достаточная для первых шагов этого устранения, дается функцией $J(u, v) = (u + v)^2 + u$. Для того чтобы показать, что $J(u, v)$ сопоставляет различным упорядоченным парам различные числа, мы вводим по очереди следующие функции:

$$Ex = x \dot{-} (\mathrm{Rt}\, x)^2,$$

где $\mathrm{Rt}\, x$ — функция, определенная в § 1.6 как наибольшее целое число, квадрат которого не превосходит x,

$$Ux = Ex, \quad Vx = \mathrm{Rt}\, x \dot{-} Ex;$$

Ex — то число, на которое x превышает ближайший квадрат, содержащийся в нем.

Так как

$$(u + v)^2 \leqslant J(u, v) < (u + v + 1)^2,$$

то

$$\mathrm{Rt}\, J(u, v) = u + v$$

и, следовательно, $UJ(u, v) = u$, $VJ(u, v) = v$. Эти равенства доказывают, что $J(u, v)$ ставит в соответствие различным упорядоченным парам различные числа, ибо

если $J(u, v) = J(u', v')$, то

$$u = UJ(u, v) = UJ(u', v') = u'$$

и

$$v = VJ(u, v) = VJ(u', v') = v'.$$

7.1. Мы начнем с того, что покажем, как можно устранить один параметр. Рассмотрим рекурсию

$$\mathrm{R} \quad f(u, v, 0) = a(u, v), f(u, v, Sx) = b(u, v, x, f(u, v, x)),$$

в которой могут быть еще параметры, кроме тех, которые обозначены через u и v. Мы переходим к получению этой функции f из функций, определенных рекурсией с меньшим числом параметров.

Пусть функция $F(w, x)$ определяется следующей рекурсией:

$$\mathrm{R}' \quad F(w, 0) = A(w), \quad F(w, Sx) = B(w, x, F(w, x)),$$

где $A(w) = a(Uw, Vw)$, $B(w, x, y) = b(Uw, Vw, x, y)$, так что $F(w, 0) = f(Uw, Vw, 0)$ и

$$\{F(w, x) = f(Uw, Vw, x)\} \to \{F(w, Sx) = f(Uw, Vw, Sx)\},$$

что доказывает

$$F(w, x) = f(Uw, Vw, x);$$

отсюда, подставляя $J(u, v)$ вместо w, мы имеем

$$f(u, v, x) = F(J(u, v), x),$$

так что f получается подстановкой из F, а F определяется рекурсией R′, в которой содержится на один параметр меньше, чем в исходной рекурсии R.

Повторным применением этого процесса сведения мы можем получить f подстановкой из некоторой функции, определяемой рекурсией с одним параметром. Мы можем предполагать, что этой функцией в действительности является F, определенная выше с помощью R′, где функции A и B не содержат никаких других переменных, кроме указанных явно.

7.2. Далее мы покажем, что переменные w и x можно устранить из B. Определим $\varphi(w, x)$ следующей рекурсией:

$$\mathrm{R}'' \quad \varphi(w, 0) = \alpha(w), \varphi(w, Sx) = \beta(x, \varphi(w, x)),$$

где $\alpha(w) = J(w, Aw)$, $\beta(x, y) = J(Uy, B(Uy, x, Vy))$; легко видеть, что

$$\varphi(w, x) = J(w, F(w, x)),$$

поскольку это равенство выполнено при $x = 0$, а это равенство с x влечет равенство, получающееся из данного заменой x на Sx. $F(w, x)$ получается из $\varphi(w, x)$ одной подстановкой, ибо

$$F(w, x) = V\varphi(w, x).$$

Затем определим $\varphi'(w, x)$ итерацией:

I $\varphi'(w, 0) = \alpha'(w)$, $\varphi'(w, Sx) = \beta'\varphi'(w, x)$,

где $\alpha'(w) = J(0, \alpha(w))$, $\beta' y = J(SUy, \beta(Uy, Vy))$; как и раньше, мы докажем, что

$$\varphi'(w, x) = J(x, \varphi(w, x)),$$

замечая, что это равенство имеет место при $x = 0$ и что $J(SUJ(x, \varphi(w, x)), \beta(UJ(x, \varphi(w, x)), VJ(x, \varphi(w, x)))) = J(Sx, \beta(x, \varphi(w, x))) = J(Sx, \varphi(w, Sx))$, так что $\varphi'(w, x) = J(x, \varphi(w, x))$ влечет

$$\varphi'(w, Sx) = J(Sx, \varphi(w, Sx)).$$

Функция φ' определяется итерацией без параметров и

$$\varphi(w, x) = V\varphi'(w, x).$$

Это завершает сведение схемы примитивной рекурсии к следующему простому виду:

$$f(w, 0) = a(w), \quad f(w, Sx) = b(f(w, x)).$$

7.3. Дальнейшее упрощение может быть достигнуто, если взять

R* $F(w, 0) = w$, $F(w, Sx) = b(F(w, x))$,

так что $f(w, x) = F(a(w), x)$.

Для устранения параметра w из рекурсии R* мы введем новую нумерацию пар:

$$J(u, v) = ((u + v)^2 + u)^2 + v,$$
$$Ux = E\,\mathrm{Rt}\,x, \quad Vx = Ex,$$

Так как $((u + v)^2 + u)^2 \leqslant J(u, v) < ((u + v)^2 + u + 1)^2$, то $\mathrm{Rt}\,J(u, v) = (u + v)^2 + u$,

$$EJ(u, v) = v$$

и

$$E\,\mathrm{Rt}\,J(u, v) = u,$$

так что $UJ(u, v) = u$, $VJ(u, v) = v$.

Эта вторая нумерация пар обладает дополнительным свойством: если $ESx > 0$, то $USx = Ux$ и $VSx = SVx$, ибо если $ESx > 0$, то Sx не есть квадрат и, следовательно,

$$\mathrm{Rt}\,Sx = \mathrm{Rt}\,x,$$

откуда получаем $USx = E\,\mathrm{Rt}\,Sx = E\,\mathrm{Rt}\,x = Ux$ и

$$VSx = Sx \dot{-} (\mathrm{Rt}\,Sx)^2 = (1 + x) \dot{-} (\mathrm{Rt}\,x)^2 =$$
$$= \{x \dot{-} (\mathrm{Rt}\,x)^2\} + (1 \dot{-} \{(\mathrm{Rt}\,x)^2 \dot{-} x\}) = \{x \dot{-} (\mathrm{Rt}\,x)^2\} + 1 = SVx$$

поскольку $ESx > 0$ влечет $(\mathrm{Rt}\,Sx)^2 < Sx$ и поэтому $(\mathrm{Rt}\,x)^2 \leqslant x$, так что $(\mathrm{Rt}\,x)^2 \dot{-} x = 0$ (это равенство в силу примера 2.83 выполняется также, когда $ESx = 0$). Если теперь мы определим $G(x)$ рекурсией без параметра:

I_1 $G0 = 0$, $GSx = c(x, Gx)$,

где $c(x, y) = (1 \dot{-} ESx) \cdot USx + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} ESx)\} \cdot b(y)$, так что

$$c(x, y) = USx, \quad \text{если} \quad ESx = 0,$$
$$= b(y), \quad \text{если} \quad ESx > 0,$$

то можно показать, что

$$G(x) = F(Ux, Vx).$$

Доказательство случая $x = 0$ очевидно. Если $ESx = 0$, так что $VSx = 0$, то $F(USx, VSx) = USx = c(x, Gx) = GSx$, а если $ESx > 0$, то

$$F(USx, VSx) = F(Ux, SVx) =$$
$$= b(F(Ux, Vx)) = c(x, F(Ux, Vx))$$

и, следовательно, из допущения $G(x) = F(Ux, Vx)$ мы выводим равенство

$$G(Sx) = F(USx, VSx),$$

которое завершает доказательство. F получается из G подстановкой

$$F(u, v) = GJ(u, v).$$

Переменную x можно устранить из $c(x, y)$ точно так же, как из функции B выше. Мы определяем

$$H0 = 0, \quad HSx = dHx,$$

где $dy = J(SUy, c(Uy, Vy))$.

Докажем, что имеет место

$$Hx = J(x, Gx).$$

Доказательство случая $x = 0$ очевидно, а из допущения $Hx = J(x, Gx)$ следует

$$HSx = dHx = dJ(x, Gx) = J(Sx, c(x, Gx)) = J(Sx, GSx),$$

что и требовалось.

Таким образом, Gx получается из Hx подстановкой

$$Gx = VHx,$$

а Hx определяется схемой

$$H0 = 0, \quad HSx = dHx,$$

так что $Hx = d^x0$.

Для того чтобы выполнить описанное сведéние, мы ввели ряд вспомогательных функций, каждая из которых определима подстановкой в терминах функций

$$u + v, \quad u \dot{-} v, \quad u \cdot v, \quad \mathrm{Rt}\, u,$$

которые мы будем называть исходными функциями.

Таким образом, мы доказали, что, *располагая этими четырьмя функциями, все примитивно рекурсивные функции можно получить подстановкой и применением одной лишь схемы*

$$Fx = A^x0$$

для порождения функций одной переменной.

7.31. Можно показать, что на самом деле достаточны лишь две исходные функции

$$u + v, \quad Eu,$$

но это уменьшение числа исходных функций несущественно для наших целей и будет опущено, хотя и представляет большой интерес, ибо показывает, что все примитивно рекурсивные функции любого числа переменных можно получить всего из одной функции двух переменных.

7.4. Для построения примитивно рекурсивных функций *одной переменной* никогда не возникает необходимость определять подстановкой функции более чем одной переменной. Например, если мы можем получить функцию $f(n)$ из функции $F(x, y)$, полагая, скажем,

$$f(n) = F(g(n), h(n)),$$

где $F(x, y)$ определена в терминах данных функций $a(u, v)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ подстановкой

$$F(x, y) = a(b(x, y), c(x, y)),$$

то поскольку

$$f(n) = a(b(g(n), h(n)), c(g(n), h(n))),$$

вместо того, чтобы определять функцию двух переменных $F(x, y)$, мы могли бы определить функции одной переменной

$$\beta(n) = b(g(n), h(n)), \quad \gamma(n) = c(g(n), h(n))$$

и, следовательно, определить $f(n)$ непосредственно таким способом:

$$f(n) = a(\beta(n), \gamma(n)).$$

Следовательно, *все* примитивно рекурсивные функции одной переменной можно получить, используя лишь схемы

$$f(n) = g(n) + h(n), \quad f(n) = g(n) \dot{-} h(n), \quad f(n) = g(n) \cdot h(n),$$
$$f(n) = \mathrm{Rt}\, n, \quad f(n) = g(h(n)), \quad f(n) = g^n0.$$

7.5. Этот последний результат позволяет нам занумеровать все примитивно рекурсивные функции одной переменной.

Нумерующая функция $\varphi_m(n)$ определяется следующим образом: в качестве первых четырех функций

в нашей нумерации мы берем функции 0, n, Sn, $\mathrm{Rt}\, n$, так что

$$\varphi_0(n) = 0,\ \varphi_1(n) = n,\ \varphi_2(n) = Sn,\ \varphi_3(n) = \mathrm{Rt}\, n.$$

Затем мы поставим в соответствие операциям $+$, $\dot{-}$, $\cdot$, подстановке и рекурсии пять областей значений m. Обозначая, как и в 4.61, показатель наибольшей степени k-го нечетного простого числа в разложении n на простые множители через $\nu(n, k)$, мы связываем каждую операцию со случаями $\nu(m, 0) = 0$, 1, 2, 3 и $\nu(m, 0) > 3$ ($m > 3$). Рассмотрим теперь функцию $\varphi_m(n)$, значения которой перечислены в следующей таблице:

Условия на m	Значение $\varphi_m(n)$
$m = 0$	0
$m = 1$	n
$m = 2$	Sn
$m = 3$	$\mathrm{Rt}\, n$
$m > 3 \& \nu(m, 0) = 0$	$\varphi_{\nu(m,1)}(n) + \varphi_{\nu(m,2)}(n)$
$m > 3 \& \nu(m, 0) = 1$	$\varphi_{\nu(m,1)}(n) \dot{-} \varphi_{\nu(m,2)}(n)$
$m > 3 \& \nu(m, 0) = 2$	$\varphi_{\nu(m,1)}(n) \cdot \varphi_{\nu(m,2)}(n)$
$m > 3 \& \nu(m, 0) = 3$	$\varphi_{\nu(m,1)}(\varphi_{\nu(m,2)}(n))$
$m > 3 \& \nu(m, 0) > 3$	$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} n)\}\, \varphi_{\nu(m,1)}(\varphi_m(n \dot{-} 1))$

Мы покажем, что последовательность

$$\varphi_0(n),\ \varphi_1(n),\ \varphi_2(n),\ \ldots$$

является нумерацией всех примитивно рекурсивных функций одной переменной (с повторениями).

Эта последовательность содержит исходные функции 0, n, Sn и $\mathrm{Rt}\, n$. Если она содержит функции $g(n)$ и $h(n)$, то имеются целые p, q такие, что

$$g(n) = \varphi_p(n),\ h(n) = \varphi_q(n).$$

Если мы выберем значение m, для которого $\nu(m, 1) = p$, $\nu(m, 2) = q$, то мы будем иметь

$$\varphi_{\nu(m,1)}(n) = g(n),\ \varphi_{\nu(m,2)}(n) = h(n).$$

Таким значением m является, например,

$$2^k \cdot 3^p \cdot 5^q \cdot 7,$$

куда множитель 7 включен для получения неравенства $m > 3$. Обозначим $2^k \cdot 3^p \cdot 5^q \cdot 7$ через m_k, так что

$$\nu(m_k, 0) = k,\ \nu(m_k, 1) = p,\ \nu(m_k, 2) = q$$

и

$$m_k > 0,$$

и поэтому для значений $k = 0, 1, 2, 3$ функциями $\varphi_{m_k}(n)$ являются соответственно следующие:

$$g(n) + h(n),\quad g(n) \dot{-} h(n),\quad g(n) \cdot h(n),\quad g(h(n)),$$

а для $k > 3$

$$\varphi_{m_k}(0) = 0,\quad \varphi_{m_k}(n+1) = g(\varphi_{m_k}(n)),$$

откуда следует, что последовательность $\varphi_m(n)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, содержит *все* примитивно рекурсивные функции одной переменной.

Для удобного представления $\varphi_m(n)$ в виде единого выражения мы пишем $\delta_k(n)$ вместо $1 \dot{-} |k, n|$ и $\varepsilon_k(n)$ вместо $1 \dot{-} (k \dot{-} n)$, так что $\delta_k(n) = 1$, если $n = k$, и $\delta_k(n) = 0$ в противоположном случае; $\varepsilon_k(n)$ равен 1, если $n \geqslant k$, и нулю в противоположном случае. Тогда $\varphi_m(n)$ можно записать таким выражением:

$$\begin{aligned}
&\delta_1(m) \cdot n + \delta_2(m) \cdot Sn + \delta_3(m) \cdot \mathrm{Rt}\, n + \\
&\quad + \varepsilon_4(m) \{\delta_0(\nu(m, 0)) \cdot (\varphi_{\nu(m,1)}(n) + \varphi_{\nu(m,2)}(n)) + \\
&\quad + \delta_1(\nu(m, 0)) \cdot (\varphi_{\nu(m,1)}(n) \dot{-} \varphi_{\nu(m,2)}(n)) + \\
&\quad + \delta_2(\nu(m, 0)) \cdot (\varphi_{\nu(m,1)}(n) \cdot \varphi_{\nu(m,2)}(n)) + \\
&\quad + \delta_3(\nu(m, 0)) \cdot (\varphi_{\nu(m,1)}(\varphi_{\nu(m,2)}(n))) + \\
&\qquad + \varepsilon_4(\nu(m, 0)) \cdot \varepsilon_1(n)\, \varphi_{\nu(m,2)}(\varphi_m(n \dot{-} 1)) \}.
\end{aligned}$$

Как функция двух переменных m, n, функция $\varphi_m(n)$ не является примитивно рекурсивной, ибо если бы это было так, то $\varphi_n(n) + 1$ была бы примитивно рекурсивной. Но $\varphi_m(m) + 1 > \varphi_m(m)$, так что $\varphi_n(n) + 1$ не совпадает с функцией $\varphi_m(n)$ ни при каком значении m и,

следовательно, $\varphi_n(n)+1$ не содержится в нашей нумерации всех одноместных примитивно рекурсивных функций.

Определение $\varphi_m(n)$ показывает, что значение $\varphi_m(n+1)$ дается в терминах $\varphi_m(n)$ и $\varphi_{m_1}(n)$, $\varphi_{m_2}(n)$, где m_1, m_2 оба меньше m; поэтому $\varphi_m(n)$ определяется двойной возвратной рекурсией, которую можно преобразовать в обычную двойную рекурсию методом предыдущей главы. *Таким образом, $\varphi_m(n)$ является примером функции, определяемой двойной рекурсией, которую нельзя определить только примитивной рекурсией и подстановкой.*

ГЁДЕЛЕВСКАЯ НУМЕРАЦИЯ И НЕПОЛНОТА АРИФМЕТИКИ

Гёделевская нумерация и неполнота арифметики. Арифметизация синтаксиса. Построение верифицируемого недоказуемого равенства. Сколемовская нестандартная модель арифметики.

8. Основная цель этой последней главы — показать, что имеется такая примитивно рекурсивная функция $f(n)$, что каждое из равенств $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, ... доказуемо в $\mathscr{R}^*$, а равенство $f(n)=0$ с переменной n не доказуемо в $\mathscr{R}^*$. Существование такой функции f показывает, что $\mathscr{R}^*$ неполна, иначе говоря, что *имеется равенство*

$$f(n)=0,$$

которое верифицируемо, но не доказуемо в $\mathscr{R}^*$.

Этот замечательный результат, который был открыт Куртом Гёделем в 1931 году, наводит на мысль о том, что натуральные числа, возможно, не являются единственным классом объектов, для которых доказуемые формулы из $\mathscr{R}^*$ верифицируемы, и что, возможно, существует класс объектов, который включает все натуральные числа и, кроме них, другие объекты, для которых доказуемые формулы $\mathscr{R}^*$ верифицируемы. То, что такой класс на самом деле существует, было действительно установлено через три года после результата Гёделя Торальфом Сколемом, создателем рекурсивной арифметики, который показал (независимо от методов и результатов Гёделя), что не только системы вроде $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$, но *всякая формализация арифметики* не может полностью характеризовать понятие числа и допускает в качестве значений числовых переменных класс объектов такой, что все натуральные числа являются лишь его начальным сегментом.

8.1. Построение недоказуемого равенства

$$f(n)=0$$

осуществляется при помощи кода, при котором выражениям $\mathscr{R}^*$ соответствуют числа, а синтаксис $\mathscr{R}^*$ — примитивно рекурсивным отношениям. Такое кодирование называется гёделевской нумерацией $\mathscr{R}^*$. Мы будем считать, что переменными $\mathscr{R}^*$ являются m, n, x_1, x_2, x_3, ...; функциями — $\varphi_0(n)$, $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, ... вместе с $m+n$, $m \dot{-} n$ и $m \cdot n$; а схемами доказательств —

$$\text{E}\quad \frac{F(0)=0,\ F(n)=F(Sn)}{F(n)=0},$$

$$\text{T}\quad \frac{A=B}{A=C}\ ,\quad \frac{A=C}{B=C}\ ,$$

$$\text{Sb}_1\quad \frac{F(n)=G(n)}{F(A)=G(A)}\ ,$$

$$\text{Sb}_2\quad \frac{A=B}{F(A)=F(B)}\ .$$

В качестве аксиом мы возьмем *только*

$$\text{A}\quad m+(n \dot{-} m)=n+(m \dot{-} n),$$

$$\text{B}\quad Sm \dot{-} Sn = m \dot{-} n,$$

определяющие равенства для функций $m+n$, $m \dot{-} n$ и $m \cdot n$ и определяющее равенство для $\varphi_m(n)$.

Таким образом, различные примитивно рекурсивные функции одной переменной все определяются единственной аксиомой — определяющим равенством $\varphi_m(n)$.

8.2. Отдельные элементы $\mathscr{R}^*$ нумеруются следующим образом: функциям φ_k ставятся в соответствие числа $4k+17$, $k=0, 1, 2, \ldots$, а переменным x_k — числа $4k+19$.

Номера остальных знаков указаны в таблице:

0	=	(	)	+	$\dot{-}$	·	m	n
1	3	5	7	9	11	13	15	19

Теперь любая формула $\mathscr{R}^*$ рассматривается просто как последовательность знаков $\mathscr{R}^*$; если

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_k$$

— номера знаков, составляющих данную формулу (в их порядке в этой формуле), то мы ставим в соответствие этой формуле число

$$2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{n_k},$$

где $\mathfrak{p}_k$ — k-е нечетное простое число. По одному лишь номеру формулы мы можем написать саму формулу, просто разлагая на множители ее номер. Например, номером формулы

$$m+0=m$$

является $2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11^{15}$, а номером формулы

$$m \cdot Sn = m \cdot n + m$$

является $2^{15} \cdot 3^{13} \cdot 5^{25} \cdot 7^{19} \cdot 11^3 \cdot 13^{15} \cdot 17^{13} \cdot 19^{19} \cdot 23^9 \cdot 29^{15}$, ибо «$S$» совпадает с «$\varphi_2$».

Отдельные знаки все имеют нечетные номера, но номер любой их последовательности обязательно четный.

Разумеется, «бессмысленные» последовательности символов, как

$$) + \varphi_3 = (,$$

также имеют номера, но это не приводит ни к каким осложнениям.

8.3. Далее мы замечаем, что поскольку любое доказательство в $\mathscr{R}^*$ представляет собой последовательность формул, то доказательства тоже можно перенумеровать. Так, доказательству, которое состоит из последовательности формул с номерами

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k,$$

ставится в соответствие число

$$2^{f_0} \cdot 3^{f_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{f_k},$$

так что если N — номер доказательства, а k — наибольшее значение r, для которого $\nu(N, r) > 0$ (и поэтому N делится на ненулевую степень $\mathfrak{p}_k$ и $\mathfrak{p}_k$ является наибольшим простым числом, для которого это верно), то $\nu(N, k)$ — номер формулы, доказываемой доказательством номер N. Мы увидим, как выделить значения N,

которые действительно являются номерами доказательств.

8.31. Как и все формулы, аксиомы системы $\mathscr{R}^*$ можно занумеровать, и мы будем обозначать через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 номера упомянутых выше шести аксиом. Нам не потребуются действительные значения номеров, обозначенных этими буквами. Мы обозначим через $\mathrm{Ax}(n)$ дизъюнкцию $n = A_1 \vee n = A_2 \vee n = A_3 \vee \vee n = A_4 \vee n = A_5 \vee n = A_6$, которая утверждает, что n есть номер аксиомы.

8.4. Первый шаг в арифметизации синтаксиса системы $\mathscr{R}^*$ состоит в нахождении условия, выражающего свойство быть переменной. Так как номерами переменных являются числа вида $15 + 4k$, где k пробегает числа 0, 1, 2, ..., то свойство «n есть номер переменной» выражается примитивно рекурсивным отношением

$$E_m^n(n = 4m + 15)$$

(имеется m между 0 и n такое, что $n = 4m + 15$).

Мы обозначим это отношение через $V(n)$.

8.41. Аналогично, отношение «n есть номер одноместной примитивно рекурсивной функции» выражается формулой

$$E_m^n(n = 4m + 17),$$

которую мы обозначим через $t(n)$.

8.42. Далее мы рассмотрим отношение «n есть номер переменной в формуле с номером f». Оно выражается примитивно рекурсивным отношением

$$E_m^f\{\mathrm{v}(f,\ m) = n\ \&\ V(n)\},$$

которое мы обозначим через $V_f(n)$.

8.43. Число членов в последовательности с номером f есть $l_f + 1$, где l_f определяется с помощью соотношения

$$l_f = (L_m^f\{R(f,\ \mathfrak{p}_m) = 0\ \&\ A_n^f(n > m \to R(f,\ \mathfrak{p}_n) > 0)\}) \times \times \{R(f + 1,\ 2)\},$$

где $R(a, b)$ — остаток от деления a на b (таким образом, $l_f = 0$, если f нечетно, а если f четно, то l_f есть наименьшее целое m такое, что f делится на m-е нечетное простое число, но не делится ни на какое большее). Предикат $F(n)$, говорящий о том, что n есть номер последовательности знаков, теперь можно выразить так:

$$R(n,\ 2) = 0\ \&\ A_r^{l_n}\{R(\mathrm{v}(n,\ r),\ 2) = 1\}.$$

8.5. Перед тем, как мы рассмотрим основную синтаксическую операцию подстановки, мы введем примитивно рекурсивную функцию $m \wedge n$, которая вычисляет номер выражения, получающегося приписыванием выражения с номером n вслед за выражением с номером m. Например, номер «$\varphi_4(m)$» равен $2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5^{15} \cdot 7^7$ и номер «$+\ n$» равен $2^9 \cdot 3^{19}$; тогда номер «$\varphi_4(m) + n$» равен

$$2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5^{15} \cdot 7^7 \wedge 2^9 \cdot 3^{19} = 2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5^{15} \cdot 7^7 \cdot 11^9 \cdot 13^{19}.$$

Функция $m \wedge n$ определяется равенством

$$m \wedge n = m \cdot \prod_{i \leqslant l_n} \mathfrak{p}_{l_m + i + 1}^{\mathrm{v}(n,\ i)},$$

если ни m ни n не являются номерами единичных членов, т. е. если и m и n оба четны. Если m нечетно, а n четно, то

$$m \wedge n = 2^m \cdot \prod_{i \leqslant l_n} \mathfrak{p}_{i+1}^{\mathrm{v}(n,\ i)},$$

если m четно, а n нечетно, то

$$m \wedge n = m \cdot \mathfrak{p}_{l_m + 1}^n$$

и если m и n оба нечетны, то

$$m \wedge n = 2^m \cdot 3^n.$$

8.51. Выражение $f(0) \wedge \ldots \wedge f(n)$ обозначается через

$$\prod_{i \leqslant n}^{\wedge} f(i), \text{ где } \prod_{i \leqslant 0}^{\wedge} f(i) = f(0),\ \prod_{i \leqslant n+1}^{\wedge} f(i) = \left\{\prod_{i \leqslant n}^{\wedge} f(i)\right\} \wedge f(n+1).$$

8.6. Теперь мы в состоянии выразить связь между тремя числами f, v, n и номером выражения, которое получается подстановкой объекта с номером n вместо переменной с номером v в формулу с номером f.

Имеем $f = \prod_{i \leqslant l_f} p_i^{\nu(f,\, i)}$ и при каждом значении i, для которого $\nu(f, i) = v$, переменная с номером v замещается объектом с номером n. Определим

$$q_i = (1 \dot{-} |\nu(f, i), v|)n + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} |\nu(f, i), v|)\} \cdot \nu(f, i)$$

и

$$\mathrm{Sub}_f(v/n) = \prod_{i \leqslant l_f + 1}^{\wedge} q_i.$$

Тогда $\mathrm{Sub}_f(v/n)$ является требуемым номером выражения, получаемого подстановкой объекта с номером n вместо переменной с номером v в формулу с номером f. Например, номер формулы

$$\varphi_4(m)$$

есть

$$2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5^{15} \cdot 7^7,$$

номер формулы

$$x_1 + x_2$$

есть

$$2^{23} \cdot 3^9 \cdot 5^{29},$$

результатом подстановки $x_1 + x_2$ вместо m в $\varphi_4(m)$ будет формула

$$\varphi_4(x_1 + x_2)$$

с номером $2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5^{23} \cdot 7^9 \cdot 11^{27} \cdot 13^7$, который равен $33 \wedge 5 \wedge 2^{23} \cdot 3^9 \cdot 5^{27} \wedge 7$.

8.7. Далее мы попытаемся охарактеризовать понятие «рекурсивный терм», или «рекурсивная функция». t есть номер рекурсивного терма, если t является номером переменной, или номером одной из функций $m + n$, $m \dot{-} n$, $m \cdot n$, $\varphi_k(n)$, или номером выражения, получающегося подстановкой рекурсивного терма вместо переменной в рекурсивный терм.

Номерами функций $m + n$, $m \dot{-} n$, $m \cdot n$ и $\varphi_k(n)$ являются

$$2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^{19};\ 2^{15} \cdot 3^{11} \cdot 5^{19};\ 2^{15} \cdot 3^{13} \cdot 5^{19} \text{ и } 2^{4k+17} \cdot 3^5 \cdot 5^{19} \cdot 7^9,$$

и мы обозначим их соответственно через σ_1, σ_2, σ_3 и $\sigma(k)$.

Тогда предикат $T(n)$, утверждающий, что n есть номер рекурсивного терма, можно определить так:

$$(n = \sigma_1) \vee (n = \sigma_2) \vee (n = \sigma_3) \vee E_k^n(n = \sigma(k)) \vee$$
$$\vee E_x^n E_y^n E_z^n \{x < n \,\&\, y < n \,\&\, T(x) \,\&\, T(y) \,\&$$
$$\&\, V_x(z) \,\&\, n = \mathrm{Sub}_x(z/y)\}.$$

Это возвратная рекурсия, так что $T(n)$ — примитивно рекурсивное отношение.

8.71. Теперь легко сформулировать условие $E(n)$, выражающее отношение: n есть номер равенства между рекурсивными термами. $E(n)$ можно выразить в виде

$$E_x^n E_y^n (T(x) \,\&\, T(y) \,\&\, n = x \wedge 3 \wedge y).$$

8.8. Наиболее важная часть арифметизации синтаксиса — это представление предиката «n есть номер доказательства». С этой целью мы должны рассмотреть отношения между номерами посылок и заключений в схемах вывода.

8.81. Для Sb_1 мы рассмотрим примитивно рекурсивное отношение $S_1(m, n)$, которое выражает отношение: n является номером равенства, выведенного из равенства с номером m по Sb_1; $S_1(m, n)$ принимает вид

$$E_x^m E_y^m E_z^m E_w^n \{T(x) \,\&\, T(y) \,\&\, V_m(z) \,\&\, m = x \wedge 3 \wedge y \,\&\, T(w) \,\&$$
$$\&\, n = \mathrm{Sub}_m(z/w)\}.$$

$S_1(m, n)$ утверждает, что существуют x, y, z между 0 и m и существует w между 0 и n такие, что x, y и w — номера термов, z — номер переменной в равенстве с номером m; m — номер равенства между термами с номерами x и y и n — номер равенства, получающегося

в результате подстановки терма с номером w вместо переменной с номером z.

8.82. В случае Sb_2 рассмотрим отношение $S_2(m, n)$, записываемое в виде

$$E_x^m E_y^m E_u^n E_v^n \{T(x) \& T(y) \& m = x \wedge 3 \wedge y \& T(u) \& V_u(v) \& \\ \& n = \mathrm{Sub}_u(v/x) \wedge 3 \wedge \mathrm{Sub}_u(v/y)\}$$

(x и y — номера термов, меньшие, чем m, n — номер терма, v — номер переменной в терме с номером u, m — номер равенства между термами с номерами x и y, n — номер равенства между термами, полученного подстановкой сначала терма с номером x, затем терма с номером y вместо переменной v в терм с номером u).

8.83. В случае схемы Т мы рассмотрим отношение $T(m, n, p)$, записываемое в виде

$$E_x^n E_y^m E_z^n (T(x) \& T(y) \& T(z) \& \\ \& m = x \wedge 3 \wedge y \& n = x \wedge 3 \wedge z \& p = y \wedge 3 \wedge z)$$

(x, y и z — номера термов; m, n и p — номера равенств между термами с номерами соответственно x, y; x, z и y, z).

8.84. Наконец, в случае схемы Е мы рассматриваем отношение $E(m, n, p)$, определяемое так:

$$E_x^n E_y^n (T(x) \& V_x(y) \& m = \mathrm{Sub}_x(y/1) \wedge 3 \wedge 1 \& \\ \& n = x \wedge 3 \wedge \mathrm{Sub}_x(y/25 \wedge y) \& p = x \wedge 3 \wedge 1)$$

(x — номер некоторого терма, y — номер переменной в этом терме, m — номер равенства, образованного приравниванием нулю результата подстановки нуля вместо переменной в терм с номером x, n — номер выражения, образованного приравниванием терма с номером x к результату приписывания «S» перед переменной в этом терме, и p — номер выражения, получающегося приравниванием нулю терма с номером x).

8.85. Теперь мы в состоянии определить предикат «n есть номер доказательства», который будем обозначать через $\mathrm{Pf}(n)$. В качестве $\mathrm{Pf}(n)$ мы берем отношение

$$R(n, 2) = 0 \& A_x^{l_n} \{\mathrm{Ax}(\mathfrak{v}(n, x)) \vee \\ \vee E_y^x (S_1(\mathfrak{v}(n, y), \mathfrak{v}(n, x)) \vee S_2(\mathfrak{v}(n, y), \mathfrak{v}(n, x))) \vee \\ \vee E_u^x E_v^x (T(\mathfrak{v}(n, u), \mathfrak{v}(n, v), \mathfrak{v}(n, x)) \vee \\ \vee E(\mathfrak{v}(n, u), \mathfrak{v}(n, v), \mathfrak{v}(n, x)))\}$$

(n — номер последовательности равенств, каждое из которых является либо аксиомой либо выводится из одного или двух предыдущих равенств по одной из схем вывода).

8.86. Как мы уже заметили, отношение $\mathrm{Pr}(m, n)$, выражающее, что m есть номер доказательства формулы с номером n, представимо так:

$$\mathrm{Pf}(m) \& \mathfrak{v}(m, l_m) = n.$$

8.87. Цифры $0, S0, SS0, SSS0, \ldots$ представляются в $\mathscr{R}^*$ как $0, \varphi_2 0, \varphi_2\varphi_2 0, \varphi_2\varphi_2\varphi_2 0, \ldots$ и, следовательно, их номерами являются $1, 2^{25}\cdot 3, 2^{25}\cdot 3^{25}\cdot 5, 2^{25}\cdot 3^{25}\cdot 5^{25}\cdot 7, \ldots$; если мы обозначим эти номера через $N_0, N_1, N_2, N_3, \ldots$, то N_r примитивно рекурсивна и

$$N_0 = 1, \quad N_1 = 2^{25}\cdot 3, \quad N_{r+1} = N_r \cdot \mathfrak{p}_r^{24} \cdot \mathfrak{p}_{r+1}, \ r \geqslant 1.$$

Будем использовать $\mathrm{St}_f(v/n)$ как сокращение для $\mathrm{Sub}_f(v/N_n)$, так что $\mathrm{St}_f(v/n)$ — номер выражения, которое получается, когда цифра $\varphi_2\varphi_2 \ldots \varphi_2 0$, куда φ_2 входит n раз, подставляется вместо переменной с номером v в выражение с номером f.

8.88. Так как $\sim \mathrm{Pr}(m, \mathrm{St}_n(19/n))$ — примитивно рекурсивное отношение, то его можно записать в терминах символов $\mathscr{R}^*$ в виде равенства, и мы можем говорить о «$\sim \mathrm{Pr}(m, \mathrm{St}_n(19/n))$»как о сокращении для этого равенства в $\mathscr{R}^*$.

Пусть то равенство в $\mathscr{R}^*$, для которого $\sim \mathrm{Pr}(m, \mathrm{St}_n(19/n))$ является сокращением, имеет номер $\boldsymbol{p}$. В формуле с номером $\boldsymbol{p}$ подставим цифру номер N_p (т. е. $\varphi_2\varphi_2 \ldots \varphi_2 0$, куда φ_2 входит $\boldsymbol{p}$ раз) вместо переменной с номером 19 (т. е. переменной n); номером

результата является $\mathrm{St}_p(19/p)$, а сам результат можно сокращенно записать так:

$$\sim \mathrm{Pr}(m, \mathrm{St}_p(19/p))$$

и обозначить, скажем, через $G(m)$.

8.89. Мы покажем, что выражение, обозначенное через $G(m)$, не доказуемо в $\mathscr{R}^*$.

Действительно, если бы выражение, которое обозначает $G(m)$, было бы доказуемо в $\mathscr{R}^*$ и если бы k было номером его доказательства, то k было бы номером доказательства равенства с номером $\mathrm{St}_p(19/p)$ и имело бы место

$$\mathrm{Pr}(k, \mathrm{St}_p(19/p));$$

но если $G(m)$ доказуемо, то доказуемо и $G(k)$, поэтому

$$\sim \mathrm{Pr}(k, \mathrm{St}_p(19/p))$$

имеет место. Так как $\sim \mathrm{Pr}(m, \mathrm{St}_p(19/p))$ является примитивно рекурсивным отношением, его представляющая функция, скажем, $f(m)$, примитивно рекурсивна и значение $f(k)$ можно получить из определяющих равенств для $f(m)$ не более, чем k подстановками.

Это значение будет или 0 или 1; если 0, то выполнено $\sim \mathrm{Pr}(k, \mathrm{St}_p(19/p))$ и если 1, то выполнено $\mathrm{Pr}(k, \mathrm{St}_p(19/p))$, но эти два утверждения не могут выполняться одновременно. Таким образом, выражение, обозначенное через $G(m)$, не доказуемо — это эквивалентно тому, что равенство

$$\mathsf{f}(m) = 0$$

не доказуемо в $\mathscr{R}^*$, где $\mathsf{f}(m)$ — терм в $\mathscr{R}^*$, выражающий представляющую функцию равенства, обозначаемого через $G(m)$. Однако утверждение о том, что это равенство не доказуемо, эквивалентно тому, что никакое из чисел 0, 1, 2, 3, ... не является номером доказательства равенства с номером $\mathrm{St}_p(19/p)$, т. е. тому, что каждое из равенств

$$\mathsf{f}(0) = 0, \quad \mathsf{f}(1) = 0, \quad \mathsf{f}(2) = 0, \ \ldots$$

имеет место и поэтому выводимо в $\mathscr{R}^*$.

Таким образом, имеется примитивно рекурсивная функция f такая, что каждое из равенств

$$\mathsf{f}(0) = 0, \quad \mathsf{f}(1) = 0, \quad \mathsf{f}(2) = 0, \ \ldots$$

доказуемо в $\mathscr{R}^*$, но равенство

$$\mathsf{f}(m) = 0$$

со свободной переменной m не доказуемо в $\mathscr{R}^*$.

8.9. Наличие в $\mathscr{R}^*$ недоказуемого равенства не является чисто случайным обстоятельством, связанным со специфическими аксиомами $\mathscr{R}^*$; мы можем добавить к $\mathscr{R}^*$ сколько угодно новых (верифицируемых) аксиом и все равно описанная выше конструкция будет выполнима. В частности, мы можем добавить само равенство $\mathsf{f}(m) = 0$ в качестве аксиомы, и все-таки мы сможем построить равенство, недоказуемое в расширенной системе, скажем, $\mathscr{R}^+$. Этот результат наводит на мысль, что натуральные числа 0, 1, 2, ... не исчерпывают значений переменных.

Мы действительно можем легко показать, что натуральные числа не составляют наибольшего класса объектов, которые удовлетворяют аксиомам рекурсивной арифметики.

8.91. С этой целью мы докажем, что если дана любая последовательность функций f_0t, f_1t, f_2t, f_3t и т. д. (рекурсивных или нерекурсивных), то имеется монотонно возрастающая функция*) $g(t)$ и функция $v(i, j)$ такая, что для всех i, j одно из отношений

$$f_ig(t) < f_jg(t), \quad f_ig(t) = f_jg(t), \quad f_ig(t) > f_jg(t)$$

выполняется для всех $t > v(i, j)$.

Мы начнем с того, что расположим все пары функций f_r, f_s с $r < s$ в виде простой последовательности, начинающейся с пары f_0, f_1, за которой следуют f_0, f_2; f_0, f_3; f_1, f_2; f_0, f_4; f_1, f_3; f_0, f_5; f_1, f_4; f_2, f_3 и т. д., причем пара f_i, f_j идет $(e^2 + i + 1)$-й или $(e^2 + e + i + 1)$-й в этой

*) В оставшейся части главы VIII автор отходит от конструктивной точки зрения. Объекты, которые он называет здесь функциями, не являются алгорифмами. — *Прим. ред.*

последовательности в зависимости от того, четно $i+j$ или нечетно, где $2e$ — наибольшее четное число, содержащееся в $i+j$.

Для любых двух функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мы можем найти монотонно возрастающую функцию $v(t)$ такую, что *одно* из отношений

$$\varphi v(t) < \psi v(t), \quad \varphi v(t) = \psi v(t), \quad \varphi v(t) > \psi v(t)$$

выполняется для всех значений t; для определения v мы разбиваем все натуральные числа t на три класса, $C_<$, $C_=$, $C_>$, в зависимости от того, какое из отношений $<$, $=$, $>$ имеет место между φt и ψt.

По крайней мере один из этих трех классов бесконечен, и мы считаем члены этого класса в возрастающем порядке значениями $v(t)$ для значений t, равных 1, 2, 3, ...; мы обозначим через V то из отношений ($<$, $=$ или $>$), которое имеет место между $\varphi v(t)$ и $\psi v(t)$ для всех значений t.

Далее мы последовательно определяем $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., с которыми связаны отношения V_1, V_2, ..., следующим образом: $v_1(t)$ и V_1 — это функция и отношение, определенные так же, как выше, так что для всех значений t

$$f_0 v_1(t)\, V_1 f_1 v_1(t),$$

затем мы берем $f_0 v_1$ и $f_2 v_1$ в качестве φ и ψ и определяем v_2 и V_2 так, чтобы для всех t

$$f_0 v_1 v_2(t)\, V_2 f_2 v_1 v_2(t).$$

Таким образом, мы определяем шаг за шагом v_3, V_3; v_4, V_4; ...; v_n, V_n, так что для всех t

$$\text{(E)} \quad f_i v_1 v_2 \dots v_n(t)\, V_n f_j v_1 v_2 \dots v_n(t),$$

где n — порядковый номер пары f_i, f_j в описанном выше упорядочении.

Положим

$$g(n) = v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n(n),$$

тогда (полагая $t = n$ в равенстве E)

$$f_i g(n)\, V_n f_j g(n)$$

Аналогично, подставляя $v_{n+1} v_{n+2} \dots v_{n+p}(t)$ вместо t в равенство E, мы находим, что для всех t имеет место

$$f_i v_1 v_2 \dots v_{n+p}(t)\, V_n f_j v_1 v_2 \dots v_{p+n}(t)$$

и поэтому, взяв $t = n + p$, получаем

$$f_i g(n+p)\, V_n f_j g(n+p).$$

Это доказывает, что

$$f_i g(t)\, V_n f_j g(t)$$

выполняется для всех $t \geqslant n$.

Так как $v_{n+1}(t)$ монотонно возрастает (и ее значениями являются различные целые числа), то $v_{n+1}(n+1) > n$, так что

$$g(n+1) = v_1 v_2 \dots v_n v_{n+1}(n+1) > v_1 v_2 \dots v_n(n) = g(n),$$

что доказывает, что $g(n)$ монотонно возрастает.

8.92. С помощью этой теоремы мы можем ввести линейный порядок между функциями f_0, f_1, f_2, f_3, ... Мы считаем

$$f_i < f_j \quad \text{или} \quad f_i = f_j \quad \text{или} \quad f_i > f_j$$

в соответствии с тем, имеет ли V_n значение $<$, $=$ или $>$, т. е. в соответствии с тем, имеет ли место

$$f_i g(t) < f_j g(t), \quad f_i g(t) = f_j g(t) \quad \text{или} \quad f_i g(t) > f_j g(t)$$

для всех $t > n$. Легко проверить, что $f_i = f_j$ и $f_j = f_k$ влечет $f_i = f_k$, и $f_i < f_j$, $f_j < f_k$ влечет $f_i < f_k$, как и подсказывают используемые обозначения.

В последовательность функций f_0, f_1, f_2, f_3, ... мы можем, если угодно, включить все константные функции $f(t) = 0$, $f(t) = 1$ и т. д., которые мы можем обозначать просто через 0, 1 и т. д., и тождественную функцию $f(t) = t$. Неравенства между натуральными числами переходят в те же неравенства между константными функциями; так, например, если $m < n$, то, рассматривая m и n как константные функции от t, имеем $m < n$ для *всех* t. Каждая из функций $f(t)$, конечно, удовлетворяет неравенству $0 \leqslant f(t)$ и каждая функция $f(t)$ имеет

единственную следующую $f(t)+1$, ибо если бы была функция h такая, что $f<h<f+1$, то мы бы имели

$$fg(t)<hg(t)<fg(t)+1$$

для всех достаточно больших t, что, конечно, невозможно.

Таким образом, члены последовательности $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$, как и натуральные числа, обладают свойством иметь единственный следующий, но эта последовательность имеет члены, бóльшие, чем каждое натуральное число, поскольку, например, тождественная функция $f(t)=t$ превосходит каждую константную функцию, потому что $fg(t)$ имеет значение $g(t)$, которое становится с ростом t больше любого наперед заданного числа.

8.93. Теперь возьмем в качестве $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ последовательность всех одноместных примитивно рекурсивных функций, причем пусть f_0 — нулевая функция. Мы покажем, что все истинные утверждения рекурсивной арифметики останутся верными, если мы возьмем $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ вместо натуральных чисел.

Пусть дана произвольная рекурсивная функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

натуральных чисел; мы введем функциональные переменные $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$, «значениями» которых являются функции $f_1, f_2, \ldots$

Для любого набора значений переменных

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

становится одноместной функцией, скажем,

$$F(f_{k_1}(t), f_{k_2}(t), \ldots, f_{k_n}(t)),$$

которую мы считаем значением функции

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

для значений $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n}$ аргументов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

В частности, когда мы берем в качестве значений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ константные функции, скажем, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тогда F имеет своим значением константную функцию

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

которая, конечно, совпадает со значением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, функцию натуральных переменных можно интерпретировать как функцию в пространстве функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$ без изменения ее значения.

8.94. При этой интерпретации истинное равенство (будь то аксиома или равенство, выводимое из аксиом)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

переходит в истинное равенство в пространстве функций; действительно, если это равенство выполняется для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и если i, j — те индексы, для которых

$$F(f_{k_1}(t), f_{k_2}(t), \ldots, f_{k_n}(t))=f_i(t),$$
$$G(f_{k_1}(t), f_{k_2}(t), \ldots, f_{k_n}(t))=f_j(t)$$

для данного набора $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, то

$$f_i(t)=f_j(t) \text{ для всех } t,$$

и, следовательно,

$$f_ig(t)=f_jg(t) \text{ для всех } t,$$

что доказывает $f_i=f_j$ и поэтому

$$F(f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n})=G(f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n})$$

для всех аргументов f_{k_r}, $r=1, 2, \ldots, n$.

8.95. Поскольку мы определили равенство и неравенство независимо, остается проверить, что равенства $x\leqslant y$ и $x\dot{-}y=0$ эквивалентны при нашей функциональной интерпретации.

Для истинности $f_i\leqslant f_j$ мы требуем $f_ig(t)\leqslant f_jg(t)$ при $t>v(i, j)$; для истинности $f_i\dot{-}f_j=0$, переписав это так: $f_i\dot{-}f_j=f_k$, мы требуем

$$f_kg(t)=f_0g(t) \quad \text{при} \quad t>v(k, 0).$$

Так как $f_kg(t)=f_ig(t)\dot{-}f_jg(t)$ и $f_0g(t)=0$, то условия

$$f_kg(t)=f_0g(t) \text{ и } f_ig(t)\leqslant f_jg(t)$$

эквивалентны при *любом* t, что завершает доказательство.

РЕШЕНИЯ ПРИМЕРОВ

Глава I

1. Последовательно определяем $\mathrm{Pent}(x, 0) = 1$, $\mathrm{Pent}(x, Sy) = \mathrm{Tet}(x, \mathrm{Pent}(x, y))$, $\mathrm{Hex}(x, 0) = 1$, $\mathrm{Hex}(x, Sy) = \mathrm{Pent}(x, \mathrm{Hex}(x, y))$, $\mathrm{Hept}(x, 0) = 1$, $\mathrm{Hept}(x, Sy) = \mathrm{Hex}(x, \mathrm{Hept}(x, y))$.

1.1. $\mathrm{Tet}(2, 3) = 16$, $\mathrm{Pent}(2, 3) = \mathrm{Tet}(2, 4) = 2^{16} = 65536$, $\mathrm{Hex}(2, 3) = \mathrm{Pent}(2, 4) = \mathrm{Tet}(2, 65536) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ с 65536 членами.

1.2. $f(1, n) = 2$, $f(2, n) = 3 \cdot 2^n$, $f(3, n) = 3^n \cdot 2^{n^2 - n + 2}$, $f(4, 4) = 2^{116} \cdot 3^{18} \cdot 5$.

1.3. $f(x) = \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\} g(x)$, что получается подстановкой рекурсивной функции $(1 \dot{-} (1 \dot{-} x))$ вместо u и $g(x)$ — вместо v в рекурсивную функцию uv.

1.31. Если $k(x) = 1 \dot{-} (x \dot{-} 2)$, то $f(x) = k(x)\, g(x) + \{1 \dot{-} k(x)\} h(x)$.

1.4. Пусть $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ обозначают частное и остаток от деления x на y, а $\mathrm{Hf}(x, y)$ и $\mathrm{Lm}(x, y)$ — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное x и y. Тогда $R(0, 2) = 0$, $R(x+1, 2) = 1 \dot{-} R(x, 2)$, $Q(0, 2) = 0$, $Q(x+1, 2) = Q(x, 2) + R(x, 2)$, $\mathrm{Hf}(x, 2) = 2 \dot{-} R(x, 2)$, $\mathrm{Lm}(x, 2) = x\{1 + R(x, 2)\}$; аналогично, $R(0, 3) = 0$, $R(x+1, 3) = \{1 \dot{-} (R(x, 3) \dot{-} 1)\} SR(x, 3)$, $Q(0, 3) = 0$, $Q(x+1, 3) = Q(x, 3) + \{R(x, 3) \dot{-} 1\}$, $\mathrm{Hf}(x, 3) = 1 + 2\{1 \dot{-} R(x, 3)\}$, $\mathrm{Lm}(x, 3) = x\{3 \dot{-} 2(1 \dot{-} R(x, 3))\}$.

1.5. $f(x) = \{1 \dot{-} R(x, 2)\} g(x) + R(x, 2)\, h(x)$.

1.6. Если $C(n, r)$ — коэффициент при x^r в разложении $(1 + x)^n$, то $C(n, 0) = 1$, $C(0, r+1) = 0$, $C(n+1, r+1) = C(n, r) + C(n, r+1)$; тем не менее функция $C(n, r)$ примитивно рекурсивна, ибо $n!$ примитивно рекурсивна и $C(n, r) = n!/r!\,(n-r)!$.

1.7. $a + b + c + d = ((a + b) + c) + d = (a + (b + c)) + d = ((b + c) + a) + d = ((c + b) + a) + d = c + b + a + d = (b + c) + (a + d) = (b + c) + (d + a) = ((b + c) + d) + a = (d + (b + c)) + a = ((d + b) + c) + a = d + b + c + a$, и т. д.

1.8. $i(x) = 1 \dot{-} x$, $j(x, y) = \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\}(1 \dot{-} y)$, $k(x, y) = \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\}\{1 \dot{-} (1 \dot{-} y)\}$.

1.81. $f(x, y) = i(x) \cdot a(y) + j(x, y) \cdot b(x \dot{-} 1) + k(x, y) \cdot c(x \dot{-} 1, y \dot{-} 1)$.

1.9. $G(0, n) = \psi(1, n+1) = \lambda(0, n, \psi(0, \mu(0, n, \psi(1, n))))$, $\psi(1, n)) = a(n)$; $G(p+1, 0) = \psi(p+2, 1) = b(p, \psi(p+1, \mu(p+1, 0, \psi(p+2, 0))))$, $\psi(p+2, 0)) = b(p, \psi(p+1, Sd(p))) =$ $= b(p, G(p, d(p)))$ и $G(p+1, n+1) = \psi(p+2, n+2) = \lambda(p+1, n+1, \psi(p+1, \mu(p+1, n+1, \psi(p+2, n+1))))$, $\psi(p+2, n+1)) =$ $= c(p, n, G(p, e(p, n, G(p+1, n))))$, $G(p+1, n))$.

Этот пример показывает, что функция $G(p, n)$, определяемая дважды рекурсивными равенствами R_2, может быть получена подстановкой $G(p, n) = \psi(p+1, n+1)$ из дважды рекурсивной функции $\psi(p, n)$, которая удовлетворяет более простым вводящим равенствам

$$R_2^*\begin{cases} \psi(0, n) = \psi(p+1, 0) = 1, \\ \psi(p+1, n+1) = \lambda(p, n, \psi(p, \mu(p, n, \psi(p+1, n)))), \psi(p+1, n)). \end{cases}$$

Следовательно, мы можем считать равенства R_2^* стандартными вводящими равенствами любой функции, определяемой двойной рекурсией

1.91. $f(0, n_2, n_3) = f(n_1 + 1, 0, n_3) = f(n_1 + 1, n_2 + 1, 0) = 1$, $f(n_1+1, n_2+1, n_3+1) = a(n_1, n_2, n_3, f_1(n_1, n_2, n_3), f_2(n_1, n_2, n_3), f_3(n_1, n_2, n_3))$,

где

$$f_1(n_1, n_2, n_3) = f(n_1, b(n_1, n_2, n_3, f(n_1+1, n_2+1, n_3)), c(n_1, n_2, n_3, f(n_1+1, n_2+1, n_3)))),$$

$$f_2(n_1, n_2, n_3) = f(n_1+1, n_2, d(n_1, n_2, n_3, f(n_1+1, n_2+1, n_3)))),$$

$$f_3(n_1, n_2, n_3) = f(n_1+1, n_2+1, n_3).$$

Глава II

2. Пусть $\varphi(x, y) = |f(x, y), y|$, тогда $\varphi(0, y) = 0$ и $\varphi(Sx, y) = \varphi(x, y)$, так что $\{1 \dot{-} \varphi(x, y)\}\varphi(Sx, y) = 0$, откуда $\varphi(x, y) = 0$ и, следовательно, $f(x, y) = y$.

2.01. Обозначим $a(b + c)$ и $ab + ac$, соответственно, через $f(c)$ и $g(c)$, тогда $f(0) = ab = g(0)$ и

$$f(Sc) = a(b + Sc) = aS(b + c) = f(c) + a,$$
$$g(Sc) = ab + aSc = ab + (ac + a) = g(c) + a.$$

Таким образом, $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам, так что $f(c) = g(c)$.

2.02. $(ab) \cdot 0 = 0 = a(b \cdot 0)$; $(ab)Sc = (ab)c + ab$ и $a(b \cdot Sc) = a(bc + b) = a(bc) + ab$, после чего доказательство завершается так же, как в 2.01.

2.03. $(ab) \cdot (cd) = a(b \cdot (cd)) = a((cd) \cdot b) = (a(cd))b = ((ac)d)b = (ac) \cdot (db)$.

2.1. Если $f(x) = x(1 \dot{-} x)$, то $f(0) = 0$ и $f(Sx) = 0$.

2.2. $1 \dot{-} 0 = 0^0$, $1 \dot{-} Sx = 0 = 0^{Sx}$.

2.201. $(1 \dot{-} 0) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} 0)\} = SZ0$,
$\{1 \dot{-} Sx) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} Sx)\} = SZSx$, так что
$(1 \dot{-} x) + \{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)\} = SZx = 1$.

2.21. $a \dot{-} (b + 0) = a \dot{-} b = (a \dot{-} b) \dot{-} 0$;
$a \dot{-} (b + Sc) = a \dot{-} S(b + c) = \{a \dot{-} (b + c)\} \dot{-} 1$
$(a \dot{-} b) \dot{-} Sc = \{(a \dot{-} b) \dot{-} c\} \dot{-} 1$.

2.22. Используйте пример 2.21.

2.23. $(a+0) \dot{-} (b+0) = a \dot{-} b;$

$$(a+Sx) \dot{-} (b+Sx) = S(a+x) \dot{-} S(b+x) = (a+x) \dot{-} (b+x),$$

откуда результат следует так же, как в примере 2.

2.231. $a(0 \dot{-} 1) = 0 = a \cdot 0 \dot{-} a$; $a(Sx \dot{-} 1) = a(Sx \dot{-} S0) = ax$ и в силу 2.23 $a \cdot Sx \dot{-} a = (ax+a) \dot{-} a = ax$.

2.232. В силу 2.231 $a(b \dot{-} 0) = ab = ab \dot{-} a \cdot 0$; $a(b \dot{-} Sc) = a\{(b \dot{-} c) \dot{-} 1\} = a(b \dot{-} c) \dot{-} a$ и в силу 2.21 $ab \dot{-} a \cdot Sc = ab \dot{-} (ac+a) = (ab \dot{-} ac) \dot{-} a$.

2.233. В силу 2.232 и 2.1 $x \dot{-} x^2 = x(1 \dot{-} x) = 0$.

2.234. В силу 2.232 и 2.1 $(1 \dot{-} x)(1 \dot{-} x) = (1 \dot{-} x) \dot{-} x(1 \dot{-} x) = 1 \dot{-} x$.

2.24. По теореме 2.63 $\{1 \dot{-} |\, a, b\,|\}(b \dot{-} a) = \{1 \dot{-} |\, a, b\,|\} \times (b \dot{-} b) = 0$.

2.241. Используйте 2.232 и 2.24.

2.242. Если $f(a, b) = (b \dot{-} a)(Sa \dot{-} b)$, то $f(a, 0) = 0$, $f(0, b) = b(1 \dot{-} b) = 0$ и $f(Sa, Sb) = f(a, b)$, так что $f(a, b)$ удовлетворяет тем же дважды рекурсивным вводящим равенствам, что и нулевая функция $Z(a, b) = 0$.

2.243. Доказательство такое же, как для 2.242.

2.244. Как выше.

2.2441. Как выше (используя 2.201).

2.245. Если $f(a, b) = (b \dot{-} a) + (Sa \dot{-} b)$ и $g(a, b) = 1 + (a \dot{-} b) + (b \dot{-} Sa)$, то $f(a, 0) = Sa = g(a, 0)$, $f(0, Sb) = Sb = g(0, Sb)$ и $f(Sa, Sb) = f(a, b)$, $g(Sa, Sb) = g(a, b)$.

2.246. Доказательство такое же, как и в 2.245.

2.25. Используйте двойную рекурсию, как в 2.245.

2.251. Подставьте по очереди 0 и Sr вместо r.

2.26. В силу 2.22 $\alpha(x) \dot{-} 1 = (1 \dot{-} 1) \dot{-} (1 \dot{-} x)$ и, следовательно, $\alpha(x) \dot{-} 1 = 0$; $\alpha(0) + \{1 \dot{-} \alpha(0)\} = 1$, $\alpha(Sx) + \{1 \dot{-} \alpha(Sx)\} = 1$, так что $\alpha(x) + \{1 \dot{-} \alpha(x)\} = 1$; $\alpha(0) \dot{-} 0 = \alpha(Sx) \dot{-} Sx = 0$, что доказывает $\alpha(x) \dot{-} x = 0$. $x \cdot \alpha(x) = x \dot{-} x(1 \dot{-} x) = x$; $\alpha(1 \dot{-} x) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} (1 \dot{-} x)) = 1 \dot{-} \alpha(x)$; $\alpha(\alpha(0)) = \alpha(0) = 0$, $\alpha(\alpha(Sx)) = \alpha(1) = 1 = \alpha(Sx)$, так что $\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)$. Аналогично, $1 \dot{-} \alpha(x) = 1 \dot{-} x$. В силу 2.1 $\alpha(x) \cdot \alpha(x) = \alpha(x) \dot{-} (1 \dot{-} x)\alpha(x) = \alpha(x) \dot{-} \{1 \dot{-} \alpha(x)\}\alpha(x) = \alpha(x)$. Более того, $\alpha(0 \cdot y) = 0 = \alpha(0) \cdot \alpha(y)$, $\alpha(x \cdot 0) = 0 = \alpha(x) \cdot \alpha(0)$ и $\alpha(Sx \cdot Sy) = \alpha(S(x+y+xy)) = 1 = \alpha(Sx) \cdot \alpha(Sy)$. Наконец, из $f \cdot g = 0$ следует $\alpha(f \cdot g) = 0$ и, значит $\alpha(f) \cdot \alpha(g) = 0$, $\alpha(f) \cdot g \cdot \alpha(g) = 0$, $\alpha(f) \cdot g = 0$.

2.261. Если $f(b, c) = \{b \dot{-} b \cdot \alpha(c, b)\} + c \cdot \alpha(c, b)$, $g(b, c) = c$, то $f(0, c) = c = g(0, c)$; $f(b, 0) = 0 = g(b, 0)$; $f(Sb, Sc) = (b+1)(1 \dot{-} \alpha(c, b)) + (c+1)\alpha(c, b) = f(b, c) + \{1 \dot{-} \alpha(c, b)\} + \alpha(c, b) = Sf(b, c)$ и $g(Sb, Sc) = Sc = Sg(b, c)$, так что $f(b, c) = g(b, c)$. Более того, $\{1 \dot{-} \alpha(x, y)\}x = \{1 \dot{-} |\, x, y\,|\}x = \{1 \dot{-} |\, x, y\,|\}y = \{1 \dot{-} \alpha(x, y)\}y$ в силу 2.26.

2.271. Подставьте по очереди 0 и Sc вместо c.

2.272. Используйте двойную рекурсию, как в 2.245.

2.273. Обозначим $(1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b)(1 \dot{-} ac)b$ через $f(a, b, c)$ и $(1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b)(1 \dot{-} c)b$ — через $g(a, b, c)$; тогда $f(a, b, c) \dot{-} g(a, b, c) = (1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b)b((1 \dot{-} ac) \dot{-} (1 \dot{-} c)) = (1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b)(1 \dot{-} a)b \cdot \alpha(c) = 0$ и $g(a, b, c) \dot{-} f(a, b, c) = (1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b)b((1 \dot{-} c) \dot{-} (1 \dot{-} ac)) = 0$, откуда следует, что $|f, g| = 0$ и поэтому $f = g$.

2.274. Подставьте по очереди 0 и Sa вместо a.

2.28. $x^m \cdot x^0 = x^m = x^{m+0}$, $x^m \cdot x^{Sn} = (x^m \cdot x^n)x$ и $x^{m+Sn} = x^{S(m+n)} = x^{m+n} \cdot x$, откуда следует 2.281.

В силу 2.281 $(x^m)^0 = 1 = x^{m \cdot 0}$, $(x^m)^{Sn} = (x^m)^n \cdot x^m$ и $x^{m \cdot Sn} = x^{mn+m} = x^{mn} \cdot x^m$, и в силу 2.03 $(xy)^0 = 1 = x^0 y^0$, $(xy)^{Sn} = (xy)^n \cdot xy$ и $x^{Sn} \cdot y^{Sn} = (x^n \cdot x) \cdot (y^n \cdot y) = (x^n \cdot y^n) \cdot xy$.

2.29. Повторным применением формул $a + Sb = Sa + b$ и $1 = S0$, $2 = S1, \ldots, 9 = S8$, $10 = S9$ получаем $3 \cdot 2 = 3 \cdot S1 = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1 = 6$ и, аналогично, $4 \cdot 2 = 8$. Затем мы действуем так:

$$3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 = 7 \cdot S2 = 7 \cdot 2 + 7 = (7+7) + 7,$$

$$7 + 7 = 7 + (3+4) = (7+3) + 4 = 10 + 4,$$

$$(10+4) + 7 = 10 + (7+4) = 10 + (7+3) + 1 = 10 + 10 + 1 = 2 \cdot 10 + 1,$$

так что $3 \cdot 7 = 2 \cdot 10 + 1$.

Аналогично, $4 \cdot 7 = 2 \cdot 10 + 8$. Для вычисления $34 \cdot 27$ имеем в силу 2.01 $(3 \cdot 10 + 4)(2 \cdot 10 + 7) = (3 \cdot 10 + 4) \cdot 2 \cdot 10 + (3 \cdot 10 + 4) \cdot 7 = 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 1)10 + 2 \cdot 10 + 8 = (6+2)10^2 + (8+2)10 + 1 \cdot 10 + 8 = 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 8$, снова в силу 2.01 и 2.03.

2.31. $f = (f+g) \dot{-} g = 0 \dot{-} g = 0$.

2.32. $\{x + (1 \dot{-} x)\}f = \{1 + (x \dot{-} 1)\}f = f + (x \dot{-} 1)f$, откуда результат следует в силу 2.31.

2.33. Из $\{1 \dot{-} (g \dot{-} f)\}h = 0$ мы выводим

$$(Sf \dot{-} g)\{1 \dot{-} (g \dot{-} f)\}h = 0$$

и, следовательно, $(Sf \dot{-} g)h = 0$, так как в силу 2.242 имеем $(Sf \dot{-} g)(g \dot{-} f) = 0$.

2.331. Используйте 2.246 и 2.31.

2.332. $(f \dot{-} Sg)h = (f \dot{-} g)h \dot{-} h = 0$.

2.34. Используйте 2.2441.

2.341. $0 = (1 \dot{-} f)(1 \dot{-} \alpha(g)) = (1 \dot{-} f) \dot{-} \alpha(g)(1 \dot{-} f) = (1 \dot{-} f) \dot{-} \alpha(g)$, поскольку $f \cdot \alpha(g) = 0$; но $\alpha(g) \dot{-} 1 = 0$ и, следовательно, $(1 \dot{-} f)\alpha(g) \dot{-} (1 \dot{-} f) = 0$, откуда $\alpha(g) \dot{-} (1 \dot{-} f) = 0$. Поэтому $|\alpha(g), 1 \dot{-} f| = 0$ и, следовательно, $\alpha(g) = 1 \dot{-} f$.

2.35. $f(g \dot{-} h) = fg \dot{-} fh = 0$; $f(h \dot{-} g) = fh \dot{-} fg = 0$.

2 351. К $f^2 g = 0$ добавьте $(1 \dot{-} f)fg = 0$ и используйте 2.32.

2.36. Из $fg = 0$ и $(1 \dot{-} g)h = 0$ мы выводим $fgh = 0$ и $(1 \dot{-} g)fh = 0$ и нужный результат получаем с помощью сложения, используя 2.32.

2.37. Из данных равенств следует $(1 \dot{-} f)(g + (1 \dot{-} g)\varphi) = 0$, $(1 \dot{-} f) g\varphi = 0$, $(1 \dot{-} f)(1 \dot{-} g)\varphi = 0$ и, следовательно, имеем $(1 \dot{-} f)\varphi(g + (1 \dot{-} g)) = 0$, откуда $(1 \dot{-} f)\varphi = 0$, ибо $g + (1 \dot{-} g) = 1 + (g \dot{-} 1)$.

2.41. Положим $f(x, z) = (x + y) \dot{-} z$, $g(x, z) = (x \dot{-} z) + \{y \dot{-} (z \dot{-} x)\}$, тогда $f(0, z) = y \dot{-} z = g(0, z)$, $f(x, 0) = x + y = g(x, 0)$ и $f(Sx, Sz) = f(x, z)$, $g(Sx, Sz) = g(x, z)$.

2.42. Подставьте 1 вместо y и $x \dot{-} a$ вместо z в 2.41.

2.421. Двойная рекурсия с использованием 2.42. Общее значение $a \dot{-} (a \dot{-} b)$ и $b \dot{-} (b \dot{-} a)$ является наименьшим из a, b и обозначается через $\min(a, b)$. Кроме того, мы можем использовать равенства 2.62, 2.611 и пример 2.22 следующим образом:

$$a \dot{-} (a \dot{-} b) = \{(a + (b \dot{-} a)) \dot{-} (b \dot{-} a)\} \dot{-} (a \dot{-} b) = \{(b + (a \dot{-} b)) \dot{-} (a \dot{-} b)\} \dot{-} (b \dot{-} a) = b \dot{-} (b \dot{-} a).$$

2.422. $(a \dot{-} b)(Sb \dot{-} c) = (a \dot{-} b)\{((a + Sb) \dot{-} a) \dot{-} c\} = (a \dot{-} b)\{((a + Sb) \dot{-} c) \dot{-} a\} = (a \dot{-} b)\{[(a \dot{-} c) + \{Sb \dot{-} (c \dot{-} a)\}] \dot{-} a\} = (a \dot{-} b)\{(Sb \dot{-} a) \dot{-} (c \dot{-} a)\} = 0$ в силу 2.242, ибо $(a \dot{-} b)(a \dot{-} c) = 0$. Поскольку $Sb \dot{-} c = (b \dot{-} c) + \{1 \dot{-} (c \dot{-} b)\}$, то, конечно, $(a \dot{-} b)(b \dot{-} c) = 0$.

2.423. В силу 2.41 и 2.32 $(a \dot{-} b)(c \dot{-} b) = 0$ следует из $(a \dot{-} b) \times (Sc \dot{-} b) = 0$ и $(a \dot{-} b)(c \dot{-} b) = (a \dot{-} b)\{((c + a) \dot{-} a) \dot{-} b\} = (a \dot{-} b)\{((c \dot{-} a) + a) \dot{-} b\} = (a \dot{-} b)\{a \dot{-} b + ((c \dot{-} a) \dot{-} (b \dot{-} a))\}$, откуда $(a \dot{-} b)^2 = 0$ и, следовательно (в силу 2.233), $a \dot{-} b = 0$.

2.43. $|b, a + (b \dot{-} a)| = |b, b + (a \dot{-} b)| = a \dot{-} b$.

2.44. Двойная рекурсия, используя 2.42.

2.45. $a = (a + b) \dot{-} b = (a \dot{-} b) + \{b \dot{-} (b \dot{-} a)\} = c + b$.

2.451. Из $p \mid b$, $c \mid = 0$ мы выводим как $p(b \dot{-} c) = 0$, так и $p(c \dot{-} b) = 0$; тогда получаем $p(a \dot{-} c) = p\{((a + b) \dot{-} b) \dot{-} c\} = p\{((b + a) \dot{-} c) \dot{-} b\} = p(a \dot{-} b)$, используя 2.41. Аналогично, $p(c \dot{-} a) = p(b \dot{-} a)$. Таким же образом из $p \mid b$, $c \mid = 0$ мы выводим по очереди $|pb, pc| = 0$, $pb = pc$ и поэтому из $pa \dot{-} pb = pa \dot{-} pb$ следует $pa \dot{-} pb = pa \dot{-} pc$ и т. п.

2.452. Это следует из 2.451 и 2.1.

2.453. Это следует из 2.451.

