МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Д. ГИЛЬБЕРТ
П. БЕРНАЙС

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Д. ГИЛЬБЕРТ
П. БЕРНАЙС

Перевод с немецкого
Н. М. НАГОРНОГО

Под редакцией
С. И. АДЯНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.12
Г 47
УДК 517.11

D. Hilbert und P. Bernays

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK. II

Zweite Auflage

Springer-Verlag
Berlin — Heidelberg — New York
1970

Г $\frac{1702020000-078}{053(02)-82}$ 54-82

© Перевод на русский язык
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы,
1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода 9
Предисловия авторов к первому изданию 11
Предисловие ко второму изданию 15

Глава I. **Метод исключения связанных переменных при помощи гильбертова ε-символа** 17

§ 1. Процедура символьного решения экзистенциальных формул 17
§ 2. Гильбертов ε-символ и ε-формула 27
§ 3. Доказательство первой ε-теоремы 37
а) Подготовка 37
б) Гильбертовский подход 40
в) Типы комбинирования ε-символов; степень и ранг ε-терма 43
г) Устранение критических формул в общем случае 47
д) Обобщение результата 51
§ 4. Доказательства непротиворечивости 55
а) Одна общая теорема о непротиворечивости 55
б) Приложение к геометрии 61

Глава II. **Исследование арифметики при помощи связанных с ε-символом методов теории доказательств** 74

§ 1. Применение нп-теоремы к арифметике 74
§ 2. Распространение первой ε-теоремы на общую аксиому равенства 82
а) Подготовительные соображения; основной тип; формулы ε-равенства 82
б) Совместное устранение критических формул и формул ε-равенства 93
в) Усиленный вариант первой ε-теоремы и нп-теоремы 109
§ 3. Причины, препятствующие распространению процедуры устранения ε-символов на неограниченную схему индукции. Формализация принципа индукции с помощью второй формулы для ε-символа. Переход к первоначальному гильбертовскому подходу 113
§ 4. Первоначальный гильбертовский подход к проблеме исключения ε-символов и его дальнейшее развитие 124

а) Простейшие частные случаи 124
б) Подготовка к рассмотрению общего случая 129
в) Реализации гильбертовского подхода в случае ε-термов ранга 1 140
г) Построение последовательности общих замен в общем случае 146
д) Построение резольвенты в случае, когда все критические формулы являются формулами первого рода 150
е) Несостоятельность рассмотренного метода в случае критических формул второго рода с произвольным рангом. Дополнение к предыдущему результату 156
ж) Использование полученного результата в нп-теореме 161

Глава III. Использование ε-символа в изучении логического формализма 167

§ 1. Вторая ε-теорема 167
§ 2. Распространение второй ε-теоремы на общую аксиому равенства. Смежные проблемы 176
§ 3. Теорема Эрбрана 189
§ 4. Критерии опровержимости в чистом исчислении предикатов 212
§ 5. Применение полученных критериев к проблеме разрешимости 230
а) Общие сведения о выполнимости. Теоретико-модельная сколемовская нормальная форма 230
б) Теорема Лёвенгейма и теорема Гёделя о полноте 235
в) Учет требований финитной точки зрения 245
г) Один пример 248
д) Теоретико-модельные нормальные формы 259

Глава IV. Метод арифметизации метаматематики в применении к исчислению предикатов 265

§ 1. Арифметизация метаматематики исчисления предикатов и одна ее конкретная реализация 265
а) Нумерация 265
б) Вспомогательные средства рекурсивной арифметики 271
в) Арифметизация понятия формулы 276
г) Арифметизация распределений истинностных значений . . . 282
д) Арифметизация понятия вывода 287
§ 2. Применение метода арифметизации к теореме Гёделя о полноте 297
а) Формализация доказательства теоремы о полноте 297
б) Усиление выполнимости до выводимости 308

Глава V. Причины, вызывающие необходимость расширения методических рамок теории доказательств 321

§ 1. Границы изобразимости и выводимости в дедуктивных формализмах 321
а) Антиномия лжеца; теорема Тарского о понятии истинности; парадокс Ришара 321
б) Первая теорема Гёделя о неполноте 337
в) Вторая теорема Гёделя о неполноте 352
§ 2. Формализованная метаматематика арифметического формализма 362
а) Описание одного арифметического формализма 362
б) Построение нумерации формализма (Z_μ) 367

в) Проверка условия $б_2$) для формализма (Z_μ) и построенной для него нумерации 370
г) Проверка условий на выводимость 381
д) Распространение второй теоремы Гёделя о неполноте на формализм (Z). — Формулировка определения истинности для этого формализма 401
§ 3. Выход за рамки рассматривавшейся до сих пор методической установки теории доказательств. — Доказательства непротиворечивости формализма арифметики 418
а) Рассмотрение вопроса о формализуемости проводившихся до сих пор метаматематических рассуждений 418
б) Устранимость принципа «tertium non datur» при исследовании непротиворечивости системы (Z) 426
в) Трансфинитная индукция одного частного вида и ее применение в генценовском доказательстве непротиворечивости системы (Z) 439

Приложение I. Сведения об исчислении предикатов и примыкающих к нему формализмах 457

§ 1. Чистое исчисление предикатов 457
§ 2. Применение исчисления предикатов к формализованным системам аксиом. ι-правило. Арифметические формализмы 462
§ 3. Теоремы об исчислении предикатов 471
§ 4. Исчисление предикатов без правила подстановки 473

Приложение II. Уточнение понятия вычислимой функции и теорема Чёрча о проблеме разрешимости 477

§ 1. Понятие регулярно вычислимой функции. Вычисление в формализме (Z^0) 477
§ 2. Общерекурсивные и регулярно вычислимые функции. Нормальное представление. Вычисление в формализме (Z_{00}). Применение канторовской диагональной процедуры 489
§ 3. Невозможность общего решения проблемы разрешимости для исчисления предикатов 505

Приложение III. О некоторых фрагментах исчисления высказываний и их дедуктивном описании с помощью схем 512

§ 1. Позитивно тождественные импликативные формулы 512
§ 2. Позитивно тождественные I-K-формулы 520
§ 3. Тождественные I-K-N-формулы 532

Приложение IV. Формализмы для дедуктивного построения анализа 546

§ 1. Описание одного формализма 546
§ 2. Построение арифметики 551
§ 3. Теория положительных действительных чисел 556
§ 4. Теория действительных чисел. Замечания по поводу дальнейшей формализации анализа 568
§ 5. Теория вполне упорядоченных множеств целых чисел 573
§ 6. Модификации рассмотренного формализма. Исключение ε-символа 579
§ 7. Использование связанных оформульных переменных 588

Приложение V. **Доказательства непротиворечивости арифметического формализма** 598

§ 1. Доказательство Кальмара 598
§ 2. Доказательство Аккермана 624

Алфавитный указатель 647

РАСШИФРОВКА ОТСЫЛОК ИЗ Т. I

1. с. 505 и далее (см. т. I, с. 172).
2. с. 206, сноска 1 (см. т. I, с. 187).
3. с. 109 и далее (см. т. I, с. 202).
4. с. 233—235 (см. т. I, с. 203).
5. с. 489 (см. т. I, с. 390).

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Настоящая книга представляет собой перевод второго тома известной двухтомной монографии Д. Гильберта и П. Бернайса «Основания математики». Перевод выполнен со второго немецкого издания, вышедшего в 1970 г. Второй том написан как продолжение первого. Однако его можно читать независимо, так как в Приложении I приводится конспективное изложение содержащихся в первом томе понятий и результатов, используемых во втором томе. Читатель, не знакомый с первым томом, должен начать чтение книги с Приложения I. Перевод первого тома опубликован издательством «Наука» в 1979 г. с подзаголовком «Логические исчисления и формализация арифметики».

О достоинствах монографии Гильберта и Бернайса и о ее роли в развитии идей и методов математической логики уже говорилось в моем предисловии к русскому изданию первого тома. Все, что было сказано о книге в этом предисловии, относится в полной мере и ко второму тому. По предложению издательства для второго тома был введен подзаголовок «Теория доказательств», который полностью соответствует содержанию тома.

Во втором томе подробно излагаются и обсуждаются результаты теории доказательств, относящиеся к логическим исчислениям и к формализованной арифметике. Это известная теорема Эрбрана, дающая важный критерий выводимости формул в исчислении предикатов, теорема Чёрча о невозможности алгоритма, распознающего выводимые формулы исчисления предикатов, теорема Гёделя о неполноте арифметических исчислений и различные доказательства непротиворечивости формализованной арифметики. Особую ценность представляет подробное обсуждение используемых при доказательстве непротиворечивости арифметики средств, выходящих за рамки первоначальной финитной точки зрения Гильберта. В книге проводится мысль, что привлечение новых достаточно надежных средств для доказательства непротиворечивости формализованной арифметики следует рассматривать не как отказ от первоначальных ме-

тодических установок Гильберта, а как их расширение и уточнение.

В Приложении IV приводятся дедуктивные системы, в рамках которых можно выполнить дедуктивное построение математического анализа, но вопрос о непротиворечивости анализа в книге не рассматривается. «Впрочем, окончательный приговор судьбе теории доказательств может вынести лишь решение задачи установления непротиворечивости анализа»,— писал П. Бернайс в своем предисловии к первому изданию второго тома. Действительно, важнейшей задачей теории доказательств в рамках оснований математики является достаточно эффективное доказательство непротиворечивости анализа. Однако Бернайс в этом своем высказывании явно сузил роль гильбертовской теории доказательств рамками оснований математики. Развитие математической логики за последние десятилетия уже показало, что роль теории доказательств этим не ограничивается. В настоящее время идеи теории доказательств не только влияют на развитие математики, но и глубоко проникают в различные ее разделы. Особенно велико ее влияние на развитие алгебры. Так, например, многие конкретные исследования, связанные с доказательством невозможности вывода тех или иных соотношений в различных алгебраических системах, заданных с помощью тождественных или определяющих соотношений, можно рассматривать как фрагменты теории доказательств, развитой для алгебраических систем данного класса. Нет сомнений в том, что влияние идей теории доказательств на развитие математической науки будет расширяться и в будущем.

Для широкого круга читателей, интересующихся вопросами оснований математики, книга Гильберта и Бернайса «Основания математики» привлекательна тем, что в ней основополагающие идеи теории доказательств излагаются более обстоятельно и менее формализованно, чем где-либо в другом месте. Можно думать, что выход в свет книги Гильберта и Бернайса на русском языке будет с удовлетворением встречен в нашей стране не только специалистами по математической логике, но также и всеми квалифицированными математиками, которые в той или иной мере интересуются вопросами оснований математики, ролью математики в современной науке, глубокими проблемами, стоящими перед математикой и математиками независимо от их узкой специальности.

Москва, январь 1981 г.

С. Адян

ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий том завершает изложение теории доказательств, начатое мною совместно с П. Бернайсом несколько лет тому назад. По моему желанию П. Бернайс снова взял на себя написание текста. Я благодарю его за тщательность и точность, с которой он воспроизвел мои взгляды, в разработке которых он самым активным образом участвовал на протяжении многих лет. Без его содействия было бы невозможно довести работу над этой книгой до конца.

Господам В. Аккерману, Г. Генцену, А. Шмидту и Г. Шольцу я благодарен за их дружеское участие в чтении корректур.

Гильберт

Гёттинген, март 1939 г.

В настоящей книге дается детальное изложение современного состояния теории доказательств. Хотя достижения этой теории на сегодняшний день и очень скромны по сравнению с целями, которые она перед собой ставит, тем не менее в ней содержится много ярких результатов, точек зрения и идей, безусловно заслуживающих того, чтобы их довести до сведения читателей.

В соответствии с этим мы выбрали для настоящего второго тома две основные темы. Именно, мы решили подробно изложить важнейшие идеи Гильберта в теории доказательств, связанные с ε-символом, и фактическую реализацию этих идей.

Значительная часть излагаемых здесь исследований публиковалась лишь в виде набросков. Поэтому, независимо от реального интереса этих исследований, у гильбертовской школы имеется научный долг подтвердить сделанные в различных местах сообщения о существовании тех или иных доказательств фактическим их изложением. В данном случае эта потребность тем более неотложна, что первое время (во всяком случае, до 1930 г.) имелись различные заблуждения относительно границ

применимости доказательств Аккермана и фон Неймана, основанных на одной из упомянутых идей Гильберта. Эти до сих пор не публиковавшиеся доказательства подробно излагаются в главах I и II; при этом четко указывается ограничение, которое здесь требуется наложить на арифметический формализм для установления его непротиворечивости.

С помощью одного из изложенных здесь методов получается также некоторый подход к целому ряду теорем, удачно завершающих исследование исчисления предикатов средствами теории доказательств и имеющих замечательные приложения в области аксиоматического метода. В центре этих рассмотрений стоит одна впервые сформулированная и доказанная Ж. Эрбраном теорема математической логики, для которой на указанном пути получается естественное и простое доказательство. Разбор приложений этой теоремы дает удобный повод рассмотреть ряд вопросов, связанных с проблемой разрешимости. На этой основе в гл. IV мы доказываем одно сформулированное уже в т. I усиление теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов, выдержанное в духе теории доказательств.

Вторая основная тема — это критический анализ обстоятельств, вызывающих необходимость расширения (по сравнению с описанной ранее «финитной точкой зрения») способов содержательных рассуждений, которые допускаются при рассмотрении теории доказательств. Здесь в центре внимания находится обнаруженный Гёделем факт дедуктивной неполноты любых четко очерченных и обладающих достаточными выразительными возможностями формализмов. Мы подробно разбираем обе выражающие этот факт теоремы Гёделя как с точки зрения их связи с семантическими парадоксами, так и с точки зрения анализа условий их применимости. Мы приводим также их доказательства (доказательство второй из этих теорем Гёдель только наметил) и рассматриваем вопрос о их применимости к формализму арифметики.

Дискуссия по поводу расширения финитной точки зрения заканчивается рассмотрением генценовского доказательства непротиворечивости арифметического формализма. Правда, из этого доказательства детально излагается и разбирается лишь то, что составляет методическое нововведение Генцена, а именно использование некоторого частного типа канторовской «трансфинитной индукции».

Тот факт, что это доказательство излагается в неполном виде, вызван главным образом внешней причиной, заключающейся в том, что к моменту подготовки данного тома к печати новое, по-настоящему прозрачное изложение генценовского доказательства еще не было опубликовано. Впрочем, генценовское доказательство не имеет прямого отношения к формализмам рассматриваемого в данной книге типа. Но недавно Л. Кальмару удалось модифицировать это доказательство так, что оно стало непосредственно приложимо к арифметическому формализму, рассматриваемому в нашей книге (гл. VIII т. I). При этом оказалось возможным получить еще и некоторые упрощения.

В настоящее время В. Аккерман намеревается применить трансфинитную индукцию в виде, использованном Генценом, для распространения своего прежнего, изложенного в гл. II настоящего тома доказательства на весь арифметический формализм.

Если это удастся — а рассчитывать на это имеются все основания,— то первоначальный замысел Гильберта в части, касающейся его эффективности, будет реабилитирован. Однако, учитывая генценовское доказательство, можно высказать убеждение, что временная неудача теории доказательств имела место лишь из-за того, что к этой теории предъявлялись слишком высокие методические требования. Впрочем, окончательный приговор судьбе теории доказательств может вынести лишь решение задачи установления непротиворечивости анализа.

К развиваемому в гл. I—V настоящего тома кругу идей добавлен в виде «Приложений» ряд обособленных рассмотрений. Два Приложения дополняют материал, изложенный в гл. V: в Приложении II рассматривается уточнение понятия вычислимой функции, полученное в последнее время различными способами, и приводятся те относящиеся к этому кругу вопросов факты, которые легко могут быть изложены на основе материала, содержащегося в данной книге. В частности, приводится теорема А. Чёрча о невозможности общего решения проблемы разрешимости для исчисления предикатов. В Приложении III рассматриваются некоторые вопросы дедуктивной логики высказываний. Оно содержит также ряд дополнений к изложенной в гл. III т. I «позитивной логике».

В Приложении IV приведены различные дедуктивные формализмы для анализа и показано, как с помощью этих формализмов можно изложить теорию действительных чисел и теорию чисел второго числового класса.

Приложение I содержит обзор правил исчисления предикатов, а также применений этого исчисления к вопросам формализации систем аксиом. Кроме того, в нем содержится ряд замечаний, касающихся возможности некоторых модификаций исчисления предикатов. Проводится также конспективное изложение различных понятий и результатов, содержащихся в т. I.

К сожалению, из-за сильно разросшегося объема книги мы не смогли коснуться в ней ряда тем, относящихся к теории

доказательств. В частности, нерассмотренным осталось многосортное исчисление предикатов, впервые появившееся в диссертации Эрбрана и недавно более подробно исследованное Арнольдом Шмидтом (см. Math. Ann., **115**).

В книге не изложены также и некоторые вопросы, затрагивавшиеся в лекциях Гильберта и обсуждавшиеся в беседах с ним, но либо оставшиеся в разрозненных заметках, либо вообще пока не разобранные. Таковы, например, наброски определений чисел второго числового класса с помощью обычных (т. е. не трансфинитных) рекурсий, а также наброски, касающиеся использования символов для видов (Gattungssymbole) — в частности, символов, вводимых при помощи явных или рекурсивных определений.

Настоящий том написан как продолжение первого. Многочисленные отсылки к тем или иным страницам первого тома еще более усиливают связь с ним. С другой стороны, приведенная в Приложении I подборка содержащихся в т. I терминов и результатов, равно как и различные повторения, включенные нами в п. б) § 1 гл. IV, направлены на то, чтобы чтение данного тома сделать в значительной степени независимым от знакомства с т. I. Во всяком случае, читатель, уже имеющий некоторое представление о логической формализации и о постановке задач в области теории доказательств, сможет понять материал данного тома и без знакомства с т. I.

Читателю настоящего тома было бы целесообразно перед чтением гл. I ознакомиться с Приложением I, а отсылками к отдельным страницам т. I он может пользоваться лишь тогда, когда у него будет возникать действительная потребность в этом.

К сделанному в гл. II указанию на возможность некоторого пропуска при чтении мы добавим, что довольно утомительный § 2 гл. IV также может быть пропущен.

Что касается упоминаний глав, то номера I—V, если специально не оговорено противное, будут относиться к данному т. II, а номера VI—VIII будут упоминаться только в связи с т. I.

Пауль Бернайс

Цюрих, февраль 1939 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В дополнение к сказанному в предисловии к первому изданию хотелось бы заметить следующее.

Ввиду плодотворного развития теории доказательств, имевшего место за время, истекшее после первого издания, настоящая книга, разумеется, уже не может претендовать на всесторонний охват современного состояния данной теории. Об этом специально говорилось в предисловии ко второму изданию *первого* тома.

Нам остается лишь вкратце указать, чем второе издание *второго* тома отличается от первого его издания. Наиболее существенным добавлением является Приложение V, в котором приводятся упомянутые в предисловии к первому изданию доказательства Л. Кальмара и В. Аккермана. В качестве нефинитного средства, используемого в этих доказательствах, фигурирует лишь некоторая обобщенная индукция, относящаяся к так называемым «0-ω-фигурам», которые составляют допускающий финитное описание начальный отрезок канторовского второго числового класса. Применимость этого обобщенного принципа индукции устанавливается при помощи специального арифметического перевода [см. гл. V, § 3, п. в)]. В большинстве своих применений — в том числе и в обоих упомянутых доказательствах — этот обобщенный принцип индукции может быть заменен эквивалентным ему в рамках канторовской теории множеств предложением о том, что всякая убывающая последовательность 0-ω-фигур после конечного числа шагов обрывается. В Приложении V дается также прямое и относительно простое доказательство этого утверждения.

Из числа вставок и изменений особого упоминания заслуживают следующие:

1. В § 3 гл. III наряду с доказательством теоремы Эрбрана, использующим некоторое обобщение первой ε-теоремы, приводится другое ее доказательство, которое вместо этой ε-теоремы использует лишь так называемую «теорему об элементарном выводе», в формулировке которой упоминания об ε-символе отсутствуют вообще. На это более простое для запоминания рассуждение мое внимание впервые обратил Эрик Стениус.

2. При обсуждении следствий из теоремы Эрбрана более подробно рассматривается то из них, которое касается вопроса о заменимости обычного исчисления предикатов некоторым исчислением специального вида. Обсуждается также одно обобщение этой теоремы, не рассматривавшееся в первом издании.

3. При доказательстве теоремы Гёделя о полноте мы опираемся на некоторый «критерий неопровержимости», полученный ранее с помощью довольно длинного рассуждения. В специальной вставке мы показываем, как упомянутую ссылку на этот критерий можно заменить более прямым рассуждением.

4. В п. а) § 1 гл. V мы упростили одно доказательство, относящееся к парадоксу Ришара.

5. В комментариях ко второй теореме Гёделя мы добавили одно принадлежащее Г. Крайзелу рассуждение, показывающее необходимость соблюдения так называемых «условий на выводимость» (с. 355), без чего теорема перестает быть верной.

6. Способ введения различия чисел, применяемый в п. б) § 3 гл. V, где строится бескванторный арифметический формализм, не содержащий принципа «tertium non datur», как это видно из критики П. Лоренцена, ранее производил впечатление какой-то хитрости, несмотря на отчетливое указание, что речь идет о формализации некоторого специального предположения. Теперь это введение различия видоизменено таким образом, что упомянутого недоразумения можно больше не бояться.

7. В § 7 Приложения IV, где рассматривается логика второй ступени с применением связанных формульных переменных, один из выводов заменен более простым. Кроме того, сведение рекурсивного определения к явному, выполненное в первом издании методом Дедекинда, видоизменено по указанному П. Лоренценом способу. При этом, как ни странно, оказалось, что в данном формализованном изложении требуется произвести лишь одно незначительное изменение. Последнее объясняется тем, что в рассматриваемой формальной системе высказывания о функциях переводимы в высказывания о предикатах.

Я снова хотел бы выразить мою сердечную благодарность господам Герту Мюллеру и Дирку Зифкесу за их активное участие в чтении корректур и за внесение дополнений в предметный указатель. Равным образом я хотел бы поблагодарить господина Дитера Рёддинга за составление именного указателя. Господину Л. Кальмару я сердечно благодарен за то, что он уже много лет тому назад предоставил мне для опубликования свое прекрасное доказательство непротиворечивости. Господина Г. Крайзела я сердечно благодарю за его вклад в дискуссию по поводу второй теоремы Гёделя.

Цюрих, март 1970 г. *Пауль Бернайс*

МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ГИЛЬБЕРТОВА ε-СИМВОЛА

§ 1. Процедура символьного решения экзистенциальных формул

Исследование логико-математического формализма, проведенное нами в т. I, укладывается в рамки так называемой логики первой ступени, т. е. в рамки таких способов умозаключений, при формализации которых можно обойтись связанными переменными одного-единственного типа, а именно — связанными индивидными переменными [1]).

В качестве логического исчисления для умозаключений этого типа в т. I было развито — по образцу того, как это было сделано Фреге и Расселом, — так называемое исчисление предикатов, которое в дальнейшем было пополнено аксиомами равенства, представляющими собой формализацию понятия индентичности, а также ι-правилом [2]), представляющим собой формализацию понятия «тот, который» [3]).

Мы детально рассмотрели это исчисление и способы его использования при дедуктивном изложении аксиоматических теорий. Однако ряд принципиальных вопросов все еще не доведен нами до конца. Так, в частности, мы пока не доказали непротиворечивость формализма системы аксиом (Z) [4]), посредством которой в рамках исчисления предикатов формализуется арифметика с включением принципа *tertium non datur* для целых чисел. Кроме того, мы пока не ответили на вопрос о том, можно ли, вводя соответствующие функциональные и индивидные символы, обходиться без экзистенциальных аксиом. Этот вопрос мы разберем в первую очередь, так как рассмотрение его одновременно приведет нас и к тем методам, с помощью которых Гильберт начал

---

[1]) Говоря о системах аксиом, термин первая ступень целесообразно употреблять в узком смысле этого слова, а именно — называть, как это и делалось в гл. IV т. I (см. с. 199), системой аксиом первой ступени такую систему, аксиомы которой изображаются формулами без формульных переменных и, следовательно, являются собственными аксиомами (см. т. I, гл. VIII, с. 511).

[2]) См. т. I, с. 467 и Приложение I, с. 464.

[3]) Символика и правила вывода этого формализма в конспективном виде приведены в Приложении I (см. с. 457 и далее).

[4]) См. т. I, с. 454.

наступление на проблему доказательства непротиворечивости арифметического формализма.

Чтобы отчетливо уяснить себе постановку этой проблемы, мы сначала рассмотрим один частный случай, для которого ответ на наш вопрос уже был получен ранее.

Итак, пусть в какой-либо системе аксиом $\mathfrak{S}$ с аксиомами равенства имеется экзистенциальная аксиома

$$\exists x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x),$$

не содержащая никаких других свободных переменных, кроме $a, \ldots, k$. Пусть из аксиом системы $\mathfrak{S}$ может быть выведена формула

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x) \& \mathfrak{A}(a, \ldots, k, y) \rightarrow x = y)$$

(например, эта формула может являться одной из аксиом рассматриваемой нами системы).

Тогда по ι-правилу мы можем ввести терм

$$\iota_x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

и использовать формулу

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \iota_x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x))$$

в качестве исходной. Если мы теперь при помощи явного определения

$$\mathfrak{f}(a, \ldots, k) = \iota_x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

введем функциональный знак $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$, то получим формулу

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k)).$$

Эта формула может заменить собой нашу экзистенциальную аксиому

$$\exists x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x).$$

Действительно, воспользовавшись основной формулой (b) исчисления предикатов, мы немедленно выведем из этой формулы упомянутую аксиому $\exists x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$. Так мы приходим к некоторой новой системе аксиом $\mathfrak{S}'$, отличающейся от прежней системы $\mathfrak{S}$ тем, что в ней появился функциональный знак $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$, а вместо формулы $\exists x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$ в качестве аксиомы взята формула

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k)).$$

Этот переход от системы $\mathfrak{S}$ к системе $\mathfrak{S}'$ мы осуществляем с использованием ι-правила. Пользуясь нашим общим методом устранения ι-символов [1]), мы можем произвести и обратный переход от $\mathfrak{S}'$ к $\mathfrak{S}$. Таким образом, получается, что системы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ равнозначны в следующем точном смысле:

Всякая формула, построенная в формализме системы $\mathfrak{S}'$, с помощью аксиом этой системы переводима в некоторую другую формулу, не содержащую функционального знака $\mathfrak{f}$ и, следовательно, принадлежащую формализму системы $\mathfrak{S}$. Любая формула, не содержащая функционального знака $\mathfrak{f}$ и выводимая средствами системы $\mathfrak{S}'$, выводима также и средствами системы $\mathfrak{S}$.

Вследствие сказанного можно говорить о *заменимости* экзистенциальной аксиомы

$$\exists x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

аксиомой

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k)).$$

Таким образом, в результате введения функционального знака $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ указанная экзистенциальная аксиома становится ненужной.

Рассмотренный метод, позволяющий получить этот результат непосредственно, связан с одной особенностью нашего формализма. Именно, возможность применения ι-правила в данном случае была основана на том, что в нашем формализме в качестве аксиомы или в качестве выводимой формулы имелась формула

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x) \& \mathfrak{A}(a, \ldots, k, y) \rightarrow x = y).$$

Теперь естественно возникает вопрос о том, нельзя ли получить аналогичный результат и без использования этого предположения.

Для экзистенциального высказывания без параметров, которому соответствует формула

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

без свободных переменных, положительный ответ на этот вопрос был получен раньше при помощи рассуждения, которое в гл. IV т. I приводилось в качестве примера использования дедукционной теоремы [2]). В этом примере мы рассматривали способ умозаключений, состоящий в том, что после доказательства теоремы существования типа «Существует объект x, для которого имеет место $\mathfrak{A}(x)$» вводится специальный индивидный символ $\mathfrak{d}$ и далее проводится рассуждение: «Пусть $\mathfrak{d}$ — объект, обладающий свой-

[1]) См. т. I, гл. VIII, с. 510—532. Так как это рассуждение носит всего лишь подготовительный характер, не будет большой беды, если отдельные детали приведенного здесь доказательства покажутся читателю недостаточно полными.

[2]) См. т. I, гл. IV, с. 201—202.

ством $\mathfrak{A}$; тогда ...». С формальной точки зрения этот прием сводится к добавлению формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ к числу исходных.

Для формул, не содержащих символа $\mathfrak{s}$, этот способ умозаключений — в чем мы убедились с помощью дедукционной теоремы — не открывает никаких новых возможностей в части, касающейся доказательств: любая формула без символа $\mathfrak{s}$, выводимая с использованием данного символа и формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, будет выводиться и без использования этого символа. Кроме того, для любой формулы $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$, выводимой с помощью формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, можно будет без использования символа $\mathfrak{s}$ вывести формулу

$$\mathfrak{A}(c) \to \mathfrak{B}(c)$$

со свободной переменной c, не входящей в формулу $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$. При этом искомый вывод будет получаться из вывода формулы $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$, если мы символ $\mathfrak{s}$ всюду заменим переменной c, затем к каждой формуле импликативно присоединим посылку $\mathfrak{A}(c)$, а потом добавим небольшие фрагменты доказательства, необходимые для сохранения структуры вывода (как это делалось при доказательстве дедукционной теоремы [1])).

Таким образом, в силу выводимости формулы $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ имеет место полный параллелизм между выводами, производящимися с использованием формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, и сопоставленными им выводами, не использующими символа $\mathfrak{s}$; при этом каждой строке вывода, представляющей собой формулу $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$, сопоставляется некоторая (однозначно определенная — с точностью до выбора не входящей в $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ свободной переменной c) формула

$$\mathfrak{A}(c) \to \mathfrak{B}(c),$$

а каждой строке вывода, представляющей собой не содержащую символа $\mathfrak{s}$ формулу $\mathfrak{B}$, сопоставляется сама эта формула.

Хотя формула $\mathfrak{A}(c) \to \mathfrak{B}(c)$, вообще говоря, дедуктивно и не равна формуле $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$, даже если пользоваться формулой $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, тем не менее из нее и из $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ путем соответствующей подстановки и применения схемы заключения мы сразу получим $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$.

Этот результат немедленно распространяется и на формулы с несколькими кванторами существования

$$\exists\mathfrak{x}_1 \ldots \exists\mathfrak{x}_\tau\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau),$$

не содержащие свободных переменных (но содержащие, быть может, какие-нибудь другие связанные переменные, отличные от $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau$).

Если формула такого рода уже будет иметься в качестве исходной или в качестве выведенной формулы и если мы затем

[1]) См. т. I, гл. IV, с. 194—196.

введем новые индивидные символы $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau$ и возьмем формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau)$$

в качестве исходной, то это не приведет к существенному расширению нашего формализма. В самом деле, каждой выводимой с помощью формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau)$ формуле

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{n_\rho}),$$

где $\mathfrak{s}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{n_\rho}$ суть какие-либо из символов $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau$, будет соответствовать выводимая без использования символов $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau$ формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{c}_{n_\rho}),$$

где $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau$ — какие-либо не встречающиеся в $\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{n_\rho})$ свободные переменные; при этом вывод данной формулы будет протекать параллельно выводу формулы $\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{n_\rho})$. Далее, если с помощью формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau)$ будет выводиться некоторая формула $\mathfrak{B}$, не содержащая символов $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau$, то ее можно будет вывести и без применения этой формулы (а значит, и без использования символов $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau$).

Проведенное рассмотрение теперь можно применить к системе аксиом такой, что среди ее формул имеется формула вида $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ или $\exists\mathfrak{x}_1 \ldots \exists\mathfrak{x}_\tau\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau)$, не содержащая свободных переменных. В результате получается, что если, введя индивидный символ $\mathfrak{s}$, мы заменим формулу $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ формулой $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, или соответственно введя индивидные символы $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau$, заменим формулу $\exists\mathfrak{x}_1 \ldots \exists\mathfrak{x}_\tau\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau)$ формулой $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\tau)$, то никакого существенного усиления рассматриваемой системы не произойдет.

В частности, запас выводимых формул, не содержащих ни одного из введенных индивидных символов, для первоначальной и для модифицированной системы аксиом будет одним и тем же, а отсюда, в частности, вытекает, что *в отношении непротиворечивости* обе эти системы одинаковы.

Чтобы проиллюстрировать рассмотренный метод модификации аксиоматических систем, мы возьмем в качестве примера систему, состоящую из следующих трех аксиом:

$$\neg(a < a),$$

$$a < b \,\&\, b < c \to a < c,$$

$$\exists x \exists y\,(x < y).$$

Если мы введем индивидные символы α и β и заменим аксиому $\exists x \exists y (x < y)$ формулой $\alpha < \beta$, то получим систему, состоящую из следующих аксиом без связанных переменных:

$$\neg (a < a),$$
$$a < b \,\&\, b < c \to a < c,$$
$$\alpha < \beta.$$

С одной стороны, из этой системы аксиом мы можем получить первоначальную систему, воспользовавшись формулой (b) [1]. С другой стороны, новая система аксиом не является существенно более сильной, чем старая. В самом деле, всякой выводимой средствами новой системы формуле $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$ соответствует выводимая средствами старой системы формула

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — какие-либо свободные переменные, не входящие в $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$. Например, формуле

$$a < \alpha \to \neg (\beta < a),$$

выводимой средствами нашей модифицированной системы, соответствует формула

$$b < c \to (a < b \to \neg (c < a)),$$

выводимая средствами первоначальной системы.

Пока на этот метод исключения экзистенциальных аксиом наложено ограничение, заключающееся в том, что он применяется лишь к аксиомам без свободных переменных. Чтобы освободиться от этого ограничения, мы должны будем распространить наше рассуждение на формулы вида

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{x}),$$

где $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$ — полный список свободных переменных, входящих в эту формулу. В этом случае вместо индивидного символа $\mathfrak{s}$ нам придется ввести некоторый функциональный знак $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ и подобно тому, как в предыдущем случае мы брали в качестве исходной формулу $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, сейчас нам придется взять в качестве исходной формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f})).$$

Формализуемый таким образом способ умозаключений состоит в том, что, доказав какую-либо теорему существования, «Для всякого набора объектов $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$ существует объект $\mathfrak{l}$, обладающий свойством $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{l})$», мы продолжаем далее рассуждать следующим образом: «Пусть теперь $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ — какая-либо функция, сопоставляющая каждому набору $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$ такое значение $\mathfrak{l}$, что для него выполняется $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{l})$, и т. д.».

[1]) См. Приложение I, с. 461.

Обратим внимание на то, что в этом рассуждении используется *принцип выбора*. И в самом деле, нам приходится предполагать, что всякий раз, когда для каждого набора значений $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$ существует некоторое значение $\mathfrak{l}$, обладающее определенным свойством, существует и функция $\mathfrak{f}$, которая для каждого набора значений $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$, так сказать, «выбирает» в качестве значения $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f})$ одно из значений $\mathfrak{l}$, обладающих этим свойством [1]).

Переход от формулы

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{x})$$

к формуле

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}))$$

с новым функциональным знаком $\mathfrak{f}$, равно как и переход от формулы $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ без свободных переменных к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ с новым индивидным символом $\mathfrak{s}$, мы будем называть символьным решением этих экзистенциальных формул.

Эта операция, совместно с операцией замены связанных переменных свободными [2]), дает нам способ, позволяющий перейти от произвольной предваренной формулы [3]) $\mathfrak{F}$, не содержащей формульных переменных, к некоторой формуле без связанных переменных, из которой формулу $\mathfrak{F}$ можно получить обратно средствами исчисления предикатов. В самом деле, всякая такая формула $\mathfrak{F}$ представляет собой формулу одного из следующих двух видов:

$$\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x}), \qquad \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x}).$$

Заменив в формуле $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ связанную переменную $\mathfrak{x}$ свободной переменной $\mathfrak{a}$, мы получим формулу $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$, дедуктивно равную формуле $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$.

В результате символьного решения формулы

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$$

мы получим некоторую формулу $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{t})$, где терм $\mathfrak{t}$ в том случае, когда $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ не содержит свободных переменных, представляет собой вновь вводимый индивидный символ, а в противном случае

[1]) Общую формулировку принципа выбора см. в т. I, гл. II, с. 69. В рассматриваемом случае в качестве G_1 следует взять совокупность всевозможных значений $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$, а в качестве G_2 — совокупность всевозможных значений $\mathfrak{l}$.

[2]) См. Приложение I, с. 472.

[3]) О понятии предваренной формулы см. т. I, гл. IV, с. 182 и далее.

является вновь вводимым функциональным знаком с аргументами, фигурирующими в $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ в качестве свободных переменных. От формулы $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{t})$ применением основной формулы (b) мы можем возвратиться к формуле $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$.

Теперь, если формула $\mathfrak{F}_1(a)$ (соответственно $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{t})$) будет формулой без связанных переменных, то поставленная нами цель будет достигнута; в противном случае данная формула будет предваренной и мы сможем еще раз применить к ней тот же самый прием, который перед этим был применен к $\mathfrak{F}$. Продолжая таким образом, мы придем — после числа шагов, равного числу кванторов в кванторной приставке формулы $\mathfrak{F}$, — к некоторой формуле без связанных переменных, от которой средствами исчисления предикатов можно вновь возвратиться к $\mathfrak{F}$. Эта формула без связанных переменных отличается от исходной формулы $\mathfrak{F}$ следующим: 1) у нее отсутствуют кванторы; 2) на месте каждой переменной формулы $\mathfrak{F}$, связанной квантором всеобщности, у нее стоит некоторая ранее не встречавшаяся свободная переменная; 3) на месте каждой переменной, связанной в $\mathfrak{F}$ квантором существования $\exists\mathfrak{x}$, у нее стоит новый индивидный символ, если $\mathfrak{F}$ не содержит свободных переменных и если этому квантору $\exists\mathfrak{x}$ в $\mathfrak{F}$ не предшествует никакой квантор всеобщности, а во всех остальных случаях вместо такой переменной $\mathfrak{x}$ стоит новый функциональный знак с теми свободными переменными в качестве аргументов, которые либо встречаются уже в $\mathfrak{F}$, либо стоят на месте какой-либо переменной, связанной каким-нибудь предшествующим квантору $\exists\mathfrak{x}$ квантором всеобщности.

Рассмотренный метод мы можем применить к любой наперед заданной предваренной формуле, и результат его применения всегда будет определен однозначно с точностью до выбора соответствующих свободных переменных и вводимых символов.

Пусть, например, $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\exists x\forall y\exists z\mathfrak{A}(x, y, z),$$

и пусть в эту формулу входят только переменные x, y и z. Тогда, исходя из $\mathfrak{F}$, в результате символьного решения и замены связанной переменной y свободной переменной a мы получим некоторую формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}, a, \mathfrak{f}(a)),$$

где $\mathfrak{b}$ — ранее не встречавшийся индивидный символ, а $\mathfrak{f}$ — ранее не встречавшийся функциональный знак с одним аргументом. Аналогичным образом, исходя из формулы

$$\forall x\exists y\exists z\forall u\exists v\mathfrak{A}(x, y, z, u, v, a, b),$$

в которой не встречаются никакие переменные, кроме указанных,

мы получим формулу

$$\mathfrak{A}(c, \mathfrak{f}(a, b, c), \mathfrak{g}(a, b, c), d, \mathfrak{h}(a, b, c, d), a, b),$$

где $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — отличные друг от друга, ранее не встречавшиеся функциональные знаки, причем $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ зависят от трех аргументов, а $\mathfrak{h}$ — от четырех.

Этот способ перехода от предваренных формул к формулам без связанных переменных мы можем применить, в частности, к формулам, составляющим некоторую систему аксиом, если эти аксиомы являются собственными аксиомами[1]). Как известно, каждая такая формула, если она содержит связанные переменные и сама еще не является предваренной формулой, может быть переведена в некоторую предваренную формулу[2]), после чего к полученным формулам мы можем применить операцию замены связанных переменных свободными и операцию символьного решения.

Например, применив этот способ к приведенным в гл. I первого тома геометрическим аксиомам соединения и порядка[3]), мы получим следующие однозначно определенные (если отвлечься от выбора соответствующих свободных переменных, индивидных символов и функциональных знаков) аксиомы:

I. 1. $\mathrm{Gr}(a, a, b)$.
2. $\mathrm{Gr}(a, b, c) \to \mathrm{Gr}(b, a, c) \,\&\, \mathrm{Gr}(a, c, b)$.
3. $\mathrm{Gr}(a, b, c) \,\&\, \mathrm{Gr}(a, b, d) \,\&\, a \neq b \to \mathrm{Gr}(a, c, d)$.
4. $\neg\,\mathrm{Gr}(\alpha, \beta, \gamma)$.

II. 1. $\mathrm{Zw}(a, b, c) \to \mathrm{Gr}(a, b, c)$.
2. $\neg\,\mathrm{Zw}(a, b, b)$.
3. $\mathrm{Zw}(a, b, c) \to \mathrm{Zw}(a, c, b) \,\&\, \neg\,\mathrm{Zw}(b, a, c)$.
4. $a \neq b \to \mathrm{Zw}(a, b, \varphi(a, b))$.
5. $\neg\,\mathrm{Gr}(a, b, c) \,\&\, \mathrm{Zw}(p, a, b) \,\&\, \neg\,\mathrm{Gr}(q, a, b) \,\&\, \neg\,\mathrm{Gr}(c, p, q) \to \mathrm{Gr}(p, q, \psi(a, b, c, p, q)) \,\&\, (\mathrm{Zw}(\psi(a, b, c, p, q), a, c) \vee \mathrm{Zw}(\psi(a, b, c, p, q), b, c)$.

Такую систему, состоящую из собственных аксиом, в которых все кванторы существования устранены в результате применения операции символьного решения, а все входящие в них переменные являются свободными индивидными, мы будем называть системой аксиом в разрешенном виде.

По любой системе собственных аксиом (S) со связанными переменными с помощью операций символьного решения и замены связанных переменных свободными мы можем построить соответствующую ей систему (S′) в разрешенном виде. При этом формулы системы (S) будут выводимы средствами исчисления пре-

[1]) См. т. I, с. 511 или Приложение I, с. 463.
[2]) См. т. I, с. 182 и далее.
[3]) См. т. I, с. 28.

дикатов из формул системы (S′). Отсюда, в частности, вытекает, что *если будет доказана непротиворечивость системы* (S′), *то тем самым будет установлена и непротиворечивость системы* (S).

Кроме того, мы убедились, что если при переходе от (S) к (S′) вводятся одни лишь индивидные символы, то системы (S) и (S′) в некотором смысле равнозначны, а именно: каждая принадлежащая формализму системы (S) формула, выводимая средствами системы (S′), будет выводима и средствами (S). Отсюда, в частности, следует, что в этом случае непротиворечивость (S) совпадает с непротиворечивостью (S′).

В дальнейшем мы получим аналогичный результат для общего случая, когда при переходе от (S) к (S′) быть может вводились и какие-либо новые функциональные знаки.

В результате проведенного нами рассмотрения наряду с этой проблемой возникает и еще один вопрос, а именно вопрос о том, нельзя ли исключение связанных переменных, производимое при переходе от какой-либо системы аксиом к системе аксиом в разрешенном виде, распространить и на сами выводы в случае, когда речь идет о выводах формул без связанных переменных.

Этот вопрос имеет большое значение для изучения различных проблем, связанных с непротиворечивостью. Действительно, для установления непротиворечивости того или иного формализма, включающего в себя обычное исчисление высказываний, достаточно, как мы знаем, установить невыводимость какой-нибудь конкретной формулы. Ввиду этого обстоятельства непротиворечивость тех формализмов, которые включают в себя символ 0 и первую аксиому равенства, мы могли бы охарактеризовать как невыводимость в них формулы $0 \neq 0$. В случае произвольного формализма вместо формулы $0 \neq 0$ мы можем взять какую-нибудь формулу вида $\mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$, причем в качестве $\mathfrak{A}$ мы можем выбрать формулу без свободных переменных. Тем самым исследование непротиворечивости какого-либо формализма сводится к выяснению вопроса о том, является ли выводимой конкретная формула без связанных переменных.

Допустим теперь, что нам удалось показать, что вывод любой выводимой формулы без связанных переменных из системы аксиом в разрешенном виде может быть осуществлен без использования связанных переменных. Тогда исследование непротиворечивости такой системы аксиом упростится коренным образом. Действительно, вместо формализма, состоящего из этой системы аксиом, взятой в сочетании с исчислением предикатов, у нас появится гораздо более ограниченный формализм, состоящий из объединения этой системы аксиом с элементарным исчислением со свободными переменными [1]).

[1]) См. т. I, с. 360 или Приложение I, с. 462.

Весьма удобным средством для рассмотрения этих вопросов оказывается гильбертов ε-символ, к введению которого мы теперь и перейдем.

§ 2. Гильбертов ε-символ и ε-формула

К гильбертову ε-символу и к характеризующей этот символ формуле нас приводит рассмотрение уже упоминавшейся выше операции символьного решения экзистенциальных формул.

Введение какого-либо функционального знака $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ в результате символьного решения некоторой экзистенциальной формулы

$$\exists x \mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

отличается от введения подобного функционального знака на основе ι-правила лишь тем, что в первом случае опускается условие выводимости формулы

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x) \,\&\, \mathfrak{A}(a, \ldots, k, y) \rightarrow x = y).$$

Поэтому сама собой напрашивается мысль реализовать символьное решение в общем виде посредством такой модификации ι-правила, которая получится, если мы опустим в нем играющую роль посылки вторую формулу единственности. Если мы для четкого различения случаев возьмем вместо буквы ι букву η, то это модифицированное ι-правило будет выглядеть следующим образом: если формула $\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ либо выведена, либо является аксиомой, то выражение $\eta_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ может быть введено в качестве терма, а формула

$$\mathfrak{A}(\eta_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$$

может быть взята в качестве исходной.

При этом по аналогии с записью результирующей формулы схемы для ι-символа в записи $\mathfrak{A}(\eta_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$ подразумевается, что во внутреннем выражении $\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ в целях избежания коллизий между связанными переменными нам, может быть, придется переименовать некоторое количество связанных переменных [1]).

Замечание. Это η-правило по сравнению с рассмотренным выше методом символьного решения обладает двумя особенностями. Во-первых, оно распространяется и на тот случай, когда в формуле $\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ имеются формульные переменные. Во-вторых, благодаря записи $\eta_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ здесь соотнесение вводимого сим-

[1]) См. относящиеся к этому кругу вопросов замечания к ι-правилу в т. I, с. 469—470, а также изложение ι-правила в Приложении I, с. 464. — Нам не стоит рассматривать формализм η-символа более подробно, так как η-символ будет служить лишь для перехода к ε-символу.

вола самой формуле $\mathfrak{A}(\cdot)$ становится явным, откуда, в частности, следует согласованность между функциями, возникающими в результате подстановок из разных введенных по отдельности η-символов.

Пусть, например, $\mathfrak{A}(a, b, c)$ — формула, для которой можно вывести обе формулы

$$\exists x \mathfrak{A}(0, b, x)$$

и

$$\exists x \mathfrak{A}(a, 1, x),$$

хотя, может быть, и нельзя вывести формулу

$$\exists x \mathfrak{A}(a, b, x).$$

Тогда с помощью η-правила мы можем ввести символы

$$\eta_x \mathfrak{A}(0, b, x)$$

и

$$\eta_x \mathfrak{A}(a, 1, x).$$

Если в первом из них мы подставим 1 вместо b, а во втором 0 вместо a, то в обоих случаях у нас получится

$$\eta_x \mathfrak{A}(0, 1, x).$$

Если же вместо $\eta_x \mathfrak{A}(0, b, x)$ ввести функциональный знак $\mathfrak{f}(b)$ и формулу $\mathfrak{A}(0, b, \mathfrak{f}(b))$, а вместо $\eta_x \mathfrak{A}(a, 1, x)$ — функциональный знак $\mathfrak{g}(a)$ и формулу $\mathfrak{A}(a, 1, \mathfrak{g}(a))$, то вместо одного выражения $\eta_x \mathfrak{A}(0, 1, x)$ мы получим два различных выражения $\mathfrak{f}(1)$ и $\mathfrak{g}(0)$, причем может оказаться, что не удастся вывести равенство

$$\mathfrak{f}(1) = \mathfrak{g}(0).$$

В самом деле, формула

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(0, 1, x) \& \mathfrak{A}(0, 1, y) \to x = y)$$

не обязана быть выводимой, хотя обе формулы

$$\mathfrak{A}(0, 1, \mathfrak{f}(1))$$

и

$$\mathfrak{A}(0, 1, \mathfrak{g}(0))$$

и имеются в нашем распоряжении.

В формулировке η-правила требуется, чтобы образование терма $\eta_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$, подобно образованию терма $\iota_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$, связывалось с выполнением еще одного условия, касающегося выводимости некоторой формулы, а именно — формулы $\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$. От этого ограничения можно будет освободиться следующим образом.

Из выводимой формулы

$$\neg \exists y A(y) \vee \exists x A(x)$$

преобразованиями исчисления предикатов мы получим формулу

$$\exists x (\exists y A(y) \to A(x)).$$

Опираясь на выводимость этой формулы, мы можем, в соответствии с η-правилом, ввести терм

$$\eta_x (\exists y A(y) \to A(x))$$

и взять формулу

$$\exists y A(y) \to A(\eta_x (\exists y A(y) \to A(x)))$$

в качестве исходной.

Теперь мы явно определим символ $\varepsilon_x A(x)$ посредством равенства

$$\varepsilon_x A(x) = \eta_x (\exists y A(y) \to A(x)).$$

Тогда из предыдущей формулы в результате переименования стоящей в посылке импликации переменной y в x получится формула

$$\exists x A(x) \to A(\varepsilon_x A(x)). \qquad (*)$$

Благодаря этой формуле, в которой связанную переменную x как в посылке, так и в заключении мы можем переименовать в любую другую, всякое дальнейшее использование η-символа становится излишним. Действительно, в случае выводимости какой-нибудь формулы

$$\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})$$

мы, используя формулу (*), с помощью подстановки [1]) и схемы заключения получим формулу

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{v})).$$

Поэтому напрашивается идея полностью исключить η-правило и вместо него в формализм ввести в качестве основного знака символ $\varepsilon_{\mathfrak{v}} A(\mathfrak{v})$ в сочетании с формулой

$$(\varepsilon_0) \qquad \exists x A(x) \to A(\varepsilon_x A(x)).$$

Эта формула, если отвлечься от обозначения вводимого символа, совпадает с формулой (μ_1) для символа $\mu_x A(x)$ [2]). Формулу (μ_1) мы вывели, опираясь на явное определение символа $\mu_x A(x)$ при помощи некоторого ι-терма. Отсюда мы усматриваем,

[1]) О точных правилах обращения со связанными переменными, которые надлежит при этом соблюдать, мы вскоре поговорим более подробно.

[2]) См. т. I, гл. VIII, с. 482 или Приложение I, с. 469.

что для формализма арифметики способы умозаключений, формализуемые с помощью ε-символа и формулы (ε_0), не дают ничего нового: их применение сводится к применению обычного ι-правила.

Это обстоятельство находит простое объяснение и с содержательной точки зрения. Формула (ε_0) равнозначна η-правилу, а это правило сильнее ι-правила лишь в том отношении, что из-за отсутствия второй формулы единственности оно включает в себя применение принципа выбора. Но в арифметике без принципа выбора можно обойтись, потому что — ввиду справедливости принципа наименьшего числа — во всякой непустой числовой совокупности некоторое число может быть указано и без принципа выбора: например, наименьшее. Эта взаимосвязь находит свое отражение также и в том, что при введении ι-терма, с помощью которого определяется символ $\mu_x A(x)$, существенным образом используется формула, выражающая принцип наименьшего числа.

Таким образом, ε-символ представляет собой определенного рода обобщение μ-символа на случай произвольной (не обязательно числовой) индивидной области. По форме он представляет собой функцию от переменного предиката, который кроме того аргумента, к которому относится указанная в данном ε-символе связанная переменная, может содержать в качестве аргументов («параметров») и какие-нибудь другие свободные переменные. Значением этой функции для любого конкретного предиката $\mathfrak{A}$ (при фиксации параметров) будет один из объектов индивидной области, причем в соответствии с содержательным переводом формулы (ε_0) предикат $\mathfrak{A}$ будет выполняться для этого объекта, если этот предикат выполняется вообще *хотя бы для одного объекта из данной индивидной области*.

Предположение о наличии такого универсального соотнесения объектов предикатам выглядит как очень сильное допущение. Однако надо иметь в виду, что в формализме первой ступени, где, как известно, связанных формульных переменных нет, такое соотнесение приводит лишь к весьма ограниченному эффекту, так как переменная A, входящая в состав символа $\varepsilon_x A(x)$, может быть исключена только в результате какой-либо подстановки.

Конечно, это рассуждение еще не устраняет того впечатления чего-то возмутительного с точки зрения логической систематики, которое на нас производит введение ε-символа и относящейся к нему формулы (ε_0). Действительно, введение в логический формализм символа, имеющего вид некоторой универсальной функции от предиката, в то время как никакого логического определения такого рода функции не имеется, выглядит каким-то несоответствием.

Однако на это возражение имеется простой ответ. Он состоит в том, что на самом деле не существует никакой необходимости

включать ε-символ в окончательный дедуктивный вариант нашего логико-математического формализма. Наоборот, вводимое нами исчисление с ε-символом можно рассматривать как чисто вспомогательное исчисление, которое всего-навсего по ряду метаматематических соображений обладает определенными преимуществами.

С учетом будущих метаматематических рассмотрений наш способ введения ε-символа оказывается целесообразным подвергнуть небольшой модификации: именно, в качестве аксиомы для ε-символа вместо формулы (ε_0)

$$\exists x A(x) \to A(\varepsilon_x A(x))$$

мы возьмем дедуктивно равную ей формулу

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x)),$$

не содержащую квантора существования. Эту последнюю формулу мы будем кратко называть *ε-формулой*.

С введением ε-формулы в качестве исходной мы связываем следующие соглашения:

1. Если $\mathfrak{A}(a)$ — какая-либо формула, не содержащая связанной переменной $\mathfrak{x}$, то выражение $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ будет считаться термом. Термы такого вида мы будем называть ε-термами.

2. В отношении связанных переменных, входящих в состав ε-символов, будет действовать правило переименования. Однако оно должно подчиняться ограничивающему его применение условию не допускать коллизий между связанными переменными. Это условие здесь можно сформулировать точно так же, как мы ранее формулировали его для ι-символа [1]): именно, следует не допускать того, чтобы в область действия какого-нибудь квантора $\forall\mathfrak{x}$, $\exists\mathfrak{x}$ или ε-символа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ попадал другой квантор или ε-символ с той же самой связанной переменной $\mathfrak{x}$.

3. На подстановки вместо свободных индивидных и формульных переменных тоже должны быть наложены ограничения, обеспечивающие отсутствие коллизий. Однако чтобы из-за всего этого не возникало слишком сильных осложнений, мы разрешим выполнять вместе с подстановкой переименование любого количества связанных переменных.

В самом деле, требование отсутствия коллизий мешало бы нам производить подстановку в ε-формулу вместо именной формы $A(c)$ фигурирующей в ней формульной переменной какой-нибудь другой формулы $\mathfrak{A}(c)$, у которой переменная c стоит в области действия какого-либо квантора или ε-символа. Эта трудность устраняется разрешением переименования связанных переменных

[1]) См. т. I, гл. VIII, с. 469—471 или Приложение 1, с. 464.

при такой подстановке, так что в рассматриваемом случае мы получим формулу вида

$$\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}^*(x)),$$

где $\mathfrak{A}^*(x)$ отличается от $\mathfrak{A}(x)$ переименованием в ней одной или нескольких связанных переменных [1]).

Например, если $\mathfrak{A}(c)$ представляет собой формулу

$$\exists y\,(c = y),$$

то ее подстановку в ε-формулу в сочетании с переименованием связанных переменных можно выполнить следующим образом. Сначала вместо терма $\varepsilon_x A(x)$ у нас появится терм

$$\varepsilon_x(\exists y\,(x = y)),$$

который мы будем сокращенно записывать в виде

$$\varepsilon_x \exists y\,(x = y),$$

отбросив ненужные внешние скобки [2]).

Теперь мы переименуем y в z, так что получится

$$\varepsilon_x \exists z\,(x = z).$$

Вместо формулы $A(\varepsilon_x A(x))$ мы получим формулу

$$\exists y\,(\varepsilon_x \exists z\,(x = z) = y),$$

а вместо формулы $A(a)$ — формулу

$$\exists y\,(a = y),$$

так что в целом у нас получится формула

$$\exists y\,(a = y) \to \exists y\,(\varepsilon_x \exists z\,(x = z) = y).$$

Аналогичным образом, с помощью подходящих переименований переменных, всегда сможем предохранить себя от каких бы то ни было коллизий между связанными переменными. Производимые в этих целях переименования мы будем упоминать не всегда. Мы позволим себе также пользоваться одинаковыми обозначениями для формул, отличающихся друг от друга лишь обозначениями связанных переменных.

Далее, всюду, где мы будем говорить об одинаковых или различных термах, их равенство и различие будут пониматься с точностью до обозначений связанных переменных, если не будет четко оговорено противное.

[1]) Об определении $\mathfrak{A}^*(x)$ см. также т. I, с. 469.