2.46.
$$(c \dot{-} b)(Sa \dot{-} c) = (\{(c + a) \dot{-} a\} \dot{-} b)(Sa \dot{-} c) = \{((c + a) \dot{-} b) \dot{-} a\}(Sa \dot{-} c) = \{(c \dot{-} (b \dot{-} a)) \dot{-} a\}(Sa \dot{-} c) = \{(c \dot{-} a) \dot{-} (b \dot{-} a)\}(Sa \dot{-} c) = 0$$
в силу 2.242, ибо $a \dot{-} b = 0$.

2.461.
$$(a \dot{-} c)\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} = (\{(a + b) \dot{-} c\} \dot{-} b)\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} = (\{a \dot{-} (c \dot{-} b)\} \dot{-} b)\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} = \{(a \dot{-} b) \dot{-} (c \dot{-} b)\}\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} = 0,$$
ибо $b \dot{-} c = 0$.

2.462.
$$p(a \dot{-} c) = p\{((a + b) \dot{-} c) \dot{-} b\} = p\{[(b \dot{-} c) + \{a \dot{-} (c \dot{-} b)\}] \dot{-} b\} = p\{(a \dot{-} b) \dot{-} (c \dot{-} b)\} = 0, \text{ ибо}$$
$$p(b \dot{-} c) = p(a \dot{-} b) = 0.$$

2.47. Из $(1 \dot{-} a)c = 0$ и $(1 \dot{-} b)c = 0$ мы выводим $c \dot{-} bc = 0$ и $bc \dot{-} abc = 0$, откуда в силу 2.462 $c \dot{-} abc = 0$, т. е. $(1 \dot{-} ab)c = 0$.

2.4701. Из $(1 \dot{-} ab)c = 0$ следует $(1 \dot{-} ab)(1 \dot{-} a)c = 0$, что, сложенное с $ab(1 \dot{-} a)c = 0$, влечет $(1 \dot{-} a)c = 0$; аналогично $(1 \dot{-} b)c = 0$.

2.471. Из $(1 \dot{-} a)bc = 0$ и $abc(1 \dot{-} b) = 0$ мы выводим $bc(1 \dot{-} ab) = 0$ в силу 2.462.

2.472.
$$\{1 \dot{-} \mid a, b \mid\}c = (1 \dot{-} \{(a \dot{-} b) + (b \dot{-} a)\})c = [\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\} \dot{-} (a \dot{-} b)]c = 0,$$
ибо $\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\}c = 0$ следует из $(Sa \dot{-} b)c = 0$.

2.473. В силу 2.242 имеем $(a \dot{-} b)(b \dot{-} a) = 0$ и, следовательно, $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} (a \dot{-} b))\}(b \dot{-} a) = 0$, откуда $b \dot{-} a = 0$, и результат следует из 2.45.

2.48. Подставьте $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)y\}y$ вместо c, x — вместо a и z — вместо b в 2.471; затем из $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} x)y\}y \cdot (1 \dot{-} x)z = 0$ выводится 2.48.

2.481.
$$\{1 \dot{-} \mid a, b \mid\}c = [\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\} \dot{-} (a \dot{-} b)]c = [\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\} + (a \dot{-} b)]c,$$
ибо $(a \dot{-} b)c = 0$; отсюда вытекает результат.

2.49.
$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b\}(1 \dot{-} a) = (1 \dot{-} a) \dot{-} (1 \dot{-} a)b = (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b) \text{ в силу 2.234.}$$

2.491. Заметим, что так как $(1 \dot{-} d)c = 0$, то мы имеем
$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b\}\{(1 \dot{-} a) + (1 \dot{-} d)\}c = \{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)b\}(1 \dot{-} a)c = (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)c = 0$$
и, следовательно, 2.491 следует в силу 2.47.

2.5. Из (α) мы получаем $b \dot{-} (b \dot{-} a) = \{a + (b \dot{-} a)\} \dot{-} (b \dot{-} a) = a$ и $a \dot{-} b = a \dot{-} (a + (b \dot{-} a)) = (a \dot{-} a) \dot{-} (b \dot{-} a) = 0$; из (β) выводим $(b \dot{-} a) + a = (b \dot{-} a) + \{b \dot{-} (b \dot{-} a)\} = b + \{(b \dot{-} a) \dot{-} b\} = b$ и $a \dot{-} b = \{b \dot{-} (b \dot{-} a)\} \dot{-} b = (b \dot{-} b) \dot{-} (b \dot{-} a) = 0$; из (γ) получаем $a + (b \dot{-} a) = b + (a \dot{-} b) = b$ и $b \dot{-} (b \dot{-} a) = a \dot{-} (a \dot{-} b) = a$.

2.6. Двойная рекурсия.

2.701. По теореме 2.68, поскольку $1 \dot{-} f(a, a + (b \dot{-} a)) = 1$, то $\{1 \dot{-} \mid a + (b \dot{-} a), b \mid\} f(a, b) = 0$, и результат следует в силу 2.43.

2.71. Это следует из 2.701 в силу 2.33.

2.711. Как и в 2.701, $\{1 \dot{-} \mid Sb + (a \dot{-} Sb), a \mid\} f(a, b) = 0$ и, следовательно, $\{1 \dot{-} (Sb \dot{-} a)\} f(a, b) = 0$, откуда, умножая на $(a \dot{-} b)$, получаем результат с помощью 2.242.

2.72. В силу 2.701 и 2.71 $[\{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} + (a \dot{-} b)] f(a, b) = 0$, и результат получается с помощью 2.32.

2.7201.
$$a \dot{-} (a \dot{-} (a \dot{-} b)) = (a \dot{-} b) \dot{-} \{(a \dot{-} b) \dot{-} a\} = (a \dot{-} b) \dot{-} \{(a \dot{-} a) \dot{-} b\} = a \dot{-} b;$$
$$\{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\}\{b \dot{-} (a \dot{-} (a \dot{-} b))\} = \{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\}\{b \dot{-} (b \dot{-} (b \dot{-} a))\} = \{1 \dot{-} (b \dot{-} a)\}(b \dot{-} a) = 0.$$

2.7301. По теореме 2.68 $\{1 \dot{-} | x,\ p \dot{-} (p \dot{-} x) | \} f(x) = 0$, ибо $f(p \dot{-} (p \dot{-} x)) = 0$ и, следовательно, $\{1 \dot{-} (x \dot{-} p)\} f(x) = 0$. Аналогично, $\{1 \dot{-} (Sp \dot{-} x)\} f(x) = 0$ и результат получаем с помощью сложения, используя 2.6.

2.7302. Рассмотрим, например, случай $p = 2$; имеем $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(2 + Sr) = 0$. Пусть $\varphi(r) = f(2 + r)$; из $\varphi(0) = 0$, $\varphi(Sr) = 0$ следует, что $\varphi(r) = 0$. Пусть $\psi(r) = f(1 + r)$; из $\psi(0) = 0$, $\psi(Sr) = \varphi(r) = 0$ следует $\psi(r) = 0$. Наконец, из $f(0) = 0$, $f(Sr) = \psi(r) = 0$ следует $f(r) = 0$.

2.7303. Пусть $\varphi(r) = f(p \dot{-} r)$, тогда $\varphi(0) = 0$, $\varphi(Sr) = 0$ и, следовательно, $f(p \dot{-} r) = \varphi(r) = 0$, и результат получается с помощью 2.7301.

2.7304. Если $\varphi(x) = |f(x),\ p|$, то $\varphi(0) = 0$, $\varphi(Sx) = \varphi(x)$ и, следовательно, $\varphi(x) = Z(x) = 0$, откуда $f(x) = p$.

2.74. $\prod_f (x + S0) = \prod_f (x) \cdot f(Sx) = \prod_f (x) \cdot \varphi(x, 0)$ и

$$\prod_f (x + SSr) = \prod_f (x + Sr) \cdot f(x + SSr),$$

$$\prod_f (x) \cdot \varphi(x, Sr) = \prod_f (x) \cdot \varphi(x, r) \cdot f(x + SSr),$$

что доказывает первое равенство; следовательно, второе равенство выполняется при $r = 0$ и при подстановке Sr вместо r и поэтому выполняется и для любого r.

2.741. Если $\varphi(x) = \{1 \dot{-} f(x)\} \prod_f (x)$, то $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(Sx) = \{1 \dot{-} f(Sx)\} f(Sx) \prod_f (x) = 0$.

2.81. $\mathrm{Alt}\, Sx \cdot \mathrm{Alt}\, x = (1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, x)\, \mathrm{Alt}\, x = 0$; $\mathrm{Alt}\, x + \mathrm{Alt}\, Sx = \mathrm{Alt}\, x + (1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, x) = 1$; $(1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, 2x)(1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, (2x + 1)) = (1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, 2x) \times (1 \dot{-} (1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, 2x)) = 0$ и аналогично $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, (2x + 1))\} \times \mathrm{Alt}\, (2x + 2) = 0$, откуда в силу 2.36 $(1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, 2x)\, \mathrm{Alt}\, 2 \cdot Sx = 0$, что в сочетании с $\mathrm{Alt}\, 2 \cdot 0 = 0$ доказывает $\mathrm{Alt}\, 2x = 0$; следовательно, $\mathrm{Alt}\, (2x + 1) = 1$. Наконец, $\alpha(\mathrm{Alt}\, 0) = \alpha(0) = 0 = \mathrm{Alt}\, 0$, $\alpha(\mathrm{Alt}\, Sx) = \alpha(1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, x) = 1 \dot{-} \mathrm{Alt}\, x = \mathrm{Alt}\, Sx$, что доказывает $\alpha(\mathrm{Alt}\, x) = \mathrm{Alt}\, x$.

2.82. Мы замечаем сначала, что $\mathrm{Hf}\, SSx = \mathrm{Hf}\, x + \mathrm{Alt}\, x + \mathrm{Alt}\, Sx = \mathrm{Hf}\, x + 1$, откуда $\mathrm{Hf}\, (2 \cdot Sx) = S\, \mathrm{Hf}\, (2x)$, что вместе с $\mathrm{Hf}\, (2 \cdot 0) = 0$ доказывает $\mathrm{Hf}\, (2x) = x$. Следовательно, $\mathrm{Hf}\, (2x + 1) = \mathrm{Hf}\, (2x) + \mathrm{Alt}\, (2x) = x$.

2.83. В силу примера 2.243 и вводящих равенств для $\mathrm{Rt}\, x$, обозначая для краткости $\mathrm{Rt}\, x$ через Rx, имеем

$$(1 \dot{-} \{SSx \dot{-} (SRx)^2\})\, RSx = (1 \dot{-} \{SSx \dot{-} (SRx)^2\})\, Rx$$

и, следовательно, в силу 2.35

$$(1 \dot{-} \{SSx \dot{-} (SRx)^2\}) \cdot | Rx,\ RSx | = 0. \qquad \text{(i)}$$

По теореме 2.68

$$(1 \dot{-} | Rx,\ RSx |)\, (1 \dot{-} \{SSx \dot{-} (SRx)^2\})\, (SSx \dot{-} (SRSx)^2) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Умножая (i) на $SSx \dot{-} (SRSx)^2$ и прибавляя к (ii), мы получаем

$$(1 \dot{-} \{SSx \dot{-} (SRx)^2\})\, \{SSx \dot{-} (SRSx)^2\} = 0. \qquad \text{(A)}$$

В силу примера 2.241, умножая вводящее равенство на $1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx |$, мы получаем

$$\{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \cdot RSx = 1 \dot{-} \{ | (SRx)^2,\ Sx | \} \cdot SRx$$

и, следовательно,

$$\{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \cdot | RSx,\ SRx | = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Снова по теореме 2.68

$$\{1 \dot{-} | RSx,\ SRx | \} \{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \cdot | (RSx)^2,\ Sx | = 0 \qquad \text{(iv)}$$

и, прибавляя $| (RSx)^2,\ Sx |$ раз (iii) к (iv), получаем

$$\{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \cdot | (RSx)^2,\ Sx | = 0. \qquad \text{(v)}$$

Следовательно,

$$\{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \{Sx \dot{-} (RSx)^2\} = 0,$$

поэтому

$$\{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \{SSx \dot{-} (SRSx)^2\} = 0. \qquad \text{(B)}$$

Из (A) и (B) в силу примера 2.34

$$(1 \dot{-} \{Sx \dot{-} (SRx)^2\})\, (SSx \dot{-} (SRSx)^2) = 0;$$

но $S0 \dot{-} (SR0)^2 = 0$ и поэтому

$$Sx \dot{-} (SRx)^2 = 0. \qquad \text{(vi)}$$

Из (v) мы получаем

$$\{1 \dot{-} | (SRx)^2,\ Sx | \} \{(RSx)^2 \dot{-} Sx\} = 0. \qquad \text{(C)}$$

Опять из вводящих равенств мы находим, что имеет место $\{(SRx)^2 \dot{-} Sx\} | Rx,\ RSx | = 0$. По теореме 2.68

$$(1 \dot{-} | Rx,\ RSx |)\, (1 \dot{-} \{(Rx)^2 \dot{-} x\})\, ((RSx)^2 \dot{-} x) = 0$$

и, следовательно, в силу примера 2.36

$$((SRx)^2 \dot{-} Sx)\, (1 \dot{-} \{(Rx)^2 \dot{-} x\})\, ((RSx)^2 \dot{-} x) = 0,$$

откуда в силу 2.332

$$((SRx)^2 \dot{-} Sx)\, (1 \dot{-} \{(Rx)^2 \dot{-} x\})\, ((RSx)^2 \dot{-} Sx) = 0. \qquad \text{(D)}$$

Из (C), (D) (так как $1 \dot{-} |a,\ b| = \{1 \dot{-} (a \dot{-} b)\} \dot{-} (b \dot{-} a)$ и $prs = 0$ следуют из $qrs = 0$ и $(p \dot{-} q)\, r = 0$)

$$(1 \dot{-} \{Sx \dot{-} (SRx)^2\})\, (1 \dot{-} \{(Rx)^2 \dot{-} x\})\, ((RSx)^2 \dot{-} Sx) = 0$$

и поэтому в силу (vi)

$$(1 \dot{-} \{(Rx)^2 \dot{-} x\})\, ((RSx)^2 \dot{-} Sx) = 0,$$

что вместе с равенством $(R0)^2 \dot{-} 0 = 0$ доказывает $(Rx)^2 \dot{-} x = 0$.

2.9. Из $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} n!)\} (1 \dot{-} n!) = 0$, $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} n!)\} (1 \dot{-} Sn) = 0$ в силу примера 2.47 следует $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} n!)\} \{1 \dot{-} (n!)\, Sn\} = 0$, т. е.

$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} n!)\}\{1 \dot{-} (Sn)!\} = 0$, что вместе с $1 \dot{-} 0! = 0$ доказывает $1 \dot{-} n! = 0$. Далее $(S0)! = 1 = \prod_S(0)$; $(SSn)! = \{(Sn)!\}SSn$ и $\prod_S(Sn) = \prod_S(n) \cdot SSn$, а это доказывает, что $(Sn)! = \prod_S(n)$.

2.91. Из $(1 \dot{-} c)\{1 \dot{-} (1 \dot{-} c)\} = 0$ и $\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)\} \times (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b) = 0$ следуют такие два равенства:

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)\}(1 \dot{-} c)\{(1 \dot{-} (1 \dot{-} c)) \dot{-} b\} = 0,$$
$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)\}(1 \dot{-} a)\{(1 \dot{-} b) \dot{-} (1 \dot{-} c)\} = 0,$$

откуда в силу примера 2.47 получаем

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} a)(1 \dot{-} b)\}(1 \dot{-} ac)\{1 \dot{-} (b + (1 \dot{-} c))\} = 0.$$

Глава III

3.01. Используйте примеры 2.25 и 2.26. **3.02.** Примеры 2.25. 2.47 и 2.26. **3.03.** Примеры 2.351, 2.1. **3.031.** Примеры 2.25, 2.1. **3.032.** Ассоциативное свойство сложения. **3.04.** Пример 2.1. **3.041.** Примеры 2.25, 2.1. **3.05.** Коммутативное свойство умножения. **3.051.** Пример 2.25. **3.052.** Пример 2.25. **3.06.** Коммутативное свойство умножения. **3.0601.** Пример 2.31. **3.061.** Пример 2.36. **3.0611.** Пример 2.25. **3.062.** Пример 2.26 (последняя часть). **3.063.** Пример 2.471. **3.064.** Пример 2.351. **3.07.** Пример 2.36. **3.071.** Так же, как 3.07. **3.08.** Так же, как 3.07. **3.081.** Так же, как 3.07. **3.082.** Пример 2.351. **3.083.** Пример 2.48. **3.084.** Пример 2.351. **3.085.** С помощью примеров 3.081, 3.083 и 3.084. **3.09.** Пример 2.25. **3.091.** Так же, как в 3.09. **3.0911.** Примеры 2.25, 2.36 и 2.232. **3.092.** Пример 2.232. **3.093.** Примеры 2.25 и 2.232. **3.1.** Пример 2.242. **3.11.** Примеры 2.331 и 2.244. **3.12.** Пример 2.244.

3.121. Данная формула эквивалентна формуле

$$(Sb \dot{-} a)(Sc \dot{-} b)(a \dot{-} c) = (Sb \dot{-} a)(Sc \dot{-} b)\,[\{(b \dot{-} c) + (a \dot{-} (c \dot{-} b))\} \dot{-} b] = (Sb \dot{-} a)(Sc \dot{-} b) \cdot \{(a \dot{-} b) \dot{-} (c \dot{-} b)\} = 0.$$

3.13. Эквивалентно 3.12. **3.131.** Теорема 3.43 и пример 3.052. **3.132.** Теорема 2.63 и пример 2.35. **3.14.** Пример 2.1. **3.15.** Пример 2.4701. **3.16.** Если $f(x) = 2x \dot{-} (1 + x^2)$, то $f(0) = 0$, $f(Sx) = (2x + 2) \dot{-} (2 + 2x + x^2) = 0$. **3.161.** Если $f(a, b) = 2ab \dot{-} (a^2 + b^2)$, то $f(a, 0) = f(0, b) = 0$ и $f(Sa, Sb) = f(a, b)$, так что $f(a, b) = 0$. **3.17.** Пример 2.43. **3.171.** В силу теоремы 2.63 и примера 2.25 имеем

$$\{1 \dot{-} |a, A|\} \cdot |f(a, b), f(A, b)| = 0$$

и

$$\{1 \dot{-} |b, B|\} \cdot |f(A, b), f(A, B)| = 0;$$

умножая первое равенство на $1 \dot{-} |b, B|$, а второе — на $1 \dot{-} |a, A|$ и используя пример 2.453, получаем

$$\{1 \dot{-} |a, A|\}\{1 \dot{-} |b, B|\} \cdot |f(a, b), f(A, B)| = 0,$$

откуда результат получается с помощью примера 2.25.

3.18. Действительно $k \leqslant b \to b = k + (b \dot{-} k)$ и $l \leqslant a \to a = l + (a \dot{-} l)$, $ka \dot{-} lb = k(l + (a \dot{-} l)) \dot{-} l(k + (b \dot{-} k)) = k(a \dot{-} l) \dot{-} l(b \dot{-} k)$ [в силу примера 2.23] $= (k + (b \dot{-} k))(a \dot{-} l) \dot{-} (l + (a \dot{-} l))(b \dot{-} k)$ [в силу того же примера] $= b(a \dot{-} l) \dot{-} a(b \dot{-} k)$.

3.19. $b \geqslant c \to b = c + (b \dot{-} c)$ и $b = c + (b \dot{-} c) \to (a + b) \dot{-} c = \{a + (b \dot{-} c) + c\} \dot{-} c$.

3.191. $l \leqslant n \to n = l + (n \dot{-} l)$, $m \leqslant n \to n = m + (n \dot{-} m)$ и, следовательно (в силу примера 3.131),

$$l \leqslant n \,\&\, m \leqslant n \to \{l + (n \dot{-} l) = m + (n \dot{-} m)\} \to \{l + S(n \dot{-} l) = Sm + (n \dot{-} m)\};$$

но

$$n \dot{-} l < n \dot{-} m \to S(n \dot{-} l) \leqslant n \dot{-} m \to \{Sm + (n \dot{-} m)\} \dot{-} S(n \dot{-} l) = Sm + \{(n \dot{-} m) \dot{-} S(n \dot{-} l)\},$$

и поэтому

$$l \leqslant n \,\&\, m \leqslant n \,\&\, n \dot{-} l < n \dot{-} m \to l = Sm + (l \dot{-} Sm) \to l > m.$$

3.192. $p \geqslant q \,\&\, r \geqslant s \to \{p = q + (p \dot{-} q)\} \,\&\, \{r = s + (r \dot{-} s)\} \to \{(p + s) \dot{-} (q + r)\} = \{(q + s + (p \dot{-} q)) \dot{-} (q + s + (r \dot{-} s))\} = (p \dot{-} q) \dot{-} (r \dot{-} s)$.

3.193. Обозначим данную импликацию через $P(n)$. $P(0)$ — это просто $(1 \dot{-} x)\{f(x) \dot{-} f(0)\} = 0$. Из $(x = Sn) \to \{f(x) = f(Sn)\}$ и $a = b \to a \leqslant b + c$ следует $(x = Sn) \to \left\{f(x) \leqslant \sum_f(Sn)\right\}$, и отсюда мы выводим $P(n) \to \left\{(x = Sn) \to \left(f(x) \leqslant \sum_f(Sn)\right)\right\}$; аналогично, из $a \leqslant b \to a \leqslant b + c$ мы выводим

$$P(n) \to \left\{(x \leqslant n) \to \left(f(x) \leqslant \sum_f(Sn)\right)\right\}.$$

Отсюда в силу примера 2.47

$$P(n) \to \left\{(x \leqslant n) \vee (x = Sn) \to \left(f(x) \leqslant \sum_f(Sn)\right)\right\},$$

и затем в силу примера 3.11 мы выводим $P(n) \to P(Sn)$, что доказывает $P(n)$ по индукции.

3.194. $(p \dot{-} r) \dot{-} (q \dot{-} r) = p \dot{-} (r + (q \dot{-} r)) = p \dot{-} (q + (r \dot{-} q)) = (p \dot{-} q) \dot{-} (r \dot{-} q)$ и, следовательно,

$$\{1 \dot{-} (r \dot{-} q)\}\{(p \dot{-} r) \dot{-} (q \dot{-} r)\} = \{1 \dot{-} (r \dot{-} q)\}(p \dot{-} q),$$

откуда $\{1 \dot{-} (r \dot{-} q)\} |(p \dot{-} r) \dot{-} (q \dot{-} r), (p \dot{-} q)| = 0$.

3.2. Пусть $p(x, a)$ обозначает равенство $f(x, a) = 0$; из доказанного равенства $f(x, a) = 0$ мы выводим $f(0, a) = 0$ и $f(Sn, a) = 0$ и поэтому

$$\left\{1 \dot{-} \sum_f(n)\right\} \sum_f(Sn) = \left\{1 \dot{-} \sum_f(n)\right\}\left\{\sum_f(n) + f(Sn, a)\right\} = 0.$$

В случае второй схемы мы замечаем, что $\{1 \dot{-} f(x)\} \prod_f(x) = 0$ в силу примера 2.741.

3.31. Подставьте по очереди 0 и Sn вместо n.

3.32. Поскольку $\sim\sim p \leftrightarrow p$, то нам надо доказать $\varphi(n) = \sum_f(n)\cdot\prod_{1\dot{-}f}(n) = 0$ (где $(1\dot{-}f)(n)$ обозначает функцию $1\dot{-}f(n)$). Результат следует из равенств

$$\varphi(0) = f(0)\cdot(1\dot{-}f(0)) = 0,$$

$$\{1\dot{-}\varphi(n)\}\varphi(Sn) = \{1\dot{-}\varphi(n)\}\left\{\sum_f(n)+f(Sn)\right\}\prod_{1\dot{-}f}(n)\times$$
$$\times(1\dot{-}f(Sn)) = \{1\dot{-}\varphi(n)\}\varphi(n)(1\dot{-}f(Sn)) = 0.$$

3.321. Если $\psi(n) = \left\{1\dot{-}\prod_f(n)\right\}\left\{1\dot{-}\sum_{1\dot{-}f}(n)\right\}$, то

$$\psi(0) = \{1\dot{-}f(0)\}\{1\dot{-}(1\dot{-}f(0))\} = 0$$

и

$$\{1\dot{-}\psi(n)\}\psi(Sn) = \left\{1\dot{-}\left(1\dot{-}\prod_f(n)\right)\left(1\dot{-}\sum_{1\dot{-}f}(n)\right)\right\}\times$$
$$\times\left\{1\dot{-}\prod_f(n)\cdot f(Sn)\right\}\cdot\left[1\dot{-}\left\{\sum_{1\dot{-}f}(n)+(1\dot{-}f(Sn))\right\}\right] = 0$$

в силу примера 2.91.

3.322. Это следует из двух предыдущих примеров.

3.33. $\left\{1\dot{-}\sum_f(0)\right\}f(0) = 0$ и

$$\left\{1\dot{-}\sum_f(Sn)\right\}f(Sn) = \{1\dot{-}f(Sn)\}f(Sn)\dot{-}\sum_f(n)f(Sn) = 0.$$

3.34. Индукция по n с использованием примера 3.041.

3.35. Пусть $l = L_x^n p(x)$, тогда $E_x^n p(x)\to p(l)\,\&\,l\leqslant n$,

$$l\leqslant n\to l = n\dot{-}(n\dot{-}l),\quad l = n\dot{-}(n\dot{-}l)\to\{p(l)\to p(n\dot{-}(n\dot{-}l))\}$$

и, следовательно (используя пример 3.092),

$$E_x^n p(x)\to p(n\dot{-}(n\dot{-}l))$$
$$\to E_r^n p(n\dot{-}r).$$

3.36. Это следует из 3.33 и 3.34.

3.37. Положим $\varphi(a, x) = f(x, a)$; в силу примера 3.36 мы имеем как

$$A_t^{a+c}\{f(t, a+c) = 0\}\to f(a, a+c) = 0,$$

так и

$$A_t^{a+c}\{\varphi(t, a+c) = 0\}\to\varphi(a, a+c) = 0,$$

т. е.

$$A_t^{a+c}\{f(a+c, t) = 0\}\to f(a+c, a) = 0.$$

Поэтому, если $P(x, a)$ обозначает

$$A_t^a\{f(t, a) = 0\}\,\&\,A_u^x\{f(x, u) = 0\}\to f(x, a) = 0,$$

то мы доказали как $P(a+c, a)$, так и $P(a, a+c)$, откуда $P(x, a)$ следует в силу примера 2.272.

3.38. Обозначим $L_x^m(f(x) = a)$ через b, тогда $E_x^m(f(x) = a)\to f(b) = a$. Так как $f(b) = a\to\{p(a)\to p(f(b))\}$, т. е. $\{f(b) = a\}\,\&\,p(a)\to p(f(b))$ и $b\leqslant m$, то $E_x^m\{f(x) = a\}\,\&\,p(a)\to E_x^m p(f(x))$ в силу примера 3.42.

3.39. $f(a) = 0$ следует из $\{1\dot{-}|\,a,\,a\,|\}f(a) = 0$.

3.391. $1\dot{-}f(a) = 0$ следует из $\{1\dot{-}f(a)\}\{1\dot{-}|\,a,\,a\,|\} = 0$.

3.392. Из $p(a+r)\to q(a)$ мы выводим $p(a+(b\dot{-}a))\to q(a)$; по теореме 3.43 $\{b = a+(b\dot{-}a)\}\to\{p(b)\to p(a+(b\dot{-}a))\}$ и, следовательно, $\{b = a+(b\dot{-}a)\}\to\{p(b)\to q(a)\}$, откуда, взяв $b\dot{-}r$ вместо a, в силу $(b\dot{-}r)+\{b\dot{-}(b\dot{-}r)\} = b+\{(b\dot{-}r)\dot{-}b\} = b$ имеем $\{b = b\}\to\{p(b)\to q(b\dot{-}r)\}$ и, следовательно, $p(b)\to q(b\dot{-}r)$.

3.41. $\left\{1\dot{-}\prod_f(n)\right\}\prod_f(Sn) = \left\{1\dot{-}\prod_f(n)\right\}\prod_f(n)\cdot f(Sn) = 0$.

3.42. Пусть $P(b)$ обозначает формулу $a\leqslant b\,\&\,p(a)\to E_x^b p(x)$, где $p(x)$ — пропозициональная функция $f(x) = 0$. $P(0)$ выполняется по теореме 3.43. Поскольку $E_x^b p(x)\to E_x^{Sb}p(x)$ (в силу примеров 3.322, 3.34), то $P(b)\to\left\{a\leqslant b\,\&\,p(a)\to E_x^{Sb}p(x)\right\}$; но $\{(a = Sb)\,\&\,p(a)\}\to p(Sb)$ (теорема 3.43) и, следовательно, $(a = Sb)\,\&\,p(a)\to E_x^{Sb}p(x)$. Так как $(a\leqslant Sb)\to(a\leqslant b)\vee(a = Sb)$ (пример 3.11), то в силу примера 3.081 $P(b)\to P(Sb)$, что завершает доказательство $P(b)$ по индукции.

3.5. Пусть $Q(r)$ обозначает $A_x^{p+Sr}q(x)$, тогда $Q(0)$ следует из $A_x^p q(x)$ и $q(p+1)$; так как $Q(Sr)$ эквивалентно $Q(r)\,\&\,q(p+SSr)$, то $q(p+SSr)\to(Q(r)\to Q(Sr))$ и, следовательно, $Q(r)\to Q(Sr)$ следует из $q(p+SSr)$, что доказывает $Q(r)$, т. е. $A_x^{p+Sr}q(x)$. В силу примеров 3.34 и 3.392 $A_x^{p\dot{-}r}q(x)$ следует из $A_x^p q(x)$, и поэтому $A_x^n q(x)$ следует в силу примера 2.7301.

3.6. Имеем $b < l\to\sim p(n\dot{-}b)$ в силу характеристического свойства L-оператора. Так как $g < a\,\&\,a\leqslant n\to n\dot{-}a < l$ (взяв $n\dot{-}a$ в качестве m в примере 3.191), то $g < a\,\&\,a\leqslant n\to\sim p(n\dot{-}(n\dot{-}a))$; но $a\leqslant n\to a = n\dot{-}(n\dot{-}a)$ и, следовательно, $g < a\,\&\,a\leqslant n\to\sim p(a)$, что доказывает (ii). Формула (i) следует из примера 3.35.

3.7. Так как $a = 0\to ab = 0$, то $ab > 0\to a\geqslant 1\,\&\,b\geqslant 1$. Более того, $a\geqslant 1\to(y+1)\,a\geqslant(y+1) > y$. Из $(y+1)\,a > y$ следует $E_n^{y+1}\sim\{nb\leqslant x\,\&\,na\leqslant y\}$ и поэтому, если $N = L_n^{y+1}\sim\{nb\leqslant x\,\&\,na\leqslant y\}$, то $\sim\{Nb\leqslant x\,\&\,Na\leqslant y\}$; так как $0\leqslant x\,\&\,0\leqslant y$, то $N > 0$ и, следовательно, $N\dot{-}1 < N$. Но $n < N\to\{nb\leqslant x\,\&\,na\leqslant y\}$ и поэтому $N\dot{-}1$ является наибольшим значением n, для которого $nb\leqslant x\,\&\,na\leqslant y$.

3.81. Из доказанного равенства $(1\dot{-}p)\,q(x) = 0$ мы выводим $(1\dot{-}p)\,q(0) = 0$ и $(1\dot{-}p)\,q(x+1) = 0$, поэтому

$$(1\dot{-}(1\dot{-}p)\sum_q(x))(1\dot{-}p)\sum_q(x+1) =$$
$$= (1\dot{-}(1\dot{-}p)\sum_q(x))(1\dot{-}p)\sum_q(x) = 0,$$

и по индукции следует $(1\dot{-}p)\sum_q(x) = 0$.

3.82. Из доказанного равенства $(1 \dot{-} q(x))\,p = 0$ следует $(1 \dot{-} q(0))\,p = 0$ и $(1 \dot{-} q(x+1))\,p = 0$ и отсюда, используя пример 2.272, получим

$$\{1 \dot{-} (1 \dot{-} \prod_q(x))\,p\}\,(1 \dot{-} \prod_q(x+1))\,p = \{1 \dot{-} (1 \dot{-} \prod_q(x))\,p\}\,(1 \dot{-} q(x+1))\,p = 0,$$

что завершает доказательство по индукции.

3.831. Из истинной формулы

$$(n \dot{-} r) > n \to \sim(0 = 0)$$

и предыдущего примера следует

$$E_r^n((n \dot{-} r) > n) \to \sim(0 = 0),$$

откуда

$$\begin{aligned}(0 = 0) &\to \sim E_r^n((n \dot{-} r) > n)\\ &\to \sim E_x^n(x > n) \quad \text{(в силу примера 3.35)}\\ &\to A_x^n(x \leqslant n),\end{aligned}$$

а отсюда с помощью примера 3.39 мы выводим $A_x^n(x \leqslant n)$.

3.832. В виде $\sim(y \leqslant n \to p(y)) \to \sim A_x^n p(x)$ это эквивалентно примеру 3.42.

3.833. Если обозначить функцию $p \cdot q(x)$ через $r(x)$, то нам надо доказать $(1 \dot{-} \sum_r(n))\,p \sum_q(n) = 0$. Это следует из равенства $\sum_r(n) = p \sum_q(n)$, которое легко доказывается, если заметить, что оно верно при $n = 0$ и что

$$\sum_r(n+1) = \sum_r(n) + p \cdot q(n+1)$$

и

$$p \cdot \sum_q(n+1) = p \cdot \sum_q(n) + p \cdot q(n+1).$$

3.834. Взять $\sim p$ вместо p в примере 3.833.

3.84. В силу 3.81 $p \to A_x^n(q \to r(x))$ следует из $p \to (q \to r(x))$ и в силу 3.834 $A_x^n(q \to r(x)) \to (q \to A_x^n r(x))$, откуда следует истинность рассматриваемой схемы.

3.91. Как и в примере 3.833, если $r(x) = p \cdot q(x)$, то $\sum_r(n) = p \cdot \sum_q(n)$ и, следовательно, $(1 \dot{-} p) \sum_r(n) = (1 \dot{-} p)\,p \sum_q(n) = 0$.

3.92. Положим $r(x) = p + q(x)$; тогда $\sum_r(n) = (n+1)p + \sum_q(n)$, ибо функции и в левой и в правой частях этого равенства удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам, а поэтому

$$\{1 \dot{-} \sum_r(n)\}\,\{p + \sum_q(n)\} = \{(1 \dot{-} (p + \sum_q(n))) \dot{-} np\}\,(p + \sum_q(n)) = 0$$

и

$$\{1 \dot{-} (p + \sum_q(n))\} \sum_r(n) = \{1 \dot{-} (p + \sum_q(n))\}\,np = \{(1 \dot{-} p) \dot{-} \sum_q(n)\}\,pn = 0.$$

3.93. Функции $\sum_{p+q}(n)$ и $\sum_p(n) + \sum_q(n)$, как легко показать, удовлетворяют одним и тем же вводящим равенствам, и из равенства $\sum_{p+q}(n) = \sum_p(n) + \sum_q(n)$ следует рассматриваемый пример.

3.931. Рассмотрите отрицания обеих частей 3.93 с $\sim p$, $\sim q$ вместо p, q.

3.94. Пусть $r(x) = \{1 \dot{-} p(x)\}\,q(x)$, так что нам надо доказать $\psi(n) = (1 \dot{-} \sum_r(n))(1 \dot{-} \sum_p(n)) \sum_q(n) = 0$. Ясно, что $\psi(0) = 0$ и

$$\begin{aligned}\psi(n+1) &= (1 \dot{-} \textstyle\sum_r(n+1))(1 \dot{-} \sum_p(n+1)) \sum_q(n+1) =\\ &= \{(1 \dot{-} r(n+1)) \dot{-} \textstyle\sum_r(n)\} \times\\ &\times \{(1 \dot{-} p(n+1)) \dot{-} \textstyle\sum_p(n)\}\,\{q(n+1) + \sum_q(n)\} =\\ &= \{(1 \dot{-} \textstyle\sum_r(n)) \dot{-} r(n+1)\}\,\{(1 \dot{-} \sum_p(n)) \dot{-} p(n+1)\} \sum_q(n) =\\ &= \psi(n) \dot{-} \{(1 \dot{-} \textstyle\sum_r(n))\,p(n+1) + (1 \dot{-} \sum_p(n+1))\,r(n+1)\} \sum_q(n),\end{aligned}$$

ибо $(1 \dot{-} r(n+1))(1 \dot{-} p(n+1))\,q(n+1) = 0$, и поэтому имеем $(1 \dot{-} \psi(n))\,\psi(n+1) = 0$, что доказывает $\psi(n) = 0$.

3.95. $A_x^n(x \leqslant n \to p(x)) \to (A_x^n(x \leqslant n) \to A_x^n p(x))$ в силу 3.94 и поэтому $A_x^n(x \leqslant n) \to (A_x^n(x \leqslant n \to p(x)) \to A_x^n p(x))$, в силу чего первую часть рассматриваемого примера можно вывести из примера 3.831. Что касается второй части, то в силу 3.832

$$A_x^n p(x) \to (y \leqslant n \to p(y))$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}A_x^n p(x) &\to A_y^n(y \leqslant n \to p(y))\\ &\to A_x^n(x \leqslant n \to p(x)).\end{aligned}$$

3.96. Рассмотрите отрицания обеих частей 3.95 с $\sim p$ вместо p.

3.97. Из равенства $(1 \dot{-} (1 \dot{-} p)\,q)\,(1 \dot{-} (1 \dot{-} q))\,(1 \dot{-} p) = 0$ (которое доказывается, если взять в качестве p по очереди 0 и Sp) мы выводим $(p(x) \to q(x)) \to (\sim q(x) \to \sim p(x))$, а из этого доказанного равенства мы получаем

$$\begin{aligned}A_x^n(p(x) \to q(x)) &\to A_x^n(\sim q(x) \to \sim p(x))\\ &\to (A_x^n(\sim q(x)) \to A_x^n(\sim p(x)))\\ &\to (\sim A_x^n(\sim p(x)) \to \sim A_x^n(\sim q(x)))\\ &\to (E_x^n p(x) \to E_x^n q(x)).\end{aligned}$$

3.98. Скомбинируйте формулу 3.97 с формулой, получающейся из нее перестановкой $p(x)$ и $q(x)$, а затем примените пример 3.93.

3.981. $A_x^n(p(x) \to q) \leftrightarrow A_x^n(\sim p(x) \vee q) \leftrightarrow \left(\sim E_x^n p(x) \vee q\right) \leftrightarrow \left(E_x^n p(x) \to q\right)$.

3.982. $A_x^n A_y^n p(x, y) \leftrightarrow A_u^n A_v^n p(u, v) \to A_u^n(y \leqslant n \to p(u, y)) \to (x \leqslant n) \to (y \leqslant n \to p(x, y))$

и, следовательно, $\left(A_u^n A_v^n p(u, v) \,\&\, y \leqslant n\right) \to ((x \leqslant n) \to p(x, y))$; поэтому $\left(A_u^n A_v^n p(u, v) \,\&\, y \leqslant n\right) \to A_x^n p(x, y)$ и, следовательно, $A_u^n A_v^n p(u, v) \to \left(y \leqslant n \to A_x^n p(x, y)\right)$, $A_u^n A_v^n p(u, v) \to A_y^n A_x^n p(x, y)$.

3.983. Рассмотрите отрицания обеих частей 3.982 с $\sim p$ вместо p.

3.984. Из $(x \leqslant n) \,\&\, p(x, y) \to E_z^n p(z, y)$ мы последовательно выводим

$$A_y^n((x \leqslant n) \,\&\, p(x, y)) \to A_y^n E_z^n p(z, y),$$

$$E_x^n\left(x \leqslant n \,\&\, A_y^n p(x, y)\right) \to A_y^n E_z^n p(z, y),$$

$$E_x^n A_y^n p(x, y) \to A_y^n E_x^n p(x, y).$$

3.99. $E_x^n E_y^n(p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, x > y) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow E_u^n E_v^n(p(u) \,\&\, p(v) \,\&\, u > v)$

$\leftrightarrow E_y^n E_x^n(p(y) \,\&\, p(x) \,\&\, y > x)$

$\leftrightarrow E_x^n E_y^n(p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, y > x)$ в силу 3.983;

из равенства

$$(1 \dot{-} (a + bc))(a + b)(a + c) = (a + c)((1 \dot{-} a) \dot{-} bc)\, b = ((1 \dot{-} bc) \dot{-} a)\, bc = 0$$

мы выводим $p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, ((x > y) \vee (x < y)) \leftrightarrow (p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, (x > y)) \vee (p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, (x < y))$ и, следовательно, с помощью двух применений примера 3.931 и с помощью равенства $(1 \dot{-} (1 \dot{-} b)\, a)(1 \dot{-} ab)\, a = 0$ получаем

$$E_x^n E_y^n(p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, x \neq y) \leftrightarrow E_x^n E_y^n(p(x) \,\&\, p(y) \,\&\, x > y).$$

Глава IV

4. $R(0, 0) = 0$ и по теореме 4.03 $n > 0 \,\&\, n = n \cdot 1 + 0 \to R(n, n) = 0$.

4.01. Если $\varphi(a) = R(a, 0)$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(Sa) = S\varphi(a) \cdot \alpha S\varphi(a) = S\varphi(a)$, так что $\varphi(a) = a$. Аналогично, $Q(a, 0) = 0$.

4.011. $x > 0 \,\&\, y = 0 \to R(x, y) = x > 0$.

4.012. $R(a, b) = 0 \to a = b \cdot Q(a, b)$, $R(b, c) = 0 \to b = c \cdot Q(b, c)$ и, следовательно, $R(a, b) = 0 \,\&\, R(b, c) = 0 \to a = c\{Q(a, b) \cdot Q(b, c)\}$,

откуда $c > 0 \to \{R(a, b) = 0 \,\&\, R(b, c) = 0 \to R(a, c) = 0\}$. Но $c = 0 \,\&\, R(b, c) = 0 \to b = 0$, $b = 0 \,\&\, R(a, b) = 0 \to a = 0$, и поэтому $c = 0 \to \{R(a, b) = 0 \,\&\, R(b, c) = 0 \to R(a, c) = R(0, 0) = 0\}$, что завершает доказательство.

4.013. $x = 0 \,\&\, R(a, x) = 0 \to a = 0$, поэтому

$$x = 0 \to \{R(a, x) = 0 \to R(ab, x) = R(0, 0) = 0\};$$

$$x > 0 \,\&\, R(a, x) = 0 \to ab = x\{b \cdot Q(a, x)\} \to R(ab, x) = 0.$$

4.014. Достаточно доказать эквивалентную формулу

$$R(ax, bx) = 0 \,\&\, R(a, b) > 0 \to x = 0.$$

Поскольку $a = bQ(a, b) + R(a, b)$, то $ax = bxQ(a, b) + xR(a, b)$; если $b > 0$, $R(a, b) < b$, то $b > 0 \to \{x > 0 \to xR(a, b) < bx\}$ и, следовательно, $b > 0 \to \{x > 0 \to xR(a, b) = R(ax, bx)\}$, откуда $b > 0 \to \{x > 0 \to R(a, b) = 0 \vee R(ax, bx) > 0\}$, так что $b > 0 \to \{R(ax, bx) = 0 \,\&\, R(a, b) > 0 \to x = 0\}$. Далее, $b = 0 \,\&\, R(ax, bx) = 0 \to ax = 0$; $b = 0 \,\&\, R(a, b) > 0 \to a > 0$, так что в результате получаем $b = 0 \to \{R(ax, bx) = 0 \,\&\, R(a, b) > 0 \to x = 0\}$.

4.02. $\{R(p, a) = 0 \,\&\, R(q, b) = 0 \to pq = ab\{Q(p, a) \cdot Q(q, b)\}\}$, так что

$$ab > 0 \to \{R(p, a) = 0 \,\&\, R(q, b) = 0 \to R(pq, ab) = 0\}.$$

Далее, $ab = 0 \to a = 0 \vee b = 0$; $a = 0 \,\&\, R(p, a) = 0 \to p = 0$ и $b = 0 \,\&\, R(q, b) = 0 \to q = 0$, так что

$$ab = 0 \to \{R(p, a) = 0 \,\&\, R(q, b) = 0 \to R(pq, ab) = R(0, 0) = 0\}.$$

4.03. $R(0, 1) = 0$, $x = x \cdot 1 + 0 \,\&\, x > 0 \to R(x, 1) = 0$.

4.04. $R(a, bc) = 0 \to a = b\{c \cdot Q(a, bc)\}$ и, следовательно, $b > 0 \to \{R(a, bc) = 0 \to R(a, b) = 0\}$; но $b = 0 \,\&\, R(a, bc) = 0 \to a = 0$, так что $b = 0 \to \{R(a, bc) = 0 \to R(a, b) = R(0, 0) = 0\}$.

4.1. $R(a + b, c) = 0 \to a + b = c \cdot Q(a + b, c)$, $R(a, c) = 0 \to a = c \cdot Q(a, c)$, и поэтому $R(a + b, c) = 0 \,\&\, R(a, c) = 0 \to b = c\{Q(a + b, c) \dot{-} Q(a, c)\}$, что завершает доказательство в случае $c > 0$. Если $c = 0$, то мы заключаем, как и выше, что $b = 0$ и, следовательно, $R(b, c) = 0$.

4.2. $ab = b \cdot a + 0$, так что $b > 0 \to R(ab, b) = 0$; если $b = 0$, то $R(ab, b) = R(0, 0) = 0$.

4.21. Если $R(a, b) = 0$, то $a + 1 = b \cdot Q(a, b) + R(a, b) + 1 = bQ(a, b) + 1$, так что $b > 1 \to R(a + 1, b) = 1$.

4.3. Это следует из примеров 4.2 и 4.21.

4.31. В силу примера 2.473 имеем $b > 0 \to a = b + cd$, и поэтому $b > 0 \to a = d(c + Q(b, d)) + R(b, d) \,\&\, R(b, d) < d$, что доказывает $b > 0 \to R(a, d) = R(b, d)$.

4.32. $a = \{Q(b, d) + x\}d + R(b, d)$, откуда $R(a, d) = R(b, d)$.

4.321. $R(c, d) = R(b, d) = R(a, d)$.

4.322. Так как $ar = Q(a, d)\, dr + R(a, d)r$, $br = Q(b, d)dr + R(b, d)\, r$, то в силу 4.32 $ar = R(a, d)\, r \pmod d$, $br = R(b, d)\, r \pmod d$, откуда, поскольку $R(a, d) = R(b, d)$, результат следует с помощью 4.321.

4.323. Если r_1 обозначает общее значение $R(a_1, d)$, $R(b_1, d)$; r_2 — общее значение $R(a_2, d)$, $R(b_2, d)$, то

$$a_1 + a_2 = \{Q(a_1, d) + Q(a_2, d)\}\, d + r_1 + r_2,$$
$$b_1 + b_2 = \{Q(b_1, d) + Q(b_2, d)\}\, d + r_1 + r_2,$$

откуда $a_1 + a_2 = (r_1 + r_2) \pmod d = b_1 + b_2 \pmod d$.

4.4. Если $\varphi(n) = R\left(\prod_f(n), f(n)\right)$, то $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(Sn) = 0$ в силу 4.2.

4.41. Если $\varphi(n) = R\left(\prod_f(r+n), \prod_f(r)\right)$, то $\varphi(0) = 0$ и в силу 4.013 $\varphi(n) = 0 \to \varphi(Sn) = 0$.

4.42. $\prod_f(a + (n \dot{-} a))$ делится на $\prod_f(a)$ и $a \leqslant n \to a + (n \dot{-} a) = n$.

4.43. Если $P(n)$ обозначает данную формулу, то выполняется $P(0)$ и, поскольку $(Sn)! = \prod_S(n)$, то $x \leqslant n \to R((Sn)!, Sx) = 0$ (в силу 4.42), т. е. $Sx \leqslant Sn \to R((Sn)!, Sx) = 0$, так что получаем $0 < a \,\&\, a \leqslant Sn \to R((Sn)!, a) = 0$, т. е. имеет место $P(Sx)$.

4.44. Примеры 4.21 и 4.43.

4.45. $q(2) \leqslant 2$, $q(2) > 1$, так что $q(2) = 2$ и, следовательно, $p(2) = 0$.

4.46. $q(3) \leqslant 3$, $q(2) > 1$; так как $3 = 2 \cdot 1 + 1$, то $R(3, 2) = 1$ и, поскольку $R(3, q(3)) = 0$, то по теореме 3.43 следует, что имеет место $\sim(q(3) = 2)$, и поэтому $q(3) = 3$, что доказывает простоту числа 3.

4.5. $\mathfrak{p}(0) = 2$, $\mathfrak{p}(1) > \mathfrak{p}(0)$, так что $\mathfrak{p}(1) > 2$; из $\mathfrak{p}(n+2) > \mathfrak{p}(n+1)$ и $\mathfrak{p}(n+2) > \mathfrak{p}(n+1) \,\&\, \mathfrak{p}(n+1) > 2 \to \mathfrak{p}(n+2) > 2$ по индукции следует $\mathfrak{p}(n+1) > 2$.

4.51. $\mathfrak{p}(0) = 2$, $2 > 0$, и $\mathfrak{p}(n+1) \geqslant S\mathfrak{p}(n) \,\&\, \mathfrak{p}(n) > n \to \mathfrak{p}(n+1) > n+1$.

4.6. Пусть $P(a)$ обозначает формулу $(a \leqslant 1) \vee (a = n) \vee R(n, a) > 0$; тогда $n > 2 \,\&\, R(n, 2) = 0 \to \sim P(2)$, но

$$n > 2 \,\&\, \sim P(2) \to E^n_a\{\sim P(a)\}$$
$$\to \sim A^n_a\{P(a)\}$$

и, следовательно, $n > 2 \,\&\, R(n, 2) = 0 \to p(n) > 0$.

4.61. В силу 4.6, ибо $p(n) = 0 \to n > 1$ и $R(n, 2) \leqslant 1$.

4.7. Если $\varphi(m) = (1 + mx) \dot{-} (1+x)^m$, то $\varphi(0) = 0$ и $(1+x)\varphi(m) = \{1 + (m+1)x + x^2\} \dot{-} (1+x)^{m+1} = \varphi(m+1) + [x^2 \dot{-} \{(1+x)^{m+1} \dot{-} (1 + (m+1)x)\}]$, так что, умножая на $1 \dot{-} \varphi(m)$, мы получаем $\{1 \dot{-} \varphi(m)\}\varphi(m+1) = 0$, что доказывает $\varphi(m) = 0$

4.701. В силу 4.7 имеем

$$a = 1 + x \,\&\, x \geqslant 1 \to a^m \geqslant 1 + mx \,\&\, 1 + mx \geqslant 1 + m$$

и, следовательно, $a > 1 \to a^m > m$.

4.702. В самом деле, $a > 1 \,\&\, p = q + Sr \to a^p = a^q \cdot a^{Sr} > Sr \cdot a^q > a^q$.

4.71. $a = 0 \cdot b + a \,\&\, a < b \to R(a, b) = a > 0$.

4.711. В силу 4.702 $a < b \,\&\, x > 1 \to x^b > x^a$
$$\to R(x^a, x^b) > 0.$$

4.8. Если $P(k)$ обозначает данную формулу, то имеет место $P(0)$ и $R(x^{Sk+1}, p) = 0 \to R(x^{Sk}, p) = 0 \vee R(x, p) = 0$ и, следовательно, используя схему $\dfrac{(1 \dot{-} a)\, bc = 0}{\{1 \dot{-} (1 \dot{-} b)\, c\}(1 \dot{-} a)\, c = 0}$, которая доказывается, если заметить, что из $(1 \dot{-} a)\, bc = 0$ следует

$$(1 \dot{-} (1 \dot{-} b)\, c)(1 \dot{-} a)\, c = (1 \dot{-} a)\, c \dot{-} \{(1 \dot{-} a)\, c^2 \dot{-} (1 \dot{-} a)\, bc^2\} =$$
$$= (1 \dot{-} a)\, c\,(1 \dot{-} c) = 0,$$

получаем, что $P(k) \to P(Sk)$, а это завершает доказательство.

4.801. Если $P(k)$ обозначает

$$R(a, p) > 0 \,\&\, R(ab, p^k) = 0 \to R(b, p^k) = 0,$$

то имеет место $P(0)$ (в силу 4.03), и так как (в силу 4.04)

$$R(ab, p^{k+1}) = 0 \to R(ab, p^k) = 0,$$

то $P(k) \to \{R(a, p) > 0 \,\&\, R(ab, p^{k+1}) = 0 \to R(b, p^k) = 0\}$; но если $c = Q(b, p^k)$, то $R(b, p^k) = 0 \to b = cp^k$, и, следовательно (в силу 4.014),

$$P(k) \,\&\, R(a, p) > 0 \,\&\, R(ab, p^{k+1}) = 0 \to R(ac, p) = 0.$$

Однако имеют место $R(a, p) > 0 \,\&\, R(ac, p) = 0 \to R(c, p) = 0$ и $R(c, p) = 0 \to c = pQ(c, p)$. Следовательно,

$$P(k) \,\&\, R(a, p) > 0 \,\&\, R(ab, p^{k+1}) = 0 \to b = p^{k+1}Q(c, p)$$
$$\to R(b, p^{k+1}) = 0,$$

т. е. $P(k) \to P(k+1)$, что доказывает $P(k)$.

4.802. $R(m, a) = 0 \to m = a \cdot Q(m, a)$ и в силу 4.801 $R(Q(m, a), p^k) = 0$.

4.81. Так как $\mathfrak{p}_k$ — простое число, то $R(\mathfrak{p}_k, x) = 0 \to x = 1 \vee x = \mathfrak{p}_k$ и, поскольку $\mathfrak{p}_l > 1$, то $R(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = 0 \to (\mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}_k) \to (k = l)$.

4.82. Действительно, $R(\mathfrak{p}^m_k, \mathfrak{p}_l) = 0 \to R(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = 0 \to (k = l)$.

4.83. В самом деле, $q(m) \leqslant m$, $p(q(m)) = 0 \to E^m_x(q(m) = \mathfrak{p}_x)$; но $R(m, q(m)) = 0$ и $m > 1 \to p(q(m)) = 0$, и, следовательно, в силу примера 3.38 $m > 1 \to E^m_x R(m, \mathfrak{p}_x) = 0$.

4.84. По теореме 3.91 мы выводим $A^m_x R(m, \mathfrak{p}_x) > 0$, т. е. $\sim E^m_x R(m, \mathfrak{p}_x) = 0$, из условия $x \leqslant m \to R(m, \mathfrak{p}_x) > 0$. Из примера 4.83 получаем $\sim E^m_x R(m, \mathfrak{p}_x) = 0 \to m \leqslant 1$. Так как $m = 0 \to R(m, \mathfrak{p}_0) = 0$, то $m = 0 \to E^m_x R(m, \mathfrak{p}_x) = 0$, откуда следует результат.

4.85. Обозначим данную формулу через $F(k)$; ясно, что имеет место $F(0)$. Далее,

$$R\left(\prod_{x \leqslant k} f(x), p\right) > 0 \,\&\, R\left(\prod_{x \leqslant Sk} f(x), p\right) = 0 \to R(f(Sk), p) = 0$$

и

$$A^{Sk}_x R(f(x), p) > 0 \to A^k_x R(f(x), p) > 0 \,\&\, R(f(Sk), p) > 0,$$

откуда $F(k)\ \&\ A_x^{Sk}R(f(x),p)>0\to R\left(\prod_{x\leqslant k}f(x),\ p\right)>0\ \&\ R(f(Sk),p)>$ $>0\to R\left(\prod_{x\leqslant k}f(x),\ p\right)>0$ по теореме 4.51, т. е. $F(k)\to F(Sk)$, что доказывает $F(k)$.

4.86. Имеем $R\left(m,\ \mathfrak{p}_x^{\nu(m,\,x)}\right)=0$; пусть $P(k)$ обозначает данную формулу. Тогда выполняется $P(0)$. В силу 4.82 и 4.85 получаем $R\left(\prod_{x\leqslant k}\mathfrak{p}_x^{\nu(m,\,x)},\ \mathfrak{p}_{k+1}\right)>0$ и, следовательно, в силу 4.802 из $R\left(m,\ \mathfrak{p}_{k+1}^{\nu(m,\,k+1)}\right)=0$ следует

$$P(k)\to R\left(m,\ \left\{\prod_{x\leqslant k}\mathfrak{p}_x^{\nu(m,\,x)}\right\}\cdot\mathfrak{p}_{k+1}^{\nu(m,\,k+1)}\right)=0,$$

т. е. $P(k)\to P(k+1)$, так что $P(k)$ доказано.

4.87. Обозначая $L_x^m\{R(b,\mathfrak{p}_x)=0\}$ через ξ, мы имеем

$$E_x^m\{R(b,\mathfrak{p}_x)=0\}\to R(b,\mathfrak{p}_\xi)=0\ \&\ \xi\leqslant m.$$

Из $x\leqslant m\to R\left(a,\ \mathfrak{p}_x^{a_x}\right)=0$ и $E_x^m\{R(b,\mathfrak{p}_x)=0\}$ мы выводим поэтому $R\left(a,\ \mathfrak{p}_\xi^{a_\xi}\right)=0$ и, следовательно, в силу 4.02 $R\left(ab,\ \mathfrak{p}_\xi^{a_\xi+1}\right)=0$, что вместе с $\xi\leqslant m$ влечет

$$E_x^m\left\{R\left(ab,\ \mathfrak{p}_x^{a_x+1}\right)=0\right\}.$$

В частности, если $c=\left\{\prod_{x\leqslant m}\mathfrak{p}_x^{a_x}\right\}b$ и если $E_x^m\{R(b,\mathfrak{p}_x)=0\}$, то $E_x^m\left\{R\left(c,\ \mathfrak{p}_x^{a_x+1}\right)=0\right\}$.

4.9. Имеем $\nu(N,l)>0$ и $l<k\to\nu(N,k)=0$ и, поскольку $N>1$, то $\nu(N,g(N))>0$ и $g(N)<k\to\nu(N,k)=0$. Поэтому $g(N)<l\to\nu(N,l)=0$ и, следовательно, $\nu(N,l)>0\to g(N)\geqslant l$ и аналогично, так как $l<g(N)\to\nu(N,g(N))=0$, то $\nu(N,g(N))>0\to$ $\to g(N)\leqslant l$, откуда следует, что $l=g(N)$.

4.91. Обозначая $R(a,bc)$ через r, имеем $a=bcQ(a,bc)+r$, $r=bQ(r,b)+R(r,b)$, где $R(r,b)<b$, ибо $b>0$, и, следовательно, $a=b(Q(r,b)+cQ(a,bc))+R(r,b)$, откуда, поскольку $R(r,b)<b$, получаем $R(r,b)=R(a,b)$, что завершает доказательство.

4.92. H делит h, c и, следовательно, H делит a, b и c. Если f делит a, b, c, то оно делит h, c и, следовательно, f делит H, так что $f\leqslant H$. Поэтому H является наибольшим общим делителем a, b, c.

4.93. Мы определяем

$$L(x,y)=L_a^{xy}\{a>0\ \&\ R(a,x)=0\ \&\ R(a,y)=0\}.$$

Поскольку $xy>0\to\{R(xy,x)=R(xy,y)=0\}$, то

$$xy>0\to\{R(L(x,y),x)=0=R(L(x\ y),y)\}$$

и

$$a<L(x,y)\to a=0\vee R(a,x)>0\vee R(a,y)>0,$$

поэтому $L(x,y)$ — наименьшее общее кратное x и y для $xy>0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рекурсивная арифметика была открыта норвежским математиком Торальфом Сколемом и его первое сообщение (на немецком языке) было опубликовано в 1923 году в статье Сколема [1]*).

Работа Сколема описана в книге Гильберта и Бернайса [1], стр. 286—346, где содержится также дальнейшее развитие рекурсивной арифметики.

Первое сообщение о построении логики на основе арифметики принадлежит Р. Л. Гудстейну; см. Гудстейн [1]. Хотя эта статья опубликована в 1945 г., она была представлена Лондонскому Математическому обществу в июне 1941 г.

Система, в некоторой степени аналогичная исчислению равенств, была независимо развита Х. Б. Карри; см. Карри [1].

Наиболее полное изложение свойств рекурсивных функций, сведéние к нормальным формам и устранение параметров приведено автором этих результатов — Р. Петер; см. Петер [1]. Эта книга содержит исчерпывающую библиографию публикаций о рекурсивных функциях вплоть до 1950 г., и это единственная книга на упомянутую тему.

Доказательство схемы обобщенной индукции было дано Т. Сколемом [2] и завершено Р. Петер [2] в ее реферате на эту статью. При устранении параметров мы следовали Р. М. Робинсону [1].

Открытие того, что арифметика имеет нестандартную модель (т. е. интерпретацию, при которой роль чисел играет класс более широкий, чем все натуральные числа), было опубликовано Т. Сколемом [3].

Открытие Курта Гёделя — неразрешимые предложения — было впервые опубликовано в работе Гёдель [1] и было применено им для установления того, что для любой системы теории чисел ее непротиворечивость не может быть доказана средствами, формализуемыми в этой системе. Изложение статьи Гёделя имеется в работах: Гильберт и Бернайс [1], Клини [1], Мостовский [1] и (только в общих чертах) Гудстейн [2].

Теория общерекурсивных функций, которая не затрагивается в настоящей книге, рассмотрена в цитированных выше книгах Петер и Клини. Петер также изучала трансфинитные рекурсии, введенные Аккерманом [1].

Краткий обзор рекурсивной арифметики дан Сколемом [4].

БИБЛИОГРАФИЯ

Аккерман (Ackermann W.)

[1] Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Ann. **117** (1940), 162—194.

---

*) Числа в квадратных скобках относятся к библиографии. — *Прим. ред.*

Бернайс (Bernays P.)
[1] Über das Indukstionsschema in der rekursiven Zahlentheorie, Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zur Logikkalkul und zur Logik der Einzeln-Wissenschaften. Komissions — Verlag K. Alber, München, 1951.
Гёдель (Gödel K.)
[1] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. u. Phys. **38** (1931), 173—198.
Гильберт и Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)
[1] Grundlagen der Mathematik, Vol. 1, Berlin, 1934; vol. 11, Berlin, 1939.
Гудстейн (Goodstein R. L.)
[1] Function theory in an axion-free equation calculus. Proc. London Math. Soc. (2), **48** (1945), 401—434.
[2] Constructive Formalism, Essays on the foundations of mathematics, University College, Leicester, 1951.
[3] Permutation in recursive arithmetic, Math. Scand. **1** (1953), 222—226.
[4] Logic-free formalisations of recursive arithmetic, Math. Scand. 2 (1954), 247—261.
Карри (Curry H. B.)
[1] A formalisation of recursive arithmetic, Amer. J. Math. **63** (1941), 263—282. [Русский перевод: Карри Х. Б., Формализация рекурсивной арифметики, см. наст. сборник.]
Клини (Kleene S. K.)
[1] Introduction to Metamathematics, Amsterdam, 1952. [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.]
Мостовский (Mostowski A.)
[1] Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic, Amsterdam, 1952.
Петер (Peter R.)
[1] Rekursive Funktionen, Budapest, 1951. [Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, ИЛ, 1954.]
[2] Review of Skolem [2], J. Symbolic Logic **5** (1940), 34—35.
Робинсон (Robinson R. M.)
[1] Primitive recursive functions, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 925—942.
Сколем (Skolem T.)
[1] Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich, Skrifter Norske Videnskaps-akademi, 1, No. 6b, Oslo, 1923.
[2] Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie, Monatsh. f. Math. u. Phys. **48** (1939), 268—276.
[3] Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fund. Math. **23** (1934), 150—161.
[4] The development of recursive arithmetic, Xth Congress of Scandinavian Mathematicians, Copenhagen, 1946.

II

РЕКУРСИВНЫЙ АНАЛИЗ

R. L. GOODSTEIN

RECURSIVE ANALYSIS

AMSTERDAM
1961

ПРЕДИСЛОВИЕ

Имеется несколько систем конструктивной теории функций; некоторые из них, как, например, интуиционистский анализ, основаны на новой логике, другие изучают конструктивные объекты, например, рекурсивные вещественные числа, методами классического анализа, а третьи пытаются выразить с помощью функционалов часть классического анализа в виде формул со свободными переменными. Система, описанная в этой книге, отличается от всех этих систем. Она основана на примитивно рекурсивной арифметике, и в ней делается попытка построить теорию функций в поле рациональных чисел, напоминающую в одних отношениях классический анализ, а в других — интуиционистский анализ. Все доказательства в рекурсивном анализе формализуемы в исчислении равенств*) — системе рекурсивной арифметики, описанной в моей книге «Рекурсивная теория чисел», но настоящую работу можно читать без детального знания рекурсивной арифметики.

Я снова глубоко признателен профессору Гейтингу за его благосклонную поддержку, г-ну Джону Хулею за щедрую помощь в чтении корректур и наборщикам Северо-Голландской издательской компании за удовольствие, которое они мне доставили отличным качеством своей работы.

Университет, Лейчестер, Англия.

Р. Л. Гудстейн

---

*) Это утверждение неточно; автор исправляет его в середине пункта 1.1 главы I. См. также § 10 вступительной статьи Н. А. Шанина. — *Прим. ред.*

СИМВОЛЫ

РЕКУРСИВНАЯ СХОДИМОСТЬ

Примитивно и общерекурсивные функции. Рекурсивная арифметика и ее расширения. Рекурсивная сходимость и относительная сходимость. Приведенная последовательность. Рекурсивные пределы и признаки рекурсивной сходимости. Примитивно и общерекурсивные вещественные числа.

1. Рекурсивный анализ — это теория функций в поле рациональных чисел, содержащая лишь свободные переменные и основанная на рекурсивной арифметике. Он не содержит никаких предварительных логических предположений и развивается от определения к теореме только при помощи схем вывода.

Элементарными формулами рекурсивной арифметики являются равенства между *термами*, а класс всех формул строится из элементарных формул с помощью операций исчисления высказываний. Термами являются свободные цифровые переменные, знак 0 и знаки для функций.

Функциональные знаки включают в себя знак $S(x)$ для функции следования (так что $S(x)$ играет роль $x+1$ в элементарной алгебре) и знаки для функций, вводимых с помощью рекурсии. Используемых правил вывода взято достаточно для установления всегда истинных предложений исчисления высказываний, и они включают схему подстановки термов вместо переменных, схему для равенства

$$a = b \longrightarrow \{\mathfrak{A}(a) \longrightarrow \mathfrak{A}(b)\},$$

схему индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(n) \rightarrow \mathfrak{A}(S(n))}{\mathfrak{A}(n)},$$

схемы явного определения функций от любого числа аргументов и, наконец, схемы определения по рекурсии. Простейшей схемой определения по рекурсии является схема *примитивной рекурсии*:

$$f(0, a) = \alpha(a), \quad f(S(n), a) = \beta(n, a, f(n, a)).$$

Точнее, эта схема определяет $f(n, a)$ примитивной рекурсией, исходя из функций α и β. В качестве исходных примитивно рекурсивных функций мы берем функцию следования $S(x)$, тождественную функцию $I(x)$, явно определяемую равенством $I(x) = x$, и нулевую функцию $Z(x)$, определяемую равенством $Z(x) = 0$. Говорят, что функция является *примитивно рекурсивной*, если она исходная или определяется с помощью подстановки или примитивной рекурсии из уже определенных примитивно рекурсивных функций.

1.1. В этой книге мы будем иметь дело главным образом с примитивно рекурсивными функциями. Не изменяя характера той системы, которую мы будем строить, можно было бы расширить этот класс функций, включив в него, например, *многократно рекурсивные функции* и даже некоторые ординально рекурсивные функции (с ординалами, не превосходящими $\omega^{\omega^{\omega}}$, при настоящем уровне знаний). Однако эту систему нельзя было бы расширить до класса функций, сыгравших столь важную роль в исследованиях по основаниям математики, — а именно до класса квази(или обще)рекурсивных функций, без того, чтобы полностью не изменить характер нашей системы. Квазирекурсивная функция определяется системой равенств (в правой части которых, как можно считать, встречаются только цифры или примитивно рекурсивные функции), из которой с помощью подстановки можно вывести значение определяемой функции при любом заданном наборе значений аргументов. Однако левые части этих равенств, кроме определяемой функции, могут содержать вспомогательные функции, о которых мы, возможно, имеем лишь неполную информацию. Рассмотрим, например,

следующую совокупность равенств [1]):

$$\pi(x, y) = \prod_{n<y} \chi(x, n),$$

$$\tau(Sz, 0, y) = y,$$

$$f(x) = \tau(\pi(x, y), \pi(x, Sy), y),$$

где $\prod_{n<0} \chi(x, n) = 1$, $\prod_{n<Sy} \chi(x, n) = \left\{\prod_{n<y} \chi(x, n)\right\} \cdot \chi(x, y)$ и $\chi(x, n)$ — примитивно рекурсивная функция, о которой (в некотором смысле, который еще надлежит рассмотреть) известно, что для любого x имеется y такой, что $\chi(x, y) = 0$. Тогда эти равенства определяют $f(x)$ как квазирекурсивную функцию. Для того чтобы показать это, нам надо рассмотреть способ, с помощью которого можно выводить значения $f(x)$ из этих равенств. Для иллюстрации предположим, что для некоторого данного значения x, скажем, $x = 3$, первое значение y, для которого $\chi(x, y)$ обращается в нуль, есть 7. Тогда, при $x = 3$, мы видим, что

$$\pi(3, 0), \ \pi(3, 1), \ \pi(3, 2), \ \ldots., \ \pi(3, 7)$$

все больше нуля, но $\pi(3, 8) = 0$. Вспомогательная функция $\tau(u, v, y)$ определена только для значений u, бо́льших нуля, и для $v = 0$; поэтому $f(3)$ может быть вычислена, только когда мы найдем y, для которого $\pi(x, y) > 0$ и $\pi(x, Sy) = 0$, а как мы предположили, это происходит при $y = 7$ (и ни при каком другом значении y), — что доказывает равенство

$$f(3) = 7.$$

Это иллюстрирует тот факт, что для определения значения $f(x)$ мы должны сначала найти значение y, для которого $\chi(x, y) = 0$.

В определении квазирекурсивной функции не накладывается никаких ограничений на способ, которым мы показываем, что для любого x имеется y, для которого

[1]) Ср. Клини [2], стр. 249. (Ссылка дается на русский перевод. — *Прим. перев.*)

$\chi(x, y) = 0$; мы можем, например, установить существование y, доказав в некоторой формальной системе, что предположение: $\chi(x, y) > 0$ для всех y — приводит к противоречию. Такое доказательство, может случиться, не даст нам никаких средств для нахождения требуемого y и поэтому никаких средств для нахождения значения $f(x)$; мы можем заниматься вычислением значений $\chi(x, y)$ для бóльших и бóльших значений y неопределенное время, не находя y, для которого $\chi(x, y) = 0$. Ограничивая же наши рассмотрения примитивно рекурсивными функциями, мы уверены, что значения всех функций в нашей системе можно найти, сделав заранее определенное число шагов.

Наиболее подходящей системой для рассмотрения квазирекурсивных функций была бы не система со свободными переменными, а система, содержащая оператор существования «$\exists$» и оператор минимизации «μ», который выбирает наименьшее число из данного множества значений. Из теоремы существования

$$\exists y\, R(x, y)$$

с помощью оператора минимизации получается функция $f(x)$ такая, что

$$f(x) = \mu y R(x, y).$$

Если $R(x, y)$ — примитивно рекурсивное отношение, то $f(x)$, определяемая с помощью оператора минимизации, является, как можно показать, квазирекурсивной; примером является система равенств, рассмотренная выше. Для ссылок в будущем мы перечислим еще некоторые важные свойства квазирекурсивных функций и отношений [1]).

Имеется примитивно рекурсивный предикат $T(z, x, y)$ такой, что при $z = 0, 1, 2, \ldots$ формула $\exists y T(z, x, y)$ является нумерацией *всех* предикатов вида $\exists y R(x, y)$ с рекурсивным R. Следовательно, классы предикатов вида $\exists y R(x, y)$ с квазирекурсивным отношением R и с примитивно рекурсивным R совпадают.

[1]) См. Клини [2], стр. 251—252, 257. (Ссылка дается на русский перевод. — *Прим. перев.*)

Для произвольного данного R пусть r таково, что

$$\exists y R(x, y) \leftrightarrow \exists y T(r, x, y)$$

(где $\leftrightarrow$ обозначает эквивалентность предикатов*)) и поэтому

$$\exists y R(r, y) \leftrightarrow \exists y T(r, r, y)$$

и, значит, $\exists y R(r, y)$ не эквивалентно $\forall y \sim T(r, r, y)$ и (взяв $\sim S$ в качестве R и s — в качестве r) получим

$$\forall y S(s, y) \leftrightarrow \forall y \sim T(s, s, y),$$

так что $\forall y S(s, y)$ не эквивалентно $\exists y T(s, s, y)$. Пусть дан произвольный квазирекурсивный предикат $R(x)$ и пусть $R(x, y)$ обозначает предикат $R(x) \& y = y$, так что $R(x, y)$ тоже квазирекурсивен и

$$R(x) \leftrightarrow \exists y R(x, y) \leftrightarrow \forall y R(x, y),$$

откуда следует, что имеются числа r, s, для которых

$R(r)$ отличается от $\forall y \sim T(r, r, y)$

и

$R(s)$ отличается от $\exists y T(s, s, y)$,

и поэтому *ни* $\exists y T(x, x, y)$, *ни* $\forall y \sim T(x, x, y)$ *не рекурсивны*. Другими словами, $\exists y T(x, x, y)$ представляет собой пример предиката вида $\exists y R(x, y)$ с примитивно рекурсивным R, который *не* является квазирекурсивным.

Другая важная теорема о нумерации утверждает: Для некоторой примитивно рекурсивной функции $U(t)$ последовательность

$$U(\mu y T(n, x, y)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

является перечислением всех квазирекурсивных**)

*) Предикаты U и V автор считает эквивалентными, если имеет место $\forall x\,((U(x) \to V(x)) \,\&\, (V(x) \to U(x)))$. — *Прим. ред.*

**) Это утверждение ошибочно; автор имеет в виду соответствующее утверждение, относящееся к частично рекурсивным функциям. — *Прим. перев.*

функций (одной переменной), и с той же самой U и подходящим $T(n, x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$ последовательность

$$U(\mu y T(n, x_1, x_2, \ldots, x_k, y)),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

является перечислением всех квазирекурсивных *) функций k переменных.

Возвращаясь к примитивно рекурсивным функциям, заметим, что о многих определяющих схемах, которые по виду очень отличны от примитивной рекурсии, известно, что они определяют только примитивно рекурсивные функции. Мы не будем вдаваться здесь в рассмотрение этих схем, но в дальнейшем у нас будет повод отметить некоторые из таких схем. Различные виды рекурсивных определений приведены в книге автора «Рекурсивная теория чисел», где показано, что рекурсивную арифметику можно формализовать в системе, в которой доказуемы аксиомы исчисления высказываний и все перечисленные выше схемы вывода.

1.2. Построение рекурсивного анализа на основе рекурсивной арифметики включает введение рациональных чисел и функций. Рациональное число можно определить как упорядоченную тройку $(p, q)/r$ натуральных чисел с $r > 0$. Мы полагаем по определению

$$(p, q)/r \equiv (p', q')/r' \leftrightarrow pr' + q'r \equiv p'r + qr',$$

где «$\leftrightarrow$» — знак эквивалентности; так, например, равенство $(p, q)/r = (p', q')/r'$ выполняется тогда и только тогда, когда $pr' + q'r = p'r + qr'$ и, в частности, $(p, q)/r = (kp + n,\ kq + n)/kr$, где $k > 0$.

Рекурсивная функция одной (или более) переменных $(p, q)/r$ — это тройка рекурсивных функций от натуральных чисел

$$\{P(p, q, r),\ Q(p, q, r)\}/R(p, q, r)$$

таких, что $R(p, q, r) > 0$ и (обозначая $P(p, q, r)$ через P, $P(p', q', r')$ — через P' и т. д.)

$$(p', q')/r' = (p, q)/r \longrightarrow (P', Q')/R' = (P, Q)/R.$$

*) См. сноску **) на стр. 271. — *Прим. ред.*

Например, сумма двух рациональных чисел определяется так:

$$(p_1, q_1)/r_1 + (p_2, q_2)/r_2 = (p_1r_2 + p_2r_1,\ q_1r_2 + q_2r_1)/r_1r_2;$$

если

$$(p_1, q_1)/r_1 = (p_1', q_1')/r_1' \quad \text{и} \quad (p_2, q_2)/r_2 = (p_2', q_2')/r_2',$$

то легко проверить, что

$$(p_1r_2 + p_2r_1,\ q_1r_2 + q_2r_1)/r_1r_2 = (p_1'r_2' + p_2'r_1',\ q_1'r_2' + q_2'r_1')/r_1'r_2'.$$

Произведение $(p_1, q_1)/r_1$ и $(p_2, q_2)/r_2$ определяется как

$$(p_1p_2 + q_1q_2,\ p_1q_2 + p_2q_1)/r_1r_2,$$

и снова мы можем легко проверить, что если

$$(p_1, q_1)/r_1 = (p_1', q_1')/r_1' \quad \text{и} \quad (p_2, q_2)/r_2 = (p_2', q_2')/r_2',$$

то

$$(p_1, q_1)/r_1 \cdot (p_2, q_2)/r_2 = (p_1', q_1')/r_1' \cdot (p_2', q_2')/r_2'.$$

Определяя вычитание в терминах сложения, мы имеем

$$(p_1, q_1)/r_1 - (p_2, q_2)/r_2 = (p_3, q_3)/r_3 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (p_1, q_1)/r_1 = (p_2, q_2)/r_2 + (p_3, q_3)/r_3,$$

так что

$$(p_1, q_1)/r_1 - (p_2, q_2)/r_2 = (p_1, q_1)/r_1 + (q_2, p_2)/r_2;$$

в случае деления мы имеем: если $p_2 \neq q_2$, то

$$(p_1, q_1)/r_1 \div (p_2, q_2)/r_2 = (p_3, q_3)/r_3 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (p_1, q_1)/r_1 = (p_2, q_2)/r_2 \cdot (p_3, q_3)/r_3,$$

так что

$$(p_1, q_1)/r_1 \div (p_2, q_2)/r_2 = (p_1, q_1)/r_1 \cdot (p_2r_2, q_2r_2)/|p_2, q_2|^2,$$

где $|p, q|$ — положительная разность p и q.

Обычные сокращения $+s/r$, $-s/r$ вводятся с помощью равенств

$$+s/r = (p + s, p)/r, \quad -s/r = (p, p + s)/r$$

и, как обычно, $+p/1$, $-p/1$ обозначаются соответственно через $+p$, $-p$, а $(p, p)/r$, равное как $+0/r$, так и $-0/r$, обозначается просто через 0.

Мы будем использовать буквы k, m, n, p, q, r и их же с индексами для обозначения натуральных чисел, x и y — для рациональных чисел. Мы будем иметь дело в основном с функциями рациональной переменной x, обозначаемыми $f(x)$, $g(x)$ и т. д., и с функциями рациональной переменной x и натуральной переменной n, обозначаемыми $f(n, x)$, $g(n, x)$ и т. д.

1.21. Можно было бы подумать, что класс рациональных рекурсивных функций можно расширить добавлением новой схемы рекурсии для рациональных рекурсивных функций натурального аргумента, но это не так.

Например, если мы определяем рациональную функцию $f(n, x)$ рекурсией

$$f(0, x) = 0, \quad f(Sn, x) = \varphi(n, x, f(n, x)), \tag{i}$$

где

$$\varphi(n, (p, q)/r, (u, v)/w) = (a, b)/c,$$

a, b и c — рекурсивные функции от n, p, q, r, u, v, w, то мы можем найти рекурсивные функции $u_n(p, q, r)$, $v_n(p, q, r)$, $w_n(p, q, r)$ такие, что

$$f(n, (p, q)/r) = (u_n, v_n)/w_n. \tag{ii}$$

Достаточно определить u_n, v_n, w_n одновременными рекурсиями: $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ и

$$u_{n+1}(p, q, r) = a(n, u_n, v_n, w_n),$$
$$v_{n+1}(p, q, r) = b(n, u_n, v_n, w_n),$$
$$w_{n+1}(p, q, r) = c(n, u_n, v_n, w_n),$$

где u_n, v_n, w_n рекурсивны и поэтому функция $f(n, x)$, определенная с помощью (ii), рекурсивна и удовлетворяет рекурсии (i).

1.3. *Обозначения*

Пусть p, q — натуральные числа и $q > 0$, тогда через $[p/q]$ мы обозначаем частное от деления p на q; для целых i, j таких, что $j \neq 0$, мы полагаем

$$[i/j] = [|i|/|j|], \quad \text{если} \quad ij \geqslant 0,$$
$$= -[|i|/|j|], \quad \text{если} \quad ij < 0.$$

Если для некоторого числа k и рационального x $[10^k x] = 0$, то мы пишем $x = 0(k)$, так что $x = 0(k)$ эквивалентно рекурсивному отношению $|x| < 1/10^k$.

1.31. Об отношении, которое выполняется для всех достаточно больших n, говорят, что оно выполняется для мажорантных n. Точнее, отношение

$$R(n, m_1, m_2, \ldots, m_p)$$

выполняется *для мажорантных* n, если имеется рекурсивная функция $M(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ такая, что

$$n \geqslant M(m_1, m_2, \ldots, m_p) \longrightarrow R(n, m_1, m_2, \ldots, m_p)$$

со свободными переменными n, m_1, m_2, ..., m_p, где M сводится к константе, если в R нет переменных, кроме n.

Более общó, $R(m, n, r_1, r_2, \ldots, r_p)$ выполняется *для мажорантных* m, n (порядок m, n существен), если имеются рекурсивные функции

$$M(r_1, r_2, \ldots, r_p), \quad N(m, r_1, r_2, \ldots, r_p)$$

такие, что

$$m \geqslant M(r_1, r_2, \ldots, r_p) \;\&\; n \geqslant N(m, r_1, r_2, \ldots, r_p) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R(m, n, r_1, r_2, \ldots, r_p).$$

1.32. *Относительное равенство*

Если $f(n) - g(n) = 0(k)$ для мажорантных n, то мы говорим, что $f(n)$ эквивалентна $g(n)$ и пишем

$$f(n) = g(n) \text{ относительно } n\,^*).$$

Аналогично, если $f(n) > -10^{-k}$ для мажорантных n, то мы пишем

$$f(n) \geqslant 0 \text{ относительно } n,$$

и если $f(n) < 10^{-k}$ для мажорантных n, то

$$f(n) \leqslant 0 \text{ относительно } n.$$

Далее, если

$$f(m, n) - g(m, n) = 0(k)$$

*) Если функции f и g являются рекурсивными вещественными числами (см. 1.6), то равенство f и g относительно n означает равенство этих вещественных чисел. — *Прим. ред.*

для мажорантных m, n, то мы пишем

$$f(m, n) = g(m, n) \text{ относительно } m, n.$$

1.33. *Рекурсивная сходимость*

Примитивно (обще) рекурсивная функция $f(n)$ является примитивно (обще) *рекурсивно сходящейся**), если имеется примитивно (обще) рекурсивная функция $N(k)$ такая, что $N(k+1) \geqslant N(k) \geqslant k$ и

$$N \geqslant n \geqslant N(k) \longrightarrow f(N) - f(n) = 0(k).$$

Когда нужно подчеркнуть связь N и f, мы добавляем f к N в качестве индекса. Мы систематически используем этот прием в дальнейшем как по отношению к N из только что приведенного определения, так и по отношению к функциям $c(k)$, $d(k)$, которые нам встретятся позже. Любые параметры f могут также появляться в N.

Рекурсивная функция $f(n, x)$ от положительной целочисленной переменной n и рациональной переменной x является рекурсивно сходящейся в интервале**) $a \leqslant x \leqslant b$, если имеется рекурсивная функция $N(k, x)$ такая, что

$$a \leqslant x \leqslant b \,\&\, N \geqslant n \geqslant N(k, x) \longrightarrow f(N, x) - f(n, x) = 0(k).$$

Если имеется рекурсивная функция $N(k)$, не зависящая от x, такая, что

$$a \leqslant x \leqslant b \,\&\, N \geqslant n \geqslant N(k) \longrightarrow f(N, x) - f(n, x) = 0(k),$$

то говорят, что $f(n, x)$ является *равномерно рекурсивно сходящейся* в (a, b). В частности, если $N(k) = k$, то $f(n, x)$ является равномерно рекурсивно сходящейся в стандартной форме.

---

*) То есть является примитивно (обще) рекурсивным вещественным числом (см. 1.6). — *Прим. ред.*

**) Речь идет о сходимости последовательности рациональнозначных функций в рациональных точках интервала.

Ниже автор обозначает замкнутый интервал с концами a, b через (a, b), а открытый интервал с теми же концами — через $[a, b]$. — *Прим. ред.*

Так как

$$f(N(k), x) - f(n, x) = 0(k) \quad \text{при} \quad n \geqslant N(k),$$

то $f(N(k), x)$ эквивалентно $f(n, x)$, и поскольку

$$p > q \longrightarrow f(N(p), x) - f(N(q), x) = 0(q),$$

то $f(N(k), x)$ является эквивалентом в стандартной форме для равномерно рекурсивно сходящейся функции $f(n, x)$.

1.34. *Относительная сходимость*

Говорят, что рекурсивная функция $f(m, n)$ сходится по m относительно n, если имеется рекурсивная функция $M(k)$ такая, что $M(k+1) > M(k)$ и

$$m_1 \geqslant M(k) \,\&\, m_2 \geqslant M(k) \longrightarrow f(m_1, n) - f(m_2, n) = 0(k)$$

для мажорантных n*).

Функция $f(m, n)$, сходящаяся по m относительно n, не обязательно сходится при любом фиксированном значении n. Например, m/n сходится по m относительно n, ибо

$$(m_1 - m_2)/n = 0(k),$$

если $m_1 = m_2$ и если $m_1 \neq m_2$ и $n > 10^k |m_1 - m_2|$; но при любом фиксированном n и любом m.

$$(M - m)/n > 1, \quad \text{если} \quad M > m + n,$$

так что m/n не сходится при фиксированном n.

1.35. *Приведенная последовательность*

Пусть дана произвольная рекурсивная функция $f(m, n)$, рекурсивно сходящаяся по n и сходящаяся по m относительно n; тогда мы можем найти рекурсивно сходящуюся функцию $R_f(m)$ такую, что

$$f(m, n) = R_f(m) \text{ относительно } m, n.$$

---

*) Если $f(m, n)$ является последовательностью рекурсивных вещественных чисел (то есть если при каждом конкретном M функция $f(M, n)$ является рекурсивным вещественным числом), то сходимость $f(m, n)$ по m относительно n означает сходимость в себе этой последовательности вещественных чисел. — *Прим. ред.*

Так как $f(m, n)$ сходится по n, то имеется рекурсивная функция $N(k, m)$ такая, что

$$n^* \geqslant n \geqslant N(k, m) \longrightarrow f(m, n^*) - f(m, n) = 0(k),$$

а поскольку $f(m, n)$ сходится относительно n, то имеется рекурсивная функция $M(k)$ такая, что

$$m^* \geqslant m \geqslant M(k) \longrightarrow f(m^*, n) - f(m, n) = 0(k)$$

для мажорантных n.

Пусть $R_f(p) = f(M(p), N(p, M(p)))$; $R_f(p)$ называется *приведенной* функцией для $f(m, n)$. Прежде всего мы покажем, что приведенная функция является рекурсивно сходящейся.

Для мажорантных n мы имеем

$$f(M(p), N(p, M(p))) - f(M(p), n) = 0(p),$$
$$f(M(q), N(q, M(q))) - f(M(q), n) = 0(q)$$

и если $q > p$, то

$$f(M(p), n) - f(M(q), n) = 0(p),$$

так что при $q > p$

$$R_f(p) - R_f(q) = 3 \cdot 0(p),$$

что доказывает сходимость. Остается показать, что

$$f(m, n) = R_f(m) \text{ относительно } m, n.$$

Мы замечаем, что

$f(m, n) - f(M(m), n) = 0(k)$ для мажорантных m, n

и

$f(M(m), n) - f(M(m), N(m, M(m))) = 0(m)$

для мажорантных n,

откуда

$f(m, n) - R_f(m) = 2 \cdot 0(k)$ для мажорантных m, n,

что и требовалось показать.

1.4. Известная теорема классического анализа о том, что монотонная ограниченная последовательность сходится, не имеет места в рекурсивном анализе*). Для доказательства этого мы используем одну важную теорему из метаматематики арифметики; эта теорема утверждает, что невозможна эффективная процедура для распознавания по любой примитивно рекурсивной функции $f(n)$, имеется ли значение n, для которого $f(n) > 0$, или $f(n) = 0$ для всех n. Доказательство этой теоремы приведено в «Основаниях математики» Гильберта и Бернайса ([1], том 2, стр. 417—418).

Пусть $f(n)$ — примитивно рекурсивная функция и пусть

$$F(0) = 0, \quad F(n+1) = F(n) + [1 \dot{-} \{F(n) + (1 \dot{-} f(n))\}],$$

так что $F(n)$ принимает только значения 0, 1 и не убывает. Если бы было верно, что любая монотонная ограниченная последовательность является рекурсивно сходящейся, то имелась бы примитивно рекурсивная функция $N(k)$ такая, что

$$n \geqslant N(k) \longrightarrow F(n) - F(N(k)) = 0(k)$$

и, в частности,

$$n \geqslant N(1) \longrightarrow |F(n) - F(N(1))| < 1,$$

так что поскольку $F(n)$ целое, то $F(n) = F(N(1))$ при $n \geqslant N(1)$. Если $F(N(1)) = 0$, то $F(n) = 0$ при $n \geqslant N(1)$ и поскольку $F(n)$ не убывает, то $F(n) = 0$ также при $n < N(1)$. Поэтому если $F(N(1)) = 0$, то $F(n) = 0$ для всех n; однако если $f(n) = 1$ для некоторого n, то $F(n+1) = 1$, и если $f(n) = 0$ для всех n, то $F(n) = 0$ для всех n. Следовательно, если $F(N(1)) = 0$, то $f(n) = 0$ для всех n и если $F(N(1)) = 1$, то $f(n) = 1$ для некоторого $n \leqslant N(1)$. Так как $F(n)$ и $N(k)$ рекурсивны, то значение $F(N(1))$ вычислимо за конечное число шагов и дает, тем самым, эффективную процедуру для распознавания того, имеет ли место $f(n) = 0$ для всех n или нет. Поскольку такая эффективная процедура

*) Имеет место более сильный результат Э. Шпеккера [1]: можно построить примитивно рекурсивную монотонную ограниченную последовательность рациональных чисел, не сходящуюся ни к какому рекурсивному вещественному числу (см. также Р. Петер [1]). — *Прим. перев.*

невозможна, то предположение о том, что $F(n)$ является рекурсивно сходящейся, несостоятельно. Многие классические признаки сходимости являются, тем не менее, верными признаками рекурсивной сходимости, как мы покажем далее.

1.41. *Пределы*

Говорят, что рациональное число l является рекурсивным пределом рекурсивно сходящейся последовательности $s(n)$ и что $s(n)$ рекурсивно стремится к пределу l, если имеется рекурсивная функция $n(k)$ такая, что

$$n \geqslant n(k) \longrightarrow l - s(n) = 0(k).$$

Разумеется, если $s(n)$ рекурсивно стремится к некоторому пределу, то $s(n)$ рекурсивно сходится.

Рекурсивная функция $s(n)$ является *рекурсивно расходящейся*, если имеется рекурсивная функция $d(n)$ и целое k такие, что

$$|s(n + d(n)) - s(n)| \geqslant 10^k.$$

Условие, при выполнении которого последовательность $s(n)$ *не* стремится рекурсивно к пределу, состоит в том, что имеются рекурсивные функции $\nu(p, q, r)$, $n(p, q, r, k)$, такие, что *) $n(p, q, r, k) \geqslant k$ и

$$n = n(p, q, r, k) \longrightarrow |s(n) - (p, q)/(r + 1)| \geqslant 10^{-\nu(p, q, r)}.$$

Для иллюстрации этого условия мы докажем, что последовательность $s(n) = u(n)/n!$, где $u(0) = 1$, $u(n + 1) = (n + 1)u(n) + 1$, является рекурсивно сходящейся, но не стремится рекурсивно к пределу **). Действительно,

$$n > q \longrightarrow 0 < s(n) - s(q) < 1/q(q!),$$

так что $s(n)$ рекурсивно сходящаяся; но (рассматривая лишь нетривиальный случай неотрицательных рациональных чисел)

$$\{s(q) - p/q\}q! = n(q) - p\{(q-1)!\} = q(q-1)u(q-2) - p\{(q-1)!\} + q + 1 = 2 (\mathrm{mod}\, q - 1), \quad q \geqslant 4.$$

Поэтому

$$|s(n) - p/q| \geqslant (1 - 1/q)/q!$$

для всех n таких, что $n > q \geqslant 4$; в случаях $q = 1, 2, 3$ при $n > 4$ разность $|s(n) - p/q|$ принимает наименьшее значение при $p = 8$, $q = 3$, а $|s(n) - 8/3| > 1/24$, что завершает доказательство того, что $s(n)$ не стремится рекурсивно к p/q для любых p, q.

*) Напомним, что формулируется условие того, чтобы последовательность не сходилась к *рациональному* пределу. — *Прим. ред.*

**) Члены этой последовательности представляют собой частичные суммы ряда $\sum 1/n!$ (ср. доказательство теоремы 1.61 ниже). — *Прим. ред.*

1.42. *Признаки рекурсивной сходимости*

Мы начинаем с доказательства рекурсивной сходимости геометрических прогрессий $\sum x^n$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Из

$$nx^n < \sum_{r \leqslant n} x^r = (1 - x^{n+1})/(1 - x) < 1/(1 - x)$$

следует, что $x^n < 1/n(1 - x)$, и поэтому x^n рекурсивно стремится к нулю, а $\sum\limits_{r \leqslant n} x^r$ рекурсивно стремится к $1/(1 - x)$.

Если $x \geqslant 1$, то $\sum\limits_{r \leqslant n+1} x^r - \sum\limits_{r \leqslant n} x^r = x^{n+1} \geqslant 1$, так что $\sum\limits_{r \leqslant n} x^r$ рекурсивно расходится. И аналогично, если $a(n)$ *не* стремится рекурсивно к нулю, так что $a(n+1) \geqslant 10^{-\nu(0, 0, 0)}$, когда $n + 1 = n(0, 0, 0, k)$, то

$$\sum_{r \leqslant n+1} a(r) - \sum_{r \leqslant n} a(r) = a(n+1) \geqslant 10^{-\nu(0, 0, 0)},$$

когда $n + 1 = n(0, 0, 0, k)$; это доказывает, что $\sum\limits_{r \leqslant n} a(r)$ рекурсивно расходится. Более того, если $\sum\limits_{r \leqslant n} a(r)$ рекурсивно расходится и $a(r) > 0$, то для любого m последовательность $1 \Big/ \sum\limits_{m \leqslant r \leqslant n} a(r)$ рекурсивно стремится к нулю; пусть $s(n) = \sum\limits_{m \leqslant r \leqslant m+n} a(r)$ и $e(0) = 0$, $e(n+1) = e(n) + d(e(n))$, так что по предположению $s(e(n+1)) - s(e(n)) \geqslant 10^k$, откуда следует, что $s(e(n)) \geqslant n \cdot 10^k$ и поэтому

$$p \geqslant e(n) \to 1/s(p) \leqslant 1/s(e(n)) \leqslant 10^{-k}/n;$$

это показывает, что $s(n)$ рекурсивно сходится к нулю.

1.43. Сравнительные признаки сходимости для положительных рядов, очевидно, верны для рекурсивной сходимости. Действительно, если $u(n) \leqslant kv(n)$, то

$$\sum_{m \leqslant r \leqslant m+n} u(r) \leqslant k \sum_{m \leqslant r \leqslant m+n} v(r)$$

и, следовательно, если $\sum v(r)$ рекурсивно сходится, то и $\sum u(r)$ рекурсивно сходится; если $\sum u(r)$ рекурсивно расходится, то и $\sum v(r)$ рекурсивно расходится. Более того, из неравенства

$$u(n+1)/u(n) \leqslant v(n+1)/v(n)$$

следует $u(n) \leqslant \{u(0)/v(0)\}v(n)$, так что рекурсивная сходимость $\sum v(n)$ влечет рекурсивную сходимость $\sum u(n)$, а $\sum v(n)$ рекурсивно расходится вместе с $\sum u(n)$.

1.44. В случае признака Коши мы заметим, что если для некоторого фиксированного k

$$u(n) \leqslant k^n < 1,$$

то $\sum u(n)$ рекурсивно сходится по предыдущему признаку, а если $u(n) \geqslant 1$ при $n = n(r)$, где $n(r)$ строго возрастает, то и $u(n)$ не стремится рекурсивно к нулю и, следовательно, $\sum u(n)$ расходится.

1.45. В случае признака Даламбера мы замечаем, что из

$$u(n+1)/u(n) \leqslant k < 1$$

для фиксированного k следует $u(n+1)/u(n) \leqslant k^{n+1}/k^n$, и поэтому $\sum u(n)$ рекурсивно сходится, а из

$$u(n+1)/u(n) \geqslant 1$$

следует рекурсивная расходимость $\sum u(n)$, ибо $u(n) \geqslant u(0)$.

1.46. Признак Куммера требует более подробного рассмотрения. В своем первоначальном виде этот признак верен для рекурсивной сходимости, ибо если имеется константа $\alpha > 0$ такая, что

$$c(n)\{u(n)/u(n+1)\} - c(n+1) \geqslant \alpha,$$

и если $c(n)u(n)$ рекурсивно стремится к нулю, то $\sum u(r)$ рекурсивно сходится, ибо

$$\alpha \sum_{n+1 \leqslant r \leqslant N} u(r) \leqslant c(n)u(n) - c(N)u(N) < c(n)u(n).$$

Этот признак в форме Дини, в которой отсутствует условие о том, что $c(n)u(n)$ рекурсивно стремится к нулю, не верен, ибо тогда он эквивалентен утверждению о рекурсивной сходимости монотонной ограниченной последовательности; действительно, если $s(n)$ — произвольная строго возрастающая рекурсивная функция, ограниченная сверху целым числом B, и если

$$u(n) = s(n) - s(n-1), \qquad v(n) = B - \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} u(r)$$

и $c(n) = v(n)/u(n)$, то

$$c(n)\{u(n)/u(n+1)\} - c(n+1) = 1.$$

1.47. Далее мы рассмотрим конденсационный признак Коши.

Обозначим $\sum_{m \leqslant r \leqslant n} f(r)$ через $f(m, n)$; тогда если $f(r)$ монотонно убывает, то $f(2^n, 2^{n+1}-1) < 2^n f(2^n)$ и поэтому

$$f(2^n, 2^{N+1}-1) < \sum_{n \leqslant r \leqslant N} 2^r f(2^r),$$

откуда следует, что если $2^{N+1} \geqslant M+1$, то

$$\sum_{2^n \leqslant r \leqslant M} f(r) < \sum_{n \leqslant r \leqslant N} 2^r f(2^r).$$

Аналогично, если $2^n + 1 \geqslant m$, то

$$\sum_{m \leqslant r \leqslant 2^{N+1}} f(r) \geqslant \sum_{n \leqslant r \leqslant N} 2^r f(2^{r+1}).$$

Эти неравенства показывают, что конденсационный признак верен для рекурсивной сходимости и расходимости. Мы получаем, что $\sum 1/r$ рекурсивно расходится, так что $1 \Big/ \sum_{m \leqslant r \leqslant m+n} (1/r)$ рекурсивно стремится к нулю при любом фиксированном m. Кроме того, $\sum 1/r^2$ рекурсивно сходится вместе с $\sum 1/2^r$.

1.48. Признак Раабе для рекурсивной сходимости и расходимости принимает такой вид:

Если для некоторого $k > 1$

$$u(n)/u(n+1) \geqslant 1 + k/n,$$

то $\sum u(n)$ рекурсивно сходится, а если

$$u(n)/u(n+1) \leqslant 1 + 1/n + 1/n \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r),$$

то $\sum u(n)$ рекурсивно расходится.

Для этого признака сходимости мы замечаем, что данное неравенство влечет

$$\{n \cdot u(n)/u(n+1)\} - (n+1) \geqslant k - 1 > 0,$$

откуда мы заключаем, что

$$n \cdot u(n)/(n+1) \cdot u(n+1) \geqslant 1 + (k-1)/(n+1)$$

и отсюда с помощью умножения (используя

$$a > 0 \,\&\, b > 0 \longrightarrow (1+a)(1+b) > a + b,$$

получаем

$$N \cdot u(N) \leqslant n \cdot u(n)/(k-1) \sum_{n+1 \leqslant r \leqslant N} (1/r),$$

следовательно, при фиксированном n произведение $N \cdot u(N)$ рекурсивно стремится к нулю и $\sum u(n)$ рекурсивно сходится по признаку Куммера.

Что касается признака расходимости, мы начнем с доказательства того, что если

$$v(r) = 1/r \sum_{1 \leqslant p \leqslant r} (1/p),$$

то $\sum v(r)$ рекурсивно расходится. Действительно, $1/2^n v(2^n) < n + 1$, так что $\sum 2^n v(2^n)$ расходится, что следует из сравнения данного ряда с $\sum 1/(n+1)$, и отсюда, в силу конденсационного признака $\sum v(r)$ тоже

рекурсивно расходится. Так как

$$v(n)/v(n+1) = \left\{1 + (n+1) \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)\right\} \Big/ n \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r) =$$

$$= 1 + 1/n + 1/n \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r) \geqslant u(n)/u(n+1),$$

то $\sum u(n)$ рекурсивно расходится.

В качестве подготовки к доказательству признака Гаусса для рекурсивной сходимости мы докажем

1.49. Если $\sum u(r)$ рекурсивно сходится, а $n \cdot u(n)$ строго убывает и рекурсивно стремится к нулю, то $\left\{\sum_{1 \leqslant r \leqslant n} 1/r\right\} n \cdot u(n)$ тоже рекурсивно стремится к нулю.

При $n \geqslant r$ мы имеем

$$n \cdot u(n)/r = \{n \cdot u(n)/r \cdot u(r)\} u(r) \leqslant u(r),$$

а так как $\sum u(r)$ рекурсивно сходится, то имеется рекурсивная функция $n(k)$ такая, что (обозначая $\sum_{m \leqslant r \leqslant n} (1/r)$ через $h(m, n)$)

$$n > n(k) \longrightarrow h(n(k)+1, n) \cdot nu(n) < 1/2k.$$

Далее, поскольку $n \cdot u(n)$ рекурсивно стремится к нулю, то имеется рекурсивная функция $r(k)$ такая, что $h(1, n(k)) \cdot nu(n) < 1/2k$ при $n > r(k)$, откуда следует, что

$$n > \max(n(k), r(k)) \longrightarrow h(1, n) \cdot nu(n) < 1/k.$$

Упомянутые выше признаки можно суммировать как

Признак Гаусса. Пусть имеются константы α, β, M и рекурсивная функция $\theta(n)$ такая, что $|\theta(n)| < M$ и

$$u(n)/u(n+1) = \alpha + \beta/n + \theta(n)/n^2;$$

тогда,

если $\alpha > 1$ или $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то $\sum u(n)$ рекурсивно сходится;

если $\alpha < 1$ или $\alpha = 1$ и $\beta \leqslant 1$, то $\sum u(n)$ рекурсивно расходится.

Один только случай $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ требует специального рассмотрения. По предыдущей теореме (взяв $1/n^2$ в качестве $u(n)$) мы знаем, что $(1/n) \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)$

рекурсивно стремится к нулю и, следовательно, имеется рекурсивная функция $N(k)$ такая, что

$$n \geqslant N(M) \to \frac{\theta(n)}{n^2} < \frac{1}{n \sum\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)};$$

это показывает, что $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ достаточно для рекурсивной расходимости $\sum u(r)$.

1.5. Теперь мы переходим к рассмотрению признаков относительной сходимости.

Относительная сходимость уже была определена. Говорят, что рекурсивная функция $s(m, n)$ *расходится по n относительно m*, если имеется константа $k \geqslant 1$ и рекурсивная функция $\lambda(n)$ такая, что

$$|s(m, n + \lambda(n)) - s(m, n)| \geqslant 1/k$$

для мажорантных n, m.

Говорят, что $s(m, n)$ *стремится к нулю относительно m*, если

$$s(m, n) = 0(k)$$

для мажорантных n, m.

В следующих теоремах $a(m, n)$, $b(m, n)$, $c(m, n)$ — положительные, ненулевые рекурсивные функции.

Теорема 1. *Если для некоторого фиксированного k и мажорантных m*

$$a(m, n) \leqslant k < 1,$$

то $\sum\limits_{0 \leqslant r \leqslant n} \{a(m, r)\}^r$ *сходится по n относительно m.*

Действительно, $\sum\limits_{n \leqslant r \leqslant N} \{a(m, r)\}^r \leqslant \sum\limits_{n \leqslant r \leqslant N} k^r$ для мажорантных m. Если $i(r+1) \geqslant r + i(r)$ и если $a(m, i(r)) \geqslant 1$ для мажорантных m, то $\sum\limits_{0 \leqslant r \leqslant n} \{a(m, r)\}^r$ расходится относительно m, ибо

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant i(n+1)} \{a(m, r)\}^r - \sum_{0 \leqslant r \leqslant n} \{a(m, r)\}^r \geqslant 1$$

для мажорантных m.

Теорема 1.1. *Если для некоторого фиксированного $\lambda > 0$*

$$a(m, n) \leqslant \lambda b(m, n)$$

для мажорантных m, то сходимость $\sum b(m, r)$ относительно m влечет сходимость $\sum a(m, r)$ относительно m, а относительная расходимость последнего ряда влечет относительную расходимость первого.

Действительно,

$$\sum_{n \leqslant r \leqslant N} a(m, r) \leqslant \lambda \sum_{n \leqslant r \leqslant N} b(m, r)$$

для мажорантных m.

Теорема 1.11. *Если имеются константы h, H такие, что*

$$a < h \leqslant a(m, 0) \leqslant H, \quad h \leqslant b(m, 0) \leqslant H$$

и $a(m, n+1)/a(m, n) \leqslant b(m, n+1)/b(m, n)$ для мажорантных m, то относительная сходимость $\sum\limits_{r \leqslant n} b(m, r)$ влечет относительную сходимость $\sum\limits_{r \leqslant n} a(m, r)$, а относительная расходимость последнего ряда влечет относительную расходимость первого.

Действительно, $a(m, n) \leqslant (H/h) b(m, n)$ для мажорантных m.

Теорема 1.12. *Условие $a(m, n+1)/a(m, n) \leqslant k < 1$ для мажорантных m достаточно для относительной сходимости $\sum a(m, n)$, поскольку $a(m, n+1)/a(m, n) \leqslant k^{n+1}/k^n$ для мажорантных m.*

Условие $a(m, n+1)/a(m, n) \geqslant 1$ для мажорантных m достаточно для относительной расходимости, ибо $\sum\limits_{r \leqslant n} 1$ расходится *).

Теорема 1.13. *Если имеется константа $\beta > 0$ такая, что*

$$c(m, n)\{a(m, n)/a(m, n+1)\} - c(m, n+1) \geqslant \beta$$

*) В этой теореме подразумевается выполнение условия $0 < h \leqslant a(m, 0) \leqslant H$ при некоторых h и H. Аналогичные условия подразумеваются в теоремах 1.14 ($a(m, 0) \leqslant H$), 1.15 ($0 < h \leqslant a(m, 0)$) и 1.17 ($0 < h \leqslant a(m, 0) \leqslant H$). — *Прим. перев.*

для мажорантных m, и если $c(m,n)a(m,n)$ стремится к нулю по n относительно m, то $\sum_{r\leqslant n} a(m,r)$ сходится относительно m.

Действительно, $\beta \sum_{n+1\leqslant r\leqslant N} a(m,r) \leqslant c(m,n)a(m,n)$ для мажорантных m.

Теорема 1.14. *Если имеется константа $p>1$ такая, что*

$$a(m,n)/a(m,n+1) \geqslant 1+p/n$$

для мажорантных m, то $\sum_{r\leqslant n} a(m,r)$ сходится относительно m.

Мы легко получаем, что $n\cdot a(m,n)$ стремится к нулю по n относительно m, и требуемый результат следует из предыдущей теоремы.

Теорема 1.15. *Если $a(m,n)/a(m,n+1) \leqslant 1+1/n+1/n\sum_{r=1}^{n}(1/r)$ для мажорантных m, то $\sum_{r\leqslant n} a(m,r)$ расходится относительно m.*

(Доказательство такое же, как для рекурсивной расходимости.)

Теорема 1.16. *Если $f(m,n)$ монотонно убывает по n относительно m, т. е. если $f(m,N)<f(m,n)$ для $N>n$ и мажорантных m, то*

$$\sum_{r\leqslant n} f(m,r), \quad \sum_{r\leqslant n} 2^r f(m,2^r)$$

одновременно сходятся или расходятся относительно m.

(Доказательство такое же, как для рекурсивной сходимости.)

Теорема 1.17. *Если $a(m,n)/a(m,n+1)=\alpha+\beta/n+\theta(m,n)/n^2$ для мажорантных m и если $|\theta(m,n)|<M$, то $\alpha>1$ или $\alpha=1$, $\beta>1$ являются достаточными условиями для относительной сходимости, а $\alpha<1$ или $\alpha=1$, $\beta\leqslant 1$ — достаточными условиями для относительной расходимости $\sum_{r\leqslant n} a(m,n)$.*

Это следует из теорем 1.12, 1.14, 1.15.

Теперь мы собираемся усилить теорему 1.17, доказав сначала ряд подготовительных теорем.

Теорема 1.18. *Если $a>b$ и $n\geqslant 2$, то*

$$nb^{n-1} < (a^n-b^n)/(a-b) < na^{n-1}.$$

Доказательство. Если $x>1$, $n>1$, то тогда $\sum_{r\leqslant n} x^r > n+1$ и поэтому

$$(x^{n+1}-1)/(x-1) > n+1,$$

откуда, взяв $x=a/b$, получаем

$$(a^{n+1}-b^{n+1})/(a-b) > (n+1)b^n.$$

Аналогично, если $x<1$, $n>1$, то $\sum_{r\leqslant n} x^r < (n+1)$ и поэтому

$$(1-x^{n+1})/(1-x) < n+1,$$

и вторая часть теоремы получается, если взять $x=b/a$.

Заметим, что поскольку $t^q-1=\left\{\sum_{r\leqslant q-1} t^r\right\}(t-1)$, то из $t>0$ следует, что $t\geqq 1$ в соответствии с $t^q\geqq 1$.

Теорема 1.181. *Если α положительно, а p, q — положительные целые числа, причем $p>q$, то $(1+\alpha)^p > \{1+(p/q)\alpha\}^q$.*

Эта теорема — простое следствие специального случая знаменитой теоремы о средних, а именно: $\{(ma+nb)/(m+n)\}^{m+n} > a^m b^n$, $a\neq b$, где m, n — положительные, отличные от нуля целые числа. (Имеется несколько алгебраических доказательств этой теоремы о средних, которые верны в рассматриваемой системе.)

Возьмем $m=q$, $m+n=p$, $a=1+(p/q)\alpha$, $b=1$, тогда получим нашу теорему. Аналогично, если $p<q$, то, взяв $m=p$, $m+n=q$, $b=1$, $a=1+\alpha$, мы имеем $(1+\alpha)^p < \{1+(p/q)\alpha\}^q$.

Теорема 1.19. *Если p, q, x — целые числа, $x>1$, $q>1$, $p\geqslant 1$ и если x_k — наибольшее целое число такое, что $(x_k)^q \leqslant x^p\cdot 2^{kq}$, то $x_n/2^n$ рекурсивно сходится.*

Доказательство. Так как $(2x_k)^q \leqslant x^p\cdot 2^{(k+1)q}$, то $x_{k+1}\geqslant 2x_k$ и, следовательно, $x_k/2^k$ монотонно возрастает, а поскольку x_0 является наибольшим целым числом таким, что $(x_0)^q \leqslant x^p$, и $1^q < x^p$, то $x_0\geqslant 1$ и, следовательно, $x_k > 2^k$. Из неравенств

$$(x_k)^q \leqslant x^p\cdot 2^{kq} < x^{pq}\cdot 2^{kq}$$

следует, что $x_k < x^p \cdot 2^k$. Отсюда получаем (по теореме 1.18)

$$0 \leqslant x^p - (x_k/2^k)^q < \{(x_k+1)^q - (x_k)^q\}/2^{kq} <$$
$$< q(x_k+1)^{q-1}/2^{kq} < q\{x^p + 1/2^k\}^{q-1}/2^k \leqslant q\{x^p+1\}^{q-1}/2^k$$

и, следовательно, $(x_k/2^k)^q$ рекурсивно сходится к x^p.

Полагая $x_k/2^k = y_k$, так что y_k монотонно возрастает и y_k^q рекурсивно сходится, имеем

$$\{(y_{k+r})^q - (y_k)^q\}/\{y_{k+r} - y_k\} > q(y_k)^{q-1} > q,$$

т. е. $y_{k+r} - y_k < \{(y_{k+r})^q - (y_k)^q\}/q$, поэтому y_k рекурсивно сходится, что завершает доказательство.

1.51. Для $p \geqslant 1$, $q > 1$, $x > 1$ мы определяем $\chi(x, p, q, k) = x_k/2^k$ (где x_k определено выше) и $\chi(1, p, q, k) = \chi(0, p, q, k) = 1$.

Теорема 1.2. $\sum_{r \leqslant n} 1/\chi(r, p, q, k)$ *сходится по* n *относительно* k, *если* $p > q$, *и расходится по* n *относительно* k, *если* $p \leqslant q$.

Так как $\{\chi(x, p, q, k)\}^q$ рекурсивно сходится к x^p, то, полагая $a_k = \chi(x+1, p, q, k)/\chi(x, p, q, k)$, мы имеем, что если $p > q$, то $(a_k)^q$ рекурсивно сходится к $(1+1/x)^p > (1+p/qx)^q$ по теореме 1.181; рекурсивная сходимость a_k^q определяет рекурсивную функцию $Q(x)$ такую, что $|(1+1/x)^p - (a_k)^q| < (1+1/x)^p - (1+p/qx)^q$ при $k \geqslant Q(x)$, и поэтому $(a_k)^q > (1+p/qx)^q$, так что $a_k > 1 + p/qx$ при $k \geqslant Q(x)$. Следовательно, по теореме 1.14 $\sum_{r \leqslant n} 1/\chi(r, p, q, k)$ сходится относительно k, если $p > q$.

Если $p = q$, то $\chi(n, p, q, k) = n$ и, следовательно, $\sum_{r \leqslant n} 1/\chi(r, p, q, k)$ расходится. Если $p < q$, то тогда $a_k < 1 + p/qx$ при $k \geqslant Q^*(x)$, откуда по теореме 1.15 получаем, что $\sum_{r \leqslant n} 1/\chi(r, p, q, k)$ расходится относительно k.

Теорема 1.21. *Если* $\varphi(n, p, q, k) = n/\chi(n, p, q, k)$, *то* $\varphi(n, p, q, k)$ *монотонно убывает к нулю относительно* k *при* $p > q$.

Действительно,

$$\varphi(n, p, q, k)/\varphi(n+1, p, q, k) > \{n/(n+1)\}\{1 + p/qn\} = 1 + ((p/q) - 1)/(n+1),$$

если $k \geqslant Q(n)$, $p > q$, так что $\varphi(n, p, q, k)$ монотонно убывает относительно k, и далее, если $N > n$, то

$$\varphi(N, p, q, k)/\varphi(n, p, q, k) < 1 \Big/ \prod_{N \geqslant r > n} \{1 + ((p/q) - 1)/r\} <$$
$$< 1/((p/q) - 1) \sum_{N \geqslant r > n} (1/r) \text{ для мажорантных } k;$$

это показывает, что $\varphi(N, p, q, k)$ стремится к 0 относительно k.

Теорема 1.22. $\left\{\sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)\right\} \cdot n/\chi(n, p, q, k)$ *стремится к* 0 *относительно* k, *если* $p > q$.

Если $n > r$, то по теореме 1.21

$$\varphi(n, p, q, k)/\varphi(r, p, q, k)\chi(r, p, q, k) < 1/\chi(r, p, q, k)$$

для мажорантных k. Так как $\sum_{r \leqslant n} 1/\chi(r, p, q, k)$ сходится относительно k при $p > q$, то для $x \geqslant 1$ мы можем определить функцию $n(x)$ так, что

$$\sum_{n(x) \leqslant r \leqslant n} 1/\chi(r, p, q, k) < 1/2x$$

для $n \geqslant n(x)$ и мажорантных k. Более того, поскольку $\varphi(n, p, q, k)$ стремится к 0 относительно k, то

$$\left\{\sum_{1 \leqslant r \leqslant n(x)} (1/r)\right\} \varphi(n, p, q, k) < 1/2x$$

для мажорантных n, k. Отсюда получаем

$$\left\{\sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)\right\} \varphi(n, p, q, k) < 1/x$$

для мажорантных n, k, а это доказывает, что $\left\{\sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)\right\} \varphi(n, p, q, k)$ стремится к 0 относительно k.

1.52. Сейчас мы в состоянии сформулировать аналог признака Гаусса для относительной сходимости.

Теорема 1.3. *Если для мажорантных k и $p > q$ имеет место*

$$a(n, k)/a(n+1, k) = \alpha + \beta/n + \theta(n, k)/\chi(n, p, q, k)$$

и $|\theta(n, k)| < M$, *то* $\alpha > 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta > 1$ *являются достаточными условиями для сходимости* $\sum_{r \leqslant n} a(r, k)$ *относительно* k, *а* $\alpha < 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ *являются достаточными условиями для относительной расходимости.*

Нам надо рассмотреть только случаи $\alpha = 1$, $\beta > 1$ и $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$. Когда $\beta > 1$, тогда, поскольку $\theta(n, k)\varphi(n, p, q, k)$ стремится к 0 относительно k, мы можем найти N_0 такое, что

$$|n\theta(n, k)/\chi(n, p, q, k)| < (1/2)(\beta - 1)$$

для $n \geqslant N_0$ и мажорантных k и, следовательно,

$$a(n, k)/a(n+1, k) > 1 + (1/2)(\beta + 1)/n$$

для $n \geqslant N_0$ и мажорантных k, что достаточно для относительной сходимости по теореме 1.14.

Аналогично, если $\beta < 1$, то $a(n, k)/a(n+1, k) < 1 + (1/2)(\beta + 1)/n$, что доказывает относительную расходимость в силу теоремы 1.15.

При $\beta = 1$, поскольку $\left\{\sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)\right\}\varphi(n, p, q, k)$ стремится к 0 относительно k, мы можем найти n_0 такое, что

$$|\theta(n, k)/\chi(n, p, q, k)| \leqslant 1/n \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} (1/r)$$

для $n \geqslant n_0$ и мажорантных k, откуда в силу теоремы 1.15 получаем, что $\sum_{r \leqslant n} a(r, k)$ расходится относительно k.

1.6. *Рекурсивные вещественные числа*

Всякая примитивно рекурсивная функция $f(n)$, которая является примитивно рекурсивно сходящейся, называется *примитивно рекурсивным вещественным числом.* Всякая общерекурсивная функция $f(n)$, которая является общерекурсивно сходящейся, называется *общерекурсивным вещественным числом.* Когда различие между примитивной и общей рекурсией несущественно (в том смысле, что контекст допускает любую), мы будем говорить о *рекурсивном вещественном числе.*

Если $f(n)$ и $g(n)$ — рекурсивные вещественные числа и $f(n) = g(n)$ относительно n, то мы говорим, что рекурсивные вещественные числа $f(n)$, $g(n)$ равны, и пишем

$$\{f(n)\} = \{g(n)\}.$$

Если для некоторой константы $c > 0$ имеет место $f(n) > c$ для мажорантных n, то мы говорим, что рекурсивное вещественное число $f(n)$ положительно, и пишем

$$\{f(n)\} > 0.$$

Аналогично, если для некоторой константы $c > 0$ выполняется $f(n) < -c$ для мажорантных n, то говорят, что рекурсивное вещественное число $f(n)$ отрицательно, и пишут

$$\{f(n)\} < 0.$$

Говорят, что два рекурсивных вещественных числа $f(n)$ и $g(n)$ рекурсивно неравны, если имеется константа $k > 0$ и рекурсивная функция $\lambda(n) \geqslant n$ такие, что

$$|f(\lambda(n)) - g(\lambda(n))| > k.$$

1.61. *Арифметика рекурсивных вещественных чисел*

Если $s(n)$ и $t(n)$ рекурсивно сходятся, то, очевидно, $s(n) + t(n)$ и $s(n) - t(n)$ тоже рекурсивно сходятся. Рекурсивное вещественное число $s(n) + t(n)$ называется суммой рекурсивных вещественных чисел $s(n)$ и $t(n)$, и мы пишем

$$\{s(n)\} + \{t(n)\} = \{s(n) + t(n)\}.$$

Рекурсивное вещественное число $s(n) - t(n)$ называется разностью $\{s(n)\}$ и $\{t(n)\}$, и мы пишем

$$\{s(n)\} - \{t(n)\} = \{s(n) - t(n)\}.$$

Рекурсивно сходящаяся последовательность ограничена, потому что имеется константа n_0 такая, что $|s(n) - s(n_0)| < 1$, и, следовательно, если

$$M = \max_{n \leqslant n_0} |s(n)|$$

и $S = M + 1$, то $|s(n)| < S$.

Если $s(n)$ рекурсивно сходится, то $s(n)^2$ тоже рекурсивно сходится, ибо

$$|s(N)^2 - s(n)^2| = \\ = |s(N) - s(n)| \cdot |s(N) + s(n)| < 2S \cdot |s(N) - s(n)|.$$

Следовательно, если $s(n)$ и $t(n)$ рекурсивно сходятся, то то же верно и для

$$s(n) \cdot t(n) = \left\{ \frac{s(n)+t(n)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{s(n)-t(n)}{2} \right\}^2.$$

Рекурсивное вещественное число $s(n) \cdot t(n)$ называется произведением $\{s(n)\}$ и $\{t(n)\}$, и мы пишем

$$\{s(n)\} \cdot \{t(n)\} = \{s(n) \cdot t(n)\}.$$

Если $s(n)$ рекурсивно сходится и рекурсивно отлично от 0 и если $s(n) \neq 0$, то

$1/s(n)$ рекурсивно сходится.

Действительно, имеется константа $k > 0$ и рекурсивная функция $\lambda(n) \geqslant n$ такие, что

$$|s(\lambda(n))| > k,$$

и константа ν такая, что

$$n \geqslant \nu \& n_1 \geqslant \nu \rightarrow |s(n) - s(n_1)| < \tfrac{1}{2} k,$$

откуда, поскольку $\lambda(n_1) \geqslant n_1$, следует, что при $n_1 \geqslant \nu$

$$n \geqslant n_1 \rightarrow |s(n)| > \tfrac{1}{2} k.$$

Так как $s(n) \neq 0$, то $\min\limits_{n \leqslant n_1} |s(n)| = m > 0$ и, следовательно, если $s = \min\left(m, \frac{1}{2} k\right)$, то $|s(n)| \geqslant s$.

Следовательно, $1/s(n)$ рекурсивно сходится, ибо

$$\left| \frac{1}{s(n)} - \frac{1}{s(N)} \right| \leqslant \frac{|s(N) - s(n)|}{s^2};$$

рекурсивное вещественное число $\{1/s(n)\}$ называется обратным к $\{s(n)\}$, и мы пишем

$$1/\{s(n)\} = \{1/s(n)\}.$$

Для рекурсивных вещественных чисел $\{s(n)\}$, $\{t(n)\}$ мы определим частное $\{s(n)\}/\{t(n)\}$ как вещественное число $\{s(n)\} \cdot 1/\{t(n)\}$, когда $\{t(n)\}$ рекурсивно отлично от нуля.

Теорема 1.4. *Невозможна эффективная процедура для распознавания равенства двух рекурсивных вещественных чисел.*

Пусть $f(n)$ — произвольная примитивно рекурсивная функция, пусть $s(n) = 0$ и $t(0) = f(0)$, $t(n+1) = t(n) + f(n+1)$. В этом случае $t(n) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(r) = 0$ для всех $r \leqslant n$. Как $\{s(n)\}$, так и $\{t(n)\}$ являются примитивно рекурсивными вещественными числами*). Если имеется эффективная процедура для распознавания того, верно ли, что $\{s(n)\} = \{t(n)\}$ или нет, то имеется эффективная процедура для распознавания по произвольной $f(n)$, имеет ли место $f(n) = 0$ для всех n или найдется n, для которого $f(n) > 0$, а это, как мы знаем, невозможно.

Мы полагаем по определению

$$\{f(n)\} > \{g(n)\} \leftrightarrow \{f(n)\} - \{g(n)\} > 0.$$

Теорема 1.5. *Если $\{f(n)\}$ и $\{g(n)\}$ рекурсивно неравны, то или $\{f(n)\} > \{g(n)\}$ или $\{g(n)\} > \{f(n)\}$.*

Действительно, имеется константа k и строго возрастающая функция $\lambda(n)$ такие, что

$$|f(\lambda(n)) - g(\lambda(n))| > k;$$

в силу рекурсивной сходимости мы можем найти N такое, что

$$m \geqslant n \geqslant N \rightarrow |f(m) - f(n)| < \tfrac{1}{3} k \& |g(m) - g(n)| < \tfrac{1}{3} k.$$

Поэтому, если $f(\lambda(N)) > g(\lambda(N))$, то

$$f(\lambda(N)) - g(\lambda(N)) > k$$

и, следовательно,

$$f(n) - g(n) > \tfrac{1}{3} k$$

*) Для того чтобы это утверждение было справедливо, достаточно изменить определение $t(n)$ следующим образом: $t(n+1) = t(n) + 2^{-n-1} \cdot \operatorname{sg} f(n+1)$. — *Прим. перев.*

для $n \geqslant N$ — это доказывает, что

$$\{f(n)\} > \{g(n)\}.$$

Аналогично, если $f(\lambda(N)) < g(\lambda(N))$, то

$$\{g(n)\} > \{f(n)\}.$$

Теорема 1.51. *Если $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$ — неравные общерекурсивные вещественные числа, то они общерекурсивно неравны.*

Действительно, если $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$ не равны, то имеется константа k и при данном n имеется целое N такие, что

$$N \geqslant n \;\&\; |f(N) - g(N)| > k; \qquad (1)$$

пусть $\lambda(n)$ будет наименьшим значением N, для которого эти неравенства выполняются; тогда $\lambda(n)$ общерекурсивна, $\lambda(n) \geqslant n$ и $|f(\lambda(n)) - g(\lambda(n))| > k$, так что $\{f(n)\}$ и $\{g(n)\}$ общерекурсивно неравны. Важно заметить, что мы установили только *общерекурсивное* неравенство; даже если $\{f(n)\}$ и $\{g(n)\}$ являются неравными примитивно рекурсивными вещественными числами, мы не можем доказать их примитивно рекурсивное неравенство, ибо существование N, для которого выполняются неравенства (1), не служит доказательством существования примитивно рекурсивной $\lambda(n)$, для которой

$$\lambda(n) \geqslant n \;\&\; |f(\lambda(n)) - g(\lambda(n))| > k.$$

Рекурсивное вещественное число $\{f(n)\}$ является рациональным, если имеется рациональное число l такое, что $f(n)$ рекурсивно стремится к l; иначе говоря,

$$f(n) - l = 0(k)$$

для мажорантных n.

Рекурсивное вещественное число $\{f(n)\}$ является *рекурсивно иррациональным*, если имеются рекурсивные функции $\nu(p, q, r) \geqslant 1$, $n(p, q, r)$ такие, что

$$n \geqslant n(p, q, r) \to |f(n) - (p, q)/(r+1)| \geqslant 1/\nu(p, q, r).$$

Если все упомянутые функции примитивно рекурсивны, то $\{f(n)\}$ является примитивно рекурсивно иррациональным.

Теорема 1.6. *Если рекурсивное вещественное число $\{f(n)\}$ иррационально, т. е. если для любых p, q, r существуют k и m такие, что*

$$n \geqslant m \to |f(n) - (p, q)/(r+1)| \geqslant 10^{-k}$$

для всех n, то $\{f(n)\}$ общерекурсивно иррационально.

Действительно, имеется рекурсивная функция $n(s)$ такая, что

$$n \geqslant n(s) \to |f(n) - f(n(s))| < 10^{-(s+1)},$$

и, следовательно, в силу иррациональности $\{f(n)\}$ имеется k такое, что

$$|f(n(k)) - (p, q)/(r+1)| \geqslant 9 \cdot 10^{-(k+1)}.$$

Пусть $\varphi(p, q, r)$ — наименьшее s такое, что

$$|f(n(s)) - (p, q)/(r+1)| \geqslant 9 \cdot 10^{-(s+1)},$$

и пусть $N(p, q, k) = n(\varphi(p, q, r))$, так что $\varphi(p, q, r)$ и $N(p, q, r)$ общерекурсивны и

$$n \geqslant N(p, q, r) - |f(n) - (p, q)/(r+1)| \geqslant 10^{-(\varphi(p, q, r)+1)};$$

это доказывает, что $\{f(n)\}$ общерекурсивно иррационально.

Теорема 1.61. *Невозможна эффективная процедура, распознающая по любому общерекурсивному вещественному числу, является ли оно рациональным или иррациональным.*

Пусть $s(0) = 1$, $s(n+1) = 1 + (n+1)s(n)$, так что $\{s(n)/n!\}$ — примитивно рекурсивное вещественное число e, которое, конечно, иррационально. Пусть $f(n)$ — произвольная примитивно рекурсивная функция и пусть $t(n) = s(n)$, если $f(r) = 0$ для всех $r \leqslant n$, и $t(n) = s(k)$, если k — первое значение $r \leqslant n$, для которого $f(r) > 0$; при $N > n$ имеет место $t(N)/N! - t(n)/n! \leqslant s(N)/N! - s(n)/n!$, так что $t(n)/n!$ примитивно рекурсивно сходится.

Если существует эффективная процедура для распознавания того, является ли $\{t(n)/n!\}$ рациональным или иррациональным, то имеется эффективная процедура для распознавания того, существует ли n, для которого $f(n) \neq 0$, или нет.

1.7. *Рекурсивные полиномы*

Если a_n — (примитивно) рекурсивная функция, то

$$\sum_{r\leqslant n} a_r x^r$$

называется (*примитивно*) *рекурсивным полиномом степени* n *с коэффициентами* a_r, $r\leqslant n$.

Если $\sum_{r\leqslant n} a_r t^r = 0$ для некоторого t, то t называется *нулем* полинома $\sum_{r\leqslant n} a_r x^r$.

Если $f(x)=\sum_{r\leqslant n} a_r x^r$ не имеет ни одного рационального нуля и a_r, $r\leqslant n$, — целые, то

$$|f(p/q)|\geqslant 1/q^n.$$

В самом деле, $q^n f(p/q)=\sum_{r\leqslant n} a_r p^r q^{n-r}$ и поскольку $f(p/q)\neq 0$ и $\sum_{r\leqslant n} a_r p^r q^{n-r}$ целое, то

$$\left|\sum_{r\leqslant n} a_r p^r q^{n-r}\right|\geqslant 1,$$

откуда следует, что

$$|f(p/q)|\geqslant 1/q^n.$$

Если $\sum_{r\leqslant n} a_r x^r$ имеет рациональный нуль p/q (p, q — взаимно простые), то p является делителем a_0, а q — делителем a_n; действительно,

$$0 = q^n \sum_{r\leqslant n} a_r (p/q)^r = a_n p^n + q \sum_{r\leqslant n-1} a_r p^r q^{n-r-1},$$

поэтому a_n делится на q, и

$$0 = q^n \sum_{r\leqslant n} a_r (p/q)^r = a_0 q^n + p \sum_{1\leqslant r\leqslant n} a_r p^{r-1} q^{n-r},$$

так что a_0 делится на p.

Теорема 1.7. *Если* $f_n(x)$ *представляет собой полином* $\sum_{r\leqslant n} a_r x^r$, $M_n=\max_{r\leqslant n}|a_r|$ *и* z *не меньше* $|x|$, $|y|$ *и единицы, то*

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\right|\leqslant \frac{1}{2} n(n+1) M_n z^{n-1}. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\frac{f_0(x)-f_0(y)}{x-y}=0$$

и если (1) выполняется при $n=k$, то

$$\left|\frac{f_{k+1}(x)-f_{k+1}(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} + a_{k+1}\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}k(k+1)M_k z^{k-1} + (k+1)M_{k+1} z^k \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\right\} M_{k+1} z^k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) M_{k+1} z^k,$$

так что (1) выполняется также при $n=k+1$ и поэтому по индукции (1) выполняется для всех n.

Теорема 1.71. *Если* $f(x)$ *— примитивно рекурсивный полином степени* n *с целыми коэффициентами* a_r, *не имеющий рациональных нулей, и если* $\{s_n\}$ *— примитивно рекурсивный нуль* $f(x)$ *— иначе говоря,* $\{s_n\}$ *— примитивно рекурсивное вещественное число и* $f(s_n)$ *примитивно рекурсивно стремится к нулю, — то* $\{s_n\}$ *примитивно рекурсивно иррационально.*

Так как s_n является рекурсивно сходящейся, мы можем найти S такое, что $|s_n|\leqslant S$ для любого n. Пусть

$$z=\max(|p/q|,\ S,\ 1),$$

$$h=\max_{r\leqslant n}|a_r| \quad \text{и} \quad M=\frac{1}{2}n(n+1)hz^{n-1};$$

тогда по предыдущей теореме $|f(p/q)-f(s_m)|\leqslant M\cdot|p/q-s_m|$.

Так как $f(s_m)$ рекурсивно стремится к нулю, мы можем найти k так, чтобы

$$m\geqslant k \rightarrow |f(s_m)|<1/2q^n;$$

однако

$$|f(p/q)|\geqslant 1/q^n$$

и поэтому

$$|f(p/q)-f(s_m)|\geqslant 1/2q^n,$$

откуда

$$m\geqslant k \rightarrow |p/q-s_m|\geqslant 1/2Mq^n;$$

это доказывает, что $\{s_m\}$ примитивно рекурсивно иррационально.

1.71. *Рекурсивные разложения*

Если $\{s_n\}$ — (примитивно) рекурсивное вещественное число и если a_n — (примитивно) рекурсивная последовательность такая, что

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant r-1, \quad r \geqslant 2,$$

и

$$\{s_n\} = \left\{ \sum_{p \leqslant n} a_p r^{-p} \right\},$$

то говорят, что вещественное число $\{s_n\}$ имеет (примитивно) рекурсивное разложение $\sum a_p r^{-p}$ по основанию r.

Теорема 1.72. *Если $\{s_n\}$ — рекурсивно иррациональное рекурсивное вещественное число, то $\{s_n\}$ имеет рекурсивное разложение по любому основанию $r \geqslant 2$.*

Так как $\{s_n\}$ — рекурсивное вещественное число, то имеется строго возрастающая рекурсивная функция $n(k)$ такая, что

$$n \geqslant n(k) \rightarrow |s_n - s_{n(k)}| < 1/r^{k+1},$$

а поскольку s_n рекурсивно иррационально, то имеются рекурсивные функции $i(p, q)$, $N(p, q)$ такие, что для любых целых p, q $(q > 0)$

$$n \geqslant N(p, q) \rightarrow |s_n - p/q| > r^{-i(p, q)}.$$

Взяв $p = 0$, $q = 1$, мы видим, что для всех достаточно больших j, k

$$|s_j - s_k| < r^{-i(0, 1)}$$

и

$$|s_j| > r^{-i(0, 1)}, \quad |s_k| > r^{-i(0, 1)},$$

так что s_j, s_k имеют один и тот же знак. Поэтому без потери общности мы можем предположить, что *все* s_n положительны.

Пусть $[x]$ обозначает наибольшее целое, содержащееся в x, и пусть $p_k = [r^k s_{n(k)}]$; тогда *или*

$$0 \leqslant r^k s_{n(k)} - p_k \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{(i)}$$

или

$$r^k s_{n(k)} - p_k > \frac{1}{2},$$

так что

$$0 < p_k + 1 - r^k s_{n(k)} < \frac{1}{2}. \qquad \text{(ii)}$$

Сначала мы рассмотрим случай (i).

При $n \geqslant n(k)$

$$-\frac{1}{r} < r^k s_n - r^k s_{n(k)} < \frac{1}{r}$$

и, следовательно, в силу (i)

$$|r^k s_n - p_k| < 1;$$

но

$$n \geqslant N(p_k, r^k) \rightarrow |s_n - p_k/r^k| > r^{-i(p_k, r^k)},$$

и поэтому при $n \geqslant N(p_k, r^k)$

$$1 > |r^k s_n - p_k| > d_k = r^{k-i(p_k, r^k)}.$$

Полагая $m(k) = \max(n(k), N(p_k, r^k))$, получаем, что при $n \geqslant m(k)$ каждое $r^k s_n$ лежит или в открытом интервале $(p_k + d_k, p_k + 1)$ или в открытом интервале $(p_k - 1, p_k - d_k)$.

Полагая $\mu(k) = n(i(p_k, r^k))$, мы имеем

$$n \geqslant \mu(k) \rightarrow |r^k s_n - r^k s_{\mu(k)}| < d_k;$$

это показывает, что все $r^k s_n$ при $n \geqslant \max\{\mu(k), m(k)\} = M(k)$ лежат в одном или другом из этих интервалов, и поэтому

или

$$[r^k s_n] = p_k \qquad \text{для всех} \quad n \geqslant M(k)$$

или

$$[r^k s_n] = p_k - 1 \qquad \text{для всех} \quad n \geqslant M(k),$$

и, следовательно, $[r^k s_n] = [r^k s_{M(k)}]$ для $n \geqslant M(k)$.

В случае (ii) тот же самый результат выполняется для $n \geqslant M^*(k)$, где

$$M^*(k) = \max\{n(i(p_k + 1, r^k)), N(p_k + 1, r^k)\},$$

и, следовательно, если

$$\nu(0) = \max\{M(0), M^*(0)\}$$

и

$$\nu(k+1) = \max\{M(k+1), M^*(k+1), \nu(k)+1\},$$

то

$$n \geqslant \nu(k) \to [r^k s_n] = [r^k s_{\nu(k)}]$$

и $\nu(k)$ строго возрастает.

Следовательно,

$$0 \leqslant s_n - [r^k s_{\nu(k)}]/r^k < 1/r^k$$

для $n \geqslant \nu(k)$.

Пусть

$$a_0 = [s_{\nu(0)}], \quad a_{n+1} = [r^{n+1} s_{\nu(n+1)}] - r[r^n s_{\nu(n)}],$$

тогда

$$\sum_{k \leqslant n} a_k r^{-k} = [r^n s_{\nu(n)}]/r^n.$$

Теперь для любого рационального x

$$0 \leqslant rx - r[x] < r$$

$$-1 < [rx] - rx \leqslant 0,$$

так что

$$-1 < [rx] - r[x] < r;$$

взяв x равным $r^n s_{\nu(n+1)}$, получаем, что поскольку $[r^n s_{\nu(n)}] = [r^n s_{\nu(n+1)}]$, то $0 \leqslant a_{n+1} < r$. Остается доказать, что вещественные числа $\{s_n\}$ и $\{[r^n s_{\nu(n)}]/r^n\}$ равны, ибо тогда $\sum a_k r^{-k}$ является примитивно рекурсивным разложением $\{s_n\}$ по основанию r.

При $n \geqslant n(k+1)$

$$|s_n - s_{\nu(n)}| < 1/r^{k+1}$$

и

$$0 \leqslant s_{\nu(n)} - [r^n s_{\nu(n)}]/r^n < 1/r^n \leqslant 1/r^{k+1},$$

и поэтому

$$|s_n - [r^n s_{\nu(n)}]/r^n| < 1/r^k$$

для $n \geqslant n(k+1)$, что завершает доказательство.

Для последней в этой главе теоремы о том, что имеется примитивно рекурсивное вещественное число, десятичное разложение которого не является примитивно

рекурсивным, мы напомним некоторые результаты из теории рекурсивных функций.