[2]) Вообще, мы условимся, что при написании формул с кванторами и ε-символами мы будем всюду, где это не будет вызывать разночтений, опускать скобки, как мы это уже делали раньше.

Преимущества, доставляемые введением ε-символа и ε-формулы, проявятся немедленно, как только мы уясним себе их ближайшие дедуктивные последствия.

Сначала от ε-формулы мы с помощью схемы (β) [1]) вернемся к формуле (ε_0), которая совместно с формулой

$$A(\varepsilon_x A(x)) \to \exists x A(x),$$

получающейся подстановкой из основной формулы (b) исчисления предикатов, даст нам эквивалентность

(ε_1) $$\exists x A(x) \sim A(\varepsilon_x A(x)).$$

Если в эту формулу вместо именной формы $A(a)$ подставить формулу $\neg A(a)$, а затем от обеих частей получившейся таким образом эквивалентности взять отрицание, то получится формула

$$\neg \exists x \neg A(x) \sim \neg \neg A(\varepsilon_x \neg A(x)),$$

из которой затем легко выводится формула

(ε_2) $$\forall x A(x) \sim A(\varepsilon_x \neg A(x)).$$

Вид формул (ε_1) и (ε_2) наводит нас на мысль о том, что эти эквивалентности можно взять в качестве явных определений для кванторов всеобщности и существования и сделать таким образом ненужными как основные формулы (a) и (b), так и схемы (α) и (β) исчисления предикатов [1]).

Действительно, такая возможность реально существует. Во-первых, ε-формула, взятая совместно с (ε_1), средствами исчисления высказываний дает нам формулу (b)

$$A(a) \to \exists x A(x).$$

Если же мы теперь подставим в ε-формулу вместо именной формы $A(c)$ формулу $\neg A(c)$, то сначала получим формулу

$$\neg A(a) \to \neg A(\varepsilon_x \neg A(x)),$$

из которой затем путем контрапозиции получится формула

$$A(\varepsilon_x \neg A(x)) \to A(a),$$

а последняя в сочетании с формулой (ε_2) дает нам формулу (a)

$$\forall x A(x) \to A(a).$$

Теперь осталось рассмотреть схемы (α) и (β). Но они с помощью эквивалентностей (ε_1) и (ε_2) могут быть сведены просто к

[1]) См. Приложение I, с. 460—461.

подстановкам. Действительно, из формулы

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a)$$

такой, что переменная a встречается в ней только там, где она указана в качестве аргумента, а x не входит в $\mathfrak{B}(a)$, в результате подстановки мы получим формулу

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{B}(x)),$$

которая вместе с формулой

$$\forall x \mathfrak{B}(x) \sim \mathfrak{B}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{B}(x)),$$

получающейся подстановкой из (ε_2), дает нам формулу

$$\mathfrak{A} \to \forall x \mathfrak{B}(x).$$

Аналогичным образом из формулы

$$\mathfrak{B}(a) \to \mathfrak{A}$$

такой, что a встречается в ней только там, где она указана в качестве аргумента, а x не входит в $\mathfrak{B}(a)$, в результате подстановки мы получим формулу

$$\mathfrak{B}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x)) \to \mathfrak{A},$$

которая вместе с формулой

$$\exists x \mathfrak{B}(x) \sim \mathfrak{B}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x)),$$

получающейся подстановкой из (ε_2), дает нам формулу

$$\exists x \mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}.$$

Таким образом, формализм, который получается из элементарного исчисления со свободными переменными в результате присоединения к нему ε-формулы и определений (ε_1) и (ε_2), *полностью включает в себя все исчисление предикатов в целом.*

Еще одно преимущество введения ε-символа заключается в том, что в результате присоединения к исчислению предикатов ε-символа и ε-формулы становится ненужным ι-правило: *ε-символ полностью берет на себя ту роль, которую играет ι-символ.* Действительно, для любой формулы $\mathfrak{A}(c)$ такой, что выводимы относящиеся к ней формулы единственности, выводима, в частности, формула $\exists x \mathfrak{A}(x)$. С другой стороны, из формулы (ε_0) подстановкой мы получаем формулу

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)),$$

а следовательно, и формулу

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)),$$

т. е. ту формулу, которая получается из результирующей формулы ι-схемы, примененной к формуле $\mathfrak{A}(c)$, после замены входящего в нее ι-символа соответствующим ε-символом [1]).

Однако, в то время как ι-символ приложим лишь к таким формулам, для которых выведены соответствующие формулы единственности, ε-символ может быть определен для произвольной формулы, содержащей свободную переменную.

В заключение мы получим, используя ε-символ и ε-формулу, некоторую *общую формализацию операции символьного решения* [2]). Именно, если мы хотим применить эту операцию к формуле

$$\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{v}),$$

где $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}$ — фигурирующие в ней свободные переменные, то нам достаточно лишь воспользоваться (выводимой с помощью ε-формулы) формулой (ε_0)

$$\exists x A(x) \to A(\varepsilon_x A(x)),$$

из которой подстановкой (и, возможно, переименованием переменных) мы получим формулу

$$\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{v}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \varepsilon_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{v})).$$

Эта последняя после введения явного определения

$$\mathfrak{f}(a, \ldots, k) = \varepsilon_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{v})$$

совместно с формулой $\exists \mathfrak{v} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{v})$ даст нам формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f})).$$

Замечание. Чтобы формально воспользоваться этим явным определением $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$, нам нужно обратиться к аксиомам равенства. В том случае, если в рассматриваемом формализме аксиом равенства в нашем распоряжении нет, это явное определение мы можем воспринимать как некоторое *правило замены*, согласно которому выражения $\varepsilon_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f}, \mathfrak{v})$ и $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{f})$ всюду могут быть заменены друг другом.

Вообще, следует обратить внимание на тот факт, что если явное определение имеет вид некоторого правила замены, то

[1]) Эта роль ε-символа становится очевидной, если принять во внимание его содержательный смысл. В самом деле, в случае предиката $\mathfrak{A}(c)$, выполняющегося хотя бы для одного объекта из его индивидной области, ε-терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ представляет собой объект, для которого этот предикат выполняется, а значит, для предиката $\mathfrak{A}(c)$, выполняющегося для одного-единственного объекта, данный терм будет изображать именно этот объект; но этот же самый объект изображается и ι-термом $\iota_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

[2]) См. с. 23.

независимо от того, является это определение равенством или эквивалентностью, введенный этим определением символ всегда можно исключить из любого доказательства, в заключительной формуле которого этого символа нет. При этом предполагается, что выполнено условие, имеющее место в отношении всех явных определений; а именно, что фигурирующие в определяемом выражении переменные и только они являются аргументами определяемого символа [1]).

Таким образом, мы видим, что ε-символ в силу своей характеризации посредством ε-формулы позволяет добиться троякого эффекта: во-первых, он вместе с определениями (ε_1) и (ε_2) доставляет в наше распоряжение соответствующие формулы и схемы для кванторов; во-вторых, он заменяет собой ι-символ и, в-третьих, он сводит символьные решения к явным определениям.

Эти свойства ε-символа, из-за которых он и был введен Гильбертом в теорию доказательств, мы теперь используем для целей намеченной нами программы исследований [2]). С одной стороны, мы убедимся, что если в основу рассмотрения положить исчисление предикатов, то переход от какой-либо системы собственных аксиом (S) к соответствующей системе аксиом в разрешенном виде (S′) представляет собой консервативный способ расширения этого формализма в том смысле, что любая формула исходного формализма, выводимая средствами системы (S′), будет выводиться также и из аксиом системы (S). С другой стороны, мы покажем, что всякая формула, выводимая средствами исчисления предикатов из некоторой, заданной в разрешенном виде системы аксиом и не содержащая связанных переменных, может быть выведена и без использования связанных переменных.

Ввиду того, что с помощью ε-формулы может быть осуществлено любое символьное решение, задачи эти сводятся к доказательству двух теорем об ε-символах, которые мы формулируем ниже. Доказывая эти теоремы, порядок упомянутых проблем целесообразно поменять местами. Теоремы эти в измененном таким образом порядке мы будем называть *первой* и *второй ε-теоремами*.

Обе эти теоремы будут относиться к любому формализму F, который получается из исчисления предикатов в результате добавления к его символам ε-символа и некоторых дополнительных индивидных, предикатных и функциональных символов, а к числу исходных формул ε-формулы и ряда не содержащих ε-символа собственных аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$. Для всякого такого формализма F эти теоремы формулируются следующим образом.

[1]) См. т. I, гл. VII, с. 357—358 или Приложение I, с. 465 и далее.
[2]) См. с. 25 и далее.

Теорема 1 (первая ε-теорема). *Пусть* $\mathfrak{E}$ *— выводимая в* F *формула, не содержащая связанных переменных, и пусть аксиомы* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ *также не содержат связанных переменных. Тогда формула* $\mathfrak{E}$ *может быть выведена из аксиом* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ *без использования связанных переменных, т. е. средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными.*

Теорема 2 (вторая ε-теорема). *Пусть* $\mathfrak{E}$ *— выводимая в* F *формула, не содержащая ε-символов. Тогда* $\mathfrak{E}$ *может быть выведена из аксиом* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ *без использования ε-символа средствами одного только исчисления предикатов.*

В качестве следствия из первой ε-теоремы мы получаем следующую, совершенно не связанную с ε-символом теорему — ее мы будем называть теоремой об элементарном выводе.

Теорема 3. *Если из системы собственных аксиом, не содержащих связанных переменных, средствами исчисления предикатов выводима некоторая формула* $\mathfrak{E}$, *также не содержащая связанных переменных, то этот вывод может быть осуществлен средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными* [1]).

Мы займемся пока доказательством первой ε-теоремы. Вторая ε-теорема получится затем в качестве следствия из примыкающих к этому доказательству рассуждений [2]).

§ 3. Доказательство первой ε-теоремы

а) Подготовка. Доказательство первой ε-теоремы мы начнем с нескольких подготовительных редукций. В формулировке этой теоремы предполагается, что заключительная формула $\mathfrak{E}$ рассматриваемого вывода не содержит связанных переменных. Не ограничивая общности, можно считать, что она не содержит также и свободных переменных.

Действительно, что касается формульных переменных без аргументов, то любая формула с входящей в нее формульной переменной $\mathfrak{B}$ без аргументов дедуктивно равна всякой другой формуле, получающейся из нее в результате повсеместной замены переменной $\mathfrak{B}$ формулой $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{B}(\cdot)$ — любая ранее не встречавшаяся формульная переменная с одним аргументом, а $\mathfrak{a}$ — произвольный терм; причем, если рассматриваемая формула не содержит связанных переменных, то это дедуктивное равенство может

[1]) Эта теорема является также частным случаем одной более общей теоремы об исчислении предикатов, которую Эрик Стениус установил в своей работе: Stenius E. Über das Interpretationsproblem der formalisierten Zahlentheorie. — Acta Academiae Aboensis Math. et Phys., 1952, **18**, № 3.
[2]) См. с. 167 и далее.

быть установлено уже в рамках одного только исчисления высказываний [1]).

Пусть теперь из формулы $\mathfrak{E}$ в результате замен указанного типа, произведенных для каждой встречающейся в ней формульной переменной без аргументов, получается формула $\mathfrak{E}_1$; пусть, далее, $\mathfrak{E}_2$ — формула, получающаяся из $\mathfrak{E}_1$ в результате замены каждой встречающейся в $\mathfrak{E}_1$ индивидной переменной каким-либо вновь введенным индивидным символом и каждой формульной переменной с аргументами каким-либо новым предикатным символом с тем же числом аргументов.

Тогда формулу $\mathfrak{E}_2$ можно будет получить из $\mathfrak{E}_1$, а эту последнюю — из $\mathfrak{E}$ в результате ряда подстановок. Таким образом, по выводу формулы $\mathfrak{E}$ в формализме F мы получим некоторый вывод формулы $\mathfrak{E}_2$. Новая заключительная формула $\mathfrak{E}_2$ уже не будет содержать свободных переменных. Поэтому, если первая ε-теорема будет верна для случая, когда в заключительной формуле вывода нет свободных переменных, то по данному выводу формулы $\mathfrak{E}_2$ мы получим такой ее вывод, который будет осуществляться средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными. Тогда, не нарушая структуры этого вывода, мы можем заменить в нем вновь введенные индивидные и предикатные символы, для которых никаких специальных аксиом не формулировалось, подходящими свободными индивидными и формульными переменными; в результате этого мы получим вывод средствами элементарного исчисления со свободными переменными некоторой формулы $\mathfrak{E}_3$, из которой в результате некоторых подстановок может быть получена формула $\mathfrak{E}_1$. Но от $\mathfrak{E}_1$ мы можем перейти к $\mathfrak{E}$ средствами исчисления высказываний. Тем самым связанные переменные можно будет исключить и из вывода формулы $\mathfrak{E}$.

Поэтому для доказательства первой ε-теоремы достаточно рассмотреть случай, когда заключительная формула вывода $\mathfrak{E}$ не содержит свободных переменных. Это предположение относительно $\mathfrak{E}$ и будет лежать в основе наших дальнейших рассуждений.

Второй шаг нашей подготовки будет состоять в исключении кванторов всеобщности и существования. Как было показано

[1]) Если $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ — рассматриваемая в данном случае формула, а $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\mathfrak{a}))$ — формула, получающаяся из нее в результате указанной подстановки, то, с одной стороны, $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\mathfrak{a}))$ получается в результате подстановки из $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$; а с другой стороны, мы можем из $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\mathfrak{v}))$ сначала получить подстановкой формулу $\mathfrak{F}(\neg\mathfrak{W}(\mathfrak{a}))$, а затем с помощью формулы

$$(\mathfrak{B} \sim \mathfrak{W}(\mathfrak{a})) \vee (\mathfrak{F} \sim \neg \mathfrak{W}(\mathfrak{a})),$$

которая получается подстановкой из тождественной формулы

$$(A \sim B) \vee (A \sim \neg B),$$

получить формулу $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$.

в предыдущем параграфе, с помощью ε-формулы и явных определений (ε_1) и (ε_2) можно устранить применения основных формул (a) и (b) и схем (α) и (β) исчисления предикатов [1]).

Итак, пусть нам дан вывод формулы $\mathfrak{E}$, не использующий основных формул (a) и (b), а также схем (α) и (β). В этом выводе каждое выражение $\forall\mathfrak{v}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ мы заменим выражением $\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}} \neg \mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$, а каждое выражение $\exists\mathfrak{v}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ выражением $\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$. Эти подстановки переведут (ε_1) и (ε_2) в формулы, получаемые подстановкой из формулы $A \sim A$. В результате кванторы исключатся полностью, так что *в дальнейшем связанные переменные будут встречаться исключительно в связи с ε-символом, а в доказательстве будут употребляться только повторения, подстановки, переименования связанных переменных и схема заключения.*

К преобразованному таким образом выводу мы теперь применим операции разложения доказательства на нити и возвратного переноса подстановок в исходные формулы [2]), а затем исключим еще оставшиеся свободные переменные, заменив все индивидные переменные одним и тем же (произвольно взятым) индивидным символом, все формульные переменные с одинаковым числом аргументов одним и тем же предикатным символом с тем же самым числом аргументов, а все формульные переменные без аргументов одной и той же формулой без переменных.

Все эти преобразования, производимые над рассматриваемым выводом, не затрагивают заключительной формулы $\mathfrak{E}$, так как она по условию не содержит ни кванторов, ни свободных переменных и остается неизменной при разложении вывода и переносе подстановок.

Таким образом мы получаем некоторый вывод формулы $\mathfrak{E}$ (термин «вывод» употребляется здесь в несколько обобщенном смысле слова [3])) со следующими свойствами: все встречающиеся в этом выводе формулы построены из индивидных символов, предикатных символов, функциональных символов, ε-символа (с соответствующими связанными переменными) и символов исчисления высказываний. Каждая исходная формула представляет собой либо формулу, получающуюся в результате подстановки из какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний, либо одну из аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, либо формулу, получающуюся из одной из этих аксиом в результате подстановки, либо формулу, получающуюся в результате подстановки из ε-формулы. Взаимосвязь формул доказательства при этом основывается лишь на повторениях формул, переименованиях связанных переменных и схемах заключения. Такого рода вывод, обла-

[1]) См. с. 33.
[2]) См. т. I, гл. VI, с. 275—280 или Приложение I, с. 473 и далее.
[3]) См. т. I, с. 283.

дающий указанными свойствами, мы будем называть нормированным доказательством.

Если в полученном нами нормированном доказательстве формулы $\mathfrak{E}$ не будет исходных формул, получающихся (в результате подстановки) из ε-формулы, то мы сможем обойтись в нем совершенно без использования ε-символов. Действительно, структура нашего нормированного доказательства полностью сохранится, если мы заменим в нем каждый ε-терм переменной a, причем, очевидным образом, подстановки достаточно будет производить вместо тех ε-термов, которые не являются составными частями каких-либо других ε-термов. В результате такой замены мы получим некоторый вывод формулы $\mathfrak{E}$ из аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, который осуществляется средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными; при этом мы получим вывод и в первоначальном смысле этого слова, так как для каждой исходной формулы, получающейся в результате подстановки из тождественной формулы исчисления высказываний или из одной из аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, мы можем дополнительно дописать ее вывод из соответствующей формулы. Итак, утверждение первой ε-теоремы в отмеченном выше случае доказано, и, следовательно, нам достаточно показать, что из любого нормированного доказательства произвольной формулы $\mathfrak{E}$ могут быть устранены те исходные формулы, которые получаются в результате подстановки в ε-формулу.

Мы будем называть такие исходные формулы критическими формулами, причем формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$$

мы будем называть критической формулой, связанной с ε-термом $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$. (При этом ε-терм, с которым связана данная критическая формула, мы будем указывать лишь с точностью до обозначения входящих в него связанных переменных.)

б) Гильбертовский подход. Теперь доказательство первой ε-теоремы свелось к тому, чтобы показать, что из любого нормированного доказательства могут быть устранены все критические формулы. Метод, которым мы проведем это устранение, восходит к Гильберту. Для изложения этого метода мы сначала рассмотрим частный случай, когда все критические формулы доказательства связаны с одним и тем же ε-термом. Пусть эти формулы имеют вид [1])

$$(\mathfrak{K}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})), \end{cases}$$

[1]) Здесь явно используется тот факт, что не может быть двух таких различных формул $\mathfrak{A}(c)$ и $\mathfrak{B}(c)$, для которых $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ были бы одинаковыми ε-термами. Такая возможность была исключена нашим соглашением о недопущении коллизий между связанными переменными.

где $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ означают некоторые термы, которые также могут содержать ε-символы. Наша процедура исключения будет основываться на том, что если терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ всюду, где он встречается в рассматриваемом выводе, заменить некоторым вполне определенным термом t, то всякая исходная формула, которая до этой замены получалась в результате подстановки из какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний или из одной из формул $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, будет получаться из той же формулы в результате некоторой подстановки и после указанной замены. При этом взаимосвязь формул вывода также сохранится.

Замечание. Здесь следует еще раз подчеркнуть, что термы, отличающиеся друг от друга лишь обозначениями связанных переменных, мы считаем одинаковыми. В частности, это должно учитываться и при выполнении указанных замен.

Теперь заменим терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ всюду термом $\mathfrak{f}_1$. В результате этого вместо критических формул $(\mathfrak{K})$ появятся формулы вида

$$\begin{gathered} \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1), \\ \ldots\ldots \\ \mathfrak{B}_n \to \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1). \end{gathered}$$

Все они выводятся из формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1)$ при помощи тождественно истинной формулы

$$A \to (B \to A).$$

Поэтому, если мы добавим формулу $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1)$ к числу исходных формул, то получим некоторый вывод формулы $\mathfrak{E}$, в котором критические формулы будут устранены, т. е. будут фигурировать в нем не в качестве исходных, а в качестве выведенных формул. Таким образом, у нас получается некоторый вывод формулы $\mathfrak{E}$ из аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ и формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1)$ средствами элементарного исчисления со свободными переменными.

Так как формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1)$ не содержит никаких свободных переменных, то, согласно дедукционной теореме [1]), которая верна и в случае добавления к исчислению предикатов ε-формулы, по этому выводу можно построить вывод формулы

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{E},$$

в котором $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1)$ более не используется в качестве исходной формулы, и, следовательно, кроме средств элементарного исчисления

[1]) См. т. I, с. 193—199. Приведенное там доказательство годится и для рассматриваемого нами формализма. Впрочем, см. также следующее ниже замечание.

со свободными переменными, в нем используются только аксиомы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$. Заметим, что применение дедукционной теоремы здесь оказывается особенно элементарным, так как в рассматриваемом выводе формулы $\mathfrak{E}$ ни разу не встречаются ни схемы (α) и (β), ни подстановки; таким образом, он опирается исключительно на исчисление высказываний.

Совершенно аналогично тому, как мы пришли к выводу формулы

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{E},$$

мы получим также выводы формул

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_2) \to \mathfrak{E},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E};$$

для этих выводов тоже потребуются лишь аксиомы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ и элементарное исчисление со свободными переменными. Формулы

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{E},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E},$$

взятые совместно, с помощью исчисления высказываний дают нам формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E}.$$

С другой стороны, мы можем следующим образом получить вывод формулы

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E}.$$

Будем снова исходить из нормированного доказательства формулы $\mathfrak{E}$, в котором в качестве исходных формул используются формулы ($\mathfrak{K}$). Любая из этих формул с помощью исчисления высказываний выводима из формулы

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n),$$

так как формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_\tau) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

для $\tau = 1, \ldots, n$ выводима из $\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_\tau)$ с использованием тождественно истинной формулы

$$\neg A \to (A \to B).$$

Следовательно, если в нормированном доказательстве формулы $\mathfrak{E}$ вместо каждой из формул ($\mathfrak{K}$) мы вставим ее вывод из формулы

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n),$$

то получим доказательство формулы $\mathfrak{E}$, в котором ни одна критическая формула не фигурирует в качестве исходной. Но из этого доказательства по дедукционной теореме мы можем получить вывод формулы

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E},$$

в котором формула

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n)$$

уже не используется в качестве исходной, так что в этом выводе, кроме средств элементарного исчисления со свободными переменными, используются только аксиомы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$.

Теперь формула

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E},$$

которая может быть преобразована в

$$\neg(\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n)) \to \mathfrak{E},$$

вместе с полученной перед этим формулой

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E}$$

позволяет нам получить средствами исчисления высказываний формулу $\mathfrak{E}$. Таким образом, в итоге мы получаем вывод формулы $\mathfrak{E}$ без использования формул ($\mathfrak{K}$) в качестве исходных и без добавления каких бы то ни было новых исходных формул. Значит, действительно, из нашего нормированного доказательства формулы $\mathfrak{E}$ удается устранить применение всех упомянутых критических формул в качестве исходных.

в) Типы комбинирования ε-символов; степень и ранг ε-терма. Теперь речь пойдет о том, чтобы описанный нами метод, который в рассмотренном частном случае ведет к устранению всех критических формул, распространить и на общий случай.

С этой целью мы более детально остановимся на вопросе о возможных способах комбинирования ε-символов. Способы, с помощью которых образуются эти символы, совершенно аналогичны способам, которые применялись при комбинировании ι-символов, и для их характеризации мы снова будем пользоваться понятиями *вложения* и *подчинения*[1]). Мы будем говорить, что один ε-терм вложен в другой, если он является составной частью последнего. Что же касается отношения подчинения, то оно, вообще говоря, будет касаться ε-выражений, т. е. выражений, либо являющихся ε-термами, либо получающихся из ε-термов в результате превращения их свободных индивидных

[1]) См. т. I, с. 472.

переменных в связанные переменные, не входившие в эти термы [1]).

Мы будем говорить, что одно ε-выражение $\mathfrak{a}$ подчинено другому ε-выражению $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$, если оно является составной частью этого выражения и содержит переменную $\mathfrak{v}$; в этом случае мы будем также говорить, что выражение $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ подчиняет выражение $\mathfrak{a}$.

Замечание. В соответствии с данными определениями ε-выражение $\mathfrak{a}$, являющееся составной частью ε-терма $\mathfrak{t}$, может и не быть вложенным в $\mathfrak{t}$ или подчиненным этому терму.

Пусть, например, $\mathfrak{t}$ — терм вида

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}))).$$

Тогда ε-выражение $\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ не вложено в терм $\mathfrak{t}$, так как оно не является термом; но оно также и не подчинено терму $\mathfrak{t}$, так как не содержит переменной $\mathfrak{x}$.

Некоторые примеры комбинаций отношений включения и подчинения мы получаем, в частности, производя устранение кванторов всеобщности и существования.

Рассмотрим, например, устранение кванторов существования из выражения

$$\exists\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

не содержащего никаких других кванторов, кроме указанных $\exists\mathfrak{x}$ и $\exists\mathfrak{y}$.

Прежде всего здесь следует заменить $\exists\mathfrak{y}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ выражением

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})).$$

Если мы сокращенно обозначим это выражение через $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$, то $\exists\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ надо будет заменить на $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$. Вместо этого выражения надо будет написать

$$\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})),$$

причем в связи с подстановкой $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ в $\mathfrak{B}(\cdot)$ во избежание коллизий между связанными переменными в подставляемом выражении должна быть переименована связанная переменная $\mathfrak{y}$. Так мы получим выражение

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})), \varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})), \mathfrak{y})),$$

т. е. выражение вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

[1]) Различие между ε-термами и ε-выражениями аналогично различию между ι-термами и ι-выражениями. См. т. I, с. 473.

где $\mathfrak{a}$ — выражение $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}))$, а $\mathfrak{b}$ — выражение $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{y})$. В частности, если $\mathfrak{A}(a, b)$ представляет собой формулу, то $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ будут термами; при этом $\mathfrak{a}$ вложен в $\mathfrak{b}$, в то время как ε-выражение $\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$, из которого $\mathfrak{b}$ получается в результате замены переменной $\mathfrak{x}$ термом $\mathfrak{a}$ с переименованием $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{y}$, подчинено терму $\mathfrak{a}$.

Аналогичным образом можно убедиться, что в результате устранения с помощью ε-символа кванторов в выражениях

$$\forall\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

мы получим формулы вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — надлежащим образом выбранные ε-выражения.

Совершенно аналогично можно также показать, что любая формула

$$\exists\mathfrak{x}_1\exists\mathfrak{x}_2\ldots\exists\mathfrak{x}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{f}}),$$

не содержащая никаких связанных переменных, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{f}}$, в результате устранения из нее с помощью ε-символа кванторов существования перейдет в формулу вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}),$$

где $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ — некоторые конкретные термы.

Отношения включения и подчинения ε-термов позволяют устроить некоторую классификацию этих термов по степеням, с одной стороны, и по рангам, с другой.

Степень ε-терма $\mathfrak{t}$ определяется следующим образом. Мы рассматриваем всевозможные последовательности ε-термов, начинающиеся термом $\mathfrak{t}$ и такие, что за каждым их термом, в который вложен хотя бы один другой ε-терм, следует один из вложенных в него ε-термов.

Может существовать только ограниченное число таких последовательностей, и в каждой из них количество ε-термов ограничено общим числом ε-термов, входящих в $\mathfrak{t}$ (считая и сам терм $\mathfrak{t}$).

Число термов в максимальной по длине из этих последовательностей мы будем называть степенью терма $\mathfrak{t}$.

Это определение степени, как легко убедиться, равносильно следующему рекурсивному определению. Любой ε-терм, не содержащий ни одного вложенного в него ε-терма, имеет степень, равную 1. Данный ε-терм имеет степень $\mathfrak{f}+1$, если любой вложенный в него ε-терм имеет степень, не превосходящую $\mathfrak{f}$, и по крайней мере один вложенный в него ε-терм имеет степень, равную $\mathfrak{f}$. Согласно этому определению всякий ε-терм имеет бо́льшую степень, чем любой вложенный в него ε-терм.

Подобно тому, как отношение вложения ведет к понятию степени для ε-термов, отношение подчинения ведет к понятию *ранга* для ε-выражений. Пусть $\mathfrak{t}$ — ε-выражение. Мы рассмотрим последовательности ε-выражений, начинающиеся выражением $\mathfrak{t}$ и такие, что за каждым их ε-выражением, подчиняющим себе хотя бы одно отличное от него ε-выражение, следует одно из подчиненных ему ε-выражений.

Существует только ограниченное число таких последовательностей, и внутри каждой из них имеется только ограниченное число следующих друг за другом ε-выражений. Число ε-выражений в максимальной по длине из этих последовательностей мы будем называть рангом ε-выражения $\mathfrak{t}$.

Определению ранга также можно придать рекурсивный характер. Какое-либо ε-выражение мы будем называть ε-выражением ранга 1, если ему не подчинено никакое ε-выражение; мы будем говорить, что данное ε-выражение имеет ранг $\mathfrak{f}+1$, если всякое подчиненное ему ε-выражение имеет ранг, не превосходящий $\mathfrak{f}$, и если по меньшей мере одно подчиненное ему ε-выражение имеет ранг, равный $\mathfrak{f}$.

Прежде всего, из данного определения получается, что любое ε-выражение имеет ранг, бóльший, чем любое подчиненное ему ε-выражение, а также что любое ε-выражение, получающееся из какого-либо ε-терма в результате превращения одной или нескольких свободных переменных в связанные[1]), имеет тот же самый ранг, что и исходный ε-терм, рассматриваемый как ε-выражение. Очевидно, что на ранг данного ε-выражения не оказывают никакого влияния ни входящие в него в качестве составных частей ε-термы, ни подчиненные таким ε-термам ε-выражения; в самом деле, ε-терм вообще не может быть подчинен никакому ε-выражению, и если какой-нибудь ε-терм является составной частью какого-либо ε-выражения $\mathfrak{a}$, которому подчинено другое ε-выражение $\mathfrak{b}$, то либо этот ε-терм фигурирует внутри $\mathfrak{a}$ только в качестве составной части $\mathfrak{b}$, либо он лежит совершенно вне $\mathfrak{b}$, так как он не может содержать никакой переменной, которая связывалась бы каким-нибудь стоящим вне его ε-символом. Таким образом, ранг ε-выражения не изменится, если находящийся внутри него ε-терм (в одном или нескольких местах, где он встречается) заменить каким-нибудь другим ε-термом.

В качестве примера на вычисление степени, а также ранга рассмотрим построенный из арифметических символов ε-терм

$$\varepsilon_x\{[\varepsilon_y(0'=\varepsilon_z(z<y''))=\varepsilon_y(x<y)]\vee [0<\varepsilon_u((\varepsilon_z(z<u')<u)\,\&\,u<x)]\},$$

[1]) Особо отметим, что речь идет о тех из них, которые не входят в данный ε-терм (см. с. 44).

который мы обозначим буквой $\mathfrak{t}$. Этот терм содержит в качестве вложенного ε-терма только терм

$$\varepsilon_y(0'=\varepsilon_z(z<y'')),$$

который, со своей стороны, вложенных ε-термов больше уже не содержит; тем самым $\mathfrak{t}$ имеет степень 2.

Терму $\mathfrak{t}$ подчинены ε-выражения

$$\varepsilon_y(x<y) \quad \text{и} \quad \varepsilon_u((\varepsilon_z(z<u')<u)\,\&\,u<x),$$

из которых первое больше не содержит никаких ε-выражений и тем самым имеет ранг 1, в то время как второе, которому подчинено ε-выражение

$$\varepsilon_z(z<u'),$$

имеет ранг 2. Тем самым $\mathfrak{t}$ имеет ранг 3.

В качестве еще одного примера возьмем ε-терм

$$\varepsilon_y[\varepsilon_x(x<\varepsilon_z(x<z))<y],$$

к которому нас приводит процесс устранения с помощью ε-символа кванторов существования из формулы

$$\exists x\exists y\,(x<y).$$

Этот ε-терм не содержит ни одного подчиненного ему ε-выражения и, значит, ранг его равен 1. В качестве вложенного ε-терма этот терм содержит ε-терм

$$\varepsilon_x(x<\varepsilon_z(x<z)).$$

Так как последний уже не содержит вложенных в него ε-термов и, значит, имеет степень 1, то весь рассматриваемый терм имеет степень 2.

На этом примере мы видим, что ε-терм может иметь меньший ранг, чем другой ε-терм, вложенный в него. Действительно, рассматриваемый ε-терм имеет ранг 1, а вложенный в него ε-терм имеет ранг 2.

Ниже мы используем понятия степени и ранга для того, чтобы установить устранимость из нормированных доказательств всех входящих в них критических формул.

г) Устранение критических формул в общем случае. Теперь речь пойдет о том, чтобы гильбертовскую процедуру устранения критических формул из нормированных доказательств, рассмотренную выше для случая, когда все критические формулы были связаны с одним и тем же ε-термом[1]), распространить на общий

[1]) См. п. б), с. 40—43.

случай. Как мы уже знаем, этот метод состоит в том, что по данному нам нормированному доказательству формулы $\mathfrak{E}$ с критическими формулами

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

сначала строятся выводы формул

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{E},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E},$$

а затем вывод формулы

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1)\,\&\ldots\&\,\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{E},$$

который вместе с указанными n формулами средствами исчисления высказываний дает нам вывод формулы $\mathfrak{E}$. Построение этих $n+1$ частичных доказательств по заданному нормированному доказательству происходит на основе дедукционной теоремы путем импликативного добавления соответствующих посылок и включения необходимых фрагментов доказательства, состоящих в надлежащем применении исчисления высказываний. Но, кроме этого, для получения вывода формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_r) \to \mathfrak{E}$ $(r = 1, \ldots, n)$ терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ всюду, где он встречается в данном нормированном доказательстве, мы должны заменить на $\mathfrak{f}_r$.

Теперь мы будем пытаться применить сходный метод и в том случае, когда в рассматриваемом доказательстве кроме критических формул $(\mathfrak{K})$, относящихся к данному терму $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, встречаются другие критические формулы.

Здесь мы сталкиваемся со следующими двумя трудностями. Во-первых, может случиться, что при заменах, которые мы будем выполнять в ходе исключения формул $(\mathfrak{K})$, другие критические формулы перестанут быть формулами, получающимися в результате подстановки в ε-формулу; в этом случае данный метод может вообще не дать никакого вывода формулы $\mathfrak{E}$. Но даже если этого и не случится, мы все равно должны будем считаться с тем, что вследствие производимых замен могут возникать новые критические формулы, и это делает совершенно не очевидным тот факт, что рассматриваемая процедура исключения критических формул после конечного числа шагов оборвется.

Следовательно, нам необходимо более детально заняться рассмотрением тех изменений, которым может подвергнуться критическая формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

вследствие замены какого-то отличного от $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ ε-терма $\mathfrak{t}$ каким-либо другим термом $\mathfrak{t}^*$. Здесь имеются следующие возможности:

1. Терм $\mathfrak{t}$ входит в рассматриваемую критическую формулу только внутри терма $\mathfrak{f}$. (Мы включаем сюда и случай, когда $\mathfrak{f}$ совпадает с $\mathfrak{t}$.) Тогда и после выполнения указанной замены эта формула будет по-прежнему критической формулой, связанной с ε-термом $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

2. Терм $\mathfrak{t}$ входит в формулу $\mathfrak{A}(c)$, а, кроме того, может быть, и в $\mathfrak{f}$, но ни один из термов $\mathfrak{f}$ и $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ не является составной частью $\mathfrak{t}$. Тогда наша критическая формула может быть более подробно записана в виде

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}(\mathfrak{t}),\ \mathfrak{t}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\ \mathfrak{t}),\ \mathfrak{t}).$$

В этом случае терм $\mathfrak{t}$ является составной частью ε-терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\ \mathfrak{t})$, с которым связана данная критическая формула, и потому степень $\mathfrak{t}$ меньше степени этого терма. В данном случае замена терма $\mathfrak{t}$ приводит к тому, что эта критическая формула переходит в другую критическую формулу, связанную с термом

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\ \mathfrak{t}^*),$$

который в силу замечания о ранге ε-выражений [1]), имеет тот же самый ранг, что и терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\ \mathfrak{t})$.

3. Один из термов $\mathfrak{f}$ и $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ содержится в $\mathfrak{t}$ в качестве составной части. Тогда $\mathfrak{t}$ имеет вид $\mathfrak{s}(\mathfrak{f})$ или соответственно $\mathfrak{s}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$, а формула $\mathfrak{A}(c)$ имеет вид $\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(c))$, где $\mathfrak{s}(c)$ — вполне определенный ε-терм, который имеет тот же самый ранг, что и $\mathfrak{t}$.

Терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, с которым связана рассматриваемая критическая формула, в этом случае записывается в виде

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{x})).$$

Значит, он подчиняет себе ε-выражение $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$, и потому его ранг выше ранга этого выражения. Но $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ имеет тот же самый ранг, что и $\mathfrak{s}(c)$, а ранг $\mathfrak{s}(c)$, как мы только что установили, равен рангу $\mathfrak{t}$. Следовательно, ранг терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ больше ранга терма $\mathfrak{t}$.

Ввиду этого, если условиться в первую очередь производить замены тех связанных с критическими формулами ε-термов, которые имеют *ранг, наибольший из числа встречающихся*, то можно будет исключить разбор случая 3.

Если мы будем придерживаться такого порядка замен, то у нас будут встречаться только случаи 1 и 2. Это говорит, во-первых, о том, что любая критическая формула, если она вообще будет претерпевать какие-либо изменения, будет снова переходить

[1]) См. с. 46.

в некоторую критическую формулу, причем эта последняя будет связана либо с тем же самым ε-термом, что и начальная критическая формула (случай 1), либо с некоторым новым ε-термом, имеющим тот же самый ранг. Далее заметим, что при любой замене ε-терма t всякая критическая формула, связанная с каким-либо ε-термом a, имеющим степень, не бо́льшую степени терма t, снова переходит в некоторую критическую формулу, связанную с a. В самом деле, случай 2, как мы знаем, может иметь место лишь тогда, когда степень ε-терма, с которым связана измененная в результате замены терма t критическая формула, больше степени терма t. А в случае 1 ε-терм, с которым связана данная критическая формула, остается без изменений.

Это рассуждение дает нам возможность следующим образом устранить из любого наперед заданного нормированного доказательства какой-либо формулы $\mathfrak{E}$ все его критические формулы. Среди чисел, являющихся рангами термов, с которыми связаны какие-либо критические формулы, имеется наибольшее. Ранг того ε-терма, с которым связана какая-либо критическая формула, мы для краткости будем называть рангом этой формулы, а степень этого ε-терма мы будем называть степенью этой критической формулы. Пусть $\mathfrak{m}$ — наибольший из рангов критических формул, фигурирующих в данном доказательстве, и пусть $\mathfrak{n}$ — наибольшая из степеней критических формул, имеющих ранг $\mathfrak{m}$. Пусть t — один из тех ε-термов, имеющих ранг $\mathfrak{m}$ и степень $\mathfrak{n}$, с которыми связаны какие-либо критические формулы. Если мы применим нашу процедуру к связанным с термом t критическим формулам, то вследствие произведенных при процедуре исключения замен в пребразованном доказательстве формулы $\mathfrak{E}$ вместо одной не исключенной критической формулы может появиться несколько различающихся между собой формул; однако все они также будут критическими формулами (т. е. формулами, получающимися в результате подстановки из ε-формулы); более того, все они будут связаны с одним и тем же ε-термом.

Таким образом, в результате устранения связанных с термом t критических формул количество различных ε-термов ранга $\mathfrak{m}$, с которыми связаны какие-либо критические формулы, уменьшится на единицу, причем никаких критических формул с новыми рангами не появится. Следовательно, если в начальный момент у нас было $\mathfrak{f}$ различных ε-термов ранга $\mathfrak{m}$, с которыми были связаны какие-либо критические формулы, то $\mathfrak{f}$-кратное применение нашей процедуры приведет к тому, что все критические формулы, имеющие ранг $\mathfrak{m}$, будут исключены, причем не появится никаких критических формул с новыми рангами. Таким образом, у нас имеется способ, позволяющий уменьшать количество различных фигурирующих в нашем рассмотрении рангов критических формул. Повторив его нужное число раз, мы полностью исключим все критические формулы, входящие в рассматриваемое доказательство.

Это рассуждение и доказывает нашу первую ε-теорему. Рассмотрение общего случая с помощью понятия ранга восходит к Вильгельму Аккерману.

д) Обобщение результата. Метод, примененный в только что изложенном доказательстве, дает еще один важный для применений результат.

Результат этот мы получим, применив рассмотренную процедуру исключения к выводу формулы $\mathfrak{E}$ вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r),$$

не содержащей никаких других кванторов, кроме стоящих в ее начале кванторов существования $\exists \mathfrak{x}_1, \ldots, \exists \mathfrak{x}_r$, а также не содержащей и ε-термов. При этом предположения относительно формализма F и аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ будут прежними. Не ограничивая общности, мы снова можем считать, что формула $\mathfrak{E}$ не содержит свободных переменных. Мы опять начнем с подготовительных операций: устранения кванторов с помощью ε-символа, разложения вывода на нити, возвратного переноса подстановок в исходные формулы и исключения оставшихся свободных переменных [1].

В результате устранения кванторов заключительная формула $\mathfrak{E}$, т. е. формула

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r),$$

перейдет в формулу вида

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r),$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — некоторые термы [2]. Заметим, что термы эти не будут содержать свободных переменных, так как сама формула $\mathfrak{E}$ их не содержит, а при замене любого выражения $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ выражением $\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}))$ никаких новых свободных переменных появиться не может.

Остальные подготовительные операции из числа упомянутых выше оставят формулу $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ без изменений. Внутри этой формулы ε-символы будут встречаться только в термах $a_1, \ldots, a_r$, так как по условию выражение $\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)$ ε-символов не содержит.

Теперь у нас будет нормированное доказательство [3] формулы $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$. Конечно, мы не сможем применить к нему нашу

---

[1] См. п. а), с. 37 и далее.

[2] См. рассуждение на с. 44—45, где мы произвели это устранение для случая $r = 2$.

[3] См. с. 39—40.

процедуру устранения критических формул описанным выше способом, так как в ней существенным образом используется то обстоятельство, что заключительная формула рассматриваемого нормированного доказательства не содержит ε-символов. Однако эту процедуру легко модифицировать таким образом, чтобы она давала результат и в том случае, когда в заключительной формуле содержатся ε-термы. В этом можно убедиться путем следующего рассуждения. Пусть дано нормированное доказательство с заключительной формулой $\mathfrak{C}$. Пусть среди ε-термов, с которыми в этом доказательстве связаны какие-либо критические формулы, терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ является термом с максимальным рангом, и пусть среди термов, обладающих этим свойством, он имеет наибольшую степень. Пусть с этим ε-термом связаны критические формулы

$$(\mathfrak{K}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})). \end{cases}$$

Действуя совершенно аналогично предыдущему, мы можем применить гильбертовский метод для получения $n+1$ «частичного доказательства»[1]). Но в данном случае эти доказательства, вообще говоря, уже могут и не оканчиваться формулами вида

$$\begin{gathered} \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{C}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{C}, \\ \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \,\&\, \dots \,\&\, \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{C}. \end{gathered}$$

Действительно, в каждом из первых n частичных доказательств происходит некоторая замена терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$, а именно, в r-м частичном доказательстве терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ заменяется термом $\mathfrak{f}_r$. Вследствие этих замен формула $\mathfrak{C}$, которая, может быть, содержит заменяемый терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$, может подвергнуться каким-либо изменениям. Лишь относительно $(n+1)$-го частичного доказательства, которое проводится без каких бы то ни было замен, мы можем быть уверены, что формула $\mathfrak{C}$ останется в нем без изменений.

В соответствии со сказанным, заключительные формулы этих частичных доказательств в общем случае будем иметь вид

$$\begin{gathered} \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{C}_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{C}_n, \\ \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \,\&\, \dots \,\&\, \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{C}, \end{gathered}$$

[1]) См. с. 48.

причем формулы $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n$, возможно, будут отличаться от $\mathfrak{C}$ тем, что в $\mathfrak{C}_r$ $(r=1, \dots, n)$ вместо $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ будет стоять соответственно терм $\mathfrak{f}_r$.

Хотя из этих $n+1$ формул формула $\mathfrak{C}$, вообще говоря, и не выводится, но средствами исчисления высказываний из них можно вывести формулу

$$\mathfrak{C} \vee \mathfrak{C}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{C}_n.$$

Действительно, обозначим эту дизъюнкцию посредством $\mathfrak{D}$. Тогда формулы

$$\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}, \quad \dots, \quad \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$$

будут выводимы средствами исчисления высказываний. Поэтому из заключительных формул указанных $n+1$ частичных доказательств при помощи исчисления высказываний мы получим формулы

$$\begin{gathered} \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{D}, \\ \dots\dots \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{D}, \\ \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \,\&\, \dots \,\&\, \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{D}, \end{gathered}$$

которые, будучи взяты совместно друг с другом, дадут нам формулу $\mathfrak{D}$.

На этом пути мы получаем некоторую простую модификацию нашей процедуры исключения критических формул. Единственное различие по сравнению со случаем, когда заключительная формула не содержала ε-символов, заключается в том, что здесь на каждом шаге процесса исключения, приводящем к исключению критической формулы, связанной с каким-либо определенным ε-термом, может происходить некоторое *дизъюнктивное расщепление* заключительной формулы; именно, на каждом таком шаге вместо данной заключительной формулы $\mathfrak{E}$ может появиться некоторая дизъюнкция $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{C}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{C}_n$, где каждый ее член $\mathfrak{C}_r$ получается из $\mathfrak{C}$ в результате некоторой замены одного из входящих в $\mathfrak{C}$ ε-термов (всюду, где этот последний входит в $\mathfrak{C}$).

Если теперь эту модифицированную процедуру применить к рассматриваемому нами нормированному доказательству формулы $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_r)$, то у нас получится вывод некоторой формулы $\mathfrak{E}^*$, не содержащий вхождений критических формул. Если в результате применения нашей процедуры формула $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_r)$ будет подвергаться каким-либо изменениям, то формула $\mathfrak{E}^*$ будет получаться из $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_r)$ в результате одного или нескольких расщеплений на дизъюнкции.

Рассмотрим более детально вопрос о виде этой формулы. В результате однократного расщепления на дизъюнкции у нас получается заключительная формула

$$\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_p,$$

где $\mathfrak{A}_0$ представляет собой формулу $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$, а остальные члены дизъюнкции могут отличаться от нее лишь тем, что вместо термов $a_1, \ldots, a_r$ в них стоят какие-нибудь другие термы. В самом деле, как мы знаем, в формуле $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ вне термов $a_1, \ldots, a_r$ никаких ε-символов не встречается. Тем самым формула $\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_p$ представляет собой дизъюнкцию членов вида

$$\mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_r),$$

где $b_1, \ldots, b_r$ суть некоторые термы. Это свойство заключительной формулы будет сохраняться и при всех дальнейших расщеплениях; действительно, из дизъюнктивного члена, имеющего вид $\mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_r)$, в результате замены одного входящего в него ε-терма другим может снова получиться только член

$$\mathfrak{A}(c_1, \ldots, c_r)$$

с некоторыми термами $c_1, \ldots, c_r$, а дизъюнкция таких дизъюнкций сама является дизъюнкцией, состоящей из таких членов.

Указанное свойство заключительной формулы сохранится и в том случае, если мы после устранения всех критических формул заменим каждый из оставшихся ε-термов конкретной переменной a, за исключением тех из них, которые являются составными частями каких-либо объемлющих их ε-термов.

Таким образом, мы получим вывод некоторой формулы вида

$$\mathfrak{A}(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(t_1^{(s)}, \ldots, t_r^{(s)}),$$

где $t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}, \ldots, t_r^{(s)}$ суть некоторые термы; причем этот вывод будет производиться, исходя из аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, средствами элементарного исчисления, т. е. с использованием подстановок вместо свободных переменных, входящих в $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, и с применением средств исчисления высказываний.

Тем самым мы получаем следующее *обобщение первой ε-теоремы*: *Пусть нам дан вывод некоторой формулы*

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r),$$

не содержащей, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$, никаких других связанных переменных. Пусть этот вывод производится, исходя из некоторых аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, средствами исчисления предикатов и, быть может, с использованием ε-формулы. Тогда можно построить такой вывод некоторой формулы

$$\mathfrak{A}(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(t_1^{(s)}, \ldots, t_r^{(s)}),$$

где $t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}, \ldots, t_r^{(s)}$ суть термы без ε-символов, в котором используются только аксиомы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ и средства элементарного исчисления со свободными переменными.

Заслуживает внимания тот факт, что от этой заключительной формулы к первоначальной заключительной формуле

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)$$

можно без труда вернуться с использованием основной формулы (b) исчисления предикатов и средств исчисления высказываний.

§ 4. Доказательства непротиворечивости

а) Одна общая теорема о непротиворечивости. Мы применим теперь нашу первую ε-теорему к исследованию проблематики, связанной с непротиворечивостью. Ради этих применений мы и занялись доказательством нашей теоремы [1]). Как мы уже знаем, теорема эта сводит вопрос о непротиворечивости какой-либо системы собственных аксиом без связанных переменных, основывающейся на исчислении предикатов и ε-аксиоме, к вопросу о непротиворечивости той же самой системы, основывающейся на элементарном исчислении со свободными переменными.

Возможность использования этого сведения нам хотелось бы сначала пояснить на каком-либо простом примере. С этой целью мы вернемся к одному формализму, подробно рассмотренному нами в гл. VI первого тома [2]). Мы имеем в виду формализм, который получается в результате добавления к исчислению предикатов двух предикатных символов $=$ и $<$, индивидного символа 0 и штрих-символа в качестве функционального знака, а также следующих аксиом:

аксиомы равенства:

(J_1) $\quad a = a,$

(J_2) $\quad a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$

аксиомы порядка:

$(<_1)$ $\quad \neg(a < a),$

$(<_2)$ $\quad a < b \,\&\, b < c \rightarrow a < c,$

$(<_3)$ $\quad a < a'$

[1]) См. с. 25—26.

[2]) См. т. I, с. 273 и далее.

и аксиомы Пеано:

(P_1) $$a' \neq 0,$$

(P_2) $$a' = b' \rightarrow a = b.$$

Доказательство непротиворечивости этой системы — мы обозначим ее посредством (S) — было проведено в два этапа: сначала мы рассмотрели выводы, обходящиеся без использования связанных переменных, а затем перешли к общему случаю, основанному на использовании всего исчисления предикатов в целом. Это разбиение доказательства на две части в то время носило только эвристический характер. Но теперь, применяя нашу ε-теорему, рассмотрение упомянутого частного случая можно будет достроить до нового доказательства непротиворечивости. Доказательство это легко получается с учетом следующих фактов:

1. Утверждение о непротиворечивости системы (S) нам удалось усилить до позитивного утверждения об истинности всякой выводимой в (S) нумерической формулы. При этом нумерической формулой мы назвали формулу, которая либо является равенством цифр, либо неравенством[1]) между цифрами, либо строится из формул этого рода с помощью связок исчисления высказываний, а разбиение нумерических формул на истинные и ложные мы произвели в соответствии с арифметическим пониманием нумерических элементарных формул и с пониманием связок исчисления высказываний как истинностных функций[2]).

2. Аксиомы системы (S) не содержат связанных переменных. Все они, за исключением аксиомы (J_2), являются собственными аксиомами, а аксиома равенства (J_2), как было показано в гл. VII первого тома[3]), может быть заменена следующими собственными аксиомами:

(i)
$$\begin{cases} a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c), \\ a = b \rightarrow a' = b', \\ a = b \rightarrow (a < c \rightarrow b < c), \\ a = b \rightarrow (c < a \rightarrow c < b). \end{cases}$$

Получающуюся из (S) в результате этой замены систему аксиом мы обозначим посредством (S*). Она равносильна системе (S).

После этого искомое доказательство сводится к тому, чтобы показать, что всякая выводимая в системе (S*) нумерическая формула является истинной. Так как все аксиомы системы (S*) являются собственными аксиомами без связанных переменных,

[1]) Неравенствами мы назвали формулы вида $s < t$; см. т. I, с. 283.
[2]) См. т. I, с. 283 — 284.
[3]) См. т. I, с. 456 — 459.

то, согласно нашей ε-теореме, из вывода любой нумерической формулы, проводимого в рамках системы (S*), связанные переменные могут быть исключены, и поэтому нам достаточно показать, что всякая нумерическая формула, выводимая из аксиом системы (S*) средствами элементарного исчисления со свободными переменными, является истинной[1]).

Тем самым сведение общего случая к случаю, когда вывод осуществляется средствами элементарного исчисления, закончено. Остающееся утверждение о том, что всякая нумерическая формула, выводимая из аксиом системы (S*) средствами элементарного исчисления со свободными переменными, является истинной, получается просто (аналогично рассуждению из гл. VI т. I) с учетом следующих фактов:

1. К любому конкретному выводу нумерической формулы из аксиом системы (S*), проводимому средствами элементарного исчисления, могут быть применены операции разложения фигуры доказательства на нити, возвратного переноса подстановок в исходные формулы и исключения всех свободных переменных; в результате этого мы получим некоторую фигуру доказательства (в обобщенном смысле), в которой всякая исходная формула получается в результате подстановки либо из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, либо из одной из аксиом системы (S*). В этой новой фигуре доказательства всякая формула будет нумерической и взаимосвязь между формулами доказательства будет основываться исключительно на повторениях и на схемах заключения.

2. Всякая нумерическая формула, получающаяся в результате подстановки из тождественно истинной формулы, является истинной. Всякая нумерическая формула, получающаяся из какой-либо аксиомы системы (S*) в результате подстановки цифр вместо свободных переменных, является истинной. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ являются истинными нумерическими формулами, то $\mathfrak{B}$ также является истинной формулой.

Этот метод доказательства непротиворечивости системы (S*), а тем самым также и (S), имеет существенное преимущество по сравнению с методом редукции, который мы использовали при доказательстве непротиворечивости (S) в гл. VII т. I. Преимущество это заключается в том, что применимость его носит более универсальный характер. Действительно, метод редукции существенным образом использует то обстоятельство, что каждое арифметическое отношение, выразимое в (S) с помощью связанных индивидных переменных (но все-таки без использования формульных переменных), выразимо и без связанных переменных;

[1]) Это применение ε-теоремы соответствует теореме об элементарном выводе; см. с. 37.

например, отношение

$$\exists x\,(a<x\,\&\,x<b)$$

выразимо в виде

$$a'<b,$$

а отношение

$$\forall x\,(a<x\vee x<b\vee x=c)$$

в виде

$$(a<b)\vee(a=b\,\&\,a=c).$$

Такая возможность исключения связанных переменных имеется только у очень специальных систем, в то время как устранимость связанных переменных *из вывода* любой формулы, не содержащей связанных переменных, согласно нашей ε-теореме, имеет место для всякой формализованной средствами исчисления предикатов системы, содержащей только собственные аксиомы без связанных переменных.

В качестве специального (т. е. касающегося не только типов встречающихся переменных) свойства аксиом систем (S*) в последнем доказательстве использовалось лишь то, что каждая из этих аксиом при произвольной замене свободных переменных цифрами переходит в истинную нумерическую формулу, т. е. то, что аксиомы эти, как мы говорим для краткости, являются верифицируемыми формулами[1]).

Это понятие верифицируемости тоже пока еще обременено ненужными ограничениями. В самом деле, оно определено в расчете на такой формализм, в котором каждый терм, не содержащий свободных переменных, — или, как мы будем для кратности говорить, постоянный*) терм — является цифрой. Некоторое обобщение этого понятия, учитывающее появление функциональных знаков для рекурсивных функций, мы уже произвели в гл. VII т. I[2]). Но, вообще говоря, мы не обязаны ограничиваться рассмотрением только арифметических формализмов, в которых имеется символ 0 и штрих-символ (или какие-нибудь другие аналогичные символы вместо них) в их специфической роли. Более того, можно дать общее определение понятия верифицируемости, годящееся для любого формализма, содержащего постоянные термы. Такое определение *будет опираться на распределение истинностных значений постоянных элементарных формул*, причем под распределением значений мы

[1]) См. т. I, гл. VI, с. 294.—Этот термин выбран с учетом того, что при содержательном истолковании рассматриваемых формул им соответствуют имеющие характер всеобщности математические предложения, которые могут быть верифицированы (подтверждены) в каждом отдельном случае, хотя общезначимость их может быть и не верифицирована.

*) Авторы употребляют термин «variablenlos». — *Прим. перев.*

[2]) См. т. I, гл. VII, с. 363.

будем понимать некоторый способ, позволяющий каждой конкретно заданной постоянной элементарной формуле рассматриваемого формализма однозначно сопоставлять одно из двух значений «истина» или «ложь».

Всякое такое распределение истинностных значений для постоянных элементарных формул, если связки исчисления высказываний истолковывать как истинностные функции, естественным образом порождает распределение и для любых постоянных формул. При этом всякая постоянная формула однозначным образом оказывается либо истинной, либо ложной, а всякая постоянная формула, являющаяся результатом подстановки в тождественно истинную формулу исчисления высказываний, оказывается истинной.

Формулу, не содержащую никаких других переменных, кроме свободных индивидных, мы будем называть верифицируемой, если при любой замене этих переменных постоянными термами она оказывается истинной.