По теореме Р. Петер все примитивно рекурсивные функции одного аргумента можно перенумеровать*) в виде

$$\varphi_0(n), \ \varphi_1(n), \ \varphi_2(n), \ \ldots,$$

где

$$\varphi_0(n) = 0, \quad \varphi_1(n) = n+1, \quad \varphi_2(n) = n - [\sqrt{n}]^2, \ \ldots$$

В этой нумерации каждая функция $\varphi_m(n)$ встречается бесконечное число раз, причем функции $\varphi_p(n)$ и $\varphi_m(n)$ равны при $p = 3^m \cdot 7 \cdot 11^x$, где x — произвольное неотрицательное целое, а функция $\varphi_m(n) + Sn$ равна $\varphi_p(n)$ при $p = 3^m \cdot 5^2$, так что $\varphi_m(n)$ и $\varphi_p(n)$ являются разными функциями при $m > 0$. Отсюда следует, что функция $d(n) = \varphi_n(n)$ *не* является примитивно рекурсивной, ибо если бы $d(n)$ была примитивно рекурсивной, то такой же была бы $d(n)+1$, а поэтому нашлось бы число p такое, что

$$\varphi_p(n) = d(n) + 1$$

при всех n, откуда следовало бы $\varphi_p(p) = d(p) + 1 = \varphi_p(p) + 1$, что невозможно. Тем не менее функция $d(n)$ общерекурсивна (на самом деле, определима двойной рекурсией) и, следовательно, по теореме Клини о нормальной форме имеется примитивно рекурсивная функция $\varphi(n)$ и примитивно рекурсивный предикат $R(m, n)$ такие, что

$$d(n) = \varphi\{\mu_x R(n, x)\},$$

где $\mu_x R(n, x)$ обозначает наименьшее значение x, для которого выполняется $R(n, x)$.

(Аналогично можно построить функцию $d(n)$, которая является общерекурсивной, но не определима с помощью кратных рекурсий никакого конечного порядка.)

С помощью этой функции $d(n)$ мы можем теперь доказать важную теорему, принадлежащую Э. Шпеккеру.

Теорема 1.8. *Имеется примитивно рекурсивный предикат $P(x)$ и примитивно рекурсивная функция $\gamma(n)$,*

*) См. раздел 7.5 книги «Рекурсивная теория чисел». — *Прим. ред.*

которая принимает лишь значения 0 *и* 1 *такие, что общерекурсивная функция*

$$\gamma\{\mu_x(x \geqslant n \,\&\, P(x))\}$$

не является примитивно рекурсивной.

Пусть $\alpha(n)$, $\beta(n)$ — примитивно рекурсивные функции, обладающие свойствами

$$\alpha(0) = 0,\ \alpha(n+1) = 1;\ \beta(0) = 1,\ \beta(n+1) = 0,$$

и пусть $i(m, n)$ и $j(m, n)$ — представляющие функции примитивно рекурсивных предикатов

$$\exists x\,\{n = 3^m \cdot 7 \cdot 11^x\},\quad \exists x\,\{x \leqslant n \& R(m,\ x)\}.$$

Таким образом, $i(m, n)$ и $j(m, n)$ принимают лишь значения 0 и 1 и если $i(m, n)$ обращается в нуль, то функции $\varphi_m(t)$ и $\varphi_n(t)$ равны. В терминах i и j мы определяем функции $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ следующей одновременной рекурсией:

$$a(0) = b(0) = c(0) = 0;$$

если $a(n) = 0$, то

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \beta(i(b(n), n+1)),\\ b(n+1) &= b(n) + a(n+1),\\ c(n+1) &= n+1; \end{aligned}$$

если $a(n) = 1$, то

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \alpha(j(c(n),\ n+1)),\\ b(n+1) &= b(n),\\ c(n+1) &= c(n). \end{aligned}$$

Функции $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ примитивно рекурсивны; $a(n)$ принимает только значения 0 и 1, поскольку α и β принимают только эти значения. Теперь мы покажем, что $a(n)$ имеет бесконечно много нулей.

Действительно, предположим, что при некоторых n и p

$$a(n) = 0,\quad a(n+1) = a(n+2) = \ldots = a(n+p) = 1;$$

тогда

$$c(n+r+1) = n+1, \qquad 0 \leqslant r \leqslant p,$$

и

$$b(n+r+1) = b(n)+1, \quad 0 \leqslant r \leqslant p,$$

$$i(b(n)+1,\ n+r+1) = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant p,$$

так что все функции $\varphi_{n+r+1}(t)$, $0 \leqslant r \leqslant p$, равны. Но функции $\varphi_{n+1}(t)$, $\varphi_{n+p+1}(t)$ *не* равны, если

$$n + p + 1 = 3^{n+1} \cdot 5^2$$

и, следовательно, для достаточно больших p имеет место $a(n+p+1) = 0$.

С другой стороны, $a(n) = 1$ для бесконечно многих n, ибо если

$$a(n) = a(n+1) = a(n+2) = \ldots = a(n+p) = 0,$$

то

$$b(n+r+1) = b(n), \quad 0 \leqslant r < p,$$

и

$$i(b(n),\ n+r+1) = 1, \qquad 0 \leqslant r < p.$$

Так как, однако, если $m = 3^{b(n)} \cdot 7 \cdot 11^k$, то $i(b(n), m) = 0$ и так как $3^{b(n)} \cdot 7 \cdot 11^k \geqslant 7 \cdot 11^k > n$ для достаточно больших k, то $a(n+p+1) = 1$ для достаточно больших значений p.

Отсюда следует, что для бесконечно многих значений n

$$a(n) = 0 \text{ и } a(n+1) = 1$$

и, следовательно,

$$b(n+1) = b(n) + 1;$$

так как $b(n)$ не убывает и изменяется на единицу время от времени, то это показывает, что значения $b(n)$ содержат все неотрицательные целые.

Пусть

$$\psi(n) = \varphi\{\mu_x(x \leqslant n \,\&\, R(c(n), x))\}$$

и

$$\gamma(n) = \beta(\psi(n)).$$

Мы докажем, что функция

$$g(n) = \gamma\{\mu_x(a(x) = 0 \,\&\, x \geqslant n)\}$$

не является примитивно рекурсивной.

Действительно, если бы $g(n)$ была примитивно рекурсивной, то мы могли бы найти m так, чтобы

$$g(n) = \varphi_m(n)$$

для всех n; тогда, поскольку $m+1$ является значением $b(t)$ при подходящем t, мы можем найти наименьшее t, скажем, $n+1$ такое, что $b(n+1) = m+1$, и поэтому $b(n) = m$.

Для этого значения n мы имеем

$$a(n) = 0, \quad a(n+1) = 1, \quad c(n+1) = n+1$$

и $i(m, n+1) = 0$; это последнее равенство показывает, что функции $\varphi_m(t)$ и $\varphi_{n+1}(t)$ равны, и поэтому по предположению

$$g(n+1) = \varphi_{n+1}(n+1) = d(n+1).$$

Мы видели, что необходимо имеется $N > n$, для которого $a(N) = 0$; пусть $n+p+1$ — наименьшее значение (большее n), для которого $a(n+p+1) = 0$, так что $a(n+r) = 1$ при $1 \leqslant r \leqslant p$. Таким образом,

$$\mu_x(a(x) = 0 \,\&\, x \geqslant n+1) = n+p+1,$$
$$c(n+r+1) = n+1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant p$$

и

$$\psi(n+p+1) = \varphi\{\mu_x(x \leqslant n+p+1 \,\&\, R(c(n+p+1), x))\} = \varphi\{\mu_x(x \leqslant n+p+1 \,\&\, R(n+1, x))\}.$$

Тем не менее, так как $a(n+p) = 1$ и $a(n+p+1) = 0$, то

$$j(c(n+p), n+p+1) = 0,$$

откуда следует

$$j(n+1, n+p+1) = 0;$$

это показывает, что имеется значение x такое, что $x \leqslant n+p+1$ и $R(n+1, x)$, и поэтому

$$\psi(n+p+1) = \varphi\{\mu_x R(n+1, x)\} = d(n+1).$$

Следовательно,

$$g(n+1) = \beta\{\psi(\mu_x(a(x) = 0 \,\&\, x \geqslant n+1))\} = \beta\{\psi(n+p+1)\} = \beta\{d(n+1)\}$$

и это противоречие доказывает теорему.

Теорема 1.9. *Имеется примитивно рекурсивное вещественное число с десятичным разложением, которое не примитивно рекурсивно.*

Пусть $a(n)$, $\gamma(n)$ — функции, определенные в предыдущем разделе, и пусть

$$\Gamma(n) = 4\gamma(n) + 1,$$
$$\varphi(n) = 3 \cdot \alpha(a(n)) + \beta(a(n)) \cdot \Gamma(n).$$

Так как $\gamma(n)$ принимает лишь значения 0 и 1, то $\Gamma(n)$ принимает лишь значения 1, 5, а $\varphi(n)$ принимает только значения 1, 3, 5. Более того, поскольку $a(n) = 0$ для бесконечно многих n, то имеется бесконечно много n, для которых $\varphi(n) \neq 3$. Мы замечаем, что условие $\varphi(n) \neq 3$ эквивалентно $a(n) = 0$. Следовательно,

$$\varphi\{\mu_x(\varphi(x) \neq 3 \,\&\, x \geqslant n)\} = \varphi\{\mu_x(a(n) = 0 \,\&\, x \geqslant n)\} = \Gamma\{\mu_x(a(n) = 0 \,\&\, x \geqslant n)\} = q(n), \text{ например *}).$$

Обозначая через $r(n)$ остаток от деления n на 10, а через $s(n)$ — частное $\{n - r(n)\}/10$, мы полагаем

$$\psi(n+1) = r\{3 \cdot \varphi(n) + s[3 \cdot q(n+1)]\},$$

так что $\psi(n+1)$ — это последний десятичный знак числа, которое получается умножением $\varphi(n)$ на 3 и затем прибавлением 1 или 0 в зависимости от того, имеет ли при $k \geqslant n+1$ первое $\varphi(k)$, не равное 3, значение 5 или 1.

Смысл этого определения легче понять, если рассмотреть изменение десятичной дроби, состоящей только из цифр 1, 3, 5, при ее умножении на 3.

*) Здесь и в дальнейшем изложении автор пользуется этим оборотом речи для выражения того, что $q(n)$ — новая функция, вводимая при помощи последнего равенства. — *Прим. перев.*

Сначала мы докажем, что рекурсивные вещественные числа

$$\left\{\sum_{k\leqslant n}\frac{\psi(k+1)}{10^k}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{3\sum_{k\leqslant n}\frac{\varphi(k)}{10^k}\right\}$$

равны.

Заметим, что $\sum_{k\leqslant n}\frac{\psi(k+1)}{10^k}$ представляет собой n-членное десятичное разложение числа $3\sum_{k\leqslant n}\frac{\varphi(k)}{10^k}$ для достаточно больших значений n. Поэтому

$$0\leqslant 3\sum_{k\leqslant n}\frac{\varphi(k)}{10^k}-\sum_{k\leqslant n}\frac{\psi(k+1)}{10^k}<\frac{1}{10^n},$$

но

$$0\leqslant 3\sum_{k\leqslant n}\frac{\varphi(k)}{10^k}-3\sum_{k\leqslant n}\frac{\varphi(k)}{10^k}<\frac{2}{10^n}$$

и, значит,

$$\left|\sum_{k\leqslant n}\frac{\psi(k+1)}{10^k}-3\sum_{k\leqslant n}\frac{\varphi(k)}{10^k}\right|<\frac{2}{10^n},$$

что доказывает равенство рассматриваемых вещественных чисел. Следующая таблица дает значения $\psi(n+1)$ для всевозможных комбинаций значений $\varphi(n)$ и $q(n+1)$:

$\varphi(n)$	$q(n+1)$	$\psi(n+1)$
1	1	3
3	1	9
5	1	5
1	5	4
3	5	0
5	5	0

Следовательно, если мы определяем $t(n)$ как 1 для нечетных значений n и как 5 для четных n, то мы имеем

$$q(n+1)=t(\psi(n+1)).$$

Поэтому если бы функция $\psi(n)$ была примитивно рекурсивной, то и $q(n)$ была бы примитивно рекурсивной, а по предыдущей теореме мы знаем, что этого не может быть.

В классическом анализе разложение, имеющее вид $\sum\psi(n+1)\cdot 10^{-n}$, в котором $\psi(n)\neq 9$ для бесконечно многих n, единственно, но классическое доказательство этого неверно в рекурсивном анализе. Поэтому приведенный выше пример не дает окончательного ответа на вопрос, существует ли примитивно рекурсивное число, которое *не может* иметь примитивно рекурсивного разложения.

ГЛАВА II

РЕКУРСИВНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Равномерные и дважды равномерные эквиваленты для относительно непрерывной рекурсивной функции. Верхние и нижние границы и невозможность их достижимости. Условия, достаточные для того, чтобы относительно непрерывная функция обращалась в нуль, если она меняет знак, и несуществование рекурсивного корня в общем случае.

В этой главе мы изучаем свойства рекурсивной непрерывности и относительной непрерывности, первое — свойство отдельных рекурсивных функций, второе — свойство сходящихся последовательностей рекурсивных функций. Сначала мы определяем рекурсивную непрерывность в точке и в интервале.

2. *Рекурсивная непрерывность.*

2.01. Рекурсивная функция $f(x)$ является *рекурсивно непрерывной* в точке x_1, если имеется рекурсивная функция $c_1(k)$ такая, что для всех x

$$x - x_1 = 0(c_1(k)) \rightarrow f(x) - f(x_1) = 0(k).$$

2.02. $f(x)$ является *равномерно* (или *интервально*) *рекурсивно непрерывной* при $a \leqslant x \leqslant b$, если имеется $c(k)$ такая, что для всех x, X, для которых $a \leqslant x \leqslant X \leqslant b$,

$$x - X = 0(c(k)) \rightarrow f(x) - f(X) = 0(k).$$

Так, например, функция x^2 равномерно рекурсивно непрерывна в любом интервале $(-10^p, 10^p)$, ибо $x^2 - X^2 = 0(k)$, если

$$x - X = 0(k + p + 1).$$

Если $f(x)$, $g(x)$ рекурсивно непрерывны в x_1 (в интервале i), то, конечно, рекурсивно непрерывны и

$f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а также $f(x)/g(x)$, в предположении, что $g(x_1) \neq 0$ ($|g(x)| \geqslant 10^\alpha$ в i).

2.1. *Относительная непрерывность.*

Если $f(n, x)$ рекурсивно сходится при $a \leqslant x \leqslant b$ и если имеется строго возрастающая рекурсивная функция $c(k)$ и рекурсивная функция $C(k, x, y)$ такие, что для всех x, X, удовлетворяющих условиям $a \leqslant x \leqslant X \leqslant b$ и $x - X = 0(c(k))$, выполняется $f(n, x) - f(n, X) = 0(k)$ для всех $n \geqslant C(k, x, X)$, то мы говорим, что $f(n, x)$ *непрерывна при* $a \leqslant x \leqslant b$ *относительно* n. (Заметим, что относительная непрерывность является равномерным свойством.) Функция $f(n, x)$, которая непрерывна относительно n, не обязательно непрерывна при любом конкретном значении n. Так, например, если $\varphi(p/q) = Q$, где $Q = q/(p, q)$ и (p, q) — наибольший общий делитель p и q, то $\varphi(x)$ не является непрерывной для любого рационального значения x, ибо если p/q и p_1/q_1 — несократимые дроби и $0 < |p/q - p_1/q_1| < 1/2q_1^2$, то $q > 2q_1$ и, следовательно, $\varphi(p/q) - \varphi(p_1/q_1) = q - q_1 > q_1 \geqslant 1$; поэтому, если $f(n, x) = \varphi(x)/n$, то $f(n, x)$ не является непрерывной для любого n, но

$$|f(n, p_1/q_1) - f(n, p_2/q_2)| \leqslant |q_1 - q_2|/n = 0(k)$$

при $n > |q_1 - q_2| \cdot 10^k$, так что $f(n, x)$ относительно непрерывна.

Как и непрерывность, относительная непрерывность сохраняется при сложении, вычитании и умножении; более того, если $g(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и если при некотором целом α имеет место $|g(n, x)| \geqslant 10^\alpha$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и мажорантных n, то $1/g(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$.

Теорема 2.1. *Относительная непрерывность инвариантна по отношению к эквивалентности.*

Действительно, если $g(n, x)$ эквивалентна $f(n, x)$ и если $f(n, x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ относительно n, то для всех x_1, x_2, удовлетворяющих условию

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b, \quad x_1 - x_2 = 0(c_f(k + 1)),$$

и мажорантных n мы имеем

$$g(n, x_1) - f(n, x_1) = 0(k+1),$$
$$g(n, x_2) - f(n, x_2) = 0(k+1),$$
$$f(n, x_1) - f(n, x_2) = 0(k+1),$$

так что

$$g(n, x_1) - g(n, x_2) = 0(k);$$

это доказывает, что $g(n, x)$ неперерывна относительно n.

Теорема 2.11. *Если $f(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $|f(n, x)| \geqslant 10^{-\mu}$ для мажорантных n, то или $f(n, x) \geqslant 10^{-\mu}$ для всех x из (a, b) или $f(n, x) \leqslant -10^{-\mu}$ для всех x из (a, b) при мажорантных n.*

Действительно, если x_1, x_2 — две произвольные точки из (a, b), то мы можем разделить (x_1, x_2) на конечное число частей таких, что значения $f(n, x)$ в любых двух точках из одной и той же части отличаются меньше, чем на $10^{-\mu-1}$ для мажорантных n, и поэтому $f(n, x_1)$ и $f(n, x_2)$ имеют одинаковый знак для мажорантных n.

Теорема 2.2. *Относительно непрерывная функция имеет равномерно сходящийся относительно непрерывный эквивалент.*

Действительно, если $f(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то имеются рекурсивные функции $N(k, x)$ и $c(k)$ такие, что для всех x, X, удовлетворяющих условиям

$$a \leqslant x \leqslant X \leqslant b, \quad x - X = 0(c(k)),$$

мы имеем

$$f(n, X) - f(n, x) = 0(k)$$

для мажорантных n, и

$$N \geqslant n \geqslant N(k, x) \to f(N, x) - f(n, x) = 0(k).$$

Пусть $\varphi(k, x) = f(N(k, x), x)$; тогда

$$p > q \to \varphi(p, x) - \varphi(q, x) = 0(q)$$

и

$$\varphi(k, X) - \varphi(k, x) = f(N(k, X), X) - f(m, X) +$$
$$+ f(m, X) - f(m, x) + f(m, x) - f(N(k, x), x) =$$
$$= 3 \cdot 0(k) \quad \text{для мажорантных } m;$$

это показывает, что $\varphi(n, x)$ равномерно сходится и относительно непрерывна.

Поскольку

$$\varphi(n, x) - f(n, x) = \varphi(n, x) - f(m, x) + f(m, x) - f(n, x) =$$
$$= 2 \cdot 0(k) \quad \text{для мажорантных } n,$$

то $\varphi(n, x)$ эквивалентна $f(n, x)$.

Далее мы замечаем, что при $n \geqslant k$ и $X - x = 0(c(k))$

$$\varphi(n, X) - \varphi(n, x) = 5 \cdot 0(k),$$

ибо $\varphi(n, X) - \varphi(k, X) = 0(k)$ и $\varphi(n, x) - \varphi(k, x) = 0(k)$, если $n \geqslant k$, и $\varphi(k, X) - \varphi(k, x) = 3 \cdot 0(k)$, если будет $X - x = 0(c(k))$.

2.2. В силу теоремы 2.2 мы можем без потери общности считать, что любая относительно непрерывная функция $f(n, x)$ находится в стандартной форме, так что $p \geqslant q \to f(p, x) - f(q, x) = 0(q)$.

Теорема 2.21. *Если $f(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и если $s(n)$ рекурсивно сходится к рациональному x^*, $a < x^* < b$, то $f(n, s(n))$ и $f(n, x^*)$ эквивалентны.*

Поскольку $s(n)$ рекурсивно сходится к x^*, то имеется рекурсивная строго возрастающая функция $\nu(k)$ такая, что

$$n \geqslant \nu(k) \to s(n) - x^* = 0(k),$$

и поэтому

$$n \geqslant \nu(c(k)) \longrightarrow s(n) - x^* = 0(c(k)),$$

откуда следует, что

$$n \geqslant \nu(c(k)) \to f(n, s(n)) - f(n, x^*) = 5 \cdot 0(k)$$

и, значит, $f(n, s(n))$ и $f(n, x^*)$ эквивалентны.

В частности, если $f(x)$ рекурсивно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $s(n)$ рекурсивно сходится к x^*, $a < x^* < b$, то $f(s(n))$ рекурсивно сходится к $f(x^*)$.

2.21. Независимо от того, имеет ли последовательность $s(n)$ рациональный предел или нет, имеет место следующая форма теоремы 2.21.

Теорема 2.22. *Если $f(n, x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ относительно n и если $s(n)$ рекурсивно*

сходится и $a \leqslant s(n) \leqslant b$, *то* $f(n, s(n))$ *тоже рекурсивно сходится.*

Так как $s(n)$ рекурсивно сходится, то имеется рекурсивная функция $N(k)$ такая, что

$$N \geqslant n \geqslant N(k) \to s(N) - s(n) = 0(k),$$

и в силу относительной непрерывности

$$\{x - X = 0(c(k))\} \& n \geqslant k \to f(n, x) - f(n, X) = 5 \cdot 0(k),$$

а поэтому, если $N \geqslant n \geqslant N(c(k))$, то

$$f(n, s(N)) - f(n, s(n)) = 5 \cdot 0(k).$$

Следовательно,

$$f(N, s(N)) - f(n, s(n)) =$$
$$= f(N, s(N)) - f(n, s(N)) + f(n, s(N)) - f(n, s(n)) =$$
$$= 6 \cdot 0(k),$$

если $N \geqslant n \geqslant N(c(k))$, ибо $N(c(k)) \geqslant N(k) \geqslant k$, что завершает доказательство.

В частности, если функция $f(x)$ равномерно рекурсивно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то $f(s(n))$ рекурсивно сходится.

Теорема 2.221. *Если* $f(n, x)$ *непрерывна при* $a \leqslant x \leqslant b$ *относительно* n *и если* $s(n)$, $t(n)$ — *эквивалентные рекурсивные вещественные числа такие, что* $a \leqslant s(n) \leqslant b$, $a \leqslant t(n) \leqslant b$, *то* $f(n, s(n))$ *и* $f(n, t(n))$ — *тоже эквивалентные рекурсивные вещественные числа.*

Действительно,

$$s(n) - t(n) = 0(c(k)) \text{ для мажорантных } n$$

и

$$X - x = 0(c(k)) \to f(n, x) - f(n, X) = 0(k) \text{ при } n \geqslant k$$

и, следовательно,

$$f(n, s(n)) - f(n, t(n)) = 0(k) \text{ для мажорантных } n.$$

Снова отметим частный случай:

Если $f(x)$ равномерно рекурсивно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $s(n)$, $t(n)$ — эквивалентные рекурсивные вещественные числа такие, что $a \leqslant s(n) \leqslant b$, $a \leqslant t(n) \leqslant b$,

то $f(s(n))$ и $f(t(n))$ — тоже эквивалентные рекурсивные вещественные числа.

2.22. Рекурсивное вещественное число $f(n, s(n))$ можно считать значением относительно непрерывной функции $f(n, x)$, когда значением ее аргумента является рекурсивное вещественное число $s(n)$. Таким образом, строится, а не определяется, значение относительно непрерывной (рекурсивно непрерывной) функции для рекурсивного вещественного аргумента.

Такое определение как

$$f(x) = 0, \text{ если } x \text{ рационально},$$
$$= 1, \text{ если } x \text{ иррационально},$$

неприемлемо в рекурсивном анализе. Рекурсивная функция обязательно непрерывна для рекурсивного иррационального вещественного аргумента.

2.23. Если $f(n, x)$ и $g(n, t)$ — функции, заданные в стандартной форме, $f(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $g(n, t)$ равномерно сходится при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, и если $a \leqslant g(n, t) \leqslant b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$f(k + 1, g(c_f(k + 1), t))$$

называется применением f к g или результатом подстановки g в f и обозначается через $fg(k, t)$.

Теорема 2.23. *При* $n \geqslant k+1$, $m \geqslant c_f(k+1)$ *и* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *имеет место*

$$fg(k, t) - f(n, g(m, t)) = 0(k).$$

В самом деле, поскольку

$$g(m, t) - g(c_f(k + 1), t) = 0(c_f(k + 1)) \text{ при } m \geqslant c_f(k+1),$$

то

$$fg(k, t) - f(k + 1, g(m, t)) = 3 \cdot 0(k + 1),$$

а так как при $n \geqslant k + 1$ имеет место

$$f(n, g(m, t)) - f(k + 1, g(m, t)) = 0(k + 1),$$

то

$$fg(k, t) - f(n, g(m, t)) = 4 \cdot 0(k + 1).$$

Теорема 2.24. $fg(k, t)$ *рекурсивно равномерно сходится в стандартной форме.*

Действительно, если $q>p$, то

$$fg(q,t)-fg(p,t)=$$
$$=f(q+1,g(c_f(q+1),t))-f(p+1,g(c_f(q+1),t))+$$
$$+f(p+1,g(c_f(q+1),t))-f(p+1,g(c_f(p+1),t))=$$
$$=0(p+1)+3\cdot 0(p+1)=0(p).$$

Теорема 2.25. *Если $\varphi(n,x)$, $\gamma(n,t)$ являются эквивалентными для относительно непрерывной $f(n,x)$ и равномерно сходящейся $g(n,t)$, причем все функции находятся в стандартной форме, то $\varphi\gamma(k,t)$ эквивалентна $fg(k,t)$.*

Так как $g(m,t)$ и $\gamma(m,t)$ эквивалентны, то имеется рекурсивная функция $M(k,t)$ такая, что

$$m\geqslant M(k,t)\to g(m,t)-\gamma(m,t)=0(k),$$

поэтому

$$n\geqslant k\,\&\,m\geqslant M(c_f(k),t)\to$$
$$\to f(n,g(m,t))-f(n,\gamma(m,t))=5\cdot 0(k).$$

Но в силу эквивалентности функций $f(n,x)$ и $\varphi(n,x)$ $f(n,\gamma(m,t))-\varphi(n,\gamma(m,t))=0(k)$ для мажорантных n и поэтому

$$f(n,g(m,t))-\varphi(n,\gamma(m,t))=0(k)$$

для мажорантных m, n,

и требуемый результат следует теперь из теоремы 2.23.

2.24. Если $f(n,x)$ относительно непрерывна и $g(n,t)$ равномерно рекурсивно сходится, не обязательно в стандартной форме, и если $F(n,x)$, $G(n,t)$ — их эквиваленты в стандартной форме, то мы определяем $fg(n,t)$ как $FG(n,t)$.

Теорема 2.26. *Если функция $f(n,x)$ относительно непрерывна при $a\leqslant x\leqslant b$ и если $g(n,t)$ относительно непрерывна при $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, причем*

$$a<g(n,t)<b \text{ для мажорантных } n$$

и $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, то $fg(n,t)$ относительно непрерывна при $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

Мы можем без потери общности предполагать, что f и g находятся в стандартной форме, ибо любой эквивалент G функции g также удовлетворяет условиям

$$a<G(n,t)<b \text{ для мажорантных } n \text{ и } \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

Тогда, если

$$\alpha\leqslant t\leqslant T\leqslant\beta \quad\text{и}\quad T-t=0(c_g(c_f(k+1)+1)),$$

то

$$fg(n,T)-fg(n,t)=$$
$$=f(n+1,g(c_f(n+1),T))-f(n+1,g(c_f(n+1),t))=0(k)$$

при $n\geqslant k$.

Теорема 2.3. *Относительно непрерывная функция ограничена по абсолютной величине.*

Пусть $f(n,x)$ относительно непрерывна в (a,b); разделим (a,b) на p частей с длиной $0(c(1))$, так что для любых двух точек x и X из одной и той же части при $n\geqslant 1$ выполняется $f(n,x)-f(n,X)=5\cdot 0(1)$. Тогда для любого x из (a,b) и $n\geqslant 1$

$$|f(n,x)-f(n,a)|<\tfrac{1}{2}p,$$

а поскольку $f(n,a)$ рекурсивно сходится в стандартной форме, то $f(n,a)-f(1,a)=0(1)$ при $n\geqslant 1$.

2.3. Теорема 2.3 является следствием равномерности относительной непрерывности. Мы проиллюстрируем это, построив рекурсивную функцию $f(n,x)$, которая рекурсивно сходится и непрерывна при любом n, но неограничена. Пусть a_n — десятичное разложение $\sqrt{2}$ с n десятичными знаками, $a_0=1$ и $b_n=a_n+10^{-n}$, $n\geqslant 0$. Далее, пусть $f(0,x)=0$ и

$$f(r+1,x)=f(r,x), \quad \text{если } a_0\leqslant x\leqslant a_r \text{ или } b_r\leqslant x\leqslant b_0,$$
$$=r+(x-a_r)/(a_{r+1}-a_r), \quad \text{если } a_r<x\leqslant a_{r+1},$$
$$=r+(x-b_r)/(b_{r+1}-b_r), \quad \text{если } b_{r+1}\leqslant x<b_r,$$
$$=r+1, \quad \text{если } a_{r+1}\leqslant x\leqslant b_{r+1}.$$

Пусть x лежит в (a, b); если $x^2<2$, то пусть a_{r+1} — первое рациональное приближение, для которого $x<a_{r+1}$; тогда $f(n, x)$ — константа при $n \geqslant r$. Аналогично, если $x^2>2$ и b_{r+1} — первое рациональное приближение, для которого $b_{r+1}<x$, то $f(n, x)$ — константа при $n \geqslant r$. Таким образом, $f(n, x)$ рекурсивно сходится и, очевидно, $f(n, x)$ непрерывна при любом фиксированном n. Но $f(n, x)$ не является абсолютно ограниченной, ибо $f(r, a_r) = r$ и, следовательно, $f(n, x)$ не является относительно непрерывной, что можно также увидеть, если учесть, что $f(r+1, a_{r+1})<f(r+1, a_r)=1$, тогда как $a_{r+1} - a_r$ можно сделать сколь угодно малым.

Теорема 2.4. *Если $f(n, x)$ относительно непрерывна в (a, b), то имеется рекурсивно сходящаяся $h(n)$ такая, что при $a \leqslant x \leqslant b$ имеет место $f(n, x) \leqslant h(n)$ относительно n.*

Неравенство $f(n, x) \leqslant h(n)$ выполняется относительно n, если

$$f(n, x) \leqslant h(n) + 10^{-k}$$

для мажорантных n.

Пусть 10^{λ} — наименьшая степень 10, которая превосходит $b-a$; пусть

$$a_r^n = a + (b-a)\, r/10^{c(n)+\lambda},$$
$$h(n) = \max_{0 \leqslant r \leqslant 10^{c(n)+\lambda}} f(n, a_r^n)$$

и пусть $k(n)$ — наименьшее r, для которого $f(n, a_r^n) = h(n)$ и $a^n = a^n_{k(n)}$. Мы докажем, что $h(n)$ рекурсивно сходится.

Поскольку $a^n = a_p^N$ для некоторого p, если $N \geqslant n$, то

$$h(N) - h(n) = f(N, a^N) - f(N, a^n) + f(N, a^n) - f(n, a^n) \geqslant$$
$$\geqslant f(N, a^n) - f(n, a^n) > -10^{-n} \quad \text{при} \quad N \geqslant n;$$

пусть σ — наибольшее целое, для которого $a_\sigma^n \leqslant a^N$; тогда $a^N < a^n_{\sigma+1}$ и, следовательно,

$$h(N) - h(n) = f(N, a^N) - f(n, a^N) + f(n, a^N) - f(n, a_\sigma^n) +$$
$$+ f(n, a_\sigma^n) - f(n, a^n) \leqslant \{f(N, a^N) - f(n, a^N)\} +$$
$$+ \{f(n, a^N) - f(n, a_\sigma^n)\} < 6/10^{k+1} \quad \text{при} \quad N \geqslant n \geqslant k+1;$$

отсюда вытекает, что при $N \geqslant n \geqslant k+1$ имеет место $h(N) - h(n) = 0(k)$.

Возьмем произвольное x из (a, b) и пусть τ — наибольшее целое, для которого $a_\tau^n \leqslant x$, так что x лежит между a_τ^n и $a_{\tau+1}^n$, и поэтому

$$f(n, x) - f(n, a_\tau^n) = 0(k)$$

при $n \geqslant k+1$. Отсюда следует, что

$$f(n, x) \leqslant h(n) + 10^{-k}$$

при $n \geqslant k+1$.

Аналогичным образом мы можем определить нижнюю границу $l(n)$.

2.4. Если бы последовательность a^n была рекурсивно сходящейся, то, поскольку $f(n, a^n) = h(n)$, мы могли бы сказать, что функция $f(n, x)$ достигает своего максимума, равного рекурсивному вещественному числу $h(n)$, при значении аргумента, равном рекурсивному вещественному числу a^n. Следующий пример показывает, однако, что доказательство рекурсивной сходимости a^n невозможно.

Пусть $g(n)$ — произвольная примитивно рекурсивная функция и пусть $\gamma(n)$ — примитивно рекурсивная функция, которая принимает значение n, если $g(r)=0$ для всех $r \leqslant n$, и принимает значение p, если p является первым значением $r \leqslant n$, для которого $g(r)>0$. Таким образом, $\gamma(n) \leqslant n$ для всех n и $\gamma(n)<n$ для некоторых n, если только имеется значение n, для которого $g(n)>0$. Покажем, что доказательство рекурсивной сходимости a^n составляет разрешающую процедуру для равенства $g(n) = 0$, но, как мы уже заметили, существование такой разрешающей процедуры привело бы к противоречию в рекурсивной арифметике.

Пусть

$$f(n, x) = (1 - 2^{-\gamma(n)})\, x, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$= -(1 - 2^{1-n})\, x, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Тогда, если $\gamma(n) = n$, наибольшее значение $f(n, x)$ достигается при $x=1$, но если $\gamma(n)<n$, наибольшее значение $f(n, x)$ достигается при $x=-1$. Пусть a^n — то значение x, при котором $f(n, x)$ принимает свое наибольшее

значение; если a^n рекурсивно сходится, то имеется рекурсивная функция n_k такая, что

$$n \geqslant n_k \to a^n - a^{n_k} = 0(k),$$

и, следовательно, при $n \geqslant n_1$ имеет место $|a^n - a^{n_1}| < 1/10$ и поэтому, поскольку a^n целое, $a^n = a^{n_1}$ при всех n.

Следовательно, если $a^{n_1} = 1$, то $a^n = 1$ при всех $n \geqslant n_1$, и поэтому $\gamma(n) = n$ при всех n и $g(n) = 0$ при всех n; но если $a^{n_1} = -1$, то $\gamma(n_1) < n_1$ и имеется значение $r \leqslant n_1$, для которого $g(n) \neq 0$; это показывает, что доказательство рекурсивной сходимости a^n давало бы разрешающую процедуру для равенства $g(n) = 0$. Последовательность a^n является, конечно, классически сходящейся и представляет собой пример сходящейся последовательности, которая не сходится рекурсивно *).

2.41. Хотя теорема 2.2 достаточна для наших целей, следующий результат показывает, насколько эта теорема может быть усилена.

Теорема 2.5. *Каждая относительно непрерывная функция имеет дважды равномерно непрерывный эквивалент.*

Более точно, если $f(n, x)$ рекурсивно сходится по n и непрерывна относительно n при $a \leqslant x \leqslant b$, то имеются рекурсивные функции $F(n, x)$ и $c_F(k)$ такие, что:

(1) $F(n, k)$ эквивалентна $f(n, k)$ при $a \leqslant x \leqslant b$;

(2) $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \;\&\; x - y = 0(c_F(k)) \to F(n, x) - F(n, y) = 0(k)$ при всех n;

(3) $a \leqslant x \leqslant b$ и $m \geqslant n \geqslant k+1 \to F(m, x) - F(n, x) = 0(k)$.

Пусть $\varphi(n, x) = f(N(n, x), x)$; тогда

$$m \geqslant n \geqslant k \to \varphi(m, x) - \varphi(n, x) = 0(k)$$

и

$$n \geqslant N(k, x) \to \varphi(n, x) - f(n, x) = 0(k).$$

*) Это утверждение неточно, так как a^n — *семейство* последовательностей, зависящих от параметра g. Автором доказана лишь невозможность семейства «регуляторов сходимости», рекурсивно зависящих от g. В то же время каждая из последовательностей a^n (при фиксированном g) не может не быть рекурсивно сходящейся.— *Прим. ред.*

Обозначая наибольшее из $N(k, x)$, $N(k, y)$, $C(k, x, y)$ через $M(k, x, y)$, мы имеем

$$\varphi(n, x) - \varphi(n, y) = f(N(n, x), x) - f(M(k, x, y), x) + f(M(k, x, y), x) - f(M(k, x, y), y) + f(M(k, x, y), y) - f(N(n, y), y) = 3 \cdot 0(k)$$

при каждом $n \geqslant k$ и $x - y = 0(c_f(k))$. Если γ — наименьшее целое, положительное или отрицательное, такое, что 10^γ больше $b - a$, и если $l(k) = c_f(k) + \gamma$, то мы полагаем

$$\Delta_r = (b - a)\, 10^{-l(r)}$$

и

$$a_r^n = a + r \cdot \Delta_n,$$

так что $\Delta_n = 0(c_f(k))$ при $n \geqslant k$, и ввиду того, что $c_f(k+1) > c_f(k)$, получаем $\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n/10$.

Следовательно,

$$n \geqslant k \to \varphi(n, a_{r+1}^n) - \varphi(n, a_r^n) = 3 \cdot 0(k).$$

Далее мы определяем полигональную аппроксимацию для $\varphi(n, x)$; пусть

$$F(n, x) = \varphi(n, a_r^n) + \{\varphi(n, a_{r+1}^n) - \varphi(n, a_r^n)\}(x - a_r^n)/\Delta_n$$

при

$$a_r^n \leqslant x \leqslant a_{r+1}^n \quad \text{и} \quad 1 \leqslant r+1 \leqslant 10^{l(n)},$$

так что $F(n, x)$ рекурсивна и $F(n, a_r^n) = \varphi(n, a_r^n)$, а при $n \geqslant k$ и $a_r^n < x < a_{r+1}^n$ имеет место

$$F(n, x) - F(n, a_r^n) = 3 \cdot 0(k), \quad F(n, x) - F(n, a_{r+1}^n) = 3 \cdot 0(k).$$

Рассмотрим теперь две произвольные точки x, y из (a, b), удовлетворяющие условиям $x < y$ и $x - y = 0(c_f(k))$; пусть $n \geqslant k$ и пусть μ, ν — наибольшее и наименьшее значения r такие, что соответственно $x < a_r^n$ и $a_r^n < y$. Тогда, поскольку $a_\nu^n - a_\mu^n = 0(c_f(k))$, то

$$F(n, x) - F(n, y) = F(n, x) - F(n, a_\mu^n) + F(n, a_\mu^n) - F(n, a_\nu^n) + F(n, a_\nu^n) - F(n, y) = 9 \cdot 0(k).$$

Рассмотрим теперь значения n, меньшие k; так как $c_f(k) \geqslant c_f(n)+1$, то

$$x-y<1/10^{c_f(k)} \leqslant 1/10^{c_f(n)+1}.$$

Но

$$a^n_{r+1}-a^n_r \geqslant 1/10^{c_f(n)+1}$$

и поэтому не более одного a^n_r лежит между x и y. Если x и y лежат в одном и том же замкнутом подынтервале (a^n_r, a^n_{r+1}), то поскольку $F(n, x)$ линейна по x в каждом подынтервале, имеем

$$\frac{F(n,x)-F(n,y)}{x-y}=\frac{F(n,a^n_r)-F(n,a^n_{r+1})}{a^n_r-a^n_{r+1}}=\frac{3}{\Delta_n}\cdot 0(n)=\frac{3}{\Delta_k}\cdot 0(k);$$

а если x, y лежат в соседних интервалах с общим концом a^n_r, то

$$\frac{F(n,x)-F(n,a^n_r)}{x-a^n_r}=\frac{3}{\Delta_k}\cdot 0(k), \quad \frac{F(n,a^n_r)-F(n,y)}{a^n_r-y}=\frac{3}{\Delta_k}\cdot 0(k),$$

откуда, поскольку

$$\frac{F(n,x)-F(n,y)}{x-y}$$

лежит между $\dfrac{F(n,x)-F(n,a^n_r)}{x-a^n_r}$ и $\dfrac{F(n,a^n_r)-F(n,y)}{a^n_r-y}$, то

$$\frac{F(n,x)-F(n,y)}{x-y}=\frac{3}{\Delta_k}\cdot 0(k),$$

независимо от того, лежат ли x, y в одном и том же подынтервале или нет; отсюда следует, что

$$|F(n,x)-F(n,y)|<3\cdot 10^{c_f(k)+\nu}\cdot 10^{-c_f(k)}10^{-k}/(b-a)<$$
$$<3\cdot 10^{-k+1}.$$

Таким образом, для всех значений n

$$F(n,x)-F(n,y)=0(k)$$

при условии, что $x-y=0(c_f(k+2))$; тем самым доказано (2) при

$$c_F(k)=c_f(k+2).$$

Так как для $a^n_r \leqslant x \leqslant a^n_{r+1}$ выполняется равенство

$$F(n,x)-f(n,x)=\{F(n,x)-F(n,a^n_r)\}+$$
$$+\{\varphi(n,a^n_r)-\varphi(n,x)\}+\{\varphi(n,x)-f(n,x)\}=7\cdot 0(k)$$

при $n \geqslant N(k,x)$, то $F(n,x)$ эквивалентно $f(n,x)$.

Наконец, если $m>n \geqslant k$, то для любого x из (a,b) мы можем выбрать r так, что

$$a^n_r \leqslant a^m_s \leqslant x \leqslant a^m_{s+1} \leqslant a^n_{r+1},$$

и поэтому

$$F(m,x)-F(n,x)=\{F(m,x)-F(m,a^m_s)\}+$$
$$+\{F(n,a^n_r)-F(n,x)\}+\{\varphi(m,a^m_s)-\varphi(n,a^m_s)\}+$$
$$+\{\varphi(n,a^m_s)-\varphi(n,a^n_r)\}=10\cdot 0(k),$$

что доказывает (3).

2.5. Теперь мы переходим к рассмотрению фундаментального свойства непрерывных функций. Мы увидим, что классическое свойство непрерывных функций, состоящее в том, что непрерывная функция обращается в нуль, если она меняет знак, остается верным для равномерной рекурсивной непрерывности, но не для относительной непрерывности.

Сначала мы докажем, что имеет место

Теорема 2.6. *Если $f(x)$ равномерно рекурсивно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то имеется рекурсивное число $\{s(n)\}$ из (a,b) такое, что $f(s(n))=0$ относительно n.*

Мы можем без потери общности предполагать, что $f(a)<0$, $f(b)>0$.

Пусть $a_0=a$, $b_0=b$; если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, то мы полагаем $a_1=a_0$, $b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$, а если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 0$, то мы полагаем $a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1=b_0$. Далее, если $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$, то мы

полагаем $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, а если $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\leqslant 0$, то

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1}=b_n,$$

так что a_n и b_n рекурсивно сходятся, а так как $b_n-a_n\to 0$, то a_n и b_n — эквивалентные рекурсивные вещественные числа. Легко видеть, что $f(a_n)\leqslant 0$ и $f(b_n)>0$, ибо это верно при $n=0$ и если это верно при $n=k$, то, поскольку $f(a_{k+1})=f(a_k)$ и $f(b_{k+1})=f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)$, если $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)>0$, и $f(a_{k+1})=f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)$, $f(b_{k+1})=f(b_k)$, если $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)\leqslant 0$, это же выполняется при $n=k+1$ и поэтому при всех n.

Так как $f(x)$ равномерно рекурсивно непрерывна, то $f(a_n)$ и $f(b_n)$ эквивалентны, т. е.

$$|f(b_n)-f(a_n)|<1/10^k \text{ для мажорантных } n$$

и, следовательно,

$$f(a_n)=f(b_n)=0 \text{ относительно } n.$$

2.51. Аналогичные рассуждения можно применить к относительно непрерывной функции в предположении, что эта функция удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. Мы докажем, что верна

Теорема 2.61. *Если функция $f(n, x)$ непрерывна при $a\leqslant x\leqslant b$ относительно n и $f(n, a)<0$, $f(n, b)>0$ для всех n и если имеются рекурсивные функции g, h такие, что при $a\leqslant x\leqslant b$ выполняется $n\geqslant h(x)\to |f(n, x)|\geqslant 10^{-g(x)}$, то имеется рекурсивное вещественное число s_n такое, что $f(n, s_n)=0$ относительно n.*

Пусть $m(x)=\max(g(x), h(x))$ и $F(x)=f(m(x), x)$. Как и в теореме 2.6, имеются эквивалентные рекурсивные вещественные числа a_n, b_n такие, что

$$F(a_n)\leqslant 0, \quad F(b_n)>0,$$

т. е.

$$f(m(a_n), a_n)\leqslant 0,$$

так что $f(m(a_n), a_n)\leqslant -1/10^{g(a_n)}$, и, аналогично,

$$f(m(b_n), b_n)\geqslant 1/10^{g(b_n)}.$$

Так как

$$|f(p, x)-f(m(x), x)|<1/10^{m(x)} \quad \text{при} \quad p\geqslant m(x),$$

то

$$f(p, a_n)<0 \quad \text{при} \quad p\geqslant m(a_n),$$

и, аналогично,

$$f(p, b_n)>0 \quad \text{при} \quad p\geqslant m(b_n).$$

Тем не менее, поскольку $b_n=a_n$ относительно n, то

$$f(k, b_n)-f(k, a_n)=3\cdot 0(k) \text{ для мажорантных } n,$$

и, следовательно,

$f(k, b_n)=3\cdot 0(k)$, $f(k, a_n)=3\cdot 0(k)$ для мажорантных n

откуда следует, что $f(n, a_n)=0$ относительно n.

2.6. Далее мы рассмотрим общий случай, касающийся относительно непрерывной функции, без дополнительных ограничений и докажем, что имеет место

Теорема 2.62. *Если $f(n, x)$ непрерывна при $a\leqslant x\leqslant b$ относительно n, то имеются рекурсивные функции a_n, b_n такие, что $a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n$ и для всех x выполняется $a_k\leqslant x\leqslant b_k\to f(k+2, x)=0(k)$* *).

Для любого рационального x пусть $[x]$ обозначает целую часть x и пусть $\{x\}_k=[10^k x]/10^k$. Далее пусть

$$a_r^k=a+(b-a)\,r/10^{c\,(k+1)+\gamma}$$

(где 10^γ — наименьшая степень 10, которая больше $b-a$). Тогда при $1\leqslant r+1\leqslant 10^{c\,(k+1)+\gamma}$

$$f(k+1, a_{r+1}^k)-f(k+1, a_r^k)=3\cdot 0(k+1)$$

и поэтому

$$|\{f(k+1, a_{r+1}^k)\}_k-\{f(k+1, a_r^k)\}_k|\leqslant 1/10^k;$$

*) Имеется в виду, что $f(n, a)<0$ и $f(n, b)>0$ при всех n. — *Прим. перев.*

это показывает, что целые $10^k\{f(k+1, a_r^k)\}_k$ равны или являются последовательными для последовательных значений r. *Поэтому, когда r изменяется от 0 до $10^{c(k+1)+\nu}$, то $\{f(k+1, a_r^k)\}_k$ принимает каждое значение $n/10^k$ между любыми двумя своими значениями, и это — существенное общее свойство, которым обладают относительно непрерывные функции и рекурсивно непрерывные функции.* В частности, из $f(n, a) < -10^{-\mu}$ получаем $f(k+1, a) < 10^{-k+1}$ при $k \geqslant \mu$, следовательно,

$$\{f(k+1, a)\}_k \leqslant -10^{-k+1} < -10^{-k};$$

аналогично, из $f(n, b) > 10^{-\mu}$ следует $\{f(k+1, b)\}_k > 10^{-k}$ при $k \geqslant \mu$, поэтому имеется наименьшее ν, скажем, $\nu = \nu_k$, такое, что $\{f(k+1, a_{\nu_k}^k)\}_k = 0$, т. е. $f(k+1, a_{\nu_k}^k) = 0(k)$.

Позже мы покажем на примере, что в общем случае последовательность $a_{\nu_k}^k$ *не* является рекурсивно сходящейся. Сначала, однако, мы более подробно проанализируем ситуацию, показав, что имеются рекурсивные функции a_n, b_n такие, что $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ и

$$f(k+2, x) = 0(k)$$

для всех x таких, что $a_k \leqslant x \leqslant b_k$.

Сначала мы напомним, что из $f(k+1, x) < -1/10^k$ следует $f(k+2, x) < -1/10^{k+1}$, поскольку имеет место $f(k+2, x) - f(k+1, x) = 0(k+1)$.

Пусть $a_r^k = a + (b-a)\, r/10^{c(k)+\nu}$; тогда, поскольку

$$f(\mu+1, a) \leqslant -1/10^\mu \quad \text{и} \quad f(\mu+1, b) \geqslant 1/10^\mu,$$

имеется первое r, скажем, $r = r_\mu$, такое, что

$$f(\mu+1, a_{r+1}^\mu) \geqslant 1/10^\mu,$$

и наибольшее $s+1 < r_\mu$, скажем, $s+1 = s_\mu$, такое, что

$$f(\mu+1, a_s^\mu) \leqslant -1/10^\mu;$$

тогда

$$-1/10^\mu < f(\mu+1, a_n^\mu) < 1/10^\mu$$

для всех n от s_μ до r_μ включительно. Теперь мы рекурсивно определим r_n, s_n для $n \geqslant \mu$ следующим образом; предположим, что для некоторого k

$$-1/10^k < f(k+1, a_n^k) < 1/10^k$$

для всех n от s_k до r_k и что

$$f(k+1, a_{s_k}^k) \leqslant -1/10^k, \quad f(k+1, a_{r_k}^k) \geqslant 1/10^k.$$

Тогда

$$f(k+2, a_{s_k}^k) < -1/10^{k+1}, \quad f(k+2, a_{r_k}^k) > 1/10^{k+1}.$$

Пусть r_{k+1} — первое r, большее чем $10^{c(k+1)-c(k)} \cdot s_k$, такое, что

$$f(k+2, a_{r+1}^{k+1}) \geqslant 1/10^{k+1},$$

и пусть s_{k+1} — наибольшее $s+1 < r_{k+1}$ такое, что

$$f(k+2, a_s^{k+1}) \leqslant -1/10^{k+1},$$

так что

$$-1/10^{k+1} < f(k+2, a_n^{k+1}) < 1/10^{k+1}$$

для всех n от s_{k+1} до r_{k+1} включительно, что и завершает определение.

Пусть $a_{s_k}^k = a_k$, $a_{r_k}^k = b_k$. По определению r_k, s_k мы имеем для всех $k \geqslant \mu$

$$-1/10^k < f(k+1, a_n^k) < 1/10^k$$

при всех n от s_k до r_k включительно.

Если $a_n^k \leqslant x \leqslant a_{n+1}$, то $f(k+1, x) - f(k+1, a_n^k) = 5 \cdot 0(k)$, так что

$$f(k+1, x) = 6 \cdot 0(k).$$

Таким образом, для всех x таких, что $a_k \leqslant x \leqslant b_k$, мы имеем $f(k+1, x) = 6 \cdot 0(k)$ и

$$a_k \leqslant a_{k+1} < b_{k+1} \leqslant b_k.$$

Хотя последовательность a_k не убывает и ограничена сверху, а b_k не возрастает и ограничена снизу, тем не менее, мы увидим, что как a_k, так и b_k не обязательно

рекурсивно сходятся, и в общем случае невозможно решить, имеет ли место $b_k = a_k$ относительно k или нет. Однако если $f(n, x)$ удовлетворяет некоторым подходящим дополнительным условиям, мы можем доказать, что a_k и b_k — эквивалентные рекурсивные вещественные числа. Конкретнее, мы докажем, что верна.

Теорема 2.63. *Если $f(n, x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ относительно n и если имеется константа $q > 0$ такая, что при $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ выполняется*

$$\left| \frac{f(n, x) - f(n, y)}{x - y} \right| > q$$

для мажорантных n, то имеется рекурсивно сходящаяся последовательность a_n такая, что $f(n, a_n) = 0$ относительно n.

По предыдущей теореме мы можем найти рекурсивные последовательности a_n, b_n такие, что

$$a_k \leqslant a_{k+1} < b_{k+1} \leqslant b_k$$

и

$$a_k \leqslant x \leqslant b_k \text{ и } n \geqslant k + 2 \rightarrow f(n, x) = 0(k).$$

Но по предположению

$$0 < b_k - a_k < (1/q)\,|f(n, b_k) - f(n, a_k)|$$

для мажорантных n,

и поэтому

$$0 < b_k - a_k < (2/q) \cdot 0(k);$$

это доказывает, что a_k и b_k рекурсивно сходятся.

2.61. Теперь мы покажем, что последовательности a_k, b_k, построенные в теореме 2.62, не обязательно рекурсивно сходятся. Как и в § 2.4, пусть $g(n)$ — произвольная примитивно рекурсивная функция, а $\gamma(n)$ — рекурсивная функция, которая принимает значение n, если $g(r) = 0$ для всех $r \leqslant n$, и значение p, если p — первое $r \leqslant n$, для которого $g(r) > 0$. Поэтому $\gamma(n) = n$, если нет значения p, для которого $g(p) > 0$, и тогда $\gamma(n) < n$ при $n \geqslant p$. Мы определяем $f(n, x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 3$ так:

если $\gamma(n) = n$, то

$$\begin{aligned} f(n, x) &= x - 1 && \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &= 0 && \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ &= x - 2 && \text{при } 2 \leqslant x \leqslant 3; \end{aligned}$$

если $\gamma(n) = p < n$, то

$$\begin{aligned} f(n, x) &= x - 1 && \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/(p+1), \\ &= -1/(p+1) && \text{при } 1 - 1/(p+1) \leqslant x \leqslant 2 - 1/(p+1), \\ &= x - 2 && \text{при } 2 - 1/(p+1) \leqslant x \leqslant 3. \end{aligned}$$

Так определенная функция $f(n, x)$, очевидно, рекурсивно сходится и непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 3$ относительно n. Действительно, если $N \geqslant n$, то

$$\gamma(N) = N \text{ или } \gamma(N) = p \leqslant n \rightarrow f(N, x) - f(n, x) = 0$$

и

$$n < \gamma(N) < N \rightarrow 0 \leqslant f(n, x) - f(N, x) \leqslant 1/(n+1);$$

более того,

$$X - x = 0(k) \rightarrow f(n, X) - f(n, x) = 0(k)$$

для всех значений n.

Пусть a_k обозначает первую, а b_k — последнюю из тех точек между 0 и 3, где $f(k, x)$ обращается в нуль. Тогда, если $g(n) = 0$ для всех n, то $a_n = 1$, но если p — это первое n, для которого $g(n) > 0$, то $a_n = 2$, $n \geqslant p$. В соответствии с этим, если бы a_n рекурсивно сходилась, то у нас была бы разрешающая процедура для равенства $g(n) = 0$, ибо у нас было бы целое n_1 такое, что $a(n) - a(n_1) = 0(1)$ при всех $n \geqslant n_1$, и поэтому $a(n_1) \leqslant 1\frac{1}{2}$ доказывало бы, что $g(n) = 0$ для всех n, а $a(n_2) > 1\frac{1}{2}$ доказывало бы, что имеется n, для которого $g(n) > 0$.

Одновременно мы доказали, что невозможно решить, верно ли, что $f(n, x) = 0$ относительно n для единственного значения x или для интервала значений, поскольку если бы мы могли решить это, то у нас опять была бы разрешающая процедура для равенства $g(n) = 0$.

ГЛАВА III

РЕКУРСИВНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

Неравенства, касающиеся среднего значения. Дважды равномерный эквивалент для относительно дифференцируемой функции. Теорема о среднем значении. Теорема Тейлора. Теорема о равномерном среднем значении. Существование относительно дифференцируемых функций, не удовлетворяющих теореме о равномерном среднем значении.

3. *Дифференцируемость*

3.01. Говорят, что рекурсивная функция $f(x)$ *рекурсивно дифференцируема в точке* x_0, если имеется рекурсивная функция $d(k)$ и число A такие, что

$$x - x_0 = 0(d(k)) \to f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(A + 0(k)).$$

3.02. $f(x)$ *равномерно рекурсивно дифференцируема* при $a \leqslant x \leqslant b$, если имеются рекурсивные функции $f^1(x)$, $d(k)$ такие, что

$$a \leqslant x < X \leqslant b \,\&\, x - X = 0(d(k)) \to f(x) - f(X) = (x - X)(f^1(x) + 0(k)).$$

$f^1(x)$ называется рекурсивной производной (функции f — *Прим. ред.*) в (a, b). В общем случае функции $d(k)$, $f^1(x)$ будут содержать любой параметр из $f(x)$.

3.03. Говорят, что рекурсивно сходящаяся функция $f(n, x)$ целочисленной переменной n и рациональной переменной x *дифференцируема при* $a \leqslant x \leqslant b$ *относительно* n, если имеются рекурсивные функции $f^1(n, x)$, $d(k)$ такие, что для мажорантных n

$$a \leqslant x < X \leqslant b \,\&\, x - X = 0(d(k)) \to f(n, x) - f(n, X) = (x - X)(f^1(n, x) + 0(k)).$$

$f^1(n, x)$ называется относительной производной $f(n, x)$ в (a, b).

Теорема 3.01. *Если* $f(n, x)$ *относительно дифференцируема в* (a, b) *с относительной производной* $f^1(n, x)$ *и если* $\varphi(n, x)$, $\varphi^1(n, x)$ *— эквиваленты соответственно* $f(n, x)$, $f^1(n, x)$, *то* $\varphi(n, x)$ *относительно дифференцируема в* (a, b) *с относительной производной* $\varphi^1(n, x)$.

Действительно, если $x < X$, то

$$\frac{f(n, x) - f(n, X)}{x - X} - \frac{\varphi(n, x) - \varphi(n, X)}{x - X} = \frac{f(n, x) - \varphi(n, x)}{x - X} + \frac{\varphi(n, X) - f(n, X)}{x - X} = 0(k)$$ для мажорантных n

и

$$f^1(n, x) = \varphi^1(n, x) + 0(k)$$ для мажорантных n,

и поэтому

$$a \leqslant x < X \leqslant b \,\&\, x - X = 0(d(k)) \to \varphi(n, x) - \varphi(n, X) = (x - X)(\varphi^1(n, x) + 3 \cdot 0(k))$$ для мажорантных n.

Заметим, что, в частности, $\varphi^1(n, x)$ — относительная производная $f(n, x)$, а $f^1(n, x)$ — относительная производная $\varphi(n, x)$.

Теорема 3.02. *Если* $f(n, x)$ *относительно дифференцируема в* (a, b) *с относительной производной* $f^1(n, x)$, *то* $f(n, x)$ *и* $f^1(n, x)$ *непрерывны при* $a \leqslant x \leqslant b$ *относительно* n.

Из

$$f(n, x) - f(n, X) = (x - X)\{f^1(n, x) + 0(k)\}$$

при $x - X = 0(d(k))$ и мажорантных n получаем, меняя ролями x и X, что

$$f(n, X) - f(n, x) = (X - x)\{f^1(n, X) + 0(k)\}$$ для мажорантных n,

откуда

$$f^1(n, X) - f^1(n, x) = 2 \cdot 0(k)$$ для мажорантных n;

это доказывает, что $f^1(n, x)$ относительно непрерывна.

Так как $f^1(n, x)$ относительно непрерывна, то $|f^1(n, x)|$ ограничена, скажем, числом 10^λ. Пусть

$$c(k) = \max\{d(k),\ k + \lambda + 1\};$$

тогда

$$X - x = 0(c(k)) \to f(n, x) - f(n, X) = 0(k)$$

для мажорантных n;

это доказывает, что $f(n, x)$ относительно непрерывна.

3.1. Рекурсивная дифференцируемость для всех рациональных x из некоторого интервала, конечно, не влечет равномерную рекурсивную дифференцируемость. Например, если $f(x)$ определена при $x \geqslant 0$ условиями

$$x^2 < 2 \to f(x) = -x,$$
$$x^2 > 2 \to f(x) = +x,$$

то $f(x)$ рекурсивна и рекурсивно дифференцируема для любого рационального $x \geqslant 0$. Но $f(x)$ не является равномерно рекурсивно дифференцируемой при $1 \leqslant x \leqslant 2$, ибо если $x^2 < 2$ и $X^2 > 2$, то

$$\frac{f(X) - f(x)}{X - x} = \frac{X + x}{X - x} \geqslant \frac{2}{X - x} > 2N, \quad \text{если} \quad X - x < 1/N,$$

так что $\frac{f(X) - f(x)}{X - x}$ неограничена.

Более того, функция $f(n, x)$ может быть относительно дифференцируемой в некотором интервале, не будучи равномерно дифференцируемой ни при каком фиксированном значении n. Действительно, предположим, что

$$f(n, p/q) = q/(p, q), \quad \text{если} \quad q \geqslant n,$$
$$= 0, \quad \text{если} \quad q < n;$$

тогда $f(n, p/q)$ рекурсивно сходится, поскольку $f(N, p/q) - f(n, p/q) = 0$ при $N \geqslant n > q$, и $f(n, p/q)$ относительно дифференцируема в любом интервале, ибо

$$\frac{f(n, p/q) - f(n, p'/q')}{p/q - p'/q'} = 0 \quad \text{при} \quad n > \max(q, q').$$

Но при любом фиксированном n и $q > n$

$$\frac{f(n, 1/q) - f(n, 1/(q+1))}{1/q - 1/(q+1)} = -q(q+1),$$

что не ограничено, — это показывает, что функция $f(n, x)$ не является равномерно рекурсивно дифференцируемой при фиксированном n.

Теорема 3.1. *Если $f(x)$ равномерно рекурсивно дифференцируема с производной $f^1(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и если $f^1(x) = 0$, то при $a \leqslant x \leqslant b$ имеет место $f(x) = f(a)$.*

Пусть точки a_r^k, $0 \leqslant r \leqslant i(k)$, делят (a, b) на равные части длины $\Delta_k = 0(d(k))$, так что при $a_r^k \leqslant x \leqslant a_{r+1}^k$, $1 \leqslant r + 1 \leqslant i(k)$, выполняется

$$\{f(x) - f(a_r^k)\}/(x - a_r^k) = 2 \cdot 0(k) \quad \text{для мажорантных } n,$$

откуда

$$f(x) - f(a) = 0$$

для любого x из (a, b).

Теорема 3.11. *Если $f(n, x)$ дифференцируема с относительной производной $f^1(n, x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и если $g(n, t)$ дифференцируема с относительной производной $g^1(n, t)$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и если, кроме того, $a < g(n, t) < b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $fg(n, t)$ относительно дифференцируема при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ с относительной производной $f^1 g(n, t) g^1(n, t)$.*

Рассмотрим любые две точки t, T такие, что $\alpha \leqslant t < T \leqslant \beta$; пусть $e(t, T)$ — показатель наименьшей степени 10, которая больше $1/(T - t)$, и пусть

$$d(k) = \max(d_g(k), c_g(d_f(k))).$$

Тогда при $T - t = 0(d(k))$

$$\frac{f(n, g(m, T)) - f(n, g(m, t))}{T - t} - f^1(n, g(m, t)) \cdot g^1(m, t) =$$
$$= \{f^1(n, g(m, t)) + g^1(m, t) + 0(k)\} \cdot 0(k)$$

для мажорантных m, n.

Но при $p > k + e(t, T)$

$$\frac{fg(p, T) - fg(p, t)}{T - t} = \frac{f(n, g(m, T)) - f(n, g(m, t))}{T - t} + 0(k)$$

для мажорантных m, n и

$$f^1 g(p, t) \cdot g^1(p, t) - f^1(n, g(m, t)) \cdot g^1(m, t) =$$
$$= \{f^1(n, g(m, t)) + g^1(m, t) + 0(k)\} \cdot 0(k)$$

для мажорантных m, n,

откуда следует теорема 3.11, ибо $f^1(n, x)$ и $g^1(m, t)$ ограничены.

Теорема 3.2. *Если $f(n, x)$ дифференцируема в (a, b) относительно n с относительной производной $f^1(n, x)$ и если $f^1(n, x) = 0$ относительно n для всех x из (a, b), то $f(n, x) = f(n, a)$ относительно n при всех x из (a, b).*

Пусть $a_r^k = a + (b-a)\, r/10^{d(k)+\gamma}$, где γ — показатель наименьшей степени 10, которая больше $b - a$, так что

$$a_{r+1}^k - a_r^k = 0(d(k)).$$

Пусть x — произвольная точка из (a, b) такая, что $a_s^k < x \leqslant a_{s+1}^k$, тогда

$$\frac{f(n, a_{s+1}^k) - f(n, x)}{a_{s+1}^k - x} = f^1(n, x) + 0(k) \quad \text{для мажорантных } n,$$
$$= 2 \cdot 0(k) \quad \text{для мажорантных } n$$

и для любого r, $0 \leqslant r < s$,

$$\frac{f(n, a_{r+1}^k) - f(n, a_r^k)}{a_{r+1}^k - a_r^k} = f^1(n, a_r^k) + 0(k) \quad \text{для мажорантных } n,$$
$$= 2 \cdot 0(k) \quad \text{для мажорантных } n,$$

откуда

$$\frac{f(n, x) - f(n, a)}{x - a} = 2 \cdot 0(k) \quad \text{для мажорантных } n$$

и, следовательно, $f(n, x) = f(n, a)$ относительно n.

3.2. *Неравенства, касающиеся средних значений*

Теорема 3.21. *Если для каждого значения n функция $f(n, x)$ равномерно рекурсивно дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$ с рекурсивной производной $f^1(n, x)$, то имеется рекурсивная функция c_k^n такая, что $a < c_k^n < b$ и*

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b - a} \leqslant f^1(n, c_k^n) + 0(k)$$

для каждого значения n.

Пусть $\mu_n(x, y)$ обозначает $\{f(n, x) - f(n, y)\}/(x - y)$, $x < y$; если z — средняя точка (x, y), то $\mu_n(x, y)$ лежит между $\mu_n(x, z)$ и $\mu_n(z, y)$ и, следовательно, $\mu_n(x, y)$ меньше одного из $\mu_n(x, z)$ и $\mu_n(z, y)$; таким образом, мы можем повторно делить (a, b) пополам, выбирая последовательность интервалов, скажем, (a, b), (a_1^n, b_1^n), (a_2^n, b_2^n), ..., каждый из которых является половиной предыдущего и таким, что $\mu_n(a_r^n, b_r^n)$ не убывает по r.

Для подходящего значения r, однако,

$$\mu_n(a_r^n, b_r^n) = f^1(n, c_k^n) + 0(k),$$

где мы берем в качестве c_k^n какое угодно из чисел a_r^n или b_r^n, лишь бы оно лежало внутри (a, b).

Те же рассуждения доказывают, что верна

Теорема 3.22. *В условиях теоремы 3.21 мы можем найти рекурсивную функцию c_k^n, значения которой лежат в (a, b), такую, что*

$$\{f(n, b) - f(n, a)\}/(b - a) \geqslant f^1(n, c_k^n) + 0(k)$$

для каждого значения n.

3.21. Неравенства для среднего значения также имеют место для относительной дифференцируемости. Действительно, если $\mu_n(a_r^n, b_r^n)$ определено, как выше, и если $f(n, x)$ дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$ относительно n, то для r, удовлетворяющего равенству $(b - a)/2^r = 0(d(k))$, мы имеем

$$\mu_n(a_r^n, b_r^n) = f^1(n, c_k^n) + 0(k)$$

для мажорантных n, где c_k^n — или a_r^n, или b_r^n. Таким образом, доказана

Теорема 3.23. *Если $f(n, x)$ относительно дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$ с относительной производной $f^1(n, x)$, то имеется рекурсивная функция c_k^n, значения которой лежат в (a, b), такая, что*

$$\{f(n, b) - f(n, a)\}/(b - a) \leqslant f^1(n, c_k^n) + 0(k)$$

для мажорантных n.

Соответствующий результат имеется и для обратного неравенства.

3.3. Мы можем, однако, доказать значительно более сильный результат, чем теорема 3.23, как мы покажем впоследствии (теорема 3.3, ниже).

Теорема 3.24. *Если при* $a \leqslant x \leqslant b$ *функция* $s(n, x)$ *равномерно рекурсивно дифференцируема при каждом фиксированном* n *с производной* $\sigma(n, x)$ *и если* $\sigma(n, x)$ *равномерно рекурсивно сходится, то* $s(n, x)$ *дифференцируема относительно* n *с относительной производной* $\sigma(n, x)$.

Из определения 3.02 следует, что имеется рекурсивная функция $d(n, k)$ такая, что

$$a \leqslant x < y \leqslant b \,\&\, x - y = 0(d(n, k)) \to \sigma(n, x) - \sigma(n, y) = 0(k),$$

и поскольку $\sigma(n, x)$ равномерно рекурсивно сходится, то имеется $N(k)$ такая, что

$$\sigma(n, x) - \sigma(N(k), x) = 0(k) \quad \text{при} \quad n \geqslant N(k).$$

По теореме 3.21 имеется функция c_k^n такая, что $a \leqslant x < c_k^n < y \leqslant b$ и

$$\frac{s(n, x) - s(n, y)}{x - y} \leqslant \sigma(n, c_k^n) + 0(k),$$

и поэтому при $n \geqslant N(k)$ и $x - y = 0(d(N(k), k))$

$$\frac{s(n, x) - s(n, y)}{x - y} - \sigma(n, x) \leqslant \{\sigma(n, c_k^n) - \sigma(N(k), c_k^n)\} + \{\sigma(N(k), c_k^n) - \sigma(N(k), x)\} + \{\sigma(N(k), x) - \sigma(n, x)\} + 0(k) = 4 \cdot 0(k)$$

и аналогично по теореме 3.22 для таких же n, x, y

$$\frac{s(n, x) - s(n, y)}{x - y} - \sigma(n, x) \geqslant 4 \cdot 0(k),$$

что завершает доказательство.