С помощью этого понятия мы можем сформулировать следующую общую теорему о непротиворечивости («нп-теорему»):

Пусть F — формализм, получающийся из исчисления предикатов путем добавления к нему некоторых индивидных, предикатных и функциональных символов, а также некоторых собственных аксиом. Пусть имеется способ, позволяющий однозначно соотнести истинностные значения постоянным элементарным формулам. Пусть аксиомы не содержат связанных переменных и пусть при данном распределении истинностных значений они являются верифицируемыми формулами. Тогда формализм F непротиворечив в том сильном смысле, что любая выводимая в нем постоянная формула является истинной.

Доказательство этой теоремы получается совершенно аналогично доказательству непротиворечивости системы (S*), проведенному нами с использованием первой ε-теоремы.

Заслуживают внимания следующие добавления:

1. *Всякая выводимая в формализме F формула, не содержащая других переменных, кроме свободных индивидных, является верифицируемой.*

В самом деле, любая замена в формуле такого рода свободных переменных какими-либо постоянными термами может рассматриваться как подстановка, и поэтому она дает нам формулу, выводимую в F; согласно утверждению нашей теоремы эта формула является истинной.

2. *По выводу всякой выводимой в F формулы вида*

$$\exists\mathfrak{x}_1\ldots\exists\mathfrak{x}_r\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_r),$$

не содержащей других переменных, кроме $\mathfrak{x}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_r$, можно найти

такие постоянные термы $t_1, \ldots, t_r$, *для которых формула*

$$\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_r)$$

будет истинной.

Это вытекает из доказанного нами обобщения первой ε-теоремы. Будучи применено к нашему случаю, оно утверждает, что, исходя из вывода формулы

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r),$$

с помощью нашей процедуры исключения связанных переменных можно получить некоторую формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}_r^{(1)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1^{(s)}, \ldots, \mathfrak{f}_r^{(s)}),$$

которая выводится из аксиом формализма F средствами элементарного исчисления и в которой $\mathfrak{f}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}_r^{(s)}$ суть термы, не содержащие ε-символа и, следовательно, построенные из одних только свободных переменных, индивидных символов и функциональных знаков формализма F.

Если вместо всех встречающихся в этой формуле свободных индивидных переменных мы подставим один и тот же индивидный символ, то у нас снова получится выводимая в F формула, которая теперь будет постоянной, а потому и истинной. Значит, по крайней мере один из членов нашей дизъюнкции будет истинной формулой и эта формула будет иметь вид

$$\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_r),$$

где $t_1, \ldots, t_r$ — некоторые постоянные термы.

3. *Если какая-нибудь формула вида*

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_n \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r),$$

не содержащая никаких переменных, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r$, *выводима в* F, *то по выводу этой формулы для всякой системы постоянных термов* $a_1, \ldots, a_n$ *можно будет найти такие постоянные термы* $b_1, \ldots, b_r$, *для которых формула*

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_r)$$

является истинной.

Это следует из добавления 2 с учетом того, что для каждой системы термов $a_1, \ldots, a_n$ из формулы

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_n \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r)$$

с помощью основной формулы (а) исчисления предикатов может быть выведена формула

$$\exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_r \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r).$$

4. *Утверждение сформулированной нами теоремы о непротиворечивости вместе с добавлениями* 1, 2 *и* 3 *останется верным и в том случае, если мы к формализму* F *добавим* ε-*символ и* ε-*формулу.*

В самом деле, при доказательстве первой ε-теоремы мы с самого начала с целью исключения кванторов добавили к рассматриваемому формализму ε-символ и ε-формулу.

Это замечание является очень важным, так как с помощью ε-формулы мы можем дать общую формализацию всех способов определения, объединяемых ι-правилом, и операции символьного решения экзистенциальных высказываний [1]).

Доказанную нами теорему о непротиворечивости, включая добавления 1 — 4, мы для краткости будем называть «нп-теоремой».

б) Приложение к геометрии. Установленная выше нп-теорема дает нам метод, позволяющий доказывать непротиворечивость различных аксиоматических теорий, формализованных средствами исчисления предикатов, при условии, что для их аксиом мы располагаем каким-либо финитным арифметическим истолкованием. При этом непротиворечивость получается и в том случае, когда к числу аксиом добавляется ε-формула.

Конечно, одного финитного истолкования какой-либо системы аксиом еще недостаточно для того, чтобы финитно убедиться в непротиворечивости этой системы, так как это истолкование не распространяется на доказательства. Формализованные посредством исчисления предикатов способы умозаключений вносят в финитную интерпретацию некоторый нефинитный элемент. Однако с помощью нп-теоремы можно убедиться в приемлемости этих способов умозаключений.

Все сказанное мы детально продемонстрируем на примере аксиоматики элементарной геометрии. Пример этот интересен и сам по себе. Под элементарной мы будем понимать здесь геометрию, основанную на аксиомах соединения, порядка, конгруэнтности и на аксиоме о параллельных (аксиомы непрерывности мы исключаем).

Ради простоты мы ограничимся геометрией плоскости. Перенос рассматриваемого метода на случай пространства никаких принципиальных трудностей не вызывает.

Для того чтобы иметь возможность непосредственно воспользоваться нашей нп-теоремой, мы должны будем выписать рассматриваемую систему аксиом в разрешенном виде. Аксиомы соединения и порядка в том уже разрешенном виде, как они получаются на основе редакции, приведенной в гл. I т. I, мы собрали в § 1 настоящей главы в аксиомы 1 — 4 группы I и аксиомы 1 — 5 группы II (см. с. 25).

[1]) См. с. 23.

Аксиомы конгруэнтности целесообразно взять в редакции Р. Л. Мура [1]), который для случая линейной конгруэнтности в основном берет аксиомы Гильберта, но не пользуется понятием конгруэнтности углов. Для конгруэнтности отрезков как отношения между четырьмя точками, рассматриваемыми как две пары точек, мы используем символ

$$ab \equiv cd$$

(читается: «ab конгруэнтно cd»).

Формально это отношение конгруэнтности характеризуется следующими аксиомами:

$$ab \equiv ba \,\&\, aa \equiv bb,$$

$$ab \equiv pq \,\&\, cd \equiv pq \to ab \equiv cd,$$

$$a \neq b \,\&\, c \neq d \to \exists x\,(\mathrm{Zw}\,(c,\ d,\ x) \,\&\, ab \equiv cx),$$

$$\mathrm{Gr}\,(a,\ b,\ c) \,\&\, \neg\,\mathrm{Zw}\,(a,\ b,\ c) \,\&\, ab \equiv ac \to b = c,$$

$$\mathrm{Zw}\,(b,\ a,\ c) \,\&\, \mathrm{Zw}\,(q,\ p,\ r) \,\&\, ab \equiv pq \,\&\, bc \equiv qr \to ac \equiv pr,$$

$$\neg\,\mathrm{Gr}\,(a,\ b,\ c) \,\&\, \neg\,\mathrm{Gr}\,(p,\ q,\ r) \,\&\, \mathrm{Zw}\,(b,\ a,\ d) \,\&\, \mathrm{Zw}\,(q,\ p,\ s) \,\&$$
$$ab \equiv pq \,\&\, bc \equiv qr \,\&\, ac \equiv pr \,\&\, bd \equiv qs \to cd \equiv rs.$$

Первая из этих аксиом выражает независимость длины отрезка от порядка его концов и конгруэнтность несобственных отрезков (двойных точек) [2]). Вторая аксиома выражает тот факт, что два отрезка, конгруэнтные некоторому третьему, конгруэнтны и между собой (аксиома III.2 в «Основаниях геометрии» Гильберта). Третья аксиома выражает возможность откладывать отрезок (аксиома III.1 у Гильберта). Четвертая аксиома выражает однозначность откладывания отрезка (которая в гильбертовской системе аксиом следует из однозначности откладывания углов). Пятая аксиома выражает аддитивность отрезков (аксиома III.3 у Гильберта) и последняя аксиома представляет собой следующее предложение о конгруэнтности треугольников:

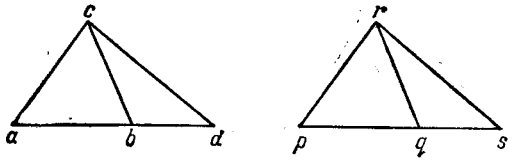
Если у двух треугольников совпадают длины соответствующих сторон и если соответствующие стороны продолжены за соответствующие вершины на равные отрезки, то отрезки, соединяющие образовавшиеся при этом свободные концы с вершинами, лежащими против продолжаемых сторон, равны между собой.

Тот факт, что этой аксиомы о конгруэнтности треугольников достаточно для того, чтобы в сочетании с предшествующими

[1]) См. его работу: Moore R. L. Sets of metrical hypotheses for geometry. — Trans. Amer. Math. Soc., 1908, 9, p. 487—512.

[2]) Аксиома о конгруэнтности всех двойных точек добавляется здесь в целях формальной полноты.

аксиомами линейной конгруэнтности и на основе подходящим образом сформулированного определения конгруэнтности углов, понятий больше и меньше для отрезков и углов, а также понятий прямого, острого и тупого угла получить обычные теоремы элементарной геометрии, не зависящие от аксиомы о параллельных, впервые полностью показал Дорро [1]).



Благодаря наличию в этой системе третьей, экзистенциальной аксиомы, аксиома II.4, которая выражает возможность продолжения любого отрезка, становится ненужной. Поэтому мы ее опустим, чем заодно будет исключен и функциональный знак $\varphi\,(a,\ b)$.

Аксиома о параллельных в гильбертовской редакции гласит (если ограничиться плоской геометрией): «Через точку, лежащую вне прямой a, проходит, самое большее, одна прямая, не пересекающая a». Иначе это можно сформулировать так: «Из двух различных прямых, проходящих через точку P, лежащую вне прямой a, по крайней мере одна имеет с прямой a общую точку». В последней формулировке мы можем опустить условие, требующее, чтобы точка P лежала вне прямой a.

Тогда с помощью отношения Gr эта аксиома запишется следующим образом:

$$\neg\,\mathrm{Gr}\,(a,\ b,\ c) \to \exists x(\mathrm{Gr}\,(d,\ e,\ x) \,\&\, (\mathrm{Gr}\,(a,\ b,\ x) \vee \mathrm{Gr}\,(a,\ c,\ x))).$$

(Пояснение. Прямая, проходящая через d и e, — это заданная прямая [2]); a — это та произвольная точка, через которую проходят две различные прямые, — одна через b, другая через c; утверждается, что по крайней мере одна из этих двух прямых имеет общую точку x с прямой, проходящей через d и e.)

[1]) См.: Dorroh J. L. Concerning a set of metrical hypotheses for geometry. — Ann. Math., 2 Ser., 1928, 29, p. 229—231. Мур показал достаточность сформулированных им аксиом конгруэнтности только при условии добавления к ним одной аксиомы непрерывности, вместо которой, как он показал, достаточно взять предложение о том, что каждый отрезок имеет среднюю точку. В работе Дорро это предложение было доказано на основе аксиом конгруэнтности Мура.

[2]) Это геометрическое истолкование является осмысленным, лишь когда $d \neq e$; однако вследствие аксиомы Gr $(a,\ a,\ b)$ данная импликация выполняется и при $d = e$.

Наконец, мы еще должны добавить в виде собственных аксиом аксиомы равенства. Прежде всего мы возьмем аксиомы

$$a = a$$

и

$$a = b \to (a = c \to b = c).$$

Затем нужно взять аксиомы равенства, связанные с основными предикатами Gr, Zw и $\equiv$. С учетом числа аргументов этих предикатов здесь надо было бы написать десять формул. Однако вследствие аксиомы I.1

$$\mathrm{Gr}(a, b, c) \to \mathrm{Gr}(b, a, c) \,\&\, \mathrm{Gr}(a, c, b)$$

и непосредственно получающейся из II.3 формулы

$$\mathrm{Zw}(a, b, c) \to \mathrm{Zw}(a, c, b)$$

нам нужно взять для Gr и Zw лишь формулы [1])

$$a = b \to (\mathrm{Gr}(a, c, d) \to \mathrm{Gr}(b, c, d)),$$
$$a = b \to (\mathrm{Zw}(a, c, d) \to \mathrm{Zw}(b, c, d)),$$
$$a = b \to (\mathrm{Zw}(c, d, a) \to \mathrm{Zw}(c, d, b)),$$

вторая из которых снова оказывается излишней ввиду аксиомы II.1

$$\mathrm{Zw}(a, b, c) \to \mathrm{Gr}(a, b, c)$$

и выводимости формул

$$\mathrm{Zw}(a, b, c) \to a \neq b \,\&\, a \neq c \,\&\, b \neq c$$

и

$$\mathrm{Gr}(a, b, c) \,\&\, a \neq b \,\&\, a \neq c \,\&\, b \neq c \to$$
$$\mathrm{Zw}(a, b, c) \vee \mathrm{Zw}(b, a, c) \vee \mathrm{Zw}(c, a, b).$$

Ввиду аксиом

$$ab \equiv ba$$

и

$$ab \equiv pq \,\&\, cd \equiv pq \to ab \equiv cd,$$

для предиката $\equiv$ достаточно взять одну следующую формулу равенства:

$$a = b \to ac \equiv bc.$$

Теперь мы должны привести к разрешенному виду две появившиеся экзистенциальные аксиомы. Вместо аксиомы

$$a \neq b \,\&\, c \neq d \to \exists x\,(\mathrm{Zw}(c, d, x) \,\&\, ab \equiv cx),$$

[1]) См. т. I, гл. VII, с. 464.

введя функциональный знак $\varphi(a, b, c, d)$, мы получим формулу

$$a \neq b \,\&\, c \neq d \to \mathrm{Zw}(c, d, \varphi(a, b, c, d)) \,\&\, ab \equiv c\varphi(a, b, c, d).$$

Для того чтобы привести к разрешенному виду формулу, выражающую аксиому о параллельных, нам нужно было бы, согласно общему методу, ввести функциональный знак с пятью аргументами. Но здесь можно будет добиться некоторых упрощений. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что с помощью ε-символа и явного определения может быть произведено символьное решение любой экзистенциальной формулы.

Для символьного решения формулы, выражающей аксиому о параллельных, нам в соответствии с общим методом нужно было бы ввести ε-символ

$$\varepsilon_x(\mathrm{Gr}(d, e, x) \,\&\, (\mathrm{Gr}(a, b, x) \vee \mathrm{Gr}(a, c, x))).$$

Однако с равным успехом вместо него здесь может быть введен ε-символ

$$\varepsilon_x(\mathrm{Gr}(a, b, x) \,\&\, \mathrm{Gr}(c, d, x)).$$

Действительно, если ввести явное определение

$$\xi(a, b, c, d) = \varepsilon_x(\mathrm{Gr}(a, b, x) \,\&\, \mathrm{Gr}(c, d, x)),$$

то из нашей формулы для аксиомы о параллельных, взятой в сочетании с формулой

$$\exists x A(x) \to A(\varepsilon_x A(x)),$$

легко получится формула

$$\neg \mathrm{Gr}(a, b, c) \to (\mathrm{Gr}(d, e, \xi(a, b, d, e)) \,\&\, \mathrm{Gr}(a, b, \xi(a, b, d, e)))$$
$$\vee\, (\mathrm{Gr}(d, e, \xi(a, c, d, e)) \,\&\, \mathrm{Gr}(a, c, \xi(a, c, d, e))),$$

от которой с помощью средств исчисления предикатов можно снова вернуться к нашей формуле, выражающей аксиому о параллельных.

Геометрически $\xi(a, b, c, d)$ изображает некоторую общую точку прямых ab и cd (если таковая существует); в частности, в том случае, когда ab и cd суть две отличные друг от друга пересекающиеся прямые, $\xi(a, b, c, d)$ изображает точку пересечения этих прямых.

Эта геометрическая интерпретация заодно показывает, что с помощью функции $\xi(a, b, c, d)$ можно также осуществить символьное решение пятой аксиомы порядка, что позволит сэкономить функциональный знак $\psi(a, b, c, d, e)$. Эта аксиома утверждает, что если какая-либо прямая пересекает сторону ab треугольника abc в какой-нибудь точке, лежащей между a и b, то тогда она проходит через какую-нибудь точку стороны (т. е. отрезка) ac

или через какую-нибудь точку стороны bc. Это утверждение можно сформулировать еще и следующим образом: «Если точки a, b и c не лежат на одной прямой, точка p лежит между a и b, а прямая pq отлична от прямой ab и не проходит через c, то существует либо точка пересечения прямых pq и ac, лежащая между a и c, либо точка пересечения прямых pq и bc, лежащая между b и c».

С помощью нашей символики это высказывание запишется посредством формулы

$$(\xi_1)\quad \neg \mathrm{Gr}(a, b, c) \& \mathrm{Zw}(p, a, b) \& \neg \mathrm{Gr}(q, a, b) \& \neg \mathrm{Gr}(c, p, q) \rightarrow (\mathrm{Gr}(p, q, \xi(p, q, a, c)) \& \mathrm{Zw}(\xi(p, q, a, c), a, c)) \vee (\mathrm{Gr}(p, q, \xi(p, q, b, c)) \& \mathrm{Zw}(\xi(p, q, b, c), b, c)).$$

Формула (ξ_1) дедуктивно равна первоначальной формуле для аксиомы II.5. Для установления этого факта надо воспользоваться ε-формулой и определением функционального знака $\xi(a, b, c, d)$. Действительно, если мы в первоначальной формуле

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \{\neg \mathrm{Gr}(x, y, z) \& \mathrm{Zw}(u, x, y) \& \neg \mathrm{Gr}(v, x, y) \& \neg \mathrm{Gr}(z, u, v) \rightarrow \exists w (\mathrm{Gr}(u, v, w) \& (\mathrm{Zw}(w, x, z) \vee \mathrm{Zw}(w, y, z)))\}$$

заменим связанные переменные x, y, z, u, v свободными и произведем некоторые преобразования по правилам исчисления предикатов, то она перейдет в формулу

$$\neg \mathrm{Gr}(a, b, c) \& \mathrm{Zw}(p, a, b) \& \neg \mathrm{Gr}(q, a, b) \& \neg \mathrm{Gr}(c, p, q) \rightarrow \exists w (\mathrm{Gr}(p, q, w) \& \mathrm{Zw}(w, a, c)) \vee \exists w (\mathrm{Gr}(p, q, w) \& \mathrm{Zw}(w, b, c)),$$

а эта последняя может быть легко выведена из формулы (ξ_1) средствами исчисления предикатов. С другой стороны, формула (ξ_1) может быть выведена из нее с помощью формулы

$$\exists w (\mathrm{Gr}(p, q, w) \& \mathrm{Zw}(w, d, c)) \& \neg \mathrm{Gr}(c, p, q) \rightarrow \mathrm{Gr}(p, q, \xi(p, q, d, c)) \& \mathrm{Zw}(\xi(p, q, d, c), d, c),$$

которая, в свою очередь, получается на основе определения символа $\xi(a, b, c, d)$ с использованием аксиом I.1, 2, 3, II.1, 2, 3, аксиом равенства и ε-формулы.

Таким образом, при разрешении экзистенциальных аксиом нашей системы аксиом геометрии мы можем обойтись введением индивидных символов α, β и γ и функциональных знаков $\varphi(a, b, c, d)$ и $\xi(a, b, c, d)$. В результате получается следующая система, состоящая из аксиом в разрешенном виде:

Аксиомы равенства

$$a = a,$$
$$a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c),$$
$$a = b \rightarrow (\mathrm{Gr}(a, c, d) \rightarrow \mathrm{Gr}(b, c, d)),$$
$$a = b \rightarrow (\mathrm{Zw}(c, d, a) \rightarrow \mathrm{Zw}(c, d, b)),$$
$$a = b \rightarrow ac \equiv bc.$$

Аксиомы соединения

$$\mathrm{Gr}(a, a, b),$$
$$\mathrm{Gr}(a, b, c) \rightarrow \mathrm{Gr}(b, a, c) \& \mathrm{Gr}(a, c, b),$$
$$\mathrm{Gr}(a, b, c) \& \mathrm{Gr}(a, b, d) \& a \neq b \rightarrow \mathrm{Gr}(a, c, d),$$
$$\neg \mathrm{Gr}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Аксиомы порядка

$$\mathrm{Zw}(a, b, c) \rightarrow \mathrm{Gr}(a, b, c),$$
$$\neg \mathrm{Zw}(a, b, b),$$
$$\mathrm{Zw}(a, b, c) \rightarrow \mathrm{Zw}(a, c, b) \& \neg \mathrm{Zw}(b, a, c),$$
$$\neg \mathrm{Gr}(a, b, c) \& \mathrm{Zw}(p, a, b) \& \neg \mathrm{Gr}(q, a, b) \& \neg \mathrm{Gr}(c, p, q) \rightarrow (\mathrm{Gr}(p, q, \xi(p, q, a, c)) \& \mathrm{Zw}(\xi(p, q, a, c)), a, c)) \vee (\mathrm{Gr}(p, q, \xi(p, q, b, c)) \& \mathrm{Zw}(\xi(p, q, b, c), b, c)).$$

Аксиомы конгруэнтности

$$ab \equiv ba \& aa \equiv bb,$$
$$ab \equiv pq \& cd \equiv pq \rightarrow ab \equiv cd,$$
$$a \neq b \& c \neq d \rightarrow \mathrm{Zw}(c, d, \varphi(a, b, c, d)) \& ab \equiv \varphi(a, b, c, d),$$
$$\mathrm{Gr}(a, b, c) \& \neg \mathrm{Zw}(a, b, c) \& ab \equiv ac \rightarrow b = c,$$
$$\mathrm{Zw}(b, a, c) \& \mathrm{Zw}(q, p, r) \& ab \equiv pq \& bc \equiv qr \rightarrow ac \equiv pr,$$
$$\neg \mathrm{Gr}(a, b, c) \& \neg \mathrm{Gr}(p, q, r) \& \mathrm{Zw}(b, a, d) \& \mathrm{Zw}(q, p, s) \& ab \equiv pq \& bc \equiv qr \& ac \equiv pr \& bd \equiv qs \rightarrow cd \equiv rs.$$

Аксиома о параллельных

$$\neg \mathrm{Gr}(a, b, c) \rightarrow (\mathrm{Gr}(d, e, \xi(a, b, d, e)) \& \mathrm{Gr}(a, b, \xi(a, b, d, e))) \vee (\mathrm{Gr}(d, e, \xi(a, c, d, e)) \& \mathrm{Gr}(a, c, \xi(a, c, d, e))).$$

Замечание. Нам нет надобности формулировать аксиомы равенства для функциональных знаков $\varphi(a, b, c, d)$ и $\xi(a, b, c, d)$, так как символьным решением соответствующих экзистенциальных аксиом мы будем пользоваться лишь как вспомогательным средством для установления непротиворечивости рассматриваемой системы геометрических аксиом в ее первоначальном виде при условии использования рассуждений, формализуемых с помощью средств исчисления предикатов и ε-аксиомы. Но для этого доста-

точно рассматривать введенную нами систему аксиом, так как все аксиомы нашей первоначальной системы [1]) могут быть выведены из нее средствами исчисления предикатов.

Теперь, для того чтобы извлечь из нп-теоремы непротиворечивость сформулированной системы аксиом, нам достаточно задать истинностные значения для постоянных элементарных формул таким образом, чтобы наши аксиомы оказались при этом верифицируемыми. Нужное определение нам дает аналитическая геометрия.

В качестве числовой области для наших целей достаточно будет взять совокупность чисел, получающихся из единицы в результате применения четырех элементарных арифметических действий и операции извлечения квадратного корня из положительного числа. Действия над числами из этой области, которую мы обозначим посредством Q, выполняются финитным образом.

Используя комплексные числа, мы можем разработать некоторый сокращенный способ записи различных отношений аналитической геометрии. Для этого координаты a и b данной точки плоскости мы будем объединять в комплексное число $a+bi$. Таким образом, в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими комплексными числами $a+bi$, у которых a и b суть числа из Q. Область этих комплексных чисел мы обозначим посредством Q^*.

В дальнейшем мы будем применять ряд общеупотребительных обозначений, связанных с комплексными числами. Если c — число $a+bi$, то $\Im(c)$ будет обозначать число b (мнимую часть c), $|c|$ будет обозначать число $\sqrt{a^2+b^2}$ (абсолютную величину c), а $\bar{c}$ будет обозначать сопряженное с c число $a-bi$; число c будет называться действительным, если $b=0$, и положительным, если $b=0$ и a положительно.

Определяя истинностные значения постоянных элементарных формул, мы должны помнить, что каждая постоянная элементарная формула имеет один из следующих четырех видов:

$$a=b,\quad \mathrm{Gr}(a, b, c),\quad \mathrm{Zw}(a, b, c),\quad ab\equiv cd,$$

где a, b, c и d — постоянные термы, и что каждый постоянный

[1]) Впрочем, добавление восьми аксиом равенства, соответствующих восьми аргументам функциональных знаков $\varphi(a, b, c, d)$ и $\xi(a, b, c, d)$, в том духе, как формула

$$a=b\to\varphi(a, p, q, r)=\varphi(b, p, q, r)$$

соответствует первому аргументу $\varphi(a, b, c, d)$, не составило бы никакого труда. В самом деле, легко видеть, что арифметическое истолкование, с помощью которого мы проводим наше доказательство, дает для термов $\varphi(a, b, c, d)$ и $\xi(a, b, c, d)$ с постоянными аргументами некоторое однозначное определение их истинностных значений. См. далее с. 69.

терм либо совпадает с одним из индивидных символов α, β и γ, либо строится из них с помощью функциональных знаков φ и ξ.

В соответствии со сказанным, мы получим распределение истинностных значений для постоянных элементарных формул, указав способ сопоставления каждому постоянному терму некоторого числа из области Q^*, а также указав для каждой из элементарных формул

$$a=b,\quad \mathrm{Gr}(a, b, c),\quad \mathrm{Zw}(a, b, c),\quad ab\equiv cd$$

некоторое арифметическое высказывание, истинность или ложность которого для чисел из Q^*, сопоставляемых данным термам a, b, c и d, будет определять, какое истинностное значение — «истина» или «ложь» — получает рассматриваемая элементарная формула.

Символам α, β и γ мы сопоставим комплексные числа 0, 1 и i, а функции φ и ξ для любых значений аргументов $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ из Q^* определим следующим образом:

$$\varphi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})=\begin{cases}\mathfrak{m}+\dfrac{|\mathfrak{f}-\mathfrak{l}|}{|\mathfrak{m}-\mathfrak{n}|}\cdot(\mathfrak{m}-\mathfrak{n}), & \text{если } \mathfrak{m}\neq\mathfrak{n},\\ \mathfrak{m}, & \text{если } \mathfrak{m}=\mathfrak{n};\end{cases}$$

$$\xi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})=\begin{cases}\dfrac{\Im(\mathfrak{f}\cdot\bar{\mathfrak{l}})\cdot(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\Im(\mathfrak{m}\cdot\bar{\mathfrak{n}})\cdot(\mathfrak{f}-\mathfrak{l})}{\Im((\mathfrak{f}-\mathfrak{l})\cdot\overline{(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})})}, & \\ \quad\text{если } (\mathfrak{f}-\mathfrak{l})\cdot\overline{(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})} \text{ не является} & \\ \quad\text{действительным числом,} & \\ \mathfrak{m}, & \text{если } \mathfrak{f}=\mathfrak{l},\ \mathfrak{m}\neq\mathfrak{n},\\ \mathfrak{f} & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пояснения. При $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}$ терм $\varphi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ изображает собой точку, которая лежит на продолжении отрезка, ведущего от $\mathfrak{n}$ к $\mathfrak{m}$, на расстоянии $|\mathfrak{f}-\mathfrak{l}|$ от точки $\mathfrak{m}$.

Если число $(\mathfrak{f}-\mathfrak{l})\cdot\overline{(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}$ не является действительным, то $\mathfrak{f}\neq\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}$ и направление отрезка, ведущего от $\mathfrak{f}$ к $\mathfrak{l}$, не совпадает ни с направлением отрезка, ведущего от $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{n}$, ни с направлением противоположного ему отрезка. В этом случае $\xi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ изображает точку пересечения прямой, проходящей через $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$, и прямой, проходящей через $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$.

Далее, каждому постоянному терму мы однозначно сопоставим некоторое число из Q^*, для чего сначала каждый встречающийся в данном терме индивидный символ мы заменим соответствующим ему комплексным числом, а затем функциональные знаки, аргументами которых уже оказались комплексные числа, будем заменять приписанными им для этих значений аргументов значениями

из Q^* до тех пор, пока не будут удалены все функциональные знаки и не останется результирующее значение из Q^*.

Теперь мы сопоставим элементарным формулам

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b},\quad \mathrm{Gr}(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad \mathrm{Zw}(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{d}$$

соответствующие им арифметические высказывания. Пусть $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ суть комплексные числа, соотнесенные термам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ соответственно в силу предыдущих соглашений. Тогда:

Формула $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ будет считаться истинной или ложной в зависимости от того, имеет или не имеет место арифметическое равенство $\mathfrak{f}=\mathfrak{l}$ между числами $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ из Q^*.

Формула $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ будет считаться истинной или ложной в зависимости от того, является или не является действительным комплексное число $(\mathfrak{f}-\mathfrak{l})\cdot(\overline{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}})$.

Формула $\mathrm{Zw}(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ будет считаться истинной или ложной в зависимости от того, является или не является положительным число $(\mathfrak{f}-\mathfrak{l})\cdot(\overline{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}})$.

Формула $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ будет считаться истинной или ложной в зависимости от того, верно или не верно равенство $|\mathfrak{f}-\mathfrak{l}|=|\mathfrak{m}-\mathfrak{n}|$.

Теперь с помощью элементарных арифметических рассуждений можно убедиться, что в соответствии с принятыми определениями каждая из наших аксиом оказывается верифицируемой, т. е. дает истинную (в смысле нашего определения) формулу, если каждую входящую в нее свободную переменную всюду, где она встречается, заменить каким-либо постоянным термом. Тем самым, опираясь на нашу нп-теорему, мы получаем искомое доказательство непротиворечивости для сформулированных выше геометрических аксиом соединения, порядка, конгруэнтности и аксиомы о параллельных.

Примененный здесь метод доказательства равным образом может быть применен и для установления *непротиворечивости неевклидовой геометрии* (опять-таки без аксиом непрерывности).

Если мы снова ограничимся случаем плоской геометрии, то в качестве системы аксиом для неевклидовой геометрии можно будет взять систему, получающуюся из рассмотренной нами системы аксиом евклидовой геометрии в результате замены аксиомы о параллельных следующей аксиомой [1]):

«Для всякой точки a, лежащей вне прямой, определенной двумя отличными друг от друга точками b и c, существуют точки p и q, не лежащие с a на одной прямой и расположенные так, что ни прямая ap, ни прямая aq не имеют общей точки с прямой bc, в то время как для любой точки d, расположенной между p и q, прямая ad пересекает прямую bc».

[1]) См. «Основания геометрии» Гильберта, Добавление III, акиома IV, с. 162 7-го издания (с. 232 русск. перев.).

Эта аксиома изображается формулой

$$\begin{aligned}\neg\mathrm{Gr}(a,b,c)\to\exists x\exists y\{&\neg\mathrm{Gr}(a,x,y)\,\&\,\neg\exists z(\mathrm{Gr}(a,x,z)\,\&\\&\mathrm{Gr}(b,c,z))\,\&\,\neg\exists z(\mathrm{Gr}(a,y,z)\,\&\,\mathrm{Gr}(b,c,z))\,\&\\&\forall u(\mathrm{Zw}(u,x,y)\to\exists v(\mathrm{Gr}(a,u,v)\,\&\,\mathrm{Gr}(b,c,v)))\}.\end{aligned}$$

Ее символьное решение может быть дано с помощью ранее использованного функционального знака $\xi(a,b,c,d)$ и нового функционального знака $\chi(a,b,c)$. Сопоставив кванторам существования $\exists x$ и $\exists y$ функции $\chi(a,b,c)$ и $\chi(a,c,b)$ и несколько усилив рассматриваемую аксиому, мы получим следующий ее разрешенный вид:

$$\begin{aligned}\neg\mathrm{Gr}(a,b,c)\to&\neg\mathrm{Gr}(a,\chi(a,b,c),\chi(a,c,b))\,\&\\&(\neg\mathrm{Gr}(a,\chi(a,b,c),d)\vee\neg\mathrm{Gr}(b,c,d))\,\&\\&(\mathrm{Zw}(e,\chi(a,b,c),\chi(a,c,b))\to\mathrm{Gr}(a,e,\xi(a,e,b,c))\,\&\\&\mathrm{Gr}(b,c,\xi(a,e,b,c))).\end{aligned}$$

[Обратим внимание на то, что конъюнктивный член, который сначала появляется вместо $\neg\exists z(\mathrm{Gr}(a,y,z)\,\&\,\mathrm{Gr}(b,c,z))$, затем оказывается ненужным [1]).]

Если мы возьмем данную аксиому вместо прежде рассматривавшейся аксиомы о параллельных, то получим систему аксиом плоской неевклидовой геометрии (без аксиом непрерывности).

Теперь мы получим финитное доказательство непротиворечивости этой системы, воспользовавшись восходящей к Феликсу Клейну проективной моделью. Для этого в нашем предыдущем распределении значений термов достаточно произвести следующие модификации и дополнения:

1. а) Вместо области Q^* комплексных чисел $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$, у которых $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ принадлежат Q, мы возьмем те числа из Q^*, абсолютная величина которых меньше единицы. (Обозначим эту область через Q_1^*.)

б) Символам α, β и γ сопоставим числа 0, $\frac{1}{2}$ и i соответственно.

в) Определение арифметических функций ограничим аргументами из области Q_1^*.

[1]) Впрочем, как заметил Арнольд Шмидт, конъюнктивный член $\neg\mathrm{Gr}(a,\chi(a,b,c),\chi(a,c,b))$ в последней формуле можно заменить более простым членом $\chi(a,b,c)\neq\chi(a,c,b)$. Действительно, модифицированная таким образом формула дедуктивно равна указанной в силу аксиом соединения, порядка и аксиом равенства, а также экзистенциальной (третьей) аксиомы конгруэнтности, из которой, в частности, выводится формула

$$a\neq b\to\exists x\,\mathrm{Zw}(x,a,b).$$

г) В определение функции $\xi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ внесем следующее изменение: для тех четверок чисел $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ из Q_1^*, для которых согласно предыдущему определению значение $\xi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ имело абсолютную величину $\geqq 1$, значением $\xi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ мы теперь будем считать число $\mathfrak{f}$.

2. Мы добавим определение функции $\chi(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m})$, которую с использованием вспомогательной функции

$$\tau(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}) = \begin{cases} \dfrac{i \cdot \Im(\bar{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{l}) \cdot (\mathfrak{f} - \mathfrak{l})}{|\mathfrak{f} - \mathfrak{l}|^2} + \dfrac{\mathfrak{f} - \mathfrak{l}}{|\mathfrak{f} - \mathfrak{l}|} \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{\Im(\bar{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{l})}{|\mathfrak{f} - \mathfrak{l}|}\right)^2}, & \text{если } \mathfrak{f} \neq \mathfrak{l}, \\ \mathfrak{f}, & \text{если } \mathfrak{f} = \mathfrak{l}, \end{cases}$$

определим равенством

$$\chi(\mathfrak{f}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{f} + \tau(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})).$$

Пояснение: При $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{l}$ $\tau(\mathfrak{f}, \mathfrak{l})$ изображает точку пересечения луча, идущего в направлении от $\mathfrak{l}$ к $\mathfrak{f}$, с окружностью единичного радиуса с центром в нулевой точке, а $\chi(\mathfrak{f}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ — середину отрезка, идущего из $\mathfrak{f}$ в $\tau(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. Заметим, что хотя значение $\tau(\mathfrak{f}, \mathfrak{l})$ и не принадлежит Q_1^*, значение $\chi(\mathfrak{f}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ принадлежит этой области.

3. Сопоставление постоянным элементарным формулам соответствующих им арифметических высказываний изменится только в части, касающейся формулы $\mathfrak{ab} \equiv \mathfrak{cb}$. Именно, если термам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ соотнесены числа $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ из Q_1^*, то формула $\mathfrak{ab} \equiv \mathfrak{cd}$ будет считаться истинной или ложной в зависимости от того, истинно или ложно равенство

$$\frac{(\mathfrak{f} - \tau(\mathfrak{l}, \mathfrak{f})) \cdot (\mathfrak{l} - \tau(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}))}{(\mathfrak{f} - \tau(\mathfrak{f}, \mathfrak{l})) \cdot (\mathfrak{l} - \tau(\mathfrak{l}, \mathfrak{f}))} = \frac{(\mathfrak{m} - \tau(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})) \cdot (\mathfrak{n} - \tau(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}))}{(\mathfrak{m} - \tau(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})) \cdot (\mathfrak{n} - \tau(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}))}.$$

Что же касается установления верифицируемости этих аксиом на основе данного определения, то у всех аксиом, за исключением последней из группы аксиом конгруэнтности, оно получается прямой проверкой, а для рассмотрения оставшейся аксиомы конгруэнтности целесообразно воспользоваться некоторыми соображениями из области проективной аналитической геометрии. Эти соображения будут иметь финитный характер, так как нам придется иметь дело лишь с точками, координаты которых суть числа из Q.

Намеченные здесь доказательства непротиворечивости систем геометрических аксиом показывают, что мы вполне можем пользоваться идеями обычных доказательств непротиворечивости, производимых путем *сведения к арифметике*. Добавляется лишь одно финитное усиление, состоящее в том, что при рассмотрении данной арифметической модели мы ограничиваемся финитно-арифметическими рассуждениями (в наших примерах — рассуждениями,

касающимися числовой области Q). При этом поначалу в доказательстве непротиворечивости возникает некоторый пробел, связанный с тем, что наша финитно-арифметическая модель дает приемлемую интерпретацию только для аксиом теории, но не для рассуждений, участвующих в доказательствах. Устранение этого пробела в дальнейшем как раз и достигается с помощью нашей нп-теоремы.

Этот прием был бы излишним, если бы мы располагали каким-либо финитным доказательством непротиворечивости для всей системы анализа в целом. В рассмотренных нами случаях систем геометрических аксиом хватило бы даже финитного доказательства непротиворечивости для теории числовой области Q с включением в эту теорию принципа tertium non datur. Однако проводившиеся нами до сих пор рассмотрения не содержат в себе такого доказательства даже для формализма аксиоматической арифметики [1]). В самом деле, вопрос о непротиворечивости этого формализма нашей нп-теоремой пока еще не решается. Имеющие здесь место связи мы в дальнейшем рассмотрим самым пристальным образом.

---

[1]) См. т. I, гл. VII, с. 454 или же Приложение I.

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЕ АРИФМЕТИКИ ПРИ ПОМОЩИ СВЯЗАННЫХ С ε-СИМВОЛОМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

§ 1. Применение нп-теоремы к арифметике

В главах VII и VIII т. I мы рассмотрели два различных формализма арифметики: рекурсивную арифметику и формализм системы (Z) с добавлением к нему функции $\mu_x A(x)$.

Логический формализм, лежащий в основе рекурсивной арифметики, представляет собой элементарное исчисление со свободными переменными. К нему в качестве исходных формул добавляются аксиомы равенства и формула $0' \neq 0$, а в качестве схем — схема индукции и схема примитивной рекурсии. Средств этого формализма уже достаточно для того, чтобы с их помощью можно было изобразить различные понятия, утверждения и доказательства элементарной арифметики. С другой стороны, этот формализм еще допускает определенное финитное истолкование. Но и без прямого обращения к этому истолкованию мы легко смогли доказать непротиворечивость этого формализма и даже установить, что всякая выводимая в нем формула, не содержащая формульных переменных, при любой замене входящих в нее свободных индивидных переменных цифрами после вычисления значений соответствующих функций переходит в истинную формулу.

Никаких трудностей в доказательстве не возникает и в том случае, если мы дополним данный формализм некоторыми естественными обобщениями схем индукции и рекурсии в том виде, как они были рассмотрены нами в гл. VII т. I [1]).

Другой формализм арифметики, рассмотренный нами в гл. VIII т. I, был получен в результате объединения исчисления предикатов с аксиомами равенства (J_1) и (J_2), аксиомами Пеано [2]) и принимаемыми в качестве аксиом рекурсивными равенствами для сложения и умножения [3]). Получившуюся таким образом систему аксиом мы в свое время назвали системой (Z). К этому логическому формализму мы затем присоединили ι-правило. С помощью ι-символа можно, как мы это установили [4]), явно определить

[1]) См. т. I, с. 400—427.
[2]) См. т. I, с. 272—273 и 325.
[3]) Тем самым аксиома (J_1) становится ненужной.
[4]) См. т. I, с. 481 и далее.

функцию $\mu_x A(x)$, характеризующуюся формулами

$$(\mu_1) \qquad \exists x A(x) \to A(\mu_x A(x)),$$

$$(\mu_2) \qquad A(a) \to \mu_x A(x) \leqslant a,$$

$$(\mu_3) \qquad \forall x \neg A(x) \to \mu_x A(x) = 0.$$

Мы показали, что с помощью этой функции могут быть изображены все те арифметические конструкции, которые опираются на понятие наименьшего числа, обладающего заданным свойством. Оказалось также, что если взять за основу функции сложения и умножения и воспользоваться функцией $\mu_x A(x)$, то схему примитивной рекурсии можно свести к явным определениям, причем таким образом, что на базе этих определений первоначальные рекурсивные равенства становятся выводимыми формулами [1]). То же самое верно и в отношении перекрестной рекурсии [2]).

Что касается вопроса о непротиворечивости этого формализма, то из теоремы об устранимости ι-правила [3]) вытекает, что для его решения достаточно рассмотреть данный формализм без ι-правила, т. е. просто формализм системы (Z).

В гл. VII т. I [4]) мы осуществили другую редукцию, воспользовавшись теоремами о возможности замены общей аксиомы равенства (J_2) соответствующими специальными аксиомами равенства и о заменимости аксиомы индукции соответствующей схемой. На этом пути мы пришли к системе аксиом

$$\begin{cases} a = a, \\ a = b \to (a = c \to b = c), \\ a' \neq 0, \\ a = b \sim a' = b', \\ a + 0 = a, \quad a + b' = (a + b)', \\ a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot b' = a \cdot b + a, \end{cases}$$

которая дополняется схемой индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)}$$

[1]) См. т. I, с. 499 и далее.
[2]) См. т. I, с. 509—510. Идею упоминаемого здесь доказательства, принадлежащего фон Нейману, Р. Петер недавно неформальным образом применила к общему случаю многократных рекурсий, т. е. рекурсий, ведущихся по нескольким аргументам одновременно (см. ее работу: Péter R. Über die mehrfache Rekursion. — Math. Ann., 1936, 113, № 4, § 5). Это рассуждение Петер может быть полностью воспроизведено на языке теории доказательств.
[3]) См. т. I, с. 510 и далее.
[4]) См. т. I, гл. VII, с. 461—468.

(условие применимости этой схемы заключается в том, что переменная a должна встречаться в формуле $\mathfrak{A}(a)$ лишь на местах, указанных в качестве аргумента). Если в основу нашего рассмотрения положить исчисление предикатов, то эта система аксиом, которую мы назовем системой (Z'), в отношении выводимости формул без формульных переменных (а значит, и в отношении арифметических выводов), а также в отношении непротиворечивости оказывается равносильной системе (Z).

Если мы теперь зададимся вопросом о том, может ли система (Z') служить объектом применения нашей нп-теоремы, то обнаружим, что из-за наличия в (Z') схемы индукции применение этой теоремы (во всяком случае, прямое) оказывается невозможным. (Аксиома индукции, естественно, приводит к тем же самым трудностям, так как она не является собственной аксиомой.)

Если же схему индукции опустить, то, как легко убедиться, нп-теорема становится применимой. Действительно, постоянные элементарные формулы системы (Z') представляют собой равенства между постоянными термами. Но эти термы либо сами являются цифрами, либо строятся из цифр с помощью знаков сложения и умножения. Как известно, для таких термов имеется процедура рекурсивного вычисления их значений (она основывается на использовании рекурсивных равенств для сложения и умножения в качестве финитно понимаемых инструкций для выполнения соответствующих действий) и эта процедура всегда дает в качестве значения такого терма некоторую цифру. Таким образом, любое равенство между постоянными термами после вычисления значений этих термов переходит в некоторое равенство между цифрами и такое равенство $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ мы объявляем, как это делалось и раньше, истинным или ложным в зависимости от того, совпадает или не совпадает цифра $\mathfrak{s}$ с цифрой $\mathfrak{t}$.

При таком распределении истинностных значений постоянных элементарных формул все аксиомы системы (Z'), как легко убедиться [1]), оказываются верифицируемыми формулами. Поэтому для системы (Z') при условии исключения из нее схемы индукции будут справедливы все утверждения нашей нп-теоремы и, в частности, утверждение о том, что всякая выводимая формула, не содержащая ни связанных индивидных, ни формульных переменных, является верифицируемой. Все эти утверждения остаются в силе и в том случае, если к аксиомам системы (Z') добавить в качестве исходных формул какие-либо новые верифицируемые формулы этой формальной системы, т. е. такие формулы этого формализма, не содержащие никаких других переменных, кроме свободных индивидных, которые при только что рассмотренном определении

[1]) В связи с рекурсивными равенствами см. рассуждение в гл. VII т. I, с. 359.

истинностных значений постоянных элементарных формул при любой замене свободных переменных цифрами переходят в истинные формулы. Действительно, при добавлении такого рода формул в качестве исходных условия применимости нп-теоремы продолжают оставаться выполненными.

Это обстоятельство позволяет включить в наш результат схему индукции — по крайней мере частично, а именно *при условии, что эта схема будет применяться лишь к формулам без связанных переменных*. В самом деле, чтобы убедиться в этом, нам достаточно повторить рассуждение, проведенное в гл. VII т. I при установлении непротиворечивости рекурсивной арифметики [1]). Из этого рассуждения получается, что у любого проведенного средствами системы (Z') доказательства такого, что схема индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)}$$

применяется в нем только к формулам $\mathfrak{A}(c)$ без связанных переменных, заключительная формула всякого вхождения схемы индукции оказывается верифицируемой [2]). Следовательно, применение схемы индукции во всяком таком доказательстве равносильно добавлению к аксиомам системы (Z') некоторого числа верифицируемых формул. Отсюда, согласно сделанному выше замечанию, получается, что если в рассматриваемый формализм включить аксиому индукции, применяемую к формулам без связанных переменных, то условия применимости нп-теоремы к этому формализму будут выполнены.

В точности так же условия применимости нп-теоремы будут выполняться и в том случае, если мы добавим к формализму системы (Z') схему примитивной рекурсии. В самом деле, любой паре рекурсивных равенств, имеющей вид примитивной рекурсии, соответствует — в смысле содержательно-финитного истолкования примитивной рекурсии [3]) — некоторая вычислительная процедура, посредством которой каждому терму, представляющему собой функциональный знак с аргументами в виде цифр, сопоставляется в качестве его значения вполне определенная цифра. Для постоянных термов, получающихся в результате введения каких-либо новых функциональных знаков, это дает определенное распределение значений этих термов. Эти значения являются цифрами и, в соответствии с данным распределением, упомянутые рекурсивные равенства оказываются верифицируемыми формулами, потому что при любой замене свободных переменных цифрами с после-

[1]) См. т. I, с. 364—365.
[2]) См. т. I, с. 364.
[3]) См. т. I, с. 51—53.

дующим вычислением значений термов равенства эти переходят в равенства вида

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}.$$

То же самое справедливо и в отношении схемы перекрестной рекурсии. И, вообще, не нарушая условий применимости нашей нп-теоремы, мы можем допустить введение (при помощи соответствующих систем равенств) любого числа новых функциональных знаков или — еще более общо — введение новых аксиом, если при этом: 1) рассматриваемые аксиомы являются собственными аксиомами без связанных переменных и 2) указывается какой-либо способ, который каждому из добавляемых постоянных термов сопоставляет в качестве его значения вполне определенную цифру и на основе которого эти новые аксиомы оказываются верифицируемыми формулами [1]).

При таком введении функциональных знаков в соответствии с упомянутыми условиями всегда можно брать в качестве аксиом связанные с этими знаками (или соответственно с их аргументами) формулы равенства [2])

$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b).$$

Действительно, в силу указанного распределения значений постоянных термов любая такая формула является верифицируемой, потому что если вместо входящих в эту формулу переменных подставить какие-либо цифры, а затем заменить получившиеся постоянные термы их значениями, то в том случае, когда переменные a и b заменяются равными цифрами, у нас получится формула вида

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x} \to \mathfrak{s} = \mathfrak{s},$$

где $\mathfrak{s}$ — цифра, являющаяся значением терма $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$; а в том случае, когда a и b будут заменены отличными друг от друга цифрами $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, у нас получится формула вида

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \to \mathfrak{s} = \mathfrak{t}.$$

Но обе эти формулы истинны: первая потому, что истинно ее заключение $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$, а вторая потому, что ложна ее посылка $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$.

Рассмотренные в гл. VII т. I *обобщения* схемы индукции, дающие частичную компенсацию за ограничения, наложенные на эту схему, тоже согласуются с нашей нп-теоремой, потому что они, как мы уже установили [1]), сводятся при помощи примитивных рекурсий к обычной схеме индукции нашей рекурсивной арифметики.

Теперь подведем итог проведенным нами рассмотрениям. Во-первых, мы установили, что нп-теорема непосредственно применима к формализму, получающемуся в результате объединения исчисления предикатов с аксиомами системы (Z′) (без схемы индукции). Далее, мы выяснили, что к этому формализму, не нарушая применимости нп-теоремы, можно добавить: 1) схему индукции для формул без связанных переменных, 2) схемы рекурсий рекурсивной арифметики и 3) аксиомы равенства для любой вновь вводимой функции. Тем самым в рассмотрение включается вся рекурсивная арифметика — с тем лишь ограничением, что вместо общей аксиомы равенства

$$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

у нас будут фигурировать некоторые ее частные случаи.

Другое обобщение этого результата подсказывается самой формулировкой нп-теоремы, которая недвусмысленным образом допускает включение в рассматриваемый формализм ε-символа и ε-формулы. Как мы уже знаем, при введении ε-формулы ι-правило (т. е. правило с «ε» вместо «ι») становится производным. Поэтому получается, что ι-правило тоже может быть включено в наш результат, причем без ссылки на теорему об устранимости ι-правила из гл. VIII т. I.

Формализм, к которому мы таким образом приходим, содержит следующие компоненты:

1. Формализм исчисления предикатов.
2. Формализм ε-символа и ε-формулы.
3. Предикатный символ $=$, индивидный символ 0 и штрих-символ (функциональный знак) вместе с относящимися к ним аксиомами

$$a = a,$$
$$a = b \to (a = c \to b = c),$$
$$a = b \to a' = b',$$
$$0' \neq 0.$$

[1]) Один общий способ введения новых функциональных знаков при помощи аксиом был использован Эрбраном в его работе: Herbrand J. Sur la non-contradiction de l'Arithmétique. — J. reine angew. Math., 1931, 166 («Groupe C»). Этот способ является несколько более частным, чем способ, примененный здесь, поскольку Эрбран требует, чтобы процедура нахождения значений, как и в схемах рекурсивных определений, получалась финитным истолкованием аксиом. — Относительно понятия общерекурсивной функции в том виде как его, следуя Эрбрану, излагают Гёдель и Клини, а также относительно других примыкающих к нему понятий см. гл. V, с. 421 и Приложение II, с. 477 и 489.

[2]) Запись такой формулы, как это уже делалось нами в гл. VII т. I (см. с. 458), всегда понимается таким образом, что у рассматриваемого функционального знака $\mathfrak{f}$, кроме указанных аргументов, допускается наличие каких-нибудь других, которые в этом случае в обеих частях равенства на одинаковых местах должны быть соответственно одинаковыми, отличными от a, от b и друг от друга свободными индивидными переменными.

[1]) См. т. I, с. 419—427.

4. Схему индукции рекурсивной арифметики (при этом применять ее допускается лишь к формулам без связанных переменных).
5. Схемы для введения функциональных знаков при помощи таких рекурсивных равенств (или соответственно таких собственных аксиом без связанных переменных), которые при финитном распределении значений добавляющихся при этом постоянных термов оказываются верифицируемыми формулами.
6. Аксиомы равенства

$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b),$$

соответствующие различным аргументам всех вновь вводимых функциональных знаков (если они не являются выводимыми уже сами по себе).

Замечание. Рекурсивные равенства для сложения и умножения, фигурирующие среди аксиом системы (Z′), можно специально и не вводить, так как они включаются в п. 5, а аксиомы

$$a' \neq 0$$

и

$$a' = b' \to a = b$$

с помощью схемы примитивной рекурсии могут быть выведены из формулы $0' \neq 0$, как было показано ранее [1]).

Для описанного таким образом формализма мы имеем способ нахождения истинностных значений его постоянных формул. Этот способ состоит в последовательном вычислении истинностных значений формул по значениям их составных частей и он слагается из:

а) истолкования связок исчисления высказываний как истинностных функций;

б) распределения истинностных значений для равенств между цифрами; при этом равенство такого рода считается истинным, если обе его части одинаковы, и ложным, если они различны;

в) процедуры вычисления значений функциональных знаков с аргументами в виде цифр, связанной с введением этих знаков по схемам, упомянутым в п. 5.

С учетом этого распределения истинностных значений, для описанного нами формализма оказываются верными (ввиду справедливости нп-теоремы) следующие утверждения:

1. Всякая выводимая постоянная формула этого формализма является истинной. Отсюда, в частности, следует, что формула $0' = 0$ невыводима и что не могут оказаться одновременно выводимыми какие-либо две формулы $\mathfrak{A}$ и $\neg\mathfrak{A}$.

[1]) См. т. I, гл. VII, с. 368—369.

2. Всякая выводимая формула, не содержащая ни формульных переменных, ни связанных индивидных переменных, является верифицируемой.

3. Если выводима какая-либо формула вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n),$$

не содержащая никаких переменных, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$, то по ее выводу могут быть найдены такие цифры $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$, что будет истинной формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n).$$

4. Если выводима какая-либо формула вида

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_m \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n),$$

не содержащая никаких переменных, кроме указанных явно, то для любой системы цифр $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$ можно указать такие цифры $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n$, что будет истинной формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n).$$

Если мы примем во внимание, что во всех утверждениях 1—4 речь идет о выводимости формул без формульных переменных, то у нас получится еще один результат, касающийся сферы действия этих утверждений. В самом деле, замену общей аксиомы равенства (J_2) соответствующими специальными аксиомами при переходе от системы (Z) к системе (Z′) мы с самого начала произвели с учетом того, что при исследовании вопроса о непротиворечивости эта замена не накладывает на результат никаких ограничений, так как по отношению к выводимости формул без формульных переменных общие аксиомы равенства равносильны этим специальным.

В связи с вопросом о том, будет ли эта равносильность оставаться в силе в случае расширенного формализма, мы, прежде всего, заметим, что специальные аксиомы равенства для функциональных знаков, добавившихся из-за включения соответствующих схем по п. 5, включены в наш формализм по п. 6.

Что же касается логической части формализма, то мы должны принять во внимание, что доказанная в гл. VII т. I теорема о равнозначности общей аксиомы равенства соответствующим специальным аксиомам [1]) справедлива для теорий, формализованных с помощью исчисления предикатов, в то время как в нашем формализме содержится еще и ε-символ с относящейся к нему ε-формулой. Для таких формализмов соответствующая теорема о равносильности не только не доказана, но и вообще, как это можно

[1]) См. т. I, с. 458.

показать [1]), не имеет места. Но в гл. VIII т. I было показано, что при добавлении ι-правила общая аксиома равенства продолжает оставаться равносильной специальным аксиомам [2]); а с другой стороны, как уже упоминалось, при использовании ε-формулы ι-правило является производным и, значит, содержится в рассматриваемом формализме.

Таким образом, утверждения 1—4 сохранятся, если мы изменим ограничения на наш формализм, условившись, что он содержит:

1) исчисление предикатов;
2) ι-правило;
3) символы $=$, 0 и штрих-символ, а также аксиомы

$$a = a,$$
$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$$
$$0' \neq 0;$$

4) схему индукции рекурсивной арифметики (как прежде);
5) схемы для введения функциональных знаков (как прежде).

Следует еще раз подчеркнуть, что в данной ситуации добавление ι-правила не опирается на приведенное в гл. VIII т. I доказательство устранимости ι-правила. Мы используем здесь лишь возможность замены общей аксиомы равенства (J_2) (или соответственно общей схемы для равенства), а также сводимость ι-правила к ε-формуле.

Известным недостатком нашего подхода может показаться то обстоятельство, что общая аксиома равенства (J_2) вновь вовлекается нами в рассмотрение окольным путем, в то время как первая ε-теорема пока что доказана без учета этой аксиомы. В этом заключается также и причина того, что в последней версии нашего результата ε-формализм пришлось сократить до ι-формализма.

Но на самом деле имеется возможность доказать первую ε-теорему — а также и ее обобщение — с включением аксиомы (J_2), в чем мы вскоре убедимся.

§ 2. Распространение первой ε-теоремы на общую аксиому равенства

а) Подготовительные соображения; основной тип; формулы ε-равенства. Напомним формулировку первой ε-теоремы [3]). В ней речь идет о произвольном формализме F, получающемся из формализма исчисления предикатов в результате добавления к нему в качестве символов каких-либо индивидных, функциональных и предикатных символов, а также ε-символа, а в качестве исходных формул — ε-формулы и каких-либо собственных аксиом $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_f$, не содержащих связанных переменных. Утверждение этой ε-теоремы гласит, что из любого осуществляемого средствами формализма F вывода формулы $\mathfrak{E}$, не содержащей связанных переменных, использование связанных переменных может быть полностью исключено.