Теорема 3.25. *Если*

(i) *при* $a \leqslant x \leqslant b$ *функция* $g(m, x)$ *непрерывна относительно* m *и*

$$\alpha = g(m, a) \leqslant g(m, x) \leqslant \beta \text{ для мажорантных } m,$$

(ii) *при* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *функция* $f(n, t)$ *дифференцируема относительно* n *и*

$$|f^1(n, t)| \geqslant 10^{-\mu} \text{ для мажорантных } n \text{ и } f(n, \alpha) = a,$$

(iii) *при* $a \leqslant x \leqslant b$ *имеет место* $fg(n, x) = x$ *относительно* n, *то*

$$gf(n, t) = t \text{ относительно } n$$

для любого t *такого, что для некоторого* $x < b$

$$\alpha \leqslant t < g(m, x) \text{ для мажорантных } m.$$

Из условия (ii) следует, что $f^1(n, t)$ не меняет знак при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и мажорантных n, и поэтому мы можем без потери общности предполагать, что $f^1(n, t) \geqslant 10^{-\mu}$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и мажорантных n. Из (iii) следует, что

$$f(n, g(m, x)) = x + 0(k) \text{ для мажорантных } m, n.$$

Мы начнем с доказательства того, что если $\alpha \leqslant t < g(m, x)$ для мажорантных m и некоторого $x < b$, то $a \leqslant f(n, t) < b$ для мажорантных n.

Действительно, неравенство, которому удовлетворяет $f^1(n, t)$, показывает в силу теоремы 3.23, что $f(n, t)$ строго возрастает (для мажорантных n) и, следовательно, в силу (iii), если

$$\alpha \leqslant t < g(m, x) \text{ для мажорантных } m \text{ и } x < b, \text{ то}$$
$$a = f(n, \alpha) \leqslant f(n, t) < f(n, g(m, x)) = x + 0(k) < b$$

для достаточно больших k и мажорантных m, n.

Используя равномерную сходимость $f(n, x)$, $g(n, x)$ и относительную непрерывность $f(n, x)$, из (iii) получаем, что

$$f(n, g(m, x)) = x + 5 \cdot 0(k)$$

при $m \geqslant c_f(k)$, $n \geqslant k$ и $a \leqslant x \leqslant b$ и поэтому для таких же m, n и при $p \geqslant k$

$$f(n, g(m, f(p, t))) = f(n, t) + 6 \cdot 0(k),$$

если $\alpha \leqslant t < g(m, x)$ и $x < b$.

Но по теореме 3.22, имеется рекурсивная функция c_k^n такая, что, обозначая $g(m, f(p, t))$ через g, имеем

$$|f(n, g) - f(n, t)| \geqslant |g - t| \cdot \{f^1(n, c_k^n) + 0(k)\}$$

для мажорантных n и поэтому

$$g(m, f(p, t)) - t = 0(k - \mu - 1)$$

при $m \geqslant c_f(k)$, $p \geqslant k$, откуда следует, что

$$gf(n, t) = t \text{ относительно } n.$$

Теорема 3.3 (теорема о среднем значении). *Если $f(n, x)$ дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$ относительно n, то мы можем построить c_k, зависящие только от k, такие, что $a < c_k < b$ и*

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b - a} = f^1(n, c_k) + 0(k)$$

для мажорантных n.

Пусть $a_r^n = a + (b - a) r / 10^{c_{f^1}(n+\nu)}$, где $b - a \leqslant 10^\nu$, и

$$\Delta_n = a_{r+1}^n - a_r^n;$$

положим

$$g(n, x) = f^1(n, a_r^n) + \frac{x - a_r^n}{\Delta_n} \{f^1(n, a_{r+1}^n) - f^1(n, a_r^n)\}$$

для $a_r^n \leqslant x \leqslant a_{r+1}^n$, $0 \leqslant r \leqslant t_n = 10^{c_{f^1}(n)+\nu}$, и

$$G(n, a) = f(n, a),$$

$$G(n, x) = G(n, a_r^n) + (x - a_r^n) \cdot f^1(n, a_r^n) + \frac{(x - a_r^n)^2}{2\Delta_n} \{f^1(n, a_{r+1}^n) - f^1(n, a_r^n)\}$$

для $a_r^n < x \leqslant a_{r+1}^n$, $0 \leqslant r < t_n$.

Так как

$$g(n, x) - f^1(n, x) = \{f^1(n, a_r^n) - f^1(n, x)\} + \frac{x - a_r^n}{\Delta_n} \{f^1(n, a_{r+1}^n) - f^1(n, a_r^n)\} = 6 \cdot 0(k) \text{ при } n \geqslant k \text{ и}$$

$a \leqslant x \leqslant b$, то $g(n, x)$ эквивалентна $f^1(n, x)$, так что $g(n, x)$ относительно непрерывна.

Точнее, если $a_r^n \leqslant x < y \leqslant a_{r+1}^n$, то

$$g(n, x) - g(n, y) = \frac{(x - y)}{\Delta_n} \{f^1(n, a_{r+1}^n) - f^1(n, a_r^n)\} = 5 \cdot 0(k) \text{ при } n \geqslant k,$$

и если

$$x < a_r^n < y, \quad y - x = 0(c_{f^1}(k)),$$

то

$$g(n, y) - g(n, a_r^n) = \frac{(y - a_r^n)}{\Delta_n} \{f^1(n, a_{r+1}^n) - f^1(n, a_r^n)\} = 5 \cdot 0(k) \text{ при } n \geqslant k$$

и

$$g(n, x) - g(n, a_r^n) = \frac{(a_r^n - x)}{\Delta_n} \{f^1(n, a_r^n) - f^1(n, a_{r+1}^n)\} = 5 \cdot 0(k) \text{ при } n \geqslant k,$$

так что $g(n, y) - g(n, x) = 0(k - 1)$ при $n \geqslant k$ в обоих случаях.

Кроме того, если $a_r^n \leqslant x < a_{r+1}^n$, то

$$g(N, x) - g(n, x) = \{g(N, x) - g(N, a_r^n)\} + \{g(N, a_r^n) - g(n, a_r^n)\} + \{g(n, a_r^n) - g(n, x)\} = 2 \cdot 0(k - 1) + \{f^1(N, a_r^n) - f^1(n, a_r^n)\} = 3 \cdot 0(k - 1) \text{ при } N \geqslant n \geqslant k.$$

Это доказывает, что $g(n, x)$ равномерно сходится.

Далее мы докажем, что $G(n, x)$ дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$ относительно n с относительной производной $g(n, x)$.

Если $a^n_{r-1} < x \leqslant a^n_r < y < a^n_{r+1}$, то

$$\frac{G(n, y) - G(n, a^n_r)}{y - a^n_r} = f^1(n, a^n_r) + \frac{y - a^n_r}{2\Delta_n}\{f^1(n, a^n_{r+1}) - f^1(n, a^n_r)\}$$

и

$$\frac{G(n, a^n_r) - G(n, x)}{a^n_r - x} = f^1(n, a^n_{r-1}) +$$

$$+ \frac{x + a^n_r - 2a^n_{r-1}}{2\Delta_n}\{f^1(n, a^n_r) - f^1(n, a^n_{r-1})\} =$$

$$= f^1(n, a^n_r) + \frac{x - a^n_r}{2\Delta_n}\{f^1(n, a^n_r) - f^1(n, a^n_{r-1})\}$$

и поскольку $\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x}$ лежит между $\frac{G(n, y) - G(n, a^n_r)}{y - a^n_r}$ и $\frac{G(n, a^n_r) - G(n, x)}{a^n_r - x}$, то

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} - f^1(n, a^n_r) = 5 \cdot 0(k) \quad \text{при} \quad n \geqslant k.$$

Если, с другой стороны,

$$a^n_r < x < y \leqslant a^n_{r+1},$$

то

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} = f^1(n, a^n_r) +$$

$$+ \frac{x + y - 2a^n_r}{2\Delta_n}\{f^1(n, a^n_{r+1}) - f^1(n, a^n_r)\},$$

так что снова

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} - f^1(n, a^n_r) = 5 \cdot 0(k) \quad \text{при} \quad n \geqslant k.$$

Таким образом, для любых x, y из (a, b), удовлетворяющих условию $x - y = 0(c_{\mu}(k))$, мы имеем

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} - f^1(n, x) = 0(k - 1) \quad \text{при} \quad n \geqslant k;$$

это доказывает, что $G(n, x)$ относительно дифференцируема с относительной производной $f^1(n, x)$.

Следовательно, $G(n, x) - f(n, x)$ относительно дифференцируема с производной, равной нулю относительно n, а поскольку $G(n, a) - f(n, a) = 0$, то по теореме 3.2 $G(n, x)$ эквивалентна $f(n, x)$.

Далее мы покажем, что для любых x, y из (a, b), $x < y$, имеется (рациональное) z между x и y такое, что

$$\frac{G(n, x) - G(n, y)}{x - y} = g(n, z).$$

Если $a^n_r \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a^n_{r+1}$ $(0 \leqslant r < t_n)$, то очевидно, что

$$\frac{G(n, x_1) - G(n, x_2)}{x_1 - x_2} = g\left(n, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

и, следовательно, если p, q — соответственно наименьшее и наибольшее целое такие, что $x \leqslant a^n_p \leqslant a^n_q \leqslant y$, то

$$\frac{G(n, x) - G(n, y)}{x - y}$$

лежит между наименьшим и наибольшим из

$$g\left(n, \frac{x + a^n_p}{2}\right), \quad g\left(n, \frac{a^n_q + y}{2}\right) \quad \text{и} \quad g\left(n, \frac{a^n_r + a^n_{r+1}}{2}\right)$$

при $p \leqslant r \leqslant q$,

и, следовательно, между наименьшим и наибольшим из $g(n, x)$, $g(n, y)$ и $g(n, a^n_r)$ при $p \leqslant r \leqslant q$; так как $g(n, x)$ — ломаная, то имеется рациональное z между x и y такое, что

$$\frac{G(n, x) - G(n, y)}{x - y} = g(n, z)$$

(фактически, если мы переименуем точки x, a^n_r, y в b_r, $p - 1 \leqslant r \leqslant q + 1$, то $g(n, t)$ линейна в каждом интервале $b_r \leqslant t \leqslant b_{r+1}$; пусть v — наименьшее целое, не меньшее $p - 1$, такое, что $g(n, b_v) > \{G(n, x) - G(n, y)\}/(x - y)$; тогда если $v \neq p - 1$, $\{G(n, x) - G(n, y)\}/(x - y)$ лежит между $g(n, b_{v-1})$ и $g(n, b_v)$ и поэтому равна $g(n, z)$ для рационального z, лежащего между b_{v-1} и b_v, а если $v = p - 1$ и μ — наименьшее целое, большее v, для

которого имеет место $g(n, b_\mu) < \{G(n, x) - G(n, y)\}/(x-y)$, то

$$\{G(n, x) - G(n, y)\}/(x-y)$$

лежит между $g(n, b_{\mu-1})$ и $g(n, b_\mu)$ и т. д.).

Конечно, z зависит от n. Так как $G(n, x)$ и $f(n, x)$ эквивалентны, то имеется рекурсивная функция $N(k, x, y)$ такая, что при $x \neq y$

$$\frac{G(n, x) - G(n, y)}{x-y} - \frac{f(n, x) - f(n, y)}{x-y} = 0(k) \text{ при } n \geqslant N(k, x, y),$$

пусть c_k — то значение z, которое соответствует $n = N(k, x, y)$; тогда

$$\frac{f(n, x) - f(n, y)}{x-y} = g(n, c_k) + 0(k)$$

при $n \geqslant N(k, x, y)$. Так как $g(n, x)$ эквивалентна $f^1(n, x)$, то мы заключаем, что

$$\frac{f(n, x) - f(n, y)}{x-y} = f^1(n, c_k) + 0(k) \quad \text{для мажорантных } n.$$

Важно заметить, что последовательность c_k не обязательно сходится.

Мы упомянем одно дополнительное условие на $f(n,x)$, которое обеспечивает сходимость c_k.

Если для некоторой константы $\alpha > 0$ и $a \leqslant x < y \leqslant b$ имеет место

$$\frac{f^1(n, y) - f^1(n, x)}{y-x} \geqslant \frac{1}{10^\alpha} \quad \text{для мажорантных } n,$$

то имеется сходящаяся последовательность c_n такая, что

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b-a} = f^1(n, c_n) \quad \text{относительно } n.$$

Действительно, как мы уже видели, имеется рекурсивная функция c_k такая, что

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b-a} = f^1(n, c_k) + 0(k) \quad \text{для мажорантных } n.$$

Следовательно, при $N > k$ и мажорантных n

$$f^1(n, c_N) - f^1(n, c_k) = 0(k)$$

и поэтому

$$c_N - c_k = 0(k - \alpha),$$

что доказывает рекурсивную сходимость c_n. Так как

$$f^1(n, c_n) - f^1(n, c_m) = 0(k)$$

при $m \geqslant c_{f^1}(k) + \alpha$ и мажорантных n и

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b-a} = f^1(n, c_m) + 0(m) \quad \text{для мажорантных } n,$$

то, следовательно,

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b-a} = f^1(n, c_n) \quad \text{относительно } n.$$

Функции $G(n, x)$, $g(n, x)$ имеют и другие важные свойства, которые нам не было нужды упоминать до сих пор; они служат для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.31. *Если $f(n, x)$ относительно дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$, то у нее имеется эквивалент $G(n, x)$, который дифференцируем при $a \leqslant x \leqslant b$ равномерно по x и n.*

Используем обозначения предыдущей теоремы; пусть p и q — соответственно наименьшее и наибольшее целое такие, что если $x \leqslant a_r^n \leqslant a_s^n \leqslant y$, то значение $\{g(n, x) - g(n, y)\}/(x-y)$ лежит между наименьшим и наибольшим из

$$\frac{g(n, a_{r+1}^n) - g(n, a_r^n)}{a_{r+1}^n - a_r^n}$$

при $p - 1 \leqslant r \leqslant q$ и, следовательно, поскольку $f^1(n, a_{r+1}^n) - f^1(n, a_r^n) = 3 \cdot 0(n)$, то

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y-x} - g(n, x) = g(n, z) - g(n, x) =$$

$$= 3(z-x) \cdot \frac{0(n)}{\Delta_n} = 3(z-x) \cdot \frac{0(k)}{\Delta_k},$$

если $n \leqslant k$; отсюда получаем

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} - g(n, x) = 0(k), \quad n \leqslant k,$$

$$y - x = 0\left(c_{f^1}(k) + 2\right).$$

Более того, из

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} = g(n, z)$$

следует, что поскольку $g(n, z) - g(n, x) = 0(k-1)$ при $n \geqslant k$ и $y - x = 0\left(c_{f^1}(k)\right)$, то

$$\frac{G(n, y) - G(n, x)}{y - x} - g(n, x) = 0(k)$$

при *всех* n и всех x, y из (a, b), удовлетворяющих условию $x - y = 0\left(c_{f^1}(k) + 2\right)$; это доказывает, что $G(n, x)$ дифференцируема при $a \leqslant x \leqslant b$ равномерно по x и n.

Так как $G(n, x)$ относительно непрерывна, она обязательно имеет равномерно сходящийся эквивалент, но на самом деле она сама равномерно сходится, как мы сейчас покажем.

Поскольку

$$G\left(n, a^n_{r+1}\right) - G\left(n, a^n_r\right) = \frac{1}{2}\Delta_n\left\{f^1\left(n, a^n_r\right) + f^1\left(n, a^n_{r+1}\right)\right\},$$

то

$$G\left(n, a^n_r\right) = f(n, a) + \frac{1}{2}\Delta_n \sum_{\mu=0}^{r-1}\left\{f^1\left(n, a^n_\mu\right) + f^1\left(n, a^n_{\mu+1}\right)\right\}.$$

Обозначая $r \cdot 10^{c_{f^1}(m) - c_{f^1}(n)}$ через $\sigma(r)$, имеем при $m > n$

$$G\left(m, a^n_r\right) - G\left(n, a^n_r\right) = G\left(m, a^m_{\sigma(r)}\right) - G\left(n, a^n_r\right) =$$

$$= \{f(m, a) - f(n, a)\} + \frac{1}{2}\Delta_m \sum_{\mu=0}^{r-1}\left\{\sum_{\nu=\sigma(\mu)}^{\sigma(\mu+1)-1}\left[\left(f^1\left(m, a^m_\nu\right) - f^1\left(n, a^n_\mu\right)\right) + \left(f^1\left(m, a^m_{\nu+1}\right) - f^1\left(n, a^n_{\mu+1}\right)\right)\right]\right\} =$$

$$= 0(n) + \frac{1}{2}\Delta_m \cdot 8\sigma(r) \cdot 0(n) \quad \text{при} \quad m \geqslant n,$$

$$= 0(n) + 4(b - a) \cdot 0(n), \qquad m \geqslant n,$$

Однако при $a^n_r < x \leqslant a^n_{r+1}$ имеем

$$\{G(m, x) - G(n, x)\} - \left\{G\left(m, a^n_r\right) - G\left(n, a^n_r\right)\right\} =$$

$$= (x - a^n_r)\left\{\frac{G(m, x) - G\left(m, a^n_r\right)}{x - a^n_r} - \frac{G(n, x) - G\left(n, a^n_r\right)}{x - a^n_r}\right\} =$$

$$= (x - a^n_r)\left\{g(m, z_1) - g(n, z_2)\right\}, \quad \text{где } z_1, z_2 \text{ оба лежат в } \left(x, a^n_r\right),$$

$$= 4(x - a^n_r) \cdot 0(n-1) \quad \text{при } m \geqslant n,$$

и поэтому

$$G(m, x) - G(n, x) = 0(k) \quad \text{при} \quad m \geqslant n \geqslant k + \gamma + 1.$$

Теорема 3.32 (теорема Ролля). *Если* $f(n, a) = f(n, b)$ *относительно* n *и если* $f(n, x)$ *дифференцируема в* (a, b) *относительно* n, *то мы можем построить* c_k, *зависящую только от* k, *такую, что* $a < c_k < b$ *и* $f^1(n, c_k) = 0(k)$ *для мажорантных* n.

Действительно, имеется рекурсивная c_k такая, что

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b - a} = f^1(n, c_k) + 0(k+1) \quad \text{для мажорантных } n,$$

и по предположению

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b - a} = 0(k+1) \quad \text{для мажорантных } n,$$

откуда следует теорема Ролля.

Как и в теореме о среднем значении, сходимость c_k можно обеспечить выполнением условия

$$\frac{f^1(n, x) - f^1(n, y)}{x - y} \geqslant \frac{1}{10^a},$$

и когда это условие выполнено, заключение теоремы Ролля принимает такой вид:

$$f^1(n, c_n) = 0 \text{ относительно } n.$$

Теорема 3.33. *Если* $f(n, x)$, $g(n, x)$ *дифференцируемы в* (a, b) *относительно* n, *то имеется рекурсивная*

функция c_k такая, что $a<c_k<b$ и

$$\{f(n,b)-f(n,a)\}g^1(n,c_k)- \\ -\{g(n,b)-g(n,a)\}f^1(n,c_k)=0(k)$$

для мажорантных n.

Нам надо лишь применить теорему Ролля к функции

$$H(n,x)=\{f(n,b)-f(n,a)\}g(n,x)- \\ -\{g(n,b)-g(n,a)\}f(n,x).$$

Теорема 3.34 (теорема Коши). *Если $f(n,x)$, $g(n,x)$ дифференцируемы при $a\leqslant x\leqslant b$ относительно n и если имеется рекурсивная функция $\alpha(m)$ такая, что для достаточно больших значений m*

$$a+1/m\leqslant x\leqslant b-1/m\to g^1(n,x)\geqslant 10^{-\alpha(m)},$$

то имеется рекурсивная функция c_k такая, что $a<c_k<b$ и

$$\frac{f(n,b)-f(n,a)}{g(n,b)-g(n,a)}=\frac{f^1(n,c_k)}{g^1(n,c_k)}+0(k)$$ *для мажорантных n.*

Применяя теорему 3.33 к интервалу $(a+1/m,\ b-1/m)$, мы определим c_k^m, лежащее между $a+1/m$, $b-1/m$, так что

$$\{f(n,\ b-1/m)-f(n,\ a+1/m)\}\,g^1(n,\ c_k^m)- \\ -\{g(n,\ b-1/m)-g(n,\ a+1/m)\}\,f^1(n,\ c_k^m)=0(k)$$

для мажорантных n.

По теореме о среднем при $k=\alpha(m)+1$ и $m\geqslant 10^{2-\gamma}$ имеет место

$$g(n,\ b-1/m)-g(n,\ a+1/m)>10^{\gamma-\alpha(m)-2},$$

откуда, обозначая $c^m_{k+2\alpha(m)-\gamma+3}$ через σ_k^m, имеем

$$\frac{f(n,\ b-1/m)-f(n,\ a+1/m)}{g(n,\ b-1/m)-g(n,\ a+1/m)}=\frac{f^1(n,\ \sigma_k^m)}{g^1(n,\ \sigma_k^m)}+0(k+1)$$

для мажорантных n.

Остается доказать, что

$$\frac{f(n,b)-f(n,a)}{g(n,b)-g(n,a)}=\frac{f(n,b-1/m)-f(n,a+1/m)}{g(n,b-1/m)-g(n,a+1/m)}+0(k+1)$$

при подходящем выборе m, зависящего только от k, и для мажорантных n. Это следует из относительной непрерывности $f(n,x)$ и $g(n,x)$, если мы можем найти абсолютную положительную нижнюю грань для $g(n,b)-g(n,a)$.

Пусть a_1, a_2 — точки, разделяющие $(a,\ b)$ на три равные части, и пусть $a=a_0$ и $b=a_3$; тогда по теореме о среднем значении

$$g(n,\ a_{r+1})-g(n,\ a_r)=\frac{1}{3}(b-a)\{g^1(n,\ c_{k,r})+0(k)\},\quad r=0,\ 1,\ 2,$$

откуда, складывая и полагая $k=\alpha(m_1)+1$, где m_1 — наименьшее целое, большее $3/(b-a)$, мы имеем

$$g(n,\ b)-g(n,\ a)=\frac{1}{3^1_1}(b-a)\{g^1(n,\ c_{k,1})+g^1(n,\ c_{k,2})+ \\ +g^1(n,\ c_{k,3})+3\cdot 0(k)\}> \\ >\frac{1}{3}(b-a)\{g^1(n,\ c_{k,2})+3\cdot 0(k)\}>1/m_1 10^{\alpha(m_1)+1},$$

что дает требуемую нижнюю границу.

3.31. Говорят, что функция $f(n,x)$ повторно дифференцируема при $a\leqslant x\leqslant b$ относительно n, если имеются рекурсивные функции $f^r(n,x)$, $d_r(k)$ такие, что $f^0(n,x)=f(n,x)$ и

(D) $a\leqslant x\leqslant b\ \&\ x-y=0(d_r(k))\to$
$\to\{f^r(n,x)-f^r(n,y)\}/(x-y)=f^{r+1}(x)+0(k)$.

Функция $f^r(n,x)$ называется r-й относительной производной функции $f(n,x)$. При каждом фиксированном значении r функция $f^{r+1}(n,x)$ является производной функции $f^r(n,x)$ относительно n.

Если условие (D) выполняется только при $r\leqslant\lambda$, то говорят, что $f(n,x)$ относительно дифференцируема $\lambda+1$ раз.

Теорема 3.35 (теорема Тейлора). *Если функция $f(n,x)$ повторно дифференцируема при $a\leqslant x\leqslant b$*

относительно n, *если* $g(n, x)$ *удовлетворяет условиям теоремы Коши и если* $F(n, X, x, r)$ *определена рекурсивными равенствами* $F(n, X, x, 0) = f(n, x)$,

$$F(n, X, x, r+1) = F(n, X, x, r) + \frac{(X-x)^{r+1}}{(r+1)!} f^{r+1}(n, x),$$

то имеется рекурсивная функция σ_k, *значения которой лежат в* (x, X), *такая, что*

$$f(n, X) = F(n, X, x, r) + \frac{g(n, X) - g(n, x)}{g^1(n, \sigma_k)} \cdot \frac{(X-\sigma_k)^r}{r!} f^{r+1}(n, \sigma_k) + 0(k)$$

для мажорантных n.

Сначала заметим, что

$$F^1(n, X, x, r) = \frac{(X-x)^r}{r!} f^{r+1}(n, x).$$

В самом деле, введя обозначение

$$\psi(n, X, x, r) = \frac{(X-x)^r}{r!} f^{r+1}(n, x),$$

мы имеем

$$F^1(n, X, x, 0) - \psi(n, X, x, 0) = 0,$$

а так как

$$F^1(n, X, x, r+1) = F^1(n, X, x, r) + \frac{(X-x)^{r+1}}{(r+1)!} f^{r+2}(n, x) - \frac{(X-x)^r}{r!} f^{r+1}(n, x),$$

то

$$F^1(n, X, x, r+1) - \psi(n, X, x, r+1) = F^1(n, X, x, r) - \psi(n, X, x, r).$$

Кроме того,

$$F(n, X, X, 0) = f(n, X) \quad F(n, X, X, r+1) = F(n, X, X, r)$$

и, следовательно,

$$F(n, X, X, r) = f(n, X).$$

Применяя теорему Коши к функциям $F(n, X, x, r)$, $g(n, x)$ в интервале (x, X), определим c_k так, что

$$\frac{F(n, X, X, r) - F(n, X, x, r)}{g(n, X) - g(n, x)} = \frac{(X-c_k)^r}{r!} \frac{f^{r+1}(n, c_k)}{g^1(n, c_k)} + 0(k)$$

для мажорантных n.

В силу относительной непрерывности мы можем выбрать k_0 так, что

$$|g(n, X) - g(n, x)| < 10^{k_0}$$

и, полагая $\sigma_k = c_{k+k_0}$, имеем

$$f(n, X) = F(n, X, x, r) + \frac{g(n, X) - g(n, x)}{g^1(n, \sigma_k)} \cdot \frac{(X-\sigma_k)^r}{r!} f^{r+1}(n, \sigma_k) + 0(k)$$

для мажорантных n.

Взяв $g(n, x) = (X-x)^p$, мы получаем «остаточный член» в форме Коши:

$$\frac{(X-x)^p (X-\sigma_k)^{r-p+1}}{p(r!)} f^{r+1}(n, \sigma_k),$$

а при $p = r+1$ — «остаточный член» в форме Лагранжа:

$$\frac{(X-x)^{r+1}}{(r+1)!} f^{r+1}(n, \sigma_k).$$

3.4. В теореме Ролля (и ее следствиях) функция c_k, определяемая по этой теореме, удовлетворяет неравенству $a < c_k < b$, и мы можем найти число m_k такое, что $a + 1/m_k \leqslant c_k \leqslant b - 1/m_k$; но мы не можем однако, определить m, *не зависящее* от k, такое, что $a + 1/m < c_k < b - 1/m$, ибо, как мы впоследствии покажем, для некоторой функции $f(n, x)$ может случиться, что сколь бы большое m мы ни выбирали, все-таки может найтись некоторое значение k, для которого c_k лежит вне интервала

$$(a + 1/m, \ b - 1/m),$$

хотя сходимость c_k к a или b не доказуема.

Мы докажем, что функция c_k, определяемая по теореме Ролля, *равномерно* содержится в $[a, b]$, т. е. что

$$a + 1/m \leqslant c_k \leqslant b - 1/m$$

для всех k независимо от $f(n, x)$, в предположении, что функция *эффективно непостоянна* или *эффективно постоянна* относительно n.

3.41. Функция $f(n, x)$ эффективно непостоянна в (a, b) относительно n, если можно найти рациональные c_1, c_2 и натуральное α такие, что $a \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b$ и

$$|f(n, c_1) - f(n, c_2)| \geqslant 1/10^{\alpha} \text{ для мажорантных } n.$$

3.42. Функция $f(n, x)$ эффективно постоянна в (a, b) относительно n, если

$$a \leqslant x < y \leqslant b \longrightarrow f(n, x) - f(n, y) = 0(k)$$

для мажорантных n.

Теорема 3.4. *Если $f(n, x)$ эффективно непостоянна в (a, b) относительно n, то можно найти c из (a, b) и натуральное α такие, что*

$$|f(n, c) - f(n, a)| > 1/10^{\alpha} \text{ для мажорантных } n.$$

Так как

$$|\{f(p, c_1) - f(p, a)\} - \{f(p, c_2) - f(p, a)\}| = |f(p, c_1) - f(p, c_2)| \geqslant 10^{-\alpha},$$

то *или*

$$|f(p, c_1) - f(p, a)| \geqslant 1/10^{\alpha+1},$$

или

$$|f(p, c_2) - f(p, a)| \geqslant 1/10^{\alpha+1},$$

т. е.

$$|f(p, c) - f(p, a)| \geqslant 1/10^{\alpha+1},$$

где c равно c_1, если выполняется первое неравенство, и равно c_2 в противоположном случае.

Но в силу сходимости

$$|f(p, c) - f(n, c)| \leqslant 1/10^{\alpha+2} \text{ для мажорантных } n,$$

и поэтому

$$|f(n, c) - f(n, a)| \geqslant 1/10^{\alpha+2} \text{ для мажорантных } n.$$

Те же рассуждения показывают также, что будет $|f(n, c) - f(n, b)| \geqslant 1/10^{\alpha+2}$.

Теорема 3.41. *Если функция $f(n, x)$ дифференцируема в (a, b) относительно n и если можно найти β и c из (a, b) такие, что $|f^1(n, c)| \geqslant 1/10^{\beta}$ для мажорантных n, то $f(n, x)$ эффективно непостоянна в (a, b) относительно n.*

Найдем c^* из (a, b) так, чтобы $|c^* - c| = 1/10^{d(\beta+1)+1}$; тогда

$$\frac{f(n, c^*) - f(n, c)}{c^* - c} = f^1(n, c) + 0(\beta + 1) \text{ для мажорантных } n$$

и, следовательно,

$$|f(n, c^*) - f(n, c)| \geqslant |c^* - c| / 10^{\beta+1} = 1/10^{d(\beta+1)+\beta+2} \text{ для мажорантных } n.$$

Теорема 3.42. *Если $f(n, x)$ эффективно постоянна в (a, b) относительно n, то $f(n, x)$ дифференцируема относительно n с производной, равной нулю.*

Действительно, для любых x, y, таких, что $a \leqslant x < y \leqslant b$, имеем

$$\frac{f(n, y) - f(n, x)}{y - x} = 0(k) \text{ для мажорантных } n.$$

Теорема 3.5 (равномерная теорема Ролля). *Если $f(n, x)$ дифференцируема и эффективно непостоянна или эффективно постоянна в (a, b) относительно n и если $f(n, a) = f(n, b)$ относительно n, то можно построить c_k, равномерно содержащуюся в открытом интервале $[a, b]$, такую, что $f^1(n, c_k) = 0(k)$ для мажорантных n.*

Предположим сначала, что $f(n, x)$ эффективно непостоянна. По теореме 3.4 имеется c из (a, b) такое, что

$$|f(n, c) - f(n, a)| > 1/10^{\beta} \text{ для мажорантных } n;$$

так как $f(n, a)$ и $f(n, b)$ равны относительно n, то $a < c < b$.

Без потери общности мы можем предполагать, что

$$f(n, c) - f(n, a) > 10^{-\beta} \text{ для мажорантных } n.$$

По теореме о среднем значении мы можем найти c^1_ρ, c^2_ρ соответственно из $[a, c]$, $[c, b]$ такие, что для любого ρ

$$\frac{f(n, c) - f(n, a)}{c - a} = f^1(n, c^1_\rho) + 0(\rho)$$

и

$$\frac{f(n, b) - f(n, c)}{b - c} = f^1(n, c^2_\rho) + 0(\rho) \quad \text{для мажорантных } n.$$

Пусть θ — наибольшее целое такое, что $c - a \leqslant 10^{-\theta}$, $b - c \leqslant 10^{-\theta}$; тогда, взяв

$$\rho_0 = \max(\beta + 1, \beta - \theta + 1),$$

мы имеем

$$f^1(n, c^1_{\rho_0}) > 10^{\theta-\beta-1}, \quad f^1(n, c^2_{\rho_0}) < -10^{\theta-\beta-1}.$$

Записывая $c^1_{\rho_0}$ в виде $a + 1/m_1$, $c^2_{\rho_0}$ — в виде $b - 1/m_2$, по основной теореме об относительной непрерывности — теореме 2 применительно к относительно непрерывной функции $f^1(n, x)$ — можно построить c_k, лежащую в

$$(a + 1/m_1, \ b - 1/m_2),$$

такую, что $f^1(n, c_k) = 0(k)$ при мажорантных n.

Если $f(n, x)$ эффективно постоянна, то по теореме 3.42 $f^1(n, x)$ эквивалентна нулю и, в частности,

$$f^1\left(n, \tfrac{1}{2}(a + b)\right) = 0(k) \quad \text{для мажорантных } n.$$

Теорема 3.51. *В теореме* 3.5 *условие о том, что* $f(n, x)$ *эффективно непостоянна или эффективно постоянна, можно заменить условием:* $f^1(n, x)$ *эффективно непостоянна или эффективно постоянна относительно* n.

Действительно, если $f^1(n, x)$ эффективно непостоянна, то по теореме 3.4

$$|f^1(n, c)| > 1/10^\beta \quad \text{для мажорантных } n,$$

и, следовательно, по теореме 3.41 $f(n, x)$ эффективно непостоянна.

В частности, условие: $|f^1(n, c)| > 1/10^\beta$ при мажорантных n — достаточно для равномерной теоремы Ролля.

С другой стороны, если $f^1(n, x)$ эффективно постоянна в (a, b) относительно n, так что $f^1(n, x) - f^1(n, a) = 0(k)$ для мажорантных n, то, вводя обозначение

$$F(n, x) = f(n, x) - xf^1(n, a),$$

мы имеем

$$F^1(n, x) = f^1(n, x) - f^1(n, a) = 0(k) \quad \text{для мажорантных } n$$

и поэтому

$$F(n, b) - F(n, a) = 0(k) \quad \text{для мажорантных } n,$$

откуда, поскольку $f(n, b) = f(n, a)$ относительно n, мы имеем

$$(b - a) f^1(n, a) = f(n, b) - f(n, a) + 0(k) = 0(k - 1)$$

для мажорантных n.

Следовательно, при $a \leqslant x \leqslant b$

$$f^1(n, x) = 0(k) \quad \text{для мажорантных } n.$$

Теорема 3.52 (теорема о равномерном среднем значении). *Если* $f(n, x)$ *дифференцируема в* (a, b) *относительно* n *и если* $f^1(n, x)$ *эффективно непостоянна или эффективно постоянна в* (a, b) *относительно* n, *то можно построить* c_k *такую, что*

$$\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b - a} = f^1(n, c_k) + 0(k)$$

для мажорантных n, *причем* c_k *равномерно содержится в* (a, b).

Введем обозначение:

$$\varphi(n, x) = f(n, x) - x\left\{\frac{f(n, b) - f(n, a)}{b - a}\right\}.$$

Если $f^1(n, x)$ эффективно непостоянна, то имеются целые α, V такие, что

$$|f^1(n, c_1) - f^1(n, c_2)| \geqslant 1/10^\alpha \quad \text{при} \quad n \geqslant V$$

и, следовательно,

$$|\varphi^1(n, c_1) - \varphi^1(n, c_2)| \geqslant 1/10^\alpha \quad \text{при} \quad n \geqslant V. \qquad \text{(i)}$$

Но

$$\varphi^1(n, x) - \varphi^1(m, x) = 0(\alpha + 1) \quad \text{при} \quad n \geqslant m \geqslant \alpha + 1.$$

Пусть $\mu = \max(V, \alpha + 1)$; тогда, взяв n равным μ в (i), имеем

$$|\varphi^1(\mu, c)| \geqslant 1/2 \cdot 10^{\alpha},$$

где c равно одному из c_1, c_2, и поэтому

$$|\varphi^1(n, c)| \geqslant 1/4 \cdot 10^{\alpha} \quad \text{при} \quad n \geqslant \mu.$$

Таким образом, по теореме 3.51 $\varphi(n, x)$ удовлетворяет условию, достаточному для выполнения теоремы Ролля; следовательно, получаем теорему 3.52.

Если $f^1(n, x)$ эффективно постоянна, то, как и в доказательстве теоремы 3.51, имеем

$$\{f(n, b) - f(n, a)\}(b - a) = f^1(n, a) + 0(k) = \\ = f^1(n, x) + 0(k - 1)$$

для мажорантных n

Теорема 3.53 (равномерная теорема Коши). *Если $F(n, x)$, $G(n, x)$ дифференцируемы в (a, b) относительно n, $G^1(n, x) \geqslant 1/10^{\alpha(m)}$ при $a + 1/m \leqslant x \leqslant b - 1/m$, $n \geqslant N(m)$ и если $F^1(n, x)/G^1(n, x)$ эффективно непостоянна или эффективно постоянна в открытом интервале $[a, b]$, то можно построить c_k такую, что*

$$\frac{F(n, b) - F(n, a)}{G(n, b) - G(n, a)} = \frac{F^1(n, c_k)}{G^1(n, c_k)} + 0(k) \quad \textit{для мажорантных } n$$

и c_k равномерно содержится в открытом интервале (a, b).

Если $F^1(n, x)/G^1(n, x)$ эффективно непостоянна, то можно найти Q, V и c_1, c_2 из $[a, b]$ такие, что

$$\left| \frac{F^1(n, c_1)}{G^1(n, c_1)} - \frac{F^1(n, c_2)}{G^1(n, c_2)} \right| \geqslant 1/10^{Q} \quad \text{при} \quad n \geqslant V$$

и, следовательно, в силу равномерной сходимости имеется W такое, что

$$\left| \frac{F^1(n, c)}{G^1(n, c)} - \frac{F(n, b) - F(n, a)}{G(n, b) - G(n, a)} \right| \geqslant 1/10^{Q+1} \quad \text{при} \quad n \geqslant W,$$

где c равно одному из c_1, c_2.

Так как c лежит в $[a, b]$, то c лежит и в интервале $(a + 1/\mu, b - 1/\mu)$ при некотором μ; в соответствии с μ можно найти R, N такие, что

$$|G^1(n, x)\{F(n, b) - F(n, a)\}| \geqslant 1/10^{R} \quad \text{при} \quad n \geqslant N$$

и при $a + 1/\mu \leqslant x \leqslant b - 1/\mu$, и, следовательно, при $x = c$, а поэтому

$$|F^1(n, c)\{G(n, b) - G(n, a)\} - G^1(n, c)\{F(n, b) - F(n, a)\}| \geqslant \\ \geqslant 1/10^{Q+R+1}$$

при $n \geqslant \max(W, N)$ — это доказывает, что функция

$$F(n, x)\{G(n, b) - G(n, a)\} - G(n, x)\{F(n, b) - F(n, a)\}$$

удовлетворяет условию, достаточному для выполнения равномерной теоремы Ролля. Следовательно, можно найти σ_k, ν_k и m, не зависящее от k (последнее мы считаем не меньше μ), такие, что $a + 1/m \leqslant \sigma_k \leqslant b - 1/m$ и

$$F^1(n, \sigma_k)\{G(n, b) - G(n, a)\} - \\ - G^1(n, \sigma_k)\{F(n, b) - F(n, a)\} = 0(k)$$

при $n \geqslant \nu_k$. Поэтому, полагая $c_k = \sigma_{k+R}$, мы имеем при $n \geqslant \nu_k + R$

$$\frac{F(n, b) - F(n, a)}{G(n, b) - G(n, a)} = \frac{F^1(n, c_k)}{G^1(n, c_k)} + 0(k).$$

Если, с другой стороны, $F^1(n, x)/G^1(n, x)$ эффективно постоянна в $[a, b]$, то

$$\frac{F^1(n, x)}{G^1(n, x)} - \frac{F^1(n, c)}{G^1(n, c)} = 0(k) \quad \text{для мажорантных } n$$

и для любых x, c из $[a, b]$. Так как $G^1(n, x)$ непрерывна и, следовательно, ограничена сверху относительно n, то

$$F^1(n, x)\,G^1(n, c) - F^1(n, c)\,G^1(n, x) = 0(k)$$

для мажорантных n;

этот результат выполняется для любого x из $[a, b]$ и поэтому в силу непрерывности и для любого x из замкнутого интервала (a, b) для мажорантных n.

Следовательно,

$$\{F(n,b)-F(n,a)\}G^1(n,c)- \\ -\{G(n,b)-G(n,a)\}F^1(n,c)=0(k)$$

для мажорантных n и поэтому, взяв произвольное c в интервале

$$(a-1/\mu,\ b+1/\mu),$$

получаем

$$\frac{F(n,b)-F(n,a)}{G(n,b)-G(n,a)}=\frac{F^1(n,c)}{G^1(n,c)}+0(k)$$

для мажорантных n, что завершает доказательство.

Теорема 3.54 (равномерная теорема Тейлора). *Так как теорема Тейлора является непосредственным следствием теоремы Коши для функций*

$$F(n,X,x,r),\quad g(n,x)$$

с производными (относительно n) соответственно

$$(X-x)^r f^{r+1}(n,x)/r!,\quad g^1(n,x),$$

то из теоремы 3.53 следует, что равномерная теорема Тейлора имеет место в предположении, что $(X-x)^r f^{r+1}(n,x)/g^1(n,x)$ эффективно непостоянна или эффективно постоянна. В частности, для остаточного члена в форме Лагранжа мы имеем $g(n,x)=(X-x)^{r+1}$ и условие, при котором верна равномерная теорема Тейлора, принимает особенно простой вид: $f^{r+1}(n,x)$ должна быть эффективно непостоянна или эффективно постоянна.

3.5. Равномерная теорема Ролля была установлена при дополнительном условии, что $f(n,x)$ эффективно непостоянна относительно n или эффективно постоянна относительно n, и мы обращали внимание на необходимость некоторого условия, кроме относительной дифференцируемости. Теперь мы покажем, что равномерную теорему Ролля нельзя доказать в рекурсивном анализе без дополнительного ограничения. Мы снова будем использовать метод, который применялся в предыдущих

главах и который состоит в том, что показывается, что в рекурсивном анализе доказательство равномерной теоремы Ролля дало бы разрешающую процедуру для класса равенств $\rho(n)=0$, где $\rho(n)$ — произвольная примитивно рекурсивная функция, принимающая лишь значения 0 и 1.

Пусть дана произвольная рекурсивная функция $\rho(n)$ такая, что $\rho(0)=\rho(1)=\rho(2)=0$; полагаем

$$e_0=0,\quad e_{n+1}=e_n+\prod_{r=0}^{n}(1-\rho(r)),$$

$$d_0=1,\quad d_{n+1}=1/e_{n+1},$$

и при $0\leqslant x\leqslant 1$ и $n\geqslant 3$

$$f(n,x)=\frac{d_n^4 x(1-x)}{d_n^2+(1-2d_n)x}.$$

Сначала мы заметим, что если равенство

$$e_n=n$$

доказуемо, то доказуемо и равенство

$$\rho(n)=0.$$

Действительно, из $e_n=n$ следует $e_{n+1}=n+1$ и поэтому $\prod_{r=0}^{n}(1-\rho(r))=1$, откуда получаем

$$\rho(n)=\rho(n)\prod_{r=0}^{n}(1-\rho(r))=0.$$

Легко доказать, что $e_n\leqslant n$. Действительно, если $\rho(r)=0$ для всех $r\leqslant n$, то $e_{n+1}=n+1$; следовательно, если имеется $r\leqslant n$, для которого $\rho(r)=1$, и если r_0 — первое такое r, то $e_n=n$ при $n\leqslant r_0$ и $e_n=r_0$ при $n\geqslant r_0$.

Следовательно, если $N>n\geqslant 1$, то

$$0\leqslant d_n-d_N<1/n.$$

В самом деле, если $d_n > 1/n$, то $e_n < n$ и поэтому $e_N = e_n$ и $d_N = d_n$; но если $d_n = 1/n$, то из $d_N \leqslant d_n$ следует

$$0 \leqslant d_n - d_N < 1/n.$$

Величина d_n, конечно, зависит от существования или несуществования n, для которого $\rho(n) = 1$. Фактически мы можем доказать, что если имеется рекурсивная $V(k)$ такая, что

$$n \geqslant V(k) \longrightarrow d_n = 0(k) \text{ для всех значений } n,$$

то $\rho(n) = 0$ для всех n.

Действительно, если $e_n \geqslant 10^k$ при $n \geqslant V(k)$, то

$$e_{n+V(n)} \geqslant 10^n > n;$$

поскольку, однако,

$$e_{n+1} = e_n \longrightarrow e_{n+p} \leqslant n$$

для любого p, то, взяв p равным $V(n)$, имеем

$$e_{n+1} > e_n \text{ для всех } n,$$

поэтому $\prod_{r=0}^{n} (1 - \rho(r)) > 0$ для всех n и, наконец,

$$\rho(n) = 0 \text{ для всех } n.$$

Далее мы покажем, что при $n \geqslant 3$ и при $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет место

$$0 \leqslant f(n, x) \leqslant d_n^4.$$

Вводя для краткости обозначение $\lambda = d_n^2/(1 - 2d_n)$, мы имеем

$$f(n, x) = \lambda d_n^2 \left\{ 2\lambda + 1 - (x + \lambda) - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{x + \lambda} \right\},$$

откуда следует, что (для каждого n) рациональная функция $f(n, x)$ достигает своего максимального значения d_n^4 при $x = d_n$.

Кроме того, если $3 \leqslant n < N$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$f(N, x) \leqslant f(n, x).$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \frac{t^4}{t^2 + (1 - 2t)x} = \frac{2t^3 \{t^2 + x(2 - 3t)\}}{\{t^2 + (1 - 2t)x\}^2} > 0,$$

когда $0 < t < 2/3$, а d_n не возрастает.

Отсюда следует, что при $3 \leqslant n \leqslant N$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$0 \leqslant f(n, x) - f(N, x) < 1/n^4.$$

Ибо, если $d_n > 1/n$, то $d_N = d_n$, так что $f(N, x) = f(n, x)$; а если $d_n = 1/n$, то

$$0 \leqslant f(n, x) - f(N, x) < d_n^4 = 1/n^4.$$

Таким образом, $f(n, x)$ сходится равномерно по x при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Простые вычисления показывают, что при $0 \leqslant x < X < 1$

$$\left| \frac{f(n, X) - f(n, x)}{X - x} - \lambda d_n^2 \left\{ \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(x + \lambda)^2} - 1 \right\} \right| = \frac{(X - x)\lambda^2(\lambda + 1)d_n^2}{(x + \lambda)^2(X + \lambda)} \leqslant$$
$$\leqslant (X - x)(1 - d_n)^2 < X - x;$$

это доказывает, что $f(n, x)$ рекурсивно дифференцируема по x равномерно по x и n и, следовательно, дифференцируема относительно n с производной

$$f^1(n, x) = \lambda d_n^2 \left\{ \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(x + \lambda)^2} - 1 \right\}$$

в предположении, что $f^1(n, x)$ сходится. Однако для каждого $n \geqslant 3$, если x возрастает от 0 до 1, то $f^1(n, x)$ строго убывает от d_n^2 до $-d_n^4/(1 - d_n)^2$ и поэтому если $N > n \geqslant 3$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$f^1(N, x) - f^1(n, x) \leqslant d_N^2 + d_n^4/(1 - d_n)^2 < d_N^2 + 4d_n^4$$

и

$$f^1(N, x) - f^1(n, x) \geqslant -d_N^4/(1 - d_N)^2 - d_n^2 > -4d_N^4 - d_n^2.$$

Если $d_n > 1/n$, то $d_N = d_n$ и $f^1(N, x) = f^1(n, x)$; но если $d_n = 1/n$, то $d_N \leqslant 1/n$, так что в любом случае

$$-4/n^4 - 1/n^2 < f^1(N, x) - f^1(n, x) < 1/n^2 + 4/n^4;$$

это доказывает, что $f^1(n, x)$ сходится равномерно по x, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Так как $f(n, 0) = f(n, 1) = 0$, то мы показали, что $f(n, x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Теперь мы подходим к наиболее существенной части доказательства.

Предположим, что (для любой $\rho(n)$) равномерная теорема Ролля доказуема для $f(n, x)$. Тогда имеется рекурсивная $V(k)$, рекурсивная c_k и эффективно определяемое целое $\boldsymbol{p}$ такие, что $c_k \geqslant 1/\boldsymbol{p}$ и

$$n \geqslant V(k) \longrightarrow f^1(n, c_k) = 0(k)$$

для всех значений n.

Поскольку имеем

$$f^1(n, c_k) = \frac{d_n^4 (d_n - c_k)\{d_n + (1 - 2d_n) c_k\}}{\{d_n^2 + (1 - 2d_n) c_k\}^2}$$

и

$$d_n + (1 - 2d_n) c_k > d_n^2 + (1 - 2d_n) c_k,$$

$$d_n^2 + (1 - 2d_n) c_k \leqslant (1 - d_n)^2 < 1,$$

то

$$n \geqslant V(k) \to d_n^4 / (d_n - c_k) = 0(k).$$

Для данного целого $\boldsymbol{p}$ будет или $d_{p+1} = 1/(\boldsymbol{p} + 1)$ или $d_{p+1} > (1/(\boldsymbol{p} + 1))$.

Если $d_{p+1} = 1/(\boldsymbol{p} + 1)$, то $d_n \leqslant 1/(\boldsymbol{p} + 1)$ при $n \geqslant (\boldsymbol{p} + 1)$, так что

$$|d_n - c_k| > 1/\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p} + 1)$$

и поэтому

$$n \geqslant V(4k + \boldsymbol{p}) \longrightarrow d_n = 0(k)$$

для всех n, откуда следует, как мы уже видели, что

$$\rho(n) = 0$$

для всех значений n.

С другой стороны, если $d_{p+1} > 1/(\boldsymbol{p} + 1)$, то имеется r между 0 и $\boldsymbol{p} + 1$, для которого $\rho(r) = 1$. Таким образом, предположение о доказуемости равномерной теоремы Ролля для $f(n, x)$ влечет существование разрешающей процедуры для неразрешимого класса равенств $\rho(n) = 0$.

Важным следствием является то, что имеются рекурсивные функции, которые ни относительно *) непостоянны, ни относительно *) постоянны **), ибо мы установили равномерную теорему Ролля для функций, обладающих любым из этих свойств.

Конечно, равномерная теорема Ролля может выполняться и для функций, которые не являются ни относительно постоянными, ни относительно непостоянными **).

Пусть

$$h(n, x) = x(1 - x) d_n.$$

Ясно, что $h(n, x)$ равномерно сходится в (0,1) и

$$h(n, 0) = h(n, 1) = 0;$$

более того, при $0 \leqslant x < X \leqslant 1$

$$\left| \frac{h(n, X) - h(n, x)}{X - x} - (1 - 2x) d_n \right| = (X - x) d_n < (X - x),$$

так что $h(n, x)$ дифференцируема по x равномерно по x и n с равномерно сходящейся производной $(1 - 2x) d_n$. Кроме того

$$h^1\left(n, \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{для всех } n,$$

так что существование c_k, равномерно содержащейся в (0, 1), установлено. Однако если бы $h(n, x)$ была относительно постоянна, то имелась бы рекурсивная функция $V(k, x)$ такая, что в (0, 1)

$$h(n, x) = 0(k) \quad \text{при} \quad n \geqslant V(k, x);$$

---

*) Здесь и далее до конца главы III вместо «относительно» должно быть «эффективно». — *Прим. ред.*

**) Это утверждение автора неверно: нетрудно доказать, что если относительно непрерывная функция не является относительно постоянной, то она является относительно непостоянной. Автор имел в виду по-видимому, верное утверждение, сформулированное в последнем абзаце этой главы. — *Прим. ред.*

взяв $x = 1/2$, мы имеем

$$d_n = 4 \cdot 0(k) \quad \text{при} \quad n \geqslant V\left(k, \frac{1}{2}\right),$$

откуда следует, что $\rho(n) = 0$ доказуемо для всех n.

А если бы $h(n, x)$ была относительно непостоянна, то имелось бы c в (0,1) и целые p, q такие, что

$$h(n, c) \geqslant 1/p \text{ при } n \geqslant q$$

и, следовательно, поскольку $h(n, c)$ — наибольшее значение $h(n, x)$ в (0,1), мы имеем

$$d_n \geqslant 4/p \quad \text{при} \quad n \geqslant q;$$

пусть r — наибольшее из p, q, тогда $d_n \geqslant 4/r$, так что имеется целое n между 0 и r, для которого $\rho(n) = 1$.

Таким образом, если бы $h(n, x)$ была относительно непостоянной или относительно постоянной для любой функции $\rho(n)$, то у нас опять была бы разрешающая процедура для класса равенств $\rho(n) = 0$.

ГЛАВА IV

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Линейчатые функции. Относительно интегрируемые функции. Теорема Дарбу. Непрерывность и производная относительного интеграла. Подстановка в относительный интеграл.

4. *Линейчатые функции*

Говорят, что рекурсивная функция $f(n, x)$ является линейчатой при $a \leqslant x \leqslant b$, если $f(n, x)$ равномерно рекурсивно сходится при $a \leqslant x \leqslant b$ и если имеются рекурсивные функции a_r^n, v_r^n, $b(n)$ и $t(m, n, r)$ такие, что

$$a_0^n = a, \quad a_{b(n)}^n = b, \quad a_{r+1}^n > a_r^n, \quad a_r^n = a_{t(m, n, r)}^m \quad \text{при} \quad m > n$$

и

$$f(n, x) = v_r^n \quad \text{при} \quad a_r^n < x < a_{r+1}^n \quad \text{и} \quad 0 \leqslant r \leqslant b(n) - 1.$$

Линейчатая функция абсолютно ограничена, ибо если M_0 — максимум $|f(0, a_r^0)|$, $0 \leqslant r \leqslant b(0)$, и $|v_r^0|$, $0 \leqslant r \leqslant b(0)$, то $|f(0, x)| \leqslant M_0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Но (взяв $f(n, x)$ в стандартной форме)

$$|f(n, x) - f(0, x)| < 1$$

и поэтому $|f(n, x)| < M_0 + 1$ для всех n и для всех x из (a, b). Свойство быть линейчатой функцией, конечно, не инвариантно относительно эквивалентности.

4.01. В определении линейчатой функции $f(n, x)$ мы требовали равномерную сходимость $f(n, x)$. Равномерность нужна для того, чтобы обеспечить сходимость $f(n, x_n)$ в случае сходимости x_n, — это показывает следующий пример. Пусть i_n — семейство вложенных интервалов, рациональные концы которых монотонно стремятся к $1/\sqrt{2}$ так, что для любого рационального x из (a, b) точка x лежит вне i_n для некоторого n. Далее, пусть $f(n, x) = n$ в замкнутом интервале i_n и пусть $f(n, x) = 0$ вне i_n; для каждого значения n функция

$f(n, x)$ является ступенчатой, а для рационального x $f(n, x) = 0$ начиная с некоторого n, так что $f(n, x)$ сходится. Но если x_n — конец i_n, то $f(n, x_n) = n$, так что $f(n, x_n) \longrightarrow \infty$. Конечно, $f(n, x)$ не является равномерно сходящейся, поскольку для любых двух p и q таких, что $q > p$, и x из i_q

$$f(q, x) - f(p, x) = q - p \geqslant 1.$$

Теорема 4.1. *Сумма, разность, произведение и частное двух линейчатых функций является линейчатой функцией.*

Действительно, соединяя разбиения, соответствующие рассматриваемым двум функциям, мы получаем (для любого значения n) разбиение, в каждом открытом интервале которого обе функции постоянны.

Теорема 4.11. *Любая относительно непрерывная функция имеет линейчатый эквивалент.*

Если $f(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и если γ — наименьшее целое такое, что $b - a \leqslant 10^{\gamma}$, то, вводя обозначения

$$a_r^n = a + (b-a)\, r / 10^{\gamma + c(n)}, \quad b(n) = 10^{\gamma + c(n)}$$

и

$$\varphi(n, a) = f(n, a), \quad \varphi(n, x) = f(n, a_{r+1}^n) \quad \text{при} \quad a_r^n < x \leqslant a_{r+1}^n,$$

имеем, что $\varphi(n, x)$ — линейчатая функция, эквивалентная $f(n, x)$.

Теорема 4.12. *Если $f(n, x)$ относительно непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, $g(n, t)$ — линейчатая функция при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и $a \leqslant g(n, t) \leqslant b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $fg(n, t)$ — тоже линейчатая функция при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.*

Действительно,

$$fg(n, t) = f(n+1, g(c_f(n+1), t)).$$

4.1. *Относительный интеграл*

Если $f(n, x)$ линейчата в (a, b), то сумма

$$\sum_{r=0}^{b(n)-1} v_r^n \left(a_{r+1}^n - a_r^n\right)$$

называется относительным интегралом $f(n, x)$ от a до b $(a < b)$ и обозначается через $I_f(n, a, b)$ *).

Если $a = b$, то мы полагаем по определению $I_f(n, a, b) = 0$, а если $a > b$, то

$$I_f(n, a, b) = -I_f(n, b, a).$$

Относительный интеграл $I_f(n, a, b)$ рекурсивно сходится.

Действительно, если $N > n$ и если $t(N, n, r) \leqslant s < t(N, n, r+1)$, то

$$v_s^N - v_r^n = 0(n)$$

и поэтому

$$I_f(N, a, b) - I_f(n, a, b) = \sum_{r=0}^{b(n)-1} \sum_{s=t(N, n, r)}^{t(N, n, r+1)-1} (v_s^N - v_r^n)(a_{s+1}^N - a_s^N) = (b-a) \cdot 0(n),$$

что доказывает рекурсивную сходимость $I_f(n, a, b)$.

Теорема 4.13. *Если $f(n, x)$, $g(n, x)$ — эквивалентные линейчатые функции, то $I_f(n, a, b)$, $I_g(n, a, b)$ эквивалентны.*

Соединяя разбиения, на которых f и g постоянны при данном n, мы находим разбиение, скажем, (c_r^n), такое, что и $f(n, x)$ и $g(n, x)$ постоянны на каждом интервале (c_r^n, c_{r+1}^n); если μ_r^n — средняя точка этого интервала, то

$$I_f(n, a, b) - I_g(n, a, b) = \sum \{f(n, \mu_r^n) - g(n, \mu_r^n)\}(c_{r+1}^n - c_r^n),$$

но при $N > n$

$$f(n, \mu_r^n) - f(N, \mu_r^n) = 0(n),$$

$$g(n, \mu_r^n) - g(N, \mu_r^n) = 0(n)$$

и

$$f(N, \mu_r^n) - g(N, \mu_r^n) = 0(n) \quad \text{для мажорантных } N,$$

*) В дальнейшем автор рассматривает выражение $I_f(n, a, b)$ как значение операции, строящей упомянутую выше сумму. Но для получения этой суммы, кроме f, n, a, b, необходимы исходные данные, позволяющие строить a_r^n, v_r^n и $b(n)$. — *Прим. перев.*

так что

$$I_f(n, a, b) - I_g(n, a, b) = 3(b-a)\cdot 0(n).$$

4.2. *Если рекурсивная функция $f(n, x)$ имеет линейчатый эквивалент $F(n, x)$ в (a, b), то говорят, что $f(n, x)$ относительно интегрируема с относительным интегралом $I_F(n, a, b)$*; интеграл $f(n, x)$ можно также обозначать через $I_f(n, a, b)$. В частности, относительно непрерывная функция относительно интегрируема.

Теорема 4.13 показывает, что любые два относительных интеграла функции $f(n, x)$ эквивалентны.

Заметим, что относительно интегрируемая функция ограничена; действительно, если $f(n, x)$ имеет линейчатый эквивалент $F(n, x)$, то мы знаем, что $|F(n, x)| < M$ при некотором M и при всех x и n, и поэтому

$$|f(n, x)| < M + 1 \text{ для мажорантных } n.$$

Теорема 4.2 (теорема Дарбу). *Если $f(n, x)$ относительно интегрируема в (a, b) и если (x_r), $0 \leqslant r \leqslant N$, — разбиение (a, b) и ξ_r — произвольная точка в (x_r, x_{r+1}), $1 \leqslant r+1 \leqslant N$, то*

$$I_f(k, a, b) - \sum_{r=0}^{N-1} f(n, \xi_r)(x_{r+1} - x_r) = 6(b-a)\cdot 0(k)$$

для мажорантных n и любого разбиения (x_r), состоящего из достаточно маленьких интервалов.

Пусть M — абсолютная граница линейчатого эквивалента $F(n, x)$ функции $f(n, x)$ в (a, b); по теореме 4.13

$$I_f(k, a, b) - I_F(k, a, b) = 3(b-a)\cdot 0(k);$$

поскольку

$$\sum_{r=0}^{N-1} F(n, \xi_r)(x_{r+1} - x_r) - \sum_{r=0}^{N-1} f(n, \xi_r)(x_{r+1} - x_r) = 2(b-a)\cdot 0(k)$$

для мажорантных n, то остается доказать, что

$$I_F(k, a, b) - \sum_{r=0}^{N-1} F(k, \xi_r)(x_{r+1} - x_r) = (b-a)\cdot 0(k)$$

при подходящих разбиениях.

Пусть (a_r^n) — разбиение, соответствующее линейчатой функции $F(n, x)$ (в стандартной форме), так что $F(n, x)$ — константа при

$$a_r^n < x < a_{r+1}^n, \quad 0 \leqslant r \leqslant b(n),$$

для каждого значения n, и пусть v_r^n — значение $F(n, x)$ в открытом интервале (a_r^n, a_{r+1}^n); тогда

$$I_f(k, a, b) = \sum_{r=0}^{b(k)-1} v_r^k (a_{r+1}^k - a_r^k).$$

Далее, пусть длина любого подынтервала $x_{r+1} - x_r$, $0 \leqslant r \leqslant N-1$, меньше $a_{r+1}^k - a_r^k$ и также меньше

$$(b-a)/2M \cdot 10^k \cdot b(k).$$

Наконец, пусть c_r, $0 \leqslant r \leqslant p$, — разбиение, полученное соединением (x_r) и (a_s^k). В силу ограничения на длины интервалов (x_r, x_{r+1}), не более одной точки a_s^k попадает в любой замкнутый интервал (x_r, x_{r+1}), $0 \leqslant r \leqslant N-1$.

Пусть ω_t^k обозначает значение $F(k, x)$ в открытом интервале (c_t, c_{t+1}). Тогда

$$I_F(k, a, b) = \sum_{t=0}^{p-1} \omega_t^k (c_{t+1} - c_t)$$

и

$$\sum_{r=0}^{N-1} F(k, \xi_r)(x_{r+1} - x_r) = \sum_{t=0}^{p-1} F(k, \eta_t)(c_{t+1} - c_t),$$

где $\eta_t = \xi_r$, если (c_t, c_{t+1}) содержится в интервале (x_r, x_{r+1}) (или совпадает с ним).

Если η_t лежит между c_t и c_{t+1}, то $f(k, \eta_t) = \omega_t^k$; пусть $t = t_1, t_2, \ldots, t_q$ — значения t, для которых (c_t, c_{t+1}) не содержит η_t. Так как интервал (c_t, c_{t+1}), который не содержит η_t, может появиться, только когда некоторое a_s^k попадает в интервал (x_r, x_{r+1}), то $q \leqslant b(k)$.

Таким образом,

$$\left|\sum_{t=0}^{p-1} F(k,\ \eta_t)(c_{t+1}-c_t)-\sum_{t=0}^{p-1}\omega_t^k(c_{t+1}-c_t)\right|=$$

$$=\left|\sum_{r=1}^{q-1}\{F(k,\ \eta_{t_r})-\omega_{t_r}^k\}(c_{t_r+1}-c_{t_r})\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2Mb(k)\cdot(b-a)/2M\cdot 10^k\cdot b(k)=(b-a)\cdot 0(k);$$

это завершает доказательство того, что

$$I_F(k,\ a,\ b)-\sum_{r=0}^{N-1}F(k,\ \xi_r)(x_{r+1}-x_r)=(b-a)\cdot 0(k).$$

Теорема 4.21. *Если $f(n, x)$ относительно интегрируема в (a, b), то $|f(n, x)|$ относительно интегрируема в $(a,\ b)$ и*

$$|I_f(n,\ a,\ b)|\leqslant I_{|f|}(n,\ a,\ b)\quad \textit{относительно } n.$$

Так как $f(n, x)$ относительно интегрируема, то $f(n, x)$ имеет линейчатый эквивалент $F(n,\ x)$ и, следовательно, $|f(n,\ x)|$ имеет линейчатый эквивалент $|F(n,\ x)|$. Более того,

$$\left|\sum v_r^n(a_{r+1}^n-a_r^n)\right|\leqslant\sum|v_r^n|(a_{r+1}^n-a_r^n),$$

откуда следует требуемый результат.

Теорема 4.22. *Если $f(n, x)$ относительно интегрируема в (a, b) и если c лежит между a и b, то $f(n, x)$ относительно интегрируема в $(a,\ c)$ и $(c,\ b)$ и*

$$I_f(n,\ a,\ c)+I_f(n,\ c,\ b)=I_f(n,\ a,\ b)\quad \textit{относительно } n.$$

Пусть $F(n, x)$ — линейчатый эквивалент $f(n, x)$ в (a, b); тогда разумеется $F(n, x)$ является линейчатым эквивалентом $f(n, x)$ в (a, c) и (c, b). Так как $I_F(n,\ a,\ c)+I_F(n,\ c,\ b)=I_F(n,\ a,\ b)$, то

$$I_f(n,\ a,\ c)+I_f(n,\ c,\ b)=I_f(n,\ a,\ b)+9(b-a)\cdot 0(n).$$

Теорема 4.23. *Если $f(n, x)$ и $g(n, x)$ относительно интегрируемы в (a, b), то $f(n, x)+g(n, x)$ тоже относительно интегрируема и*

$$I_f(n,\ a,\ b)+I_g(n,\ a,\ b)=I_{f+g}(n,\ a,\ b)\quad \textit{относительно } n.$$

Пусть F, G — линейчатые эквиваленты f, g; тогда $F+G$ — линейчатый эквивалент $f+g$ и

$$I_F(n,\ a,\ b)+I_G(n,\ a,\ b)=I_{F+G}(n,\ a,\ b).$$

Поэтому разность между $I_f(n,\ a,\ b)+I_g(n,\ a,\ b)$ и $I_{f+g}(n,\ a,\ b)$ равна $9(b-a)\cdot 0(n)$.

Теорема 4.3. *Если $f(n, x)=0$ при $a\leqslant x\leqslant b$ и $n\geqslant N$, где N не зависит от x, то $I_f(n, a, b)=0$ при $n\geqslant N$.*

Действительно, $f(n, x)$ линейчата и $\sum v_r^n(a_{r+1}^n-a_r^n)=0$ при $n\geqslant N$.

Теорема 4.31. *Если $f(n, x)$ относительно интегрируема в (a, b) и $f(n, x)\geqslant 0$ в (a, b), то*

$$I_f(n, a, b)\geqslant 0\quad \textit{относительно } n.$$

Пусть $F(n, x)$ — линейчатый эквивалент $f(n, x)$, так что

$$F(n, x)>-10^{-k}\ \text{для мажорантных } n,$$

и поэтому

$$F(k, x)>-2/10^k,$$

так что

$$I_F(k,\ a,\ b)>-2(b-a)/10^k$$

и, следовательно,

$$I_f(k,\ a,\ b)>-5(b-a)/10^k.$$

Аналогично, если $f(n, x)$ относительно интегрируема и

$$f(n, x)=0(k)\ \text{в}\ (a, b)\ \text{для мажорантных } n,$$

то

$$I_f(n,\ a,\ b)=5(b-a)\cdot 0(k)\ \text{для мажорантных } n.$$

Теорема 4.32. *Если $f(n, x)$ относительно интегрируема в $(a,\ b)$, то $I_f(n,\ a,\ x)$ относительно непрерывна в $(a,\ b)$.*

Если $F(n, x)$ — линейчатый эквивалент $f(n, x)$, то $|F(n, x)|$ ограничена, скажем, числом 10^p и, следова-

тельно, для любых x, X таких, что $a \leqslant x < X \leqslant b$, мы имеем

$$|I_F(n, x, X)| < 10^p (X - x) = 0(k) \quad \text{при} \quad X - x = 0(k + p);$$

но

$$\begin{aligned} I_f(n, a, X) - I_f(n, a, x) &= I_f(n, x, X) \quad \text{относительно } n, \\ &= I_F(n, x, X) \quad \text{относительно } n, \\ &= 2 \cdot 0(k) \quad \text{относительно } n \end{aligned}$$

при $X - x = 0(k + p)$.

Теорема 4.4. *Если $f(n, x)$ относительно непрерывна в (a, b), то функция $I_f(n, a, x)$ относительно дифференцируема в (a, b) с относительной производной $f(n, x)$.*

Пусть $a \leqslant t < T \leqslant b$ и $\varphi(n, x) = f(n, x) - f(n, t)$, так что если $T - t = 0(c(k))$ и $t \leqslant x \leqslant T$, то

$$\varphi(n, x) = 0(k) \text{ для мажорантных } n$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\{I_f(n, a, T) - I_f(n, a, t)\}/(T - t) - f(n, t) = \\ &\quad = \{I_\varphi(n, t, T) + 18(b - a) \cdot 0(n)\}/(T - t) = \\ &\quad\quad = 5 \cdot 0(k) + \{18(b - a)/(T - t)\} \cdot 0(n) = 6 \cdot 0(k) \end{aligned}$$

для мажорантных n (пользуемся теоремами 4.22 и 4.23).

Теорема 4.41. *Если $f(n, x)$ имеет относительную производную $f^1(n, x)$ в (a, b), то*

$$I_{f^1}(n, a, b) = f(n, b) - f(n, a) \quad \textit{относительно } n.$$

Действительно,

$$I^1_{f^1}(n, a, x) - f^1(n, x) = 0 \quad \text{относительно } n.$$

4.3. *Подстановка в относительный интеграл*

Теорема 4.5. *Пусть в интервале (t_0, t_1) функция $g(n, t)$ относительно дифференцируема с относительной производной $g^1(n, t)$ и $\alpha \leqslant g(n, t) \leqslant \beta$ для мажорантных n. Тогда если $f(n, x)$ относительно непрерывна при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и если $a = g(n, t_0)$, $b = g(n, t_1)$ относительно n, то*

$$I_f(n, a, b) = I_{fg \cdot g^1}(n, t_0, t_1) \quad \textit{относительно } n.$$

Из двух условий: (i) $g(n, t_0) = a$ относительно n, (ii) $g(n, t_0) \geqslant \alpha$ следует, что $a \geqslant \alpha$, и аналогично, что $b \leqslant \beta$, так что $f(n, x)$ непрерывна в (a, b) относительно n и $I_f(n, a, x)$ существует при $a \leqslant x \leqslant b$. Так как $fg(n, t)$ и $g^1(n, t)$ обе относительно непрерывны в (t_0, t_1), то интеграл $I_{fg \cdot g^1}(n, t_0, t)$ существует при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Обозначая $I_f(n, a, x)$ через $F(n, x)$, $Fg(n, t)$ через $G(n, t)$ и $I_{fg \cdot g^1}(n, t_0, t)$ — через $H(n, t)$, легко видеть, что

$$G^1(n, t) - H^1(n, t) = 0 \text{ относительно } n$$

и поэтому

$$G(n, t_1) - G(n, t_0) = H(n, t_1) \text{ относительно } n,$$

откуда, поскольку $G(n, t_0) = F(n, a)$ и $G(n, t_1) = F(n, b)$ относительно n, следует теорема.