Впоследствии [1]) мы обобщили эту теорему до утверждения о том, что по любому осуществляемому средствами формализма F выводу какой-либо формулы $\mathfrak{E}$ вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r),$$

не содержащей никаких связанных переменных, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$, можно получить осуществляемый без использования связанных переменных вывод некоторой формулы $\mathfrak{E}_1$ вида

$$\mathfrak{A}(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(t_1^{(s)}, \ldots, t_r^{(s)}),$$

где $t_1^{(i)}, \ldots, t_r^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ суть какие-либо термы, построенные из свободных переменных, индивидных символов и функциональных знаков.

Теперь мы должны доказать эти теоремы и для того случая, когда рассматриваемый формализм F содержит общие аксиомы равенства

(J_1) $$a = a$$

и

(J_2) $$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$$

вторая из которых не является собственной.

Для доказательства мы снова воспользуемся рассуждением, с помощью которого в гл. VII т. I в применении к рассмотренному там формализму мы показали [2]), что в выводе любой формулы, не содержащей формульных переменных, аксиома (J_2) может быть заменена рядом собственных аксиом.

Из этого рассуждения получается, что для любой бескванторной формулы $\mathfrak{A}(a)$, элементарные подформулы которой строятся из индивидных переменных, а также индивидных, функциональных и предикатных символов, вывод формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

из аксиомы (J_1) и фигурирующих вместо аксиомы (J_2) собствен-

[1]) В дальнейшем доказательство этого факта мы еще приведем. См. примечание на с. 87—88.
[2]) См. т. I, Добавление, с. 547.
[3]) См. с. 36.

[1]) См. с. 54.
[2]) См. т. I, с. 456—459.

ных аксиом можно получить без использования кванторов, а значит, в рамках элементарного исчисления со свободными переменными.

Однако сказанное нельзя немедленно применить к рассматриваемому здесь формализму F, поскольку в этом формализме присутствует ε-символ. Чтобы уяснить себе, какую модификацию нашего утверждения придется произвести из-за появления ε-термов, мы проведем сейчас некоторое вспомогательное рассмотрение, касающееся структуры ε-термов. В этом рассмотрении речь будет идти только о термах, *не содержащих формульных переменных*, причем иногда это обстоятельство мы не будем оговаривать явно.

Как правило, ε-терм содержит в качестве составных частей другие термы. Составную часть ε-терма $\mathfrak{e}$, которая является термом, но не находится внутри какого-нибудь другого терма, являющегося составной частью $\mathfrak{e}$, мы будем называть прямым подтермом ε-терма $\mathfrak{e}$ *).

Пусть $\mathfrak{e}$ — какой-либо ε-терм, у которого число всех прямых подтермов (рассматриваемых с учетом не только их вида, но и расположения в $\mathfrak{e}$) равно $\mathfrak{f}$. Тогда основным типом[1]) ε-терма $\mathfrak{e}$ с аргументными переменными $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ мы будем называть терм, который получается из $\mathfrak{e}$, если вместо прямых подтермов этого терма подставить в порядке их очередности слева направо свободные переменные $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\mathfrak{f}$. Основным типом ε-терма $\mathfrak{e}$, не содержащего в качестве составных частей никаких других термов, будет считаться сам этот терм $\mathfrak{e}$.

Из сказанного ясно, что основной тип данного ε-терма определяется однозначно с точностью до обозначений аргументных переменных, причем степень основного типа всегда равна единице, так как в нем не содержится никаких вложенных в него ε-термов. С другой стороны, основной тип ε-терма $\mathfrak{e}$ имеет тот же самый ранг, что и $\mathfrak{e}$, так как в том случае, когда он не совпадает с $\mathfrak{e}$, он получается из $\mathfrak{e}$ путем замены определенных термов, фигурирующих в качестве составных частей терма $\mathfrak{e}$, некоторыми другими термами[2]).

Среди прочих ε-термов основные типы могут быть охарактеризованы как такие ε-термы, у которых в качестве составных частей нет никаких других термов, кроме свободных индивидных переменных, и в которых ни одна свободная переменная не встречается дважды. Два отличных друг от друга ε-терма имеют одинаковые основные типы тогда и только тогда, когда один из этих термов получается из другого в результате замены некоторых термов, фигурирующих в нем в качестве составных частей, какими-либо другими термами.

*) Здесь полезно обратить внимание читателя на то, что прямые подтермы ε-терма могут не быть ε-термами. — *Прим. ред.*

[1]) Понятие основного типа ε-терма восходит к одному аналогичному понятию, введенному Дж. фон Нейманом в работе: Neumann J. v. Zur Hilbertschen Beweistheorie. — Math. Z., 1927, 26, S. 28.

[2]) Иногда, отвлекаясь от обозначений аргументных переменных, мы будем говорить об основном типе данного ε-терма, имея в виду *какой-нибудь* его основной тип.

Процесс построения основных типов ε-термов мы поясним на следующем примере. Основным типом ε-терма

$$\varepsilon_x(\varepsilon_y(c+2=\varepsilon_z(y+1<z))=\varepsilon_y(\varepsilon_z(z+\varepsilon_u(u=z)<z'')<y\,\&\,y<x))$$

с аргументными переменными a и b является ε-терм

$$\varepsilon_x(a=\varepsilon_y(b<y\,\&\,y<x)).$$

Из двух вложенных в исходный терм ε-термов

$$\varepsilon_y(c+2=\varepsilon_z(y+1<z))$$

и

$$\varepsilon_z(z+\varepsilon_u(u=z)<z'')$$

первый в качестве основного типа имеет ε-терм $\varepsilon_y(a=\varepsilon_z(y+b<z))$ с аргументными переменными a и b, а второй сам является своим собственным основным типом.

Если с помощью явных определений мы введем какие-либо сокращающие символы для основных типов всех ε-термов заданной формулы, а именно, индивидные символы для основных типов без аргументов и функциональные знаки с аргументами $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ для основных типов с этими аргументами, то с использованием этих символов каждый входящий в данную формулу ε-терм изобразится как некоторое выражение, построенное из свободных переменных, индивидных символов и функциональных знаков. Например, ε-терм, только что рассмотренный нами в качестве примера, с использованием явных определений

$$\varphi(a,\ b)=\varepsilon_x(a=\varepsilon_y(b<y\,\&\,y<x)),$$
$$\psi(a,\ b)=\varepsilon_y(a=\varepsilon_z(y+b<z)),$$
$$\alpha=\varepsilon_z(z+\varepsilon_u(u=z)<z'')$$

изобразится выражением

$$\varphi(\psi(c+2,\ 1),\ \alpha).$$

Общее доказательство высказанного утверждения легко получается финитной индукцией по степени рассматриваемого ε-терма. Можно также убедиться, что в выражении, получающемся из какого-либо ε-терма $\mathfrak{e}$ в результате использования сокращающих символов для основных типов, встречаются те же самые термы без ε-символа, которые входят в качестве составных частей в терм $\mathfrak{e}$.

Рассмотрим, в частности, формулу вида

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b)),$$

которая не содержит формульных переменных, но, быть может, содержит ε-термы. Если для основных типов входящих в нее ε-термов мы введем сокращающие их символы, то вместо рассматриваемой формулы мы получим некоторую новую формулу

$$a = b \to (\mathfrak{A}^*(a) \to \mathfrak{A}^*(b)),$$

в которой ε-символов уже больше не будет (зато в ней появятся ранее не встречавшиеся индивидные и функциональные символы).

Эта формула может быть выведена средствами исчисления предикатов (а если формула $\mathfrak{A}(a)$, а значит, и $\mathfrak{A}^*(a)$, не содержит кванторов, то уже средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными) из формул

(J_1) $\quad a = a,$

(i) $\quad a = b \to (a = c \to b = c)$

и формул вида

$$a = b \to (\Omega(a) \to \Omega(b)),$$

$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b))$$

(в этих формулах Ω всюду представляет собой некоторый входящий в формулу $\mathfrak{A}^*$ (а значит, и в $\mathfrak{A}$) предикатный символ, а $\mathfrak{f}$ — некоторый входящий в $\mathfrak{A}^*$ функциональный знак, т. е. или функциональный знак, входящий в $\mathfrak{A}$, или знак, введенный в качестве сокращающего символа для основного типа какого-либо ε-терма; при этом имеющиеся, но явно не указанные места для аргументов предикатных и функциональных символов заполняются свободными индивидными переменными, отличными друг от друга и от переменных a и b).

Теперь, чтобы из вывода формулы

$$a = b \to (\mathfrak{A}^*(a) \to \mathfrak{A}^*(b))$$

получить вывод формулы

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b)),$$

достаточно всюду заменить введенные нами сокращающие символы определяющими их ε-термами. При этом вместо формулы

$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)),$$

где $\mathfrak{f}(\cdot)$ представляет собой вводимый для некоторого основного типа сокращающий символ, получится формула

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b),$$

в которой фигурирующий в ней ε-терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ будет основным типом.

Таким образом, всякая формула вида

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b)),$$

где $\mathfrak{A}(a)$ — формула, не содержащая формульных переменных, которая, кроме символов исчисления предикатов, может содержать еще индивидные, функциональные и предикатные символы, всегда может быть выведена из:

1) формул (J_1) и (i),

2) специальных аксиом равенства, имеющих указанный ранее вид и связанных с предикатными символами и функциональными знаками, входящими в формулу $\mathfrak{A}(a)$, и

3) формул вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b),$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ — какой-либо основной тип.

Этот вывод осуществляется средствами исчисления предикатов или, если формула $\mathfrak{A}(a)$ не содержит кванторов, средствами элементарного исчисления со свободными переменными. При этом могут также добавиться подстановки ε-термов вместо свободных индивидных переменных.

Замечание. Отметим, что каждая формула вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

получается в результате подстановки (и, быть может, переименования связанных переменных) из формулы

$$a = b \to \varepsilon_x A(x, a) = \varepsilon_x A(x, b),$$

которая в свою очередь выводится из формул (J_1) и (J_2) совершенно таким же образом, каким для функционального знака $\mathfrak{f}(\cdot)$ выводится формула

$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)\ ^{1}).$$

---

[1]) См. т. I, с. 237—238. — Здесь представляется удобный случай привести обоснование высказанного ранее (см. с. 82) утверждения о том, что равносильность общей аксиомы равенства (J_3) соответствующим специальным аксиомам равенства применительно к выводам формул без формульных переменных, установленная нами для аксиоматических теорий, формализованных средствами исчисления предикатов, перестает иметь место при добавлении к этим теориям ε-символа и ε-формулы.

В самом деле, доказательство этого факта с использованием только что отмеченной выводимости формул вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

из аксиом (J_1) и (J_2) может быть получено следующим образом.

Мы рассматриваем формализм, состоящий из исчисления предикатов с добавлением к нему ε-символа, ε-формулы, а также символов и аксиом системы (Z), но с опущенной аксиомой индукции.

В этом формализме выводится формула

Полученный результат мы теперь используем для намеченного нами[1]) распространения первой ε-теоремы на формализм F, содержащий аксиомы равенства (J_1) и (J_2).

$$a = b \rightarrow \varepsilon_x(x \neq a) = \varepsilon_x(x \neq b),$$

из которой с помощью аксиомы $a + 0 = a$ выводится формула

[ε] $$\varepsilon_x(x \neq 0 + 0) = \varepsilon_x(x \neq 0).$$

Если бы в этом формализме тоже имелась возможность замены в выводах формул без формульных переменных аксиомы (J_2) соответствующими специальными аксиомами равенства, то в выводе формулы [ε] аксиому (J_2) можно было бы заменить этими специальными аксиомами. В результате этой замены вместо аксиом системы (Z) у нас появились бы аксиомы системы (Z′). Поэтому из аксиом системы (Z′) и из ε-формулы средствами исчисления предикатов должна была бы выводиться формула [ε].

Но формула [ε], взятая совместно с формулами

[ε*] $$\begin{cases} \varepsilon_x(x \neq 0) = 0', \\ \varepsilon_x(x \neq 0 + 0) = 0'' \end{cases}$$

и аксиомами системы (Z′), ведет к противоречию. Поэтому формализм F_1, состоящий из исчисления предикатов, символов и аксиом системы (Z′), ε-символа, взятого вместе с ε-формулой, и двух принимаемых в качестве аксиом формул [ε*], был бы противоречивым. Однако это не так: в непротиворечивости формализма F_1 можно убедиться при помощи процедуры устранения ε-символов. Необходимо только, принимая во внимание наличие аксиом [ε*], модифицировать эту процедуру следующим образом.

При устранении критических формул из какого-либо доказательства те критические формулы, которые относятся к термам $\varepsilon_x(x \neq 0)$ и $\varepsilon_x(x \neq 0 + 0)$, процедуре исключения не подвергаются. Так как эти формулы имеют ранг 1 и степень 1, то при заменах, производимых для устранения остальных критических формул, они останутся без изменений. Когда все эти критические формулы будут полностью устранены, терм $\varepsilon_x(x \neq 0)$ надо будет заменить термом 0′, а терм $\varepsilon_x(x \neq 0 + 0)$ — термом 0″. Тогда связанные с этими ε-термами критические формулы перейдут в формулы вида

$$\mathfrak{k} \neq 0 \rightarrow 0' \neq 0 \text{ и } \mathfrak{l} \neq 0 + 0 \rightarrow 0'' \neq 0 + 0,$$

и формулы [ε*] перейдут в формулы

$$0' = 0' \text{ и } 0'' = 0''.$$

Но все эти формулы выводимы из аксиом системы (Z′) средствами элементарного исчисления со свободными переменными.

Таким образом, по нормированному доказательству любой нумерической формулы $\mathfrak{E}$, осуществляемому средствами формализма F_1, мы получаем вывод этой формулы из аксиом системы (Z′) средствами элементарного исчисления со свободными переменными. Так как аксиомы системы (Z′) являются верифицируемыми формулами, отсюда следует, что формула $\mathfrak{E}$ является истинной.

Следовательно, формализм F_1 непротиворечив, и, значит, формула [ε] не может быть выведена из аксиом системы (Z′) с помощью исчисления предикатов и ε-формулы.

[1]) См. с. 83.

И в том случае, когда заключительная формула вывода не содержит связанных переменных, и в том случае, когда она начинается кванторами существования, но не содержит ни других кванторов, ни ε-символов, мы начнем наше доказательство совершенно так же, как и раньше. Сначала мы покажем, что, не ограничивая общности, заключительную формулу $\mathfrak{E}$ можно считать формулой без свободных переменных. Затем мы исключим из вывода кванторы, заменяя изнутри каждое выражение вида $\exists \mathfrak{v} \mathfrak{F}(\mathfrak{v})$ выражением $\mathfrak{F}(\varepsilon_{\mathfrak{v}} \mathfrak{F}(\mathfrak{v}))$ и каждое выражение вида $\forall \mathfrak{v} \mathfrak{F}(\mathfrak{v})$ — выражением $\mathfrak{F}(\varepsilon_{\mathfrak{v}} \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{v}))$. При этом во избежание коллизий между связанными переменными мы должны будем произвести необходимые переименования. В процессе этих преобразований применения схем (α) и (β) переходят, как мы уже знаем, в некоторые подстановки, основная формула (b) переходит в ε-формулу, а основная формула (a) переходит в некоторую формулу, выводимую из ε-формулы с помощью подстановки и контрапозиции. Мы добавляем вывод этой формулы к рассматриваемому выводу.

В вопросе о влиянии этой операции исключения кванторов на заключительную формулу $\mathfrak{E}$ мы должны различать наши два случая: случай, когда эта формула не содержит связанных переменных, и случай, когда она имеет вид

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r).$$

В первом случае формула $\mathfrak{E}$ остается без изменений; во втором случае вместо нее появляется формула вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r),$$

где $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ — некоторые ε-термы[1]).

Далее с помощью разложения доказательства на нити мы произведем возвратный перенос подстановок в исходные формулы, а после этого исключим свободные переменные[2]). При этом на месте исходных формул первоначального вывода формулы $\mathfrak{E}$, содержащих свободные переменные, окажутся некоторые формулы, получающиеся из них в результате соответствующих подстановок. В частности, вместо аксиомы (J_2), фигурирующей в качестве исходной формулы, мы получим исходные формулы вида

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{b})),$$

которые не будут содержать никаких свободных (и, в частности, формульных) переменных, а также не будут содержать и кван-

[1]) См. с. 43, 45.
[2]) См. с. 39.

торов. Любая формула этого вида получается в результате подстановки из соответствующей формулы

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b)),$$

а эта последняя, как мы отметили выше, выводится из форму (J_1), специальных аксиом равенства и формул вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b),$$

причем этот вывод осуществляется средствами элементарного исчисления с допущением подстановок ε-термов вместо свободных индивидных переменных.

Специальные аксиомы равенства, которыми нам придется пользоваться, принадлежат некоторому определяемому формализмом F конечному запасу формул, а именно совокупности тех формул равенства, имеющих вид

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b)),$$
$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)),$$

которые соответствуют предикатным символам и функциональным знакам из F (точнее, их различным аргументам). [Формула (i), т. е. формула

$$a = b \to (a = c \to b = c),$$

содержится в их числе.] Мы будем кратко называть эти формулы формулами (i_F). Все они не содержат никаких переменных, кроме свободных индивидных, и могут быть выведены из аксиом (J_1) и (J_2) без использования связанных переменных: формулы, относящиеся к предикатным символам, — непосредственной подстановкой из (J_2), а формулы, относящиеся к функциональным знакам, — с использованием аксиомы (J_1).

С нашим преобразованным таким образом доказательством формулы $\mathfrak{E}$ мы теперь поступим следующим образом. Над всякой встречающейся в нем исходной формулой

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

мы надстроим вывод, который получается из вывода соответствующих формул

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b)),$$

подстановкой в его заключительную формулу термов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$

вместо переменных a и b; при этом вывод формулы

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

производится с использованием формул (J_1), (i_F) и формул вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b),$$

где всякий раз $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ представляет собой некоторый основной тип.

К этим достроенным выводам мы снова применим операции возвратного переноса подстановок в исходные формулы и исключения свободных переменных. При этом на месте любой формулы

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

с основным типом $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$, использованной в качестве исходной, окажется формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^*(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^*(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^*(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^*(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ суть термы с основным типом $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$, в которых место аргумента этого основного типа, которое в $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ занято переменной a, заполнено термами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ соответственно.

Полученная таким образом фигура может быть рассматриваема как вывод в рамках того формализма F^*, который получится из F, если мы опустим аксиому (J_2), заменив ее формулами (i_F), и включим в число исходных формул формулы вида

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

у которых термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ в термах $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ стоят на месте некоторого аргумента общего основного типа этих термов [1]).

Конечно, получающийся здесь вывод является выводом лишь в *обобщенном смысле* этого слова, так как в качестве исходных формул в нем фигурируют такие формулы, которые не являются непосредственно формулами формализма F^*, а только получаются из них в результате некоторых подстановок [2]).

Итак, все аксиомы формализма F^* являются собственными аксиомами без связанных переменных и тем самым единственное отличие от ситуации, которая у нас имелась в гл. I при доказательстве первой ε-теоремы, заключается в наличии исходных

[1]) Заметим, что терм $\mathfrak{g}$, входящий в состав какого-либо ε-терма, не обязательно стоит на месте какого-нибудь аргумента основного типа этого ε-терма; он может быть составной частью некоторого объемлющего его терма, находящегося внутри указанного ε-терма.

[2]) Аналогичная ситуация имела место в гл. I, с. 39.

формул

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

которые представляют собой, так сказать, критические формулы нового вида. Формулу этого вида, у которой заданные термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ стоят в термах $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ на месте некоторого аргумента общего основного типа этих термов (как это всегда имеет место у исходных формул этого вида), мы будем называть формулой ε-равенства, связанной с ε-термами $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$. Общий ранг обоих этих ε-термов мы будем считать рангом этой формулы ε-равенства, а общий основной тип обоих этих ε-термов мы будем называть основным типом этой формулы ε-равенства (или же связанным с нею основным типом, а точнее, основным типом, с которым связана данная формула ε-равенства).

Замечание. В нашем определении формулы ε-равенства мы не требуем, чтобы рассматриваемые нами термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ обязательно были различными. Мы вполне могли бы наложить это ограничение, так как любая формула вида

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$$

с использованием подстановки может быть выведена средствами исчисления высказываний и поэтому в качестве исходной формулы оказывается излишней. Но чтобы избежать необязательного разбора частных случаев, мы допустим и такие формулы в качестве формул ε-равенства. Там, где будет важно их своеобразие, мы будем называть такие формулы вырожденными.

Теперь допустим, что из какого-либо вывода рассматриваемого вида нам удалось устранить все формулы ε-равенства и критические формулы, так что, как в проведенном в гл. I доказательстве нашей ε-теоремы [1]), после замены остающихся термов переменной a получается вывод, совершенно не использующий связанные переменные, причем если заключительная формула $\mathfrak{E}$ первоначального вывода является формулой без связанных переменных, то у нас снова получается вывод формулы $\mathfrak{E}$, а если $\mathfrak{E}$ имеет вид

$$\exists\mathfrak{x}_1 \ldots \exists\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}),$$

где $\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})$ не содержит других связанных переменных, отличных от $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}$, то получается вывод некоторой дизъюнкции

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(1)}\right) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}\left(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{s})}, \ldots, \mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{s})}\right).$$

Тогда для тех исходных формул, которые возникли в результате

[1]) См. с. 47 и далее.

подстановок из добавленных аксиом (i_F), мы можем достроить их выводы из аксиом (J_1) и (J_2) и таким образом прийти к выводу рассматриваемой нами заключительной формулы, укладывающемуся в рамки формализма F и протекающему без использования связанных переменных.

Тем самым наше доказательство сводится к тому, чтобы процедуру устранения критических формул надлежащим образом перестроить в процедуру совместного исключения критических формул и формул ε-равенства.

б) Совместное устранение критических формул и формул ε-равенства. Методика, с помощью которой гильбертовскую процедуру устранения ε-символов удается распространить и на формулы ε-равенства, была найдена и в основных своих чертах изложена В. Аккерманом в связи с предпринятой им реализацией гильбертовского подхода, при котором включение общей аксиомы равенства (J_2) было запланировано заранее.

Применяя данную методику к какому-либо конкретному доказательству, из которого будут устраняться ε-символы, мы будем пользоваться следующими его свойствами:

1. Каждая исходная формула рассматриваемого доказательства либо получается в результате подстановки из какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний или из собственной аксиомы, не содержащей кванторов, либо является критической формулой или формулой ε-равенства.

2. В нем отсутствуют кванторы, и дедуктивная взаимосвязь составляющих его формул основывается исключительно на применении схемы заключения, на повторении уже имеющихся формул и на переименованиях связанных переменных.

Доказательства такого рода мы будем называть нормированными доказательствами (на этот раз в обобщенном смысле [1]), так как в качестве исходных формул мы теперь допускаем и формулы ε-равенства).

Далее, мы воспользуемся тем обстоятельством, что формализм F^*, в рамках которого осуществляется рассматриваемое нормированное доказательство, содержит аксиомы (J_1) и (i_F). Как мы уже видели, с помощью этих аксиом, добавляя формулы ε-равенства, можно вывести любую принадлежащую формализму F^* формулу вида

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)),$$

не содержащую формульных переменных. При этом соответствующие формулы ε-равенства получаются в результате подстановки из формул вида

$$a = b \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b),$$

[1]) См. с. 40.

где $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ представляет собой основной тип некоторого ε-терм встречающегося в формуле $\mathfrak{A}(c)$; поэтому ранг любой из испол зуемых формул ε-равенства равен рангу некоторого встреча щегося в $\mathfrak{A}(c)$ ε-терма.

Помимо указанных свойств исходного нормированного доказа тельства и рассматриваемого нами формализма мы еще должн четко представлять себе, что заключительная формула доказа-тельства должна обладать определенными свойствами. Нашу про цедуру устранения мы будем строить с таким расчетом, чтоб она охватывала оба рассматриваемых случая ε-теоремы: и случай, когда заключительная формула $\mathfrak{E}$ не содержит связанных переменных, и случай, когда заключительная формула имеет вид

$$\exists\mathfrak{x}_1 \ldots \exists\mathfrak{x}_r\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)$$

и не содержит никаких связанных переменных, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$. Любая формула такого вида при исключении из нее кванторов с помощью ε-символа, как известно, переходит в формулу вида

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r),$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — некоторые термы, вне которых не содержится ни одного ε-символа этой формулы. Поэтому наша задача, с одной стороны, заключается в том, чтобы по любому нормированному доказательству с заключительной формулой $\mathfrak{E}$, не содержащей ε-термов, построить какое-либо нормированное доказательство этой формулы, не содержащее ни критических формул, ни формул ε-равенства, а с другой стороны, в том, чтобы по любому нормированному доказательству с заключительной формулой $\mathfrak{E}$ вида $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{v}})$, где $a_1, \ldots, a_{\mathfrak{v}}$ — некоторые термы, включающие в себя все ε-термы этой формулы, построить какое-либо нормированное доказательство, не содержащее ни критических формул, ни формул ε-равенства, для некоторой формулы

$$\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{\mathfrak{s}},$$

где каждый из дизъюнктивных членов $\mathfrak{E}_i$ $(i = 1, \ldots, \mathfrak{s})$ имеет вид

$$\mathfrak{A}\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_r^{(i)}\right)$$

с какими-либо термами $t_1^{(i)}, \ldots, t_r^{(i)}$.

Решение первой задачи содержится в решении второй, поскольку мы допускаем, чтобы r, т. е. число аргументов формулы $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$, равнялось нулю. В этом случае каждый член дизъюнкции

$$\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{\mathfrak{s}}$$

должен совпадать с $\mathfrak{E}$, а из дизъюнкции

$$\mathfrak{E} \vee \ldots \vee \mathfrak{E}$$

формула $\mathfrak{E}$ может быть получена по правилам исчисления высказываний. Поэтому первую задачу можно отдельно и не рассматривать.

Связь дизъюнкции $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{\mathfrak{s}}$ с формулой $\mathfrak{E}$ заключается в том, что каждый из ее членов либо совпадает с $\mathfrak{E}$, либо получается из $\mathfrak{E}$ в результате замены одного или нескольких входящих в $\mathfrak{E}$ ε-термов некоторыми другими термами (которые тоже могут — но не обязаны — быть ε-термами). Переход от формулы $\mathfrak{E}$ к такой дизъюнкции $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{\mathfrak{s}}$ мы в свое время назвали дизъюнктивным расщеплением этой формулы [1]. Как уже было отмечено ранее [1], последовательное выполнение дизъюнктивных расщеплений снова дает дизъюнктивное расщепление, так что если $\mathfrak{E}_1$ получается в результате дизъюнктивного расщепления из $\mathfrak{E}$, а $\mathfrak{E}_2$ из $\mathfrak{E}_1$, то $\mathfrak{E}_2$ тоже получается в результате дизъюнктивного расщепления формулы $\mathfrak{E}$.

С учетом сказанного, совместное устранение из какого-либо нормированного доказательства и критических формул, и формул ε-равенства может быть сведено к ряду отдельных шагов, на каждом из которых устраняется одна из этих формул. При этом поскольку каждый из этих шагов либо оставляет заключительную формулу без изменений, либо дизъюнктивно расщепляет ее, последовательное выполнение всех этих шагов тоже приведет самое бóльшее к дизъюнктивному расщеплению заключительной формулы.

В дальнейшем, когда будет говориться об устранении критических формул или об устранении формул ε-равенства, всегда будет иметься в виду устранение такого типа, при котором заключительная формула рассматриваемого нормированного доказательства либо остается без изменений вообще, либо подвергается одному только дизъюнктивному расщеплению.

Подобно нашей прежней процедуре устранения критических формул [2], подготавливаемая процедура будет использовать следующие две вспомогательные операции: операцию импликативного добавления посылки и операцию замены ε-термов.

Операция импликативного добавления формулы $\mathfrak{B}$ заключается в том, что сначала к каждой формуле рассматриваемого нормированного доказательства приписывается в качестве посылки формула $\mathfrak{B}$, и затем 1) над каждой формулой $\mathfrak{B} \to \mathfrak{P}$, стоящей на месте первоначальной формулы $\mathfrak{P}$, надстраивается (если сама эта формула не является допустимой исходной формулой) ее вывод

[1]) См. с. 53.
[2]) См. с. 37, 47 и далее.

из формулы $\mathfrak{P}$ средствами исчисления высказываний и 2) вместо каждой последовательности формул

$$\frac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{S} \qquad \mathfrak{B} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{T}},$$

стоящей на месте какой-либо прежней схемы заключения, помещается (тоже осуществляемый средствами исчисления высказываний) вывод третьей из этих формул из первых двух.

Импликативное добавление какой-либо формулы $\mathfrak{B}$, не содержащей ни формульных переменных, ни кванторов, переводит нормированное доказательство формулы $\mathfrak{E}$ в нормированное доказательство формулы $\mathfrak{B} \to \mathfrak{E}$.

Операция замены какого-либо ε-терма $\mathfrak{e}$ термом $\mathfrak{f}$ заключается в том, что ε-терм $\mathfrak{e}$ всюду, где он встречается в рассматриваемом нами нормированном доказательстве, заменяется термом $\mathfrak{f}$.

Ранее[1]) мы установили, что в результате замены какого-либо ε-терма $\mathfrak{e}$ новым термом критическая формула, не связанная с $\mathfrak{e}$, может подвергнуться изменениям лишь тогда, когда ее ранг или ее степень превосходит ранг или соответственно степень терма $\mathfrak{e}$; а критическая формула, не связанная с $\mathfrak{e}$, ранг которой не превосходит ранга терма $\mathfrak{e}$, в результате этой замены всегда переходит в новую критическую формулу, ранг которой равен рангу первоначальной формулы.

Теперь рассмотрим вопрос о том, какому изменению в результате замены ε-терма $\mathfrak{e}$ подвергается формула ε-равенства

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

не связанная с термом $\mathfrak{e}$.

Как известно, эта формула обладает тем свойством, что терм $\mathfrak{a}$ в ε-терме $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и терм $\mathfrak{b}$ в ε-терме $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ стоят на месте некоторого аргумента общего основного типа этих ε-термов; с другой стороны, терм $\mathfrak{e}$, если он входит в эту формулу, может стоять только на месте одного или нескольких аргументов соответствующего основного типа или же в посылке $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Поэтому данная формула ε-равенства, если в результате этой замены она вообще подвергается каким-либо изменениям, переходит в некоторую формулу вида

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^* \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_1(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}^*) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_1(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}^*),$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_1(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$ имеет тот же самый основной тип, что и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$.

Таким образом, получается, что при замене какого-либо ε-терма $\mathfrak{e}$ любая не связанная с этим ε-термом формула ε-равенства, если она вообще подвергается каким-либо изменениям, снова переходит в формулу ε-равенства, а ее основной тип — а тем самым и ранг — остается без изменений.

[1]) См. с. 49—51.

Теперь, на основе всех этих замечаний относительно влияния замен на критические формулы и на формулы ε-равенства, мы произведем устранение этих формул по этапам, путем последовательного понижения наибольшего из рангов этих формул, подобно тому, как это делалось в прежнем доказательстве нашей ε-теоремы. Действительно, нам будет достаточно разработать метод, позволяющий исключать из нормированных доказательств те критические формулы и формулы ε-равенства, которые имеют ранг, наибольший из числа встречающихся. Не будет большой беды, если при этом будут возникать новые критические формулы или формулы ε-равенства, лишь бы только они имели более низкий ранг.

В случае, когда в заданном нормированном доказательстве наибольший ранг $\mathfrak{m}$ имеют только критические формулы, а формул ε-равенства с этим рангом нет, мы можем применить нашу прежнюю процедуру исключения критических формул. Она состоит, как мы помним, в том, что шаг за шагом последовательно уменьшается количество ε-термов ранга $\mathfrak{m}$, связанных с какими-либо критическими формулами. Чтобы убедиться, что в рассматриваемой сейчас ситуации эта процедура тоже дает нужный результат, мы напомним, как при ее реализации производится текущий шаг устранения.

Среди ε-термов ранга $\mathfrak{m}$, связанных в рассматриваемом нормированном доказательсте с какими-либо критическими формулами, мы берем какой-либо один с максимальной степенью. Пусть связанные с этим термом критические формулы имеют вид

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})).$$

Мы строим n частичных доказательств, r-е из которых ($r = 1, \ldots, n$) получается из рассматриваемого нормированного доказательства в результате замены терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ термом $\mathfrak{f}_r$ и последующего импликативного добавления посылки $\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_r)$. Эти частичные доказательства являются нормированными, потому что в результате замены терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ критические формулы, не связанные с этим ε-термом, снова переходят в критические формулы, так как их ранг не превосходит $\mathfrak{m}$, а формулы ε-равенства переходят опять в некоторые формулы ε-равенства, так как они не связаны с этим ε-термом.

Затем из первоначального нормированного доказательства пут импликативного добавления формулы

$$\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1)\,\&\,\ldots\,\&\,\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n)$$

мы получаем еще одно, $(n+1)$-е частичное доказательство.

Если заключительной формулой исходного нормированного доказательства была формула $\mathfrak{E}$, то r-е ($r=1, \ldots, n$) частичное доказательство будет оканчиваться формулой

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_r)\rightarrow\mathfrak{E}_r,$$

где $\mathfrak{E}_r$ получается из $\mathfrak{E}$ в результате указанной замены терма $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$; а $(n+1)$-е частичное доказательство будет иметь заключительную формулу

$$\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_1)\,\&\,\ldots\,\&\,\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{f}_n)\rightarrow\mathfrak{E}.$$

Из этих $n+1$ заключительных формул, взятых вместе, по правилам исчисления высказываний выводится формула

$$\mathfrak{E}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{E}_n\vee\mathfrak{E}.$$

Таким образом, первоначальная формула $\mathfrak{E}$ подвергается дизъюнктивному расщеплению. (Повторения членов, возможно, имеющиеся в полученной дизъюнкции, могут быть устранены средствами исчисления высказываний.) В каждом из этих частичных доказательств на месте критических формул, связанных с ε-термом $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$, будут находиться формулы, получающиеся из тождественно истинных формул исчисления высказываний в результате некоторой подстановки. Значит, эти критические формулы больше не будут использоваться в качестве исходных. Правда, в результате произведенных замен могут добавиться новые критические формулы и формулы ε-равенства, но все они будут иметь ранг, меньший $\mathfrak{m}$. Действительно, в результате замены терма $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ и у критических формул, и у формул ε-равенства, не связанных с этим ε-термом, повышения ранга произойти не может, а критические формулы ранга $\mathfrak{m}$, не связанные с термом $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$, если таковые имеются, в результате этих замен вообще не изменяются, так как они имеют степень, не превосходящую степени терма $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$.

Таким образом, указанный прием действительно ведет к исключению связанных с термом $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ критических формул, а количество ε-термов ранга $\mathfrak{m}$, к которым относятся какие-либо критические формулы, уменьшается на единицу. Повторяя эту процедуру нужное число раз, мы придем к исключению всех критических формул ранга $\mathfrak{m}$.

После этого наша задача сводится к тому, чтобы научиться устранять из любого нормированного доказательства, у которого наибольший ранг критических формул и формул ε-равенства равен $\mathfrak{m}$, формулы ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$. При этом можно даже допустить, чтобы в процессе этого исключения добавлялись новые формулы ε-равенства ранга, меньшего $\mathfrak{m}$, и критические формулы ранга, не превосходящего $\mathfrak{m}$. Действительно, если будут исключены все формулы ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$, то только что описанным способом мы сможем исключить и критические формулы ранга $\mathfrak{m}$.

Для устранения формул ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$ достаточно уменьшить число различных *основных типов* ранга $\mathfrak{m}$ таких, что в рассматриваемом нормированном доказательстве имеются связанные с ними формулы ε-равенства. Допустим, что выбран один из этих основных типов, — например тот, с которым связана первая встречающаяся в данном нормированном доказательстве формула ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$. Проблема заключается в том, чтобы устранить все связанные с этим основным типом — мы обозначим его буквой $\mathfrak{t}$ — исходные формулы ε-равенства.

Это делается очень просто, если в рассматриваемом нормированном доказательстве среди ε-термов с основным типом $\mathfrak{t}$ нет ни одного такого терма, с которым были бы связаны одновременно хотя бы одна формула ε-равенства и хотя бы одна критическая формула. В самом деле, если это условие будет выполнено и если мы заменим переменной a каждый из тех ε-термов с основным типом $\mathfrak{t}$, с которым в рассматриваемом нормированном доказательстве связаны какие-либо формулы ε-равенства, то каждая формула ε-равенства, имеющая ранг $\mathfrak{m}$, перейдет в формулу вида

$$\mathfrak{G}\rightarrow a=a,$$

которая может быть выведена из формулы (J_1) средствами исчисления высказываний. Вместо заключительной формулы (если она вообще подвергнется каким-нибудь изменениям) будет стоять формула, получающаяся из нее в результате произведенных замен. Формулы ε-равенства, имеющие ранг, меньший $\mathfrak{m}$, перейдут в новые формулы ε-равенства без изменения ранга. Формулы ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$, не связанные с основным типом $\mathfrak{t}$, опять перейдут в формулы этого рода, с сохранением их основного типа. А критические формулы, которые имеют ранг, не превосходящий $\mathfrak{m}$, тоже останутся критическими формулами и сохранят свой ранг. Тем самым в результате указанных замен будут устранены все связанные с основным типом $\mathfrak{t}$ формулы ε-равенства.

Этот прием оказывается неприменимым в том случае, когда с одним из тех ε-термов основного типа $\mathfrak{t}$, с которыми связаны какие-либо формулы ε-равенства, связаны также и какие-нибудь критические формулы, потому что эти формулы при замене рассматриваемого ε-терма переменной a теряют свой характеристи-

ческий вид. В этом случае мы должны будем прибегнуть к другой процедуре, которая тоже состоит в последовательном исключении связанных с основным типом t формул ε-равенства, но является более сложной. К изложению этой процедуры мы сейчас и перейдем.

В порядке подготовки мы сначала исключим все имеющиеся вырожденные формулы ε-равенства, что без труда может быть сделано при помощи аксиомы (J_1). Совокупность всех имеющихся в нашем нормированном доказательстве формул ε-равенства с основным типом t мы обозначим посредством G. Пусть среди ε-термов, с которыми связаны какие-либо формулы из G, ε-терм $\mathfrak{l}$ имеет максимальную степень.

Сначала мы предположим, что терм $\mathfrak{l}$ можно выбрать таким образом, чтобы в нашем нормированном доказательстве с ним была связана только одна формула ε-равенства. Обозначим эту формулу буквой $\mathfrak{F}$. Эта формула будет иметь вид

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{f} = \mathfrak{l}$$

или соответственно

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{l} = \mathfrak{f}.$$

Второй из этих случаев мы можем легко свести к первому, так как формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{l} = \mathfrak{f}$$

может быть выведена из формулы

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to \mathfrak{f} = \mathfrak{l},$$

также являющейся формулой ε-равенства, с помощью формулы

$$a = b \to b = a,$$

которая получается из (J_1) и (i).

Формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{f} = \mathfrak{l}$$

может быть более подробно записана в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ суть термы $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$.

Ввиду условия, наложенного нами на степень терма $\mathfrak{l}$, этот последний не может быть составной частью никакого другого ε-терма из числа тех, с которыми связана какая-либо формула из G. Он не может быть также составной частью какого-либо из термов, встречающихся в посылках формул из G.

Теперь мы заменим $\mathfrak{l}$ термом $\mathfrak{f}$. Этой заменой все отличные от $\mathfrak{F}$ формулы ε-равенства, входящие в наше нормированное доказательство, — если они подвергнутся каким-либо изменениям вообще — будут переведены в формулы того же самого основного

типа, а тем самым и того же самого ранга. Равным образом при этой замене сохранят свой характеристический вид, а также и ранг, критические формулы, не связанные с $\mathfrak{l}$, так как все они имеют, самое большее, тот же самый ранг $\mathfrak{m}$, что и терм $\mathfrak{l}$. Связанные с основным типом t и отличные от $\mathfrak{F}$ формулы ε-равенства, которые, согласно нашему предположению, все не связаны с $\mathfrak{l}$, в результате этой замены не подвергнутся никаким изменениям, так как $\mathfrak{l}$ в них не содержится в качестве составной части какого-либо терма. Сама формула $\mathfrak{F}$ при этом перейдет в формулу

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{f} = \mathfrak{f},$$

которая выводится из аксиомы (J_1).

Теперь остается еще рассмотреть критические формулы, связанные с $\mathfrak{l}$. Эти последние в результате данной замены перестают быть критическими формулами. В самом деле, любая такая формула, как мы знаем, записывается в виде

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}), \mathfrak{b}),$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ представляет собой терм $\mathfrak{l}$. В результате рассматриваемой замены эта формула перейдет в формулу [1])

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b}),$$

которая более не является критической формулой.

Здесь мы выйдем из положения импликативным добавлением формулы $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. В результате этого вместо каждой модифицированной данной заменой критической формулы, связанной с термом $\mathfrak{l}$, мы получим формулу вида

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b})).$$

Но любая такая формула при помощи исчисления высказываний может быть выведена из формул

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} = \mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})),$$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}),$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b})).$$

Первая из этих формул выводится из формул (J_1) и (i). Третья является критической формулой ранга $\mathfrak{m}$. Вторая и четвертая

[1]) Заметим, что формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$, если она вообще содержит терм $\mathfrak{l}$, может содержать его только в качестве составной части терма $\mathfrak{c}$ или в качестве самого $\mathfrak{c}$, так как в любом другом случае получалось бы противоречие: терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ превосходил бы в ранге или степени терм $\mathfrak{l}$, т. е. самого себя.

получаются в результате подстановок из формулы

$$(1) \qquad a = b \to (\mathfrak{B}(r, a) \to \mathfrak{B}(r, b)).$$

Если $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_0(\mathfrak{v}, c)$ представляет собой основной тип терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, c)$, то формула (1) либо совпадает с формулой

$$(2) \qquad a = b \to (\mathfrak{B}_0(r, a) \to \mathfrak{B}_0(r, b)),$$

либо получается из нее в результате подстановки, причем вывод формулы (2) может быть осуществлен с помощью формул (J_1), (i_F) и, возможно, некоторых формул вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, b),$$

где всякий раз терм $\varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, c)$ является основным типом какого-нибудь входящего в формулу $\mathfrak{B}_0(r, c)$ ε-терма.

Так как $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_0(\mathfrak{v}, c)$ является основным типом, то в $\mathfrak{B}_0(r, c)$ могут входить только такие ε-термы, которые получаются из некоторого подчиненного терму $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_0(\mathfrak{v}, c)$ ε-выражения, когда вместо связанной переменной $\mathfrak{v}$ подставляется свободная переменная r. Тем самым эти термы имеют ранг, меньший ранга $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_0(\mathfrak{v}, c)$, и, значит, ранг соответствующего терма $\varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, c)$ всегда меньше $\mathfrak{m}$.

Если теперь в выводах формул

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}))$$

и

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b}))$$

мы перенесем все подстановки в исходные формулы, то вместо исходных формул вида

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, b),$$

у которых ε-термы, как мы установили, имеют ранг, меньший $\mathfrak{m}$, появятся формулы ε-равенства

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_1(\mathfrak{w}, \mathfrak{b}) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_1(\mathfrak{w}, \mathfrak{a}),$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_2(\mathfrak{w}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_2(\mathfrak{w}, \mathfrak{b}),$$

которые также будут иметь ранг, меньший $\mathfrak{m}$.

Таким образом, в итоге получается вывод формулы

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b})),$$

в котором, кроме формул, получающихся в результате подстановок из тождественно истинных формул и аксиом формализма F^* [1]),

[1]) См. с. 91.

используется формула

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}),$$

т. е. критическая формула ранга $\mathfrak{m}$, и, возможно, некоторые формулы ε-равенства, имеющие ранг, меньший $\mathfrak{m}$.

Если теперь для каждой из формул

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b})),$$

которые получатся вместо связанных с термом $\mathfrak{t}$ критических формул данного нам вывода в результате произведенной замены и импликативного добавления формулы $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, добавить описанный выше вывод, то получится некоторое нормированное доказательство с заключительной формулой

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{E}_1,$$

где $\mathfrak{E}_1$ — формула, которая получается в результате этой замены из $\mathfrak{E}$.

С другой стороны, из первоначального нормированного доказательства путем импликативного добавления формулы $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ мы получим некоторое нормированное доказательство формулы

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \to \mathfrak{E},$$

в котором вместо формулы $\mathfrak{F}$ фигурирует формула

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \to (\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{t} = \mathfrak{l}),$$

получающаяся подстановкой из тождественно истинной формулы

$$\neg A \to (A \to B).$$

Заключительные формулы

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{E}_1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \to \mathfrak{E}$$

обоих «частичных доказательств», взятые вместе, дают по правилам исчисления высказываний формулу

$$\mathfrak{E} \vee \mathfrak{E}_1,$$

а в том случае, когда $\mathfrak{E}_1$ совпадает с $\mathfrak{E}$, — формулу $\mathfrak{E}$.

Так с помощью метода частичных доказательств мы снова приходим к некоторому нормированному доказательству, в котором формула $\mathfrak{F}$ больше не используется в качестве исходной. Вполне возможно, что при этом добавятся новые критические формулы и формулы ε-равенства, но все они будут иметь старые ранги, т. е. формул с новыми рангами не появится. Кроме того, у формул ε-равенства, имеющих ранг $\mathfrak{m}$, не появится новых основных типов и новых связанных с основным типом $\mathfrak{t}$ формул. Тем самым число формул ε-равенства, связанных с основным типом $\mathfrak{t}$, уменьшится на единицу, а в случае, когда это число было равно

единице, уменьшится количество имеющихся основных типов формул ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$. Заключительная формула может подвергнуться только дизъюнктивному расщеплению.

Сказанного уже было бы достаточно для постепенного исключения всех формул ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$, если бы мы не были ограничены предположением о том, что с термом $\mathfrak{l}$ связана одна-единственная формула ε-равенства [1]). Для устранения этого ограничения нам потребуется некоторое дополнительное рассмотрение. Именно, если с термом $\mathfrak{l}$, замена которого производится, связано более одной формулы ε-равенства, то при замене $\mathfrak{l}$ на $\mathfrak{k}$ перестанут быть формулами ε-равенства все те встречающиеся в нашем нормированном доказательстве формулы ε-равенства, которые связаны с $\mathfrak{l}$, но не связаны с $\mathfrak{k}$.

Чтобы более тщательно обсудить имеющиеся здесь возможности, мы, во-первых, заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, — как это уже делалось ранее, когда у нас имелась единственная формула $\mathfrak{F}$, — что у всех связанных с термом $\mathfrak{l}$ формул из G посылки имеют вид

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l},$$

так что $\mathfrak{l}$ всегда стоит в правой части соответствующего равенства [2]).

Далее, введем понятие выделенного аргумента. В формуле ε-равенства

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$$

общий основной тип термов $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{r})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$ имеет, вообще говоря, несколько аргументов. Тот аргумент этого основного типа, при замещении которого отличными друг от друга термами $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ мы получаем различные ε-термы $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{r})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$, мы будем называть выделенным в этой формуле аргументом соответствующего основного типа.

Если $\mathfrak{G}$ — любая связанная с $\mathfrak{l}$ и отличная от $\mathfrak{F}$ формула ε-равенства, то мыслимы следующие две возможности: выделенный в формуле $\mathfrak{G}$ аргумент основного типа $\mathfrak{t}$ может совпадать с выделенным аргументом в формуле $\mathfrak{F}$ и может отличаться от него. В первом случае, если терм $\mathfrak{l}$ записать в виде $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$, формулы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ запишутся следующим образом:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}).$$

[1]) См. с. 100.
[2]) См. с. 100.

формула $\mathfrak{G}$ в результате замены перейдет в формулу

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}).$$

Эта последняя уже не является формулой ε-равенства. Во втором случае формулы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ с явно указанными обоими выделенными аргументами запишутся в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$$

и

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s}).$$

Производимая нами замена в этом случае представляет собой замену терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$ термом $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$, и в результате этого вместо формулы $\mathfrak{G}$ появится формула

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}),$$

которая не является формулой ε-равенства.

Теперь легко видеть, что в обоих случаях формула, которая получается из формулы $\mathfrak{G}$ в результате замены, при импликативном добавлении формулы $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, производимом после этой замены в первом из образуемых нами частичных доказательств, переходит в формулу, которая выводится из аксиом (J_1), (i) и формул ε-равенства.

Действительно, в первом случае из $\mathfrak{G}$ в результате подстановки и импликативного добавления формулы $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ получается формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}));$$

эта последняя с помощью формулы

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} = \mathfrak{a}),$$

которая может быть получена из (J_1) и (i), выводится из формулы

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}).$$

Во втором случае формула, получающаяся из $\mathfrak{G}$ в результате подстановки и импликативного добавления посылки $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, записывается в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})),$$

а эта последняя получается с помощью выводимых из (J_1) и (i) формул

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} = \mathfrak{a},$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) \,\&\, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}) \to$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$$

и следующих формул ε-равенства:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}),$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}).$$

Но сказанное еще не устраняет всех трудностей. Правда, при построении первого частичного доказательства мы можем после выполнения замены $\mathfrak{l}$ на $\mathfrak{k}$ и импликативного добавления посылки $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ вставить только что указанные выводы для формул, получающихся вместо отличных от $\mathfrak{F}$ связанных с $\mathfrak{l}$ формул ε-равенства, — точно так же, как мы должны были включить выводы для формул, получающихся вместо связанных с $\mathfrak{l}$ критических формул, — и таким образом придем к некоторому нормированному доказательству формулы

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{E}_1,$$

где $\mathfrak{E}_1$ — формула, получающаяся из $\mathfrak{E}$ в результате замены. Однако используемые при этом формулы ε-равенства

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$$

или соответственно

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$$

и

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}),$$

которые, как мы знаем, имеют основной тип $\mathfrak{t}$, вовсе не обязаны принадлежать совокупности G[1]). Таким образом, вместо устраненной формулы $\mathfrak{F}$ могут появиться новые формулы ε-равенства с основным типом $\mathfrak{t}$, и, следовательно, число формул ε-равенства, связанных с основным типом $\mathfrak{t}$, в результате устранения формулы $\mathfrak{F}$ может и не уменьшиться.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы показать, что каждый такой шаг процедуры устранения, направленный на исключение какой-либо формулы ε-равенства с основным типом $\mathfrak{t}$, при подходящем выборе этой формулы непременно будет осуществлять некоторую редукцию нашей проблемы, так что после наперед оцениваемого числа шагов все формулы ε-равенства с рассматриваемым основным типом будут устранены, и тем самым число имеющихся основных типов формул ε-равенства ранга $\mathfrak{m}$ уменьшится.

С этой целью мы рассмотрим совокупность $\mathfrak{T}$ всех тех ε-термов, с которыми связаны какие-либо формулы из G, или, точнее, с которыми в заданном нормированном доказательстве (после

[1]) См. с. 100.

исключения имеющихся несобственных формул ε-равенства с основным типом $\mathfrak{t}$) связаны какие-либо формулы ε-равенства, имеющие основной тип $\mathfrak{t}$.

Эта совокупность $\mathfrak{T}$ определяет собой совокупность $\mathfrak{T}^*$ тех ε-термов, которые получаются из основного типа $\mathfrak{t}$ в результате замены каждого из его аргументов каким-либо из тех термов, которые заменяют тот же самый аргумент в каком-либо терме совокупности $\mathfrak{T}$. Согласно этому определению $\mathfrak{T}$ является частью $\mathfrak{T}^*$. Совокупность $\mathfrak{T}^*$ может быть явным образом построена по совокупности $\mathfrak{T}$. Мы можем также легко указать оценку для количества элементов в $\mathfrak{T}^*$. В самом деле, если $\mathfrak{n}$ — число аргументов основного типа $\mathfrak{t}$, а $\mathfrak{z}$ — число всех термов, которые по крайней мере в одном из термов совокупности $\mathfrak{T}$ заменяют некоторый аргумент у основного типа $\mathfrak{t}$ (эти термы мы будем кратко называть аргументными термами в $\mathfrak{T}$), то $\mathfrak{T}^*$, как легко убедиться, содержит не более $\mathfrak{z}^{\mathfrak{n}}$ элементов.

Теперь мы установим для термов из $\mathfrak{T}^*$ некоторую очередность. С этой целью мы выберем какую-либо очередность для аргументных термов в $\mathfrak{T}$, подчиненную единственному условию, что из двух ε-термов различной степени терм с меньшей степенью предшествует терму с большей степенью и что термы, не являющиеся ε-термами (термы нулевой степени), предшествуют всем ε-термам. Затем мы зафиксируем какую-нибудь очередность аргументов в $\mathfrak{t}$. Элементы совокупности $\mathfrak{T}^*$ мы упорядочим по возрастающей степени, а в остальном — лексикографически, т. е. так, чтобы для двух термов одинаковой степени предшествование определялось по аргументным термам, подставляемым в первый из аргументов основного типа $\mathfrak{t}$, в результате замещения которого эти термы становятся отличными друг от друга.

В нашей процедуре теперь в качестве терма $\mathfrak{l}$, замена которого будет производиться, мы будем брать тот из ε-термов, принадлежащих совокупности $\mathfrak{T}$, который в установленной нами очередности термов из $\mathfrak{T}^*$ является *самым последним*, т. е. не предшествует никакому другому. В соответствии с этим выбором терм $\mathfrak{l}$ среди ε-термов, с которыми связаны какие-либо формулы из G, будет иметь ранг, максимальный из числа имеющихся. Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — та из числа связанных с термом $\mathfrak{l}$ формул из G, которую мы должны устранять первой. Для устранения $\mathfrak{F}$ мы произведем замену $\mathfrak{l}$ посредством $\mathfrak{f}$ и импликативно добавим формулу $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Чтобы получить таким образом нормированное доказательство (первое «частичное доказательство»), нам может быть придется, как только что было установлено, ввести в качестве исходных новые, т. е. не содержащиеся в совокупности G, формулы ε-равенства с основным типом $\mathfrak{t}$. Присоединение такого рода вспомогательных формул приведет к тому, что после произведенного устранения формулы $\mathfrak{F}$ совокупность G_1 исполь-

зуемых теперь в качестве исходных формул ε-равенства с основным типом t не будет являться частью совокупности G и что тем самым и совокупность $\mathfrak{T}_1$ тех ε-термов, с которыми связаны какие-либо формулы из G_1, не обязательно будет являться частью совокупности $\mathfrak{T}$. Однако мы можем легко убедиться, что переход от $\mathfrak{T}$ к $\mathfrak{T}_1$ в определенном смысле слова является редукцией.

Для этого нужно отдельно рассмотреть два случая, которые мы различали[1]), когда принимали во внимание возможность того, что формула ε-равенства $\mathfrak{G}$ в результате замены терма $\mathfrak{l}$ перестанет быть формулой ε-равенства. Этим случаям соответствуют выводы двух типов, с помощью которых, вводя одну или соответственно две формулы ε-равенства в качестве исходных, мы получаем формулу, возникающую в результате этой замены и импликативного добавления посылки $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Эти два случая в терминах ε-термов, с которыми связаны формулы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и формулы ε-равенства, добавляемые в качестве вспомогательных, будут выглядеть следующим образом:

Первый случай. Если термы $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$, с которыми связана формула $\mathfrak{F}$, записать в виде $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$, то формула $\mathfrak{G}$ будет связана с термом $\mathfrak{l}$ и с некоторым термом $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$. В этом случае нам будет нужно ввести в качестве вспомогательной формулы только одну формулу ε-равенства, причем она будет связана с термами $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$. Значит, в этом случае к совокупности $\mathfrak{T}$ не добавляется ни одного нового терма. Между тем терм $\mathfrak{l}$ в этой совокупности уже встречаться не будет.

Второй случай. Если термы $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ записать в виде $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$, то формула $\mathfrak{G}$ будет связана с $\mathfrak{l}$ и с некоторым термом $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r})$. В этом случае нам нужно будет ввести в качестве вспомогательных формул две формулы ε-равенства, из которых одна связана с термами $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$, а другая — с термами $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$. Значит, по сравнению с $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{T}_1$ добавляется терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$, в то время как терм $\mathfrak{l}$ выбрасывается.

Но терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$ непременно принадлежит к $\mathfrak{T}^*$, потому что в этом терме все аргументы терма $\mathfrak{t}$, в том числе и унаследованные от терма $\mathfrak{a}$, замещены в точности так же, как и в терме $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r})$ из $\mathfrak{T}$, а терм $\mathfrak{a}$ стоит в терме $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$, также принадлежащем $\mathfrak{T}$, на месте того же самого аргумента, что и в терме $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$.

Кроме того, можно доказать, что терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$ в очередности термов из $\mathfrak{T}^*$ предшествует терму $\mathfrak{l}$. Действительно, терм $\mathfrak{l}$,

[1]) См. с. 104.

т. е. $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$, по определению в очередности элементов совокупности $\mathfrak{T}^*$ расположен позже содержащихся в $\mathfrak{T}$ термов $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r})$. Отсюда прежде всего вытекает, что терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$ имеет степень, не меньшую степени каждого из этих двух термов. Далее, если степень терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$ совпадает со степенью терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$, то терм $\mathfrak{a}$ в очередности аргументных термов из $\mathfrak{T}$ должен находиться раньше $\mathfrak{b}$; с другой стороны, если $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$ имеет более высокую степень, чем $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$, то $\mathfrak{b}$ должен иметь степень более высокую, чем $\mathfrak{a}$, и тем самым $\mathfrak{a}$ в очередности аргументных термов из $\mathfrak{T}$ должен находиться раньше $\mathfrak{b}$. Таким образом, терм $\mathfrak{a}$ в очередности аргументных термов из $\mathfrak{T}$ находится раньше терма $\mathfrak{b}$ и потому имеет степень, не превосходящую степени терма $\mathfrak{b}$. Поэтому степень терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$ тоже не превосходит степени терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r})$ и, значит, в очередности термов, входящих в совокупность $\mathfrak{T}^*$, терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$ располагается раньше терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r})$. Так как этот терм опять-таки располагается раньше $\mathfrak{l}$, то $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$ располагается раньше $\mathfrak{l}$, что и утверждалось.

Таким образом, разбор обоих этих случаев показывает, что в первом из них совокупность $\mathfrak{T}_1$ получается из $\mathfrak{T}$ исключением терма $\mathfrak{l}$. Во втором случае вместо терма $\mathfrak{l}$ из $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{T}_1$ дополнительно появляется некоторый терм из $\mathfrak{T}^*$, который в очередности элементов из $\mathfrak{T}^*$ располагается раньше $\mathfrak{l}$. Согласно сказанному, шаг нашей процедуры, устраняющий формулу $\mathfrak{F}$ из числа исходных, приводит к тому, что в очередности термов из $\mathfrak{T}^*$ уменьшается номер самого последнего из этих термов, принадлежавшего к $\mathfrak{T}$. Если максимальный номер терма, входящего в $\mathfrak{T}$, вначале был равен p, то не позже чем через p шагов нашей процедуры все формулы ε-равенства, связанные с основным типом $\mathfrak{t}$, окажутся исключенными.

Тем самым возможность совместного устранения критических формул и формул ε-равенства доказана.

в) Усиленный вариант первой ε-теоремы и нп-теоремы. Теперь мы извлечем следствие из полученных нами результатов. Если мы вспомним рассуждения, которые привели нас к созданию нашей обобщенной процедуры, то убедимся, что благодаря возможности совместного устранения из нормированных доказательств критических формул и формул ε-равенства *первая ε-теорема продолжает оставаться справедливой и в случае таких формализмов, которые включают в себя общую аксиому равенства* (J_2) *и ε-формулу.*

Поэтому имеет место следующая

Теорема. *Пусть F — формализм, получающийся из исчисления предикатов в результате добавления к нему*

1) *ε-символа и ε-формулы,*
2) *знака равенства и аксиом* (J_1) *и* (J_2),
3) *некоторого числа индивидных, функциональных и предикатных символов и ряда содержащих эти символы собственных аксиом* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ *без связанных переменных.*

Если средствами этого формализма выводима формула $\mathfrak{E}$, *не содержащая связанных переменных, то по любому ее выводу мы сможем построить такой вывод этой формулы, в котором будут отсутствовать связанные переменные, так что этот вывод будет укладываться в рамки элементарного исчисления со свободными переменными.*

Далее, если средствами формализма F выводима формула

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ *— все входящие в эту формулу связанные переменные, то по любому выводу этой формулы мы сможем получить, не прибегая к использованию связанных переменных, вывод некоторой дизъюнкции формул, имеющих вид*

$$\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_n),$$

где $t_1, \ldots, t_n$ *— некоторые не содержащие ε-символа термы.*

Кроме того, можно доказать, что в обоих этих случаях применение аксиомы (J_2) может быть заменено применением специальных формул равенства вида

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b))$$

и

$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)),$$

относящихся к предикатным и функциональным символам формализма F. В число этих формул, в частности, должна быть включена формула

(i) $$a = b \to (a = c \to b = c).$$

На самом деле этот дополнительный результат получается прямо из процедуры устранения, в которой указанная замена осуществляется по ходу дела.

Пусть теперь F_0 обозначает формализм, который получается из F в результате замены аксиомы (J_2), указанной выше, специальными формулами равенства. Тогда, согласно сказанному, всякая не содержащая переменных формула, выводимая средствами формализма F, будет выводима и средствами формализма F_0, и для всякой выводимой средствами F формулы

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$$

такой, что никакие связанные переменные, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$, в эту формулу не входят, мы можем указать некоторую выводимую средствами формализма F_0 дизъюнкцию, состоящую из членов вида $\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_n)$ с но содержащими ε-символа термами $t_1, \ldots, t_n$.

Но к формализму F_0 можно применить доказанную нами в гл. I нп-теорему[1]), и тогда получается, что для формализма F нп-теорема справедлива в следующей формулировке:

Пусть для элементарных формул без переменных формализма F имеется такое распределение истинностных значений, в силу которого формулы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, (J_1), *а также специальные аксиомы равенства для предикатных и функциональных символов из F верифицируемы. Тогда всякая выводимая средствами формализма F формула без переменных будет истинной, всякая выводимая средствами F формула, не содержащая никаких переменных, кроме свободных индивидных, будет верифицируемой и для всякой выводимой средствами F формулы вида*

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_m \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *суть все входящие в эту формулу переменные*[2]), *для любых фиксированных термов* $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_m$ *без переменных можно будет указать такие термы* $t_1, \ldots, t_n$ *без переменных, что формула* $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_m, t_1, \ldots, t_n)$ *будет истинной.*

Эту усиленную нп-теорему мы можем применить к рассмотренным в гл. I системам аксиом элементарной евклидовой и элементарной неевклидовой геометрии[3]). Здесь роль специальных аксиом равенства, которые нужно взять вместо аксиомы (J_2), играют формула (i), аксиомы равенства, сформулированные для предикатных символов Gr, Zw и $\equiv$ (из этих аксиом могут быть выведены остальные относящиеся к этим предикатным символам формулы равенства), и, кроме того, формулы равенства, относящиеся к вводимым при символьном решении функциональным знакам $\varphi(a, b, c, d)$ и $\xi(a, b, c, d)$, а в случае неевклидовой геометрии — еще и к $\chi(a, b, c)$.

Можно без труда показать, что при том распределении истинностных значений постоянных элементарных формул, которое мы рассмотрели в гл. I, все эти специальные аксиомы равенства являются верифицируемыми формулами, а потому наше доказательство непротиворечивости обеих этих систем аксиом геометрии

---

[1]) См. с. 59 и далее.
[2]) Сюда включается и тот случай, когда число m кванторов всеобщности в приставке равно нулю.
[3]) См. с. 61 и далее.

распространяется также и на те формализмы, которые получаются из них, если на место прежних аксиом равенства поставить аксиомы (J_1) и (J_2); при этом существенно обратить внимание на то, что в логическом формализме, лежащем здесь в основе нашего рассмотрения, допустимыми являются также ε-символ и ε-формула [1]).

Фигурирующее в этой усиленной нп-теореме предположение о верифицируемости специальных аксиом равенства выполняется, в частности, всегда, когда распределение значений для равенств, не содержащих переменных, — мы будем называть его выделенным распределением значений для равенства — таково, что при этом распределении равенство

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{t},$$

где $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ — термы без переменных, принимает значение «истина» или «ложь» в зависимости от того, совпадает или не совпадает значение $\mathfrak{s}$ со значением $\mathfrak{t}$.

Таким образом, для любого формализма F, получающегося из исчисления предикатов добавлением к нему ε-символа и ε-формулы, аксиом равенства (J_1) и (J_2), а также некоторых индивидных, функциональных и предикатных символов и формулируемых с помощью этих символов собственных аксиом $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$, не содержащих связанных переменных, утверждения нп-теоремы оказываются справедливыми при любом распределении значений элементарных формул без переменных, при котором аксиомы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ являются верифицируемыми формулами, а соответствующее распределение истинностных значений равенств является выделенным.

Впрочем, для того чтобы усмотреть этот факт, нам не обязательно вводить формализм F_0. Более того, для перехода от ε-теоремы к нп-теореме достаточно установить, что всякая формула, выводимая средствами формализма F без использования связанных переменных, является истинной. Но это может быть доказано рассуждением, совершенно аналогичным тому, с помощью которого в гл. I мы доказали нашу нп-теорему [2]), причем мы должны будем воспользоваться тем обстоятельством, что при рассматриваемом распределении значений элементарных формул без переменных аксиомы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_f$ предполагаются верифицируемыми и что каждая формула без переменных

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{t} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t})),$$

[1]) Для случая, когда в основе рассмотрения лежит одно только исчисление предикатов, наш результат не дает ничего нового, так как в этом случае мы имеем в своем распоряжении теорему из гл. VII т. I о возможности замены аксиомы равенства (J_2) собственными аксиомами.

[2]) См. с. 55—59.

получающаяся подстановкой в аксиому (J_2), при выделенном распределении истинностных значений для равенства является истинной, так как либо ее посылка является ложной (если $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ имеют различные значения), либо (если значение $\mathfrak{s}$ совпадает со значением $\mathfrak{t}$) истинностное значение $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ совпадает с истинностным значением $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$, и, тем самым, заключение $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ этой формулы является истинным.

Тем же самым способом с применением рассуждений, проведенных нами в § 1 данной главы [1]), можно показать, что утверждения нашей нп-теоремы остаются в силе и для формализма, который получается из рекурсивной арифметики в результате присоединения к ней формул и схем для кванторов, а также ε-символа и ε-формулы [2]), поскольку в качестве распределения значений для элементарных формул без переменных (в данном случае это будут одни только равенства) мы берем такое распределение, которое индуцируется выделенной оценкой истинностных значений для равенства и процедурой вычисления значений рекурсивных функций.

§ 3. Причины, препятствующие распространению процедуры устранения ε-символов на неограниченную схему индукции. Формализация принципа индукции с помощью второй формулы для ε-символа. Переход к первоначальному гильбертовскому подходу

Распространив доказанные нами ε-теорему и нп-теорему на общую аксиому равенства, мы в известной мере ликвидировали некоторое имевшееся до сих пор несовершенство наших результатов. И все же серьезным их недостатком остается то обстоятельство, что результаты, касающиеся арифметического формализма, относятся лишь к схеме индукции в ограниченном виде, а именно, — к схеме индукции, применяемой к формулам без связанных переменных [3]). Из-за этого, в частности, до сих пор не доказана непротиворечивость формализма системы (Z).

Возникает естественный вопрос о том, можно ли нашу процедуру устранения ε-символов, с помощью которой сначала была доказана первая ε-теорема, а затем, с использованием этой теоремы, и нп-теорема, модифицировать таким образом, чтобы видоизмененная процедура была применимой и при добавлении к формализму неограниченной схемы индукции. Если продумать этот

[1]) См. с. 75—79.

[2]) Заметим, что этот формализм, в отличие от формализма, рассмотренного выше на с. 79—80, включает в себя аксиому равенства (J_2).

[3]) См. с. 77.

вопрос детально, то оказывается, что перспектив в этом направлении не имеется.

Во-первых, при добавлении схемы индукции возникают трудности с выполнением одной из операций, подготавливающих процедуру устранения ε-символов. Именно, после возвратного переноса подстановок в исходные формулы нельзя будет произвести полное исключение свободных переменных, так как в результате этой операции схемы индукции теряют свой вид.

Напомним, что в результате операции возвратного переноса подстановок, а также необходимых для этой операции мероприятий [1]) схема индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)}$$

переходит в схему вида

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{a})\to\mathfrak{A}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{A}(t)},$$

где t — какой-либо терм, а $\mathfrak{a}$ — свободная переменная («выделенная» переменная модифицированной схемы).

При замене выделенной переменной каким-либо постоянным термом схема индукции в любом случае теряет свой вид. Поэтому исключение свободных переменных с сохранением структуры доказательства может быть произведено только в отношении формульных, но никак не индивидных переменных.

Само по себе это обстоятельство могло бы и не быть существенной помехой для процедуры устранения критических формул.

Но если мы попытаемся произвести устранение прежним способом, то обнаружим, что на пути к этому имеется два серьезных препятствия.

Первое из них связано с применением дедукционной теоремы. В нашей процедуре устранения мы использовали тот факт, что если из некоторых формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\tau$, получающихся в результате подстановки либо из собственных аксиом, либо из ε-формулы, при добавлении формулы $\mathfrak{P}$ можно средствами исчисления высказываний вывести некоторую формулу $\mathfrak{E}$, то из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\tau$ с помощью средств исчисления высказываний можно будет вывести формулу $\mathfrak{P}\to\mathfrak{E}$ [2]).

Если мы теперь попытаемся распространить эту теорему на тот случай, когда в дедуктивный аппарат формализма наряду

[1]) См. т. I, с. 328.
[2]) См. с. 40—47.

с исчислением высказываний включается и схема индукции, то нам придется наложить на формулу $\mathfrak{P}$ ограничение, потребовав, чтобы она не содержала выделенных переменных каких-либо схем индукции. Действительно, последовательность формул, получающихся из какой-либо схемы

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(t)}$$

в результате импликативного добавления посылки $\mathfrak{P}$, только тогда можно по общему рецепту, используя выводимость формулы

$$(\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}(a))\to(\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}(a'))$$

из формулы

$$\mathfrak{P}\to(\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a')),$$

дополнить до перехода, производимого при помощи схемы индукции, когда $\mathfrak{P}$ не содержит переменной a, ибо только при этом условии последовательность формул

$$\frac{\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}(0),\quad (\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}(a))\to(\mathfrak{P}\to(\mathfrak{A}(a'))}{\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}(t)}$$

имеет вид схемы индукции [1]).

При применении дедукционной теоремы в процессе устранения критических формул посылка $\mathfrak{B}(f)$ любой исключаемой на некотором шаге процедуры критической формулы становится одной из добавляемых исходных формул [2]). Совершенно не ясно, как в этом случае добиться того, чтобы ни одна из посылок критических формул — в том виде, как они будут выглядеть после выполнения операции возвратного переноса подстановок, — не содержала выделенной переменной какой-либо из схем индукции.

Вторая помеха заключается в том, что в результате производимых замен ε-термов какая-либо из схем индукции может поте-

[1]) Простые примеры показывают, что способ рассуждений, отвечающий схеме

$$\frac{\mathfrak{P}(a)\to\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{P}(a)\to(\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a'))}{\mathfrak{P}(a)\to\mathfrak{A}(t)},$$

нельзя считать имеющим общую применимость. Например, в качестве $\mathfrak{A}(c)$ можно взять формулу $c=0$, в качестве $\mathfrak{P}(c)$ — формулу $c\neq 0$, а в качестве t — терм $0'$.
[2]) См. с. 40—47.

рять свой вид. Если, например, схема индукции имеет вид

$$\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{e},\ 0) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{e},\ \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{e},\ \mathfrak{a}')}{\mathfrak{B}(\mathfrak{e},\ \mathfrak{t})},$$

где $\mathfrak{e}$ — некоторый ε-терм, не содержащий выделенной переменной $\mathfrak{a}$ этой схемы, и если $\mathfrak{e}$ заменить термом $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})$, в котором $\mathfrak{a}$ фигурирует в качестве составной части, то получающаяся при этом последовательность формул

$$\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\ 0) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a}')}{\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{t})}$$

теряет вид схемы индукции. В самом деле, ко всякой схеме индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

предъявляется требование, чтобы она содержала выделенную переменную $\mathfrak{a}$ только там, где эта переменная указана в качестве аргумента [1]).

Мы можем теперь попытаться избежать этих трудностей, связанных с видом схемы индукции, взяв в целях распространения первой ε-теоремы и нп-теоремы на арифметический формализм вместо схемы индукции аксиому индукции или какую-нибудь другую формализацию принципа полной индукции. Аксиома индукции, если мы при помощи ε-символа устраним из нее квантор всеобщности, как это полагается делать по нашей процедуре исключения кванторов, приводит к формуле, совершенно неудобной в обращении. Но поскольку арифметический формализм содержит аксиому равенства (J_2), вместо этой формулы можно взять другую, более простую формулу

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

в сочетании с аксиомой

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a.$$

Формула

$$a \neq 0 \to \delta(a') = a,$$

как мы знаем, с использованием схемы индукции выводится из

[1]) См. т. I, с. 325.

рекурсивного определения

$$\delta(0) = 0, \qquad \delta(a') = a$$

и формулы

$$a = b \to a' = b'.$$

Ее можно рассматривать как разрешенную форму аксиомы

$$a \neq 0 \to \exists x\,(x' = a).$$

В доказательстве обобщенной ε-теоремы или соответственно нп-теоремы она не вызывает никаких осложнений, так как содержит единственную свободную индивидную переменную a и при распределении значений для термов без переменных $\delta(\mathfrak{a})$, получающемся с учетом содержательного истолкования рекурсивного определения функции δ, она является верифицируемой формулой.

Тот факт, что в результате добавления в качестве аксиом двух формул

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

и

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

схема индукции действительно оказывается производным правилом [или соответственно аксиома индукции — выводимой формулой [1])], устанавливается следующим образом.

Нам нужно показать, что из двух формул

$$\mathfrak{A}(0) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a'),$$

первая из которых не содержит переменной a, с помощью формул

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

и

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

может быть выведена формула $\mathfrak{A}(a)$. Кроме четырех указанных формул, для вывода формулы $\mathfrak{A}(a)$ мы будем использовать только средства исчисления высказываний, ε-формулу и аксиому равенства (J_2), из которой, как мы уже знаем, выводятся формулы [2])

$$a = b \to (A(b) \to A(a))$$

и

$$a = b \to b = a.$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что формула $\mathfrak{A}(a)$ не содержит переменной x, так как в противном случае мы смогли бы удалить эту переменную в исходных формулах путем

[1]) Относительно вывода аксиомы индукции с помощью схемы индукции см. т. I, с. 327.

[2]) См. т. I, с. 212 и 214.

переименования, а затем снова ввести ее в заключительную формулу.

Мы начнем с формулы

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a.$$

Она может быть преобразована в формулу

$$a = 0 \vee \delta(a') = a,$$

откуда мы в результате подстановки получим формулу

(1) $$\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) = 0 \vee \delta(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x))' = \varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x).$$

Пользуясь формулами $\mathfrak{A}(0)$ и $a = b \to (A(b) \to A(a))$, мы получим формулу

(2) $$\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) = 0 \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x)).$$

Из формулы

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a',$$

произведя подстановку вместо переменной a, мы сначала получим формулу

$$A(\delta(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x))) \to \varepsilon_x A(x) \neq \delta(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x))'.$$

Из этой формулы, которая, если терм $\delta(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x))$ обозначить через $\mathfrak{d}$, сокращенно запишется в виде

$$A(\mathfrak{d}) \to \varepsilon_x A(x) \neq \mathfrak{d}',$$

совершив подстановку вместо формульной переменной, мы получим формулу

$$\neg \mathfrak{A}(\mathfrak{d}) \to \varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) \neq \mathfrak{d}',$$

а отсюда, произведя контрапозицию и воспользовавшись формулой

$$a = b \to b = a,$$

получим формулу

(3) $$\mathfrak{d}' = \varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{d}).$$

С другой стороны, из формулы $\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')$ подстановкой получается формула

(4) $$\mathfrak{A}(\mathfrak{d}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{d}'),$$

а в результате использования (J_2) получается формула

(5) $$\mathfrak{d}' = \varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{d}') \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x))).$$

Формулы (3), (4) и (5), взятые совместно друг с другом, по правилам исчисления высказываний дают формулу

$$\mathfrak{d}' = \varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x)),$$

т. е.

(6) $$\delta(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x))' = \varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x)).$$

Но из формул (1), (2) и (6) средствами исчисления высказываний получается формула

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_x \neg \mathfrak{A}(x)),$$

а эта последняя при помощи ε-формулы и с использованием средств исчисления высказываний [1]) дает нам искомую формулу $\mathfrak{A}(a)$.

Таким образом, формула

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a',$$

взятая в сочетании с ε-формулой и аксиомой

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a,$$

действительно дает формализацию принципа полной индукции. Формуле

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a',$$

взятой совместно с ε-формулой, содержательно соответствует принцип, гласящий, что «для любого числового предиката $\mathfrak{P}$, выполняющегося по крайней мере для одного числа, существует такое число, что для него предикат $\mathfrak{P}$ выполняется, а для его предшественника, если таковой существует (т. е. если это число отлично от нуля), предикат $\mathfrak{P}$ не выполняется».

Очевидно, что данный принцип является следствием принципа наименьшего числа. По сравнению с этим в содержательном отношении более выразительным принципом он обладает тем преимуществом, что структурно он более прост, так как может быть сформулирован без использования понятия «меньше» [2]).

---

[1]) См. с. 33.

[2]) Формально связь между этими двумя принципами отчетливее всего может быть обрисована при помощи той формализации, которая для принципа наименьшего числа дается с помощью μ-функции посредством формул

(μ_1) $$\exists x A(x) \to A(\mu_x A(x))$$

и

(μ_2) $$A(a) \to \mu_x A(x) \leqslant a$$

(см. т. I, с. 482). Первая из этих двух формул дедуктивно равна формуле

$$A(a) \to A(\mu_x A(x)),$$

а из второй с помощью формул

$$a' \neq a \quad \text{и} \quad \neg(a' < a)$$

получается формула

$$A(a) \to \mu_x A(x) \neq a'.$$

Благодаря указанной новой формализации принципа полной индукции наш подход к исключению связанных переменных при условии включения полной индукции становится совершенно аналогичным предыдущему. Теперь снова после исключения кванторов и возвратного переноса подстановок в исходные формулы можно провести исключение свободных переменных, и у нас опять получится некоторое «нормированное доказательство», в котором дедуктивная взаимосвязь формул будет основываться лишь на схемах заключения, на повторениях формул и переименованиях связанных переменных. Отличие от нормированных доказательств, рассматривавшихся до сих пор[1]), теперь будет заключаться в том, что в качестве исходных формул, содержащих ε-символ, помимо критических формул

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

и формул ε-равенства[2]) будут допускаться еще и такие формулы, которые получаются путем подстановки из формулы

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'\ ^{3}),$$

так что мы должны будем допустить в качестве критических формул второго рода исходные формулы вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{f}'.$$

Однако несмотря на это формальное сходство со случаями, рассмотренными ранее, у нас нет никаких перспектив распространения нашей процедуры исключения ε-символов на случай, рассматриваемый сейчас. Действительно, если бы нам удалось произвести соответствующее обобщение, то тем самым мы получили бы способ, который позволял бы исключить из вывода любой формулы, не содержащей связанных переменных, не только связанные переменные, но и применения схемы индукции. В самом деле, как было показано выше[4]), применение схемы индукции всегда может быть заменено соответствующими применениями ε-формулы, формулы $A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$, аксиомы равенства (J_2) и формулы $a \neq 0 \to \delta(a)' = a$. Если бы мы смогли устранить еще и связанные переменные, а значит, и те исходные формулы, которые содержат ε-символ, то тем самым применение схемы индукции было бы вообще сведено к надлежащему использованию формул (J_2) и $a \neq 0 \to \delta(a)' = a$. Но возможности такого

[1]) См. с. 40 и 93.
[2]) См. с. 92.
[3]) При этом мы опять разрешаем при подстановке вместо формульной переменной $A(a)$ переименовывать связанную переменную x (см. об этом с. 31).
[4]) См. с. 117 и далее.

рода устранения схемы индукции, разумеется, быть не может[1]).

Так как распространение первой ε-теоремы на арифметический формализм оказывается невозможным, то перед нами встает задача установления непротиворечивости арифметического формализма без использования этой теоремы.

Прежде всего, посмотрим, в какой мере мы можем воспользоваться здесь нашими прежними идеями. Формализм, с которым мы имеем дело, состоит из исчисления предикатов с добавлением к нему ε-символа и ε-формулы, а также системы аксиом (Z), в которой в качестве индивидного символа фигурирует один только символ 0, в качестве предикатного символа — один только знак равенства, а в качестве функциональных знаков — штрих-символ и символы для суммы и произведения. Аксиома индукции, как мы только что установили, может быть заменена формулами

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

[1]) В этом можно убедиться на простых примерах. Возьмем две аксиомы Пеано $a' \neq 0$ и $a' = b' \to a = b$. Из них с помощью элементарного исчисления со свободными переменными и схемы индукции можно вывести формулу $a' \neq a$. Теперь допустим, что из этого вывода можно так устранить применение схемы индукции, что вместо нее всякий раз будут применяться только формулы (J_2) и $a \neq 0 \to \delta(a)' = a$. Тогда мы получим вывод формулы $a' \neq a$ из указанных двух аксиом Пеано в рамках одного только элементарного исчисления со свободными переменными. Применение аксиомы равенства (J_2) в этом выводе мы могли бы заменить применением специальных аксиом равенства, и так как при этом в качестве предикатного символа выступал бы один только знак равенства, а в качестве функциональных знаков — штрих-символ и символ δ, то для замены аксиомы (J_2) было бы достаточно формул (J_1), (i), $a = b \to a' = b'$ и $a = b \to \delta(a) = \delta(b)$.

Тем самым из аксиом

$$a = a, \quad a = b \to (a = c \to b = c), \quad a = b \sim a' = b',$$
$$a' \neq a, \quad a = b \to \delta(a) = \delta(b), \quad a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

средствами элементарного исчисления со свободными переменными была бы выведена формула $a' \neq a$. Но тогда, добавив индивидный символ ω вместе с аксиомой

$$a = \omega \to a' = \omega,$$

из которой с помощью формулы $\omega = \omega$ выводится формула $\omega' = \omega$, мы получили бы противоречие, так что была бы выводима и формула $0' = 0$. Однако в том, что это не так, можно убедиться с помощью следующего распределения значений для равенств без переменных: равенство $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ будем считать истинным тогда, когда оба терма $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ содержат символ ω, а также тогда, когда $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ не содержат символа ω и совпадают либо непосредственно, либо после вычисления (обычным способом) встречающихся в этих термах значений функции δ; во всех остальных случаях равенство $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ будем считать ложным. При таком распределении все перечисленные аксиомы, в том числе и добавленная нами аксиома $a = \omega \to a' = \omega$, являются верифицируемыми, а поэтому всякая формула без переменных, выводимая из них средствами элементарного исчисления со свободными переменными, должна быть истинной. В то же самое время формула $0' = 0$ является ложной.

и

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a',$$

так что мы и возьмем их вместо нее в качестве исходных формул.

Для нашего доказательства непротиворечивости достаточно показать, что каждая выводимая формула без переменных при «естественном» распределении истинностных значений, складывающемся из выделенного распределения истинностных значений для равенства, рекурсивной процедуры вычисления постоянных сумм и произведений и из истолкования связок исчисления высказываний как истинностных функций, является истинной. Поэтому для нашего доказательства достаточно будет рассматривать только выводы формул без переменных.

К каждому такому выводу мы можем применить операции исключения кванторов, возвратного переноса подстановок в исходные формулы и исключения свободных переменных. Мы можем, далее, заменить применения аксиомы (J_2) применением специальных аксиом равенства вместе с допущением формул ε-равенства в качестве исходных. При этом будут использоваться те специальные аксиомы равенства, которые соответствуют содержащимся в нашем формализме предикатным символам [1]).

В итоге мы получим некоторое «нормированное доказательство». Под этим термином мы теперь будем понимать последовательность формул, обладающую следующими свойствами:

1. Каждая формула этой последовательности строится из символов $=$, 0, $'$, $+$, $\cdot$, δ, символов исчисления высказываний и ε-символа с соответствующими связанными переменными.

2. Каждая из ее формул является либо исходной формулой, либо повторением некоторой предшествующей ей формулы (возможно, объединенным с переименованием какого-либо числа связанных переменных), либо результирующей формулой какой-либо схемы заключения.

3. Каждая исходная формула или получается в результате подстановки либо из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, либо из некоторой собственной аксиомы

[1]) Из этих формул равенства соответствующие формулы для символов суммы и произведения выводятся, как мы знаем, из рекурсивных равенств для суммы и произведения и формул (J_1), (i) и $a=b \to a'=b'$ (см. т. I, с. 461). Тем не менее отсюда не следует, что эти формулы равенства являются излишними в качестве исходных формул, так как после замены схемы индукции формулами

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a \quad \text{и} \quad A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

мы имеем в своем распоряжении схему индукции только в качестве производного правила и всякий раз вывод этой схемы требует использования аксиомы равенства (J_2).

этого формализма, либо из одной из формул

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x)),$$

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a',$$

или же является формулой ε-равенства.

Формулы вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

и

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{f}',$$

получающиеся в результате подстановки из двух только что упомянутых формул, мы будем называть критическими формулами первого и соответственно второго рода, связанными с ε-термом $\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

Собственные аксиомы формализма (в том числе и специальные аксиомы равенства), а также тождественно истинные формулы исчисления высказываний обладают тем свойством, что любые получающиеся из них в результате подстановки формулы без переменных при естественном распределении истинностных значений являются истинными формулами. Отсюда привычным рассуждением мы получаем, что заключительная формула любого нормированного доказательства, если в ней не встречаются ε-символы, при естественном распределении истинностных значений тоже является истинной формулой.

Рассматриваемый нами подход нацелен на получение возможности преобразовывать любое нормированное доказательство формулы без переменных в такое нормированное доказательство той же самой формулы, которое уже не содержит ε-символов. Однако для нашей цели вовсе не обязательно производить исключение ε-символов так, чтобы получающееся при этом доказательство снова было нормированным; было бы вполне достаточно, если бы все встречающиеся в этом доказательстве ε-термы мы смогли так *заменить цифрами*, чтобы каждая исходная формула стала при этом истинной (при естественном распределении истинностных значений). Действительно, такие замены сохранили бы все схемы заключения и потому в итоге у нас получилась бы некоторая последовательность формул, каждая формула которой (а значит, и заключительная) являлась бы истинной.

Если мы теперь заметим, что все исходные формулы, получающиеся в результате подстановки из какой-либо собственной аксиомы или из тождественно истинной формулы исчисления высказываний, при любой замене ε-термов цифрами переходят в истинные формулы, то станет ясно, что задача искомого нами доказательства сводится к тому, чтобы для ε-термов, фигурирую-

щих в данном нормированном доказательстве, найти такие замены их цифрами, при которых все критические формулы первого и второго рода, равно как и формулы ε-равенства, перейдут в истинные формулы.

Учитывая это, Гильберт в первую очередь взялся за задачу исключения ε-символов [1]) задолго до того, как он придумал ведущий к ε-теореме общий метод устранения ε-символов. Рассмотрев сначала простые случаи нормированных доказательств, он указал метод, позволяющий находить для встречающихся в этих доказательствах ε-термов цифровые замены, обладающие нужными свойствами.

Этот метод в общих чертах дает подход к исключению ε-термов, и поначалу казалось, что этим методом удастся без принципиальных затруднений доказать непротиворечивость не только арифметического формализма, но даже и формализма анализа. Однако, когда были предприняты попытки решить эту задачу, неожиданно обнаружились значительные трудности, так что наиболее продвинутые реализации упомянутого гильбертовского подхода, восходящие к В. Аккерману и Дж. фон Нейману, по их результатам лишь несущественным образом превзошли нп-теорему, которая достаточно просто получается с помощью ε-теоремы.

Тем не менее имеет смысл рассмотреть этот подход более подробно, так как получаемый при этом подходе метод оказывается важным для целого ряда применений и так как пока еще остается открытым вопрос о возможности дальнейшего развития этого подхода.

§ 4. Первоначальный гильбертовский подход к проблеме исключения ε-символов и его дальнейшее развитие [2])

а) Простейшие частные случаи. Для того чтобы дать представление о гильбертовской процедуре замены, мы поначалу рассмотрим нормированные доказательства одного совсем простого типа. Именно, будем предполагать, что для любого из рассматриваемых нами нормированных доказательств может быть указан такой ε-терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, что все критические формулы первого рода этого доказательства связаны с этим термом и что других ε-термов в этом доказательстве нет.

---

[1]) См. т. I, с. 419—423. Применение приведенной на с. 419 обобщенной схемы индукции может быть сведено к двум применениям обычной схемы индукции.

[2]) Читатель, желающий познакомиться лишь с основными идеями этого гильбертовского подхода, может прочитать один только п. а) настоящего параграфа, а затем перейти либо к п. д), либо прямо к гл. III.

Мы будем также предполагать, что в рассматриваемом нами случае отсутствуют критические формулы второго рода и формулы ε-равенства.

Речь будет идти о том, чтобы в рассматриваемом доказательстве ε-терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ заменить какой-нибудь цифрой так, чтобы все критические формулы этого доказательства после замены оказались истинными. Рассматриваемые критические формулы имеют вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})).$$

При этом терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ не может входить в формулу $\mathfrak{A}(c)$, потому что в противном случае он был бы вложен в самого себя; но он может входить в $\mathfrak{k}$.

Сначала мы попробуем заменить терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой 0. В результате этой замены все критические формулы перейдут в формулы без переменных. Истинностное значение любой такой формулы вполне определяется нашим способом вычисления функциональных выражений, строящихся с помощью знаков $+$, $\cdot$, и δ, на основе выделенного распределения истинностных значений для равенства, а также нашей трактовки связок исчисления высказываний как истинностных функций.

Если в результате этой замены все критические формулы данного доказательства получат значение «истина», то поставленная цель уже будет достигнута. В противном случае мы возьмем первую из тех критических формул, которые принимают значение «ложь». После замены ε-терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой 0 эта формула будет иметь вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{l}) \to \mathfrak{A}(0),$$

где $\mathfrak{l}$ — некоторый терм без переменных. Пусть теперь $\mathfrak{z}$ — цифра, получающаяся в результате вычисления терма $\mathfrak{l}$. Согласно нашему распределению истинностных значений для формул без переменных, $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ имеет то же самое значение, что и $\mathfrak{A}(\mathfrak{l})$; тем самым формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{A}(0)$$

принимает значение «ложь». Но это означает, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ — истинная формула, а $\mathfrak{A}(0)$ — ложная.

Теперь произведем новую замену, а именно, заменим терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой $\mathfrak{z}$. Тогда каждая из рассматриваемых критических формул перейдет в формулу вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{z}),$$

не содержащую переменных. Но эта формула всегда будет истин-

ной, так как истинно ее заключение $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$. Итак, замена терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой $\mathfrak{z}$ дает желаемый результат.

Таким образом, не позже чем через два шага мы получаем замену, в результате которой все критические формулы становятся истинными: либо желаемый эффект дает уже замена терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой 0 (мы будем называть эту замену 0-з а м е н о й), либо с помощью 0-замены мы найдем некоторый *пример* такой цифры $\mathfrak{z}$, что формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ будет истинной и тогда замена терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ этой цифрой (мы будем называть эту замену э к з е м п л я р н о й) будет заменой с нужными свойствами.

Не представляет никакого труда модифицировать этот способ так, чтобы он вел нас к цели и в том случае, когда имеются также и критические формулы второго рода.

Любая связанная с ε-термом $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ критическая формула второго рода имеет вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{t}',$$

где терм $\mathfrak{t}$ может содержать в себе и терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$. При 0-замене такая формула всегда превратится в истинную. Значит, если в результате 0-замены все критические формулы первого рода окажутся истинными, то поставленная нами цель уже будет достигнута. В противном случае, как известно, для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ найдется экземплярная замена, т. е. замена такой цифрой $\mathfrak{z}$, что формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ является истинной. Но эта замена может и не перевести все критические формулы второго рода в истинные. Действительно, при этой замене произвольная формула второго рода перейдет в формулу вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{z} \neq \mathfrak{s}',$$

которая имеет то же самое истинностное значение, что и формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{z} \neq \mathfrak{r}',$$

где $\mathfrak{r}$ — цифра, получающаяся в результате вычисления терма без переменных $\mathfrak{s}$. Эта формула может на самом деле оказаться ложной: например, в том случае, когда $\mathfrak{z}$ совпадает с $\mathfrak{r}'$, а формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ является истинной. Но тогда $\mathfrak{r}$ является цифрой, меньшей $\mathfrak{z}$ и такой, что формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ является истинной.

Эту возможность мы теперь с самого начала исключим следующим приемом. После того как будет найден соответствующий пример $\mathfrak{z}$, мы найдем истинностные значения формул

$$\mathfrak{A}(0),\ \mathfrak{A}(0'),\ \mathfrak{A}(0''),\ \ldots,\ \mathfrak{A}(\mathfrak{z}).$$

Относительно первой из них мы уже знаем, что она является

ложной, относительно последней, — что она является истинной. Пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ — первая формула в этой последовательности, являющаяся истинной. Тогда мы произведем еще одну замену, замещая терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой $\mathfrak{m}$. В результате этой замены все критические формулы первого рода станут истинными, так как $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ является истинной формулой. Но и критические формулы второго рода тоже окажутся истинными. Действительно, если бы одна из наших критических формул второго рода перешла в ложную формулу, то, согласно замеченному выше, мы нашли бы некоторую цифру $\mathfrak{r}$, меньшую $\mathfrak{m}$, для которой формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ являлась бы истинной, что противоречило бы выбору $\mathfrak{m}$. Таким образом, в результате замены терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой $\mathfrak{m}$ все критические формулы становятся истинными.

Итак, мы приходим к следующей альтернативе: либо желаемый результат нам дает уже сама 0-замена, либо мы оказываемся в состоянии построить пример некоторой отличной от нуля цифры $\mathfrak{z}$ такой, что формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ является истинной (экземплярная замена). Если мы затем среди тех цифр $\mathfrak{n}$ из ряда от 0 до $\mathfrak{z}$, для которых $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ является истинной формулой, возьмем наименьшую и обозначим ее буквой $\mathfrak{m}$, то замена терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой $\mathfrak{m}$ переведет все критические формулы рассматриваемого доказательства в истинные. Эту замену мы для краткости будем называть м и н и м а л ь н о й.

Тем самым для рассматриваемого частного типа нормированных доказательств найден искомый способ исключения ε-термов.

Теперь возникает задача развить этот метод так, чтобы его можно было применить к любому нормированному доказательству нашего арифметического формализма.

Прежде всего мы сделаем одно общее упрощающее замечание. Оно состоит в том, что нам всегда будет достаточно позаботиться лишь о тех ε-термах рассматриваемого нормированного доказательства, которые фигурируют в каких-либо критических формулах или формулах ε-равенства. Действительно, если мы для этих термов укажем такие цифровые замены, в результате которых критические формулы и формулы ε-равенства перейдут в истинные формулы, то оставшиеся ε-термы мы сможем заменить цифрой 0 и при этом сохранятся схемы заключения и повторения формул.

Поэтому можно вообще отвлечься от рассмотрения нормированных доказательств как таковых, и наша задача попросту сводится к тому, чтобы для любой конкретно заданной совокупности критических формул и формул ε-равенства, принадлежащих рассматриваемому нами арифметическому формализму, найти такие замены для фигурирующих в них ε-термов, в результате которых эти формулы стали бы истинными. Набор таких замен

мы будем называть **резольвентой** данной рассматриваемой совокупности критических формул и формул ε-равенства.

В разобранном частном случае мы имели дело только с критическими формулами, причем предполагалось, что в этих формулах встречается всего лишь один ε-терм. Из рассмотрения этого случая мы теперь извлечем способ, позволяющий строить резольвенты и для таких совокупностей критических формул, что все входящие в них формулы имеют степень 1 и ранг 1, и ни один из тех ε-термов, с которыми связаны эти критические формулы, не содержит вложенных в него ε-термов или подчиненных ему ε-выражений.

В самом деле, если при указанном условии

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

или соответственно

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{f}'$$

является одной из данных критических формул, то в формулу $\mathfrak{A}(c)$ не могут входить никакие ε-термы, и поэтому любой ε-терм, отличный от терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, может встречаться в рассматриваемой формуле только внутри терма $\mathfrak{f}$.

Отсюда вытекает, что ни одна критическая формула не потеряет своего вида, если мы заменим в них цифрой 0 те ε-термы, с которыми не связаны никакие критические формулы. Этот прием сводит дело к рассмотрению случая, когда, кроме ε-термов, с которыми связаны какие-либо критические формулы, — мы обозначим их буквами $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$, зафиксировав какой-либо порядок для них, — у нас вообще не будет встречаться никаких других ε-термов.

Мы должны теперь найти подходящие замены для термов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$. Набор, состоящий из каких-либо цифровых замен для термов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$, мы будем называть **общей заменой**.

Мы начнем с общей замены, состоящей из 0-замен для каждого из термов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$. Если в результате этой 0-замены все критические формулы станут истинными, то она и будет искомой резольвентой. В противном случае для каких-либо термов из числа $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$ мы найдем экземплярные замены, а по ним определятся и минимальные. Мы построим теперь новую общую замену, взяв вместо 0-замены минимальную для тех термов $\mathfrak{e}_\mathfrak{r}$, для которых она будет найдена. Тогда все связанные с этими ε-термами критические формулы станут истинными. Если окажется, что и все остальные критические формулы стали истинными, то мы получим искомую резольвенту. В противном случае мы найдем минимальные замены для некоторых других термов из числа $\mathfrak{e}_1, \ldots$

$\ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$ и затем построим новую общую замену, взяв найденные минимальные замены вместо 0-замен.

Мы можем продолжать двигаться таким образом и дальше. Но этот процесс не позже чем после $\mathfrak{p}$-кратного изменения общей замены должен будет оборваться, так как на каждом шаге не менее чем для одного терма, входящего в список $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$, определяется минимальная замена и, найденная однажды, минимальная замена остается без изменений. Поэтому, если резольвента еще не была получена раньше, то после $\mathfrak{p}$-й общей замены для каждого из термов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$ будет найдена минимальная замена, а в результате $(\mathfrak{p}+1)$-й общей замены, в которой будут использоваться все эти минимальные замены, все критические формулы станут истинными.

Таким образом, следуя этому точно сформулированному предписанию, мы не позже чем через $\mathfrak{p}+1$ шаг придем к построению искомой резольвенты.

Замечание. Отметим, что переход от экземплярной замены к минимальной необходим только для тех термов $\mathfrak{e}_\mathfrak{r}$, с которыми связаны какие-либо критические формулы второго рода; для остальных термов мы можем сохранить их экземплярные замены.

б) Подготовка к рассмотрению общего случая. Рассмотренный нами случай является пока очень частным, и мы теперь должны будем освободиться от ограничений, наложенных на степени и на ранги критических формул. Кроме того, нам нужно будет принять во внимание еще и тот факт, что в совокупности формул, для которой будет строиться резольвента, наряду с критическими формулами могут также содержаться и формулы ε-равенства.

В порядке подготовки к этому нам будет целесообразно составить более подробно представление о том, как на нашей процедуре замены могут сказаться вложенность и подчиненность ε-термов. Дело в том, что при рассмотрении самого общего случая некоторые существенные осложнения возникают именно из-за того, что свойство цифры $\mathfrak{z}$ быть экземплярной или минимальной заменой для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, вообще говоря, зависит от замен тех ε-термов, которые входят в $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ или соответственно в $\mathfrak{A}(0)$, $\mathfrak{A}(0'), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$. Наличие же таких ε-термов обусловливается степенью и рангом терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, т. е. имеющими место в этом терме случаями вложений и подчинений.

С отношениями вложенности и подчиненности мы уже познакомились раньше[1]). Здесь мы отметим, в частности, следующие факты:

---

[1]) См. с. 43—44.

1. Каждый ε-терм, вложенный в терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, входит в формулу $\mathfrak{A}(c)$, причем таким образом, что переменная c им не охватывается. И обратно, каждый входящий таким образом в формулу $\mathfrak{A}(c)$ ε-терм вложен в терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и тем самым имеет более низкую степень, чем этот последний.

2. Каждому ε-выражению, подчиненному ε-терму $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, в формуле $\mathfrak{A}(c)$ соответствует некоторый ε-терм, охватывающий переменную c и получающийся из этого выражения в результате замены переменной $\mathfrak{x}$ переменной c. И обратно, каждому входящему в формулу $\mathfrak{A}(c)$ и охватывающему переменную c ε-терму соответствует некоторое ε-выражение, которое подчинено терму $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и из которого этот ε-терм получается в результате замены переменной $\mathfrak{x}$ переменной c; таким образом, этот ε-терм имеет ранг, меньший ранга терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

Согласно утверждению 1 мы можем заключить, что в случае ε-терма, имеющего ранг, равный единице, ситуация, связанная с заменами, является достаточно простой. Действительно, в этом случае истинностное значение, получающееся для формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$, где $\mathfrak{z}$ — некоторая цифра, при какой-либо общей замене, зависит только от замен тех ε-термов, которые вложены в терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$. Таким образом, хотя экземплярная или минимальная замена для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и может перестать быть таковой, тем не менее это может случиться только тогда, когда будет найдена некоторая экземплярная замена для некоторого вложенного в $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ ε-терма (т. е. для терма, имеющего степень, меньшую степени терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$). Если, в частности, степень терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ равна единице, то найденная для этого терма экземплярная (соответственно минимальная) замена как таковая является окончательной.

На этом пути мы получаем некоторый спуск, который, как мы увидим позже [1]), в том случае, когда имеются только критические формулы ранга 1, позволяет достаточно простым способом получить (после наперед оцениваемого числа общих замен) некоторую резольвенту.

Однако прежде чем проводить это рассуждение, будет полезно еще более детально познакомиться с тем, как мы предполагаем организовать нашу процедуру замены в случае критических формул высоких рангов, потому что рассмотрение критических формул, имеющих ранг, больший единицы, показывает, что наша процедура замены в ее нынешнем виде является неудовлетворительной. Мы сталкиваемся в ней со следующими трудностями.

Если терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ имеет ранг, не меньший двух, то, согласно утверждению 2, переменная c находится в формуле $\mathfrak{A}(c)$ внутри

[1]) См. п, в), с. 140—146,

некоторого ε-терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c, \mathfrak{v})$, т. е. $\mathfrak{A}(c)$ имеет вид $\mathfrak{K}(c, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c, \mathfrak{v}))$ [1]). Поэтому любая связанная с ε-термом $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ критическая формула первого рода имеет вид

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{f}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, \mathfrak{v})) \rightarrow \mathfrak{K}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \mathfrak{v})).$$

Допустим теперь, что, отправляясь от этой формулы, мы нашли — при помощи некоторой общей замены, при которой эта формула становится ложной, — какую-либо экземплярную замену для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, т. е. указали соответствующую цифру $\mathfrak{z}$, получающуюся из $\mathfrak{f}$ на основе этих замен и значений некоторых постоянных термов. Тогда замена, которую при этой общей замене получит терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$, должна быть получена по некоторой замене для терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$. Действительно, в противном случае мы никак не смогли бы заключить, что в результате рассматриваемой общей замены формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ оказывается истинной. Между тем терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ с самого начала мог и не встречаться в заданной нам совокупности формул.

Таким образом, мы не можем обойтись заменами для ε-термов, непосредственно фигурирующих в заданной нам совокупности формул. Тем не менее можно без труда указать путь, позволяющий удовлетворить перечисленным выше требованиям: выход будет заключаться в том, что необходимые замены для ε-термов мы будем осуществлять в виде некоторой *производимой изнутри шагообразной редукции*.

Рассмотрим следующий пример, поясняющий наш замысел. Пусть нам требуется найти замену для ε-терма

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x, \varepsilon_y\mathfrak{B}(y, \varepsilon_z\mathfrak{C}(z)+3)\cdot 5, 2\cdot 1),$$

в который не входят никакие ε-символы, кроме явно указанных. Пусть в нем также не встречается в качестве составной части ни один терм, кроме указанных явно. Тогда наша замена «изнутри» будет происходить следующим образом. Сначала заменяется своим значением, т. е. цифрой $0''$, постоянный терм $2\cdot 1$. Затем в качестве замены для $\varepsilon_z\mathfrak{C}(z)$ берется некоторая цифра $\mathfrak{c}$ и вместо появившегося на месте терма $\varepsilon_z\mathfrak{C}(z)+3$ терма $\mathfrak{c}+3$ пишется его значение, т. е. цифра $\mathfrak{c}'''$. Затем в качестве замены для терма $\varepsilon_y\mathfrak{B}(y, \mathfrak{c}''')$ берется некоторая цифра $\mathfrak{b}$ и вместо терма $\mathfrak{b}\cdot 5$ пишется его значение в виде некоторой цифры $\mathfrak{n}$. И наконец, берется некоторая цифра, являющаяся заменой для терма $\varepsilon_x\mathfrak{A}(x, \mathfrak{n}, 0'')$.

[1]) Запись $\mathfrak{K}(c, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c, \mathfrak{v}))$ следует понимать таким образом, что переменная c, возможно (но не обязательно), встречается также и вне выражения $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c, \mathfrak{v})$.

Идея такого способа заключается в том, что сначала назначается замена для некоторого ε-терма, а после этого каждый терм, фигурирующий в качестве составной части и не являющийся цифрой с самого начала, превращается в некоторую цифру предшествующими заменами и вычислениями значений постоянных термов. Тем самым непосредственные замены производятся только для таких ε-термов, которые не содержат никаких других термов, кроме цифр.

Этот метод приносит, с одной стороны, некоторые упрощения, а с другой стороны, известные осложнения: упрощения — постольку, поскольку при этом непосредственные замены нужно производить только для ε-термов степени 1; осложнения — постольку, поскольку совокупность ε-термов степени 1, для которой нужно брать непосредственные замены, не вполне определяется ε-термами, имеющимися в заданном списке формул, а зависит еще и от выбранных замен.

Этим разложением замен в последовательные редукции «изнутри» мы, прежде всего, добиваемся того, что гильбертовский метод нахождения экземплярных замен по критическим формулам оказывается применимым и в случае критических формул ранга выше 1.

Но, кроме сказанного, этим способом мы добиваемся еще и того, что в результате этих замен все формулы ε-равенства тоже переходят в истинные формулы. Действительно, если мы имеем формулу

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}),$$

где термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ при некоторой общей замене получают одно и то же значение, то в процессе нашей последовательной замены изнутри термы $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ должны будут получить замены, представляющие собой одну и ту же цифру.

Несмотря на все преимущества, которыми обладает метод замен путем последовательных редукций, он все-таки не вполне пригоден для рассмотрения критических формул ранга выше 1.

Как мы уже отмечали, всякая критическая формула ранга выше 1 имеет вид

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{f}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, \mathfrak{v})) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \mathfrak{v})).$$

Здесь $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ представляет собой тот ε-терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{K}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}))$, с которым связана указанная формула. Нахождение какой-либо экземплярной замены $\mathfrak{z}$ для этого терма с помощью данной критической формулы происходит тогда, когда при некоторой общей замене эта формула оказывается истинной, а $\mathfrak{f}$ получает значение $\mathfrak{z}$ либо непосредственно, либо в силу этой замены.

[Наша процедура последовательной редукции обеспечивает совпадение при рассматриваемой общей замене истинностного значения посылки

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{f}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, \mathfrak{v}))$$

с истинностным значением, получаемым при этой общей замене формулой $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$, т. е.

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})).]$$

При этом ситуацию несколько осложняет то обстоятельство, что истинностное значение формулы

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v}))$$

зависит от замены, которой в рамках рассматриваемой общей замены подвергается терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$. Таким образом, экземплярная замена для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, содержащего подчиненное ему ε-выражение $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$, как таковая (т. е. в качестве экземплярной замены) зависит от замены для терма $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$, получающегося из упомянутого подчиненного ε-выражения $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$ в результате замены переменной $\mathfrak{x}$ цифрой $\mathfrak{z}$. Этот терм $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ — в котором цифра $\mathfrak{z}$, быть может, определяется только общей заменой — имеет тот же самый ранг, что и ε-выражение $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$. Следовательно, этот ранг меньше ранга терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

То обстоятельство, что экземплярные замены для термов ранга $\mathfrak{f}+1$ зависят от замен для термов ранга $\mathfrak{f}$ и ниже, ведет к некоторому спуску, которым можно воспользоваться для того, чтобы показать, что процедура нахождения экземплярных замен в конце концов обрывается.

Чтобы придать этому спуску по рангу обозримый характер, мы будем стремиться составлять замены ε-термов ранга выше 1 из замен для термов ранга 1 способом, аналогичным тому, с помощью которого, используя процедуру последовательных редукций, мы строили замены для термов более высоких степеней из замен для термов первой степени.

Чтобы объяснить, как следует пользоваться этой аналогией, мы сопоставим друг с другом ряд простых примеров. Возьмем, с одной стороны, терм

$$\varepsilon_x\mathfrak{K}(x, \varepsilon_y\mathfrak{L}(y)),$$

имеющий степень 2, и, с другой стороны, терм

$$\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y)),$$

имеющий ранг 2.

Будем считать, что в обоих термах не встречается никаких других ε-символов, кроме явно указанных. Замена для первого

из этих термов производится, согласно процедуре последовательной редукции, таким образом, что сначала $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$ заменяется некоторой цифрой $\mathfrak{z}$, а после этого $\varepsilon_x\mathfrak{K}(x, \mathfrak{z})$ тоже заменяется некоторой цифрой. При этом роль цифры $\mathfrak{z}$ является двойственной: с одной стороны, она помещается в наш ε-терм степени 2 на место терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$, вследствие чего этот ε-терм переходит в ε-терм степени 1; с другой стороны, всюду, где терм $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$ выступает в роли самого себя (т. е. не в качестве составной части какого-либо объемлющего его ε-терма), эта цифра играет роль значения терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$. Таким образом, цифра $\mathfrak{z}$ в одном случае играет роль терма, а в другом — значения терма.

Если мы теперь будем искать аналогичный способ выполнения замены для терма $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y))$, то цифровой замене $\mathfrak{z}$ для терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$ при этом может не соответствовать никакая цифровая замена для $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y)$, что видно хотя бы уже из того, что, когда $\mathfrak{z}$ является цифрой, выражение $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{z})$ термом вообще не является. Более того, в качестве замены для терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y)$ нужно обязательно брать такое выражение, которое содержит связываемую извне переменную x. Следующую отправную точку для правильного выбора замены дает наше стремление сохранить двойную роль замены: терму $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$ «самому по себе» (из первого примера), т. е. рассматриваемому независимо от его вложенности в какой-либо другой терм, в данном случае соответствует терм вида $\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, y)$, где $\mathfrak{a}$ — терм. Если замена для выражения $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y)$ должна определять значение любого из термов $\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, y)$, то это значит, что она должна давать значение этого терма всякий раз, когда известно значение терма $\mathfrak{a}$; это значит, что каждой конкретной цифре $\mathfrak{z}$ она должна соотносить (в виде цифры) определенное значение терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{z}, y)$.

С учетом этого требования мы приходим к следующей процедуре функциональной замены: сначала, исходя из выражения $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y)$, мы строим некоторую именную форму $\varepsilon_y\mathfrak{L}(c, y)$, заменяя в упомянутом выражении связанную переменную x какой-либо свободной индивидной переменной, например c. Затем для этой именной формы мы указываем замену в виде функционального знака $\mathfrak{f}$ с аргументом c вместе с инструкцией, однозначно соотносящей каждой конкретной цифре $\mathfrak{z}$ значение (в виде цифры) $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$.

Каждый вводимый таким образом функциональный знак мы будем мыслить себе добавленным к лежащему в основе нашего рассмотрения арифметическому формализму. Так как для этих функциональных знаков не формулируется никаких специальных аксиом и так как, с другой стороны, задается инструкция по вычислению построенных с участием этих знаков термов без переменных, то их добавление может быть произведено безо всяких других изменений в структуре нашего доказательства.

Что же касается задания значений вводимых функций, то мы всюду будем обходиться такими функциями, которые имеют отличные от нуля значения только при конечном числе значений (соответственно систем значений) аргументов и для которых поэтому пробег значений может быть задан путем прямого перечисления этих значений (соответственно систем значений) аргументов и отвечающих им значений функций.

Внесение функциональной замены $\mathfrak{f}(c)$, заданной для некоторой именной формы $\varepsilon_y\mathfrak{L}(c, y)$, заключается в том, что вместо каждого вхождения ε-терма или ε-выражения $\varepsilon_v\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, \mathfrak{v})$, у которого связанная переменная $\mathfrak{v}$ не входит в терм $\mathfrak{a}$, подставляется соответствующее выражение $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. В частности, из терма $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y))$ таким образом получается терм $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(x))$, ранг которого равен единице; а замена терма $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y))$ после этого заключается в том, что сначала для $\varepsilon_y\mathfrak{L}(c, y)$ задается функциональная замена $\mathfrak{f}(c)$, а затем для терма $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(x))$ берется замена в виде некоторой цифры.

Любая критическая формула

$$\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{f}, y)) \rightarrow \mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{e}, y)),$$

связанная с термом $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x, y))$, который мы для краткости обозначим буквой $\mathfrak{e}$, после замены терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(c, y)$ через $\mathfrak{f}(c)$ переходит в критическую формулу

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(\mathfrak{f})) \rightarrow \mathfrak{K}(\mathfrak{f}(\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(x)))),$$

ранг которой равен единице.