4.4. *Относительно взаимно обратные функции*

Теорема 4.6. *Пусть при $0 \leqslant x \leqslant b$ функция $g(m, x)$ дифференцируема относительно m с относительной производной $1/\varphi g(m, x)$ и*

$$g(m, 0) = \alpha \leqslant g(m, x) \leqslant \beta \textit{ для мажорантных } m,$$

а при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ функция $\varphi(n, t)$ непрерывна относительно n и $\varphi(n, t) \geqslant 10^{-\mu}$ для мажорантных n. Тогда $g(n, x)$ и $I_\varphi(n, \alpha, t)$ являются взаимно обратными функциями относительно n.

Обозначим $I_\varphi(n, \alpha, t)$ через $f(n, t)$; тогда при $0 \leqslant x \leqslant b$ относительная производная от $fg(k, x)$ есть функция

$$\varphi g(k, x) \cdot g^1(k, x),$$

которая по предположению равна единице относительно k. Следовательно, при $0 \leqslant x \leqslant b$

4.41. $fg(k, x) = x$ относительно k и поэтому

$$f(n, g(m, x)) = x \text{ относительно } m, n;$$

по теореме 3.25 отсюда следует, что при $\alpha \leqslant t < g(m, x)$, мажорантных m и $x < b$ имеет место

4.42. $gf(k, t) = t$ относительно k.

Равенства 4.41 и 4.42 показывают, что f и g — относительно взаимно обратные функции.

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Относительно показательная, логарифмическая и круговые функции.

5. *Относительно показательная* функция $E(n, x)$ определяется рекурсией

$$E(0, x) = 1, \quad E(n+1, x) = E(n, x) + x^{n+1}/(n+1)!.$$

Функция $E(n, x)$ равномерно рекурсивно сходится в любом интервале, ибо если N — произвольное положительное целое и если $|x| \leqslant N$ и $n \geqslant 2N$, то

$$|E(n+r+1, x) - E(n+r, x)| \leqslant \{N^n/n!\}\, 2^{-(r+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \{N^{2N}/(2N)!\}\, 2^{-(n-2N)} \cdot 2^{-(r+1)} = \{(2N)^{2N}/(2N)!\}\, 2^{-n} \cdot 2^{-(r+1)},$$

так что при $m \geqslant n \geqslant 2N$

5.01. $|E(m, x) - E(n, x)| \leqslant K/2^n,$

где $K = (2N)^{2N}/(2N)!$.

Так как при $|x| \leqslant N$, $|X| \leqslant N$ мы имеем

5.02. $\left|\frac{X^r - x^r}{X - x}\right| \leqslant rN^{r-1},$

то

5.03. $\left|\frac{X^{n+1} - x^{n+1} - (X-x)(n+1)x^n}{(X-x)^2}\right| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{n} |x|^{n-r} \left|\frac{X^r - x^r}{X - x}\right| \leqslant N^{n-1} \sum_{r=1}^{n} r = n(n+1)(2N)^{n-1}/2^n.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(n+1)!}\left|\frac{X^{n+1} - x^{n+1}}{X - x} - (n+1)x^n\right| \leqslant \frac{K}{2^n}|X - x|,$$

поскольку $(2N)^r/r!$ строго возрастает вместе с r до максимума при $r = 2N$ и затем строго убывает, и поэтому, если

$$\frac{E(n+1, X) - E(n+1, x)}{X - x} - E(n, x) = F_n,$$

то

$$|F_n - F_{n-1}| < 2^n |X - x|,$$

но $F_0 = 0$ и, следовательно,

5.1. $|F_n| < K|X - x|,$

откуда вытекает, что $E(n, x)$ *дифференцируема относительно* n *с относительной производной* $E(n, x)$ *в любом интервале* $-N \leqslant x \leqslant N$.

Аналогично, относительная производная

$$E(n, -x) \cdot E(n, x + a)$$

равна нулю относительно n и поэтому

$$E(n, -x) \cdot E(n, x + a) = E(n, 0) \cdot E(n, a) = E(n, a)$$

относительно n; в частности,

$$E(n, -x) \cdot E(n, x) = 1$$

относительно n и, следовательно,

5.2. $E(n, x) \cdot E(n, a) = E(n, x + a)$

относительно n — это известное свойство показательной функции.

Из 5.1 также следует, что $E(n, x)$ непрерывна по x, равномерно по x и n из любого интервала $-N \leqslant x \leqslant N$.

В этом же интервале

5.21. $|E(n, x)| \leqslant \sum_{r=0}^{n} N^r/r! = \sum_{r=0}^{n} \frac{(2N)^r}{r!} \cdot \frac{1}{2^r} < 2K,$

где K взято из 5.01.

5.3. Обозначая обратную функцию $1/x$ через $R(n, x)$, мы определим *относительно логарифмическую* функцию $\log(n, x)$ как интеграл

$$\log(n, x) = I_R(n, 1, x), \quad x > 0.$$

Поэтому относительная производная от $\log(n, x)$ есть $1/x$. По теореме 4.22,

$I_R(n, 1, a) + I_R(n, a, ab) = I_R(n, 1, ab)$ относительно n,

а по теореме 4.5, беря at в качестве $g(n, t)$ и $R(n, x)$ в качестве $f(n, x)$, имеем

$$I_R(n, a, ab) = I_R(n, 1, b) \text{ относительно } n,$$

откуда следует, что

5.31. $\log(n, a) + \log(n, b) = \log(n, ab)$ относительно n.

5.4. Так как $E(n, x)$ является собственной относительной производной и

$$1/RE(n, x) = E(n, x),$$

то в любом интервале $(0, N)$ у $E(m, x)$ имеется относительная производная $1/RE(m, x)$, и, кроме того,

$$E(m, 0) = 1 \leqslant E(m, x) \leqslant E(m, N)$$

и при $1 \leqslant t \leqslant E(m, N)$ имеет место $R(n, t) \geqslant 1/2K$, так что по теореме 4.6 $E(m, x)$ и $\log(n, x)$ являются относительно взаимно обратными функциями, и при $0 \leqslant x \leqslant N$

5.41. $\log(n, E(m, x)) = x$ относительно m, n,

а при $1 \leqslant t \leqslant E(m, N)$ для мажорантных m мы имеем

5.42. $E(m, \log(n, t)) = t$ относительно n, m.

Так как N произвольно и $E(m, N)$ неограниченно растет с ростом N, то 5.41 выполняется для всех $x \geqslant 0$, а 5.42 выполняется для всех $t \geqslant 1$. Однако $E(m, -x) = 1/E(m, x)$ относительно m и $\log(n, 1/t) = -\log(n, t)$ относительно n, так что

$$\log(n, E(m, -x)) = -x \text{ относительно } m, n$$

для всех $x \geqslant 0$ и поэтому 5.41 фактически выполняется для всех x, положительных или отрицательных. Заменяя t на $1/t$ в 5.42, мы видим, что подобным же образом 5.42 выполняется и при $t < 1$ и, следовательно, для всех положительных значений t.

5.5. *Относительно круговые функции* $\sin(n, x)$, $\cos(n, x)$ определяются рекурсиями

$$\sin(0, x) = x,$$
$$\sin(n+1, x) = \sin(n, x) + (-1)^{n+1} x^{2n+3}/(2n+3)!,$$
$$\cos(0, x) = 1,$$
$$\cos(n+1, x) = \cos(n, x) + (-1)^{n+1} x^{2n+2}/(2n+2)!;$$

ясно, что $\sin(n, 0) = 0$, $\cos(n, 0) = 1$ при всех n.

Тот же анализ, что и для функции $E(n, x)$, показывает, что $\sin(n, x)$ и $\cos(n, x)$ дифференцируемы относительно n с относительными производными соответственно $\cos(n, x)$ и $-\sin(n, x)$. Одним из непосредственных следствий этого является то, что у функции

$$\sin^2(n, x) + \cos^2(n, x)$$

относительная производная есть нуль и поэтому

$$\sin^2(n, x) + \cos^2(n, x) = 1 \text{ относительно } n$$

для всех x.

Другим следствием является то, что относительная производная функции

$$\cos(n, c - x)\cos(n, x) - \sin(n, c - x)\sin(n, x)$$

есть нуль и поэтому

$$\cos(n, c) = \cos(n, c - x)\cos(n, x) - \sin(n, c - x)\sin(n, x)$$

относительно n или, взяв $x + y$ в качестве c, получим

5.51. $\cos(n, x + y) = \cos(n, x)\cos(n, y) - \sin(n, x)\sin(n, y)$

относительно n. Дифференцируя обе части этого равенства как функции x, мы находим

5.52. $\sin(n, x + y) = \sin(n, x)\cos(n, y) + \cos(n, x)\sin(n, y)$

относительно n, что доказывает формулы сложения.

5.6. Для использования в дальнейшем мы найдем грубые границы для $\sin(n, x)$ и $\cos(n, x)$.

При $0 < |x| \leqslant 4$ и $p \geqslant 1$ мы имеем

$$\{\cos(p+2, x) - \cos(p, x)\}/\{\cos(p+2, x) - \cos(p+1, x)\} = \\ = 1 - (2p+4)(2p+3)/x^2 < 0;$$

это показывает, что $\cos(p+2, x)$ лежит между $\cos(p, x)$ и $\cos(p+1, x)$, и поэтому при $n > p+1 \geqslant 2$ и $|x| \leqslant 4$ все $\cos(n, x)$ лежат между $\cos(p, x)$ и $\cos(p+1, x)$.

Аналогично, так как

$$\{\sin(p+2, x) - \sin(p, x)\}/\{\sin(p+2, x) - \sin(p+1, x)\} = \\ = 1 - (2p+4)(2p+5)/x^2 < 0$$

для той же области значений x и p, то $\sin(n, x)$ лежит между $\sin(p, x)$ и $\sin(p+1, x)$ при $n > p+1 \geqslant 1$ и $|x| \leqslant 4$. В частности, при $0 \leqslant x \leqslant 1{,}6$ функция $\sin(n, x)$ лежит между $\frac{1}{2}x$ и x для $n \geqslant 2$.

При $0 \leqslant x \leqslant 3{,}2$ мы имеем

$$-4{,}12 \leqslant \cos(1, x) \leqslant 1, \quad -0{,}5 \leqslant \cos(2, x) \leqslant 1,$$

и поэтому все $\cos(n, x)$, $n \geqslant 0$, лежат в интервале $(-4{,}12;\ 1)$.

Аналогично, при тех же x имеем $0 \leqslant \sin(0, x) \leqslant 3{,}2$ и

$$-2{,}2 < \sin(1, x) < 1,$$

и, следовательно, все $\sin(n, x)$, $n \geqslant 0$, лежат в интервале $(-2{,}2;\ 3{,}2)$. При $1 \leqslant x \leqslant 2$ имеем $\sin(0, x) \geqslant 1$ и $\sin(1, x) \geqslant 2/3$, так что

$$\sin(n, x) \geqslant 2/3 \text{ для всех } n.$$

Пусть дан произвольный полином

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant n} a_r x^r = g(x);$$

вводя обычное обозначение,

$$Dg(x) = \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} r a_r x^{r-1},$$

получаем в силу теорем 3.21 и 3.22, что если

$$a \leqslant x \leqslant b \to m \leqslant Dg(x) \leqslant M,$$

то

$$m \leqslant \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leqslant M$$

(то, что $g(x)$ равномерно рекурсивно дифференцируема, легко следует из 5.03).

Для фиксированного p, поскольку $D\cos(p, x) = -\sin(p-1, x)$ и $D\sin(p, x) = \cos(p, x)$, находим

$$D\{\sin^2(p, x) + \cos^2(p, x)\} = (-1)^p 2\cos(p, x) \cdot \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

и, следовательно, в интервале $0 \leqslant x \leqslant 3{,}2$

$$|D\{\sin^2(p, x) + \cos^2(p, x)\}| < 10 \cdot (3{,}2)^{2p+1}/(2p+1)! < 10^{-2p+20},$$

ибо

$$\frac{(3{,}2)^{31}}{31!} = \frac{1}{10^{31}} \cdot \frac{2^{155}}{31!} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{8} \cdot \ldots \\ \ldots \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{16}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{16}{31} \cdot \frac{2^{57}}{10^{31}} < \frac{(8)^{19}}{10^{31}} < \frac{1}{10^{12}}$$

и, следовательно,

$$\frac{(3{,}2)^r}{r!} = \frac{1}{10^r} \cdot \frac{(32)^r}{r!} \leqslant \frac{1}{10^r} \cdot \frac{(32)^{31}}{31!}, \quad r \geqslant 31$$

(на самом деле $(3{,}2)^{31}/(31)!$ много меньше, чем 10^{-12}, но эта граница вполне достаточна для наших целей), откуда следует, что

$$|\{\cos^2(p, x) - 1\} + \sin^2(p, x)| < (3{,}2)/10^{2p-20}.$$

При $x = 3{,}1$ мы имеем

$$\sin(5, x) > (3{,}1)\{1 - 1{,}602 + 0{,}769 - 0{,}176 + 0{,}023 - 0{,}002\} = \\ = 3{,}1 \times 0{,}012 > 0$$

и, следовательно, $\sin(4; 3{,}1) > 0$, и поэтому $\sin(n; 3{,}1) > 0$ при всех $n \geqslant 4$.

При $x = 3{,}2$ мы имеем

$$\sin(4, x) < (3{,}2)\{1 - 1{,}706 + 0{,}874 - 0{,}212 + 0{,}032\} = \\ = -(3{,}2) \times 0{,}012 < 0,$$

поэтому $\sin(3; 3{,}2) < 0$ и, следовательно, $\sin(n; 3{,}2) < 0$ для всех $n \geqslant 3$.

Между $x = 3{,}1$ и $x = 3{,}2$

$$\cos(4, x) < (1 + 4{,}37 + 0{,}28) - (4{,}80 + 1{,}23) < -1/3,$$

откуда $\cos(3, x) < -1/3$, и поэтому $\cos(n, x) < -1/3$ при всех $n \geqslant 3$; это доказывает, что при каждом n $\sin(n, x)$ строго убывает в интервале $(3{,}1;\ 3{,}2)$.

Пусть $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 31$, $\lambda_2 = 314$, $\lambda_3 = 3141$ и при $n \geqslant 4$ пусть λ_n — наименьшее целое между $31 \cdot 10^{n-1}$ и $32 \cdot 10^{n-1}$ такое, что

$$\sin(n, (\lambda_n + 1)10^{-n}) < 0$$

и $\sin(n, \lambda 10^{-n}) \geqslant 0$; λ_n примитивно рекурсивна. Полагая $\pi_n = \lambda_n 10^{-n}$, поскольку $D\sin(n, x) = \cos(n, x)$ и $|\cos(n, x)| < 5$ при $|x| \leqslant 3{,}2$, мы имеем

$$0 < \sin(n, \pi_n) - \sin(n, \pi_n + 10^{-n}) < 5 \cdot 10^{-n},$$

так что $0 < \sin(n, \pi_n) < 5 \cdot 10^{-n}$, и поэтому

$$-10^{16-2n} < \sin(n + 1, \pi_n) < 5 \cdot 10^{-n} + 10^{16-2n},$$

откуда $|\sin(N, \pi_n)| < 1/10^{n-1}$ для всех N, n таких, что $N \geqslant n \geqslant 16$.

Так как $|\cos(n, x)| \geqslant 1/3$ при $n \geqslant 3$ и $3{,}1 \leqslant x \leqslant 3{,}2$, то

$$\left| \frac{\sin(N, \pi_N) - \sin(N, \pi_n)}{\pi_N - \pi_n} \right| \geqslant \frac{1}{3}$$

и, следовательно,

$$|\pi_N - \pi_n| \leqslant 3(10^{1-n} + 10^{1-N}) < 1/10^{n-2};$$

это доказывает, что π_n примитивно рекурсивно сходится. Неравенство

$$m \geqslant n \geqslant 16 \rightarrow |\sin(m, \pi_n)| < 1/10^{n-1}$$

показывает, что $\sin(m, \pi_n) = 0$ относительно n, m и, в частности, $\sin(n, \pi_n) = 0$ относительно n.

Из соотношений

$$|\{\cos^2(p, x) - 1\} + \sin^2(p, x)| < 3{,}2/10^{2p-20},$$
$$N \geqslant n \geqslant 16 \rightarrow |\sin(N, \pi_n)| < 1/10^{1-n}$$

следует

$$N \geqslant n \geqslant 16 \rightarrow |\cos^2(N, \pi_n) - 1| < 1/10^{2n-21},$$

и поэтому, поскольку $|1 - \cos(N, \pi_n)| > 1$, то

$$|1 + \cos(N, \pi_n)| < 1/10^{2n-21}.$$

5.61. Из формулы сложения следует, что

$$2\cos^2\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n\right) = 1 + \cos(n, \pi_n) \quad \text{относительно } n,$$
$$= 0 \quad \text{относительно } n,$$

так что

$$\cos\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n\right) = 0 \quad \text{относительно } n,$$

и поэтому, поскольку $\sin(n, x) \geqslant 2/3$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$ и

$$\cos^2(n, x) + \sin^2(n, x) = 1 \quad \text{относительно } n,$$

то мы имеем

$$\sin\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n\right) = 1 \quad \text{относительно } n.$$

Кроме того,

$$\sin(n, 2\pi_n) = 2\sin(n, \pi_n)\cos(n, \pi_n) \quad \text{относительно } n,$$
$$= 0 \quad \text{относительно } n,$$
$$\cos(n, 2\pi_n) = \cos^2(n, \pi_n) - \sin^2(n, \pi_n) \quad \text{относительно } n,$$
$$= 1 \quad \text{относительно } n,$$

откуда мы находим

$$\sin(n, x + 2\pi_n) = \sin(n, x)\cos(n, 2\pi_n) + \\ + \cos(n, x)\sin(n, 2\pi_n) \quad \text{относительно } n,$$
$$= \sin(n, x) \quad \text{относительно } n$$

и

$$\cos(n, x + 2\pi_n) = \cos(n, x)\cos(n, 2\pi_n) - \\ - \sin(n, x)\sin(n, 2\pi_n) \quad \text{относительно } n,$$
$$= \cos(n, x) \quad \text{относительно } n;$$

это доказывает, что $\sin(n, x)$ и $\cos(n, x)$ относительно периодичны с относительным периодом $2\pi_n$.

Так как $\cos\left(n, \frac{1}{2}\pi_n - x\right) = \sin(n, x)$ относительно n, то если $0 < x \leqslant 1{,}6$, то

$$\cos\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n - x\right) > \tfrac{1}{3}x \text{ для мажорантных } n.$$

5.7. В приложении доказано, что рекурсивное вещественное число (π_n) примитивно рекурсивно трансцендентно, откуда следует, что имеется примитивно рекурсивная n_p такая, что

$$\pi_{p+n_p} \geqslant \pi_p + 1/10^{p+n_p};$$

мы используем этот результат в следующем разделе.

5.71. Если $|x| \leqslant \frac{1}{2}\pi_k$ при некотором k, то

$$\cos(n, x) = \cos\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n - \left(\tfrac{1}{2}\pi_n - x\right)\right) > \tfrac{1}{6}(\pi_n - \pi_k) > 1/10^l$$

при некотором l и мажорантных n.

Следовательно, функция

$$\tan(n, x) = \sin(n, x)/\cos(n, x)$$

определена при $|x| \leqslant \frac{1}{2}\pi_k$, ограничена сверху числом 10^l при некотором l, которое примитивно рекурсивно зависит от k, и дифференцируема относительно n с относительной производной $1 + \tan^2(n, x)$.

Полагая $\varphi(n, t) = 1/(1 + t^2)$, мы видим, что $\varphi(n, t)$ относительно интегрируема, а ее относительный интеграл от 0 до t обозначается через $\arctan(n, t)$. По теореме 4.6 $\tan(n, t)$ и $\arctan(n, t)$ являются относительно взаимно обратными функциями при $|x| \leqslant \frac{1}{2}\pi_k$.

5.72. $\arctan(n, \tan(m, x)) = x$ относительно m, n и

5.73. $\tan(m, \arctan(n, t)) = t$ относительно n, m, если

$$0 \leqslant t \leqslant \tan(m, x) \text{ при мажорантных } m.$$

При $0 < x < 1$ и мажорантных n

$$\cos\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n - x\right) = \sin(n, x) < 2x,$$

$$\sin\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n - x\right) = \cos(n, x) > \tfrac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\tan\left(n, \tfrac{1}{2}\pi_n - x\right) > \frac{1}{4x};$$

в частности, $\tan\left(n, \frac{1}{2}\pi_n - \frac{1}{n}\right)$ стремится к ∞, когда n стремится к ∞, так что 5.73 выполняется при всех значениях t.

5.8. Функция $\arcsin(n, x)$ определяется рекурсией

$$\arcsin(0, x) = x,$$

$$\arcsin(n, x) = \arcsin(n-1, x) + \frac{(2n)!}{\{2^n n!\}^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Функция $\arcsin(n, x)$ рекурсивно сходится при $|x| \leqslant 1$ и в любом замкнутом интервале I, лежащем внутри интервала $-1 < x < 1$, производная от $\arcsin(n, x)$ равномерно сходится; мы обозначим эту производную через $\rho(n, x)$ и заметим, что в I функция $\rho(n, x)$ тоже дифференцируема с равномерно сходящейся производной, скажем, $\sigma(n, x)$.

Так как

$$x \cdot \rho(n, x) - (1 - x^2) \cdot \sigma(n, x) = \frac{(2n+1)!}{\{2^n \cdot n!\}^2}\, x^{2n+1},$$

то при $|x| < 1$.

$$x \cdot \rho(n, x) = (1 - x^2) \cdot \sigma(n, x) \text{ относительно } n.$$

Пусть $|x| \leqslant \frac{1}{2}\pi_K$ при некотором K; тогда имеется N такое, что

$$|x| \leqslant \tfrac{1}{2}\pi_N - 1/2^{N+1},$$

и, следовательно,

$$|\sin(N, x)| \leqslant \cos(N, 1/2^{N+1}) \text{ относительно } N,$$
$$< 1 - 1/3 \cdot 2^{2N+2} \text{ для мажорантных } N,$$

и поэтому

$$\sin(m, x) \cdot \rho(n, \sin(m, x)) =$$
$$= \cos^2(m, x) \cdot \sigma(n, \sin(m, x)) \text{ относительно } m, n;$$

отсюда следует, что

$$\rho(n, \sin(m, x))\cos(m, x) = 1 \text{ относительно } m, n$$

при $|x| \leqslant \frac{1}{2}\pi_K$, а отсюда в свою очередь — что

$$\arcsin(n, \sin(m, x)) = x \text{ относительно } m, n.$$

Так как $\rho(n, x) \geqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то из теоремы 3.25 следует, что при $|x| < 1$

$$\sin(m, \arcsin(n, x)) = x \text{ относительно } n, m;$$

это завершает доказательство того, что $\sin(m, x)$ и и $\arcsin(n, l)$ являются относительно взаимно обратными функциями.

ГЛАВА VI

ТРАНСФИНИТНЫЕ ОРДИНАЛЫ

6. В этой главе мы построим некоторую часть теории трансфинитных ординалов в рамках рекурсивной арифметики. В основе построения лежит идея представления целого числа в системе счисления. Последовательность натуральных чисел, записанная в системе с основанием 3,

$$0, 1, 2, 3, 3+1, 3+2, 2\cdot 3, 2\cdot 3+1, \ldots$$
$$\ldots, 3^2, \ldots, 3^{2\cdot 3+2}, \ldots, 3^{3^2}, \ldots, 3^{3^3}, \ldots,$$

имеет очевидную аналогию с последовательностью трансфинитных ординалов

$$0, 1, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^{2\omega+2}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$$

Мы используем эту аналогию в следующем определении.

6.1. С помощью сложения, умножения и возведения в степень любое целое n можно однозначно представить в виде

$$c_k s^{a_k} + c_{k-1} s^{a_k - 1} + \ldots + c_2 s^{a_2} + c_1 s^{a_1} + c_0,$$

где $s \geqslant 2$, $0 \leqslant c_0 < s$, $0 < c_1, c_2, \ldots, c_k < s$, $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ и каждое a_i само представлено в таком же виде. Если $R_s(n)$ обозначает такое представление n с основанием s, то $R_s(n)$ удовлетворяет рекурсивному равенству

$$R_s(n) = cs^{R_s(a)} + R_s(n - cs^a),$$

где a — показатель наибольшей степени s, которая не превосходит n, а cs^a — наибольшее кратное s^a, не превосходящее n.

Мы определяем $T^m_\omega(n)$ как выражение, получающееся подстановкой «ω» вместо «m» в представление n в системе с основанием m. Например, $T^3_\omega(103)$ — это ординал $\omega^{\omega+1} + 2\omega^2 + \omega + 1$, ибо $103 = 3^{3+1} + 2 \cdot 3^2 + 3 + 1$. Каждый

ординал, меньший первого ε-числа (любое ε-число удовлетворяет уравнению $\omega^\varepsilon = \varepsilon$), выразим в виде $T^m_\omega(n)$, где m — произвольное целое, большее, чем все целые числа в таком представлении этого ординала; например, исходя из ординала

$$\Omega = \omega^{\omega^2} + 7\omega^\omega + 11\omega^{17} + 21,$$

мы можем заменить ω любым целым $m > 21$, образуя

$$n = m^{m^2} + 7m^m + 11m^{17} + 21,$$

и тогда $\Omega = T^m_\omega(n)$.

При обычном определении неравенства между ординалами, $\Omega_1 < \Omega_2$ тогда и только тогда, когда это неравенство выполняется при замене в Ω_1 и Ω_2 знака ω на любое достаточно большое целое.

Однако для последующего важно не представление числа в некоторой системе счисления, а преобразование одного числа в другое с помощью изменения системы. Например, число 34 представляется в системе с основанием 3 как $3^3 + 2\cdot 3 + 1$, а изменяя основание 3 на 4 (и оставляя цифры 0, 1, 2 неизменными), приходим к числу $4^4 + 2\cdot 4 + 1 = 265$, так что при изменении основания системы с 3 на 4 число 34 преобразовалось в 265. Формально мы определяем $T^a_b(n)$ — результат преобразования n при изменении основания системы счисления с a на b, $b \geqslant a$, — следующим образом.

Пусть q — показатель наибольшей степени a, содержащейся в n, и пусть pa^q — наибольшее кратное a^q, содержащееся в n, так что p и q являются примитивно рекурсивными функциями a и n, $a \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. При $b \geqslant a \geqslant 2$ мы полагаем

$$T^a_b(0) = 0,$$

$$T^a_b(n) = pb^{T^a_b(q)} + T^a_b(n - pa^q), \quad n \geqslant 1;$$

это определение является возвратной рекурсией, так что $T^a_b(n)$ — примитивно рекурсивная функция.

Для образования ординала, большего, чем некоторое $T^m_\omega(n)$, мы берем $T^M_\omega(N)$ такое, что целые, получаемые подстановкой достаточно больших целых i вместо ω, скажем, $T^m_i(n)$ и $T^M_i(N)$, удовлетворяют неравенству

$$T^m_i(n) < T^M_i(N)$$

при $i \geqslant m$, $i \geqslant M$; тогда, если $m \geqslant M$, то мы видим, что $T^m_\omega(n) < T^M_\omega(N)$ тогда и только тогда, когда имеет место $T^M_m(N) > T^m_m(n) = n$, т. е. $n < T^M_m(N)$.

Таким образом, убывающая последовательность ординалов принимает вид

$$T^{m_1}_\omega(n_1),\ T^{m_2}_\omega(n_2),\ T^{m_3}_\omega(n_3),\ \ldots,\ T^{m_r}_\omega(n_r),\ \ldots,$$

где

$$m_{r+1} \geqslant m_r \quad \text{и} \quad n_{r+1} < T^{m_r}_{m_{r+1}}(n_r) \quad \text{при} \quad r \geqslant 1.$$

Для данной последовательности $m_1, m_2, m_3, \ldots$ мы получаем наиболее длинную убывающую последовательность ординалов, полагая $n_{r+1} = T^{m_r}_{m_{r+1}}(n_r) \dot{-} 1$, ибо $T^m_\omega(n) = 0$ тогда и только тогда, когда $n = 0$, а $T^{m_r}_{m_{r+1}}(n) < T^{m_r}_{m_{r+1}}(N)$ тогда и только тогда, когда $n < N$.

Генцен доказал, что *трансфинитная* индукция до любого ε-числа не сводима к обычной индукции, и поэтому теорема об убывающей последовательности ординалов, которая утверждает, что всякая такая последовательность конечна, и которая эквивалентна трансфинитной индукции, не сводима, но трансфинитная индукция до любого ординала, меньшего, чем первое ε-число, *сводима* к обычной индукции в достаточно богатой системе, вроде системы Z.

Может ли это сведéние быть выполнено в некоторой формализации рекурсивной арифметики для всех ординалов, меньших, чем первое ε-число, или нет — это пока открытый вопрос, но мы установим этот результат для ординалов, не бóльших, чем «ω^{ω^ω}».

В силу взаимосвязи, которая была установлена между трансфинитными ординалами и представлением чисел в системе счисления, теорема об убывающей последовательности для ординалов, меньших первого ε-числа, эквивалентна следующему утверждению F^*:

6.2. *Пусть дана произвольная неубывающая функция p_r такая, что $p_0 \geqslant 2$, и функция n_r с начальным значением n_0, определяемая примитивной рекурсией*

$$n_{r+1} = T^{p_r}_{p_{r+1}}(n_r) \dot{-} 1;$$

тогда имеется значение r, для которого $n_r = 0$.

Мы начнем с замечания о том, что это высказывание является простым следствием теоремы F:

Если $m_{r+1} = T^{p_r}_{p_{r+1}}(m_r \dot{-} 1)$, то имеется значение r, для которого $m_r = 0$.

Действительно, если $m_r > 0$, $r \leqslant s$, и $m_{s+1} = 0$, то, полагая $n_0 = m_0 \dot{-} 1$, если $n_k = m_k \dot{-} 1$ для некоторого k, мы находим, что

$$n_{k+1} = T^{p_k}_{p_{k+1}}(n_k) \dot{-} 1 = T^{p_k}_{p_{k+1}}(m_k \dot{-} 1) \dot{-} 1 = m_{k+1} \dot{-} 1,$$

откуда по индукции $n_r = m_r \dot{-} 1$ для всех r и поэтому $n_{s+1} = 0$.

Мы начнем с доказательства F для случая $m_0 < p_0^{p_0}$, что эквивалентно доказательству теоремы об ординалах для ординалов $\leqslant \omega^\omega$.

Пусть $\sigma(n)$ — неубывающая функция, $\sigma(n) \geqslant 2$; система рекурсивной арифметики, в которой следующее доказательство может быть формализовано, будет зависеть от природы $\sigma(n)$, и поэтому мы будем предполагать, что $\sigma(n)$ определена кратной рекурсией или, на худой конец, трансфинитной рекурсией типа ω [1]).

Пусть функция $\gamma(a, b, c, n)$ определяется примитивной рекурсией

$$\gamma(a, b, c, 0) = (a+1)\{\sigma(c)\}^b,$$
$$\gamma(a, b, c, n+1) = T^{\sigma(n+c)}_{\sigma(n+c+1)}\{\gamma(a, b, c, n) \dot{-} 1\}$$

и пусть $f(x, p, n)$ определяется двойной рекурсией с подстановкой вместо параметра

$$f(0, 0, n) = 1, \qquad \text{(i)}$$
$$f(x+1, p, n) = \varphi(x, p, f(0, p, n), n), \qquad \text{(ii)}$$
$$f(0, p+1, n) = \varphi(\sigma(n) \dot{-} 1, p, f(0, p, n), n), \qquad \text{(iii)}$$

[1]) См. Р. Петер [1].

где

$$\varphi(a, b, c, d) = c + f(a, b, c+d).$$

Функция $f(x, p, n)$ считает число членов в последовательности $\gamma(x, p, n, r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, до (не обязательно первого) нуля. Действительно, мы докажем, что: при $x, p < \sigma(n)$ и $k \geqslant f(x, p, n)$

$$\gamma(x, p, n, k) = 0.$$

Обозначим это высказывание через $\mathfrak{F}(x, p, n)$. В силу равенства (i) выполняется $\mathfrak{F}(0, 0, n)$, а в силу равенства (ii)

$$\mathfrak{F}(0, p, n) \,\&\, \mathfrak{F}(x, p, n + f(0, p, n)) \to \mathfrak{F}(x+1, p, n),$$

ибо, начиная с $(x+2)\{\sigma(n)\}^p = (x+1)\{\sigma(n)\}^p + \{\sigma(n)\}^p$ при $x + 2 < \sigma(n)$ мы достигаем $(x+1)\{\sigma(n + f(0, p, n))\}^p$ за $f(0, p, n)$ шагов и, следовательно, мы доходим до нуля за следующие $f(x, p, n + f(0, p, n))$ шагов по предположению.

Более того, начиная с

$$\{\sigma(n)\}^{p+1} = \{\sigma(n) \dot{-} 1\}\{\sigma(n)\}^p + \{\sigma(n)\}^p, \quad p+1 < \sigma(n),$$

если $\mathfrak{F}(0, p, n)$ и $\mathfrak{F}(\sigma(n) \dot{-} 1, p, n + f(0, p, n))$ выполняются, то в силу равенства (iii) имеет место $\mathfrak{F}(0, p+1, n)$. Следовательно, доказуемы

$$\mathfrak{F}(0, 0, n),$$
$$\mathfrak{F}(0, p, n) \,\&\, \mathfrak{F}(x, p, n + f(0, p, n)) \to \mathfrak{F}(x+1, p, n),$$
$$\mathfrak{F}(0, p, n) \,\&\, \mathfrak{F}(\sigma(n) \dot{-} 1, p, n + f(0, p, n)) \to \mathfrak{F}(0, p+1, n),$$

а отсюда мы можем вывести $\mathfrak{F}(x, p, n)$ с помощью обобщенной индукции [1]), доказав тем самым теорему F для $m_0 < p_0^{p_0}$.

Распространение на случай $m_0 = p_0^{p_0}$ делается просто. Обозначая $\sigma(n)$ через σ, $\sigma(n) \dot{-} 1$ через σ_1 и учитывая, что

$$\sigma^\sigma = \sigma_1 \sigma^{\sigma_1} + \sigma^{\sigma_1},$$

[1]) Формальные детали этого вывода имеются в доказательстве по П. Бернайсу в статье автора [1].

имеем, что последовательность $\delta(n, r)$ такая, что

$$\delta(n, 0) = \sigma^{\sigma},$$

$$\delta(n, r+1) = T^{\sigma}_{\sigma(n+r+1)}\{\delta(n, r) \dot{-} 1\},$$

доходит до нуля не более чем за

$$f(0, \sigma_1, n) + f(\sigma_1, \sigma_1, n + f(0, \sigma_1, n)) = f(0, \sigma_1, n)$$

шагов, ибо $f(0, \sigma_1, n)$ шагов приводят от $\sigma_1\sigma^{\sigma_1} + \sigma^{\sigma_1}$ к $\sigma_1\{\sigma(n + f(0, \sigma_1, n))\}^{\sigma_1}$ и следующие $f(\sigma_1, \sigma_1, n + f(0, \sigma_1, n))$ шагов приводят к нулю.

Далее рассмотрим последовательность $\varepsilon(x, y, z, n, r)$ такую, что

$$\varepsilon(x, y, z, n, 0) = (x+1)\{\sigma(n)\}^{y+z\sigma(n)},$$

$$\varepsilon(x, y, z, n, r+1) = T^{\sigma}_{\sigma(n+r+1)}\{\varepsilon(x, y, z, n, r) \dot{-} 1\}.$$

Определим функцию $f(x, y, z, n)$ тройной рекурсией с подстановкой вместо параметра:

$$f(0, 0, 0, n) = 1, \tag{iv}$$

$$f(x+1, x, y, n) = \varphi(x, y, z, f(0, y, z, n), n), \tag{v}$$

$$f(0, y+1, z, n) = \varphi(\sigma(n) \dot{-} 2, y, z, f(0, y, z, n), n), \tag{vi}$$

$$f(0, 0, z+1, n) =$$

$$= \varphi(\sigma(n) \dot{-} 2, \sigma(n) \dot{-} 1, z, f(0, \sigma(n) \dot{-} 1, z, n), n), \tag{vii}$$

где

$$\varphi(x, y, z, c, n) = c + f(x, y, z, c+n),$$

и пусть $\mathfrak{F}(x, y, z, n)$ утверждает следующее:
если $x, y, z < \sigma(n)$ и $k = f(x, y, z, n)$, то $\varepsilon(x, y, z, n, k) = 0$.

Равенство (iv) показывает, что $\mathfrak{F}(0, 0, 0, n)$ выполняется.

Так как $(x+2)\sigma^p = (x+1)\sigma^p + \sigma^p$, то если $f(0, y, z, n)$ шагов приводят от $\sigma^{y+z\sigma}$ до нуля и $f(x, y, z, n)$ шагов приводят от $(x+1)\sigma^{y+z\sigma}$ до нуля, в силу равенства (v) требуется $f(x+1, y, z, n)$ шагов для перехода от $(x+2)\sigma^{y+z\sigma}$ до нуля, что доказывает

$$\mathfrak{F}(0, y, z, n) \,\&\, \mathfrak{F}(x, y, z, n + f(0, y, z, n)) \to$$

$$\to \mathfrak{F}(x+1, y, z, n); \tag{viii}$$

кроме того,

$$\sigma^{(y+1)+z\sigma} = \sigma_1\sigma^{y+z\sigma} + \sigma^{y+z\sigma}$$

и, следовательно, в силу равенства (vi)

$$\mathfrak{F}(0, y, z, n) \,\&\, \mathfrak{F}(\sigma_1 \dot{-} 1, y, z, n + f(0, y, z, n)) \to$$

$$\to \mathfrak{F}(0, y+1, z, n). \tag{ix}$$

Наконец, из

$$\sigma^{(z+1)\sigma} = \sigma_1\sigma^{\sigma_1+z\sigma} + \sigma^{\sigma_1+z\sigma}$$

и равенства (vii) мы выводим

$$\mathfrak{F}(0, \sigma_1, z, n) \,\&\, \mathfrak{F}(\sigma_1 \dot{-} 1, \sigma_1, z, n + f(0, \sigma_1, z, n)) \to$$

$$\to \mathfrak{F}(0, 0, z+1, n). \tag{x}$$

Из доказанной формулы $\mathfrak{F}(0, 0, 0, n)$ и (viii), (ix), (x) мы выводим

$$\mathfrak{F}(x, y, z, n),$$

применяя обобщенную схему индукции, которая тоже сводима к обычной индукции.

Аналогичное доказательство [1]) устанавливает теорему F для последовательности с начальным членом

$$(x+1)\{\sigma(n)\}^{y_0 + y_1\sigma(n) + y_2\{\sigma(n)\}^2 + \ldots + y_j\{\sigma(n)\}^j}$$

при любом конкретном целом j и, следовательно, для последовательности с начальным членом $\sigma^{\sigma^{\sigma}}$, что равносильно доказательству теоремы об убывающей последовательности ординалов, меньших или равных $\omega^{\omega^{\omega}}$. Этот метод доказательства, очевидно, пригоден и для ординалов, лежащих за $\omega^{\omega^{\omega}}$, но для получения доказательства для общего ординала Ω_n, где $\Omega_0 = \omega$, $\Omega_{n+1} = \omega^{\Omega_n}$, может оказаться необходимым совсем другой подход.

Если $f(n)$ — ординальная рекурсивная функция типа Ω, так что значение $f(0)$ дано и

$$f(n) = \varphi(n, f(\lambda(n))),$$

где φ примитивно рекурсивна и $\lambda(n)$ — предшественник n в примитивно рекурсивном упорядочении

[1]) Гудстейн [1], стр. 36.

натуральных чисел типа Ω, то кажется вероятным, что имеет место следующий результат (гипотеза T). Если R^+ — формализация рекурсивной арифметики, которая допускает определение с помощью ординальной рекурсии по ординалам Ω, меньшим первого ε-числа, то число членов в убывающей последовательности ординалов, меньших или равных ω^Ω, вычисляется с помощью ординально рекурсивной функции с ординалом ω^α, где $\alpha < \Omega$ *).

Теорема об убывающей последовательности ординалов, очевидно, непосредственно используется в определении с помощью ординальной рекурсии, ибо построение последующих значений $f(n)$, определенной равенством

$$f(n) = \varphi(n, f(\lambda(n))),$$

требует, чтобы последовательность $\lambda(n)$, $\lambda(\lambda(n))$, $\lambda(\lambda(\lambda(n)))$, ... достигала 0 за определенное число шагов, определяемое, конечно, функцией, которая или примитивно рекурсивна или ординально рекурсивна с ординалом, меньшим ординала самой f.

Недавний [1]) еще не опубликованный результат Алонзо Черча наводит на мысль, что гипотеза T может быть ложной при определенных способах представления убывающих последовательностей ординалов в рекурсивной арифметике, так что особенности той интерпретации теоремы об убывающей последовательности ординалов, которая была принята выше, могут оказаться необходимыми для истинности гипотезы T.

6.3. Далее мы рассмотрим распространение изложенного выше рекурсивного представления ординалов за первое ε-число. В главе I мы воспользовались идеей мажорантных переменных и отношений, которые выполнялись только для мажорантных переменных, т. е. для достаточно больших значений этих переменных. В этом разделе мы будем обозначать мажорантные переменные через ω, ω_r, где $r \geqslant 1$. Мы напомним, что о примитивно

*) Это утверждение доказано В. Тейтом (Tait W. W., Nested recursion. Math. Ann. **143**, № 3 (1961), 236—250). — *Прим. ред.*

[1]) Доложенный на Международном Конгрессе математиков в Эдинбурге, 1958 г.

рекурсивном отношении $R(n_0, n_1, \ldots, n_k)$, для которого существует константа c_0 и примитивно рекурсивные функции

$$c_{r+1}(n_0, n_1, \ldots, n_r), \quad r = 0, 1, \ldots, k-1,$$

такие, что

$$R(n_0, n_1, \ldots, n_r, \ldots, n_k)$$

выполняется для всех $n_0, n_1, \ldots, n_k$, удовлетворяющих неравенствам

$$n_0 \geqslant c_0, \quad n_{r+1} \geqslant c_{r+1}(n_0, n_1, \ldots, n_r), \quad 0 \leqslant r \leqslant k,$$

говорят, что оно имеет место для мажорантных $n_0, n_1, \ldots, n_k$.

Если $R(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ имеет место для мажорантных $n_0, n_1, \ldots, n_k$, то мы пишем

$$R(\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k).$$

Например, пусть даны конкретные цифры a, b, c; имеем

$$\omega^\omega > a\omega^b + c,$$

ибо $n^n > an^b + c$, если $n > \max(a, b, c)$.

Пример с двумя мажорантными переменными:

$$\omega_1 > \omega^{\omega^\omega},$$

который выполняется, поскольку $N > n^{n^n}$ при всех n и всех N, удовлетворяющих соотношениям

$$N > c_1(n) = n^{n^n}.$$

Другой пример с двумя мажорантными переменными:

$$\omega\omega_1^\omega + \omega^\omega + 5 > \omega^\omega\omega_1^2 + \omega^{\omega\omega},$$

который имеет место, поскольку

$$nN^n + n^n + 5 > n^nN^2 + n^{n^n}$$

при любых $n \geqslant 3$ и $N \geqslant n^{n^n}$.

6.4. Мы начнем с обобщения понятия числа, представленного в некоторой системе счисления с выделенным множеством цифр.

Пусть $f(x)$ — рекурсивная функция такая, что

$$f(0)=0,\quad f(1)=1 \quad \text{и} \quad f(x+1)\geqslant f(x)+1$$

для всех x, и пусть $(k+1)^a$ — наибольшая степень $k+1$, которая не превосходит n, а $c(k+1)^a$ — наибольшее кратное $(k+1)^a$, не превосходящее n.

Тогда мы определяем функцию $\varphi^f_{k,\sigma}$ следующей рекурсией:

$$\varphi^f_{k,\sigma}(0)=0,$$

$$\varphi^f_{k,\sigma}(n)=f(c)\,\sigma^{\varphi^f_{k,\sigma}(a)}+\varphi^f_{k,\sigma}(n-c(k+1)^a),\quad n\geqslant 1.$$

Эти равенства определяют $\varphi^f_{k,\sigma}(n)$ как функцию от

$$\sigma,\ f(0),\ f(1),\ \ldots,\ f(k);$$

мы называем $\varphi^f_{k,\sigma}(n)$ представлением числа n с «цифрами» $f(r)$, $0\leqslant r\leqslant k$, и базой σ. Например,

$$\varphi^f_{4,\sigma}(10^4)=f(3)\,\sigma^{\sigma}+\sigma^{f(4)}.$$

Когда функция f содержит более чем один аргумент, тогда та переменная, которая используется при построении φ, будет помещаться на последнее место. Если i — тождественная функция $i(x)=x$, то $\varphi^i_{k,k+1}(n)$ будет обычным разложением n по основанию $k+1$ с цифрами $0, 1, 2, \ldots, k$.

Прежде всего мы заметим, что

6.5. $\varphi^f_{k,\sigma}(r)=f(r)$, если $r\leqslant k$.

Действительно, $r=r(k+1)^0$ и, следовательно, $\varphi^f_{k,\sigma}(r)=f(r)\,\sigma^{\varphi^f_{k,\sigma}(0)}+\varphi^f_{k,\sigma}(0)=f(r)$. Аналогично,

$$\varphi^f_{k,\sigma}(k+1)=\sigma.$$

6.51. При фиксированном $k\geqslant 1$ и фиксированном $s\geqslant f(k)+1$ функция $\varphi^f_{k,s}(n)$ строго возрастает по n. Обозначим $\varphi^f_{k,s}(n)$ через $\varphi(n)$, тогда нам надо доказать $\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)+1$.

Если $n\leqslant k$, то это следует из 6.5, ибо $f(n+1)\geqslant f(n)+1$; допустим, что

$$\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)+1$$

выполняется при $n\leqslant m-1$, где $m\geqslant k+1$. Пусть c — показатель наибольшей степени $k+1$, не превосходящей m, пусть b — наибольшее целое такое, что $b(k+1)^c\leqslant m$, и пусть $a=m-b(k+1)^c$, так что $0\leqslant a<(k+1)^c$, $1\leqslant b<k+1$ и $1\leqslant c$. Тогда по определению

$$\varphi(m)=f(b)\,s^{\varphi(c)}+\varphi(a).$$

Рассмотрим по очереди случаи: $a=0$, $0<a<(k+1)^c-1$, $a+1=(k+1)^c$ и $b+1<k+1$ и, наконец, $a+1=(k+1)^c$, $b=k$.

Когда $a=0$, тогда $\varphi(a)=0$ и, следовательно,

$$\varphi(m+1)=f(b)\,s^{\varphi(c)}+1=\varphi(m)+1.$$

Когда $0<a<(k+1)^c-1$, тогда

$$\varphi(m+1)=f(b)\,s^{\varphi(c)}+\varphi(a+1)\geqslant f(b)\,s^{\varphi(c)}+\varphi(a)+1=$$
$$=\varphi(m)+1,$$

ибо $a+1<(k+1)^c\leqslant m-1$ влечет $\varphi(a+1)\geqslant\varphi(a)+1$ по предположению.

Когда $a+1=(k+1)^c$ и $b+1<k+1$, тогда

$$\varphi(m+1)=$$
$$=f(b+1)\,s^{\varphi(c)}\geqslant f(b)\,s^{\varphi(c)}+s^{\varphi(c)}\geqslant f(b)\,s^{\varphi(c)}+\varphi(a)+1=$$
$$=\varphi(m)+1,$$

ибо неравенство $a+1=(k+1)^c<m$ влечет $1+\varphi(a)\leqslant\varphi(a+1)=s^{\varphi(c)}$.

Наконец, когда $a+1=(k+1)^c$ и $b=k$, мы имеем

$$\varphi(m+1)=\varphi\left(\{k+1\}^{c+1}\right)=$$
$$=s^{\varphi(c+1)}\geqslant s^{\varphi(c)}\cdot s\geqslant f(b)\,s^{\varphi(c)}+\varphi(a)+1=\varphi(m)+1$$

при $m>(k+1)^c\geqslant 1+ck\geqslant 1+c$, так что по предположению

$$\varphi(c+1)\geqslant\varphi(c)+1,$$

и, более того, $s\geqslant f(b)+1$ и $a+1=(k+1)^c<m$, так что

$$s^{\varphi(c)}=\varphi(a+1)\geqslant\varphi(a)+1.$$

Таким образом, это неравенство выполняется при $n \leqslant k$, и если оно выполняется при $n = m - 1$, то оно выполняется также при $n = m$, следовательно, по индукции, оно выполняется для всех n.

6.511. В частности, полагая $f(x) = i(x) = x$, мы видим, что при $s > k \geqslant 1$ функция $\varphi^{i}_{k,\,s}(n)$ строго возрастает по n, а полагая

$$f(x) = f^{i}(x) = \varphi^{i}_{p,\,q+1}(x),$$

получаем, что если $q \geqslant p \geqslant 1$ и если $s > f^{i}(k)$, то $\varphi^{f^{i}}_{k,\,s}(n)$ строго возрастает по n.

6.52. Если $f(x)$ и $g(x)$ — строго возрастающие функции и если $h(x) = f(g(x))$, $p \geqslant g(q)$ и $s > f(p)$, то при $q \geqslant 1$ и всех n

6.521. $\varphi^{f}_{p,\,s}\{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(n)\} = \varphi^{h}_{q,\,s}(n)$.

При $n = 0$ обе части равенства 6.521 равны нулю; предположим, что это равенство выполняется при $n = 0, 1, \ldots, m-1$. Пусть a и c — наибольшие целые (a выбирается первым) такие, что $c(q+1)^{a} \leqslant m$ и

$$b = m - c(q+1)^{a};$$

тогда $c < q+1$, $b < (q+1)^{a}$ и $m < (q+1)^{a+1}$. Следовательно,

$$\varphi^{g}_{q,\,p+1}(m) = g(c)\,(p+1)^{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)} + \varphi^{g}_{q,\,p+1}(b) <$$

$$< g(c)\,(p+1)^{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)} + (p+1)^{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)} =$$

(в силу 6.51, ибо $b < (q+1)^{a}$)

$$= \{g(c)+1\}\,(p+1)^{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)} < (p+1)^{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)+1},$$

ибо $g(c) \leqslant g(q) < p+1$.

Это показывает, что $\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)$ является показателем наибольшей степени $p+1$, а $g(c)$ — множителем наибольшего кратного этой степени, не превосходящего $\varphi^{g}_{q,\,p+1}(m)$. Поэтому

$$\varphi^{f}_{p,\,s}\{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(m)\} = h(c)\,s^{\varphi^{f}_{p,\,s}\{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(a)\}} + \varphi^{f}_{p,\,s}\{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(b)\} =$$

$$= h(c)\,s^{\varphi^{h}_{q,\,s}(a)} + \varphi^{h}_{q,\,s}(b)$$

по индуктивному предположению, а тогда

$$\varphi^{f}_{p,\,s}\{\varphi^{g}_{q,\,p+1}(m)\} = \varphi^{h}_{q,\,s}(m), \text{ ибо } m = c(q+1)^{a} + b,$$

что завершает доказательство 6.521 по индукции.

6.53. Далее мы определяем функцию $X_n(k)$, которая зависит от двух функций, $p(n)$, $\pi(n)$, где $p(n)$ и $\pi(n)$ — произвольные рекурсивные функции такие, что $p(n) \geqslant 1$.

Мы определяем $X_n(k)$ так:

$$X_0(k) = k,$$

$$X_{n+1}(k) = \varphi^{X_n}_{p(n),\,X_n(p(n))+\pi(n)+1}(k).$$

Полагая $p'(n) = X_n(p(n)) + \pi(n)$, имеем

$$X_{n+1}(k) = \varphi^{X_n}_{p(n),\,p'(n)+1}(k) \text{ для всех } n.$$

В случае, когда надо явно показать зависимость X от p и p', мы будем писать $X^{p,\,p'}_{n}(k)$ вместо $X_n(k)$.

Для оправдания этого определения $X_n(k)$ мы должны показать, что для всех $n \geqslant 0$ функция $X_n(k)$ монотонно возрастает вместе с k.

Это наверняка имеет место при $n = 0$, ибо $X_0(k) = k$, и если это верно при $n = m$, то это же выполняется и при $n = m+1$ в силу 6.51. Отсюда следует, что для всех n и k имеет место $X_n(k) \geqslant k$.

6.531. Теперь мы рассмотрим связь между $X^{p,\,p'}$, $X^{p,\,q}$ и $X^{q,\,p'}$. Мы докажем, что если $p(r) \geqslant 1$, $q(r) \geqslant 1$,

$$p'(r) \geqslant \max\{X^{p,\,p'}_{r}(p(r)),\ X^{q,\,p'}_{r}(q(r))\}$$

и

$$q(r) \geqslant X^{p,\,q}_{r}(p(r))$$

для всех r, то

6.54. $X^{p,\,p'}_{n}(k) = X^{q,\,p'}_{n}(X^{p,\,q}_{n}(k))$

для всех n, k.

Так как $X_0^{s,t}(k) = k$ для любых s и t, то 6.54 имеет место при $n = 0$; если оно выполняется при $n = m$, то

$$X_{m+1}^{q,p'}\left(X_{m+1}^{p,q}(k)\right) = \varphi^{X_m^{q,p'}}_{q(m),\,p'(m)+1}\left(X_{m+1}^{p,q}(k)\right) =$$
$$= \varphi^{X_m^{q,p'}}_{q(m),\,p'(m)+1}\left(\varphi^{X_m^{p,q}}_{p(m),\,q(m)+1}(k)\right) = \varphi^{X_m^{p,p'}}_{p(m),\,p'(m)+1}(k) =$$
$$= X_{m+1}^{p,p'}(k) \text{ в силу 6.521,}$$

ибо по индукционному предположению

$$X_m^{p,p'}(x) = X_m^{q,p'}\left(X_m^{p,q}(x)\right).$$

Таким образом, 6.54 выполняется при $n = m + 1$ и, следовательно, для любого n.

6.55. Зависимость, которая имеется между $X_n^{p,r}(p(n))$ и $X_n^{q,r}(q(n))$, сохраняется для всех достаточно больших r. Точнее, если $p(k) \geqslant 1$, $q(k) \geqslant 1$,

$$r(k) \geqslant \max\left\{X_k^{p,r}(p(k)),\ X_k^{q,r}(q(k))\right\}$$

и

$$s(k) \geqslant \max\left\{X_k^{p,s}(p(k)),\ X_k^{q,s}(q(k))\right\},$$

то при $n > k \geqslant 0$ выполняется

$$X_n^{p,r}(p(n)) \leqq X_n^{q,r}(q(n))$$

в зависимости от

$$X_n^{r,s}(p(n)) \leqq X_n^{q,s}(q(n)).$$

Определим

$$t(n),\ X_n^{p,t},\ X_n^{q,t},\ X_n^{r,t}$$

и $X_n^{s,t}$ одновременно следующими рекурсиями:

$$X_0^{p,t}(k) = X_0^{q,t}(k) = X_0^{r,t}(k) = X_0^{s,t}(k) = k,$$

$$t(n) = \max\left\{X_n^{p,t}(p(n)),\ X_n^{q,t}(q(n)),\ X_n^{r,t}(r(n)),\ X_n^{s,t}(s(n))\right\}$$

и

$$X_{n+1}^{p,t} = \varphi^{X_n^{p,t}}_{p(n),\,t(n)+1}, \quad X_{n+1}^{q,t} = \varphi^{X_n^{q,t}}_{q(n),\,t(n)+1},$$
$$X_{n+1}^{r,t} = \varphi^{X_n^{r,t}}_{r(n),\,t(n)+1}, \quad X_{n+1}^{s,t} = \varphi^{X_n^{s,t}}_{s(n),\,t(n)+1}.$$

Тогда в силу 6.54

$$X_n^{r,t}\left(X_n^{p,r}(p(n))\right) = X_n^{p,t}(p(n))$$

и

$$X_n^{r,t}\left(X_n^{q,r}(q(n))\right) = X_n^{q,t}(q(n)),$$

и поэтому в силу 6.53

$$X_n^{p,t}(p(n)) \leqq X_n^{q,t}(q(n))$$

в зависимости от того, что

$$X_n^{p,r}(p(n)) \leqq X_n^{q,r}(q(n)).$$

Аналогично,

$$X_n^{p,t}(p(n)) \leqq X_n^{q,t}(q(n)),$$

в зависимости от того, что

$$X_n^{p,s}(p(n)) \leqq X_n^{q,s}(q(n)),$$

откуда следует 6.55.

6.56. Если $p(n) \geqslant k > 0$ и при $0 \leqslant r \leqslant n$, $p(r) \geqslant 1$ выполняется $p'(r) \geqslant X_r^{p,p'}(p(r))$, то

$$X_n^{p,p'}(k) = X_{n+1}^{p,p'}(k).$$

Действительно, $X_{n+1}^{p,p'}(k) = \varphi^{X_n^{p,p'}}_{p(n),\,p'(n)+1} = X_n^{p,p'}(k)$, поскольку $k \leqslant p(n)$. Следовательно, если $N > n$ и при $n \leqslant m < N$ имеет место $p(m) \leqslant k$, то

$$X_n^{p,p'}(k) = X_N^{p,p'}(k).$$

6.6. Мы определяем

$$\Omega_0^p(k) = k,$$

$\Omega_{n+1}^p(k) = \varphi^{\Omega_n^p}_{p(n),\,\omega_n}(k)$, причем $\omega_0 = \omega$, где ω, ω_r, $r \geqslant 1$, — мажорантные переменные.

При данных k, n и $p(r)$ эти равенства определяют $\Omega_n^p(k)$ как функцию от ω, ω_1, ..., ω_{n-1}; мы называем $\Omega_n^p(k)$ *трансфинитным ординалом типа* n.

Трансфинитный ординал типа n равен некоторому ординалу типа $n+1$, ибо если $p(n) \geqslant k$, то

6.61. $\Omega^p_{n+1}(k) = \varphi^{\Omega^p_n}_{p(n),\,\omega_n}(k) = \Omega^p_n(k)$.

Отсюда следует, что если $p(m) \geqslant k$ при $n \leqslant m \leqslant N-1$, то

6.62. $\Omega^p_n(k) = \Omega^p_N(k)$.

В формулировке определения $\Omega^p_n(k)$ мы предвосхитили доказательство того, что $\Omega^p_n(k)$ строго возрастает вместе с k; это следует из $\Omega^p_0(k) = k$ и теоремы 6.51.

6.63. Легко видеть, что имеются ординалы типа $n+1$, которые не являются ординалами меньшего типа. Действительно, если $k > p(n) \geqslant m$, то

$$\Omega^p_{n+1}(k) > \Omega^p_{n+1}(m) = \Omega^p_n(m).$$

Взаимосвязь между ординалами различных типов дается теоремой

6.64. Если $p(r) \geqslant 1$, $q(r) \geqslant X^{p,\,q}_r(p(r))$ при $0 \leqslant r \leqslant n-1$, то

$$\Omega^p_n(k) = \Omega^q_n\left(X^{p,\,q}_n(k)\right).$$

Мы опять действуем по индукции. При $k = 0$ требуемое равенство сразу следует из определения; если оно выполняется при $n = m$, то

$$\Omega^q_{m+1}\left(X^{p,\,q}_{m+1}(k)\right) = \varphi^{\Omega^q_m}_{q(m),\,\omega_m}\left(\varphi^{X^{p,\,q}_m}_{p(m),\,q(m)+1}(k)\right) = \varphi^{\Omega^p_m}_{p(m),\,\omega_m}(k)$$

по предположению, и поэтому

$$\Omega^q_{m+1}\left(X^{p,\,q}_{m+1}(k)\right) = \Omega^p_{m+1}(k),$$

что доказывает равенство при $n = m+1$ и, следовательно, при всех n.

6.65. Если $p(r) \geqslant 1$, $q(r) \geqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant n$, то

$$\Omega^p_n(p(n)) \lessgtr \Omega^q_n(q(n))$$

в зависимости от

6.651. $X^{p,\,r}_n(p(n)) \lessgtr X^{q,\,r}_n(q(n))$,

6.652. где $r(k) \geqslant \max\left\{X^{p,\,r}_k(p(k)),\, X^{q,\,r}_k q(k))\right\}$ при $n > k \geqslant 0$.

Действительно, в силу 6.64

$$\Omega^p_n(p(n)) = \Omega^r_n\left(X^{p,\,r}_n(p(n))\right)$$

и

$$\Omega^q_n(q(n)) = \Omega^r_n\left(X^{q,\,r}_n(q(n))\right),$$

откуда 6.65 следует в силу 6.63.

В силу 6.55 отношение 6.651 не зависит от выбора чисел $r(k)$, если выполняется условие 6.652.

6.7. Результат, содержащийся в 6.65, позволяет нам распространить *утверждение* теоремы об убывающей последовательности ординалов на ординалы любого типа. В терминах последовательности функций $p_n(k)$ мы определяем

$$\Lambda^i_s(n) = X^{p_n,\,s}_i(p_n(i)).$$

Последовательность ординалов $\Omega^{p_n}_i(p_n(i))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, строго убывает, если

$$\Lambda^t_{r_n}(n+1) < \Lambda^i_{r_n}(n),$$

где

$$r_n(k) \geqslant \max\left\{\Lambda^k_{r_n}(n),\, \Lambda^k_{r_n}(n+1)\right\}, \quad 0 \leqslant k < i.$$

Поэтому теорема о том, что убывающая последовательность ординалов необходимо конечна, может быть выражена так:

Если $p_n(i) \geqslant 0$ для данного целого i, а при $0 \leqslant k < i$ $p_n(k) \geqslant 1$, и если

$$r_n(k) = \max\left\{\Lambda^k_{r_n}(n),\, \Lambda^k_{r_n}(n+1)\right\}$$

и

$$\Lambda^t_{r_n}(n+1) < \Lambda^i_{r_n}(n)$$

при $p_n(i) > 0$, то существует значение n, для которого $p_n(i) = 0$.

6.8. Вводя дополнительные операции, более сильные, чем возведение в степень, мы можем определить ординалы большей «сложности», чем $\Omega_n^p(k)$. Например, если мы определим *тетрацию* ${}^b a$ так, что ${}^0 a = 1$,

$$ {}^{(n+1)}a = a^{({}^n a)} $$

(и, следовательно, ${}^1 a = a$, ${}^2 a = a^a$, ${}^3 a = a^{a^a}$ и т. д.), то мы можем обобщить представление в системе счисления на четыре операции. Пусть a, b, c — наибольшие целые такие, что (при $k \geqslant 1$)

$$ {}^a(k+1) \leqslant n, $$
$$ \{{}^a(k+1)\}^b \leqslant n, $$
$$ c\{{}^a(k+1)\}^b \leqslant n; $$

определим

$$ \varphi^f_{4,k,s}(n) = f(n), \quad 0 \leqslant n \leqslant k, $$

$$ \varphi^f_{4,k,s}(n) = \varphi^f_{4,k,s}(c)\left\{{}^{\varphi^f_{4,k,s}(a)}s\right\}^{\varphi^f_{4,k,s}(b)} + $$
$$ + \varphi^f_{4,k,s}(n - c\{{}^a(k+1)\}^b), \quad n \geqslant k+1. $$

Функция $\varphi^f_{4,k,s}$ дает разложение n с цифрами $f(0), f(1), \ldots, f(k)$ и базой s, используя четыре операции: сложение, умножение, возведение в степень и тетрацию.

Взяв $f(x) = x$, мы имеем, например,

$$ \varphi^f_{4,k,s}(10^3) = (\omega+1)\{{}^{\omega+1}\omega\}^\omega + (\omega+1)\{{}^\omega\omega\}\{{}^{\omega+1}\omega\} + $$
$$ + \omega\{{}^{\omega+1}\omega\} + \omega\{{}^\omega\omega\} $$

(ибо $1000 = (1+2)\{2^{2^2}\}^2 + (1+2)2^2 \cdot 2^{2^2} + 2 \cdot 2^{2^2} + 2 \cdot 2^2$).

Используя p операций вместо четырех, мы определяем

$$ G(k+1, a, n+1) = G(k, a, G(k+1, a, n)), $$

причем $G(3, a, 0) = 1$, $G(2, a, 0) = 0$, $G(1, a, 0) = a$, $G(0, a, n) = n+1$,

$$ g^h_{p,k}(1) = G(p, k+1, h(1)), $$
$$ g^h_{p,k}(m+1) = G\left(p-m, g^h_{p,k}(m), h(m+1)\right), \quad 1 \leqslant m \leqslant p-1; $$

далее, при $n \geqslant k+1$ мы определяем $a(r)$ так, что при $1 \leqslant r \leqslant p$ значение $a(r)$ является наибольшим целым таким, что при $1 \leqslant s \leqslant r$ имеет место

$$ g^a_{p,k}(s) \leqslant n $$

(и поэтому $a(r) < n$, $1 \leqslant r \leqslant p$).

Наконец, мы полагаем по определению

$$ Y^f_{p,k,s}(1) = G(p, s, \varphi^f_{p,k,s}(a(1))), $$
$$ Y^f_{p,k,s}(m+1) = G(p-m, Y^f_{p,k,s}(m), \varphi^f_{p,k,s}(a(m+1))), $$
$$ 1 \leqslant m \leqslant p-1, $$

и

$$ \varphi^f_{p,k,s}(n) = f(n), \qquad n \leqslant k, $$
$$ \varphi^f_{p,k,s}(n) = Y^f_{p,k,s}(p), \quad n \geqslant k+1. $$

ДОБАВЛЕНИЕ

РЕКУРСИВНАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ

Пусть $P_n(x)$ — n-й полином в нумерации всех полиномов одной переменной x с целыми коэффициентами; пусть

$$ \|z\| = \|x + iy\| = |x| + |y| $$

и пусть s_n — сходящаяся последовательность рациональных вещественных или комплексных чисел. Тогда классический $\lim s_n$ является трансцендентным, если

(1) $\forall r \exists k \exists N \forall n \left(n \geqslant N \to \| P_r(s_n) \| > 2^{-k}\right)$.

Сходимость s_n выражается условием

(2) $\forall k \exists \nu \forall n \left(n \geqslant \nu \to \| s_n - s_\nu \| < 2^{-k}\right)$.

Пусть $\nu(k)$ — наименьшее значение ν, удовлетворяющее (2), такое, что

$$ n \geqslant \nu(k) \to \| s_n - s_{\nu(k)} \| < 2^{-(k+2)}, $$

и пусть k_r, N_r — наименьшие значения k, N, удовлетворяющие (1), такие, что

(3) $n \geqslant N_r \to \| P_r(s_n) \| > 2^{-k_r}$.

Если s_n квазирекурсивна и рекурсивно сходится, так что $\nu(k)$ рекурсивна, и если далее функции N_r, k_r в (3)

обе квазирекурсивны, то говорят, что рекурсивное вещественное (комплексное) число (s_n) является *квазирекурсивно трансцендентным.*

Если s_n, $\nu(k)$, N_r и k_r все примитивно рекурсивны, то говорят, что примитивно рекурсивное вещественное число (s_n) является *примитивно рекурсивно трансцендентным.*

В частности, взяв в качестве $P_r(x)$ линейную функцию x, мы получаем соответствующие определения рекурсивной иррациональности.

Для квазирекурсивной рекурсивно сходящейся последовательности число (s_n) квазирекурсивно трансцендентно тогда и только тогда, когда оно классически трансцендентно.

Действительно, если $M = \max\limits_{0 \leqslant r \leqslant \nu(1)} \| s_r \| + 1$ и если $P_r^*(x)$ — сумма положительных значений членов производного полинома $P_r'(x)$, то

$$\| P_r(s_m) - P_r(s_n) \| < \| s_m - s_n \| \cdot P_r^*(M)$$

и, обозначая через c_r показатель наименьшей степени 2, превосходящей $P_r^*(M)$, имеем

(4) $m,\ n \geqslant \nu(k + c_r) \to \| P_r(s_m) - P_r(s_n) \| < 2^{-k}$.

Из (3) и (4), взяв k_r в качестве k и $N_r + \nu(k_r + c_r + 2)$ в качестве n и обозначая $\nu(k_r + c_r + 2)$ через $\nu_r(k)$, мы получаем

$$\| P_r(s_{\nu_r(k)}) \| > 1/2^{k_r+1},$$

откуда

(5) $\forall r \exists k \left\{ \| P_r(s_{\nu_r(k)}) \| > 1/2^{k+1} \right\}$.

Если λ_r — наименьшее значение k, удовлетворяющее (5), то, поскольку $\nu(k)$ квазирекурсивно, λ_r тоже квазирекурсивно, и

$$\| P_r(s_{\nu_r(\lambda_r)}) \| > 1/2^{\lambda_r+1}.$$

Снова используя (4) при $k = \lambda_r + 2$, мы имеем

$$n \geqslant \nu_r(\lambda_r) \to \| P_r(s_n) \| > 1/2^{\lambda_r+2};$$

это доказывает, что (s_n) квазирекурсивно трансцендентно. Эта теорема, конечно, перестанет быть истинной, если мы заменим квазирекурсивность на примитивную рекурсивность.

При любом рациональном $x \neq 0$ функция $e^x = \sum (x)^n / n!$ примитивно рекурсивно сходится [1]) и то же верно для π.[2])

На самом деле, и e и π оба примитивно рекурсивно трансцендентны, как мы сейчас покажем.

Примитивно рекурсивная трансцендентность e. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{r=1}^{n} (r - x)^p = \sum_{s=p-1}^{q} c_s x^s, \quad \text{где} \quad q = pn + p - 1,$$

и

$$\psi(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s x^s,$$

$$A = \max_{1 \leqslant s \leqslant n} | a_s |;$$

далее, пусть

$$T\varphi(x) = \sum_{s=0}^{q} \varphi^s(x),$$

где

$$\varphi^s(x) = \sum_{r=0}^{q-s} \frac{(r+s)!}{r!} c_{r+s} x^r, \quad 0 \leqslant s \leqslant q.$$

Тогда в силу соображений из элементарной алгебры можно легко показать, что

$$| \varphi^{p-1}(0) | = (n!)^p$$

и что при $r \neq p - 1$ имеет место $\varphi^r(0) = 0 \pmod p$, а при $1 \leqslant m \leqslant n$ и любом r имеет место $\varphi^r(m) = 0 \pmod p$, так что если p — простое и больше n, то $T\varphi(0)$ не делится на p, но

$$T\varphi(m) = 0 \pmod p, \quad 1 \leqslant m \leqslant n$$

---

[1]) См. Р. Л. Гудстейн [3].
[2]) См. Р. Л. Гудстейн [12].

Теперь $T\varphi(0)=\sum_{r=p-1}^{q}(r!)\,c_r$ и, следовательно, обозначая $\sum_{r=0}^{N} m^r/r!$ через $E_N(m)$, имеем

$$T\varphi(0)\,E_N(m)=\sum_{p-1}^{q} c_r\{Tm^r+W_r m^r\},\quad N>q,$$

где

$$Tm^r=m^r+rm^{r-1}+r(r-1)\,m^{r-2}+\ldots+r!$$

и

$$W_r=\frac{m}{r+1}+\frac{m^2}{(r+1)(r+2)}+\ldots+\frac{(r!)\,m^{N-r}}{N!}<3^m$$

(ибо $1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\ldots+\frac{m^n}{n!}<\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right\}^m$,

что можно легко показать индукцией по m).

Следовательно,

$$T\varphi(0)\cdot E_N(m)=T\varphi(m)+3^m\sum_{r=p-1}^{q} c_r\Theta_r m',$$

где $\Theta_r=W_r 3^{-m}$, так что $0<\Theta_r<1$. Но

$$\left|\sum_{r=p-1}^{q} c_r\Theta_r m^r\right|\leqslant\sum_{r=p-1}^{q}|c_r|\,m^r=$$

$$=\frac{m^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{r=1}^{n}(r+m)^p<\frac{M^p}{(p-1)!},\quad 1\leqslant m\leqslant n,$$

где $M=\prod_{r=0}^{n}(r+n)$.

Теперь если $p>2M$, то

$$\frac{M^p}{(p-1)!}<\frac{(2M)^{2M}}{(2M-1)!}\cdot\frac{1}{2^{p-1}}<\frac{1}{p}\cdot\frac{(2M)^{2M}}{(2M-1)!}$$

и, поэтому, полагая

$$H=\sum_{m=1}^{n}\left\{3^m a_m\sum_{r=p-1}^{q} c_r\Theta_r m^r\right\}$$

при

$$p>\frac{(2M)^{2M}}{(2M-1)!}\sum_{r=1}^{n}3^{r+1}|a_r|=P,\ \text{например},$$

мы имеем $|H|<1/3$.

Таким образом,

$$T\varphi(0)\sum_{m=1}^{n}a_m E_N(m)=a_0 T\varphi(0)+\sum_{m=1}^{n}T\varphi(m)+H,$$

где, если p — простое, большее $\max\{P,\ |a_0|\}$, то

(i) $a_0 T\varphi(0)$ — целое, не делящееся на p,

(ii) $\sum_{m=1}^{n}a_m T\varphi(m)$ — целое, делящееся на p,

(iii) $|H|<1/3$,

так что

$$\left|T\varphi(0)\sum_{m=0}^{n}a_m E_N(n)\right|>\frac{2}{3}.$$

Так как

$$\left\{\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\right\}^m<\sum_{r=0}^{mn}\frac{m^r}{r!},$$

то

$$0<\left\{\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\right\}^m-\left\{\sum_{r=0}^{n}\frac{m^r}{r!}\right\}<2\frac{m^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{(2m)^{2m}}{(2m-1)!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

и, следовательно,

$$\left|T\varphi(0)\left[\sum_{m=0}^{n}a_m\{E_N(1)\}^m-\sum_{m=0}^{n}a_m E_N(m)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\,|T\varphi(0)|\sum_{m-1}^{n}\frac{m^{N+1}}{(N+1)!}|a_m|<|T\varphi(0)|\cdot 2An^{N+2}/(N+1)!<$$

$$<|T\varphi(0)|\cdot A(2n)^{2n}/(2n-1)!\,2^N<1/3,$$

если $N > |3AT\varphi(0)|\,(2n)^{2n}/(2n-1)!$ (обозначим это, скажем, через B).

Отсюда следует, что при $N > B$ и $p > \max\{P, |a_0|\}$ мы имеем

$$\left|\sum_{m=0}^{n} a_m \{E_N(1)\}^m\right| > 1/3\,|T\varphi(0)|.$$

Так как $E_N(1)$ примитивно рекурсивно сходится (с классическим пределом e), то, следовательно, e примитивно рекурсивно трансцендентно.

Примитивно рекурсивная трансцендентность π. Мы предпошлем доказательству примитивно рекурсивной трансцендентности π список основных свойств нормы

$$\|x + iy\| = |x| + |y|$$

комплексного числа $x + iy$ с рациональными x и y.

Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда:

1. $\|z + w\| \leqslant \|z\| + \|w\|$, ибо $\|x + u + i(y + v)\| = |x + u| + |y + v| \leqslant \|z\| + \|w\|$.
2. $\|z \pm w\| \geqslant \|z\| - \|w\|$, ибо $\|z - w + w\| \leqslant \|z - w\| + \|w\|$.
3. $\|zw\| \leqslant \|z\| \cdot \|w\|$, ибо $\|zw\| = |xu - yv| + |xv + yu| \leqslant (|x| + |y|)(|u| + |v|)$.
4. $|z|^2 \leqslant \|z\|^2 \leqslant 2|z|^2$.
5. $\|zw\| \geqslant \frac{1}{2}\|z\| \cdot \|w\|$, ибо $\|zw\|^2 \geqslant |z|^2 \cdot |w|^2 \geqslant \frac{1}{4}\|z\|^2 \cdot \|w\|^2$.
6. $1/\|z\| \leqslant \|1/z\| \leqslant 2/\|z\|$, ибо $\|1/z\| = \{|x| + |y|\}/(x^2+y^2)$ и
$$x^2 + y^2 \leqslant \{|x| + |y|\}^2 \leqslant 2(x^2 + y^2).$$

Пусть α — алгебраическое число с соответствующим ему полиномом

$$a_0x^N + a_1x^{N-1} + \ldots + a_N$$

и пусть нулями этого полинома являются

$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_N.$$

Обозначим $|a_0| + \ldots + |a_N|$ через $\frac{1}{2}A$ и $2NA$ через B. Далее, пусть $\beta_{2r-1} = i\alpha_r$, $\beta_{2r} = -i\alpha_r$, $r = 1, 2, \ldots, N$, так что при $1 \leqslant k \leqslant 2N$

$$\|\beta_k\| < A,$$

и пусть γ_s, $1 \leqslant s \leqslant M = 2^{2N} - 1$, — все возможные суммы чисел β_k, $1 \leqslant k \leqslant 2N$, которые берутся по j штук, $1 \leqslant j \leqslant 2N$, так что γ_s, $1 \leqslant s \leqslant M$, являются корнями некоторого полинома

$$Q(x) = b_0x^M + b_1x^{M-1} + \ldots + b_M$$

с целыми коэффициентами и $\|\gamma_s\| < B$.

Мы определяем

$$\psi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\, b_0^{pM}\{Q(x)\}^p = c_{p-1}x^{p-1} + c_px^p + \ldots + c_{pM+p-1}x^{pM+p-1},$$

где p — простое, большее чем $|b_0b_M|$;

$$L(\psi(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} \psi^r(x), \quad K = L(\psi(0)) = \sum c_r(r!),$$

$$E_n(x) = \sum_{r=1}^{n} x^r/(r!)$$

и

$$T_n = (1 + E_n(\beta_1))(1 + E_n(\beta_2)) \ldots (1 + E_n(\beta_{2N})).$$

Числа $\psi^r(0)$, $r \neq p-1$, являются все целыми кратными p, а $\psi^{p-1}(0) = b_0^{pM}$, b_M^p — целое, не делящееся на p. Кроме того, если x — нуль $Q(x)$, то $\psi^r(x) = 0$ при $r \leqslant p-1$, а при $r \geqslant p$ сумма $\sum_{m=1}^{M} \psi^r(\gamma_m)$ есть целое, делящееся на p.

При фиксированном x имеем $\psi(x) \to 0$, когда $p \to \infty$, и аналогично,

$$\sum_{r=p-1}^{pM+p-1} |c_r|\,|x|^r \to 0, \text{ когда } p \to \infty.$$

Теперь $T_n = 1 + \sum_{r=1}^{M} E_n(\gamma_r) + V_n$, причем, поскольку

$$\|E_n(x) \cdot E_n(y) - E_n(x + y)\| < 2(\|x\| + \|y\|)^{n+1}/(n+1)!$$

для достаточно больших n и поскольку аналогичное неравенство выполняется для трех или более множителей, то мы имеем

$$\|V_n\| < 2MB^{n+1}/(n+1)!.$$

Но

$$K \cdot E_n(\gamma) = L(\psi(\gamma)) + \sum_i c_i \gamma^i R_{\gamma, i},$$

где

$$\frac{\gamma^i}{i!} R_{\gamma, i} = \frac{\gamma^{i+1}}{(i+1)!} + \frac{\gamma^{i+2}}{(i+2)!} + \ldots + \frac{\gamma^n}{n!},$$

так что $\|R_{\gamma, i}\| < E_n(B)$ и поэтому

$$\left\| \sum_\gamma \sum_i c_i \gamma^i R_{\gamma, i} \right\| \leqslant M \cdot E_n(B) \sum |c_i| B^i$$

стремится к 0, когда p стремится к ∞.

Таким образом,

$$K \cdot \sum_\gamma F_n(\gamma) = L\left(\sum_\gamma \psi(\gamma)\right) + \varepsilon_p,$$

где $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$, а $L\left(\sum \psi(\gamma)\right)$ — целое, делящееся на p. Следовательно, KT_n является суммой целого не делящегося на p члена, который стремится к нулю по p, и члена, который стремится к нулю по n.

Выберем p так, чтобы $\|\varepsilon_p\| < \frac{1}{3}$; тогда, поскольку $2KMB^{n+1}/(n+1)! < \frac{1}{3}$ при $n \geqslant 6KMB^{B+1}/B!$, мы имеем

$$\|T_n\| > 1/3K.$$

Однако

$$\|1 + E_n(\beta)\| < 4^A$$

и, следовательно,

$$\|T_n\| < \|1 + E_n(i\alpha)\| \cdot 4^{(2N-1)A} < \|1 + E_n(i\alpha)\| 4^B,$$

откуда

$$\|1 + E_n(i\alpha)\| > 1/3K \cdot 4^B.$$

Пусть π_n — значение π с n десятичными знаками, тогда можно показать *), что (при $n \geqslant 14$)

$$\|1 + E_{2n+1}(i\pi_n)\| < 1/10^{n-1} < 1/12K \cdot 4^B \quad \text{при} \quad n \geqslant K \cdot 4^{B+1}$$

и, следовательно,

$$\|E_{2n+1}(i\alpha) - E_{2n+1}(i\pi_n)\| > 1/K \cdot 4^{B+1}$$
$$\text{при } n \geqslant c = \max\{K \cdot 4^{B+1}, 3KM \cdot B^{B+1}/B!\}.$$

Так как $\|i\pi_n\| < 4^A$ и $\|i\alpha\| < 4^A$, то

$$\|E_{2n+1}(i\alpha) - E_{2n+1}(i\pi_n)\| < \|\alpha - \pi_n\| E_{2n}(4^A) < \|\alpha - \pi_n\| \cdot 3^{(4^A)}$$

и, следовательно, при $n \geqslant c$

$$\|\alpha - \pi_n\| > 1/K \cdot 4^B \cdot 3^{(4^A)}, \tag{1}$$

откуда $\|\alpha - \pi\| \geqslant 1/K \cdot 4^B \cdot 3^{(4^A)}$, что показывает, на сколько, по меньшей мере, отличается π от α.

Так как (1) выполняется для произвольного нуля α полинома $a_0 x^N + \ldots + a_N$, то при $n \geqslant c$

$$\|a_0\pi_n^N + a_1\pi_n^{N-1} + \ldots + a_N\| \geqslant$$
$$\geqslant \|a_0\| \|\pi_n - \alpha_1\| \ldots \|\pi_n - \alpha_n\| \cdot 2^{-N} \geqslant \|a_0\|/K^N \cdot 2^{(2^{B+1})} 3^{N \cdot 4^A},$$

что доказывает примитивно рекурсивную трансцендентность π.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Глава I. Рекурсивная арифметика была введена Т. Сколемом в статье Сколем [1]. Различные формализации рекурсивной арифметики приведены в работах Карри [1], Гудстейн [15] и Чёрч [2]. Свойства общерекурсивных функций имеются в книгах Клини [2] и Девис [1].

Понятия относительной и рекурсивной сходимости и приведенной последовательности введены у Гудстейна [2]. Признаки рекурсивной сходимости впервые приведены у Гудстейна [6].

Другое доказательство теоремы 1 имеется у Райса [1].

Нумерация примитивно рекурсивных функций описана в книге Петер [1], которая также содержит очень хорошую библиографию по рекурсивным функциям.

По поводу теоремы Шпеккера смотрите Шпеккер [1].

Доказательство теоремы 1 также дано по Шпеккеру. Рекурсивные вещественные числа изучались Мешковским [2].

*) Детали смотрите в статье Гудстейна [12].

Глава II. Понятия рекурсивной и относительной непрерывности введены у Гудстейна [2]. Теорема 2.4 принадлежит Мешковскому и была опубликована в статье Мешковский [1].

Теорема 2.5 была доказана Шпеккером и впервые опубликована в работе Гудстейн [5].

Глава III. Понятия о рекурсивной и относительной дифференцируемости введены Гудстейном [2].

Классическая теорема о том, что функция, непрерывная в замкнутом интервале, принимает в этом интервале свое максимальное значение, не верна в рекурсивном анализе; доказательства смотри у Шпеккера [2], Лакомба [1] и в реферате Крайзеля [1]. Марков [1] приводит неконструктивное доказательство того, что для рекурсивной вещественной функции $F(x)$ такой, что $F(0) = -1$, $F(1) = 1$, существует рекурсивное вещественное число c такое, что $F(c) = 0$; конструктивное доказательство этого результата невозможно, ибо Шпеккер показал, что имеется рекурсивная последовательность F_k рекурсивных вещественных функций таких, что $F_k(0) = -1$, $F_k(1) = 1$ и ни для какой рациональной рекурсивной функции $s(k, n)$, рекурсивно сходящейся по n при каждом k, не может выполняться $\lim_{n \to \infty} F_k(s(k, n)) = 0$. Это показывает, что мы не можем отождествлять рекурсивный анализ с классическим изучением рекурсивных вещественных чисел. По вопросу о сравнении различных уровней конструктивных теорий см. «Constructivity in Mathematics», под редакцией А. Гейтинга (North-Holland Publishing Co., 1959).

Глава IV. Относительный интеграл был введен Гудстейном [11], и все результаты этой главы были впервые опубликованы в этой статье.

Глава VI. Эта теория рекурсивных ординалов была впервые развита Гудстейном [1], [4].

Другие конструктивистские трактовки ординалов приведены в работах Аккерман [1], Гильберт и Бернайс [1], Черч [1], Черч и Клини [1].

Добавление. Понятие рекурсивной иррациональности (в другой терминологии) было введено Гудстейном [3], и доказательство рекурсивной иррациональности e^x при рациональном ненулевом x дано в этой же статье. Доказательство рекурсивной иррациональности π приведено у Гудстейна [12]. Рекурсивная трансцендентность была введена в докладе автора на Конгрессе математиков в Эдинбурге, 1958.

БИБЛИОГРАФИЯ

Аккерман (Ackermann W.)
[1] Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Ann. **117** (1940), 162—194.
[2] Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse, Math. Z. **53** (1951), 403—413.

Бернайс (Bernays P.)
[1] Uber das Induktionsschema in der rekursiven Zahlentheorie, Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkul und zur Logik der Einzelnwissenschaften. Kommissions-Verlag K. Alber, München, 1951, 10—17.

Гильберт и Бернайс (Hilbert D. and Bernays P.)
[1] Grundlagen der Mathematik, Berlin, 1934, 1939.

Гжегорчик (Grzegorczyk A.)
[1] On the definitions of computable real continuous functions, Fund. Math. **44** (1947), 61—71.

Гудстейн (Goodstein R. L.)
[1] On the restricted ordinal theorem, J. Symbolic Logic **9** (1944), 33—41.
[2] Function theory in an axiom-free equation calculus, Proc. London Math Soc. (2), **48** (1945), 401—434.
[3] The strong convergence of the exponential function, J. London Math. Soc. **22** (1947), 200—205.
[4] Transfinite ordinals in recursive number theory, J. Symbolic Logic **12** (1947), 123—129.
[5] Mean value theorems in recursive functions theory, Part I: Differential mean value theorems, Proc. London Math. Soc. (2) **52** (1950), 81—106.
[6] The Gauss test for relative convergence, Amer. J. Math. **72** (1950), 217—228.
[7] Constructive Formalism, Essays on the foundations of mathematics, University College, Leicester, 1951.
[8] The foundations of mathematics, University College, Leicester, 1951.
[9] Permutation in recursive arithmetic, Math. Scand. **1** (1953), 222—226.
[10] A problem in recursive function theory, J. Symbolic Logic **12** (1953), 225—232.
[11] The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory, Acta Math. **92** (1954), 171—190.
[12] The recursive irrationality of π, J. Symbolic Logic **19** (1954) 267—274.
[13] Logic-free formalisations of recursive arithmetic, Math. Scand. **2** (1954), 247—267.
[14] A constructivist theory of plane curves, Fund. Math. **43** (1956), 23—35. [Русский перевод: Р. Л. Гудстейн, Конструктивистская теория плоских кривых, наст. сборник.]
[15] Recursive Number Theory, Amsterdam, 1957. [Русский перевод: Р. Л. Гудстейн, Рекурсивная теория чисел, наст. сборник.]
[16] Models of propositional calculi in recursive arithmetic, Math. Scand. **6** (1958), 293—296.
[17] Recursive Analysis, в кн. Constructivity in Mathematics, Amsterdam, 1959, 37—42.

Девис (Davis M.)
[1] Computability and Unsolvability, New York, 1958.

Карри (Curry H. B.)
[1] A formalisation of recursive arithmetic, Amer. J. Math. **63** (1941), 263—282. [Русский перевод: Х. Б. Карри, Формализация рекурсивной арифметики, наст. сборник.]

Клини (Kleene S. C.)
[1] On notation for ordinal numbers, J. Symbolic Logic **3** (1938), 150—155.
[2] Introduction to Metamathematics, Amsterdam, 1952. [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ. 1957.]
Крайзель (Kreisel G.)
[1] Review of Meschkowski [1], Math. Rev., 1958, 238.
Лакомб (Lacombe D.)
[1] Extension de la notion de fonction recursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables reelles. Compt. Rend. **240** (1955), 2478—2480; **241** (1955), 13—14, 151—153.
Майхилл (Myhill J. R.)
[1] Criteria of constructibility for real numbers, J. Symbolic Logic **18** (1953), 7—10.
Марков А. А.
[1] О непрерывности конструктивных функций, УМН **9**, № 3 (61) (1954), 226—229.
Мешковский (Meschkowski H.)
[1] Zur rekursiven Funktionentheorie, Acta Math. **95** (1956), 9—23.
Петер (Peter R.)
[1] Rekursive Funktionen, Budapest, 1951. [Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, ИЛ, 1954.]
[2] Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl, Acta Scient. Math., Szeged, 12/A, Leopoldo Fejer et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatus, 1950, 239—245.
Райс (Rice H. G.)
[1] Recursive real numbers, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 784—791.
Сколем (Skolem T.)
[1] Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich, Videnskapsselskapets Skrifter 1, Math-Natur. Kl. 6 (1924), 3—38.
[2] Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie, Montash. f. Math. u. Phys. **48** (1939), 268—276.
[3] A remark on the induction schema, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab **22** (1950), 167—170.
Чёрч (Church A.)
[1] The constructive second number class, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 224—232.
[2] Binary Recursive Arithmetic, J. de Math. **36** (1957), 39—55.
Чёрч и Клини (Church A. and Kleene S. C.)
[1] Formal definitions in the theory of ordinal numbers, Fund. Math., **28** (1936), 11—21.
Шпеккер (Specker E.)
[1] Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, J. Symbolic Logic **14** (1949), 145—158.
[2] Der Satz von Maximum in der Rekursiven Analysis, Constructivity in Mathematics, Amsterdam, 1959, 254—265.

III

ПРИЛОЖЕНИЯ

РАЗРЕШИМЫЙ ФРАГМЕНТ РЕКУРСИВНОЙ АРИФМЕТИКИ*)

Р. Л. Гудстейн

Наиболее распространенная модель [1] двузначной логики в рекурсивной арифметике связывает с отрицанием, конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией следующие примитивно рекурсивные функции:

$$1 \dot{-} p, \quad \alpha(p+q), \quad \alpha(pq) \quad \text{и} \quad (1 \dot{-} p)\alpha(q)$$

где $\alpha(x) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} x)$. Эти функции на самом деле являются таблицами истинности, имеющими требуемые значения 0, 1 для значений 0, 1 переменных: функция a, связанная с доказуемым предложением A, удовлетворяет доказуемому равенству $a = 0$ (доказуемому, например, в исчислении равенств) и, обратно, предложение A доказуемо (в некоторой формализации логики предложений), если равенство $a = 0$ доказуемо. Для установления доказуемости равенства $a = 0$, связанного с доказуемым предложением A, достаточно показать, что равенства, связанные с аксиомами логики предложений, доказуемы, и что если $p = 0$, $q = 0$ соответствуют предложениям P, Q и если P, $P \to Q$ связаны с доказуемыми предложениями $p = 0$, $(1 \dot{-} p)\alpha(q) = 0$, то $\alpha(q) = 0$ доказуемо (что очевидно) и, следовательно, $q = 0$. Обратно, если равенство $a = 0$ доказуемо, то предложение A, соответствующее a, доказуемо, ибо функция a является истинностной функцией для A, которая имеет значение 0 (истина) для всех значений (включая 0, 1) своих переменных, а всегда верное предложение доказуемо.

Модель, которую я наиболее часто использовал в своей книге о рекурсивной теории чисел [2], отличается от приведенной выше модели в одном важном пункте: функции, связанные с логическими операциями, могут

*) Перевод статьи: R. L. Goodstein. A decidable fragment of recursive arithmetic, Z. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 2 (1963), 199—201.

принимать значения, отличные от 0, 1. Так, с конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией связаны функции $p+q$, pq и $(1\dot{-}p)q$.

Точно так же как и раньше, доказывается, что если a — функция, связанная с предложением A, то $a=0$ доказуемо, если A доказуемо. То, что обратное истинно, однако, менее очевидно, ибо функции, связанные с логическими операциями, больше не будут таблицами истинности для этих логических операций. Например, $p+q$ принимает значение 2 (а не значение 1) для значения 1 переменных p и q.

Тем не менее рассматривая отношение между A и его конъюнктивной нормальной формой A_c, мы можем показать, что A доказуемо, если $a=0$ доказуемо. Сначала мы заметим, что функция a_c, соответствующая предложению A_c в конъюнктивной нормальной форме, принимает вид

$$a_c = f_1 + f_2 + \ldots + f_n,$$

где каждое f_i представляет собой произведение переменных p или термов $1\dot{-}p$, соответствующих неотрицаемым или отрицаемым переменным для предложений в составляющих A_c частях F_i. Если $f_1+f_2+\ldots+f_n=0$, то каждое $f_i=0$, откуда следует, что f_i содержит и p, и $1\dot{-}p$ для некоторой переменной p; следовательно, F_i содержит некоторую переменную для предложений с отрицанием и без отрицания, так что F_i доказуемо. Так как каждое F_i доказуемо, то же верно для их конъюнкции A_c.

Предположим теперь, что $a=0$ доказуемо. Так как $A\rightarrow A_c$ доказуемо, то

$$(1\dot{-}a)a_c=0$$

доказуемо, откуда следует, что

$$a_c=0$$

доказуемо, поэтому A_c доказуемо и, наконец, само A доказуемо.

Предположим теперь, что F — произвольная функция, построенная с помощью композиции только из функций $p+q$, pq и $1\dot{-}p$. Функция F связана с некоторым предложением Φ (получаемым заменой сложения и умножения на & и $\vee$, а $1\dot{-}p$ на $\sim p$) с нормальной формой Φ_c, с которой связана функция F_c.

Предположим далее, что $F=0$ доказуемо только *для значений* 0, 1 *своих переменных*: тогда $F_c=0$ подобным же образом доказуемо для значений 0, 1 своих переменных и поэтому, то же справедливо для составляющих F_c частей $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — каждое равенство $F_i=0$ доказуемо для значений 0, 1 своих переменных. Если Φ_i — та часть Φ_c, которая ассоциирована с F_i, то, следовательно, Φ_i всегда истинно, поэтому Φ_c всегда истинно и, наконец, само Φ доказуемо, откуда следует, что $F=0$ — доказуемое равенство.

Таким образом, у нас имеется разрешающая процедура для равенств

$$F=0,$$

где F построено с помощью композиции из $p+q$, pq и $1\dot{-}p$; равенство $F=0$ доказуемо тогда и только тогда, когда F принимает значение 0 для значений 0, 1 своих переменных.

Этот результат имеет место также для равенств вида

$$1\dot{-}F=1\dot{-}G,$$

где F, G построены из $p+q$, pq и $1\dot{-}p$; действительно,

$$1\dot{-}F=1\dot{-}G$$

тогда и только тогда, когда выполняются оба равенства

$$(1\dot{-}F)G=0,\quad (1\dot{-}G)F=0,$$

ибо из $(1\dot{-}F)G=0$ следует $(1\dot{-}F)(1\dot{-}G)=1\dot{-}F$, а из $(1\dot{-}G)F=0$ следует $(1\dot{-}F)(1\dot{-}G)=1\dot{-}G$.

Другое специальное равенство, к которому приложим этот метод, таково:

$$(1\dot{-}F)G=(1\dot{-}G)F,$$

ибо это равенство эквивалентно паре равенств

$$(1\dot{-}F)G=0,\quad (1\dot{-}G)F=0.$$

Простой пример

$$p=p^2$$

показывает, что этот разрешающий метод неприменим к равенству общего вида:

$$F = G.$$

Так как $F = G$ эквивалентно паре равенств, то отсюда следует, что функцию $p \dot{-} q$ *нельзя получить композицией из функций* $p + q$, pq *и* $1 \dot{-} p$.

ЛИТЕРАТУРА

Гёдель (K. Gödel)
[1] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monats. f. Math. u. Physik **38** (1931), 173—198.
Гудстейн (R. L. Goodstein)
[1] Recursive Number Theory, Amsterdam, 1957. [Русский перевод: Р. Л. Гудстейн. Рекурсивная теория чисел, наст. сборник.]

КОНСТРУКТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ*)

Р. Л. Гудстейн

Введение

В этой статье развивается теория p-кривых, представляющих собой конечные матрицы, элементами которых служат двоичные дроби. Грубо говоря, p-кривая — это конечная последовательность точек некоторой решетки, причем расстояние между двумя соседними (в последовательности) точками имеет фиксированное значение в одном или другом из двух «направлений». Затем понятие плоской кривой вводится в терминах последовательностей p-кривых. Везде в этой статье делается упор на строго финитистский характер доказательств.

Настоящая работа по топологии (analysis situs) является предварительной для изучения криволинейных интегралов.

Определение. Буквы i, j, k, l, m, n, μ, ν, p, q, r, s, t, ρ, σ, τ и они же с нижними индексами обозначают целые числа, буквы a, b, c, d, x, y, ξ, η и они же с верхними и нижними индексами — двоичные дроби вида $m/2^p$; более подробно — при данном p мы обозначаем $m/2^p$ через x^p и т. д. Упорядоченная пара (x, y) называется *точкой*, а упорядоченная пара $\langle x_1, x_2\rangle$ — *интервалом*; упорядоченная пара интервалов $\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle$ (где $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$) называется *прямоугольником* с *вершинами* (x_r, y_s), $r = 1, 2$ и $s = 1, 2$. Если

$$2^p a_r^p, \quad 0 \leqslant r \leqslant \mu_p, \quad 2^p b_s^p, \quad 0 \leqslant s \leqslant \nu_p,$$

— целые числа, лежащие соответственно между $2^p x_1^p$ и $2^p x_2^p$ и между $2^p y_1^p$ и $2^p y_2^p$, то точки

$$(a_r^p, b_s^p), \quad 0 \leqslant r \leqslant \mu_p, \quad 0 \leqslant s \leqslant \nu_p,$$

*) Перевод статьи: R. L. Goodstein, A constructivist theory of plane curves, Fundam. math. **43**, № 1 (1956), 23—35.

называются *узлами сетки*

$$F_p\begin{pmatrix} x_1^p & x_2^p \\ y_1^p & y_2^p \end{pmatrix}$$

в прямоугольнике $\langle x_1^p, x_2^p\rangle\langle y_1^p, y_2^p\rangle$; прямоугольники

$$\langle a_r^p, a_{r+1}^p\rangle\langle b_s^p, b_{s+1}^p\rangle, \quad 0\leqslant r\leqslant \mu_p, \quad 0\leqslant s\leqslant \nu_p,$$

называются *p-клетками* прямоугольника $\langle x_1^p, x_2^p\rangle\langle y_1^p, y_2^p\rangle$ или сетки

$$F_p\begin{pmatrix} x_1^p & x_2^p \\ y_1^p & y_2^p \end{pmatrix}.$$

Пусть для данного $k\geqslant 1$ целые i_r, j_r удовлетворяют равенству

(0.1) $$|i_{r+1}-i_r|+|j_{r+1}-j_r|=1$$

для всех r, $0\leqslant r\leqslant k-1$, и $x_r^p=i_r/2^p$, $y_r^p=j_r/2^p$; тогда *упорядоченное* множество точек

(0.2) $$(x_r^p, y_r^p), \quad 0\leqslant r\leqslant k,$$

называется *плоской кривой* или, подробнее, плоской *p-кривой*, соединяющей точки (x_0^p, y_0^p) и (x_k^p, y_k^p). Если

(0.3) $$|i_r-i_s|+|j_r-j_s|>0$$

для всех r, s, удовлетворяющих $0\leqslant r<s\leqslant k$, то о кривой (0.2) говорят, что она *простая* и *открытая*.

(0.31) Если i_r, j_r удовлетворяют условию (0.3) для всех r, s таких, что $0\leqslant r<s\leqslant k-1$ или $1\leqslant r<s\leqslant k$, и если в дополнение к этому $i_k=i_0$, $j_k=j_0$, $k\geqslant 4$, то говорят, что кривая (0.2) является *простой* и *замкнутой*.

Если x_r, y_r — периодические с периодом k и если (x_r, y_r), $0\leqslant r\leqslant k$, — простая замкнутая кривая, то тем самым кривая (x_r, y_r), $m\leqslant r\leqslant m+k$ — простая и замкнутая. Говорят, что кривые (x_r, y_r), $0\leqslant r\leqslant k$ и (x_r, y_r), $m\leqslant r\leqslant m+k$ *эквивалентны* и взаимно заменяемы.

Если

$$i_{2r}^{p+1}=2i_r^p, \quad i_{2r+1}^{p+1}=i_r^p+i_{r+1}^p$$

и

$$j_{2r}^{p+1}=2j_r^p, \quad j_{2r+1}^{p+1}=j_r^p+j_{r+1}^p,$$

где i_r^p, j_r^p удовлетворяют (0.1), то, очевидно, что i_r^{p+1}, j_r^{p+1} удовлетворяют (0.1). Говорят, что p-кривая (x_r^p, y_r^p), $0\leqslant r\leqslant k$ и $(p+1)$-кривая (x_r^{p+1}, y_r^{p+1}), $0\leqslant r\leqslant 2k$ (где $x_r^q=i_r^q/2^q$, $y_r^q=j_r^q/2^q$ при $q=p$, $p+1$) *эквивалентны* и взаимно заменяемы.

Мы будем обозначать через ξ (с одним или более индексами) значение, принимаемое одним или более из чисел x_r, $0\leqslant r\leqslant k$, а через η — значение, принимаемое одним или более из y_r, $0\leqslant r\leqslant k$. В сетке F_p значение $\xi+2^{-p}$ будет называться *следующим* за ξ и обозначаться через ξ', а $\xi-2^{-p}$ будет называться *предшествующим* ξ и обозначаться через ξ^*. Аналогично мы определяем η', η^*. Следующим за x_r является, конечно, x_{r+1}, $r<k$, а предшествующим x_{r+1} является x_r, $r\geqslant 0$; мы будем также называть x_1 следующим за $x_k(=x_0)$ в *замкнутой* кривой, а x_{k-1} — предшествующим x_0. Аналогично следующим за y_k и предшествующим y_0 являются соответственно y_1 и y_{k-1}, когда кривая замкнута.

Пара вида ξ, ξ' будет называться *вертикальной полосой*; пара η, η' — *горизонтальной полосой*.

Если r_n, $0\leqslant n\leqslant \mu$, — все индексы r такие, что или

$$x_r=\xi, \ x_{r+1}=\xi' \quad \text{или} \quad x_r=\xi', \ x_{r+1}=\xi$$

в простой замкнутой кривой (x_r, y_r), $0\leqslant r\leqslant k$, то значения η_n чисел y_{r_n}, $0\leqslant n\leqslant \mu$, называются *граничными уровнями* вертикальной полосы ξ, ξ' (заметим, что $y_r=y_{r+1}$, поскольку $x_r\neq x_{r+1}$). Эти числа η все различны, ибо точки (x_n, η_n), (x_{n+1}, η_{n+1}) не могут обе дважды входить в множество (x_r, y_r), $0\leqslant r\leqslant k$. Аналогично мы определяем граничные уровни горизонтальной полосы η, η'.

Предшествующие определения и следующие доказательства можно рассматривать как *схемы* определений и доказательств, которые можно формализовать, заменив используемые там неконкретные числа и функции конкретными числами и функциями. Определения, однако, допускают также формализацию в исчислении со свободными переменными.

1. Теорема 1. *Если* (x_r, y_r), $0\leqslant r\leqslant k$ — *простая кривая и если для некоторых* m, n (*где* $0\leqslant m<n\leqslant k$,

если эта кривая открыта, и $0 \leqslant m < n < k$ *или* $0 < m < n \leqslant k$, *если она замкнута) и для всех* s, t, *удовлетворяющих неравенствам* $m \leqslant s < t \leqslant n$, *имеет место* $y_s = y_t$, *то последовательность* x_r, $m \leqslant r \leqslant n$, *строго монотонна.*

Мы можем предположить, что $n \geqslant m + 2$, иначе нечего доказывать. Пусть $x_s = \xi$, так что, поскольку $y_{s+1} = y_s$, x_{s+1} должно быть или ξ' или ξ^*; допустим, что имеет место первое; тогда x_{s+2} отличается и от x_s и от x_{s+1}, а *значения* x_{s+1}, x_{s+2} являются последовательными в F_p, поэтому $x_{s+2} = \xi''$. Аналогично, если $x_{s+1} = \xi^*$, то $x_{s+2} = \xi^{**}$ и, следовательно, поскольку $x_m \gtrless x_{m+1}$, то последовательность x_r, $m \leqslant r \leqslant n$ строго монотонна.

2. Теорема 2. *Если целые* i_r *удовлетворяют равенству* (0.1) *и если* $0 \leqslant m < n \leqslant k$, *то* i_r *принимает каждое целое значение между* i_m *и* i_n *для значений* r, *лежащих между* m *и* n.

Действительно, если $i_m < v < i_n$ и если μ — наименьшее целое, большее m и такое, что $i_\mu \geqslant v$, то тогда $i_{\mu-1} \leqslant v - 1$; но

$$0 \leqslant (i_\mu - v) + (v - 1 - i_{\mu-1}) = (i_\mu - i_{\mu-1}) - 1 \leqslant 0$$

и, следовательно, $i_\mu = v$.

Отсюда следует, что если (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$, — p-кривая, то x_r принимает каждое значение $l/2^p$ между x_m, x_n для r, лежащих между m, n, а y_r принимает каждое значение $l/2^p$ между y_m, y_n для r, лежащих между m, n.

3. Теорема 3. *Если целые* i_r, $0 \leqslant r \leqslant k$, *удовлетворяют* (0.1) *и* $i_k = i_0$ *и если при некоторых* m, v $i_0 < v$, $i_m = v$, а $\lambda < k$ — *наибольший индекс такой, что* $i_\lambda = v$, *то имеет место* $i_{\lambda+1} = v - 1$; *действительно, иначе* $i_{\lambda+1} = v + 1$ *и по теореме 2 мы имели бы* $i_r = v$ *для некоторого* r, *где* $\lambda + 1 < r < k$. *Аналогично, если* $i_0 > v$ *и* μ — *наименьший индекс, для которого* $i_\mu = v$, *то* $i_{\mu-1} = v + 1$.

4. Теорема 4. *Если* (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$, — *простая замкнутая кривая и если для некоторых* m, n

$$x_m = \xi, \quad x_{m+1} = \xi' \quad \text{и} \quad x_n = \xi', \quad x_{n+1} = \xi,$$

то $m \neq n + 1$ *и* $n \neq m + 1$.

Действительно, в силу (0.31) $x_{m+2} \gtrless \xi' > x_{n+1}$ и $x_{n+2} \lessgtr \xi < x_{m+1}$.

5. Теорема 5. *Если* (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$ — *простая замкнутая кривая, то каждая пара значений* ξ, ξ' *принимается последовательными значениями* x *четное число раз.*

Доказательство. Если нет ни одного значения r, $0 \leqslant r \leqslant k$, такого, что для данной пары ξ, ξ' имеет место $x_r = \xi$ и $x_{r+1} = \xi'$ или $x_r = \xi'$ и $x_{r+1} = \xi$, то теорема доказана.

Если имеется *единственное значение* r, $0 \leqslant r \leqslant k$, такое, что $x_r = \xi$, $x_{r+1} = \xi'$, то имеется s, $0 \leqslant s \leqslant k$ такое, что $x_s = \xi'$, $x_{s+1} = \xi$. Ибо если $x_0 < \xi'$ и s — наибольший индекс такой, что $x_s = \xi'$, то по теореме 3 $x_{s+1} = \xi$. Более того, по теореме 4 $s > r + 1$.

Если имеется более одного значения r, для которого $x_r = \xi$, $x_{r+1} = \xi'$, то между любыми двумя такими последовательными значениями, скажем, m и n, имеется ρ такое, что

$$x_\rho = \xi', \quad x_{\rho+1} = \xi \quad \text{и} \quad \rho + 1 < n.$$

Действительно, если $\rho + 1$ — наименьший индекс между $m + 1$ и n такой, что $x_{\rho+1} = \xi$, то по теореме 3 $x_\rho = \xi'$ (и $m + 1 < \rho < n - 1$ по теореме 4). Аналогично, между последовательными значениями r, для которых $x_r = \xi'$, $x_{r+1} = \xi$, имеется значение r, для которого $x_r = \xi$, $x_{r+1} = \xi'$.

Пусть m_s, $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, где $m_s < m_{s+1}$, — *все* значения r, $0 \leqslant r \leqslant k$, для которых $x_r = \xi$, $x_{r+1} = \xi'$, и пусть μ_t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, где $\mu_t < \mu_{t+1}$, — все значения r, $0 \leqslant r \leqslant k$, для которых $x_r = \xi'$, $x_{r+1} = \xi$.

Мы можем без потери общности предполагать, что $m_0 < \mu_0$. Так как имеется μ между m_0 и m_1, то μ_0 лежит между m_0 и m_1, а поскольку имеется m между μ_0 и μ_1, то m_1 лежит между μ_0 и μ_1, и, следовательно, μ_0 — *единственное* μ между m_0 и m_1.

Аналогично, μ_s — это единственное μ между m_s и m_{s+1}, $0 \leqslant s \leqslant \sigma - 1$. С помощью рассмотрения *эквивалентной* замкнутой кривой (x_r, y_r), $m_\sigma \leqslant r \leqslant m_\sigma + k$, отсюда следует, что имеется единственное τ между m_σ и $m_0 + k$ такое, что $x_r = \xi'$, $x_{r+1} = \xi$, и, следовательно, имеется только одно μ, большее чем m_σ (ибо наименьшее μ, т. е.

μ_0, превосходит m_0). Таким образом, $\tau = \sigma$, что завершает доказательство.

Таким же образом мы можем показать, что каждая пара значений η, η' принимается четное число раз последовательными значениями y.

Из теоремы 5 следует, что в простой замкнутой p-кривой имеется *четное* число граничных уровней в каждой горизонтальной полосе и четное число — в каждой вертикальной полосе. Если x_l, x_g — наименьшее и наибольшее значения x_r, $0 \leqslant r \leqslant k$, а y_l, y_g — наименьшее и наибольшее значения y_r, $0 \leqslant r \leqslant k$, если $2^p X_s$, $0 \leqslant s \leqslant \sigma$ — целые от $2^p x_l$ до $2^p x_g$ включительно, а $2^p Y_t$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, — целые от $2^p y_l$ до $2^p y_g$ и если, наконец, η_r^s, $1 \leqslant r \leqslant 2\mu_s$, — граничные уровни в полосе X_s, X_{s+1} и ξ_r^t, $1 \leqslant r \leqslant 2\nu_t$, — граничные уровни в полосе Y_t, Y_{t+1}, то клетки сетки F_p во всех прямоугольниках

$$\langle X_s, X_{s+1}\rangle\langle \eta_{2r-1}^s, \eta_{2r}^s\rangle, \quad 1 \leqslant r \leqslant \mu_s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \sigma - 1,$$

называются *внутренними p_x-клетками* данной кривой, а клетки сетки F_p во всех прямоугольниках $\langle \xi_{2r-1}^t, \xi_{2r}^t\rangle\langle Y_t, Y_{t+1}\rangle$, $1 \leqslant r \leqslant \nu_t$, $0 \leqslant \tau \leqslant r - 1$, называются *внутренними p_y-клетками* данной кривой. Клетка сетки F_p в вертикальной полосе, которая не является внутренней p_x-клеткой, называется *внешней p_x-клеткой*, а клетка в горизонтальной полосе, которая не является внутренней p_y-клеткой, называется *внешней p_y-клеткой*.

6. *Сцепленные граничные уровни.* Пусть (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$, — простая замкнутая кривая на сетке F_p, где x_r, y_r периодичны с периодом k.

Говорят, что уровень α (этой замкнутой кривой) в полосе ξ^*, ξ *сцеплен по* ξ с уровнем β в полосе ξ, ξ', если или $\beta = \alpha$, или $\beta \gtrless \alpha$ и для некоторых μ, $\nu > 1$

$$x_\mu = \xi^*, \quad x_{\mu+\nu+1} = \xi', \quad x_r = \xi, \quad \mu + 1 \leqslant r \leqslant \mu + \nu,$$

и $y_\mu = \alpha$, $y_{\mu+\nu+1} = \beta$, а $2^p y_r$, $\mu + 1 \leqslant r \leqslant \mu + \nu$, — все целые от $2^p\alpha$ до $2^p\beta$ включительно.

Говорят, что два уровня α, β *одной и той же* полосы ξ^*, ξ или ξ, ξ' *сцеплены по* ξ, если $y_\mu = \alpha$, $y_{\mu+\nu+1} = \beta$, а $2^p y_r$, $\mu + 1 \leqslant r \leqslant \mu + \nu$, — все целые от $2^p\alpha$ до $2^p\beta$ включительно и $x_r = \xi$, $\mu + 1 \leqslant r \leqslant \mu + \nu$, и либо $x_\mu = x_{\mu+\nu+1} = \xi^*$, либо $x_\mu = x_{\mu+\nu+1} = \xi'$.

6.1. *Если уровень α сцеплен с уровнем β по ξ, то α не сцеплен с другим уровнем по ξ*; действительно, у простой кривой не может быть *двух* значений r, $0 \leqslant r \leqslant k$, для которых $y_r = y_{r+1} = \alpha$ и либо $x_r = \xi^*$, $x_{r+1} = \xi$, либо $x_r = \xi'$, $x_{r+1} = \xi$.

6.2. *Если α, β — последовательные граничные уровни в одной из полос ξ^*, ξ; ξ, ξ', если $\alpha \leqslant \eta < \eta' \leqslant \beta$ и если для некоторого μ выполняется $x_\mu = x_{\mu+1} = \xi$ и $y_\mu = \eta$, $y_{\mu+1} = \eta'$ (или $y_\mu = \eta'$, $y_{\mu+1} = \eta$), то уровни α, β сцеплены по ξ.*

Пусть $2^p\rho_s$, $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, — целые от $2^p\alpha$ до $2^p\beta$ включительно, где $\rho_t = \eta$, $\rho_{t+1} = \eta$, $0 \leqslant t < \sigma$. Если $\alpha = \eta$, $\beta = \eta'$, то нечего и доказывать; поэтому мы можем предположить, что $\mu \geqslant 2$, так что при $1 \leqslant s < \sigma - 1$ ρ_s не является граничным уровнем ни в какой из полос ξ^*, ξ; ξ, ξ'.

Поэтому $x_{\mu+2} = \xi$, $y_{\mu+2} = \rho_{t+2}$ и по индукции $x_n = \xi$, $y_n = \rho_{n+t-\mu}$ при $\mu \leqslant n \leqslant \mu + \sigma - t$. Аналогично, $x_m = \xi$, $y_m = \rho_{m+t-\mu}$ при $\mu - t \leqslant m \leqslant \mu - 1$, что завершает доказательство.

6.21. Из 6.2 следует, что *если последовательные граничные уровни α, β не сцеплены по ξ, то нет значения μ, $0 \leqslant \mu \leqslant k$, для которого $x_\mu = x_{\mu+1} = \xi$ и $2^p y_\mu$, $2^p y_{\mu+1}$ являются последовательными целыми между $2^p\alpha$ и $2^p\beta$ включительно.*

6.3. *Если α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ — последовательные граничные уровни в любой из полос ξ^*, ξ или ξ, ξ', то либо β является уровнем в обеих полосах, либо β сцеплен по ξ или с α, или с γ.*

Действительно, если β и не является уровнем в обеих полосах и если $y_\mu = y_{\mu+1} = \beta$ и один из x_μ, $x_{\mu+1}$ есть ξ, то возможны два случая:

(a) $x_{\mu+1} = \xi$, тогда $x_{\mu+2} = x_{\mu+1}$;

(b) $x_\mu = \xi$, тогда $x_{\mu-1} = x_\mu$.

В случае (a) либо $y_{\mu+2} = \beta'$, либо $y_{\mu+2} = \beta^*$; если выполняется первое, то β сцеплен по ξ с γ, а если

выполняется второе, то β сцеплен с α в силу 6.2. Аналогично получается требуемый результат и в случае (b). Заметим, что если γ — *наибольший* граничный уровень в какой-либо из полос и если γ является уровнем только в одной из этих двух полос и в другой полосе нет большего граничного уровня, то предшествующие рассмотрения показывают, что γ необходимо сцеплен с β по ξ. Если γ является уровнем в обеих полосах, то по определению γ сцеплен по ξ.

6.4. Мы считаем очевидными соответствующие 6—6.3 определения и теоремы о сцепленных уровнях в *горизонтальных* полосах.

6.5. *Если* $\langle\xi^*, \xi\rangle\langle\eta, \eta'\rangle$ *и* $\langle\xi, \xi'\rangle\langle\eta, \eta'\rangle$ *— внутренние* p_x*-клетки простого замкнутого контура* (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$, *то* ξ *не является граничным уровнем в полосе* η, η'.

Имеется *нечетное* число уровней в полосе ξ^*, ξ, которые не меньше чем η', и нечетное число — в полосе ξ, ξ'. Поэтому имеется *четное* число уровней, которые лежат в одной или другой из этих двух полос и которые не меньше чем η' (считая дважды значение y_r, которое является уровнем в обеих полосах). Пусть эти уровни в порядке убывания величин суть h_r, $1 \leqslant r \leqslant 2n$ (где для некоторых значений r h_r может равняться h_{r+1}). В силу 6.3 h_1 сцеплен с h_2, h_3 с h_4 и, следовательно, по индукции h_{2r-1} сцеплен с h_{2r} при $1 \leqslant r \leqslant n$. Если h_{2n+1} — первый уровень в какой-либо полосе, который меньше η' (и поэтому не больше η), то h_{2n}, будучи специальным с h_{2n-1}, не сцеплен с h_{2n+1} и, следовательно, в силу 6.21 нет такого μ, $0 \leqslant \mu < k$, что $x_\mu = x_{\mu+1} = \xi$ и $y_\mu = \eta$, $y_{\mu+1} = \eta'$ (или $y_{\mu+1} = \eta$, $y_\mu = \eta'$), — это доказывает, что ξ не является граничным уровнем в горизонтальной полосе η, η'.

6.51. *Если одна из* p_x*-клеток* $\langle\xi^*, \xi\rangle\langle\eta, \eta'\rangle$, $\langle\xi, \xi'\rangle\langle\eta, \eta'\rangle$ *внутренняя, а другая внешняя, то* ξ *— граничный уровень в полосе* η, η' *и обратно.*

Доказательство аналогично 6.5.

7. Теорема 7. *В простой замкнутой кривой* (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$, *внутренние* p_x*-клетки являются внутренними* p_y*-клетками и наоборот.*

Пусть граничные уровни в полосе η, η' суть ξ_s, $1 \leqslant s \leqslant 2\mu$, где $\xi_{s+1} > \xi_s$, $1 \leqslant s \leqslant 2\mu - 1$.

Если σ меньше, чем x_r, $0 \leqslant r \leqslant k$, то в силу 6.51 в прямоугольнике $\langle\sigma, \xi_1\rangle\langle\eta, \eta'\rangle$ нет внутренних p_x-клеток; следовательно, в силу 6.51 все внутренние p_x-клетки, которые лежат в полосе η, η', лежат в прямоугольниках $\langle\xi_{2r-1}, \xi_{2r}\rangle\langle\eta, \eta'\rangle$ и поэтому являются и p_y-клетками. Аналогично, внутренние p_y-клетки являются и p_x-клетками.

В свете теоремы 7 теперь мы опускаем индекс и говорим о внутренних p_x- или p_y-клетках как о внутренних p-клетках, а о тех клетках сетки F_p, которые не являются внутренними p-клетками, как о внешних p-клетках.

8. Для любого s, $0 \leqslant s \leqslant k-1$ простые кривые (x_r, y_r), $s \leqslant r \leqslant s+1$, соединяющие точки (x_s, y_s). (x_{s+1}, y_{s+1}), называются *граничными линиями* простой замкнутой кривой (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant k$; для любого конкретного значения r между 0 и k включительно точка (x_r, y_r) называется *граничной p-точкой* или *вершиной* этой простой замкнутой кривой.

9. Пусть $2^p\alpha_r$, $0 \leqslant r \leqslant \mu$, — целые от 2^pa до 2^pb включительно, а $2^p\nu_r$, $0 \leqslant r \leqslant \nu$, — целые от 2^pc до 2^pd включительно; тогда, если

$$\begin{aligned}
&x_r = a_r, && y_r = c, && 0 \leqslant r \leqslant \mu,\\
&x_r = b, && y_r = \gamma_{r-\mu}, && \mu \leqslant r \leqslant \mu + \nu,\\
&x_r = a_{2\mu+\nu-r}, && y_r = d, && \mu + \nu \leqslant r \leqslant 2\mu + \nu,\\
&x_r = a, && y_r = \gamma_{2\mu+2\nu-r}, && 2\mu + \nu \leqslant r \leqslant 2(\mu + \nu),
\end{aligned}$$

и

$$x_r^* = x_{2\mu+2\nu-r}, \quad y_r^* = x_{2\mu+2\nu-r}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2(\mu + \nu),$$

то простая замкнутая кривая (x_r^*, y_r^*), $0 \leqslant r \leqslant 2(\mu + \nu)$ (или эквивалентная p-кривая), называется *p-путем* вокруг прямоугольника $\langle a, b\rangle\langle c, d\rangle$ *по часовой стрелке*, а (x_r, y_r), $0 \leqslant r \leqslant 2(\mu + \nu)$ называется *p-путем против часовой стрелки.*

Стороны p-пути вокруг p-клетки называются *сторонами p-клетки.* Внутренняя клетка простой замкнутой кривой, которая имеет сторону, общую с этой кривой, называется *внутренней граничной клеткой.*

9.1. Для любого узла (ξ, η) сетки F_p мы определяем

$$\left.\begin{aligned} &x_r^s = \xi, && r = 0,\ 3,\ 4,\\ &x_r^s = \xi', && r = 1,\ 2,\\ &y_0^s = y_1^s = y_4^s, && y_2^s = y_3^s, \end{aligned}\right\} \quad 1 \leqslant s \leqslant 4,$$

$$\begin{aligned} &y_0^s = \eta, && s = 1,\ 2, && y_2^s = \eta', && s = 1,\\ &y_0^s = \eta', && s = 3, && y_2^s = \eta, && s = 3,\ 4,\\ &y_0^s = \eta^*, && s = 4, && y_2^s = \eta^*, && s = 2. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что простые замкнутые p-кривые $(x_r^s,\ y_r^s)$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, являются путями по часовой стрелке при $s = 2,\ 3$ и путями против часовой стрелки при $s = 1,\ 4$. В кривых, получаемых при $s = 1,\ 2$, точка (ξ, η) предшествует точке (ξ', η), а в кривых, получаемых при $s = 3,\ 4$, точка (ξ', η) предшествует (ξ, η).

Таким образом, среди этих четырех кривых имеется одна, идущая по часовой стрелке, и одна, идущая против часовой стрелки, в которых точка (ξ, η) предшествует точке (ξ', η); одна кривая, идущая по часовой стрелке, и одна, идущая против часовой стрелки, в которой точка (ξ', η) предшествует точке (ξ, η).

9.11. Пусть η — граничный уровень в полосе $\xi,\ \xi'$ простой замкнутой кривой Γ; тогда из четырех кривых $(x_r^s,\ y_r^s)$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, или те, у которых $s = 1,\ 3$, или те, у которых $s = 2,\ 4$, являются путями вокруг внутренней граничной клетки с вершинами (ξ, η), (ξ', η). Во всяком случае имеется только *одна* кривая, в которой порядок точек (ξ, η), (ξ', η) *тот же*, что в Γ. Аналогично, имеется лишь один путь вокруг внутренней граничной клетки с вершинами (ξ, η), (ξ', η), в котором порядок этих точек тот же, что и в Γ. Таким образом, с каждой граничной линией Γ мы связали единственный путь вокруг внутренней граничной клетки, и об этом пути говорят, что он описывается в *том же направлении*, что и Γ. Мы покажем, что все пути, описанные вокруг внутренних граничных клеток Γ и описанные в том же направлении, что и Γ, являются либо направленными по часовой

стрелке либо против часовой стрелки. В первом случае говорят, что кривая Γ направлена по часовой стрелке, во втором — против часовой стрелки.

9.12. Пусть путь вокруг внутренней граничной клетки из Γ с вершинами (ξ, η), (ξ', η) есть кривая $(x_r^1,\ y_r^1)$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, направленная против часовой стрелки, и рассмотрим точку из Γ, следующую за точками (ξ, η), (ξ', η).

Если этой следующей точкой является (ξ'', η), то ξ' не есть граничный уровень в полосе $\eta,\ \eta'$, и поэтому $\langle \xi', \xi'' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$ представляет собой *внутреннюю* граничную клетку; таким образом, путь, связанный со стороной Γ, соединяющей точки (ξ', η), (ξ'', η), — это идущая *против часовой стрелки* кривая

$$(\xi', \eta),\quad (\xi'', \eta),\quad (\xi'', \eta'),\quad (\xi', \eta'),\quad (\xi', \eta)$$

(т. е. кривая $(x_r^1,\ y_r^1)$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, в которой ξ заменено на ξ' и поэтому ξ' заменено на ξ'').

Если такой следующей точкой является (ξ', η'), то ξ' — граничный уровень в полосе $\eta,\ \eta'$, и поэтому $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$ представляет собой внутреннюю клетку, связанную со стороной Γ, соединяющей точки (ξ', η), (ξ', η'), и путь, связанный с этой стороной — это идущая против часовой стрелки кривая $(x_r^1,\ y_r^1)$, $0 \leqslant r \leqslant 4$.

Если рассматриваемой следующей точкой является (ξ', η^*), то $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta^*, \eta \rangle$ — внешняя клетка и поэтому $\langle \xi', \xi'' \rangle \langle \eta^*, \eta \rangle$ представляет собой внутреннюю клетку, связанную со стороной, соединяющей точки (ξ', η), (ξ', η^*), а путь, связанный с этой стороной, есть идущая *против часовой стрелки* кривая $(x_r^4,\ y_r^4)$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, в которой ξ' заменено на ξ и ξ'' — на ξ'.

Подобный же анализ можно применить для рассмотрения точек, следующих за (ξ, η), (ξ, η'). Таким образом, если путь вокруг одной внутренней граничной клетки, описанный в том же направлении, что и кривая Γ, идет против часовой стрелки, то то же верно и для пути, описанного в том же направлении, что и Γ, вокруг всякой другой внутренней граничной клетки. А если тот путь идет по часовой стрелке, то и все остальные также.

10. Если Γ_{p+1} — замкнутая кривая на сетке F_{p+1}, которая эквивалентна кривой Γ_p на сетке F_p, то внутренние $(p+1)$-клетки Γ_{p+1} являются $(p+1)$-клетками внутренних p-клеток Γ_p. В самом деле, если y_r^p — граничный уровень в полосе x_r^p, x_{r+1}^p, то $y_{2r}^{p+1} = y_r^p$ — граничный уровень в каждой из полос x_{2r}^{p+1}, x_{2r+1}^{p+1}; x_{2r+1}^{p+1}, x_{2r+2}^{p+1}. Аналогично для граничных уровней в горизонтальных полосах.

11. Пусть Γ и γ — простые замкнутые кривые на сетке F_p. Если все внутренние клетки γ являются и внутренними клетками Γ, а все внутренние клетки Γ, имеющие вершины на Γ, являются внешними для γ, то говорят, что γ *полностью содержится* в Γ.

Говорят, что γ и Γ являются *полностью внешними* одна к другой, если никакая внутренняя клетка одной не является внутренней клеткой другой и никакая граничная p-точка одной не является граничной p-точкой другой.

11.1. *Если γ полностью содержится в Γ, то все клетки, внешние к γ, с вершиной на γ являются внутренними для Γ.*

Пусть $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$ — клетка, внешняя к γ, а (ξ, η) — граничная p-точка γ. Если ξ — граничный уровень γ в полосе η, η', то клетка $\langle \xi^*, \xi \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$ является внутренней клеткой γ и также Γ; поэтому ни (ξ, η), ни (ξ, η') не являются граничными точками Γ и, следовательно, ξ не является граничным уровнем Γ в η, η'. Поэтому клетка $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$ — внутренняя для Γ. Аналогичный результат имеет место, если η — граничный уровень γ в полосе ξ, ξ'.

Если ξ не является граничным уровнем γ в η, η', а η не является граничным уровнем в ξ, ξ', то клетка $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta^*, \eta \rangle$ — внешняя к γ; поскольку (ξ, η) необходимо содержится между (ξ^*, η) и (ξ, η^*) в γ, то клетка $\langle \xi^*, \xi \rangle \langle \eta^*, \eta \rangle$ — внутренняя к γ, а, следовательно, и к Γ. Поэтому (ξ, η) не является граничной точкой Γ и, следовательно, ξ не является граничным уровнем Γ в полосе η^*, η, а η не является граничным уровнем Γ в ξ, ξ'; в соответствии с этим и $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta^*, \eta \rangle$, и $\langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle$ суть внутренние клетки Γ.

11.2. *Если γ_1, γ_2, γ_3 — простые замкнутые кривые и если γ_1 полностью содержится в γ_2, а γ_2 полностью содержится в γ_3, то γ_1 полностью содержится в γ_3.*

Действительно, внутренние клетки γ_1 являются внутренними клетками γ_2, а внутренние клетки γ_2 являются внутренними клетками γ_3, так что внутренние клетки γ_1 являются внутренними и для γ_3. Кроме того, всякая клетка, которая имеет вершину на γ_3, является внешней для γ_2 и поэтому внешней для γ_1.

11.3. Вершина внутренней p-клетки простой замкнутой кривой, которая не является также вершиной самой кривой, называется *внутренней* p-точкой этой кривой. Вершина внешней p-клетки, которая не является вершиной самой кривой, называется *внешней* p-точкой.

Если L — внутренняя, а M — внешняя p-точка простой замкнутой кривой γ, то любая простая p-кривая, соединяющая L с M, имеет вершину, общую с γ.

Пусть k — простая p-кривая от L до M. Имеются граничные p-точки k, внешние к γ (например, M); пусть (a_{r+1}, b_{r+1}) — первая точка k, которая *не* является внутренней p-точкой, так что (a_r, b_r) — внутренняя p-точка. По крайней мере одна из двух клеток с вершинами (a_r, b_r), (a_{r+1}, b_{r+1}) является внутренней p-клеткой и, следовательно, (a_{r+1}, b_{r+1}) — граничная p-точка γ.

12. *Пусть Γ — простая замкнутая кривая (x_r^p, y_r^p), $0 \leqslant r \leqslant k$, на сетке F_p, а γ — простая замкнутая p-кривая (a_r^p, b_r^p), $0 \leqslant r \leqslant \lambda$ такая, что каждая точка (a_r^p, b_r^p), $0 \leqslant r \leqslant \lambda$, является внутренней точкой Γ. Тогда γ полностью содержится в Γ.*

Пусть b_r^p — граничный уровень γ в полосе $(a_\nu^p, a_{\nu+1}^p)$ с $b_\nu^p = b_{\nu+1}^p$; мы можем без потери общности предполагать, что $a_{\nu+1}^p > a_\nu^p$. Поскольку (a_ν^p, b_ν^p) и $(a_{\nu+1}^p, b_{\nu+1}^p)$ — внутренние точки Γ, то b_ν^p содержится между последовательными граничными уровнями Γ в полосе $(a_\nu^p, a_{\nu+1}^p)$, скажем η_1, η_2, где $\eta_1 < \eta_2$, и пусть

$$x_\rho = a_\nu^p, \quad x_{\rho+1} = a_{\nu+1}^p, \quad x_\sigma = a_{\nu+1}^p, \quad x_{\sigma+1} = a_\nu^p,$$

$$y_\rho = \eta_1, \quad y_{\rho+1} = \eta_1, \quad y_\sigma = \eta_2, \quad y_{\sigma+1} = \eta_2.$$

Обозначим через $2^{p+1}e_r$, $0 \leqslant r \leqslant h$, целые от $2^p\eta_1$ до $2^p\eta_2$, а через D — простую замкнутую $(p+1)$-кривую (X_r, Y_r), где

$$X_r = x^{p+1}_{r+2\rho+1}, \quad Y_r = y^{p+1}_{r+2\rho+1}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2(\sigma-\rho),$$

$$X_r = x^{p+1}_{2p+1}, \quad Y_r = e_{2(\sigma-\rho)+h-r}, \quad 2(\sigma-\rho)+1 \leqslant r \leqslant 2(\sigma-\rho)+h,$$

и

$$x^{p+1}_{2r} = x^p_r, \quad x^{p+1}_{2r+1} = \frac{1}{2}(x^p_r + x^p_{r+1}),$$

$$y^{p+1}_{2r} = y^p_r, \quad y^{p+1}_{2r+1} = \frac{1}{2}(y^p_r + y^p_{r+1})$$

(так что (x^{p+1}_r, y^{p+1}_r), $0 \leqslant r \leqslant 2k$, эквивалентна Γ).

Далее, пусть L — простая $(p+1)$-кривая (a^{p+1}_r, b^{p+1}_r), $2(\nu+1) \leqslant r \leqslant 2(\nu+\lambda)$, соединяющая точки (a^p_ν, b^p_ν), $(a^p_{\nu+1}, b^p_{\nu+1})$, где (a^{p+1}_r, b^{p+1}_r), $0 \leqslant r \leqslant 2\lambda$, эквивалентны (a^p_r, b^p_r), $0 \leqslant r \leqslant \lambda$, и как a^{p+1}_r, так и b^{p+1}_r периодичны с периодом 2λ.

Единственным граничным уровнем D между a^p_ν и $a^p_{\nu+1}$ в любой из полос e_r, e_{r+1}, $0 \leqslant r \leqslant h-1$, является X_0, и, следовательно, одна из точек (a^p_ν, b^p_ν), $(a^p_{\nu+1}, b^p_{\nu+1})$ внутренняя для D, а другая внешняя к D. Отсюда в силу 11.3 L и D имеют общую граничную $(p+1)$-точку. Можно показать, что Γ и γ не имеют общих точек, и поэтому общие точки L и D суть (X_0, e_r) для некоторых значений r. Пусть общими точками являются (a^{p+1}_r, b^{p+1}_r), $r = 2(\nu+1)+r_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, где $r_{m+1} > r_m$ и $r_n < 2\lambda$. Сравнение (a^{p+1}_r, b^{p+1}_r) и (a^p_r, b^p_r) показывает, что при $r = 2(\nu+1)+r_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, b^{p+1}_r является граничным уровнем γ в полосе a^p_ν, $a^p_{\nu+1}$ и граничным уровнем L в каждой из полос $a^{p+1}_{2\nu}$, $a^{p+1}_{2\nu+1}$ и $a^{p+1}_{2\nu+1}$, $a^{p+1}_{2\nu+2}$. Следовательно, при $r = 2(\nu+1)+r_m+(-1)^m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, точки (a^{p+1}_r, b^{p+1}_r) лежат на той же стороне D, что и $a^p_{\nu+1}$, а те точки, для которых $r = 2(\nu+1)+r_m-(-1)^m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, лежат на той же стороне, что и a^p_ν; но $2(\nu+1)+r_n$ — наибольшее значение r (меньшее $2(\nu+\lambda)$), для которого (a^{p+1}_r, b^{p+1}_r) является общей точкой L и D,

и поэтому $r_n+(-1)^n < r_n-(-1)^n$, что доказывает нечетность n.

Поскольку само b^p_ν также является граничным уровнем γ в полосе a^p_ν, $a^p_{\nu+1}$, то, следовательно, имеется *четное* число граничных уровней γ в полосе a^p_ν, $a^p_{\nu+1}$, которые лежат между η_1 и η_2 — последовательными граничными уровнями Γ.

Таким образом, между любыми двумя последовательными уровнями Γ в полосе ξ, ξ' лежит четное число граничных уровней γ (и никакой граничный уровень γ не лежит вне Γ, поскольку вершины γ являются внутренними точками Γ), так что если f_r, $1 \leqslant r \leqslant 2i$, — граничные уровни Γ в ξ, ξ' (в порядке возрастающих величин), то внутренние клетки γ в этой полосе лежат между f_{2r-1} и f_{2r}, $1 \leqslant r \leqslant i$, и поэтому все являются внутренними клетками Γ, а граничные клетки Γ являются внешними клетками γ. Таким образом, γ полностью содержится внутри Γ.

13. *р-кривая относительно непрерывной функции.*

13.1. Рациональная рекурсивная функция (см. [1] *)) $f(n, x)$ сходится по n и непрерывна по x относительно n (см. [1], стр. 174 **)) в интервале $\langle a, b\rangle$, если имеются рекурсивные функции $N(k, x)$, $a^k(r)$, $\beta(k)$, $\sigma(k, r)$ и $C(x, y, k)$ такие, что для всех положительных целых k, для всех целых n, не меньших $N(k, x)$, и для всех рациональных x из $\langle a, b\rangle$ имеет место

$$|f(n, x) - f(N(k, x), x)| < 1/2^k,$$

а при $0 \leqslant r \leqslant \beta(k)$ выполняется

$$|f(n, x) - f(n, a^k(r)| < 1/2^k$$

для всех x, удовлетворяющих $a^k(r) \leqslant x \leqslant a^k(r+1)$ и $n \geqslant C(x, a^k(r), k)$, где $a^k(0) = a$, $a^k(\beta(k)+1) = b$, $a^k(r) < a^k(r+1)$, $0 \leqslant r \leqslant \beta(k)$ и $a^{k+1}(r) = a^k(\sigma(k, r))$.

---

*) Или главу I книги автора «Рекурсивный анализ», перевод которой помещен в настоящем сборнике. — *Прим. ред.*

**) Или стр. 310 настоящего сборника. — *Прим. ред.*

13.2. Пусть $f(n, x)$ сходится по n и непрерывна относительно n в $\langle a, b\rangle$; тогда каждая из разностей

$$|f(n, a^{k+2}(r)) - f(N(k+2, a^{k+2}(r)), a^{k+2}(r))|,$$
$$|f(n, a^{k+2}(r+1)) - f(N(k+2, a^{k+2}(r+1)), a^{k+2}(r+1))|,$$
$$|f(n, a^{k+2}(r+1)) - f(n, a^{k+2}(r))|$$

меньше, чем $1/2^{k+2}$, откуда

$$|f(N(k+2, a^{k+2}(r+1)), a^{k+2}(r+1)) - f(N(k+2, a^{k+2}(r)), a^{k+2}(r))| < 3/2^{k+2}$$

и, следовательно, если

$$f_k(r) = [2^k f(N(k+2, a^{k+2}(r)), a^{k+2}(r))]/2^k$$

(где $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x, если x неотрицателен, $[x] = -[-x]$, если x отрицателен), то

$$|f_k(r+1) - f_k(r)| \leqslant 1/2^k$$

и, следовательно, целые $2^k f_k(r)$ *равны или являются последовательными для последовательных значений* r. $f_k(r)$ называется *канвой* функции $f(n, x)$; канва зависит, конечно, от *разбиения* $a^k(r)$.

13.3. Пусть $f(n, x)$ и $g(n, x)$ обе сходятся по n и непрерывны относительно n в $\langle a, b\rangle$. Комбинируя разбиения $\langle a, b\rangle$, связанные соответственно с $f(n, x)$ и $g(n, x)$, мы можем образовать канву каждой из этих функций — $f_k(r)$ и $g_k(r)$ — на общем разбиении, скажем, $a^k(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \beta(k) + 1$.