Описанную процедуру функциональной замены можно без особого труда применять в ситуациях с произвольными подчинениями ε-термов. Разве что в качестве функций, используемых для замен, придется брать и функции с несколькими аргументами. Пусть, например, нам задан терм

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x, \varepsilon_y\mathfrak{B}(x, y, \varepsilon_z\mathfrak{C}(z), \varepsilon_z\mathfrak{F}(y, z), \varepsilon_z\mathfrak{G}(x, y, z)))$$

ранга 3, и пусть в этот терм не входят никакие другие ε-термы, кроме явно указанных. Тогда применение процедуры функциональной замены произойдет следующим образом. Сначала мы составляем список ε-выражений ранга 1:

$$\varepsilon_z\mathfrak{C}(z), \quad \varepsilon_z\mathfrak{F}(y, z), \quad \varepsilon_z\mathfrak{G}(x, y, z).$$

Берем для $\varepsilon_z\mathfrak{C}(z)$ замену в виде некоторой цифры $\mathfrak{c}$; для двух других ε-выражений мы образуем какие-нибудь соответствующие им именные формы, например

$$\varepsilon_z\mathfrak{F}(a, z) \quad \text{и} \quad \varepsilon_z\mathfrak{G}(a, b, z)$$

и берем для них функциональные замены $\mathfrak{f}(a)$ и $\mathfrak{g}(a, b)$. В

результате внесения этих замен заданный ε-терм перейдет в ε-тер

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x,\ \varepsilon_y\mathfrak{B}(x,\ y,\ c,\ \mathfrak{f}(y),\ \mathfrak{g}(x,\ y))),$$

имеющий ранг 2. Теперь для входящего в этот терм ε-выражени ранга 1

$$\varepsilon_y\mathfrak{B}(x,\ y,\ c,\ \mathfrak{f}(y),\ \mathfrak{g}(x,\ y)),$$

содержащего связанную извне переменную x, мы образуем именную форму

$$\varepsilon_y\mathfrak{B}(a,\ y,\ c,\ \mathfrak{f}(y),\ \mathfrak{g}(a,\ y))$$

и берем для нее замену $\mathfrak{h}(a)$; внесение этой замены в предыдущий ε-терм ранга 2 теперь дает нам терм ранга 1

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x,\ \mathfrak{h}(x)),$$

для которого мы затем берем замену в виде некоторой цифры.

Такой способ производства замен дает желаемое обобщение метода последовательных редукций, распространяющееся теперь не только на случаи вложения, но и на случаи подчинения ε-термов.

Но в этой процедуре кроется и еще одно неблагоприятное обстоятельство, которое ведет нас к очередной — последней — модификации операции замены. В самом деле, при комбинированном применении нескольких функциональных замен мы встречаемся с трудностью, заключающейся в том, что один и тот же ε-терм может происходить от различных именных форм и что вследствие этого замена такого терма оказывается неоднозначной. Например, если в рамках некоторой общей замены мы, с одной стороны, должны будем произвести функциональную замену $\mathfrak{f}(c)$ для именной формы $\varepsilon_x\mathfrak{B}(0,\ c,\ x)$, а с другой стороны — функциональную замену $\mathfrak{g}(a)$ для именной формы $\varepsilon_x\mathfrak{B}(a,\ 0',\ x)$, то для терма $\varepsilon_x\mathfrak{B}(0,\ 0',\ x)$ получаются две замены $\mathfrak{f}(0')$ и $\mathfrak{g}(0)$, которые согласуются между собой только тогда, когда значение $\mathfrak{f}$ для аргумента $0'$ совпадает со значением $\mathfrak{g}$ для аргумента 0. Поэтому между значениями различных функций, входящих в состав какой-либо замены, могут иметь место определенные соотношения в виде равенств, выражающих те или иные условия, и эти равенства должны нами учитываться при подборе соответствующих функций.

Это очень неприятное осложнение, и мы будем стремиться освободиться от него. Мы могли бы найти здесь следующий выход: в случае, подобном упомянутому, вместо двух именных форм $\varepsilon_x\mathfrak{B}(0,\ c,\ x)$ и $\varepsilon_x\mathfrak{B}(a,\ 0',\ x)$ ввести одну именную форму с двумя переменными $\varepsilon_x\mathfrak{B}(a,\ c,\ x)$, а затем взять для нее функциональную замену $\mathfrak{h}(a,\ c)$. И все же мы сможем указать некоторую единую процедуру, если обратим внимание на то, что случай, когда один и тот же терм получается из двух различных именных форм, может встретиться лишь тогда, когда обе эти именные формы имеют один и тот же основной тип [1]). В самом деле, каждый терм, получающийся из какой-либо именной формы в результате подстановки некоторых термов вместо одной или нескольких входящих в нее переменных, имеет тот же самый основной тип, что и данная именная форма.

Поэтому указанную трудность можно устранить с самого начала, прослеживая происхождение именных форм от их основных типов и беря функциональные замены для этих последних. Любой основной тип как терм с определенным образом обозначенными аргументными переменными может играть роль именной формы, и заменяющая функция для такого терма может быть задана в виде функционального знака, аргументы которого совпадают с аргументными переменными этого основного типа. В соответствии с этим функциональная замена для терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(a,\ y)$, если этот терм имеет вид

$$\varepsilon_y\mathfrak{L}_1(\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}(a),\ \mathfrak{t}(a),\ y),$$

а $\varepsilon_y\mathfrak{L}_1(b,\ c,\ d,\ y)$ является основным типом ранга 1, производится, например, следующим образом. Для основного типа $\varepsilon_y\mathfrak{L}_1(b,\ c,\ d,\ y)$ берется функциональная замена $\mathfrak{f}(b,\ c,\ d)$, а в качестве замены для терма $\varepsilon_y\mathfrak{L}(a,\ y)$ берется терм $\mathfrak{f}(\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}(a),\ \mathfrak{t}(a))$; тогда заменой для $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,\ y)$ будет выражение $\mathfrak{f}(\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}(x),\ \mathfrak{t}(x))$.

Впрочем, в этой процедуре построенная вначале именная форма является излишней. От любого ε-выражения мы можем перейти прямо к «его» основному типу. В самом деле, не только любому ε-терму, но и любому ε-выражению, не являющемуся термом, можно однозначно — с точностью до обозначений аргументных переменных — сопоставить некоторый основной тип, а именно — общий основной тип всех тех ε-термов, которые получаются из данного ε-выражения, если связываемые извне переменные (т. е. связанные переменные, которые не относятся ни к какому входящему в это ε-выражение ε-символу) заменить свободными переменными. В этом смысле можно говорить об основном типе любого ε-выражения вообще.

Если теперь основные типы указанным образом использовать для функциональных замен, то, чтобы быть последовательными, мы должны *вообще все замены ε-термов и ε-выражений производить с помощью замен для основных типов* так, чтобы каждая непосредственная замена производилась только для основных типов ранга 1. То, что это всегда может быть сделано, устанавливается следующим образом.

1. Пусть $\mathfrak{e}$ — произвольный ε-терм без свободных переменных (именно такие ε-термы и фигурируют в критических формулах и формулах ε-равенства). Пусть для основного типа терма $\mathfrak{e}$ —

[1]) См. с. 84.

в зависимости от того, имеет этот основной тип какие-нибудь аргументы или нет, — задана функциональная или цифровая замена, и пусть для каждого вложенного в $\mathfrak{e}$ ε-терма задана некоторая замена в виде цифры. Тогда, пользуясь определением значений термов без переменных, мы найдем некоторую цифру, являющуюся значением $\mathfrak{e}$.

Действительно, если основной тип терма $\mathfrak{e}$ аргументов не имеет, то этим основным типом является сам терм $\mathfrak{e}$, а его цифровой заменой будет цифровая замена для $\mathfrak{e}$. Если же этот основной тип имеет аргументы, то при выполнении указанных условий для аргументов этого основного типа, фигурирующих в терме $\mathfrak{e}$, мы получаем (либо непосредственно, либо в результате соответствующих вычислений) некоторые цифровые значения, а функциональная замена для основного типа терма $\mathfrak{e}$ сопоставляет этим значениям аргументов некоторую новую цифру, являющуюся значением этой функции.

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольный основной тип ранга $\mathfrak{f}+1$. Если задать функциональные замены для основных типов ранга 1, подчиненных терму $\mathfrak{g}$, и если задать функциональную или цифровую замену для основного типа ранга $\mathfrak{f}$, получающегося из $\mathfrak{g}$ в результате внесения этих функциональных замен, то для $\mathfrak{g}$ получится функциональная или цифровая замена.

Тот факт, что из терма $\mathfrak{g}$ ранга $\mathfrak{f}+1$ в результате внесения функциональных замен для основных типов ε-выражений ранга 1 действительно получается ε-терм ранга $\mathfrak{f}$, легко следует из определения ранга[1]); а то, что этот ε-терм ранга $\mathfrak{f}$ снова является основным типом, вытекает из того, что в результате указанных функциональных замен заполнение (имеющихся в данном случае) аргументных мест терма $\mathfrak{g}$ переменными остается прежним и что в результате этого никаких новых термов в качестве составных частей не добавляется.

Теперь утверждение 1 дает нам метод, позволяющий сводить нахождение цифровых замен для ε-термов любого заданного списка формул к заменам для основных типов, а утверждение 2 дает метод, позволяющий сводить замены для основных типов ранга выше 1 к заменам для основных типов ранга 1.

При этом способе получения цифровых замен для ε-термов необходимо отличать *«общую замену» как совокупность непосредственных цифровых и функциональных замен для основных типов* от совокупности *«эффективных» замен* для входящих в заданные формулы ε-термов. По общей замене можно определить и эффективные замены, но, вообще говоря, не наоборот. Основные типы, для которых мы должны указать замены, — это, во-первых, основные типы всех ε-выражений ранга 1, входящих в заданный список

[1]) См. с. 46.

формул, и, во-вторых, основные типы ранга 1, получающиеся из основных типов ε-выражений более высоких рангов в результате внесения функциональных замен для подчиненных им ε-выражений, причем эти внесения производятся последовательно шаг за шагом «изнутри», так что всегда замену получают только основные типы ранга 1.

В качестве примера рассмотрим построение замены для терма

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\varepsilon_y[\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))')+\varepsilon_z((4\cdot 5)\cdot(x+y)=z\cdot z)= x+\varepsilon_z(z+z\neq z)\cdot y']=0'''\}.$$

Этот терм, который мы обозначим через $\mathfrak{e}$, имеет основной тип

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\varepsilon_y[\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))')+ \varepsilon_z(a\cdot(x+y)=z\cdot z)=x+b\cdot y']=c\},$$

который мы обозначим через $\mathfrak{g}$. Цифровая замена для $\mathfrak{e}$, согласно нашей процедуре, определяется по функциональной замене $\mathfrak{g}_1(a, b, c)$ для основного типа $\mathfrak{g}$ и цифровой замене $\mathfrak{z}$ для терма $\varepsilon_z(z+z\neq z)$. Именно по $\mathfrak{g}_1(a, b, c)$ и $\mathfrak{z}$ мы получаем для терма $\mathfrak{e}$ замену

$$\mathfrak{g}_1(4\cdot 5, \mathfrak{z}, 0'''),$$

для которой можно получить конкретное цифровое значение, опираясь на определение значений для функции $\mathfrak{g}_1(a, b, c)$. Однако замена $\mathfrak{g}_1(a, b, c)$ для основного типа $\mathfrak{g}$, ранг которого равен трем, выбирается не непосредственно, а с помощью замен для основных типов ранга 1. С этой целью мы составим полный список ε-выражений ранга 1, входящих в терм $\mathfrak{g}$:

$$\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))'),\quad \varepsilon_z(a\cdot(x+y)=z\cdot z).$$

Эти выражения имеют основные типы

$$\varepsilon_z(c=(z\cdot(z\cdot z))')\ \text{ и }\ \varepsilon_z(c=z\cdot z).$$

Если мы возьмем для них функциональные замены $\mathfrak{f}_1(c)$ и $\mathfrak{f}_2(c)$ и внесем эти замены в $\mathfrak{g}$, то получится основный тип ранга 2

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\varepsilon_y[\mathfrak{f}_1(y\cdot y)+\mathfrak{f}_2(a\cdot(x+y))=x+b\cdot y']=c\}.$$

Входящее в него ε-выражение ранга 1

$$\varepsilon_y[\mathfrak{f}_1(y\cdot y)+\mathfrak{f}_2(a\cdot(x+y))=x+b\cdot y']$$

имеет основной тип

$$\varepsilon_y[\mathfrak{f}_1(y\cdot y)+\mathfrak{f}_2(a\cdot(c+y))=d+b\cdot y'].$$

Если для этого основного типа взять функциональную замену

$\mathfrak{h}(a, b, c, d)$ и внести ее в $\mathfrak{g}$, то получится основной тип

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\mathfrak{h}(a, b, x, x)=c\}.$$

Теперь для этого основного типа ранга 1 мы возьмем некоторую функциональную замену, которая и будет заменой $\mathfrak{g}_1(a, b, c)$ для основного типа $\mathfrak{g}$.

При этом способе нахождения цифровой замены для терма $\mathfrak{e}$ пяти различным входящим в $\mathfrak{e}$ ε-выражениям (считая и сам терм $\mathfrak{e}$) соответствуют пять непосредственных замен для основных типов, а именно для основных типов трех явно входящих в $\mathfrak{e}$ ε-выражений ранга 1

$$\varepsilon_y(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))'),\quad \varepsilon_z((4\cdot 5)\cdot(x+y)=z\cdot z)$$

и

$$\varepsilon_z(z+z\neq z),$$

а также для тех основных типов ранга 1, которые получаются из основных типов двух ε-выражений ранга 3 в результате последовательного внесения функциональных замен для подчиненных им ε-выражений.

Относительно выбора символов для функций замены мы условимся, что для замены различных основных типов всегда будут браться различные функциональные знаки (в том числе и тогда, когда пробеги значений функций замены совпадают). Эта мера имеет своей целью предохранить нас от возникновения в результате символьного внесения функций замены осложняющих дело совпадений между ε-термами, совпадений того же рода, что и те, которых мы хотели избежать путем введения основных типов.

Что же касается применяемых при этом функциональных знаков, то для любого списка формул можно с самого начала, независимо от выбора заменяющих функций заготовить некоторую последовательность знаков. Целесообразно использовать функциональные знаки с индексами [1]), быть может даже с двойными. Мы надеемся всякий раз добиться на этот счет соответствующих соглашений, не оговаривая этого специально.

в) Реализации гильбертовского подхода в случае ε-термов ранга 1. Теперь мы имеем метод производства замен, приспособленный к потребностям общего случая нашей задачи [2]) построения резольвенты для произвольно заданного списка критических формул и формул ε-равенства. Посмотрим, как будет выглядеть поиск резольвенты с помощью этого нового метода.

Прежде всего, заметим, что в методе замен при помощи основных типов, так же как и в процедуре последовательных замен,

[1]) Эти числа должны рассматриваться не как термы, а как составные части самих функциональных знаков.

[2]) См. с. 128.

после выполнения каждой общей замены формулы ε-равенства становятся истинными. Именно, в случае формулы ε-равенства

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\to\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})=\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$

для обоих термов $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$, которые, как мы знаем, имеют один и тот же основной тип, замены находятся по функциональной замене для этого основного типа и по цифровым заменам, получаемым вложенными ε-термами, если таковые имеются. Поэтому, если при некоторой общей замене термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ получат одно и то же значение, то термы $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ и $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ при этой замене получат одну и ту же цифровую замену, и тем самым заключение этой формулы ε-равенства превратится в истинную формулу; если же $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ при какой-либо общей замене получат различные значения, то тогда посылка этой импликации окажется ложной формулой. Значит, наша формула ε-равенства в любом случае перейдет в истинную формулу. Учитывая это обстоятельство, мы должны будем при поиске резольвенты обращать внимание на одни лишь критические формулы.

Чтобы рассмотреть метод последовательного построения общих замен, мы сначала обсудим случай, когда в заданной последовательности формул встречаются только ε-термы ранга 1. В этом случае общая замена, в соответствии с нашим новым способом замены, будет задаваться назначением замен для основных типов фигурирующих в данном рассмотрении ε-термов. Мы всегда будем начинать с такой замены, у которой для каждого основного типа без аргументов выбирается 0-замена, а для каждого основного типа, имеющего аргументы, в качестве замены берется функция с этими аргументами, которая всюду принимает значение 0. Эту общую замену мы для краткости будем называть общей заменой со сплошными 0-значениями.

Нахождение какой-нибудь экземплярной замены по критической формуле

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f})\to\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

и использование этой замены происходит следующим образом. Пусть $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ — основной тип терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, и пусть в терме $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ в качестве значений аргументов $a_1, \ldots, a_n$ фигурируют термы $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$. Тогда наша критическая формула запишется в виде

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)\to\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n), \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n).$$

Если по этой формуле мы ищем какую-либо экземплярную замену, то это означает, что общая замена, при которой терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ был заменен цифрой 0, переводит данную критическую формулу

в формулу, являющуюся ложной [1]). Пусть $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ суть цифры, являющиеся значениями термов $\mathfrak{f}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ при этой общей замене. Тогда функция замены, которая при этой общей замене берется для основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$, на наборе значений аргументов $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ принимает значение 0; при этом формула $\mathfrak{B}(0, \mathfrak{d}_1 \ldots, \mathfrak{d}_n)$ должна быть ложной, а формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ — истинной. Цифра $\mathfrak{d}$ дает нам экземплярную замену в том смысле, что при всякой общей замене, при которой термы $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ получают значения $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ и при которой функция замены для основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ сопоставляет набору $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ значений аргументов цифру $\mathfrak{d}$ в качестве значения, рассматриваемая критическая формула переходит в формулу, являющуюся истинной. В том же самом смысле число $\mathfrak{m}$ — наименьшее из тех чисел $\mathfrak{r}$, принадлежащих ряду от $0'$ до $\mathfrak{d}$, для которых формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{r}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ является истинной, представляет собой минимальную замену. Использование найденной минимальной замены $\mathfrak{m}$ состоит в том, что в любой новой общей замене вместо функции замены для основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ мы берем некоторую новую функцию, которая по своему пробегу значений отличается от прежней функции лишь тем, что набору $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ значений аргументов она ставит в соответствие вместо значения 0 значение $\mathfrak{m}$. Это значение впоследствии сохраняется во всех дальнейших общих заменах.

С помощью одной общей замены могут быть найдены, вообще говоря, многие экземплярные замены. По экземплярным заменам могут быть найдены минимальные, а затем эти минимальные замены все вместе используются для построения очередной общей замены. Но если не считать этого использования экземплярных или минимальных замен, мы не подвергаем общие замены никаким дальнейшим изменениям. Поэтому и каждая функция замены модифицируется только для конечного числа значений (или соответственно систем значений) ее аргументов; и так как мы исходим из общей замены со сплошными 0-значениями, то, согласно сказанному, у нас будут встречаться только такие функции замены, которые будут иметь отличное от 0 значение лишь для конечного числа систем значений их аргументов.

Переходя от экземплярных замен к минимальным, мы добиваемся того, что при каждой общей замене все критические формулы второго рода переходят в истинные формулы. В самом деле, критическая формула второго рода, связанная с каким-нибудь ε-термом, имеющим основной тип $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$, выглядит

[1]) См. с. 125—126.

следующим образом:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \neq \mathfrak{l}'.$$

Эта формула при любой общей замене, при которой терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ имеет эффективную замену 0, переходит в истинную формулу; но если этот терм при какой-либо общей замене имеет другую эффективную замену $\mathfrak{r}$ и если при этой общей замене термы $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ получают значения $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$, то в этой общей замене функция замены для основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ должна быть определена так, чтобы для значений аргументов $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ она принимала в качестве значения цифру $\mathfrak{r}$. Но тогда, согласно нашему способу определения общих замен, цифра $\mathfrak{r}$ должна быть минимальной заменой для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ и тем самым формула

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n) \to \mathfrak{r} \neq \mathfrak{d}',$$

в которую при данной общей замене переходит рассматриваемая критическая формула второго рода (здесь $\mathfrak{d}$ обозначает цифровое значение, которое в этой ситуации принимает терм $\mathfrak{l}$), должна быть истинной формулой.

Так как теперь при каждой общей замене все формулы ε-равенства и все критические формулы второго рода из заданного списка оказываются истинными, то в результате любой общей замены, еще не являющейся резольвентой, по крайней мере одна критическая формула первого рода должна оказаться ложной и потому в результате этой общей замены должна найтись по крайней мере одна экземплярная замена, на основе которой будет строиться очередная общая замена.

Теперь мы убедимся, что процесс последовательного построения общих замен после некоторого, заранее оцениваемого числа шагов оборвется и, значит, приведет нас к некоторой резольвенте. Для этого заметим следующее:

1. Изменение функции замены какого-либо основного типа может заключаться лишь в том, что одной или нескольким системам значений аргументов, которым первоначально в качестве значения функции была сопоставлена цифра 0, в новой замене сопоставляется цифра, отличная от 0. Следовательно, значение функции, отличное от 0, при всех изменениях сохраняется и в дальнейшем могут добавляться только значения, отличные от 0. Аналогично, модификация какой-либо замены для основного типа без аргументов может заключаться только в том, что вместо 0-замены появится замена некоторой цифрой, отличной от 0.

2. Эффективная замена для какого-либо ε-терма $\mathfrak{r}$, определенная по некоторой общей замене [1]), при очередной общей замене может измениться только тогда, когда либо эта эффективная замена является 0-заменой, на смену которой приходит какая-нибудь другая цифровая замена, либо когда эта эффективная замена изменяется для какого-нибудь вложенного в $\mathfrak{r}$ ε-терма.

Это утверждение вытекает из предшествующего утверждения 1, если дополнительно учесть, что эффективная замена для $\mathfrak{r}$ определяется по замене для основного типа терма $\mathfrak{r}$ и, быть может, по эффективным заменам для каких-либо вложенных в $\mathfrak{r}$ ε-термов.

В качестве следствия из утверждения 2 получается утверждение

3. Если какая-либо общая замена отличается от другой, предшествующей ей общей замены теми или иными эффективными заменами, то для тех ε-термов наименьшей степени, эффективные замены которых подвергаются каким-либо изменениям, эти изменения заключаются в замещении 0-замены какой-нибудь другой цифровой заменой.

Это можно уточнить следующим образом. Условимся сопоставлять каждой общей замене в качестве ее индекса последовательность, состоящую из $\mathfrak{p}$ чисел, такую, что $\mathfrak{p}$ представляет собой максимум степеней ε-термов, встречающихся в заданном списке формул, а $\mathfrak{q}$-й член последовательности (при $\mathfrak{q}=1, \ldots, \mathfrak{p}$) указывает число тех ε-термов степени $\mathfrak{q}$, для которых при данной общей замене эффективная замена отлична от 0-замены. Пусть даны два различных индекса. Более высоким из них мы будем называть тот индекс, у которого на первом слева различающем месте стоит большее число. Тогда утверждению 3 можно будет придать следующий вид:

4. Из двух общих замен, которым соответствуют различные эффективные замены, более поздняя имеет более высокий индекс.

5. Пусть $n_{\mathfrak{q}}$ ($\mathfrak{q}=1, \ldots, \mathfrak{p}$) обозначает число различных ε-термов степени $\mathfrak{q}$, входящих в рассматриваемый нами список формул. Тогда число различных возможных индексов общих замен равно

$$(n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_{\mathfrak{p}}+1).$$

В самом деле, каково бы ни было $\mathfrak{q}$, число ε-термов $\mathfrak{q}$-й степени, имеющих отличную от 0-замены эффективную замену, равняется одному из чисел $0, \ldots, n_{\mathfrak{q}}$.

6. При переходе от одной общей замены к другой, происходящем ввиду отыскания одной или нескольких новых экземплярных замен, эффективная замена модифицируется по крайней мере для одного из ε-термов.

[1]) См. с. 138.

В самом деле, пусть $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, t_1, \ldots, t_n)$ — ε-терм, с которым связана одна из критических формул, дающих какую-либо экземплярную замену при построении новой общей замены по старой. Пусть, далее, $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ — основной тип этого ε-терма, и пусть $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ — значения термов $t_1, \ldots, t_n$ в момент построения этой экземплярной замены,

Если при новой общей замене термы $t_1, \ldots, t_n$ снова получают значения $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$, то в эффективной замене терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, t_1, \ldots$ $\ldots, t_n)$ используется новое значение функции, которое функция замены для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ принимает — в соответствии с модификацией функциональной замены для этого основного типа, — когда ее аргументы принимают значения $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$. Следовательно, в этом случае при переходе к новой общей замене модифицируется эффективная замена для терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, t_1, \ldots, t_n)$.

Если же при новой общей замене по крайней мере один из термов $t_1, \ldots, t_n$ получает значение, отличное от предыдущего, то должна быть модифицирована эффективная замена хотя бы для одного из встречающихся в этих термах ε-термов.

В силу утверждений 4 и 6 это означает, что при нашем способе построения общих замен за каждой общей заменой, не являющейся резольвентой, следует очередная общая замена, имеющая более высокий индекс, откуда в силу утверждения 5 мы получаем, что не позже чем через $(n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_{\mathfrak{p}}+1)$ шагов очередная общая замена окажется резольвентой.

Таким образом мы получим способ построения резольвенты в том случае, когда все ε-термы, фигурирующие в заданном списке формул, имеют ранг 1. По оценке, найденной для числа требующихся при этом общих замен, мы можем получить еще одну, более простую (хотя и менее точную) оценку, которая имеет то преимущество, что зависит только от общего количества

$$n = n_1+\ldots+n_{\mathfrak{p}}$$

ε-термов, встречающихся в заданном нам списке формул.

Так как для любого числа $\mathfrak{z}$ выполняется соотношение

$$\mathfrak{z}+1 \leqslant 2^{\mathfrak{z}},$$

то

$$\begin{aligned}(n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_{\mathfrak{p}}+1) &\leqslant 2^{n_1}\cdot\ldots\cdot 2^{n_{\mathfrak{p}}}\\ &\leqslant 2^{n_1+\ldots+n_{\mathfrak{p}}}\\ &\leqslant 2^n.\end{aligned}$$

Таким образом, если n — число различных, встречающихся в задан-

ном списке формул ε-термов, то количество необходимых общих замен не будет превосходить числа 2^n.

Для получения этого результата метод функциональных замен с помощью основных типов нами не использовался, хотя в данном случае он и способствовал бы упрощению рассмотрения. Существенное применение этот метод найдет лишь в общем случае, когда нам придется иметь дело с ε-термами и критическими формулами, имеющими ранг выше единицы.

г) Построение последовательности общих замен в общем случае. Для подготовки к рассмотрению общего случая мы будем стремиться описать такой процесс построения последовательности общих замен, который будет обрываться только тогда, когда очередная полученная общая замена оказывается резольвентой. С учетом нашего способа построения замен, при котором замена для основных типов ранга выше 1 сводится к заменам для основных типов ранга 1, естественно требовать, чтобы получение общих замен происходило рекурсивным образом, т. е. так, чтобы рассмотрение совокупности формул, у которой максимальный ранг ε-термов равен $\mathfrak{m}+1$, всегда сводилось к рассмотрению совокупности, имеющей максимальный ранг ε-термов, не превосходящий $\mathfrak{m}$.

Максимальный ранг ε-термов, встречающихся в данном списке критических формул и формул ε-равенства, мы будем для краткости называть рангом этого списка. В том случае, когда ранг списка равен 1, мы уже располагаем способом, позволяющим, исходя из общей замены со сплошными 0-значениями, строить новые общие замены до тех пор, пока не будет получена резольвента. При этом возникают только такие функции замены, значения которых отличаются от 0 лишь для конечного числа систем значений их аргументов [1]). Чтобы от этого, уже известного нам способа перейти к способу, дающему аналогичный результат для списков формул, имеющих ранг, больший 1, мы воспользуемся тем, что если для заданного списка формул, имеющего произвольный ранг, выбрать замены для основных типов встречающихся в нем ε-выражений ранга 1 и если эти замены (с использованием символов, выбранных для функций замены) символьно внести в критические формулы и формулы ε-равенства ранга выше 1, то эти формулы снова перейдут в формулы того же самого типа, причем ранг их понизится на единицу.

В самом деле, стабильность вида критических формул и формул ε-равенства вытекает из того, что при заменах для основных типов их аргументы (если таковые имеются) сохраняются, и из того, что между наличием ε-выражений в некотором ε-терме $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, с одной стороны, и в соответствующей формуле $\mathfrak{A}(c)$, с другой, имеется определенная, рассмотренная нами ранее связь [1]). А то обстоятельство, что ранг ε-термов ранга 2 и выше в результате внесения замен для основных типов ранга 1 понижается на единицу, легко усматривается из определения ранга [2]).

[1]) См. с. 141—142, 149—150.

Таким образом, если ранг заданного списка формул равен $\mathfrak{m}+1$, то по этим критическим формулам и формулам ε-равенства, имеющим ранг выше 1, в результате символьного внесения замен для основных типов ранга 1 мы получим некоторый список критических формул и формул ε-равенства, имеющих ранг, не превосходящий $\mathfrak{m}$.

Теперь допустим, что нам известен способ, позволяющий для любого списка формул ранга $\mathfrak{r}$, исходя из общей замены со сплошными 0-значениями, строить новые общие замены до тех пор, пока не будет построена резольвента. Располагая таким способом, мы получим интересующую нас процедуру для списков формул $\mathfrak{R}$ ранга $\mathfrak{m}+1$ следующим образом.

Сначала мы берем для основных типов ранга 1 замену со сплошными 0-значениями. Эту замену мы символьно вносим в критические формулы и формулы ε-равенства ранга выше 1. В результате этого мы получаем некоторый список формул $\mathfrak{R}_1$, имеющий ранг $\mathfrak{m}$. Теперь к этому списку мы применяем процедуру построения последовательности общих замен. Каждая общая замена для основных типов списка $\mathfrak{R}_1$ вместе с заменами для основных типов ранга 1 списка $\mathfrak{R}$ дает нам некоторую общую замену для $\mathfrak{R}$. Действительно, для каждого основного типа ранга 2 или выше эта замена получается из замены для соответствующего основного типа в $\mathfrak{R}_1$, который получен из исходного основного типа в результате внесения замен для подчиненных ему ε-выражений. Так мы приходим к некоторой последовательности общих замен

$$E_{1,1},\quad E_{1,2},\quad \ldots$$

для списка $\mathfrak{R}$. Возможно, что эта последовательность замен оборвется. Однако это случится лишь в том случае, если в процессе построения общих замен для списка $\mathfrak{R}_1$ мы дойдем до резольвенты. Если при этом соответствующая замена для $\mathfrak{R}$ тоже окажется резольвентой, то на этом вся процедура заканчивается. Если же этого не произойдет, то по крайней мере одна критическая формула, принадлежащая списку $\mathfrak{R}$, при соответствующей общей замене $E_{1,\mathfrak{f}_1}$ должна будет превратиться в ложную формулу, причем эта критическая формула будет формулой ранга 1, потому что общая замена $E_{1,\mathfrak{f}_1}$ получается из некоторой резольвенты для списка $\mathfrak{R}_1$ и, значит, в результате этой замены критические формулы, имеющие ранг выше 1, превратятся в истинные формулы.

[1]) См. утверждения 1 и 2 на с. 130.
[2]) См. с. 46.

С другой стороны, ни одна критическая формула второго рода, имеющая ранг 1, не может оказаться ложной, потому что замены для основных типов ранга 1 являются заменами со сплошными 0-значениями. Таким образом, в результате общей замены $E_{1,\,\mathfrak{f}_1}$ по крайней мере одна критическая формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

первого рода превратится в ложную формулу. При вычислении значений этой формулы, вообще говоря, необходимо пользоваться заменами для основных типов ранга 2 и выше. Но так как сама эта критическая формула является формулой ранга 1, то эти замены сказываются лишь на вычислении значений некоторых ε-термов, входящих в формулу $\mathfrak{A}(c)$. Следовательно, как и в случае, когда имеются только ε-термы ранга 1, по каждой критической формуле ранга 1, становящейся при общей замене $E_{1,\,\mathfrak{f}_1}$ ложной, мы получаем некоторую экземплярную, а затем по ней и минимальную замену. Эту минимальную замену мы потом сможем использовать для построения новой замены для основного типа того ε-терма, с которым связана рассматриваемая формула.

Мы построим теперь новые замены для основных типов ранга 1, изменив замены со сплошными 0-значениями теми цифровыми и функциональными значениями, которые получаются из найденных минимальных замен. Эти измененные замены мы затем внесем в критические формулы и формулы ε-равенства ранга выше 1 и в результате по этим формулам получим список формул $\mathfrak{R}_2$, имеющий ранг $\mathfrak{m}$. К $\mathfrak{R}_2$ можно будет снова применить процедуру построения последовательности общих замен, и всякая полученная таким образом общая замена для $\mathfrak{R}_2$ дает нам вместе с заменами для основных типов ранга 1 некоторую общую замену для списка формул $\mathfrak{R}$. Итак, мы получаем некоторую последовательность общих замен для $\mathfrak{R}$:

$$E_{2,1},\quad E_{2,2},\quad \ldots$$

Эта последовательность может оборваться только тогда, когда мы получим резольвенту для списка $\mathfrak{R}_2$. Если соответствующая общая замена окажется резольвентой для $\mathfrak{R}$, то выполнение всей нашей процедуры заканчивается. В противном случае в результате рассматриваемой общей замены $F_{2,\,\mathfrak{f}_2}$ хота бы одна критическая формула ранга 1 станет ложной, причем эта формула будет критической формулой первого рода. Действительно, в случае критической формулы второго рода

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{f}'$$

терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ в результате этой общей замены получит либо

значение 0, либо такое цифровое значение, которое представляет собой минимальную замену [либо для самого терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, если он является основным типом, либо — в противном случае — для терма, в который переходит терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ после внесения вместо встречающихся в нем аргументов его основного типа значений, получающихся из этой общей замены]. Тем самым любая критическая формула второго рода в результате этой общей замены перейдет в истинную формулу. Поэтому снова по крайней мере одна критическая формула первого рода, имеющая ранг 1, в результате этой общей замены должна будет стать ложной формулой, и, значит, мы получим одну или несколько экземплярных замен, а по ним — минимальные замены, которые для замен основных типов ранга 1 дадут новые отличные от 0 цифровые значения и значения функций.

Поставив эти новые цифровые значения и значения функций на место прежних 0-значений, мы получим новые замены для основных типов ранга 1. В результате внесения этих замен в критические формулы и формулы ε-равенства ранга выше 1 мы получим по этим формулам некоторый список формул $\mathfrak{R}_3$, имеющий ранг $\mathfrak{m}$. К нему можно снова применить процедуру построения последовательности общих замен. Каждая из получаемых при этом общих замен для $\mathfrak{R}_3$ дает некоторую замену для $\mathfrak{R}$, и мы получаем таким образом последовательность общих замен для $\mathfrak{R}$

$$E_{3,1},\quad E_{3,2},\quad \ldots$$

Эта последовательность может оборваться лишь в том случае, когда мы получим некоторую резольвенту для списка $\mathfrak{R}_3$. Либо соответствующая общая замена списка $\mathfrak{R}$ является резольвентой для $\mathfrak{R}$, и тогда вся наша процедура заканчивается, либо при рассматриваемой общей замене должна оказаться ложной какая-либо критическая формула ранга 1, причем это будет формула первого рода. Тогда снова получатся экземплярные и минимальные замены, которые ведут к новым заменам для основных типов ранга 1.

Действуя таким образом, мы можем неограниченно продолжать эту процедуру до тех пор, пока на некотором этапе не будет получена резольвента. Тем самым по обладающей указанными свойствами процедуре построения общих замен для списков формул ранга $\mathfrak{m}$ можно на самом деле получить процедуру, которая будет аналогичным образом работать над списками ранга $\mathfrak{m}+1$, а отсюда рекурсивно получится аналогичная процедура для списков с произвольным рангом.

Эта процедура устроена, в частности, таким образом, что при каждом переходе от одной общей замены к другой модификация этой замены заключается только в том, что либо вместо 0-замены

появляется некоторая другая цифровая замена, либо (в случае функциональной замены) функция замены для некоторых (в конечном числе) систем значений аргументов вместо старого значения, равного 0, приобретает некоторое новое значение. Отсюда также следует, что все фигурирующие в рассмотрении функции замены получают отличные от 0 значения лишь для конечного числа значений (или соответственно систем значений) аргументов.

Замечание. Если исходный список формул $\mathfrak{R}$ имеет ранг 2, то списки $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ... суть списки ранга 1. Поэтому при получении резольвент для этих списков можно обойтись без метода функциональных замен, т. е. можно ограничиться одними цифровыми заменами. Значит, в этом случае, не меняя нашей процедуры в прочих отношениях, можно ограничить применение основных типов для замен выражениями ранга 1. Такая процедура целесообразна, в частности, тогда, когда все имеющиеся ε-термы ранга 2 имеют степень, равную единице; в этом случае построение резольвент для списков $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ... удается осуществить рассмотренным вначале прямым способом.

д) Построение резольвенты в случае, когда все критические формулы являются формулами первого рода. Описанный метод построения общих замен пока еще не приводит нас к поставленной цели. Все еще остается нерешенной существенная задача — показать, что применение указанного метода всегда приводит к обрыву процесса. Такое доказательство удается получить лишь для случая, когда все критические формулы второго рода, входящие в рассматриваемый список, имеют ранг 1.

Прежде чем проводить доказательство при этом предположении, целесообразно сначала рассмотреть случай, когда выполняется еще более сильное предположение; а именно, мы потребуем, чтобы в рассматриваемом списке формул все критические формулы были формулами первого рода. Тогда ситуация упростится в том смысле, что при построении общих замен можно будет не переходить от экземплярных замен к минимальным, а всякий раз для построения новой общей замены непосредственно использовать экземплярные замены. Для такой упрощенной процедуры построения общих замен действительно удается показать, что после некоторого, заранее оцениваемого сверху числа шагов всегда получается резольвента.

Эта оценка строится рекурсивным образом. Как мы уже знаем [1]), для любого списка формул, имеющего ранг 1, количество общих замен, требующихся для построения резольвенты, не превышает 2^n, где n — число различных ε-термов, входящих в данный список формул.

[1]) См. с. 145 и далее.

Предположим теперь, что для любого конкретного числа m нам известна оценка сверху $\psi(n)$ для наибольшего числа общих замен, требующихся для построения резольвенты с помощью нашей упрощенной процедуры (т. е. путем прямого использования экземплярных замен) для любого списка формул, имеющего ранг m, состоящего только из критических формул первого рода и формул ε-равенства и содержащего не более n различных ε-термов. При этом предположении мы найдем соответствующую оценку для списков, имеющих ранг $m+1$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — такого рода список ранга $m+1$, состоящий из критических формул первого рода и формул ε-равенства и содержащий не более n попарно различных ε-термов. Для этого списка ранее описанным способом можно построить общие замены

$$E_{1,1},\ E_{1,2},\ \ldots,\ E_{1,\mathfrak{f}_1},$$
$$E_{2,1},\ E_{2,2},\ \ldots,\ E_{2,\mathfrak{f}_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

в которых отсутствует переход от экземплярных замен к минимальным.

Любая из этих общих замен $E_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$ $(\mathfrak{r}=1,\ \ldots,\ \mathfrak{f}_\mathfrak{p})$ строится из двух частичных замен: одной, состоящей из замен для основных типов из списка $\mathfrak{R}$, имеющих ранг 1, и другой, состоящей из замен для остальных основных типов. Первая частичная замена $E_\mathfrak{p}$ — одна и та же для всех частичных замен $E_{\mathfrak{p},1}, E_{\mathfrak{p},2}, \ldots, E_{\mathfrak{p},\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$. В результате внесения частичной замены $E_\mathfrak{p}$ в критические формулы и формулы ε-равенства ранга выше 1 список $\mathfrak{R}$ переходит в список $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, имеющий ранг m. Вторая часть замены $E_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$, состоящая из замен для основных типов более высокого ранга, — мы обозначим ее через $E^*_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$ — определяется по некоторой общей замене для основных типов списка $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, обозначаемой нами далее посредством $E'_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$.

Общие замены $E'_{\mathfrak{p},1}$, $E'_{\mathfrak{p},2}$, ... получаются применением нашей процедуры построения общих замен к списку формул $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Так как этот список имеет ранг m и так как число различных входящих в него ε-термов не превосходит числа различных ε-термов, входящих в список $\mathfrak{R}$ (а значит, оно не превосходит n), то, согласно нашему предположению, последовательность этих общих замен должна завершиться получением резольвенты не позднее, чем на шаге с номером $\psi(n)$. Поэтому имеет место оценка

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p} \leqslant \psi(n).$$

Теперь, чтобы получить искомую оценку для общего числа требующихся замен, достаточно найти верхнюю оценку для числа

частичных замен $E_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}=1, 2, \ldots$). Для этого мы напомним следующие факты:

1. Если в критические формулы и формулы ε-равенства списка $\mathfrak{R}$ символьно внести частичную замену $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$, то получатся формулы того же самого вида, которые будут содержать ε-термы только ранга 1. Значит, эти формулы будут образовывать список ранга 1. Обозначим этот список посредством $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$. Тогда частичная замена $E_\mathfrak{p}$ будет представлять собой общую замену для списка $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$.

2. Если совпадают частичные замены $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$, то совпадают и списки формул $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$. Отсюда, в частности, получается, — так как частичные замены $E^*_{\mathfrak{p},\,1}$ ($\mathfrak{p}=1, 2, \ldots$) являются заменами со сплошными 0-значениями, — что все списки $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,1}$ ($\mathfrak{p}=1, 2, \ldots$) совпадают со списком $\mathfrak{R}_{1,\,1}$.

3. Частичная замена E_1 представляет собой замену со сплошными 0-значениями. Если $E_\mathfrak{p}$ является резольвентой для списка $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$, то общая замена $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$ будет резольвентой для списка $\mathfrak{R}$. В противном случае может быть построена отличная от $E_\mathfrak{p}$ частичная замена $E_{\mathfrak{p}+1}$, которая отличается от $E_\mathfrak{p}$ тем, что некоторые 0-значения, фигурирующие в $E_\mathfrak{p}$ в качестве цифровых замен или в качестве значений функций замены, заменяются какими-нибудь другими значениями.

4. Для списка формул $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ частичная замена $E_\mathfrak{p}$, согласно утверждению 1, представляет собой общую замену. Подобно тому как мы делали это раньше [1]), определим индекс $E_\mathfrak{p}$ относительно $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ как последовательность чисел, которые для каждого числа, являющегося рангом каких-либо ε-термов в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$, указывают количество тех ε-термов этого ранга, которые получают замену, отличную от 0-замены.

Если список $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ совпадает со списком $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ и $\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$, то либо эффективные замены, дающие для этих списков замены $E_\mathfrak{p}$ и $E_\mathfrak{q}$, совпадают, либо индекс замены $E_\mathfrak{q}$ относительно этого списка формул больше индекса замены $E_\mathfrak{p}$. Этот факт вытекает из второй части утверждения 3. Необходимое здесь рассуждение совершенно аналогично рассуждению, проведенному ранее [1]) для списков, имеющих ранг 1.

5. Если частичные замены $E^*_{\mathfrak{p}_1,\,\mathfrak{r}}$, $E^*_{\mathfrak{p}_2,\,\mathfrak{r}}$, …, $E^*_{\mathfrak{p}_\mathfrak{s},\,\mathfrak{r}}$ совпадают, то среди общих замен $E_{\mathfrak{p}_1,\,\mathfrak{r}}$, $E_{\mathfrak{p}_2,\,\mathfrak{r}}$, …, $E_{\mathfrak{p}_\mathfrak{s},\,\mathfrak{r}}$ имеется не более 2^n различающихся *по отношению к эффективным заменам ε-термов.*

[1]) См. с. 144.

Действительно, пусть справедлива посылка нашего утверждения. Тогда списки $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1,\,\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_2,\,\mathfrak{r}}$, …, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mathfrak{s},\,\mathfrak{r}}$ совпадают друг с другом. Для этих списков, которые содержат не более n отличных друг от друга ε-термов, замены $E_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, E_{\mathfrak{p}_\mathfrak{s}}$ являются общими заменами. Среди индексов этих замен может быть не более 2^n различных; поэтому, согласно утверждению 4, среди эффективных замен для списка $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1,\,\mathfrak{r}}$, доставляемых заменами $E_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, E_{\mathfrak{p}_\mathfrak{s}}$, может быть самое большее 2^n различных. Но отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения, так как эффективные замены, которые получаются из какой-либо общей замены $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ для ε-термов из списка $\mathfrak{R}$, однозначно определяются частичной заменой $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и теми эффективными заменами, которые замена $E_\mathfrak{p}$ дает для списка формул $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$.

6. Пусть общие замены $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и $E_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ совпадают относительно эффективных замен и относительно частичных замен $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$. Если $\mathfrak{r}<\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{r}<\mathfrak{f}_\mathfrak{q}$, и в этом случае совпадают также замены $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}+1}$ и $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}+1}$; если же $\mathfrak{r}$ совпадает с $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{r}$ совпадает и с $\mathfrak{f}_\mathfrak{q}$.

В самом деле, рассмотрим какие-либо две критические формулы из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$, получающиеся в результате частичных замен $E_\mathfrak{p}$ и $E_\mathfrak{q}$ из одной и той же формулы

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}));$$

пусть эти формулы записываются в виде

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{f}_1) \to \mathfrak{A}_1(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}_1(\mathfrak{x}))$$

и

$$\mathfrak{A}_2(\mathfrak{f}_2) \to \mathfrak{A}_2(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}_2(\mathfrak{x})).$$

Так как по условию общие замены $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и $E_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ совпадают относительно этих эффективных замен, то истинностное значение, которое первая из этих формул получает в результате замены $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$, должно совпасть с истинностным значением, которое получает вторая формула в результате замены $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$. Точно так же значение, которое в результате замены $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ получает терм $\mathfrak{f}_1$, должно совпасть с тем значением, которое в результате замены $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ получает терм $\mathfrak{f}_2$. Если основной тип терма $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}_1(\mathfrak{x})$ имеет аргументы, то основной тип терма $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}_2(\mathfrak{x})$ имеет то же самое количество аргументов, и в результате замены $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ каждый аргумент первого основного типа получает то же самое значение, которое получает соответствующий аргумент второго основного

типа в результате замены $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$. Поэтому, если первая из этих двух формул с помощью общей замены $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ дает нам некоторую экземплярную замену, то вторая из них с помощью общей замены $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ дает ту же самую экземплярную замену.

Так как эти соотношения имеют место для любой пары критических формул, соответствующих друг другу указанным образом, то отсюда следует, что $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ является резольвентой для $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ тогда и только тогда, когда $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ является резольвентой для $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}}$. Далее, в том случае, когда $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ и $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ не являются резольвентами, получается, что при переходе от $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ к $E'_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}+1}$ новые отличные от 0 значения в цифровых и функциональных заменах оказываются теми же самыми, что и при переходе от $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$ к $E'_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}+1}$, а отсюда следует, — так как по предположению $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$ совпадает с $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}}$, — что в рассматриваемом случае $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}+1}$ совпадает с $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{r}+1}$.

7. Если какая-либо частичная замена $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ совпадает с заменой $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}}$ и $\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$, то общие замены $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ и $E_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ не могут совпадать относительно всех эффективных замен. Действительно, в частичной замене $E_{\mathfrak{q}}$ (при $\mathfrak{q}>\mathfrak{p}$) используются те экземплярные замены, которые при общей замене $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ получились из критических формул ранга 1; и так как вследствие нашего предположения список $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ совпадает со списком $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$, то в процессе применения к этой последовательности замены $E_{\mathfrak{q}}$ использование упомянутых экземплярных замен (которые были найдены при применении $E_{\mathfrak{p}}$ к $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$) в эффективных заменах должно как-нибудь проявиться либо прямо в заменах для ε-термов, для которых найдены экземплярные замены, либо в модифицированных заменах для некоторых аргументных термов этих ε-термов [1]).

Мы теперь используем утверждения 1—7 для того, чтобы оценить число различных частичных замен $E_{\mathfrak{p}}$, а тем самым и число общих замен $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{r}}$. Нам будет удобно пользоваться следующей терминологией.

Рассматривая наше упорядочение общих замен, мы будем говорить о строках замен и столбцах замен, считая, что строка замен с номером $\mathfrak{p}$ состоит из общих замен $E_{\mathfrak{p},\,1}, E_{\mathfrak{p},\,2}, \ldots$, а столбец замен с номером $\mathfrak{r}$ состоит из замен $E_{1,\,\mathfrak{r}}, E_{2,\,\mathfrak{r}}, \ldots$ Далее, общие замены, дающие одни и те же эффективные замены, мы будем называть эффективно равными. Общие замены, отличающиеся друг от друга какими-либо эффективными заменами, мы будем называть эффективно различными.

[1]) См. аналогичное рассуждение на с. 145.

Две строки замен, имеющие номера $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, мы будем называть $\mathfrak{r}$-кратно однородными, если либо для любой цифры $\mathfrak{s}$ от 1 до $\mathfrak{r}$ совпадают частичные замены $E^*_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{s}}$ и $E^*_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{s}}$ и эффективно равны общие замены $E_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{s}}$ и $E_{\mathfrak{q},\,\mathfrak{s}}$, либо обе эти строки замен обрываются еще до столбца с номером $\mathfrak{s}$.

Теперь представим себе, что построение строк замен произведено до строки с номером $\mathfrak{l}$ включительно. Тогда в нашем списке общих замен каждый столбец будет содержать не более $\mathfrak{l}$, а каждая строка — не более $\psi(\mathfrak{n})$ общих замен.

Теперь оценка для $\mathfrak{l}$ может быть получена следующим образом. Так как частичные замены $E^*_{1,\,1}, E^*_{2,\,1}, \ldots, E^*_{\mathfrak{l},\,1}$ совпадают, то, согласно 4 и 5, в первом столбце замен имеется не более $2^{\mathfrak{n}}$ эффективно различных общих замен и в последовательности общих замен $E_{1,\,1}, E_{2,\,1}, \ldots, E_{\mathfrak{l},\,1}$ между двумя эффективно равными общими заменами не может стоять эффективно отличная от них общая замена. Следовательно, первый столбец замен разлагается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ идущих друг за другом отрезков, в каждом из которых любые две общие замены эффективно равны. Заметим также, что если замены $E_{\mathfrak{p},\,1}$ и $E_{\mathfrak{q},\,1}$ эффективно равны между собой, то строки замен с номерами $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ 1-кратно однородны. Отсюда получается, что последовательность строк замен разлагается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ отрезков таким образом, что внутри каждого из них строки замен 1-кратно однородны.

Далее, из утверждения 6 вытекает, что если строки замен с $\mathfrak{p}$-й по $\mathfrak{q}$-ю включительно ($\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$) $\mathfrak{r}$-кратно однородны, то либо все эти строки обрываются еще до появления $(\mathfrak{r}+1)$-го столбца, а значит, и $(\mathfrak{r}+1)$-кратно однородны, либо частичные замены $E^*_{\mathfrak{s},\,\mathfrak{r}+1}$ совпадают для всех $\mathfrak{s}$ от $\mathfrak{p}$ до $\mathfrak{q}$ включительно, а значит, совпадают и соответствующие списки формул $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s},\,\mathfrak{r}+1}$.

Но отсюда вытекает (снова ввиду утверждений 4 и 5), что любая последовательность строк замен, являющихся $\mathfrak{r}$-кратно однородными, либо обрывается еще до появления $(\mathfrak{r}+1)$-го столбца [и, значит, образует последовательность $(\mathfrak{r}+1)$-кратно однородных строк замен], либо распадается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ отрезков, в каждом из которых строки $(\mathfrak{r}+1)$-кратно однородны.

А теперь можно рассудить следующим образом. Как мы уже установили, последовательность, состоящая из этих $\mathfrak{l}$ строк замен, распадается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ различных отрезков таких, что в каждом из них строки 1-кратно однородны; каждый из этих отрезков в свою очередь распадается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ отрезков, внутри которых строки 2-кратно однородны; каждый из них снова распадается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ отрезков, внутри которых строки 3-кратно однородны.

Продолжая это рассуждение и далее, мы получим, что рассматриваемая последовательность строк распадется не более чем на $(2^n)^{\psi(n)}$ таких отрезков, внутри которых строки замен будут $\psi(n)$-кратно однородными. Однако двух различных $\psi(n)$-кратно однородных строк замен быть не может. Действительно, пусть p и q — номера различных строк, и пусть $p<q$. Тогда, согласно утверждению 7, строка с номером p не может быть f_p-кратно однородна со строкой с номером q и, следовательно, эти строки не могут быть $\psi(n)$-кратно однородны друг с другом, так как $f_p \leqslant \psi(n)$.

Поэтому в рассмотренной нами последовательности строк замен может быть не более $(2^n)^{\psi(n)}$ строк, т. е. всякий раз

$$l \leqslant 2^{n\cdot\psi(n)},$$

а значит, в результате применения нашей процедуры построения общих замен может появиться не более

$$2^{n\cdot\psi(n)}\cdot\psi(n)$$

общих замен. Таким образом, не позже чем через $2^{n\cdot\psi(n)}\cdot\psi(n)$ шагов построенная общая замена окажется резольвентой.

Если мы будем знать, что $\psi(n)$ является верхней оценкой для любого списка формул, имеющего ранг m, то приведенная оценка будет годиться для любого списка формул, имеющего ранг $m+1$. Для списков ранга 1 у нас имеется оценка 2^n. Поэтому, если положить

$$\psi(1,\ n)=2^n,$$
$$\psi(m+1,\ n)=2^{n\cdot\psi(m,\ n)}\cdot\psi(m,\ n),$$

то у нас получится рекурсивное определение некоторой оценки $\psi(m,\ n)$ для количества общих замен, необходимых для получения резольвенты в случае списка формул, имеющего ранг m и состоящего из критических формул первого рода и формул ε-равенства с не более чем n различными имеющимися в них ε-термами. Эти рекурсивные равенства имеют вид примитивной рекурсии.

е) Несостоятельность рассмотренного метода в случае критических формул второго рода с произвольным рангом. Дополнение к предыдущему результату. Приведенное в предыдущем пункте доказательство показывает возможность построения резольвенты для любого наперед заданного списка критических формул первого рода и формул ε-равенства. Как мы убедились, для рассмотрения списков формул, имеющих ранг, больший 1, к основной идее гильбертовского подхода должны быть добавлены новые

соображения. Метод доказательства, используемый здесь, берет свое начало от В. Аккермана [1]). Другим, но тоже исходящим из гильбертовского подхода путем той же самой цели достиг Дж. фон Нейман [2]).

Сначала складывалось впечатление, что методы этих доказательств позволят без особых трудностей включить в рассмотрение и критические формулы второго рода. На самом же деле связанные с этим затруднения оказались скрытыми глубоко.

Что касается приведенного здесь доказательства, то процедура построения общих замен была задумана таким образом, чтобы она охватывала и критические формулы второго рода. Предположение, что рассматриваемый список формул не содержит критических формул второго рода, нам потребовалось ввести только для доказательства того факта, что применение нашей процедуры завершается [3]). Это предположение позволило нам при построении общей замены обойтись без перехода от экземплярных замен к минимальным.

Теперь посмотрим, где же это упрощение проявляется в нашем доказательстве. Способ получения общих замен в доказательстве учитывается в утверждениях 1—7. При этом утверждения 1—5 и 7 абсолютно не зависят от того, прямо ли мы используем экземплярные замены или же через посредство минимальных. Для утверждений 1—3 это усматривается без труда. Утверждения же 4, 5 и 7 получаются из рассмотрения общих замен для списков формул ранга 1 совершенно аналогично тому, как это уже делалось раньше при добавлении критических формул второго рода [4]).

Единственным местом, где различие между экземплярными и минимальными заменами становится существенным, является обоснование утверждения 6. Здесь используется следующее рассуждение. Если у нас имеются две критические формулы, которые получаются из одной и той же критической формулы ранга, большего единицы, в результате внесения двух различных частичных замен E_p и E_q и если результирующая для замен E_p и $E'_{p,r}$ общая замена эффективно равна результирующей для замен E_q

[1]) Это доказательство представляющее собой некоторое уточнение и упрощение доказательства, содержащегося в его диссертации: Ackermann W. Begründung des 'tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. — Math. Ann., 1924, **93**. Аккерман изложил только в одном из своих писем.

[2]) См.: Neumann J. v. Zur Hilbertschen Beweistheorie. — Math. Z., 1927, **26**. По времени это доказательство предшествует изложенному нами доказательству Аккермана. Как об этом уже упоминалось, в этой работе было впервые введено понятие основного типа, используемое нами (с незначительными отклонениями в определении).

[3]) См. с. 116.

[4]) На соответствующие места были сделаны ссылки.

и $E'_{\mathfrak{a},\mathfrak{r}}$ общей замене $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{r}}$, то каждой экземплярной замене, которая находится из первой критической формулы в результате общей замены $E'_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$, соответствует некоторая экземплярная замена *с тем же самым цифровым значением*, которая находится из второй критической формулы в результате общей замены $E'_{\mathfrak{a},\mathfrak{r}}$.

При этом совпадение упомянутых цифровых значений основывается на эффективном равенстве общих замен $E_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}}$ и $E_{\mathfrak{a},\mathfrak{r}}$. Однако из этого еще нельзя заключить, что связанные с рассматриваемыми экземплярными заменами минимальные замены имеют одно и то же цифровое значение. Напротив, может случиться, что при двух различных эффективно равных общих заменах некоторая экземплярная замена $\mathfrak{z}$ для одного и того же ε-терма приведет к различным минимальным заменам, хотя их количество и не может превышать $\mathfrak{z}$.

Поэтому в случае, когда имеются критические формулы второго рода, мы не можем сделать вывод, что любая последовательность $\mathfrak{r}$-кратно однородных последовательностей замен распадается не более чем на $2^{\mathfrak{n}}$ отрезков, состоящих из $(\mathfrak{r}+1)$-кратно однородных последовательностей замен. Напротив, число таких отрезков может зависеть от тех цифровых значений экземплярных замен, которые используются при переходе от общей замены с номером $\mathfrak{r}$ к общей замене с номером $\mathfrak{r}+1$.

Эта ситуация может быть пояснена на следующем примере, принадлежащем фон Нейману. Пусть $\mathfrak{z}$ — какая-либо отличная от 0 и от 0′ цифра, пусть $\mathfrak{C}(a)$ — формула

$$\varepsilon_y(a' = y) = 0 \to a = \mathfrak{z},$$

и пусть $\mathfrak{e}$ — ε-терм $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x)$, т. е.

$$\varepsilon_x(\varepsilon_y(x' = y) = 0 \to x = \mathfrak{z})$$

(этот терм имеет ранг 2). Пусть список формул, который мы будем рассматривать, состоит из формул

(1) $$\mathfrak{C}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{C}(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x)),$$

(2) $$\mathfrak{C}(\delta(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x))) \to \varepsilon_x \mathfrak{C}(x) \neq \delta(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x))',$$

(3) $$\varepsilon_x \mathfrak{C}(x) = \varepsilon_x \mathfrak{C}(x) \to \varepsilon_x \mathfrak{C}(x) = \varepsilon_y(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x) = y),$$

т. е. из формул

(1) $$(\varepsilon_y(\mathfrak{z}' = y) = 0 \to \mathfrak{z} = \mathfrak{z}) \to (\varepsilon_y(\mathfrak{e}' = y) = 0 \to \mathfrak{e} = \mathfrak{z}),$$

(2) $$(\varepsilon_y(\delta(\mathfrak{e})' = y) = 0 \to \delta(\mathfrak{e}) = \mathfrak{z}) \to \mathfrak{e} \neq \delta(\mathfrak{e})',$$

(3) $$\mathfrak{e} = \mathfrak{e} \to \mathfrak{e} = \varepsilon_y(\mathfrak{e} = y).$$

Формула (1) представляет собой связанную с термом $\mathfrak{e}$ критическую формулу первого рода, формула (2) — связанную с $\mathfrak{e}$ критическую формулу второго рода, а формула (3) — связанную с ε-термом ранга 1 $\varepsilon_y(\mathfrak{e} = y)$ критическую формулу первого рода. Кроме терма $\mathfrak{e}$, здесь фигурируют только ε-термы, имеющие основной тип $\varepsilon_y(c = y)$. В качестве символов, играющих роль функциональных замен для этого основного типа, мы будем брать функциональные знаки $\varphi_1(c)$, $\varphi_2(c)$, ...

Применяя к данному списку формул нашу процедуру построения общих замен, мы должны будем начать с замены основного типа $\varepsilon_y(c = y)$ такой функцией $\varphi_1(c)$, которая всегда принимает значение 0. Если мы внесем эту замену E_1 в формулы (1) и (2), то получим формулы

(1*) $$(\varphi_1(\mathfrak{z}') = 0 \to \mathfrak{z} = \mathfrak{z}) \to (\varphi_1(\mathfrak{e}_1') = 0 \to \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{z}),$$

(2*) $$(\varphi_1(\delta(\mathfrak{e}_1)') = 0 \to \delta(\mathfrak{e}_1) = \mathfrak{z}) \to \mathfrak{e}_1 \neq \delta(\mathfrak{e}_1)',$$

где $\mathfrak{e}_1$ обозначает ε-терм $\varepsilon_x(\varphi_1(x') = 0 \to x = \mathfrak{z})$ ранга 1.

Для этой пары формул, в которой содержится единственный ε-терм $\mathfrak{e}_1$, мы получим резольвенту в два шага $E'_{1,1}$ и $E'_{1,2}$. Функциональные замены проводить здесь не нужно, так как основной тип $\varepsilon_x(\varphi_1(x') = a \to x = b)$ терма $\mathfrak{e}_1$ повсюду фигурирует только с аргументами 0 и $\mathfrak{z}$.

Сначала мы заменим терм $\mathfrak{e}_1$ цифрой 0. В результате этого формула (2*) станет истинной, а формула (1*) — ложной. Из (1*) мы находим для $\mathfrak{e}_1$ экземплярную замену $\mathfrak{z}$, которая одновременно является и минимальной. Эта замена $\mathfrak{e}_1$ цифрой $\mathfrak{z}$ является резольвентой формул (1*) и (2*). Однако общая замена $E_{1,2}$, получающаяся из этой замены $E'_{1,2}$ и замены E_1, не является резольвентой для формул (1), (2) и (3). Действительно, в результате этой общей замены терм $\mathfrak{e}$ переходит в цифру $\mathfrak{z}$, терм $\varepsilon_y(\mathfrak{e} = y)$ переходит в цифру 0, и потому формула (3) оказывается ложной. А теперь из формулы (3) мы для терма $\varepsilon_y(\mathfrak{z} = y)$ получим экземплярную замену $\mathfrak{z}$, которая в то же время является и минимальной.

Таким образом, мы должны теперь взять для терма $\varepsilon_y(c = y)$ новую функцию замены $\varphi_2(c)$, принимающую значение $\mathfrak{z}$ в точке $\mathfrak{z}$ и значение 0 в остальных точках. В результате внесения этой замены E_2 в формулы (1) и (2) мы получим формулы

(1**) $$(\varphi_2(\mathfrak{z}') = 0 \to \mathfrak{z} = \mathfrak{z}) \to (\varphi_2(\mathfrak{e}_2') = 0 \to \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{z}),$$

(2**) $$(\varphi_2(\delta(\mathfrak{e}_2)') = 0 \to \delta(\mathfrak{e}_2) = \mathfrak{z}) \to \mathfrak{e}_2 \neq \delta(\mathfrak{e}_2)',$$

где $\mathfrak{e}_2$ обозначает терм $\varepsilon_x(\varphi_2(x') = 0 \to x = \mathfrak{z})$.

Терм $\mathfrak{e}_2$ опять является единственным фигурирующим в этих формулах ε-термом. Поэтому с помощью цифровых замен для $\mathfrak{e}_2$ мы в два шага $E'_{2,1}$ и $E'_{2,2}$ получим резольвенту. Сначала, при замене терма $\mathfrak{e}_2$ цифрой 0, формула (2**) станет истинной, а фор-

мула (1**) — ложной. А затем из (1**) мы получим для $\mathfrak{e}_2$ экземплярную замену $\mathfrak{z}$.

Если бы мы не должны были заботиться о критической формуле второго рода (2), то резольвента тем самым уже была бы получена. Но экземплярная замена $\mathfrak{z}$ для терма $\mathfrak{e}_2$ не является минимальной, и это проявляется в том, что при замене терма $\mathfrak{e}_2$ цифрой $\mathfrak{z}$ формула (2**) переходит в ложную формулу. Минимальную замену для $\mathfrak{e}_2$ дает предшествующая цифре $\mathfrak{z}$ цифра $\mathfrak{z}-1$. [В самом деле, формула $\varphi_2((\mathfrak{z}-1)')=0$, как мы знаем, является ложной, и поэтому при замене $\mathfrak{e}_2$ цифрой $\mathfrak{z}-1$ заключение импликации (1**) становится истинным, в то время как при замене $\mathfrak{e}_2$ цифрой, меньшей чем $\mathfrak{z}-1$, формула (1**) становится ложной.]

Таким образом мы должны теперь заменить терм $\mathfrak{e}_2$ цифрой $\mathfrak{z}-1$ и эта замена $E'_{2.2}$ является резольвентой для формул (1**) и (2**). Однако при получающейся из замен $E'_{2.2}$ и E_2 общей замене $E_{2.2}$ для формул (1), (2) и (3) формула (3) становится ложной, так как терм $\mathfrak{e}$ получает значение $\mathfrak{z}-1$, а терм $\varepsilon_y(\mathfrak{z}-1=y)$ — значение 0. Теперь из формулы (3) для терма $\varepsilon_y(\mathfrak{z}-1=y)$ мы получаем экземплярную замену $\mathfrak{z}-1$, которая вместе с тем является и минимальной. В соответствии с этим мы должны построить для основного типа $\varepsilon_y(c=y)$ новую функциональную замену $\varphi_3(c)$, которая для аргумента $\mathfrak{z}$ принимает значение $\mathfrak{z}$, для аргумента $\mathfrak{z}-1$ — значение $\mathfrak{z}-1$, а для прочих аргументов — значение 0.

Таким образом, перед нами случай, когда экземплярная замена, получающаяся при двух различных, но эффективно равных заменах из одной и той же критической формулы, ведет к двум различным минимальным заменам. Действительно, обе общие замены $E_{1.1}$ и $E_{2.1}$ дают для термов $\mathfrak{e}$, $\varepsilon_y(\mathfrak{z}'=y)$, $\varepsilon_y(\mathfrak{e}'=y)$, $\varepsilon_y(\delta(\mathfrak{e})'=y)$ и $\varepsilon_y(\mathfrak{e}=y)$ значение 0 и, следовательно, они эффективно равны; обе они по формуле (1) дают для терма $\mathfrak{e}$ экземплярную замену $\mathfrak{z}$; однако они дают различные минимальные замены. Действительно, в то время как при замене $E_{1.1}$ в качестве минимальной замены для $\mathfrak{e}$ получается цифра $\mathfrak{z}$, при замене $E_{2.1}$ в качестве минимальной замены для $\mathfrak{e}$ получается $\mathfrak{z}-1$.

Если теперь проследить процедуру построения общих замен для формул (1), (2) и (3), то обнаружится, что она завершается только на $(\mathfrak{z}+1)$-й строке замен. В каждой из первых $\mathfrak{z}$ строк будут стоять по две общие замены. В последней строке будет стоять только одна. Общие замены $E_{\mathfrak{p},1}$ и $E_{\mathfrak{p},2}$ $(\mathfrak{p}=2,\ \ldots,\ \mathfrak{z})$ устроены таким образом, что основной тип $\varepsilon_y(c=y)$ заменяется в них функцией $\Phi_{\mathfrak{p}}(c)$, принимающей для $\mathfrak{z}$ значение $\mathfrak{z}$, для $\mathfrak{z}-1$ значение $\mathfrak{z}-1$, ..., для $\mathfrak{z}-(\mathfrak{p}-2)$ значение $\mathfrak{z}-(\mathfrak{p}-2)$, а в прочих случаях значение 0, и что ε-терм $\mathfrak{e}$ при замене $E_{\mathfrak{p},1}$ заменяется цифрой 0, а при $E_{\mathfrak{p},\mathfrak{z}}$ — цифрой $\mathfrak{z}-(\mathfrak{p}-1)$; при общей замене $E_{\mathfrak{z}+1,1}$ основной тип $\varepsilon_y(c=y)$ получает замену в виде такой функции, которая для любой цифры $\mathfrak{r}$, удовлетворяющей условию $0'\leqslant\mathfrak{r}\leqslant\mathfrak{z}$, принимает значение $\mathfrak{r}$, а при прочих значениях аргумента — значение 0. Эта функциональная замена, взятая совместно с 0-заменой для терма $\mathfrak{e}$, и представляет собой резольвенту для списка формул (1), (2), (3).

Число $2\cdot\mathfrak{z}+1$, равное числу общих замен, необходимых для получения резольвенты по нашей общей процедуре, нельзя оценить никаким выражением, зависящим только от рангов фигурирующих в данном примере ε-термов и от их количества, так как оно определяется цифрой $\mathfrak{z}$, которая при задании списка формул (1), (2), (3) выбирается произвольным образом.

Тем самым выясняется, что в нашем утверждении об осуществимости резольвенты (с помощью процедуры построения общих замен) условие, требующее, чтобы все критические формулы были формулами первого рода[1]), не может быть опущено. Но наше рассмотрение этого вопроса все-таки показывает, что критические формулы второго рода могут быть — хотя бы частично — включены в наш результат. В самом деле, мы обнаружили, что необходимость перехода от экземплярных замен к минимальным, вследствие которой наличие критических формул второго рода сказывается на нашей процедуре, мешает лишь обоснованию утверждения 6[2]), а в остальных отношениях наше доказательство, оценивающее число требующихся общих замен, остается в силе. Однако в этом рассуждении речь идет исключительно о таких экземплярных заменах, которые находятся по критическим формулам, имеющим *ранг, больший единицы.*

Согласно сказанному обоснование утверждения 6 остается в силе, если при заменах для основных типов ранга выше 1 можно будет использовать экземплярные замены непосредственно, т. е. если все критические формулы второго рода будут формулами ранга 1. *Таким образом, оценка* $\psi(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *необходимого числа общих замен справедлива для любого списка формул, у которого все входящие в него критические формулы второго рода имеют ранг* 1.

ж). Использование полученного результата в нп-теореме. Теперь вернемся к тому ходу идей, который привел нас к задаче построения резольвенты для заданного списка формул. Мы предприняли атаку на эту задачу, учитывая, что с ее решением было бы получено и доказательство непротиворечивости арифметического формализма. Однако ввиду того, что нам пришлось ограничить рассмотрение критических формул второго рода формулами ранга 1, поставленная нами цель не достигнута.

---

[1]) См. с. 150.
[2]) См. с. 153 и далее.

Возникает естественный вопрос: насколько широк арифметический формализм, получающийся в результате наложения этого ограничения? Критические формулы второго рода появляются в нормированных доказательствах из-за того, что мы свели использование схемы индукции к использованию формулы

$$A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

в сочетании с ε-формулой, аксиомой равенства (J_2), формулой $a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$ и средствами исчисления высказываний [1]).

Это сведение обладает той особенностью, что при замене применяемой к какой-либо формуле $\mathfrak{A}(c)$ схемы индукции выводом формулы $\mathfrak{A}(a)$ из формул $\mathfrak{A}(0)$ и $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$, в том виде, как этот вывод получается [2]) с использованием только что перечисленных формул, в соответствующем фрагменте нормированного доказательства появляется единственная критическая формула второго рода, имеющая вид

$$\neg \mathfrak{A}(\mathfrak{d}) \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{x}} \neg \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{d}'.$$

Эта критическая формула имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда соответствующий терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}} \neg \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ не содержит никаких подчиненных ему ε-термов, т. е. когда в $\mathfrak{A}(c)$ переменная c не попадает в область действия каких-либо ε-символов.

Сказанное относится к формулам, получающимся после исключения кванторов (с помощью ε-символа). Для интересующего нас арифметического формализма, содержащего кванторы, это сводится к требованию, чтобы переменная c в формуле $\mathfrak{A}(c)$ не попадала в область действия каких-либо кванторов или ε-символов.

Тем самым установлена непротиворечивость той части формализма (Z), которая получается путем *ограничения схемы индукции такими формулами* $\mathfrak{A}(c)$, *в которых переменная* c *не попадает в область действия каких-либо кванторов или* ε*-символов*. Это условие является несколько менее ограничительным, чем условие полного исключения связанных переменных, которое имелось в рассматривавшейся нами «ограниченной схеме индукции» [3]).

Но для упомянутой части арифметического формализма мы получаем не только доказательство непротиворечивости, но и всю нашу нп-теорему [4]) в полном ее объеме.

В самом деле, непротиворечивость эта доказана нами в том смысле, что установлена истинность любой выводимой формулы без переменных. Что же касается выводимых формул вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\iota \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\iota),$$

[1]) См. с. 116 и далее.
[2]) См. с. 117—119.
[3]) См. с. 77 и далее.
[4]) См. с. 59 и далее.

у которых единственными входящими в них переменными являются $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau$, то любая такая формула в результате операции исключения переменных переходит в формулу вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\tau),$$

где $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\tau$ — некоторые ε-термы, такую, что вне этих термов она не содержит никаких переменных, а внутри этих термов не содержит свободных переменных. Для формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\tau)$ мы можем получить нормированное доказательство. А для входящих в нее критических формул и формул ε-равенства мы можем построить резольвенту. Если извлекаемые из этой резольвенты эффективные замены мы внесем в упомянутое нормированное доказательство, а затем заменим все оставшиеся ε-термы цифрой 0, то исходные формулы, а тем самым и все остальные формулы этого нормированного доказательства перейдут в истинные формулы. Следовательно, и формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\tau),$$

получающаяся из заключительной формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\tau)$ в результате внесения цифровых замен $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\tau$ вместо ε-термов $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\tau$, является истинной формулой.

Таким образом, для каждой формулы

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau),$$

обладающей указанными свойствами, мы можем найти такие цифры $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\tau$, для которых формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\tau)$ является истинной.

Тем самым для рассматриваемого формализма выполняются все утверждения нашей нп-теоремы.

Этот метод доказательства нп-теоремы сохраняет силу и при некоторых расширениях рассмотренного арифметического формализма. Так, во-первых, можно, не меняя доказательства, расширить наш формализм путем добавления функциональных знаков, для которых задан способ вычисления их значений для цифровых значений их аргументов, а также путем добавления собственных аксиом без связанных переменных при условии, что эти аксиомы являются верифицируемыми. Так снова получается непротиворечивость тех арифметических формализмов, которые мы рассматривали в § 1 этой главы [1]).

Рассмотренное доказательство сохранит свою силу и в том случае, если мы присоединим к нашему формализму μ-символ и

[1]) См. с. 74—82.

формулы (μ_1), (μ_2), (μ_3)

$$(\mu_1) \qquad \exists x A(x) \to A(\mu_x A(x)),$$

$$(\mu_2) \qquad A(a) \to \mu_x A(x) \leqslant a,$$

$$(\mu_3) \qquad \forall x \neg A(x) \to \mu_x A(x) = 0$$

при условии, что в формулу (μ_2) вместо именной формы $A(c)$ будут подставляться только такие формулы $\mathfrak{A}(c)$, у которых переменная c не будет попадать в область действия какого-либо квантора или ε-символа [1]).

В самом деле, формула (μ_3) с помощью формулы (μ_1) и средств исчисления предикатов может быть переведена в формулу

$$(\mu_3') \qquad \neg A(\mu_x A(x)) \to \mu_x A(x) = 0,$$

а формула (μ_1) дедуктивно равна формуле

$$(\mu_1') \qquad A(a) \to A(\mu_x A(x)),$$

если пользоваться средствами исчисления предикатов. Поэтому добавление формул (μ_1), (μ_2) и (μ_3) равносильно добавлению формул (μ_1') (μ_2) и (μ_3').

А эти формулы можно без особого труда включить в процедуру построения резольвенты. Действительно, если каждое выражение $\mu_\mathfrak{v}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ заменить выражением $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$, то формула (μ_1') совпадет с ε-формулой. Формулы (μ_2) и (μ_3') хоть и приведут (после исключения кванторов и свободных переменных) к критическим формулам нового типа, а именно к формулам вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \leqslant \mathfrak{f}$$

и

$$\neg\mathfrak{A}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})) \to \varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) = 0,$$

но эти формулы не требуют каких-либо новых способов их рассмотрения; действительно, формула

$$\neg\mathfrak{A}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})) \to \varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) = 0$$

переходит в истинную формулу в результате любой общей замены, при которой ε-терм $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ или соответственно появляющийся вместо него (в результате подстановок вместо вложенных ε-термов) ε-терм получает 0-замену или какую-нибудь экземплярную замену, а формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \leqslant \mathfrak{f}$$

[1]) Это ограничение должно распространяться и на все те промежуточные подстановки в формулу (μ_2), которые будут производиться при возвратном переносе подстановок в исходные формулы.

переходит в истинную формулу в результате любой общей замены, при которой ε-терм $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ или соответственно появляющийся вместо него ε-терм получает 0-замену или минимальную замену.

Мы знаем [1]), что наша процедура построения резольвенты всегда приводит к цели, если минимальные замены требуются только для ε-термов ранга 1.

Но в данном случае для выполнения этого условия достаточно, чтобы переменная c не попадала в область действия какого-либо квантора или μ-символа ни в одной из тех формул $\mathfrak{A}(c)$, которые при возвратном переносе подстановок в исходные формулы будут подставляться вместо именной формы $A(c)$ формульной переменной в формуле (μ_2). Действительно, нетрудно убедиться, что вследствие этого ограничения любая критическая формула, получающаяся из формулы (μ_2), будет иметь ранг 1.

Таким образом, при указанном ограничении на применение формулы (μ_2) наши формулы (μ_1), (μ_2) и (μ_3) действительно могут быть включены в доказательство нп-теоремы, которое получается применением метода резольвент.

Указанный метод может быть применен и к другим формализмам, отличным от формализма арифметики. На самом деле специфическая роль, которую в процедуре построения резольвенты играют цифры, проявляется лишь в связи с рассмотрением критических формул второго рода, а эти формулы появляются лишь в связи с формализацией принципа полной индукции. Если будут отсутствовать критические формулы второго рода, — а значит, и возникающие из-за них минимальные замены, — то в доказательстве можно будет заменять ε-термы не цифрами, а какими-либо термами без переменных; в частности, роль цифры 0 при этом может быть отдана какому-нибудь специально выделенному для этой цели индивидному символу.

Так с помощью метода резольвент мы убеждаемся, что нп-теорема справедлива для любого формализма, состоящего из исчисления предикатов, ε-формулы, общей аксиомы равенства и тех или иных собственных аксиом без связанных переменных, которые становятся верифицируемыми при каком-либо распределении истинностных значений для элементарных формул без переменных, причем для равенств без переменных это распределение должно представлять собой выделенную оценку для равенства [2]).

Последнее условие может быть заменено другим, более слабым. Именно его можно заменить условием, что любая элементарная формула без переменных сохраняет свое истинностное значение,

[1]) См. с. 160.

[2]) На универсальный характер этого предположения с самого начала обратил внимание Дж. фон Нейман в своем уже цитировавшемся выше доказательстве непротиворечивости (Math. Z.; 26).

если некоторый входящий в нее терм без переменных a заменить в одном или нескольких местах, где он встречается, каким-либо термом b, «равносильным» ему, т. е. таким, что равенство $a = b$ является истинной формулой. В этом несколько более общем случае, когда наличие выделенной оценки для равенства не предполагается, процедуру построения резольвенты придется немного модифицировать, так как при построении функций замены нужно будет следить за тем, чтобы значения этих функций при одинаковых значениях аргументов также были одинаковыми.

Однако основная цель, которой должна была послужить процедура построения резольвенты, все-таки остается недостигнутой: непротиворечивость арифметического формализма в его полном объеме на этом пути остается недоказанной. Но прежде чем продолжать рассмотрение этой проблемы, нам будет уместно довести до конца начатый в гл. I ход мыслей: мы все еще не привели обещанного доказательства[1]) второй ε-теоремы.

[1]) См. с. 37.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ε-СИМВОЛА В ИЗУЧЕНИИ ЛОГИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

§ 1. Вторая ε-теорема

Результаты предыдущих глав группируются вокруг одной из двух задач, поставленных нами в связи с введением ε-символа, а именно — вокруг задачи, касающейся возможности исключения связанных переменных из выводов, осуществляемых средствами исчисления предикатов (возможно, с применением ε-формулы), при условии, что используемые в этих выводах аксиомы, а также результирующие формулы выводов не содержат связанных переменных. Эта возможность устанавливается первой ε-теоремой[1]). Теперь остается вторая задача, относящаяся к символьному решению экзистенциальных формул[2]). Мы намеревались показать, что применение этой операции в рамках формализма какой-либо системы аксиом $\mathfrak{S}$ первой ступени не подвергает расширению совокупность выводимых формул, построенных из символов системы $\mathfrak{S}$.

Мы воспользовались ε-символом и ε-формулой, дающими общую формализацию операции символьного решения экзистенциальных формул, и задачу установления этого факта свели к задаче установления второй ε-теоремы, которая содержит в себе только что упомянутую теорему о символьном решении и является ее обобщением[3]).

Напомним формулировку второй ε-теоремы. В этой теореме речь идет о формализме F, получающемся из исчисления предикатов в результате добавления к нему ε-формулы, а также некоторого числа собственных аксиом, не содержащих вхождений ε-символа. (Разумеется, к символам исчисления предикатов должны быть добавлены входящие в эти аксиомы индивидные, функциональные и предикатные символы.) Утверждается, что любая выводимая средствами формализма F формула $\mathfrak{E}$, не содержащая вхождений ε-символа, может быть выведена в F и без использования ε-символа.

Доказательство мы начнем с двух предварительных упрощений. Во-первых, мы заметим, что без ограничения общности можно

[1]) См. с. 26.
[2]) См. с. 23 и 25.
[3]) См. с. 35 и далее.

считать, что в выводе формулы $\mathfrak{E}$ аксиомы не используются. Действительно, допустим, что такой частный случай второй ε-теоремы уже доказан. Пусть $\mathfrak{E}$ — какая-нибудь формула, не содержащая вхождений ε-символа, и пусть нам дан вывод этой формулы средствами формализма F, использующий аксиомы

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l.$$

Согласно предположению, сделанному относительно формализма F, эти аксиомы являются собственными, и если мы заменим входящие в них свободные индивидные переменные связанными [1]) (соответствующие кванторы всеобщности проставляются при этом в начале формул), то получим некоторые формулы

$$\mathfrak{A}_1^+, \ldots, \mathfrak{A}_l^+$$

без свободных переменных, дедуктивно равные соответственно формулам $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$. Эти формулы $\mathfrak{A}_1^+, \ldots, \mathfrak{A}_l^+$, кроме того, не содержат ε-символов. Согласно дедукционной теореме средствами формализма F может быть получен вывод формулы

$$\mathfrak{A}_1^+ \& \ldots \& \mathfrak{A}_l^+ \to \mathfrak{E},$$

не использующий аксиом [2]). Так как формула

$$\mathfrak{A}_1^+ \& \ldots \& \mathfrak{A}_l^+ \to \mathfrak{E}$$

не содержит вхождений ε-символа, то, согласно нашему допущению, ε-символ из этого вывода, не использующего аксиом, может быть исключен, так что получится вывод этой формулы, использующий средства одного только исчисления предикатов. А из этого вывода мы получим вывод формулы $\mathfrak{E}$, осуществляемый средствами исчисления предикатов, с использованием аксиом $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$ и без использования ε-символа. Следовательно, нам достаточно рассмотреть случай, когда формула $\mathfrak{E}$ выводится без применения аксиом, т. е. средствами одного только исчисления предикатов с использованием ε-формулы.

Еще одно упрощение может быть получено с учетом того обстоятельства, что в доказательстве нашей теоремы формула $\mathfrak{E}$ всегда может быть заменена любой формулой $\mathfrak{E}_1$, дедуктивно ей равной относительно исчисления предикатов. Действительно, в этом случае формула $\mathfrak{E}_1$ тоже будет выводиться средствами формализма F, и если из вывода формулы $\mathfrak{E}_1$ применение ε-символа можно будет исключить, то с помощью осуществляемого средствами исчисления предикатов вывода формулы $\mathfrak{E}$ из формулы $\mathfrak{E}_1$ мы получим вывод формулы $\mathfrak{E}$, осуществляемый без использования ε-символа.

[1]) См. Приложение I, с. 471.
[2]) См. рассуждение в т. I, с. 199.

Поэтому, не ограничивая общности, можно, например, считать, что формула $\mathfrak{E}$ имеет вид сколемовской нормальной формы [1])

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$ — полный список связанных переменных этой формулы. При этом можно считать, что по крайней мере один квантор существования имеется на самом деле. Действительно, если $\mathfrak{F}$ — произвольная формула, $\mathfrak{B}(\cdot)$ — формульная переменная, с одним аргументом, а $\mathfrak{x}$ — связанная переменная, не входящая в $\mathfrak{F}$, то формула

$$\exists \mathfrak{x}((\mathfrak{B}(\mathfrak{x}) \vee \neg \mathfrak{B}(\mathfrak{x})) \& \mathfrak{F})$$

и формула $\mathfrak{F}$ переводимы друг в друга [2]).

Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы показать, что ε-символы могут быть исключены из любого вывода формулы $\mathfrak{E}$ вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$ — полный список связанных переменных этой формулы и $\tau \neq 0$, осуществляемого средствами исчисления предикатов с использованием ε-формулы.

Для случая, когда число кванторов всеобщности в приставке формулы $\mathfrak{E}$ равно нулю, это утверждение получается в качестве почти что непосредственного следствия из обобщенной первой ε-теоремы. Действительно, в этом случае формула $\mathfrak{E}$ имеет вид

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau),$$

и по выводу этой формулы, осуществляемому средствами исчисления предикатов с использованием ε-формулы, согласно первой ε-теореме можно построить осуществляемый средствами одного только исчисления предикатов вывод некоторой дизъюнкции членов вида

$$\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_\tau),$$

[1]) См. I, с. 203.
[2]) Впрочем, случай, когда формула $\mathfrak{E}$ имеет вид

$$\forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{A}(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma),$$

где $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$ — полный список связанных переменных этой формулы, может быть рассмотрен уже с помощью первой ε-теоремы, так как из формулы такого вида путем замены связанных переменных свободными всегда может быть получена дедуктивно ей равная формула, не содержащая связанных переменных.

где $t_1, \ldots, t_\tau$ — термы без связанных переменных. Но от любой такой дизъюнкции мы можем с помощью средств исчисления предикатов перейти к формуле $\mathfrak{E}$, так что в общем и целом у нас получится вывод этой формулы средствами одного только исчисления предикатов.

Общее доказательство мы проведем по аналогии с рассмотренным частным случаем. Мы будем исходить из выводимой в исчислении предикатов формулы

$$(1)\quad \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma A(a_1, \ldots, a_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma) \to A(a_1, \ldots, a_\tau, b_1, \ldots, b_\sigma),$$

которая получается применением основной формулы (a) (вместе с необходимыми переименованиями связанных переменных) и правила силлогизма. Мы введем σ новых функциональных знаков с τ аргументами

$$\mathfrak{f}_1(c_1, \ldots, c_\tau), \ldots, \mathfrak{f}_\sigma(c_1, \ldots, c_\tau).$$

Используя эти знаки, мы из формулы (1) подстановкой получим формулу

$$\forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma A(a_1, \ldots, a_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma) \to$$
$$\to A(a_1, \ldots, a_\tau, \mathfrak{f}_1(a_1, \ldots, a_\tau), \ldots, \mathfrak{f}_\sigma(a_1, \ldots, a_\tau)),$$

а из нее, применяя нужное число раз правило (δ) [1]) и производя подстановку, получим формулу

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma) \to$$
$$\to \exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots, \mathfrak{f}_\sigma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau)),$$

которая вместе с формулой $\mathfrak{E}$ по схеме заключения дает формулу

$$(2)\quad \exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots \mathfrak{f}_\sigma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau)).$$

Таким образом, для формулы (2) у нас имеется вывод с помощью средств исчисления предикатов и ε-формулы. Согласно обобщенной первой ε-теореме [2]) по этому выводу можно построить вывод без связанных переменных для некоторой дизъюнкции

$$(3)\quad \mathfrak{A}(t_1^{(1)}, \ldots, t_\tau^{(1)}, \mathfrak{f}_1(t_1^{(1)}, \ldots, t_\tau^{(1)}), \ldots, \mathfrak{f}_\sigma(t_1^{(1)}, \ldots, t_\tau^{(1)}))$$
$$\vee \ldots \vee \mathfrak{A}(t_1^{(m)}, \ldots, t_\tau^{(m)}, \mathfrak{f}_1(t_1^{(m)}, \ldots, t_\tau^{(m)}), \ldots, \mathfrak{f}_\sigma(t_1^{(m)}, \ldots, t_\tau^{(m)})),$$

где $t_1^{(1)}, \ldots, t_\sigma^{(m)}$ — некоторые термы, не содержащие вхождений ε-символа. Этот вывод можно осуществить средствами одного

[1]) См. т. I, с. 146.
[2]) См. с. 54.

только элементарного исчисления со свободными переменными. Процедура исключения, с помощью которой мы получаем этот вывод, дает нам вывод в такой модификации, что подстановки оказываются перенесенными в исходные формулы, так что результирующая формула (3) получается из исходных формул применением одних только схем заключения (и повторений); при этом исходные формулы получаются из тождественно истинных формул исчисления высказываний в результате подстановок.

Если теперь в этом выводе мы заменим каждую элементарную формулу некоторой формульной переменной, причем так, чтобы графически совпадающие элементарные формулы заменялись одинаковыми переменными, а графически различные — различными, то схемы заключений снова перейдут в схемы заключений, а исходные формулы перейдут в тождественно истинные формулы исчисления высказываний. Поэтому и формула, которая получится на месте формулы (3), тоже должна быть тождественно истинной. С другой стороны, формула (3) получается из этой формулы в результате подстановок, так как в только что произведенной нами замене совпадающим формульным переменным соответствовали совпадающие элементарные формулы.

Следовательно, формула (3) получается в результате подстановки из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, а потому это должно быть справедливо и в отношении любой из тех формул, которые получаются из формулы (3) путем замены термов

$$\mathfrak{f}_\rho(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}), \quad \rho = 1, \ldots, \sigma; \quad i = 1, \ldots, m,$$

какими-либо свободными индивидными переменными, если при этом графически совпадающие аргументы элементарных формул заменяются одинаковыми переменными.

Чтобы выполнить такого рода замену, мы прежде всего заметим, следующее. Если рассматривать термы $\mathfrak{f}_\rho(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)})$ — которые мы для краткости обозначим посредством $\mathfrak{t}_\rho^i$ ($\rho = 1, \ldots, \sigma$; $i = 1, \ldots, m$), — интересуясь тем, как часто в каждом из них встречаются функциональные знаки из списка $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\sigma$ (причем каждый из них считается с учетом его кратности), то эта «кратность» для всех термов

$$\mathfrak{t}_1^i, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^i$$

будет одной и той же, и, значит, она может быть однозначно сопоставлена числу i, которое является номером некоторого члена дизъюнкции (3).

Члены дизъюнкции (3) можно расположить в таком порядке, чтобы соответствующие им «кратности» при возрастании номеров дизъюнктивных членов не убывали (этого можно достичь, используя средства исчисления высказываний). Можно также считать, что в дизъюнкции (3) нет повторяющихся членов, потому что в противном случае эти повторения тоже можно было бы устранить с помощью средств исчисления высказываний.

При соблюдении этих условий будут выполняться следующие два утверждения о термах, входящих в формулу (3):

1. Если $\mathfrak{p}$ отлично от $\mathfrak{q}$ или i отлично от j, то термы $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{f}^j_{\mathfrak{q}}$ графически различны.

Действительно, графическое совпадение термов $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{f}^j_{\mathfrak{q}}$ может иметь место только тогда, когда совпадают $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$; кроме того, для совпадения $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ с $\mathfrak{f}^j_{\mathfrak{q}}$ требуется, чтобы терм $\mathfrak{t}^{(i)}_{\mathfrak{m}}$ совпадал с термом $\mathfrak{t}^{(j)}_{\mathfrak{m}}$ при всех $\mathfrak{m}=1, \ldots, \mathfrak{r}$. Но при выполнении этих условий термы $\mathfrak{f}^i_1, \ldots, \mathfrak{f}^i_{\mathfrak{s}}$ совпадают с термами $\mathfrak{f}^j_1, \ldots, \mathfrak{f}^j_{\mathfrak{s}}$, а это может иметь место лишь тогда, когда число i совпадает с числом j.

2. Терм $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ может совпадать с одним из термов $\mathfrak{t}^{(j)}_1, \ldots, \mathfrak{t}^{(j)}_{\mathfrak{r}}$ или быть его составной частью лишь тогда, когда i меньше j.

Действительно, если $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ совпадает с одним из термов $\mathfrak{t}^{(j)}_1, \ldots, \mathfrak{t}^{(j)}_{\mathfrak{r}}$ или является составной частью одного из них, то кратность, сопоставленная числу i, меньше кратности, сопоставленной j, и следовательно, i меньше j.

Возьмем теперь набор ранее не встречавшихся занумерованных свободных индивидных переменных

$$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}}$$

и заменим в формуле (3) каждый из термов $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}=1, \ldots, \mathfrak{s}$; $i=1, \ldots, \mathfrak{m}$) переменной $\mathfrak{a}_{(i-1)\cdot\mathfrak{s}+\mathfrak{p}}$[1]), причем эту замену мы произведем всюду, где терм $\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{p}}$ входит в формулу (3), но не является составной частью какого-либо другого терма $\mathfrak{f}^j_{\mathfrak{q}}$. Тогда ввиду утверждения 1 мы снова получим формулу, являющуюся результатом подстановки в тождественно истинную формулу исчисления высказываний.

[1]) Обозначения $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}$, $(i-1)\cdot\mathfrak{s}+\mathfrak{p}$ и другие им подобные здесь и в дальнейшем следует понимать как обозначения цифр, получающихся в результате вычисления соответствующих арифметических выражений.

В получившейся таким образом формуле

$$(3^*)\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{t}^{(1)}_1, \ldots, \mathfrak{t}^{(1)}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t}^{(2)}_1, \ldots, \mathfrak{t}^{(2)}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{s}+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{2\cdot\mathfrak{s}}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t}^{(\mathfrak{m})}_1, \ldots, \mathfrak{t}^{(\mathfrak{m})}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}})$$

переменные

$$\mathfrak{a}_{(i-1)\cdot\mathfrak{s}+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{i\cdot\mathfrak{s}},$$

согласно утверждению 2, не встречаются ни в одном из первых $i-1$ членов дизъюнкции, а также ни в одном из термов $\mathfrak{t}^{(i)}_1, \ldots, \mathfrak{t}^{(i)}_{\mathfrak{r}}$.

Это обстоятельство позволяет вывести средствами исчисления предикатов из формулы (3*) формулу (3). Для изложения этого вывода к ранее сформулированным производным правилам[1]) (γ) — (λ) исчисления предикатов целесообразно добавить два новых.

Правило (μ): *Если какая-либо формула имеет вид дизъюнкции, то в любом ее члене любой терм можно заменить какой-либо связанной переменной, связав эту переменную квантором существования, проставленным в начале этого дизъюнктивного члена.*

Правило (ν): *Если какая-либо формула имеет вид дизъюнкции и если один из ее членов содержит какую-либо свободную индивидную переменную, не входящую в другие члены этой дизъюнкции, то эту свободную переменную внутри рассматриваемого члена можно всюду заменить какой-нибудь связанной переменной и проставить в начале этого члена соответствующий квантор всеобщности.*

Выбирая связанные переменные, необходимо всякий раз следить за тем, чтобы между ними не возникало коллизий.

Правило (μ) получается с использованием основной формулы (b) и средств исчисления высказываний. Так как средства исчисления высказываний позволяют производить различные перестановки и группировки членов дизъюнкции, то можно считать, что рассматриваемая дизъюнкция имеет вид

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{t}),$$

где $\mathfrak{t}$ — терм, который должен быть заменен связанной переменной. Таким образом, задача заключается в том, чтобы формулу $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{t})$ перевести в формулу вида

$$\mathfrak{A} \vee \exists\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}),$$

где $\mathfrak{x}$ обозначает какую-либо связанную переменную, не входя-

[1]) См. т. 1, с. 145—147 и 174—182.

щую в $\mathfrak{B}(a)$. Эта формула выводится из заданной формулы и формулы

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{t}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}),$$

получающейся путем подстановки из основной формулы (b).

Заметим, что здесь допускается, чтобы терм $\mathfrak{t}$ входил в формулу $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{t})$ и на местах, отличных от указанных (в частности, он может входить и в формулу $\mathfrak{A}$).

В правиле (ν) мы сделали более сильное предположение. Здесь заменяемый терм должен быть свободной индивидной переменной, и он может встречаться только внутри модифицируемого члена дизъюнкции.

Как и при обосновании правила (μ), здесь можно считать, что заданная формула имеет вид

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{c}),$$

где $\mathfrak{c}$ — свободная индивидная переменная, которая встречается только в указанном месте. Задача заключается в том, чтобы эту формулу перевести в формулу вида

$$\mathfrak{A} \vee \forall \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}),$$

где $\mathfrak{x}$ — некоторая связанная переменная, не входящая в $\mathfrak{B}(\mathfrak{c})$.

Этот переход мы выполним следующим образом: сначала преобразуем формулу

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{c})$$

в формулу

$$\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{c}),$$

потом из этой формулы с помощью схемы (α)[1] [а также, возможно, некоторых подстановок и переименований] получим формулу

$$\neg \mathfrak{B} \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}),$$

а затем уже с помощью элементарного преобразования получим формулу

$$\mathfrak{A} \vee \forall \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}).$$

Между прочим, пользуясь основной формулой (a), можно провести этот переход и в обратном направлении, так что модификация формулы по правилу (ν) всегда представляет собой обратимую операцию, в результате которой первоначальная формула переходит в формулу, дедуктивно ей равную. Модификация же формулы по правилу (μ), как легко убедиться, вообще говоря, не является обратимой.

[1]) См. т. I, с. 142.

Теперь с помощью правил (μ) и (ν) мы произведем обратный переход от формулы (3*) к формуле $\mathfrak{E}$.

Во-первых, к каждой из переменных

$$\mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+1}, \ \mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+2}, \ \ldots, \ \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}},$$

входящих только в последний член дизъюнкции (3*) и не входящих в термы $\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}$, мы можем применить правило (ν) и в результате $\mathfrak{s}$-кратного применения этого правила (в качестве связанных переменных мы берем $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}$) вместо этого последнего члена получится член

$$\forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\mathfrak{s} \mathfrak{A}\left(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}\right),$$

а в результате $\mathfrak{r}$-кратного применения правила (μ) (в качестве связанных переменных мы берем $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}$) вместо этого члена получится член

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\mathfrak{r} \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\mathfrak{s} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}).$$

Переменные

$$\mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-2)\cdot\mathfrak{s}+1}, \ \ldots, \ \mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}}$$

фигурируют только в предпоследнем члене дизъюнкции, причем они не входят в термы

$$\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m}-1)}, \ \ldots, \ \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m}-1)},$$

так что с предпоследним членом мы можем поступить в точности так же, как перед этим поступили с последним, и вместо него опять в результате $\mathfrak{s}$-кратного применения правила (ν) и последующего $\mathfrak{r}$-кратного применения правила (μ) получится член

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\mathfrak{r} \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\mathfrak{s} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}).$$

Этот процесс может быть продолжен и далее, и в результате мы получим дизъюнкцию, у которой каждый член имеет вид

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\mathfrak{r} \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\mathfrak{s} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}),$$

т. е. совпадает с формулой $\mathfrak{E}$. Разумеется, эта дизъюнкция с помощью средств исчисления высказываний может быть преобразована в $\mathfrak{E}$. Таким образом, действительно, с помощью средств исчисления предикатов от формулы (3*) можно вернуться к формуле $\mathfrak{E}$.

Тем самым доказательство второй ε-теоремы закончено. Пользуясь методом, примененным в этом доказательстве, мы получим некоторые дальнейшие результаты.

§ 2. Распространение второй ε-теоремы на общую аксиому равенства. Смежные проблемы

Наше доказательство второй ε-теоремы существенным образом опиралось на обобщенную первую ε-теорему, благодаря которой, как мы помним, оказывался возможным переход от формулы (2)

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, f_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots, f_\sigma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau))$$

к дизъюнкции (3), состоящей из членов вида

$$\mathfrak{A}\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}, f_1\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}\right), \ldots, f_\sigma\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}\right)\right) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Поэтому представляется правдоподобным, что и вторую ε-теорему, подобно первой, можно будет распространить на тот случай, когда в рассматриваемом формализме F, кроме собственных аксиом, имеется общая аксиома равенства (J_2).

Действительно, этого удается достичь путем небольшой модификации нашего предыдущего доказательства.

Наша задача заключается в том, чтобы по любому осуществляемому в рамках формализма F выводу какой-либо не содержащей ε-символа формулы $\mathfrak{E}$ получить такой вывод этой формулы, в котором ε-символ не участвовал бы. В данном случае можно вновь произвести те упрощения, которые были произведены нами ранее[1]), т. е. можно считать, что в исходном выводе формулы $\mathfrak{E}$ не используются собственные аксиомы, а также что формула $\mathfrak{E}$ имеет вид сколемовской нормальной формы, содержащей в кванторной приставке хотя бы один квантор существования. Тем самым наша задача сводится к следующей. Пусть дана формула $\mathfrak{E}$ вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma),$$

построенная из символов исчисления предикатов и, возможно, некоторых индивидных, функциональных и предикатных символов; пусть $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$ — полный список входящих в нее связанных переменных, и пусть задан вывод этой формулы средствами исчисления предикатов с использованием аксиомы равенства (J_2) и ε-формулы; требуется построить такой вывод этой формулы, который использовал бы только средства исчисления предикатов и аксиому равенства (J_2).

Для этого мы, как и раньше, сначала из формулы $\mathfrak{E}$ средствами исчисления предикатов выведем соответствующую формулу $\mathfrak{E}_1$

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, f_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots, f_\sigma(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau)),$$

[1]) См. рассуждение на с. 170—175.

так что в итоге получится вывод этой формулы, использующий средства исчисления предикатов, аксиому равенства (J_2) и ε-формулу. Из этого вывода по усиленной первой ε-теореме[1]) получается вывод некоторой дизъюнкции $\mathfrak{D}$, состоящей из членов вида

$$\mathfrak{A}\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}, f_1\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}\right), \ldots, f_\sigma\left(t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}\right)\right)$$

$(i = 1, \ldots, m)$, где термы $t_1^{(i)}, \ldots, t_\tau^{(i)}$ не содержат вхождений ε-символа, причем этот вывод осуществляется средствами элементарного исчисления со свободными переменными с использованием ряда специальных аксиом равенства. Процедура исключения, с помощью которой получается этот вывод, дает нам его в модифицированном виде, где подстановки уже перенесены в исходные формулы, так что эти исходные формулы получаются в результате подстановок частично из тождественно истинных формул исчисления высказываний, а частично из специальных аксиом равенства; результирующая же формула вывода $\mathfrak{D}$ при этом получается из исходных формул в результате применения одних только схем заключения (и повторений).

При этом следует обратить особое внимание на то, что ни одна из применяющихся специальных аксиом равенства не является аксиомой равенства для какого-либо аргумента какого-либо из функциональных знаков $f_1, \ldots, f_\sigma$. Действительно, эти знаки появляются в выводе формулы $\mathfrak{E}_1$ только в результате подстановок вместо индивидных переменных[2]) и они не входят ни в одну из формул вида

$$a = b \to (\mathfrak{B}(a) \to \mathfrak{B}(b)),$$

которые в этом выводе формулы $\mathfrak{E}_1$ получаются в результате подстановки в аксиому (J_2).

Пусть теперь $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_f$ — те из исходных формул, которые получаются путем подстановки из специальных аксиом равенства. Тогда по дедукционной теореме формула

$$\mathfrak{S}_1 \& \ldots \& \mathfrak{S}_f \to \mathfrak{D}$$

может быть выведена средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными[3]) без использования аксиом. Следовательно, эта формула должна получаться в результате подстановки из тождественно истинной формулы исчисления высказываний и то же самое должно быть верно и для любой формулы, получающейся из нее в результате перестановок дизъ-

[1]) См. с. 109 и далее.
[2]) См. вывод формулы (2) из формулы $\mathfrak{E}$ на с. 170.
[3]) См. т. I, с. 199 и далее.

юнктивных членов, вычеркивания внутри формулы $\mathfrak{D}$ повторяющихся дизъюнктивных членов или же таких замен некоторых термов другими термами, при которых совпадающие аргументы элементарных формул снова переходят в совпадающие.

В результате этих операций, как было показано выше, мы можем добиться того, чтобы вместо дизъюнкции $\mathfrak{D}$ у нас получилась дизъюнкция $\mathfrak{D}^*$, имеющая вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(1)}, a_1, \ldots, a_\varepsilon) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(m)}, a_{(m-1)\cdot\varepsilon+1}, \ldots, a_{m\cdot\varepsilon}),$$

где $a_1, \ldots, a_{m\cdot\varepsilon}$ — вновь введенные занумерованные свободные индивидные переменные, причем переменные $a_{(i-1)\cdot\varepsilon+1}, \ldots, a_{i\cdot\varepsilon}$ не встречаются ни в одном из термов $\mathfrak{t}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, l)$.

Вместе с тем, в результате произведенных замен формулы $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mathfrak{f}$ перейдут в формулы $\mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_\mathfrak{f}^*$, так что вместо формулы

$$\mathfrak{G}_1 \& \ldots \& \mathfrak{G}_\mathfrak{f} \to \mathfrak{D}$$

у нас появится формула

$$\mathfrak{G}_1^* \& \ldots \& \mathfrak{G}_\mathfrak{f}^* \to \mathfrak{D}^*,$$

из которой с помощью элементарного преобразования мы получим дизъюнкцию

$$\neg\mathfrak{G}_1^* \vee \ldots \vee \neg\mathfrak{G}_\mathfrak{f}^* \vee \mathfrak{D}^*.$$

Значит, и эта дизъюнкция получается в результате подстановок из тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

Любая из формул $\mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_\mathfrak{f}^*$ имеет, как и соответствующие формулы из числа $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mathfrak{f}$, один из двух видов

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b)),$$
$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)),$$

где $\mathfrak{Q}$ — какой-либо предикатный символ, а $\mathfrak{f}$ — функциональный знак, отличный от знаков $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\varepsilon$ (кроме указанных аргументов эти символы и знаки могут иметь и какие-нибудь другие; отметим также, что $\mathfrak{Q}$ может быть и знаком равенства).

К дизъюнкции

$$\neg\mathfrak{G}_1^* \vee \ldots \vee \neg\mathfrak{G}_\mathfrak{f}^* \vee \mathfrak{D}^*$$

мы применим правила (μ) и (ν) [1]. Применив нужное число раз

[1]) См. с. 173.

правило (μ) к дизъюнктивному члену $\neg\mathfrak{G}_\mathfrak{j}^*$ (где $\mathfrak{j}$ является одним из чисел $1, \ldots, \mathfrak{f}$), мы получим вместо него такой дизъюнктивный член $\mathfrak{H}_\mathfrak{j}$, который получается из отрицания некоторой специальной аксиомы равенства в результате замены входящих в него свободных индивидных переменных переменными, связанными кванторами существования, стоящими в начале этого дизъюнктивного члена.

Отрицание $\neg\mathfrak{H}_\mathfrak{j}$ любого такого члена можно перевести в такую формулу, которая получается из некоторой специальной аксиомы равенства в результате замены свободных индивидных переменных связанными и потому выводима из формулы (J_2) с помощью исчисления предикатов.

В результате применения правила (μ) к дизъюнктивным членам $\neg\mathfrak{G}_1^*, \ldots, \neg\mathfrak{G}_\mathfrak{f}^*$ из формулы

$$\neg\mathfrak{G}_1^* \vee \ldots \vee \neg\mathfrak{G}_\mathfrak{f}^* \vee \mathfrak{D}^*$$

получится формула

$$\mathfrak{H}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_\mathfrak{f} \vee \mathfrak{D}^*.$$

Так как входящие в нее формулы $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mathfrak{f}$ не содержат свободных переменных, то применение правил (ν) и (μ) к дизъюнктивным членам $\mathfrak{D}^*$ может быть произведено таким образом, как если бы формула $\mathfrak{D}^*$ стояла отдельно; как было показано ранее, мы можем таким образом преобразовать каждый дизъюнктивный член формулы $\mathfrak{D}^*$ в формулу $\mathfrak{E}$, так что в итоге получится формула

$$\mathfrak{H}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_\mathfrak{f} \vee \mathfrak{E} \vee \ldots \vee \mathfrak{E},$$

которую затем можно будет преобразовать в формулу

$$\neg\mathfrak{H}_1 \& \ldots \& \neg\mathfrak{H}_\mathfrak{f} \to \mathfrak{E}.$$

Таким образом, эта формула выводима средствами исчисления предикатов. Но так как формулы $\neg\mathfrak{H}_1, \ldots, \neg\mathfrak{H}_\mathfrak{f}$, как уже отмечалось выше, выводимы из (J_2) с помощью исчисления предикатов, то мы получаем вывод формулы $\mathfrak{E}$ из формулы (J_2), осуществляемый средствами одного только исчисления предикатов.

Тем самым показано, что вторая ε-теорема остается справедливой и в том случае, если в рассматриваемый формализм F будет включена аксиома равенства (J_2).

В частности, отсюда получается следующая.

Теорема. *Пусть F — расширенный логический формализм, получающийся из исчисления предикатов путем добавления к нему знака равенства, аксиом равенства (J_1) и (J_2), ε-символа и ε-формулы. Тогда всякая выводимая в формализме F формула, не содер-*

жащая вхождений ε-символа, будет выводима в F и без использования ε-символа.

Следовательно, если какая-либо формула, построенная из символов и переменных исчисления предикатов и знака равенства, может быть выведена с использованием, кроме правил исчисления предикатов и аксиом равенства (J_1) и (J_2), еще и символьных решений некоторых экзистенциальных формул, то эти символьные решения из данного вывода могут быть устранены.

Более того, из доказанного следует, что если какая-либо формула $\mathfrak{E}$ выведена с помощью исчисления предикатов, аксиом равенства и каких-либо собственных аксиом, а также с привлечением операции символьного решения экзистенциальных формул и если ни один из введенных при этом символов в формуле $\mathfrak{E}$ не встречается, то эти символьные решения из вывода $\mathfrak{E}$ могут быть устранены.

Вместе с тем метод, с помощью которого нашу вторую ε-теорему мы распространили на аксиому (J_2), позволяет также доказать следующее утверждение:

Если формула $\mathfrak{E}$, построенная из символов и переменных исчисления предикатов и каких-либо индивидных, функциональных и предикатных символов, но не содержащая знака равенства, выводима с помощью средств исчисления предикатов, ε-формулы и аксиом равенства, то она выводима и средствами одного только исчисления предикатов.

Из этого утверждения, в частности, следует, что из вывода любой формулы $\mathfrak{E}$, обладающей указанными свойствами, производимого с помощью средств исчисления предикатов и аксиом равенства (J_1), (J_2), применение аксиом равенства может быть устранено.

Эту теорему мы в свое время доказали для случая, когда формула $\mathfrak{E}$ представляет собой формулу исчисления предикатов [1]). Приведенное там доказательство немедленно распространяется на случай формулы $\mathfrak{E}$, содержащей индивидные или предикатные символы, но оно не может быть распространено на случай, когда в $\mathfrak{E}$ встречаются функциональные символы.

Доказательство мы снова начнем с замечания о том, что без ограничения общности можно считать, что формула $\mathfrak{E}$ имеет вид сколемовской нормальной формы. Далее, в точности так же, как раньше, получается, что, используя вывод формулы $\mathfrak{E}$, можно найти некоторую формулу

$$\mathfrak{G}_1^* \& \ldots \& \mathfrak{G}_f^* \to \mathfrak{D}^*,$$

обладающую следующими свойствами:

[1]) См. т. I, с. 462—466.

1. Эта формула получается в результате подстановки из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

2. Каждая из формул $\mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_f^*$ имеет один из двух видов

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b)),$$

$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)),$$

где $\mathfrak{Q}$ — некоторый предикатный, а $\mathfrak{f}$ — некоторый функциональный символ; эти символы, кроме указанного аргумента, могут содержать и какие-нибудь другие, причем последние в $\mathfrak{Q}(a)$ и в $\mathfrak{Q}(b)$ и соответственно в $\mathfrak{f}(a)$ и в $\mathfrak{f}(b)$ должны быть совпадающими.

3. От формулы $\mathfrak{D}^*$ можно вернуться к формуле $\mathfrak{E}$ с помощью средств одного только исчисления предикатов.

Из связи, существующей между формулой $\mathfrak{D}^*$ и формулой $\mathfrak{E}$, которая, по предположению, не содержит знака равенства, кроме того, вытекает, что формула $\mathfrak{D}^*$ тоже не содержит знака равенства. Действительно, формула $\mathfrak{E}$, как мы знаем, имеет вид

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_s \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

а $\mathfrak{D}^*$ представляет собой дизъюнкцию, члены которой получаются из формулы

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

в результате замены связанных переменных $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ некоторыми термами.

Свойство 1 сохранится и в том случае, если в формуле

$$\mathfrak{G}_1^* \& \ldots \& \mathfrak{G}_f^* \to \mathfrak{D}^*$$

мы заменим формулой $A \vee \neg A$ каждое встречающееся в ней равенство с одинаковыми термами в левой и правой частях и формулой $A \& \neg A$ — любое другое равенство. Действительно, совпадающие элементарные формулы при этом всюду будут заменены одинаковым образом.

В результате этой замены всякая формула

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b))$$

или соответственно

$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b))$$

перейдет, если терм a отличается по внешнему виду от терма b, в некоторую формулу

$$A \& \neg A \to \mathfrak{B},$$

а если a совпадает с b, — в некоторую формулу

$$A \vee \neg A \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{C})$$

или соответственно в формулу

$$A \vee \neg A \rightarrow A \vee \neg A.$$

Таким образом, в результате указанной замены каждая формула $\mathfrak{G}_i^*$ $(i = 1, \ldots, f)$ перейдет в такую формулу $\tilde{\mathfrak{G}}_i$, которая может быть получена подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, между тем как формула $\mathfrak{D}^*$ при этом останется без изменений.