Пусть

$$\Theta(0) = 0, \quad \Theta(r+1) = 2^p\{f_p(r+1) - f_p(r)\},$$
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(r+1) = 2^p\{g_p(r+1) - g_p(r)\}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant \beta(p),$$

так что $\Theta(r)$ и $\varphi(r)$ принимают лишь значения $0, \pm 1$.

Далее, пусть $r_0 = 0$ и пусть r_{n+1} — наименьшее целое, большее чем r_n и такое, что $|\Theta(r_{n+1})| + |\varphi(r_{n+1})| > 0$, если такое число существует; в противном случае $r_{n+1} = r_n$. Пусть μ_p — наибольшее положительное целое такое, что $\mu_p \leqslant \beta(p) + 1$ и $r_{\mu_p} > r_{\mu_p - 1}$, если такое существует; в противном случае $\mu_p = 0$. Отсюда, если $f_p^*(i) = f_p(r_i)$ и $g_p^*(i) = g_p(r_i)$, $0 \leqslant i \leqslant \mu_p$, и

$$\Theta^*(0) = 0, \quad \Theta^*(i+1) = 2^p\{f_p^*(i+1) - f_p^*(i)\},$$
$$\varphi^*(0) = 0, \quad \varphi^*(i+1) = 2^p\{g_p^*(i+1) - g_p^*(i)\},$$

то $\Theta^*(i)$, $\varphi^*(i)$ принимают только значения $0, \pm 1$ и необращаются одновременно в нуль при $i > 0$.

Далее, пусть $k_1 + 1$, $k_2 + 1, \ldots$, $k_\nu + 1$ — значения i (если такие есть) в возрастающем порядке величин, для которых $|\Theta^*(i)\varphi^*(i)| > 0$; тогда мы определяем

$$\left.\begin{aligned} f^p(k_r + r) &= f_p^*(k_r + 1), \ f^p(j) = f_p^*(j - s), \\ g^p(k_r + r) &= g_p^*(k_r), \quad g^p(j) = g_p^*(j - s), \end{aligned}\right\} \begin{matrix} 1 \leqslant r \leqslant \nu, \\ k_s + s + 1 \leqslant j \leqslant k_{s+1} + s, \\ 1 \leqslant s \leqslant \nu - 1, \end{matrix}$$

и

$$f^p(j) = f_p^*(j), \qquad g^p(j) = g_p^*(j), \qquad 0 \leqslant j \leqslant k_1,$$
$$f^p(j) = f_p^*(j - \nu), \quad g^p(j) = g_p^*(j - \nu), \quad k_\nu + \nu + 1 \leqslant j \leqslant \mu_p + \nu.$$

Если $\Theta^*(i)\varphi^*(i) = 0$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant \mu_p$, то мы определяем

$$f^p(i) = f_p^*(i), \quad g^p(i) = g_p^*(i), \quad 0 \leqslant i \leqslant \mu_p.$$

В любом случае

$$2^p\{|f^p(i+1) - f^p(i)| + |g^p(i+1) - g^p(i)|\} = 1$$

и поэтому

$$(f^p(r), g^p(r)), \quad 0 \leqslant r \leqslant \mu_p + \nu$$

(где ν — число значений i, для которых $|\Theta^*(i)\varphi^*(i)| > 0$), является плоской p-кривой, которую мы будем называть *p-кривой, сопоставленной паре* $f(n, x)$, $g(n, x)$.

Таким образом, пара функций $f(n, x)$, $g(n, x)$, каждая из которых сходится по n и непрерывна по x относительно n, определяет последовательность кривых — p-кривых, сопоставленных этой паре, для всех положительных целых значений p.

14. Если $f(r)$ — канва функции $f(n, x)$ на разбиении $a(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \beta + 1$, то $\sum_{r=0}^{\beta} |f(r+1) - f(r)|$ называется *относительной вариацией* $f(n, x)$ на разбиении $a(r)$.

14.1. Если V^1, V^2 — относительные вариации $f(n, x)$ на разбиениях $a_1(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \beta_1 + 1$; $a_2(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \beta_2 + 1$, и если имеется положительная целая функция v_p такая, что при $k \geqslant 1$

$$|V^1 - V^2| < 1/k$$

для любых разбиений $a_1(r)$, $a_2(r)$, удовлетворяющих

$$\max_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \beta_1 \\ 0 \leqslant s \leqslant \beta_2}} \{(a_1(r+1) - a_1(r)),\ (a_2(s+1) - a_2(s))\} < 1/v_k,$$

то (в предвидении следующей теоремы) говорят, что $f(n, x)$ является функцией с *вариацией, сходящейся относительно* n.

14.2. *Если $f(n, x)$ — функция с вариацией, сходящейся относительно n, и если V_p — ее относительная вариация на разбиении $a^p(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \beta(p) + 1$, такая, что* $\max_{0 \leqslant r \leqslant \beta(p)} \{a^p(r+1) - a^p(r)\} \to 0$, *то V_p сходится.*

Действительно, мы можем определить p_k так, что $\max_{0 \leqslant r \leqslant \beta(p)} \{a^p(r+1) - a^p(r)\} < 1/v_k$ при $p \geqslant p_k$, и, следовательно, если q — произвольное положительное число, то в силу 14.1

$$|V_{p+q} - V_p| < 1/k,$$

что доказывает сходимость V_p.

14.3. Если $f(n, x)$, $g(n, x)$ имеют вариацию, сходящуюся относительно n, то говорят, что последовательность p-кривых, сопоставленных этой паре функций, является *спрямляемой*.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гудстейн (R. L. Goodstein), Recursive function theory, Acta Math. **92** (1954), 171—190.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ РЕКУРСИВНОЙ АРИФМЕТИКИ *)

Х. Б. Карри

I. Введение

Термин «рекурсивная арифметика» в том смысле, в каком он употребляется здесь, означает развитие некоторой части теории натуральных чисел путем постулирования элементарных логических операций со свободными переменными и равенством, функции следования $n + 1$ и возможности применять «примитивно рекурсивные определения» вида

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, 0) = \psi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = \chi(x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)),$$

где ψ и χ — функции указанных переменных, которые уже были определены. Такое рассмотрение арифметики было начато Сколемом [1]), хотя основные идеи были уже у Дедекинда и Пеано; а значительная часть ее развита в седьмой главе первого тома книги Гильберта и Бернайса [2]). Огромным стимулом для идей рекурсивной арифметики явилось использование их Гёделем в его теореме о неполноте, 1931 г.; с тех пор они сыграли важную роль в метатеоретических исследованиях.

Некоторые из этих метатеоретических приложений рекурсивной арифметики предполагали возможность формализовать ее, т. е. построить полностью абстрактную систему, определенную некоторым множеством исходных термов, операций, аксиом и правил, интерпретацией

*) Перевод статьи: H. B. Curry, A formalization of recursive arithmetic, Amer. J. Math. **63** (1941), 263—282. Представлено Американскому Математическому обществу 26 апреля 1940 г.

[1]) «Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Variablen mit unendlichen Ausdehnungsbereich», Videnskapsselskapet Skrifter, 1923.

[2]) D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol. I, Berlin, 1934.

которой является описанная выше интуитивная рекурсивная арифметика[1]). В предпринятом недавно анализе теоремы Клини — Россера о непротиворечивости я обнаружил, что мне нужна такая формулировка, и поэтому я построил такую систему как часть работы на эту тему[2]). Эта формализация отличается от формализации Сколема и Гильберта — Бернайса тем, что она строится не на основе логического исчисления, а является полностью независимой логической системой[3]). Рекурсивная арифметика на такой основе не развивается детально в той статье: это основная задача настоящей работы. Цель состоит в том, чтобы показать адекватность этой формулировки рекурсивной арифметики: конечный результат — это доказательство того, что рассматриваемая система эквивалентна системе Гильберта и Бернайса.

Основные этапы в предлагаемом рассмотрении можно предварительно описать следующим образом. В § 2 находится формулировка системы: здесь она приведена подробно, так что настоящая статья не зависит от предшествующей. После рассмотрения некоторых фундаментальных теорем в § 3 более простые свойства некоторых арифметических функций приведены в § 4. В § 5 показано, как в нашу систему погружается пропозициональное исчисление. После этого и до конца статья нацелена на доказательство того, что формализм Гильберта — Бернайса можно включить в настоящую схему. Это занимает в §§ 7 и 8, а в общем плане обсуждается в начале § 7; § 6 состоит только из лемм. Имеются две основные трудности: вывод схемы равенства J_2 в 7.4 и теорема 8.7. Ключом для решения их обеих служит теорема о двойной индукции 7.2.

При ссылках на различные части этой статьи используются обозначения арабскими цифрами; число перед точкой является номером параграфа. Если делается ссылка на несколько подразделений одного параграфа, то номер последнего не повторяется; так, 4.11.34.15 означает ссылку на 4.11, 4.34, 4.15 в указанном порядке. Ссылки на различные параграфы отделяются запятыми.

[1]) Обсуждение природы формальной системы см. в § 2 статьи, цитированной в следующей сноске, или в моем выступлении в Нью-Йорке «Некоторые аспекты проблемы математической строгости» (H. B. Curry, Some aspects of the problem of mathematical rigor,. Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 221—241. — *Прим. перев.*).

Система, приведенная ниже, сложна не только потому, что в ней бесконечно много исходных символов, но и потому, что в ней имеется правило (см. 2.74) не элементарного характера. Это интересный пример такой неэлементарной системы.

[2]) The paradox of Kleene and Rosser, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 454—516.

[3]) Таким образом, она является дальнейшим шагом по сравнению с работой Сколема, который показал, что рекурсивную арифметику можно формализовать без кванторов.

2. Формулировка основной конструкции.

2.1. *Предварительные объяснения.*

2.11. Система рекурсивной арифметики, формулируемая здесь, будет называться системой $\mathfrak{R}$.

2.12. Теоремы системы $\mathfrak{R}$ будут включать в себя не только числа и числовые переменные, но и функции любого числа аргументов. Соответственно мы рассмотрим бесконечную последовательность типов термов $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2, \ldots$ Здесь $\mathfrak{E}_0$ включает в себя числа, числовые переменные и выражения, которые можно подставлять вместо них; мы будем ссылаться на них просто как на *(рекурсивные) выражения.* С другой стороны, термы из $\mathfrak{E}_n$ при $n > 0$ представляют *(рекурсивные) функции* n аргументов.

2.13. Желательно также подразделить термы из $\mathfrak{E}_0$ в соответствии с теми переменными, от которых они зависят (или задуманы как зависящие). Так, если $\mathfrak{X}$ — произвольное множество переменных, то $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$ — класс выражений, все переменные которых принадлежат $\mathfrak{X}$. В этой связи пустое множество переменных обозначается через «$\mathfrak{O}$», а множество всех переменных — через $\mathfrak{V}$, так что термы из $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{O})$ — это *постоянные выражения*, а $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{V})$ — это то же самое, что и $\mathfrak{E}_0$. Мы будем также подразумевать, что $\mathfrak{E}_0(x_1, \ldots, x_n)$ означает то же самое, что и $\mathfrak{E}_0(\{x_1, \ldots, x_n\})$, где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество, состоящее из $x_1, \ldots, x_n$.

2.14. Соглашения относительно использования букв следующие:

2.141. Арабские цифры используются как индексы, а в интуитивных обсуждениях — в их обычном смысле. «0» и «1» используются также для обозначения специфических выражений (чисел); из них 0 — исходный знак, тогда как 1 определяется в терминах 0 и функции следования обычным образом (см. 4.0).

2.142. Строчные латинские буквы с индексами или без них используются следующим образом:

«i», «m», «n» — для обозначения неспецифицированных (unspecified) цифр в интуитивных обсуждениях и в качестве индексов, так же как в обычной математике;

«v_1», «v_2», ... — для обозначения специфических выражений — числовых переменных, составляющих класс $\mathfrak{V}$;

«a», «b», «c», «d», «x», «y», «z» — для обозначения неспецифицированных переменных (т. е. членов $\mathfrak{V}$).

2.143. Строчные греческие буквы используются для функций. Буквы «φ», «ψ», «χ» обозначают неспецифицированные функции; другие обозначают специфические функции и поэтому имеют фиксированное значение на протяжении всей статьи.

2.144. Строчные готические буквы используются для неспецифицированных выражений. Они могут быть снабжены аргументами для того, чтобы показать их зависимость от определенных переменных, как это объяснено в начале § 3.

2.145. Прописные латинские буквы используются для операций. Они предшествуют своим аргументам; поскольку их вид фиксирован, скобки не нужны (как в польской системе логических обозначений).

2.146. Прописные готические буквы используются для специальных целей следующим образом:

«$\mathfrak{R}$» — как в 2.11;

«$\mathfrak{C}$», «$\mathfrak{D}$», «$\mathfrak{B}$» — для классов термов, как в 2.12.13;

«$\mathfrak{X}$», «$\mathfrak{Y}$» — для неспецифицированных классов переменных;

«$\mathfrak{A}$», «$\mathfrak{B}$», «$\mathfrak{C}$» — для неспецифицированных термов пропозиционального исчисления в 5.3.

2.15. Различные дополнительные соглашения относительно использования символов. (Заметим, что символы

из 2.151 — 2.155 являются неформальными, т. е. они служат сокращениями для выражений обычного языка.)

2.151. «$\equiv$» обозначает тождество по определению.

2.152. «&» используется как конъюнкция «и» между предложениями, а также как связка в исчислении высказываний.

2.153. «$\rightarrow$» используется как импликативная связь между предложениями. В этой статье она используется лишь там, где переход от антецедента к консеквенту совершается только по правилам 2.71—2.73 [1]).

2.154. «$\rightleftarrows$» аналогично используется в качестве эквивалентности.

2.155. «$\in$» и «$\subseteq$» используются в их обычном теоретико-множественном значении — «$\in$» — для принадлежности классу, «$\subseteq$» — для включения.

2.156. Ниже в формулировках части текста в скобках касаются интерпретации $\mathfrak{R}$; они не относятся к абстрактной формулировке.

2.157. Чтобы устранить излишние скобки, символы операций и подобные им классифицируются по старшинству так: символы любой строки старше (т. е. связывают сильнее), чем символы в строке ниже ее [2]).

$\rightarrow$, $\rightleftarrows$, $\equiv$,

&,

$=$,

$\supset$, $\supset\subset$,

$\vee$, $\wedge$,

$+$, $\dot{-}$, $\Box$,

Σ

$\cdot$ (умножение)

---

[1]) «$\rightarrow$» используется также в §§ 5 и 7 в качестве импликативной связки исчисления высказываний. Это делается для того, чтобы обозначения были такими же, как у Гильберта — Аккермана.

[2]) Ср. мою статью об использовании точек в качестве скобок в Journal of Symbolic Logic 2 (1937), 26—28. Точечные обозначения не используются здесь из-за возможного смешения с умножением.

Что касается символов, находящихся в одной и той же строке этой классификации, то их следует располагать слева направо, так что

$$a + b + c \equiv (a + b) + c.$$

2.2. *Исходные термы.* Их имеется бесконечное множество (об использовании скобок см. 2.156):

2.21. (Числовая константа): 0.

2.22. Бесконечная последовательность $\mathfrak{V}$ *числовых переменных*: v_1, v_2, v_3, ... По поводу обозначения конкретных членов $\mathfrak{V}$ см. 2.142.

2.23. (Функция) σ. (Это функция следования, переводящая любое выражение $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{a} + 1$.)

2.24. (Функция) ζ. (Это функция, имеющая 0 своим постоянным значением; ср. 2.62.)

2.25. Множество (функций) k_{nm}, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $m = 1, 2, \ldots, n$(k_{nm} выбирает m-й аргумент из последовательности n аргументов; ср. 2.63).

2.3. *Операции.* Они также образуют бесконечное множество, разбитое на три типа так, как в 2.31—2.33.

2.31. Для любого $n > 0$ имеется $(n + 1)$-арная операция A_n. (Она представляет собой применение n-арной функции к n аргументам.) В соответствии с традициями мы полагаем

$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) \equiv A_n\varphi\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n,$$

где $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ и $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathfrak{E}_0$.

2.32. Для каждого $m > 0$ и $n > 0$ имеется $(n + 1)$-арная операция S_{mn} (представляющая подстановку m n-арных функций в одну m-арную; ср. 2.64 ниже).

2.33. Для каждого $n > 0$ — бинарная операция R_n (представляющая рекурсивное определение $(n + 1)$-арной функции в терминах n-арной и $(n + 2)$-арной; ср. 2.65 ниже).

2.4. *Правила построения.* Теперь мы переходим к правилам построения выводимых выражений и к классификации выражений на типы, упомянутым в 2.1.

2.41. $0 \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$ для любого $\mathfrak{X}$.

2.42. $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$.

2.43. $\sigma \in \mathfrak{E}_1$.

2.44. $\zeta \in \mathfrak{E}_1$.

2.45. $k_{nm} \in \mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots, n)$.

2.46. Если $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ и $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$.

2.47. Если $\varphi \in \mathfrak{E}_m$ и $\psi_i \in \mathfrak{E}_n$ при $i = 1, 2, \ldots, m$, то $S_{mn}\varphi\psi_1 \ldots \psi_m \in \mathfrak{E}_n$.

2.48. Если $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ [1]), а $\psi \in \mathfrak{E}_{n+2}$, то $R_n\varphi\psi \in \mathfrak{E}_{n+1}$.

2.5. *Элементарные высказывания.* Единственным исходным предикатом системы является бинарное отношение равенства между числовыми выражениями. Элементарными считаются высказывания, имеющие вид

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{V})$.

2.6. *Аксиомы.* При формулировании аксиом у нас есть две возможности: или мы можем формулировать специфические аксиомы с правилом подстановки, или мы можем формулировать схемы аксиом в смысле фон Неймана. Здесь мы следуем второму пути. Подразумевается, что $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — произвольные выражения из $\mathfrak{E}_0$, а φ, ψ, χ — произвольные функции.

2.61. $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ [2]).

2.62. $\zeta(\mathfrak{a}) = 0$.

2.63. $k_{nm}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}_m$.

2.64. Если $\psi \in \mathfrak{E}_m$, а $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \mathfrak{E}_n$ и, кроме того, $\varphi \equiv S_{mn}\psi\chi_1 \ldots \chi_m$, то

$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \psi(\chi_1(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n), \ldots, \chi_m(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)).$$

2.65. Если $\psi \in \mathfrak{E}_n$ [3]), $\chi \in \mathfrak{E}_{n+2}$, $\varphi \equiv R_n\psi\chi$, то

$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, 0) = \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n),$$
$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \sigma(\mathfrak{b})) = \chi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}, \varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b})).$$

2.7. *Правила вывода.* Как и прежде, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — произвольные выражения из $\mathfrak{E}_0$.

2.71. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

2.72. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \,\&\, \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \to \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

---

[1]) В случае $n=0$ под $\mathfrak{E}_0$ понимается $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{O})$.

[2]) Это излишне, ибо мы имеем $k_{11}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ в силу 2.63, $\mathfrak{a} = k_{11}(\mathfrak{a})$ в силу 2.71, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ в силу 2.72.

[3]) В случае $n=0$ $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{O})$ следует понимать как и в 2.48.

2.73. Если $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ и $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \varphi(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)\ ^1).$$

2.74 (математическая индукция). Если $\varphi, \psi \in \mathfrak{E}_{n+1}$ и $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathfrak{E}(\mathfrak{Y})$ таковы, что

(i) $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, 0) = \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, 0)$,

(ii) в предположении, что

(1) $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, x) = \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, x)$,

где x — переменная, не принадлежащая $\mathfrak{Y}$, с помощью 2.71—2.73 и известных теорем можно получить

(2) $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \sigma(x)) = \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \sigma(x))\ ^2)$,

то для любого $\mathfrak{b} \in \mathfrak{E}_0$

$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}) = \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}).$$

3. Основные теоремы.

3.0. *Соглашения.* Выражение «$\mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_n)$» будет обозначать произвольное выражение из $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — некоторое множество переменных, включающее $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ будет обозначать результат подстановки $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ соответственно вместо

---

[1]) Это правило, конечно, сильнее, чем необходимо. В действительности, достаточно сформулировать это правило для следующих случаев: (a) когда $\varphi \equiv \sigma$, (b) когда $\varphi \equiv R_m \varphi \chi$ и только последний аргумент φ заменяется. (Я не исследовал, можно или нельзя избавиться от этого второго требования; во всяком случае, его достаточно.) Оставшаяся часть 2.73 может быть затем выведена методами § 3.

[2]) Это можно, если угодно, более точно сформулировать так: равенство (2) является последним в последовательности равенств, каждое из которых является или равенством (1) или известной теоремой, или выводится из некоторых предыдущих равенств по одному из правил 2.71—2.72.

$x_1, \ldots, x_n$ в $\mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_n)$ [1]). Если аргументы опущены, то подразумевается, что они суть $x_1, \ldots, x_n$.

3.1. Теорема. *Если* $\mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{E}_0(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{Y})$, *то* $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{Y})$.

Доказательство. Доказательство проводим интуитивной индукцией по конструкции $\mathfrak{a}$, имея в виду, что $\mathfrak{a}$ должно строиться из $0, x_1, \ldots, x_n$ только с помощью 2.46. Мы обозначаем $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ посредством $\mathfrak{a}'$.

Если $\mathfrak{a} \equiv 0$, то $\mathfrak{a}' \equiv 0$ и теорема получается в силу 2.41. Если $\mathfrak{a} \equiv x_i$, то $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{b}_i$ и теорема следует из посылки. Таким образом, теорема имеет место, если $\mathfrak{a}$ — исходный терм.

Предположим теперь, что $\mathfrak{a} \equiv \varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$, где $\varphi \in \mathfrak{E}_m$, а $\mathfrak{a}_i$ — сокращение для $\mathfrak{a}_i(x_1, \ldots, x_n)$, и что теорема выполняется для $\mathfrak{a}_i$. Тогда в силу 3.0 $\mathfrak{a}' = \varphi(\mathfrak{a}_1', \ldots, \mathfrak{a}_n')$, где $\mathfrak{a}_i' \equiv \mathfrak{a}_i(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$, и теорема получается в силу 2.46.

3.11. Следствие. *Если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{E}_0(\mathfrak{Y})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{X})$, то $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0(x_1, \ldots, x_n)$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{X}$. По теореме при $\mathfrak{b}_i \equiv x_i$ и 2.42 мы имеем $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0(\mathfrak{Y})$, что и требовалось доказать,

3.2. Теорема. *Если*

$$\mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{b}(x_1, \ldots, x_n),$$

то для любых $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n) = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n).$$

---

[1]) Это понятие подстановки определяется индуктивно; но его можно, если угодно, определить формально индукцией по построению $\mathfrak{a}$ следующим образом:

i) если $\mathfrak{a} \equiv 0$, то
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) \equiv 0;$$

ii) если $\mathfrak{a} \equiv x_i$, то
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) \equiv \mathfrak{b}_i;$$

iii) если $\mathfrak{a} \equiv y$, где y не совпадает ни с одним из x_i, то
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) \equiv y;$$

iv) если $\mathfrak{a} \equiv \varphi(\mathfrak{a}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathfrak{a}_m(x_1, \ldots, x_n))$, где $\varphi \in \mathfrak{E}_m$, то
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) \equiv \varphi(\mathfrak{a}_1(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n), \ldots, \mathfrak{a}_m(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)).$$

Доказательство. Это можно доказать интуитивной индукцией по длине вывода посылки. Если посылка — аксиома, то заключение — также аксиома. С другой стороны, если посылка получается по одному из правил 2.7 и указанные подстановки допустимы в посылках этого правила, то это же самое правило позволяет вывести заключение из так преобразованных посылок. Ограничения на посылки этого правила выполняются в силу 3.1.

3.3. Теорема. *Если* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0(x_1, \ldots, x_n)$, *то существует* $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ *такое, что*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{a}.$$

Доказательство. Как и в 3.1, мы применяем интуитивную индукцию по построению $\mathfrak{a}$.

Если $\mathfrak{a}$ — исходный терм, то это или 0, или некоторое x_i. В последнем случае $\varphi \equiv k_{ni}$ удовлетворяет всем условиям (2.45.63). В первом случае положим $\varphi \equiv S_{1n}\zeta k_{n1}$. Тогда $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ (в силу 2.44.45.47); кроме того, также (в силу 2.64)

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(k_{n1}(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \text{ (в силу 2.62).}$$

Требуемый результат получается отсюда в силу 2.72.

Предположим теперь, что $\mathfrak{a} \equiv \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$, где $\psi \in \mathfrak{E}_m$ и $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m \in \mathfrak{E}_0(x_1, \ldots, x_n)$, и что теорема имеет место для $\mathfrak{a}_i$. Тогда существуют $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathfrak{E}_n$ такие, что

(1) $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{a}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Пусть

$$\varphi \equiv S_{mn}\psi\varphi_1 \ldots \varphi_m.$$

Тогда $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ (2.47). Кроме того, в силу 2.64

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$$
$$\text{(в силу (1), 2.73)} = \psi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m) = \mathfrak{a}.$$

Это завершает доказательство по индукции.

3.4. Теорема. *Если* $\mathfrak{a}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{E}_0(a_1, \ldots, a_n)$ *и* $\mathfrak{b}(a_1, \ldots, a_n, x, y) \in \mathfrak{E}_0(a_1, \ldots, a_n, x, y)$, *то существует* $\varphi \in \mathfrak{E}_{n+1}$ *такое, что*

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n, 0) = \mathfrak{a},$$
$$\varphi(a_1, \ldots, a_n, \sigma(x)) = \mathfrak{b}(a_1, \ldots, a_n, x, \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)).$$

Доказательство. В силу 3.3 существуют функции $\psi \in \mathfrak{E}_n$ и $\chi \in \mathfrak{E}_{n+2}$ такие, что

$$\psi(a_1, \ldots, a_n) = \mathfrak{a},$$
$$\chi(a_1, \ldots, a_n, x, y) = \mathfrak{b}(a_1, \ldots, a_n, x, y).$$

Следовательно, по 2.65 и 3.2 $\varphi \equiv R_n\psi\chi$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

3.5. Теорема (обобщение математической индукции). *Если* $\mathfrak{a}(x), \mathfrak{b}(x) \in \mathfrak{E}_0(x, y_1, \ldots, y_n)$ *таковы, что*

(i) $\mathfrak{a}(0) = \mathfrak{b}(0)$,

(ii) *из допущения* $\mathfrak{a}(x) = \mathfrak{b}(x)$

с помощью правил 2.71—2.73 (*и известных теорем*) *следует, что* $\mathfrak{a}(\sigma(x)) = \mathfrak{b}(\sigma(x))$, *то* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Доказательство. В силу 3.3 эта форма индукции сводится к 2.74.

4. Элементарные арифметические функции.

В этом параграфе приводятся простые свойства суммы, произведения и подобных арифметических функций. Доказательства по большей части хорошо известны, поэтому они лишь кратко намечаются.

Здесь, как и в остальной части этой статьи, допустимы теоремы из § 3. Новые функции определяются равенствами, к которым применимы 3.3 или 3.4; в последнем случае переменной, по которой производится рекурсия, всегда будет x. На основании 3.2 буквы a, b и т. д. в следующих теоремах можно понимать как произвольные выражения. В случае некоторых функций вводится не символ для функции как таковой, а лишь обычное операциональное представление ее значения; так, сложение определяется согласно 3.4 тем, что дается значение $a + 0$ и способ построения $a + \sigma(x)$ из $a + x$.

В случае, когда не приводится доказательства, оно проводится с помощью индукции (3.5) по последней в

алфавитном порядке переменной или соответствующая теорема следует непосредственно из определений.

4.0. Определение: $1 \equiv \sigma(0)$.

4.1. *Сложение.* **4.10.** Определение. **4.101.** $a+0=a$.
4.102. $a+\sigma(x)=\sigma(a+x)$. **4.11.** $0+a=a+0=a$.
4.12. $1+a=a+1=\sigma(a)$. **4.13.** $a+(b+c)=(a+b)+c$.
4.14. $\sigma(a)+b=a+\sigma(b)=\sigma(a+b)$. **4.15.** $a+b=b+a$.

4.2. *Вычитание.* **4.20.** Определения. **4.201.** $\delta(0)=0$.
4.202. $\delta(\sigma(x))=x$. **4.203.** $a \dot{-} 0=a$.
4.204. $a \dot{-} \sigma(x)=\delta(a \dot{-} x)$.
4.21. $\delta(a)=a \dot{-} 1$.
4.22. $0 \dot{-} a=0$.
4.23. $\sigma(a) \dot{-} \sigma(b)=a \dot{-} b$.
4.24. $(a+c) \dot{-} (b+c)=a \dot{-} b$.
4.241. $(a+b) \dot{-} a=b$. (4.11.15.24)
4.242. $a \dot{-} a=0$. ($b=0$ в 4.241)
4.243. $a \dot{-} (a+b)=0$. (4.11.15.22)
4.244. $a+b=0 \rightleftarrows a=0 \,\&\, b=0$. (4.241.22.15)
4.25. $a \dot{-} (b+c)=(a \dot{-} b) \dot{-} c=(a \dot{-} c) \dot{-} b$.
4.251. $(a \dot{-} b) \dot{-} a=0$. (4.243.25)
4.252. $\delta(a) \dot{-} b=a \dot{-} \sigma(b)=\delta(a \dot{-} b)$. (4.21.25)

4.3. *Умножение.* **4.30.** Определения. **4.301.** $a \cdot 0=0$.
4.302. $a \cdot \sigma(x)=a \cdot x+a$.
4.31. $0 \cdot a=a \cdot 0=0$.
4.32. $1 \cdot a=a \cdot 1=a$.
4.33. $\sigma(a) \cdot b=a \cdot b+1$.
4.34. $a \cdot b=b \cdot a$.
4.35. $a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)$.
4.36. $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$.
4.37. $a \cdot \delta(b)=(a \cdot b) \dot{-} a$.
4.38. $a \cdot (b \dot{-} c)=a \cdot b \dot{-} a \cdot c$.

4.4. *Отрицание.* **4.40.** Определение: $|a| \equiv 1 \dot{-} a$.
4.41. $|0|=1$; $|\sigma(a)|=0$.
4.42. $a \cdot |a|=0$.
4.421. $(a \dot{-} b) \cdot |a|=0$. (4.42.38.22)
4.43. $|a| \cdot |a|=|a|$. **4.44.** $|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$.

4.45. $|a \cdot b|=|a|+|b| \dot{-} |a| \cdot |b|$.
4.451. $|a|+\|a\|=1$. (4.42.45.41)
4.46. $\|0\|=0$; $\|\sigma(a)\|=1$. (4.41)
4.47. $\|\|a\|\|=|a|$. (4.46.41)
4.48. $a=\delta(a)+\|a\|$.
4.481. Если $|a|=0$, то $a=\sigma(\delta(a))$. (4.48.41.12)
4.49. $\delta(a) \dot{-} \delta(b)=(a \dot{-} b) \dot{-} |b|$.

4.5. *Функция равенства.* **4.50.** Определение: $a \square b \equiv (a \dot{-} b)+(b \dot{-} a)$.
4.51. $a \square 0=a$. (4.20.22.10)
4.52. $a \square a=0$. (4.242)
4.53. $a \square b=b \square a$. (4.15)
4.54. $(a+c) \square (b+c)=a \square b$. (4.24)
4.541. $\sigma(a) \square \sigma(b)=a \square b$. (4.12)
4.55. $a(b \square c)=(a \cdot b) \square (a \cdot c)$. (4.35.38)

5. Исчисление высказываний.

В книге Гильберта и Бернайса[1]) показано, что каждая формула, полученная комбинированием равенств со связками исчисления высказываний, эквивалентна простому равенству вида $\mathfrak{a}=0$. Эта идея используется здесь для того, чтобы показать, как можно погрузить исчисление высказываний в систему $\mathfrak{R}$. Действительно, допустим, что мы интерпретируем выражение $\mathfrak{a}$ как высказывание $\mathfrak{a}=0$; или, что приводит к тому же самому, допустим, что мы приписываем истинностное значение «истина», когда $\mathfrak{a}=0$, и «ложь», когда $\mathfrak{a}=\sigma(\delta(\mathfrak{a}))$. Тогда связки исчисления высказываний определимы; действительно, $|\mathfrak{a}|$ — это отрицание $\mathfrak{a}$, а арифметические сумма и произведение суть соответственно логическое произведение и сумма*); импликация и эквивалентность определяются ниже. Мы увидим в этом параграфе, что каждая формула**) исчисления высказываний верна в $\mathfrak{R}$,

[1]) См. стр. 310 книги, указанной в примечании [2]) на стр. 437. Идея восходит к Гёделю, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), стр. 180.

*) То есть связки «и» и «или». — *Прим. ред.*

**) Имеются в виду выводимые формулы. — *Прим. ред.*

если ее переменные заменены на выражения, а ее связки интерпретируются указанным образом.

5.0. *Определения.* **5.01.** $a \supset b \equiv |\, a \,| \cdot b$.

5.02. $a \supset\subset b \equiv (a \supset b) + (b \supset a)$.

5.1. *Предварительные теоремы.*

5.11. Если $\mathfrak{a} = 0$, то $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$. (4.41.32)

5.12. Если $\mathfrak{a} = 0$ и $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} = 0$, то $\mathfrak{b} = 0$. (5.11.01)

5.13. $a \supset 0 = \sigma(b) \supset a = 0$. (5.01, 4.41.31)

5.14. $a \supset 1 = |\, a \,|$. (5.01, 4.32)

5.15. Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} = 0$. (5.01, 4.42)

5.16. $a \supset \subset \| a \| = 0$.

Доказательство. (5.01) $a \supset \| a \| = |\, a \,| \cdot \| a \|$

(4.42) $= 0$. (1)

(5.01) $\| a \| \supset a = \| |\, a \,| \| \cdot a$.

(4.47) $= |\, a \,| \cdot a$.

(4.34.42) $= 0$. (2)

Заключение следует в силу (1), (2), 4.244 и 5.02.

5.2. *Проверка аксиом.*

5.21. $a \cdot a \supset a = 0$. (4.45.43.241.42)

5.22. $a \supset a \cdot b = 0$. (4.36.34.42.31)

5.23. $a \cdot b \supset b \cdot a = 0$. (4.34, 5.15)

5.24. $(a \supset b) \supset (c \cdot a \supset c \cdot b) = 0$.

Доказательство. (5.01) $c \cdot a \supset c \cdot b = |\, c \cdot a \,| \cdot (c \cdot b)$.

(4.34.36) $= b \cdot c \cdot |\, c \cdot a \,|$.

(4.45) $= b \cdot c \cdot (|\, c \,| + |\, a \,| \dot{-} |\, c \,| \cdot |\, a \,|)$.

(4.36.35.38) $= b \cdot (c \cdot |\, c \,| + c \cdot |\, a \,| \dot{-} c \cdot |\, c \,| \cdot |\, a \,|)$.

(4.42.31.36) $= b \cdot (0 + c \cdot |\, a \,| \dot{-} 0)$.

(4.11) $= b \cdot c \cdot |\, a \,|$.

(4.34.36) $= (|\, a \,| \cdot b) \cdot c$.

(5.01) $= (a \supset b) \cdot c$.

Это сводит доказываемую теорему к 5.22.

5.25. $a + b \supset \subset \| a \| \cdot | b \| = 0$. (5.16, 4.44).

5.3. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{T}$ *— формула классического исчисления высказываний такая, что* $\mathfrak{T}$ *выводима в этом исчислении. Допустим, что вместо переменных* $\mathfrak{T}$ *мы подставляем произвольные выражения системы* $\mathfrak{R}$ *и интерпретируем связки следующим образом*[1]):

$\overline{\mathfrak{a}}$ *как* $|\, \mathfrak{a} \,|$,

$\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ *как* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$,

$\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{b}$ *как* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$,

$\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ *как* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$.

Тогда если t *— выражение, построенное таким образом из* $\mathfrak{T}$, *то теоремой системы* $\mathfrak{R}$ *является равенство*

$$t = 0.$$

Доказательство. Классическое исчисление высказываний порождается с помощью правила вывода*) из следующих восьми схем:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A},$$
$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}),$$
$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}},$$
$$\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B},$$
$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B},$$
$$\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}).$$

(Первые четыре из этих схем — это аксиомы Гильберта — Аккермана, тогда как последние четыре дают «определения» конъюнкции и импликации.) Если $\mathfrak{T}$ — частный случай любой из первых шести схем, то наша теорема выполняется в силу 5.2 (и в силу 4.244 в случае

---

[1]) Обозначения Д. Гильберта и В. Аккермана, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin, 1928.
(Русский перевод: Введение в теоретическую логику, ИЛ, 1947. — *Прим. перев.*)

*) Modus ponens. — *Прим. перев.*

двух последних); если $\mathfrak{T}$ — частный случай одной из последних двух схем, то наша теорема следует в силу 5.01.15. Для завершения индукции по доказательству $\mathfrak{T}$ нам надо лишь показать, что если наша теорема выполняется для $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_1 \to \mathfrak{T}_2$, то она выполняется и для $\mathfrak{T}_2$; это следует в силу 5.12.

5.4. *Специальные случаи.* Следующие равенства перечисляются для ссылок в дальнейшем:

5.41. $(a \supset b) \supset ((a + c \supset b + c) = 0$. **5.42.** $a + b \supset a = 0$.
5.43. $(a \supset b) \supset ((b \supset c) \supset (a \supset c)) = 0$. **5.44.** $a + b \supset b = 0$.
5.45. $(a + b \supset c) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c)) = 0$.
5.46. $(a \supset b) \supset (a \cdot c \supset b \cdot c) = 0$.

6. Обобщенное суммирование.

Эти теоремы являются леммами для использования в § 7. Систематическое изучение обобщенных сумм происходило бы несколько иначе.

6.0. Определение. **6.01.** $\sum_{z=0}^{0} \mathfrak{a}(z) = \mathfrak{a}(0)$.

6.02. $\sum_{z=0}^{\sigma(x)} \mathfrak{a}(z) = \sum_{z=0}^{x} \mathfrak{a}(z) + \mathfrak{a}(\sigma(x))$.

6.03. Замечание. Заметим, что z в этих определениях — связанная переменная, и ни z, ни $\mathfrak{a}(z)$ не являются составляющей частью выражения $\sum_{z=0}^{b} \mathfrak{a}(z)$. Действительно допустим, что $\mathfrak{a}(x) \in \mathfrak{E}_0(x, y_1, \ldots, y_n)$ и что ψ — такая функция, что

$$\psi(y_1, \ldots, y_n, x) = \mathfrak{a}(x).$$

Тогда $\sum_{z=0}^{x} \mathfrak{a}(z)$ есть $\varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$, где φ определяется так:

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n, 0) = \psi(y_1, \ldots, y_n, 0),$$
$$\varphi(y_1, \ldots, y_n, \sigma(x)) = \varphi(y_1, \ldots, y_n, x) + \psi(y_1, \ldots, y_n, \sigma(x)).$$

6.1. Теорема. *Если* $\mathfrak{a}(a) = 0$, *то*

$$\sum_{z=0}^{b} \mathfrak{a}(z) = 0.$$

Доказательство. Индукцией по b.

Замечание. Теорема не совсем тривиальна по причине, отмеченной в 6.03. Она требует использования математической индукции; следовательно, ее нельзя использовать для установления посылки (ii) из 2.74.

6.2. Теорема. *Если* $\mathfrak{a}(a) = \mathfrak{b}(a)$, *то*

$$\sum_{z=0}^{b} \mathfrak{a}(z) = \sum_{z=0}^{b} \mathfrak{b}(z).$$

Доказательство. Индукция по b.

6.3. Теорема. *Если* $\mathfrak{a}(a) \supset \mathfrak{b}(a) = 0$, *то*

$$\sum_{z=0}^{b} \mathfrak{a}(z) \supset \sum_{z=0}^{b} \mathfrak{b}(z) = 0.$$

Доказательство. Индукция по b и 5.41.

6.4. Теорема.

$$\sum_{z=0}^{a+\sigma(b)} \mathfrak{a}(z) = \sum_{z=0}^{b} \mathfrak{a}(z) + \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(z + \sigma(b)).$$

Доказательство. Индукция по a с использованием 5.44.

6.5. Теорема.

$$\sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(z) \supset \mathfrak{a}(a) = 0.$$

Доказательство. Индукция по a, используя 5.44.

6.6. Теорема.

$$\sum_{z=0}^{a+b} \mathfrak{a}(z) \supset \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(z) = 0.$$

Доказательство. Индукция по b с использованием 5.42.

7. Теоремы об индукции и равенстве.

Теперь мы приступаем к выполнению программы, имеющей целью показать, что техника Гильберта — Бернайса для рекурсивных функций включается в систему $\mathfrak{R}$. Как объяснено в книге Гильберта и Бернайса на стр. 307, эта техника состоит из (1) элементарного исчисления со свободными переменными*), (2) аксиом равенства J_1 и J_2**), (3) формулы $0' \neq 0$, (4) общего использования рекурсивных определений, (5) подстановки и явных определений и (6) схемы индукции***). Будет показано, что все это можно включить в $\mathfrak{R}$, если мы интерпретируем исходные символы системы Гильберта — Бернайса следующим образом:

Г. — Б.	$\mathfrak{R}$
$\mathfrak{a}$ доказано	$\mathfrak{a} = 0$
$\overline{\mathfrak{a}}$	$\lvert \mathfrak{a} \rvert$
$\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$
$\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$
$\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} (\equiv \lvert \mathfrak{a} \rvert \cdot \mathfrak{b})$
$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \,\square\, \mathfrak{b}$
$\mathfrak{a}'$	$\sigma(\mathfrak{a})$
$\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$	$\mathfrak{a} \dot{-} \mathfrak{b}$

При таком понимании справедливость элементарного исчисления со свободными переменными была показана

*) Исходными формулами элементарного исчисления со свободными переменными являются тождественно истинные формулы исчисления высказываний, а правилами вывода — подстановка вместо предикатных переменных и свободных предметных переменных, а также схема вывода modus ponens. — *Прим. ред.*

**) Аксиомы равенства

$$J_1\colon\ a = a,$$
$$J_2\colon\ a = b \to (A(a) \to A(b)).$$

— *Прим. ред.*

***) Схема индукции;

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)}.$$

— *Прим. ред.*

в 5.3; справедливость аксиомы равенства J_1 — в 4.52; формула $0' \neq 0$, которая переходит в равенство $\lvert \sigma(0) \,\square\, 0 \rvert = 0$, следует в силу 4.51.41, тогда как пункты (4) и (5) из перечисленных выше были установлены в § 3. Остается только вывести схему индукции и аксиому равенства J_2. Это сделано ниже соответственно в 7.2 и 7.4. Окончательный результат заключается в 7.6.

7.1. Теорема. *Если*

(i) $\mathfrak{a}(0) = 0$,

(ii) $\mathfrak{a}(x) \supset \mathfrak{a}(\sigma(x)) = 0$,

то

$$\mathfrak{a}(a) = 0.$$

Доказательство. В силу (ii) и 5.12 посылка (ii) из 3.5 выполнена; следовательно, искомая теорема получается в силу 3.5.

7.2. Теорема. *Если*

(i) $\mathfrak{a}(a, 0) = 0$,

(ii) $\mathfrak{a}(0, b) = 0$,

(iii) $\mathfrak{a}(x, y) \supset \mathfrak{a}(\sigma(x), \sigma(y)) = 0$,

то

$$\mathfrak{a}(a,\ b) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{b}(a,b) = \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(z, b)$.

Тогда (6.01, (ii))

$$\mathfrak{b}(0, b) = 0; \tag{1}$$

также (6.1, (i))

$$\mathfrak{b}(\sigma(a), 0) = 0. \tag{2}$$

Снова (6.6)

$$\mathfrak{b}(\sigma(a), b) \supset \mathfrak{b}(a, b) = 0,$$

тогда как (в силу 6.3, (iii))

$$\mathfrak{b}(a, b) \supset \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(\sigma(z), \sigma(b)) = 0.$$

$\therefore$ (5.43)*)

$$\mathfrak{b}(\sigma(a), x) \supset \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(\sigma(z), \sigma(x)) = 0. \tag{3}$$

*) Знак $\therefore$ автор использует в качестве замены слов «ввиду», «на основании» и т. п. — *Прим. ред.*

С другой стороны, в силу 6.4.01, 4.12

$$\mathfrak{b}(\sigma(a), \sigma(x)) = \mathfrak{a}(0, \sigma(x)) + \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(z+1, \sigma(x))$$

((i), 4.11.12)

$$= \sum_{z=0}^{a} \mathfrak{a}(\sigma(z), \sigma(x)) \tag{4}$$

$\therefore$ ((3), (4))

$$\mathfrak{b}(\sigma(a), x) \supset \mathfrak{b}(\sigma(a), \sigma(x)) = 0. \tag{5}$$

$\therefore$ ((2), (5), 7.1)

$$\mathfrak{b}(\sigma(a), b) = 0. \tag{6}$$

((1), (6), 3.5)

$$\mathfrak{b}(a, b) = 0.$$

Отсюда доказываемая теорема следует в силу 6.5, 5.12.

7.3. Теорема. *Если* $\varphi \in \mathfrak{E}_n$, *то*

$$(a_1 \square b_1) + \ldots + (a_n \square b_n) \supset \varphi(a_1, \ldots, a_n) \square \varphi(b_1, \ldots, b_n) = 0.$$

Доказательство. Индукцией по построению φ.

Если φ исходная, то или 1) φ есть σ, или 2) $\varphi(a) = 0$, или 3) $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ для некоторого $i \leqslant n$. В случае 1) теорема выполняется в силу 4.541 и 5.15. В случае 2) заключение импликации есть 0 (4.52) и теорема выполняется в силу 5.13. В случае 3) заключение совпадает с одной из посылок, и теорема выполняется в силу 5.3.

Допустим, что φ есть $S_{mn}\psi\chi_1 \ldots \chi_m$ и что теорема выполняется для ψ и каждого χ_i. Пусть $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ определяются так:

$$\mathfrak{p}_i \equiv \chi_i(a_1, \ldots, a_n); \quad \mathfrak{q}_i \equiv \chi_i(b_1, \ldots, b_n).$$

Тогда, поскольку теорема выполняется для каждого χ_i,

$$(a_1 \square b_1) + \ldots + (a_n \square b_n) \supset \mathfrak{p}_i \square \mathfrak{q}_i = 0. \tag{1}$$

Аналогично, поскольку теорема выполняется для ψ,

$$(\mathfrak{p}_1 \square \mathfrak{q}_1) + \ldots + (\mathfrak{p}_m \square \mathfrak{q}_m) \supset \psi(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m) \square \psi(\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m) = 0. \tag{2}$$

Так как в силу определения и 2.64

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \psi(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m)$$

и

$$\varphi(b_1, \ldots, b_n) = \psi(\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m),$$

то теорема следует из (1) и (2) в силу 5.3.

Допустим теперь, что $\varphi \equiv R_n\psi\chi$ и что теорема выполняется для ψ и χ. Пусть

$$\mathfrak{a}(c, d) \equiv \mathfrak{b} + (c \square d) \supset \mathfrak{c}(c, d),$$

где

$$\mathfrak{b} \equiv (a_1 \square b_1) + \ldots + (a_n \square b_n)$$

и

$$\mathfrak{c}(c, d) \equiv \varphi(a_1, \ldots, a_n, c) \square \varphi(b_1, \ldots, b_n, d).$$

Тогда (2.65)

$$\mathfrak{c}(0, 0) = \psi(a_1, \ldots, a_n) \square \psi(b_1, \ldots, b_n).$$

Следовательно, в силу предположения о ψ и 5.3 мы имеем

$$\mathfrak{a}(0, 0) = 0. \tag{3}$$

Снова

$$\mathfrak{a}(\sigma(x), 0) = \mathfrak{b} + (\sigma(x) \square 0) \supset \mathfrak{c}(\sigma(x), 0)$$

(4.51.10) $$= \sigma(\mathfrak{b} + x) \supset \mathfrak{c}(\sigma(x), 0)$$

(5.13) $$= 0. \tag{4}$$

$\therefore$ ((3), (4), 3, 5) $$\mathfrak{a}(c, 0) = 0. \tag{5}$$

Снова (4.53) $$\mathfrak{a}(0, d) = \mathfrak{a}(d, 0).$$

$\therefore$ (5) $$\mathfrak{a}(0, d) = 0. \tag{6}$$

Далее, так как теорема выполняется для χ, мы имеем (2.65)

$$\mathfrak{b} + (c \square d) + \mathfrak{c}(c, d) \supset \mathfrak{c}(\sigma(c), \sigma(d)) = 0. \tag{7}$$

Из (7) и 5.45, 4.541 мы имеем

$$\mathfrak{a}(c, d) \supset \mathfrak{a}(\sigma(c), \sigma(d)) = 0. \tag{8}$$

В силу (5), (6), (8) и 7.2 мы имеем теорему для φ, что завершает доказательство.

7.4. Теорема (аксиома равенства J_2).

$$a \square b \supset \mathfrak{a}(a) \square \mathfrak{a}(b) = 0.$$

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — все переменные из $\mathfrak{a}(x)$, отличные от x, и пусть

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n, x) = \mathfrak{a}(x).$$

Тогда в силу 7.3

$$(y_1 \square y_1) + \ldots + (y_n \square y_n) + (a \square b) \supset \mathfrak{a}(a) \square \mathfrak{a}(b) = 0.$$

Посылки $y_i \square y_i$ в силу 4.52 и 4.11 можно опустить.

7.5. Теорема. *Если* $\mathfrak{a} = 0 \rightarrow \mathfrak{b} = 0$, *то*

$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} = 0.$$

Замечание. Эта теорема показывает эквивалентность формулировки математической индукции в книге Гильберта и Бернайса и в 2.74.

Доказательство. В силу 2.153 $\mathfrak{b} = 0$ следует из $\mathfrak{a} = 0$ только по правилам для равенства. Но эти правила для равенства можно вывести средствами исчисления высказываний из 4.52 и 7.4. По дедукционной теореме для исчисления высказываний мы имеем доказываемую теорему.

7.6. Теорема. *Если формулу*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

можно установить в формализме Гильберта и Бернайса, то в $\mathfrak{R}$ *мы имеем*

$$\mathfrak{a} \square \mathfrak{b} = 0.$$

Доказательство. См. введение к § 7.

8. Заключительные теоремы.

Для завершения доказательства эквивалентности системы $\mathfrak{R}$ с системой Гильберта и Бернайса необходимо показать, что отношения

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a} \square \mathfrak{b} = 0$$

эквивалентны в $\mathfrak{R}$. Теоремы, относящиеся к этому вопросу, рассматриваются в настоящем параграфе.

8.1. Теорема. $(\sigma(a) \dot{-} b) \cdot (b \dot{-} a) = 0.$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{a}(a, b) \equiv (\sigma(a) \dot{-} b)\,(b \dot{-} a).$$

Тогда (4.22.31) $\mathfrak{a}(a, 0) = 0.$
Также (4.0.40.421) $\mathfrak{a}(0, b) = 0.$
Наконец, (4.23) $\mathfrak{a}(\sigma(x), \sigma(y)) = \mathfrak{a}(x, y).$

Отсюда теорема получается в силу 5.15, 7.2.

8.11. Следствие.

$$(a \dot{-} b)\,(b \dot{-} a) = 0 \quad (4.23.204.37.34.22).$$

8.2. Теорема. $|\sigma(a) \dot{-} b| \cdot |b \dot{-} a| = 0.$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{a}(a, b) = |\sigma(a) \dot{-} b|\,|b \dot{-} a|.$$

Тогда (4.22.41) $\mathfrak{a}(a, 0) = 0.$
Кроме того (4.40.42), $\mathfrak{a}(0, b) = \|b\| \cdot |b| = 0.$
Снова (4.23) $\mathfrak{a}(\sigma(x), \sigma(y)) = \mathfrak{a}(x, y).$

Отсюда эта теорема также следует в силу 7.2.

8.3. Теорема. *Если* $\mathfrak{a} \supset \subset \mathfrak{b} = 0$, *то*

$$\|\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{b}\|.$$

Доказательство. Допустим

$$\mathfrak{a} \supset \subset \mathfrak{b} = 0.$$

Тогда (4.244) $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} = 0.$
$\therefore$ (5.01) $|\mathfrak{a}| \cdot \mathfrak{b} = 0.$

Отсюда, из 5.01.16 и из допустимости эквивалентной замены в исчислении высказываний мы имеем

$$|\mathfrak{a}| \cdot \|\mathfrak{b}\| = 0. \tag{1}$$

Аналогично, из

$$\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} = 0$$

имеем

$$\mathfrak{a} \cdot |\mathfrak{b}| = \|\mathfrak{a}\| \cdot |\mathfrak{b}| = 0. \tag{2}$$

Далее в силу 4.451.32

$$|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}| \cdot (|\mathfrak{b}| + \|\mathfrak{b}\|)$$
(4.35) $$= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}| \cdot \|\mathfrak{b}\|$$
((1), 4.101) $$= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|.$$
(4.45) $$\|\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\| \dot{-} \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\|. \qquad (3)$$

Но в силу 4.451.32

$$\|\mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{a}\| \cdot (|\mathfrak{b}| + \|\mathfrak{b}\|)$$
$$= \|\mathfrak{a}\| \cdot |\mathfrak{b}| + \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\|$$
((1), (2), 4.11) $$= \|\mathfrak{a}\| \cdot \|\mathfrak{b}\|.$$

Если мы подставим это в (3), то доказываемая теорема получится в силу 4.241.

8.4. Теорема. $|\sigma(a) \dot{-} b| = \|b \dot{-} a\|$.

Доказательство. В силу 8.1 и 5.16

$$\|\sigma(a) \dot{-} b\| \cdot (b \dot{-} a) = 0.$$
∴ (5.01.02) $$|\sigma(a) \dot{-} b| \supset b \dot{-} a = 0. \qquad (1)$$

Снова (8.2, 5.01, 4.34)

$$b \dot{-} a \supset |\sigma(a) \dot{-} b| = 0. \qquad (2)$$
∴ ((1), (2), 5.02) $$|\sigma(a) \dot{-} b| \supset \subset b \dot{-} a = 0.$$
∴ (8.3) $$\|\|\sigma(a) \dot{-} b\|\| = \|b \dot{-} a\|.$$

Требуемый результат получается в силу 4.47.

8.5. Теорема. $\sigma(a) \dot{-} b = (a \dot{-} b) + |b \dot{-} a|$.

Доказательство.

(4.203.12) $$\sigma(a) \dot{-} 0 = \sigma(a) = a + 1$$
(4.203.41) $$= (a \dot{-} 0) + |0|$$
(4.22) $$= (a \dot{-} 0) + |0 \dot{-} a|. \qquad (1)$$
(4.23) $\sigma(a) \dot{-} \sigma(x) = a \dot{-} x.$
(4.48) $$= \delta(a \dot{-} x) + \|a \dot{-} x\|$$
(4.252, 8.4) $$= (a \dot{-} \sigma(x)) + |\sigma(x) \dot{-} a|. \qquad (2)$$

(1), (2) дают доказательство по индукции.

8.6. Теорема. $a + (b \dot{-} a) = b + (a \dot{-} b)$.

Док

(4.22.11) $a \dot{-} 0. \qquad (1)$

Допусти $\dot{-} (a \dot{-} x). \qquad (2)$

Тогда (8 $\dot{-} a) + |a \dot{-} x|$

((2)) $\dot{-} x) + |a \dot{-} x|$

(4.48) $\dot{-} x\| + |a \dot{-} x|$

(4.204.45 $\dot{-} \sigma(x)) + 1$

(4.13.15. $(a \dot{-} \sigma(x))$.

Теперь о индукции.

8.7.

эквивал

Док тношение влечет вто-

рое в си ление выполняется, то

(4.244) да в силу 8.6 полу-

чаем $\mathfrak{a}$ =

8.8.

имеет

имеет м *a — Бернайса, то оно*

Обр ждается в доказатель-

стве, та стимы в формализме

Гильбер

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ФОРМАЛИЗАЦИЙ ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНОЙ АРИФМЕТИКИ

Ю. С. Шестов

Ниже излагается прямое доказательство равнообъемности формализаций примитивно рекурсивной арифметики, предложенных Карри [1] и Гудстейном [2]. Доказательство состоит из ряда лемм, в которых локализуются шаги перестройки выводов; для этого вводится несколько вспомогательных формализаций примитивно рекурсивной арифметики. Рассматриваемые здесь формальные системы излагаются на языке, который был описан Карри [1]. В дальнейшем буквы x, y, z, x_1, ... обозначают числовые переменные, буквы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}_1$, ... обозначают термы и R, R_1, R_2, ... обозначают равенства. Если M — терм, равенство или список равенств, то выражение $[M]^x_{\mathfrak{a}}$ будет обозначать результат подстановки терма $\mathfrak{a}$ вместо всех вхождений переменной x в M.

Обозначим посредством $\mathfrak{G}$ формальную систему, которая отличается от системы, введенной Гудстейном [2, гл. 5] лишь немногими техническими деталями:

1) схемы аксиом этой системы суть равенства

1. $\theta(x) = 0$,
2. $\varkappa_{ik}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$,
3. $[Cff_1 \ldots f_k](x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$,
4. $[Rfg](x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n)$,
$[Rfg](x_1, \ldots, x_n, \sigma(x)) = g(x_1, \ldots, x_n, x, [Rfg](x_1, \ldots, x_n, x))$;

2) правила вывода следующие:

$$\mathrm{Sb}_1\ \frac{\mathfrak{a} = \mathfrak{b}}{[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]^x_{\mathfrak{c}}} \qquad \mathrm{Sb}_2\ \frac{\mathfrak{a} = \mathfrak{b}}{[\mathfrak{c}]^x_{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{c}]^x_{\mathfrak{b}}},$$

$$\mathrm{T}\ \frac{\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{c}}{\mathfrak{b} = \mathfrak{c}} \qquad \mathrm{U}_1\ \frac{[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]^x_0 \quad [\mathfrak{a}]^x_{\sigma(x)} = [\mathfrak{c}]^y_{\mathfrak{a}} \quad [\mathfrak{b}]^x_{\sigma(x)} = [\mathfrak{c}]^y_{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{a} = \mathfrak{b}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_1$ формальную систему, у которой 1) схемы аксиом суть схемы равенств 2.62—2.65 *) и 2) правила вывода суть правила T, Sb_2 и следующее правило:

$$\mathrm{U}'_1\ \frac{[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]^x_0 \quad [\mathfrak{a}]^x_{\sigma(x)} = [\mathfrak{c}]^y_{\mathfrak{a}} \quad [\mathfrak{b}]^x_{\sigma(x)} = [\mathfrak{c}]^y_{\mathfrak{b}}}{[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]^x_{\mathfrak{b}}}.$$

Собственной переменной правила U'_1 будем называть переменную x этого правила.

Карри рассматривает формальные системы, содержащие наряду с правилами обычных типов (из объектов $A_1, \ldots, A_n$ (посылок), удовлетворяющих условию P, выводим объект A (заключение)), также и правила, посылками которых могут служить не только отдельные объекты, но и целые выводы в рассматриваемой системе. Примером такого типа может служить следующее правило:

I — если (i) H_0 есть вывод равенства $[R]^x_0$; $H_1, \ldots, H_n$ суть выводы соответственно равенств $R_1, \ldots, R_n$ и
(ii) H есть вывод равенства $[R]^x_{\sigma(x)}$ из равенств $R_1, \ldots, R_n, R$, в котором применяются разве лишь правила T и Sb_2,
то $H_0, H_1, \ldots, H_n, H, [R]^x_{\mathfrak{a}}$ есть вывод равенства $[R]^x_{\mathfrak{a}}$.

Обозначим через $\mathfrak{C}$ формальную систему, которая получается из формальной системы $\mathfrak{G}_1$ заменой правила вывода U'_1 на правило I.

Обозначим посредством $\mathfrak{K}$ формальную систему, которая получается из формальной системы, предложенной Карри в [1], вычеркиванием равенства 2.61 из списка схем аксиом системы (см. сноску [2]) на стр. 443).

*) Здесь и далее ссылки делаются на соответствующие правила и теоремы статьи Карри [1]. — *Прим. ред.*

Обозначим через $\mathfrak{K}_1$ формальную систему, которая получается из системы $\mathfrak{K}$ заменой правила 2.74 на следующее правило:

I_1

если (i) H_0 есть вывод равенства $[R]_0^x$; $H_1, \ldots, H_n$ суть выводы соответственно равенств $R_1, \ldots, R_n$ и

(ii) H есть вывод равенства $[R]_{\sigma(x)}^x$ из равенств $R_1, \ldots, R_n, R$, в котором применяются разве лишь правила 2.71—2.73,

то $H_0, H_1, \ldots, H_n, H, [R]_a^x$ есть вывод равенства $[R]_a^x$.

Обозначим через $\mathfrak{K}_2$ формальную систему, которая получается из системы $\mathfrak{G}$ заменой правила U_1 на следующее правило:

J

если (i) H_0 есть вывод равенства $[R]_0^x$; $H_1, \ldots, H_n$ суть выводы соответственно равенств $R_1, \ldots, R_n$ и

(ii) H есть вывод равенства $[R]_{\tau(x)}^x$ из равенств $R_1, \ldots, R_n, R$, в котором применяются разве лишь правила T, Sb_2 и Sb_1, причем правило Sb_1 применяется лишь для подстановки вместо переменных, не входящих в выводимое равенство,

то $H_0, H_1, \ldots, H_n, H, R$ есть вывод равенства R.

Всякий вывод в формальной системе $\mathfrak{F}$ будем называть $\mathfrak{F}$-выводом. Правило W является *производным правилом вывода в формальной системе* $\mathfrak{F}$, если из посылок правила W в формальной системе $\mathfrak{F}$ можно вывести заключение этого правила.

Лемма 1. *Всякое равенство, выводимое в системе* $\mathfrak{G}$, *выводимо в системе* $\mathfrak{G}_1$.

Достаточно доказать следующее: во всяком $\mathfrak{G}$-выводе между посылкой и заключением правила Sb_1 можно вставить такие равенства, что полученный список окажется $\mathfrak{G}_1$-выводом. Докажем последнее предложение индукцией по числу применений правила Sb_1 в исходном

$\mathfrak{G}$-выводе. Не нарушая общности, можно считать, что заключение правила Sb_1 стоит непосредственно за посылкой этого правила во всех случаях применения правила Sb_1 в выводе.

База индукции $\mathfrak{G}$-вывод без применения правила Sb_1 является также $\mathfrak{G}_1$-выводом.

Индукционный переход. Пусть список равенств

$$R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i, R_{i+1}, \ldots, R_k$$

является $\mathfrak{G}$-выводом, причем R_{i-1}, R_i есть последнее применение правила Sb_1, а именно $R_i = [R_{i-1}]_a^x$. Применим индукционное предположение к $\mathfrak{G}$-выводу.

$$R_1, \ldots, R_{i-1}$$

и полученный $\mathfrak{G}_1$-вывод обозначим через L. Докажем, что список

$$L, [L]_a^x, R_{i+1}, \ldots, R_k$$

есть требуемый $\mathfrak{G}_1$-вывод. Для этого достаточно доказать, что список L, $[L]_a^x$ есть $\mathfrak{G}_1$-вывод равенства R_i, последнего в этом списке. Если собственная переменная всякого применения правила U_1' в $\mathfrak{G}_1$-выводе L отлична от x, то, как нетрудно проверить, даже список $[L]_a^x$ является $\mathfrak{G}_1$-выводом. Если же в выводе L некоторое равенство выведено по правилу U_1' с собственной переменной x, то соответствующее ему равенство в списке $[L]_a^x$ выводимо по правилу U_1' из тех же самых посылок списка L. Отсюда следует, что список L, $[L]_a^x$ есть $\mathfrak{G}_1$-вывод. Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякое равенство, выводимое в системе* $\mathfrak{G}_1$, *выводимо в системе* $\mathfrak{C}$.

Достаточно доказать, что правило вывода U_1' является производным в формальной системе $\mathfrak{C}$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что из равенств

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

(2) $[\mathfrak{a}]_{\sigma(x)}^x = [\mathfrak{c}]_a^y$,

(3) $[\mathfrak{b}]_{\sigma(x)}^x = [\mathfrak{c}]_b^y$

выводимо равенство

$$[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]^x_{\sigma(x)}$$

лишь по правилам T и Sb_2.

Действительно, применяя правило Sb_2 к равенству (1), получим

$$[\mathfrak{c}]^y_{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{c}]^y_{\mathfrak{b}};$$

теперь, используя правило T и допущения (2) и (3), нетрудно получить нужный нам вывод равенства $[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]^x_{\sigma(x)}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Всякое равенство, выводимое в системе* $\mathfrak{G}$, *выводимо в системе* $\mathfrak{K}$.

Благодаря теореме 3.5 достаточно доказать, что в формальной системе $\mathfrak{K}$ правила вывода T и Sb_2 являются производными.

Пусть

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

(2) $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$;

тогда, применяя правило 2.71 к равенству (1), получим

(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Теперь, применяя правило 2.72 к равенствам (3) и (2), будем иметь

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Таким образом, правило T является производным в системе $\mathfrak{K}$.

Пусть

(0) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$

и x, x_1, ..., x_n есть список переменных, содержащий все переменные, входящие в терм $\mathfrak{e}$. Равенства

(1) $x_1 = x_1$

. . . . .

(n) $x_n = x_n$

выводимы в системе $\mathfrak{K}$. По теореме 3.3 можно построить такой функтор φ, что в системе $\mathfrak{K}$ выводимо равенство

$$\mathfrak{c} = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Применяя теорему 3.2 к предыдущему равенству, получим

$$[\mathfrak{c}]^x_{\mathfrak{a}} = \varphi(\mathfrak{a}, x_1, \ldots, x_n),$$

$$[\mathfrak{c}]^x_{\mathfrak{b}} = \varphi(\mathfrak{b}, x_1, \ldots, x_n),$$

а применяя правило 2.73 к равенствам (0), (1),..., (n), будем иметь

$$\varphi(\mathfrak{a}, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\mathfrak{b}, x_1, \ldots, x_n).$$

Из трех последних равенств по правилам 2.71 и 2.72 легко вывести равенство

$$[\mathfrak{c}]^x_{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{c}]^x_{\mathfrak{b}}.$$

Таким образом, правило Sb_2 является производным правилом вывода в системе $\mathfrak{K}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Всякое равенство, выводимое в системе* $\mathfrak{K}$, *выводимо в системе* $\mathfrak{K}_1$.

Это предложение очевидно.

Лемма 5. *Всякое равенство, выводимое в системе* $\mathfrak{K}_1$, *выводимо в системе* $\mathfrak{K}_2$.

Доказательство. Всякая аксиома системы $\mathfrak{K}_1$ имеет вид $[R]^{x_1, \ldots, x_n}_{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n}$, где R — некоторая аксиома системы $\mathfrak{K}_2$, а переменные x_1, ..., x_n не входят в термы $\mathfrak{a}_1$, ..., $\mathfrak{a}_n$, и может быть выведена в системе $\mathfrak{K}_2$ n применениями правила Sb_1.

Правило 2.71 является производным в системе $\mathfrak{K}_2$ ([2], стр. 186).

Правило 2.72 также является производным в системе $\mathfrak{K}_2$. Действительно, пусть

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

(2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$;

тогда, применив правило 2.71 к (1), получим

(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Теперь равенство

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$$

получается из равенств (3) и (2) по правилу T.

Докажем, что правило 2.73 является производным в системе $\mathfrak{K}_2$. Обозначим через Sb следующее правило вывода:

если $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \varphi(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$,

Sb x_i не входит в термы $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}_{i-1}$,

то $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \varphi(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Правило Sb является производным в системе $\mathfrak{K}_2$. Действительно, равенства

$$\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$\varphi(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

выводимы из посылок правила Sb по правилам Sb_2 и Sb_1, а из этих равенств нетрудно вывести заключение Sb в системе $\mathfrak{K}_2$. Из посылок правила 2.73 легко получить заключение этого правила, применяя n раз правило Sb, выбрав переменные $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы они не встречались в термах $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k$. Из предыдущих рассуждений ясно, что в $\mathfrak{K}_1$-выводе можно так заменить применения правил 2.71—2.73 на вставки, содержащие только применения правил T, Sb_1 и Sb_2, что применения правила I_1 перейдут в соответствующие применения правила J.

Лемма 6. *Всякое равенство, выводимое в системе* $\mathfrak{K}_2$, *выводимо в системе* $\mathfrak{G}$.

Докажем следующее предложение, из которого наша лемма получается индукцией по числу применений правила J в $\mathfrak{K}_2$-выводе:

если (i) в системе $\mathfrak{G}$ выводимы равенства $[R]_0^x$, $R_1, \ldots, R_n$ и

(ii) из равенств $R_1, \ldots, R_n$, R выводимо равенство $[R]_{J(x)}^x$ лишь по правилам T, Sb_2 и Sb_1, причем Sb_1 применяется лишь для подстановки вместо переменных, не входящих в равенства $R_1, \ldots, R_n$, R,

то равенство R выводимо в $\mathfrak{G}$.

Используя пункт (ii) и теорему о дедукции [2, стр. 194], получим, что равенство

(1) $\left(R_1 \to \left(R_2 \to \ldots \left(R \to [R]_{\sigma(x)}^x\right)\ldots\right)\right)$

выводимо в системе $\mathfrak{G}$. Применяя n раз правило modus ponens ([2], гл. 4) к (1), получим

$$R \to [R]_{\sigma(x)}^x.$$

Теперь, используя правило I_1:

$$\frac{[R]_0^x \qquad R \to [R]_{\sigma(x)}^x}{R},$$

производное в системе $\mathfrak{G}$ ([2], стр. 191), легко доказать, что равенство R выводимо в системе $\mathfrak{G}$. Лемма доказана.

Из доказанных выше лемм следует

Теорема. *Формальные системы* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ *и* $\mathfrak{K}_2$ *равнообъемны.*

Примечание. Введем формальные системы $\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}_1$, $\overline{\mathfrak{C}}$, $\overline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{K}}_1$ и $\overline{\mathfrak{K}}_2$, добавив к языку уже рассмотренных систем переменные для функторов, а к определению понятия терма следующий пункт:

если $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ являются термами и f есть n-местная функторная переменная, то $f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ есть терм; формулировка правил вывода и определения понятий равенства и вывода сохраняются без изменений. Для этих систем имеет место теорема, аналогичная доказанной здесь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карри Х. Б., Формализация рекурсивной арифметики, наст. сб.
[2] Гудстейн Р. Л., Рекурсивная теория чисел, наст. сб.

УКАЗАТЕЛЬ