А теперь, так как формула

$$\tilde{\mathfrak{G}}_1 \& \ldots \& \tilde{\mathfrak{G}}_f \rightarrow \mathfrak{D}^*$$

и каждая из формул $\tilde{\mathfrak{G}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{G}}_f$ получаются подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, то же самое можно будет сказать и относительно формулы $\mathfrak{D}^*$. Но из $\mathfrak{D}^*$ с помощью исчисления предикатов может быть получена формула $\mathfrak{E}$. Таким образом, как и утверждалось, формула $\mathfrak{E}$ может быть выведена средствами одного только исчисления предикатов.

Доказанная теорема немедленно может быть обобщена следующим образом:

Если из какой-либо системы аксиом, состоящей из аксиом равенства (J_1), (J_2) *и каких-либо собственных аксиом, не содержащих знака равенства, с помощью исчисления предикатов выведена некоторая формула* $\mathfrak{E}$, *не содержащая знака равенства, то применение аксиом равенства из ее вывода может быть исключено.*

Эта усиленная вторая ε-теорема позволяет нам получить новое доказательство теоремы об устранимости ι-правила[1]), так как с введением ε-формулы ι-правило становится производным, а ε-символ берет на себя роль ι-символа[2]). Но это доказательство устранимости ι-правила распространяется только на такие формализмы, которые получаются из исчисления предикатов с ι-правилом путем добавления каких-либо собственных аксиом и, может быть, аксиомы равенства (J_2), в то время как прежняя теорема была доказана с включением аксиомы полной продукции.

Наоборот, для формализма системы (Z), содержащего и аксиому индукции, справедливость утверждения второй ε-теоремы можно вывести из теоремы об устранимости ι-правила. Действительно, как было показано ранее[3]), в этом формализме при добавлении ι-правила можно определить символ $\mu_x A(x)$, для которого с помощью ι-правила выводится формула

$$A(a) \rightarrow A(\mu_x A(x)).$$

[1]) См. т. 1, с. 511.
[2]) См. с. 34.
[3]) См. т. I, с. 479—482 или Приложение I.

Поэтому, если вывод некоторой формулы $\mathfrak{E}$, принадлежащей формализму системы (Z), производится с помощью исчисления предикатов и аксиом системы (Z) с добавлением ε-символа и ε-формулы, то применения ε-символа и ε-формулы в этом выводе могут быть заменены соответствующими применениями ι-правила. Но в силу упомянутой теоремы об устранимости ι-правила эти применения ι-правила могут быть исключены, так как в формуле $\mathfrak{E}$ отсутствуют вхождения ι-символа, и, таким образом, мы приходим к некоторому выводу формулы $\mathfrak{E}$ из аксиом системы (Z), осуществляемому средствами одного только исчисления предикатов[1]).

В тех случаях, когда устранимость ι-правила может быть выведена из второй ε-теоремы, конечно, можно иметь дело прямо с ε-символом и ε-формулой, а не с ι-правилом. В качестве примера мы рассмотрим вопрос о *замене функциональных знаков предикатными символами*. В свое время этот вопрос мы подвергали анализу с помощью теоремы об устранимости ι-правила[2]). Идущее далее рассуждение имеет менее общий характер, поскольку оно не охватывает полной индукции; но, с другой стороны, нынешний результат, в отличие от прежнего, будет относиться не только к таким формализмам, которые включают в себя аксиомы равенства.

Мы будем исходить из формализма F, получающегося из исчисления предикатов добавлением знака равенства, аксиом равенства (J_1) и (J_2), а также некоторых дополнительных символов: индивидных, функциональных и предикатных, вместе с какими-либо собственными аксиомами $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$. К числу этих символов могут принадлежать и некоторые функциональные знаки. Пусть эти функциональные знаки будут

$$\mathfrak{f}_1(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}_1}), \ldots, \mathfrak{f}_m(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}_m}).$$

Мы построим по F некоторый расширенный формализм F_1, сопоставив указанным функциональным знакам предикатные символы

$$\mathfrak{P}_1(b, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}_1}), \ldots, \mathfrak{P}_m(b, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}_m})$$

и сформулировав для этих символов следующие явные определения:

$$\{1\} \quad \mathfrak{P}_i(b, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}_i}) \sim b = \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}_i}) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Это расширение формализма F до F_1 является несущественным,

[1]) В связи с этим см. замечание на с. 29—30.
[2]) См. т. 1, с 541—543.

потому что оно состоит всего лишь в добавлении явно определенных символов. Если формализм F непротиворечив, то непременно будет непротиворечивым и F_1. Из формул {1} с помощью аксиом равенства могут быть выведены формулы

$$\{2\} \quad \begin{cases} \exists x \mathfrak{P}_i(x, a_1, \ldots, a_{f_i}) & (i = 1, \ldots, m), \\ \mathfrak{P}_i(b, a_1, \ldots, a_{f_i}) \,\&\, \mathfrak{P}_i(c, a_1, \ldots, a_{f_i}) \to b = c, \end{cases}$$

а также эквивалентности

$$\{3\} \quad A(f_i(a_1, \ldots, a_{f_i})) \sim \forall x (\mathfrak{P}_i(x, a_1, \ldots, a_{f_i}) \to A(x)) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

С помощью эквивалентностей {3} каждая формула $\mathfrak{G}$ из формализма F_1 может быть переведена в некоторую формулу $\mathfrak{G}^*$, не содержащую функциональных знаков.

В частности, аксиомы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ могут быть переведены в некоторые формулы $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$, в которых функциональные знаки уже фигурировать не будут. Мы будем считать такого рода формулы $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$ построенными. Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — какая-либо формула, выводимая в формализме F_1, и пусть $\mathfrak{G}^*$ — формула без функциональных знаков, в которую переводится формула $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{G}^*$ с помощью исчисления предикатов и аксиом равенства может быть выведена из формул $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$ и формул {1}. В любом таком выводе, вообще говоря, встречаются функциональные знаки. Однако мы покажем, что эти функциональные знаки могут быть устранены, если в качестве аксиом ввести (выводимые в формализме F_1) формулы {2}.

В самом деле, пусть $\mathfrak{G}^*$ — какая-либо формула формализма F_1, не содержащая функциональных знаков, и пусть нам дан какой-либо вывод этой формулы из формул $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$ и {1}, использующий средства исчисления предикатов и аксиомы равенства (J_1) и (J_2). Тогда функциональные знаки $f_1, \ldots, f_m$ можно будет устранить введением ε-символа и ε-формулы и заменой каждого выражения

$$f_i(a_1, \ldots, a_{f_i})$$

выражением

$$\varepsilon_x \mathfrak{P}_i(x, a_1, \ldots, a_{f_i})$$

или

$$\varepsilon_v \mathfrak{P}_i(v, a_1, \ldots, a_{f_i})$$

соответственно (при этом мы пользуемся свободой выбора связанных переменных для предотвращения коллизий между ними).

Тогда формулы {1} перейдут в формулы

$$\{4\} \quad \mathfrak{P}_i(b, a_1, \ldots, a_{f_i}) \sim b = \varepsilon_x \mathfrak{P}_i(x, a_1, \ldots, a_{f_i}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

которые выводимы из формул {2} с помощью исчисления предикатов, ε-формулы и аксиомы равенства (J_2).

Тем самым мы получаем некоторый вывод формулы $\mathfrak{G}^*$ из формул $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$, {2} и аксиом равенства с помощью исчисления предикатов и ε-формулы. А так как формулы {2}, равно как и формулы $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$, не содержат ни формульных переменных, ни ε-символа, то по второй ε-теореме из этого вывода ε-символ можно исключить, так что у нас получится вывод формулы $\mathfrak{G}^*$ из формул $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$, (J_1), (J_2) и {2} с помощью средств исчисления предикатов.

Обозначим посредством F^* формализм, который получится из F, если мы возьмем формулы $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$ вместо формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, а формулы {2} в качестве аксиом и исключим функциональные знаки [аксиомы равенства (J_1) и (J_2) сохраняются]. Тогда в силу вышеизложенного будет верна следующая

Теорема. *По всякой формуле $\mathfrak{G}$ формализма F можно построить некоторую формулу $\mathfrak{G}^*$ формализма F^*, переводимую в $\mathfrak{G}$ с помощью эквивалентностей* {3}, *т. е. внутри F_1. При этом, если формула $\mathfrak{G}$ будет выводима в F, то всякая формула $\mathfrak{G}^*$, находящаяся к $\mathfrak{G}$ в указанном отношении, тоже будет выводима в F^*.*

Верно и обратное:

Если формула $\mathfrak{G}^*$ выводима в F^*, то $\mathfrak{G}$ тоже можно будет вывести в F.

Действительно, пусть нам дан некоторый вывод формулы $\mathfrak{G}^*$ в формализме F^*. Заменим в этом выводе каждое выражение

$$\mathfrak{P}_i(b, a_1, \ldots, a_{f_i})$$

равенством

$$b = f_i(a_1, \ldots, a_{f_i}),$$

вследствие чего вместо предикатных символов $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ снова появятся функциональные знаки $f_1, \ldots, f_m$. Тогда у нас получится некоторая последовательность формул, которую можно будет дополнить до вывода формулы $\mathfrak{G}$ в формализме F. В самом деле, в результате указанной замены формула $\mathfrak{G}^*$ перейдет в некоторую формулу $\mathfrak{G}^{**}$, каждая из аксиом $\mathfrak{A}_i^*$ перейдет в некоторую формулу $\mathfrak{A}_i^{**}$, аксиомы равенства останутся без изменений, а из формул {2} получатся такие формулы, которые можно будет вывести с помощью аксиом равенства (J_1) и (J_2). Тем самым мы получим вывод формулы $\mathfrak{G}^{**}$ из формул $\mathfrak{A}_1^{**}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{**}$ средствами

исчисления предикатов, а кроме того из формул {3} средствами исчисления предикатов можно будет вывести эквивалентности

$$\mathfrak{E} \sim \mathfrak{E}^*, \quad \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n \sim \mathfrak{A}_n^*.$$

Если в выводах этих эквивалентностей выражения $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{b}, a_1, \ldots, a_{f_i})$ всюду заменить соответствующими им равенствами $\mathfrak{b} = f_i(a_1, \ldots, a_{f_i})$, то результирующие формулы этих выводов перейдут в эквивалентности

$$\mathfrak{E} \sim \mathfrak{E}^{**}, \ \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_1^{**}, \ \ldots, \ \mathfrak{A}_n \sim \mathfrak{A}_n^{**},$$

а из формул {3} получатся такие формулы, которые можно будет вывести из аксиом равенства. Поэтому у нас получатся выводы формул

$$\mathfrak{E} \sim \mathfrak{E}^{**}, \ \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_1^{**}, \ \ldots, \ \mathfrak{A}_n \sim \mathfrak{A}_n^{**},$$

использующие средства исчисления предикатов и аксиомы равенства (J_1) и (J_2), а эти выводы в сочетании с ранее полученным выводом формулы $\mathfrak{E}^{**}$ из формул $\mathfrak{A}_1^{**}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{**}$, (J_1), (J_2) дадут вывод формулы $\mathfrak{E}$ из аксиом $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, (J_1), (J_2) средствами исчисления предикатов, т. е. вывод $\mathfrak{E}$ в формализме F.

Таким образом, имеет место определенный параллелизм между выводами в формализме F и выводами в формализме F^*:

Во-первых, всякая формула формализма F с помощью явных определений {1} и аксиом равенства переводима в некоторую формулу формализма F^*, и обратно, всякая формула формализма F^* при замене всех входящих в нее выражений $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{b}, a_1, \ldots, a_{f_i})$ соответствующими им равенствами $\mathfrak{b} = f_i(a_1, \ldots, a_{f_i})$ переходит в некоторую формулу формализма F, в которую она переводима с помощью формул {1} и аксиом равенства; во-вторых, если какие-либо две формулы $\mathfrak{E}$ из F и $\mathfrak{E}^*$ из F^* переводимы друг в друга с помощью формул {1} и аксиом равенства, то по любому выводу $\mathfrak{E}$ в формализме F мы получим некоторый вывод $\mathfrak{E}^*$ в формализме F^* и наоборот.

Тем самым исследование выводимостей в формализме F сводится к исследованию выводимостей в F^*. Но формализм F^* является более узким, поскольку он не содержит функциональных знаков.

Так что мы вновь приходим к заключению, что теоретико-доказательственное исследование формализованных систем аксиом первой ступени, содержащих аксиомы равенства (J_1) и (J_2), всегда может быть сведено к исследованию систем без функциональных знаков.

Недостатком сформулированного результата является ограничивающее его предположение о том, что рассматриваемый формализм должен обязательно содержать аксиомы равенства (J_1) и (J_2). Но с помощью доказанной ранее теоремы об исключении аксиом равенства [1]) можно получить соответствующий результат и для тех случаев, когда заданный формализм либо вообще не содержит знака равенства, либо хотя и содержит его, но имеет только собственные аксиомы и, следовательно, не включает в себя аксиому (J_2).

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть нам дан формализм F_0, получающийся из исчисления предикатов добавлением некоторых символов (индивидных, функциональных и предикатных) и некоторых собственных аксиом $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Пусть знак равенства в число перечисленных символов не входит. Так как по условию в F_0 могут содержаться некоторые функциональные знаки

$$f_i(a_1, \ldots, a_{f_i}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

то путем добавления знака равенства и аксиом (J_1) и (J_2) можно будет расширить этот формализм F_0 до некоторого формализма F только что рассмотренного типа, а от F описанным выше способом можно будет перейти к формализму F^*, не содержащему функциональных знаков.

Каждая формула $\mathfrak{E}$ формализма F_0 — как формула формализма F — с использованием эквивалентностей {3} может быть переведена в некоторую формулу $\mathfrak{E}^*$ формализма F^* и по выводу $\mathfrak{E}$ в F_0 мы получим некоторый вывод $\mathfrak{E}^*$ в F^*. Но верно и обратное. Действительно, по выводу $\mathfrak{E}^*$ в F^* мы сначала получим вывод $\mathfrak{E}$ в F, т. е. вывод $\mathfrak{E}$ из аксиом $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ с помощью исчисления предикатов и аксиом равенства (J_1) и (J_2). Но так как ни формула $\mathfrak{E}$, ни аксиомы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ (которые все принадлежат F_0) знака равенства не содержат, то по ранее доказанному из этого вывода можно исключить применение аксиом равенства, и тогда мы получим вывод формулы $\mathfrak{E}$ в формализме F_0.

Таким образом, исследование выводимостей в F_0 может быть сведено к исследованию некоторых выводимостей в формализме F^*, не содержащем функциональных знаков.

Остается еще рассмотреть случай, когда в формализме хотя и присутствует знак равенства, но для него имеются только собственные аксиомы, и, значит, нет аксиомы (J_2). Этот случай можно свести к только что рассмотренному, взяв вместо знака равенства какой-нибудь другой символ, например $\mathrm{Id}(a, b)$. Так

[1]) См. с. 180—182.

как для этого символа будут иметься только собственные аксиомы, он может быть полностью уравнен с остальными предикатными символами, и тогда мы получим некий формализм F_0 без знака равенства. В соответствующем формализме F^* будут содержаться одновременно два символа: $=$ и Id. Для символа $=$ у нас будут иметься аксиомы (J_1) и (J_2), а для символа Id — некоторые собственные аксиомы, которые будут внесены в список аксиом $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_n^*$.

Поэтому и в случае таких формализованных систем аксиом с функциональными знаками, когда равенство либо вообще отсутствует, либо фигурирует в сочетании с одними лишь собственными аксиомами, исследование выводимости формул сводится к исследованию выводимости в некоторых специальных системах аксиом без функциональных знаков [1]).

Рассмотренное здесь сведение теоретико-доказательственного исследования систем аксиом с функциональными знаками к исследованию систем без функциональных знаков имеет большое принципиальное значение, так как для систем аксиом первой ступени без функциональных знаков исследование выводимости какой-либо формулы, как мы уже знаем, сводится к выяснению вопроса о выводимости некоторой формулы в чистом исчислении предикатов. Еще раз вкратце напомним, как происходит это сведение. Во-первых, исследование выводимости произвольной формулы из формализма рассматриваемой системы аксиом сводится к исследованию выводимости некоторой формулы без формульных переменных [2]). В выводе формулы такого рода аксиома равенства (J_3) может быть заменена некоторыми собственными аксиомами, так что мы должны будем иметь дело с выводимостью формулы только из собственных аксиом (средствами исчисления предикатов). А теперь пусть $\mathfrak{F}$ — подлежащая выводу формула, и пусть $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — формулы, получающиеся из наших собственных аксиом путем замены свободных переменных связанными. Тогда исследуемая нами выводимость будет равносильна выводимости формулы

$$\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{F}$$

средствами одного только исчисления предикатов. В силу нашего предположения в этой формуле не встречаются никакие другие символы, кроме индивидных и предикатных, и поэтому ее выводимость равносильна выводимости формулы чистого исчисления предикатов, которая получается из нее в результате замены упомянутых индивидных символов какими-либо ранее не встречавшимися свободными индивидными переменными, а предикатных символов — формульными переменными.

[1]) Разумеется, здесь мы не учитываем случай, когда система аксиом содержит аксиому (J_2), но не содержит аксиомы (J_1), и в ней невозможно вывести эту аксиому. Однако в применениях теоретической логики этот случай едва ли интересен.

[2]) См. относящиеся к этому вопросу замечания на с. 37—38 и в т. I, с. 465.

Аналогичным образом можно показать, что непротиворечивость этой системы аксиом (в рамках способов рассуждений, формализуемых средствами исчисления предикатов) равносильна невыводимости формулы, получающейся из отрицания формулы

$$\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n$$

в результате упомянутых замен индивидных и предикатных символов соответствующими свободными переменными.

Теперь, благодаря теореме о возможности замены функциональных знаков предикатными символами, эта редукция вопросов о выводимости тех или иных формул в различных аксиоматических системах и о непротиворечивости этих систем к вопросам о выводимости соответствующих формул в чистом исчислении предикатов распространяется и на системы аксиом с функциональными знаками.

Но, с другой стороны, все-таки следует подчеркнуть, что при исследовании той или иной выводимости исключение функциональных знаков отнюдь не всегда бывает выгодным. Наоборот, исследуя выводимость в чистом исчислении предикатов, мы иногда бываем вынуждены ввести какие-либо функциональные знаки.

После этих вводных рассуждений мы теперь возвратимся в основное русло нашего изложения.

§ 3. Теорема Эрбрана

Формулировка второй ε-теоремы не исчерпывает всего содержания приведенного нами доказательства этой теоремы. И действительно, с помощью этого доказательства мы не только убедились в возможности исключать — при выполнении предположений, приведенных в формулировке второй ε-теоремы, — ε-символы из выводов любых не содержащих вхождений ε-символа формул, но при этом мы выявили еще и некоторый специальный тип выводимости, и это имеет большое значение вне зависимости от того, что́ может дать нам оперирование с ε-символом.

Чтобы этому материалу, изложенному в доказательстве, придать форму, удобную для применений, целесообразно освободить рассуждение, с помощью которого мы доказывали вторую ε-теорему [1]), от использования сколемовской нормальной формы [2]).

[1]) См. с. 169 и далее.

[2]) Вместо этого мы могли бы отказаться от получения в конечном результате сколемовской нормальной формы для рассматриваемой формулы. Однако это не привело бы нас к сколько-нибудь заметному упрощению.

С этой целью мы должны будем еще раз вкратце повторить это рассуждение, причем вместо формулы $\mathfrak{E}$ специального вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_s \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

мы теперь возьмем произвольную предваренную формулу. Чтобы понять требующиеся в связи с этим модификации, нам будет достаточно рассмотреть какой-нибудь типичный пример. В качестве такового мы возьмем формулу $\mathfrak{E}$, имеющую вид

$$\exists t \forall x \forall y \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}(t, x, y, u, v, z, w).$$

Условимся, что в $\mathfrak{E}$ не входят никакие связанные переменные, кроме указанных, но будем считать, что, кроме переменных и логических символов, в нее могут входить еще и какие-нибудь дополнительные индивидные, функциональные и предикатные символы. Пусть эта формула $\mathfrak{E}$ выведена средствами исчисления предикатов, причем имеется вывод, в котором не используются никакие аксиомы, но, может быть, используются дополнительные индивидные, функциональные или предикатные символы. Будем предполагать, что в $\mathfrak{E}$ не входят функциональные знаки φ, ψ и χ.

Мы выведем сначала формулу

$$\mathfrak{E} \to \exists t \exists u \exists v \exists w \mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w).$$

Это может быть сделано следующим образом.

Будем исходить из выводимых формул

(1) $$\exists t \forall x \forall y A(t, x, y) \to \exists t A(t, \varphi(t), \psi(t))$$

и

(2) $$\exists t \exists u \exists v \forall z A(t, u, v, z) \to \exists t \exists u \exists v A(t, u, v, \chi(t, u, v)),$$

которые получаются использованием основной формулы (a) исчисления предикатов вместе с подстановками и применениями правила (ζ)[1]. Если в формулу (1) вместо именной формулы $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — три различные, не входящие в формулу $\mathfrak{E}$ свободные переменные, подставить формулу

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, u, v, z, w),$$

то получится формула

(3) $$\mathfrak{E} \to \exists t \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, z, w).$$

С другой стороны, если мы в формулу (2) подставим формулу

$$\exists w \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \varphi(\mathfrak{a}), \psi(\mathfrak{a}), \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, w)$$

вместо именной формы $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, где $\mathfrak{d}$ — какая-либо отличная от $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ и не входящая в формулу $\mathfrak{E}$ свободная переменная,

[1]) См. т. I, с. 176.

то получим формулу

$$\exists t \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, z, w) \to \exists t \exists u \exists v \exists w \mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w),$$

которая вместе с формулой (3) по правилу силлогизма дает искомую формулу

(4) $$\mathfrak{E} \to \exists t \exists u \exists v \exists w \mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w).$$

Вывод этой формулы (4) совместно с заданным выводом формулы $\mathfrak{E}$ даст нам вывод формулы

(5) $$\exists t \exists u \exists v \exists w \mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w)$$

средствами исчисления предикатов.

А теперь из этого вывода формулы (5) по обобщенной первой ε-теореме[1]) мы получим вывод некоторой дизъюнкции, состоящей из членов вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q}, \varphi(\mathfrak{q}), \psi(\mathfrak{q}), \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \chi(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}), \mathfrak{t}),$$

где $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ — некоторые термы, построенные из свободных переменных, индивидных символов и функциональных знаков, причем этот вывод будет производиться средствами элементарного исчисления со свободными переменными без использования каких бы то ни было аксиом. Поэтому данная дизъюнкция должна получаться подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, и, значит, она будет истинной в логике высказываний[2]).

К этому же самому результату можно прийти и путем следующего, в эвристическом отношении более привлекательного рассуждения[3]).

Какова бы ни была формула $\mathfrak{U}$, по выводу формулы $\mathfrak{E}$ всегда можно построить вывод импликации

$$\neg \mathfrak{E} \to \mathfrak{U}.$$

Возьмем в качестве $\mathfrak{U}$ какую-нибудь бескванторную формулу, отрицание которой является истинным в логике высказываний, т. е. получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний[2]), — например, формулу вида $\mathfrak{P} \,\&\, \neg \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P}$ — какая-либо элементарная формула.

Сначала мы предположим, что формула $\mathfrak{E}$ не содержит свободных переменных.

Отрицание формулы $\mathfrak{E}$ может быть преобразовано в формулу

$$\forall t \exists x \exists y \forall u \forall v \exists z \forall w \neg \mathfrak{A}(t, x, y, u, v, z, w),$$

[1]) См. с. 54 и далее.

[2]) См. Приложение I, с. 462.

[3]) Идея этого рассуждения восходит к Эрику Стениусу.

которую мы обозначим через $\mathfrak{E}_1$. Из этой формулы выводима формула $\mathfrak{U}$. К формуле $\mathfrak{E}_1$ мы применим процедуру символьного решения [1]). Эта процедура — после того как будут выбраны какие-нибудь отличные друг от друга свободные переменные, например a, b, c и d, а также какие-нибудь одноместные функциональные знаки φ и ψ и трехместный функциональный знак χ (функциональные знаки берутся из числа тех, которые в $\mathfrak{E}$ не встречаются), — даст нам бескванторную формулу

$$\neg\mathfrak{A}(a,\ \varphi(a),\ \psi(a),\ b,\ c,\ \chi(a,\ b,\ c),\ d),$$

которую мы обозначим через $\mathfrak{E}_2$. От этой формулы можно средствами исчисления предикатов вернуться к формуле $\mathfrak{E}_1$, а потому из нее выводима и формула $\mathfrak{U}$.

В этом выводе формулы $\mathfrak{U}$ из формулы $\mathfrak{E}_2$ ни исходные формулы, ни сама результирующая формула не содержат связанных переменных. Поэтому применение теоремы об элементарном выводе, которую мы в свое время получили из первой ε-теоремы [2]), позволяет нам заключить, что формула $\mathfrak{U}$ может быть выведена из $\mathfrak{E}_2$ средствами одного только элементарного исчисления со свободными переменными. Кроме того, в таком выводе, разложив фигуру доказательства на нити, можно перенести подстановки в исходные формулы [3]). Тогда на месте исходной формулы $\mathfrak{E}_2$ появятся «примеры» этой формулы, т. е. формулы, получающиеся из $\mathfrak{E}_2$ в результате подстановок термов вместо свободных переменных. Они имеют вид

$$\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_i,\ \varphi(\mathfrak{q}_i),\ \psi(\mathfrak{q}_i),\ \mathfrak{r}_i,\ \mathfrak{s}_i,\ \chi(\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{r}_i,\ \mathfrak{s}_i),\ \mathfrak{t}_i)$$

($i = 1, \ldots, n$). Мы сокращенно обозначим их через $\neg\mathfrak{A}_1, \ldots, \neg\mathfrak{A}_n$.

Формула $\mathfrak{U}$ выводима из этих формул средствами одного только исчисления высказываний, и поэтому в силу дедукционной теоремы формула

$$\neg\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \neg\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{U}$$

выводима без использования аксиом, средствами одного только исчисления высказываний, а тем самым она истинна в логике высказываний.

Значит, то же самое верно и в отношении формулы

$$\neg\mathfrak{U} \to \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n,$$

а так как формула $\neg\mathfrak{U}$ тоже истинна в логике высказываний,

[1]) См. с. 23—25.
[2]) См. с. 36—37.
[3]) См. с. 39. Исключать все переменные в рассматриваемом случае не требуется.

то в логике высказываний истинна дизъюнкция

$$\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n,$$

где $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) представляет собой формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_i,\ \varphi(\mathfrak{q}_i),\ \psi(\mathfrak{q}_i),\ \mathfrak{r}_i,\ \mathfrak{s}_i,\ \chi(\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{r}_i,\ \mathfrak{s}_i),\ \mathfrak{t}_i).$$

Следовательно, эта дизъюнкция получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

Теперь мы можем освободиться от предположения о том, что формула $\mathfrak{E}$ не содержит свободных переменных. Действительно, формула $\mathfrak{E}$, в которую входят свободные переменные, дедуктивно равна некоторой формуле $\mathfrak{E}^*$, получающейся из нее в результате замены индивидных переменных индивидными символами, а формульных переменных предикатными символами (такую замену мы уже делали при доказательстве первой ε-теоремы [1])). Тогда в связанной с формулой $\mathfrak{E}^*$ дизъюнкции $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ введенные нами индивидные и предикатные символы можно будет снова заменить соответствующими переменными. Дизъюнкция, получающаяся в результате этой замены, тоже будет получаться подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы.

Для установленной таким образом взаимосвязи между выводимой средствами исчисления предикатов формулой $\mathfrak{E}$ и получаемой по ней истинной в логике высказываний дизъюнкции имеет также место следующее ее обращение:

Если дизъюнкция $\mathfrak{D}$, имеющая вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_1,\ \varphi(\mathfrak{q}_1),\ \psi(\mathfrak{q}_1),\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{s}_1,\ \chi(\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{s}_1),\ \mathfrak{t}_1) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{q}_n,\ \varphi(\mathfrak{q}_n),\ \psi(\mathfrak{q}_n),\ \mathfrak{r}_n,\ \mathfrak{s}_n,\ \chi(\mathfrak{q}_n,\ \mathfrak{r}_n,\ \mathfrak{s}_n),\ \mathfrak{t}_n),$$

получается подстановкой из какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний, то формула $\mathfrak{E}$ может быть выведена средствами исчисления предикатов.

Действительно, определим для термов, входящих в дизъюнкцию $\mathfrak{D}$, их кратность — число, которое указывает, сколько раз в терм такого рода входят функциональные знаки φ, ψ или χ. Затем мы расположим термы

$$\varphi(\mathfrak{q}_i),\quad \psi(\mathfrak{q}_i),\quad \chi(\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{r}_i,\ \mathfrak{s}_i)\quad (i = 1, \ldots, n)$$

(опустив, быть может, встречающиеся здесь повторения) в некоторую последовательность

$$\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p$$

[1]) См. с. 37—38.

так, чтобы при возрастании индексов термов их кратность не убывала.

А теперь возьмем какие-либо занумерованные свободные переменные $a_1, \ldots, a_p$ так, чтобы они не входили в формулу $\mathfrak{D}$. Заменим в этой формуле терм $\mathfrak{f}_1$ переменной a_1, терм $\mathfrak{f}_2$ переменной a_2, ..., терм $\mathfrak{f}_p$ переменной a_p таким образом, чтобы замена терма $\mathfrak{f}_i$ переменной a_i производилась всюду, где этот терм входит в $\mathfrak{D}$, за исключением тех мест, где он входит в качестве составной части какого-либо другого из числа термов $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p$. При этом формула $\mathfrak{D}$ перейдет в некоторую формулу $\mathfrak{D}_1$, которая тоже является истинной в логике высказываний. Действительно, при указанной замене совпадение элементарных формул по внешнему виду будет сохраняться.

Дизъюнкция $\mathfrak{D}_1$ имеет вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1, a_{\mathfrak{y}_1}, a_{\mathfrak{l}_1}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, a_{\mathfrak{z}_1}, \mathfrak{e}_1) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{b}_n, a_{\mathfrak{y}_n}, a_{\mathfrak{l}_n}, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{d}_n, a_{\mathfrak{z}_n}, \mathfrak{e}_n).$$

Здесь номера $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ суть числа из ряда $1, \ldots, p$, для которых выполняются следующие нумерационные условия:

1. Пусть i — любое из чисел $1, \ldots, p$. Если переменная a_i входит в какой-либо терм $\mathfrak{b}_j$, то числа $\mathfrak{y}_j$, $\mathfrak{l}_j$, $\mathfrak{z}_j$ превосходят число i; если переменная a_i входит в $\mathfrak{c}_j$ или $\mathfrak{d}_j$, то число $\mathfrak{z}_j$ превосходит число i.

2. Все числа $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ отличны от каждого из чисел $\mathfrak{l}_i$ и $\mathfrak{z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; точно так же каждое из чисел $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ отлично от каждого из чисел $\mathfrak{z}_i$.

3. Число $\mathfrak{y}_i$ совпадает с числом $\mathfrak{y}_j$, а число $\mathfrak{l}_i$ совпадает с $\mathfrak{l}_j$ тогда и только тогда, когда терм $\mathfrak{b}_i$ совпадает с термом $\mathfrak{b}_j$; число $\mathfrak{z}_i$ совпадает с числом $\mathfrak{z}_j$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{b}_i$ совпадает с $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{c}_i$ совпадает с $\mathfrak{c}_j$, а $\mathfrak{d}_i$ совпадает с $\mathfrak{d}_j$.

Действительно,

Условие 1 получается следующим образом: если a_i входит в $\mathfrak{b}_j$, то в формуле $\mathfrak{D}$ терм $\mathfrak{f}_i$ входит в $\mathfrak{q}_j$ и, следовательно, является составной частью терма $\varphi(\mathfrak{q}_j)$, а также термов $\psi(\mathfrak{q}_j)$ и $\chi(\mathfrak{q}_j, \mathfrak{r}_j, \mathfrak{s}_j)$, т. е. $\mathfrak{f}_i$ является составной частью термов $\mathfrak{f}_{\mathfrak{y}_j}$, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{l}_j}$ и $\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}_j}$; поэтому кратность терма $\mathfrak{f}_i$ меньше кратностей термов $\mathfrak{f}_{\mathfrak{y}_j}$, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{l}_j}$ и $\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}_j}$, а тем самым числа $\mathfrak{y}_j$, $\mathfrak{l}_j$ и $\mathfrak{z}_j$ превосходят число i. Далее, если a_i входит в $\mathfrak{c}_j$ или в $\mathfrak{d}_j$, то $\mathfrak{f}_i$ входит в формулу $\mathfrak{D}$ в качестве составной части терма $\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}_j}$; поэтому терм $\mathfrak{f}_i$ имеет меньшую кратность, чем $\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}_j}$, и, значит, число $\mathfrak{z}_i$ превосходит число i.

Условие 2 следует из того, что терм $\varphi(\mathfrak{q}_i)$ всегда отличен от термов $\psi(\mathfrak{q}_j)$ и $\chi(\mathfrak{q}_j, \mathfrak{r}_j, \mathfrak{s}_j)$; равным образом и терм $\psi(\mathfrak{q}_i)$ отличен от терма $\chi(\mathfrak{q}_j, \mathfrak{r}_j, \mathfrak{s}_j)$.

Условие 3 получается следующим образом: число $\mathfrak{y}_i$ совпадает с числом $\mathfrak{y}_j$ тогда и только тогда, когда в формуле $\mathfrak{D}$ термы $\varphi(\mathfrak{q}_i)$ и $\varphi(\mathfrak{q}_j)$ совпадают, т. е. когда $\mathfrak{q}_i$ совпадает с $\mathfrak{q}_j$. Но это имеет место тогда и только тогда, когда терм $\mathfrak{b}_i$ совпадает с $\mathfrak{b}_j$. Числа $\mathfrak{l}_i$ и $\mathfrak{l}_j$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают термы $\psi(\mathfrak{q}_i)$ и $\psi(\mathfrak{q}_j)$; необходимым и достаточным условием для этого является опять-таки совпадение термов $\mathfrak{b}_i$ и $\mathfrak{b}_j$. Числа $\mathfrak{z}_i$ и $\mathfrak{z}_j$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают термы $\chi(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{r}_i, \mathfrak{s}_i)$ и $\chi(\mathfrak{q}_j, \mathfrak{r}_j, \mathfrak{s}_j)$. Необходимым и достаточным условием для этого является совпадение $\mathfrak{q}_i$ с $\mathfrak{q}_j$, а также $\mathfrak{r}_i$ с $\mathfrak{r}_j$ и $\mathfrak{s}_i$ с $\mathfrak{s}_j$; а это снова имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{b}_i$ совпадает с $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{c}_i$ совпадает с $\mathfrak{c}_j$, а $\mathfrak{d}_i$ совпадает с $\mathfrak{d}_j$.

На основе этих свойств дизъюнкции $\mathfrak{D}_1$, применяя правила (μ) и (ν) [1]) и устраняя встречающиеся повторения среди членов этой дизъюнкции, мы можем перейти от этой формулы обратно к формуле $\mathfrak{E}$. Это может быть сделано следующим образом.

Сначала, применяя правило (μ), каждый дизъюнктивный член

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, \mathfrak{e}_i)$$

мы преобразуем в соответствующую формулу

$$\exists w\, \mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, w).$$

Если при этом некоторые члены дизъюнкции совпадут, то возникающие повторения мы опустим.

В получившейся в результате этого дизъюнкции $\mathfrak{D}_2$ все встречающиеся в ней числа $\mathfrak{z}_i$ будут отличными друг от друга. Действительно, при совпадении $\mathfrak{z}_i$ с $\mathfrak{z}_j$ вследствие условия 3 должны будут совпасть $\mathfrak{b}_i$ с $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{c}_i$ с $\mathfrak{c}_j$, $\mathfrak{d}_i$ с $\mathfrak{d}_j$, а потому также и $\mathfrak{r}_i$ с $\mathfrak{r}_j$ и $\mathfrak{l}$ с $\mathfrak{l}_j$. Тогда совпадут i-й и j-й члены дизъюнкции.

Условимся для краткости термы $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ и $\mathfrak{d}_i$ называть $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- и $\mathfrak{d}$-термами. Рассмотрим те переменные из числа $a_1, \ldots, a_p$, кото-

[1]) См. с. 173.

рые входят в какие-либо из этих термов, и пусть среди рассматриваемых переменных переменная a_m имеет наибольший номер. Если в i-м члене дизъюнкции a_m входит в $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_j$ или $\mathfrak{d}_i$, то, согласно условию 1, число $\mathfrak{z}_i$ больше m, а потому и больше номеров всех тех переменных, которые входят в какие-либо из $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-термов. По условию 2 это число не может совпадать ни с одним из чисел $\mathfrak{y}_j$, $\mathfrak{l}_j$, а согласно сделанному ранее замечанию, оно не совпадает также ни с одним из чисел $\mathfrak{z}_j$ при $j \neq i$. Поэтому переменная $a_{\mathfrak{z}_i}$ входит в дизъюнкцию $\mathfrak{D}_2$ только один раз, и мы можем применить к i-му члену дизъюнкции и к переменной $a_{\mathfrak{z}_i}$ правило (ν). В итоге, заменив переменную $a_{\mathfrak{z}_i}$ связанной переменной z, мы получим вместо этого члена дизъюнкции новый член

$$\forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, z, w\right).$$

Дважды применив правило (μ), мы преобразуем этот член в формулу

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w\right).$$

Аналогичным образом мы поступим и со всеми остальными членами дизъюнкции, внутри которых переменная a_m встречается в каком-либо из $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-термов. Если при этом будут возникать повторяющиеся члены дизъюнкции, то повторения мы будем вычеркивать. Так мы придем к некоторой дизъюнкции $\mathfrak{D}_3$. В этой дизъюнкции уже не будет $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-термов, содержащих переменную a_m, но переменная a_m может входить в ней в какой-нибудь из $\mathfrak{b}$-термов. Член этой дизъюнкции, в котором имеется один из таких содержащих переменную a_m $\mathfrak{b}$-термов, является одним из тех членов, которые с помощью правил (μ) и (ν) преобразовались в формулу вида

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w\right).$$

Встречающиеся в нем номера переменных $\mathfrak{y}_i$ и $\mathfrak{l}_i$, согласно условию 1, больше числа m (поскольку $\mathfrak{b}_i$ содержит переменную a_m) и, тем самым, больше номеров всех тех переменных a_j, которые входят в какой-либо из еще имеющихся в $\mathfrak{D}_3$ $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-термов.

Рассматриваемое нами число $\mathfrak{y}_i$ не может также совпадать ни с одним из встречающихся в $\mathfrak{D}_3$ чисел $\mathfrak{y}_j$ при $j \neq i$. Действительно, в противном случае, в соответствии с условием 3, терм $\mathfrak{b}_i$ должен был бы совпадать с $\mathfrak{b}_j$, а число $\mathfrak{l}_i$ — с $\mathfrak{l}_j$; тогда терм $\mathfrak{b}_i$ содержал бы переменную a_m и, значит, j-й член дизъюнкции

имел бы вид

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_j, a_{\mathfrak{y}_j}, a_{\mathfrak{l}_j}, u, v, z, w\right),$$

а потому, согласно только что сделанному замечанию, совпадал бы с членом

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w\right),$$

между тем как члены дизъюнкции $\mathfrak{D}_3$ не повторяются. Таким образом, число $\mathfrak{y}_i$ отлично от всех встречающихся в $\mathfrak{D}_3$ чисел $\mathfrak{y}_j$ при $j \neq i$. Наконец, ввиду условия 2 число $\mathfrak{y}_i$ отлично и от всех чисел $\mathfrak{l}_j$ и $\mathfrak{z}_j$.

Следовательно, переменная $a_{\mathfrak{y}_i}$ в дизъюнкции $\mathfrak{D}_3$ встречается только на одном месте. То же самое верно и в отношении переменной $a_{\mathfrak{l}_i}$. Поэтому к i-му члену дизъюнкции можно применить правило (ν) — сначала по отношению к переменной $a_{\mathfrak{l}_i}$, а затем по отношению к переменной $a_{\mathfrak{y}_i}$, — и если при этом в качестве вводимых связанных переменных взять переменные x и y, то вместо рассматриваемого члена дизъюнкции у нас получится формула

$$\forall x \forall y \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, x, y, u, v, z, w\right).$$

Применяя правило (μ), эту формулу можно затем преобразовать в формулу

$$\exists t \forall x \forall y \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(t, x, y, u, v, z, w\right),$$

т. е. в формулу $\mathfrak{E}$.

Описанную процедуру мы применим к каждому из тех членов дизъюнкции $\mathfrak{D}_3$, у которых переменная a_m встречается в $\mathfrak{b}$-терме. Если при этом возникнут повторения каких-либо членов дизъюнкции, то лишние члены мы вычеркнем.

Так мы придем к некоторой дизъюнкции $\mathfrak{D}_4$, которая, вообще говоря, будет содержать члены трех типов: во-первых, члены вида

$$\exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, w\right),$$

которые мы будем называть дизъюнктивными членами первого рода, во-вторых, члены вида

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{y}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w\right),$$

которые мы будем называть дизъюнктивными членами второго рода, и, в-третьих, член, представляющий собой формулу $\mathfrak{E}$.

Переходя от дизъюнкции $\mathfrak{D}_1$ к дизъюнкции $\mathfrak{D}_4$, мы добиваемся того, что внутри этой последней переменная a_m не встречается ни в каком $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-терме. Пусть переменная a_{m^*} имеет номер, наибольший среди номеров переменных a_j, встречающихся в какой-либо из еще имеющихся в $\mathfrak{D}_4$ $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-термов. Из нумерационных условий и из того обстоятельства, что в дизъюнкции $\mathfrak{D}_4$ ни один и ее членов не повторяется дважды, снова получается, что если переменная a_{m^*} содержится в дизъюнкции $\mathfrak{D}_4$ внутри дизъюнктивного члена первого рода

$$\exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i,\ a_{\mathfrak{y}_i},\ a_{\mathfrak{l}_i},\ \mathfrak{c}_i,\ \mathfrak{d}_i,\ a_{\mathfrak{z}_i},\ w\right)$$

в одном из термов $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{d}_i$, то переменная $a_{\mathfrak{z}_i}$ входит в $\mathfrak{D}_4$ только в одном-единственном месте; значит, применением правила (ν) к переменной $a_{\mathfrak{z}_i}$ и последующим двукратным применением правила (μ) рассматриваемый член этой дизъюнкции может быть преобразован в дизъюнктивный член второго рода.

А теперь такое же преобразование мы произведем над всеми дизъюнктивными членами первого рода, обладающими указанным свойством, и устраним все возникающие в результате этих преобразований повторения среди членов дизъюнкции. В получившейся таким образом дизъюнкции $\mathfrak{D}_5$ переменная a_{m^*} больше уже не может входить ни в $\mathfrak{c}$-, ни в $\mathfrak{d}$-термы, но она еще может встречаться в $\mathfrak{b}$-термах — однако только внутри дизъюнктивных членов второго рода. Встречающиеся в каком-либо таком дизъюнктивном члене

$$\exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}\left(\mathfrak{b}_i,\ a_{\mathfrak{y}_i},\ a_{\mathfrak{l}_i},\ u,\ v,\ z,\ w\right)$$

переменные $a_{\mathfrak{y}_i}$ и $a_{\mathfrak{l}_i}$ не могут встречаться в $\mathfrak{D}_5$ в каких-либо других местах — это опять следует из нумерационных условий и из того факта, что в $\mathfrak{D}_5$ нет повторяющихся дизъюнктивных членов. Поэтому рассматриваемый дизъюнктивный член применением правила (ν) — сначала к переменной $a_{\mathfrak{l}_i}$, а затем к переменной $a_{\mathfrak{y}_i}$ — и последующим применением правила (μ) может быть преобразован в формулу $\mathfrak{E}$.

Применив эту процедуру к каждому дизъюнктивному члену второго рода дизъюнкции $\mathfrak{D}_5$, содержащему переменную a_{m^*} внутри какого-либо $\mathfrak{b}$-терма и устранив появившиеся повторения дизъюнктивных членов, мы получим некоторую дизъюнкцию $\mathfrak{D}_6$, в которой переменная a_{m^*} больше уже не будет встречаться ни в одном из $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$-, $\mathfrak{d}$-термов.

Продолжая этот процесс и преобразовывая дизъюнктивные члены первого рода в члены второго рода, члены второго рода — в формулу $\mathfrak{E}$ и вычеркивая возникающие при этом повторения членов дизъюнкции, мы последовательно удалим все те $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- и $\mathfrak{d}$-термы, в которые входят какие-либо из пронумерованных переменных a_j, причем эти переменные мы будем перебирать по очереди, в порядке убывания их номеров.

После не более чем $(\mathfrak{p}-1)$-кратного повторения описанной процедуры мы придем, наконец, к дизъюнкции, каждый член которой будет являться либо дизъюнктивным членом первого рода, либо дизъюнктивным членом второго рода, либо формулой $\mathfrak{E}$. Кроме того, ни один из членов этой дизъюнкции не будет повторяться дважды и ни один из входящих в нее $\mathfrak{b}$-, $\mathfrak{c}$- или $\mathfrak{d}$-термов не будет содержать переменных из списка $a_1, \ldots, a_{\mathfrak{p}}$.

Все члены первого рода такой дизъюнкции, согласно нумерационным условиям, с помощью правил (μ) и (ν) можно преобразовать в члены второго рода, а после того как это будет сделано и все возникшие повторения дизъюнктивных членов будут устранены, все члены второго рода можно будет преобразовать в формулу $\mathfrak{E}$. Но тогда — если еще раз устранить образовавшиеся повторения дизъюнктивных членов — у нас получится формула $\mathfrak{E}$.

Так может быть осуществлен вывод формулы $\mathfrak{E}$ из дизъюнкции $\mathfrak{D}_1$. А так как формула $\mathfrak{D}_1$ получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, то мы получим вывод формулы $\mathfrak{E}$ средствами исчисления предикатов.

В итоге мы получаем доказательство следующего утверждения:

Формула $\mathfrak{E}$

$$\exists t \forall x \forall y \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}(t,\ x,\ y,\ u,\ v,\ z,\ w)$$

выводима тогда и только тогда, когда выводима формула

$$\exists t \exists u \exists v \exists w \mathfrak{A}(t,\ \varphi(t),\ \psi(t),\ u,\ v,\ \chi(t,\ u,\ v),\ w), \tag{5}$$

построенная с помощью ранее еще не встречавшихся функциональных знаков φ, ψ *и* χ, *или (что согласно первой ε-теореме сводится к тому же самому) когда некоторая дизъюнкция* $\mathfrak{D}$, *состоящая из членов вида*

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q},\ \varphi(\mathfrak{q}),\ \psi(\mathfrak{q}),\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{s},\ \chi(\mathfrak{q},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{s}),\ \mathfrak{t}),$$

где $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ *и* $\mathfrak{t}$ *— термы, построенные из одних только свободных переменных, индивидных символов и функциональных знаков, получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.*

(Эта дизъюнкция $\mathfrak{D}$ находится по выводу формулы (5) применением процедуры исключения связанных переменных с помощью введения и последующего исключения ε-символа.)

Кроме того, получается еще и следующая

Теорема. *По выводу формулы* $\mathfrak{E}$ *вида*

$$\exists t \forall x \forall y \exists u \exists v \forall z \exists w \mathfrak{A}(t, x, y, u, v, z, w)$$

всегда можно найти некоторую дизъюнкцию $\mathfrak{D}_1$, *состоящую из членов вида*

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{c}, \mathfrak{t}),$$

где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — *свободные переменные, а* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ — *некоторые термы, причем* $\mathfrak{D}_1$ *получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, а формула* $\mathfrak{E}$ *может быть получена из нее применением правил* (μ) *и* (ν) *и вычеркиванием повторяющихся дизъюнктивных членов.*

Полученные результаты немедленно могут быть усилены следующим образом.

Искомую дизъюнкцию $\mathfrak{D}$ можно всегда указать таким образом, чтобы, кроме функциональных знаков φ, ψ и χ, она содержала только такие внелогические символы, которые входят в $\mathfrak{E}$. Это требование равносильно условию, чтобы в термы $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$, фигурирующие в членах дизъюнкции $\mathfrak{D}$, входили только такие индивидные символы и только такие отличные от φ, ψ и χ функциональные знаки, которые входят в $\mathfrak{E}$. Действительно, добиться выполнения этого условия нетрудно. Именно, если в термах $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ первоначально будут иметься какие-либо не входящие в $\mathfrak{E}$ и отличные от символов φ, ψ и χ индивидные или функциональные символы, то достаточно будет всюду заменить каждый такой индивидный символ и функциональный знак переменной a. Получающаяся в результате этого дизъюнкция снова будет состоять из членов вида

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q}, \varphi(\mathfrak{q}), \psi(\mathfrak{q}), \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \chi(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}), \mathfrak{t}),$$

но только термы $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ будут теперь другими. Сохранится и свойство дизъюнкции быть результатом подстановки в тождественно истинную формулу исчисления высказываний, потому что производимые замены сохраняют совпадение термов, а потому и элементарных формул.

Точно так же можно добиться, чтобы дизъюнкция $\mathfrak{D}_1$ содержала только такие внелогические символы, которые содержатся в $\mathfrak{E}$. (По отношению к формуле $\mathfrak{D}_1$ функциональные знаки φ, ψ и χ перестают занимать особое положение.)

Метод доказательства, с помощью которого мы получили перечисленные результаты, как нетрудно видеть, абсолютно не зависит от того, что взятая нами формула $\mathfrak{E}$ имела некоторый специально выбранный частный вид. Совершенно аналогичным образом этот метод может быть применен и к любой наперед заданной предваренной формуле. При этом имеются в виду (что в дальнейших формулировках иногда и не будет специально оговариваться)

такие формулы, которые строятся из переменных и символов исчисления предикатов, и, быть может, из некоторых индивидных, функциональных и предикатных символов.

Чтобы сформулировать наш результат для произвольной формулы $\mathfrak{E}$ такого типа, мы заметим, что для связанных переменных, входящих в $\mathfrak{E}$, порядок следования их в кванторной приставке устанавливает некоторую их очередность. Переменные, связанные кванторами всеобщности, мы будем кратно называть $\forall$-переменными, переменные, связанные кванторами существования, будем называть $\exists$-переменными; кроме того, учитывая упоминавшуюся нами очередность связанных переменных, мы будем говорить об $\exists$-переменных, предшествующих некоторой $\forall$-переменной.

Заметим также, что в случае, когда формула $\mathfrak{E}$ начинается квантором всеобщности, всем $\forall$-переменным, которым не предшествуют никакие $\exists$-переменные, согласно нашей процедуре должны быть сопоставлены некоторые индивидные символы (так сказать, нульместные функциональные знаки). Если бы, например, в рассматриваемой нами формуле $\mathfrak{E}$ не было квантора существования $\exists t$ и аргументной переменной t, то в начале нашего рассуждения на месте выводимой формулы (1) оказалась бы формула

$$\forall x \forall y A(x, y) \to A(\alpha, \beta),$$

в которой индивидные символы α и β (как ранее φ и ψ) надо было бы взять такими, чтобы они не фигурировали в самой формуле $\mathfrak{E}$.

При рассуждении с помощью символьного решения на месте тех $\forall$-переменных формулы $\mathfrak{E}$, которым не предшествуют никакие $\exists$-переменные, тоже появляются индивидные символы, потому что процедура символьного решения в этом случае должна применяться к таким формулам, которые получаются приведением формулы $\neg\mathfrak{E}$ к предваренному виду. А при этом преобразовании упомянутые $\forall$-переменные переходят в $\exists$-переменные без предшествующих им $\forall$-переменных.

При обратном переходе от дизъюнкции, истинной в логике высказываний, к формуле $\mathfrak{E}$ в список термов

$$\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_p,$$

кроме тех термов, которые начинаются вновь вводимыми функциональными знаками, должны быть включены в качестве термов кратности 0 еще и вновь вводимые индивидные символы.

С учетом всех этих предварительных замечаний наш результат может быть сформулирован в виде следующих двух предложений:

а) *Любая данная предваренная формула* $\mathfrak{E}$ *выводима средствами исчисления предикатов тогда и только тогда, когда может быть указана некоторая дизъюнкция, истинная в логике высказываний*

и такая, что каждый ее член получается из формулы $\mathfrak{E}$ *отбрасыванием кванторов и заменой связанных переменных некоторыми термами так, что при этом выполняются следующие структурные условия*:

1. *Термы, заменяющие связанные переменные, образуются из индивидных переменных, из символов, входящих в формулу* $\mathfrak{E}$, *а также из некоторых вновь вводимых, взаимно однозначно сопоставленных* $\forall$*-переменным формулы* $\mathfrak{E}$ *индивидных символов и функциональных знаков; это сопоставление обладает тем свойством, что любой* $\forall$*-переменной, которой не предшествуют никакие* $\exists$*-переменные, соответствует некоторая индивидная переменная, а любой* $\forall$*-переменной, которой предшествуют* $\mathfrak{k}$ $\exists$*-переменных, соответствует некоторый функциональный знак с* $\mathfrak{k}$ *аргументами.* 2. *Любая* $\forall$*-переменная, которой не предшествует ни одна* $\exists$*-переменная, в каждом члене этой дизъюнкции заменяется соответствующим ей индивидным символом; любая* $\forall$*-переменная, которой предшествует одна или большее число* $\exists$*-переменных, заменяется сопоставленным ей функциональным знаком, у которого в качестве аргументов фигурируют термы, стоящие на месте предшествующих* $\exists$*-переменных, причем они располагаются в порядке следования этих* $\exists$*-переменных. (Термы, стоящие на месте* $\exists$*-переменных, могут быть произвольным образом построены из входящих в формулу* $\mathfrak{E}$ *свободных индивидных переменных, индивидных символов и функциональных знаков, а также вновь вводимых символов.)*

б) *По любой выводимой средствами исчисления предикатов предваренной формуле* $\mathfrak{E}$ *можно указать такую дизъюнкцию, что каждый член ее получается из* $\mathfrak{E}$ *отбрасыванием кванторов, заменой* $\forall$*-переменных некоторыми свободными индивидными переменными и заменой* $\exists$*-переменных некоторыми термами, построенными из некоторых свободных индивидных переменных и входящих в формулу* $\mathfrak{E}$ *индивидных символов и функциональных знаков, причем эта дизъюнкция получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, а сама формула* $\mathfrak{E}$ *может быть получена из нее путем применения правил* (μ) *и* (ν) [1] *и вычеркивания повторяющихся дизъюнктивных членов.*

Эти два утверждения, взятые совместно, и составляют содержание теоремы, которая была провозглашена (правда, в несколько иной формулировке) Ж. Эрбраном в качестве основной теоремы теоретической логики и которую мы поэтому называем *теоремой Эрбрана* [2]).

[1]) См. с. 173.

[2]) Она была доказана в его диссертации: Herbrand J. Recherches sur la théorie de la démonstration. — Thèse de l'Univ. de Paris, 1930. Опубликована в Travaux de la Soc. des Sci. et Let. de Varsovie, 1930. См. также вторую работу Эрбрана: Herbrand J. Sur le problème fondamental de la logique mathématique. — C. r. Soc. Sci. Varsovie, 1931, 24, Cl. III. Доказательство Эрбрана трудно для чтения и требует некоторых исправлений, как было недавно показано Б. Дребеном [см. Dreben B., Andrews A., Aanderaa St. False Lemmas in Herbrand. — Bull. Amer. Math. Soc., 1963, 69, p. 699—706. Более простое доказательство этой теоремы было дано уже Г. Генценом в его работе: Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. — Math. Z., 1934, 39, № 2, 3; см., в частности, IV. Abschnitt, § 2 (русский перевод этой работы: Генцен Г. Исследование логических выводов. — В кн: Математическая теория логического вывода. М., Физматгиз, 1967, с. 9—74. — *Прим. перев.*). Это доказательство получается с помощью одной еще более общей теоремы, применимой также к некоторым подформализмам исчисления предикатов. Новые доказательства этой более общей теоремы предложены Куртом Шютте: Schütte K. Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik. — Math. Ann., 1950, 122, S. 47—65, Хаскеллом Б. Карри: Curry H. B. A Theory of Formal Deducibility. — Notre Dame Mathematical Lectures, № 6, 1950 и Стефеном К. Клини: Kleene Stephen C. Introduction to Metamathematics. — Amsterdam, 1952, § 78 (имеется русский перевод этой книги: Клини и Стефен К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957. — *Прим. перев.*). Как мы видели, теорема Эрбрана получается из теоремы об элементарном выводе (см. с. 37). Последняя была получена нами из первой ε-теоремы и является, кроме того, частным случаем одной теоремы об исчислении предикатов, доказанной Эриком Стениусом (см. сноску 1 на с. 37). Доказательства Шютте и Стениуса относятся непосредственно к логическому исчислению рассмотренного нами типа, в то время как доказательства Генцена, Карри и Клини относятся к некоторому исчислению секвенций. Наконец, теорему Эрбрана можно также получить с помощью метода семантических таблиц Э. В. Бета. Об этом см. его труд: Beth E. W. The Foundations of Mathematics. — Amsterdam, 1959, sec. 90—92. Следует также упомянуть теоретико-множественные доказательства теорем Генцена и Эрбрана, данные Стигом Кангером: Kanger Stig. Provability in Logic. Uppsala, 1957, Р. Сикорским: Sikorski R. On Herbrand's Theorem. — Colloq. Math., 1958, 6, p. 55—58 и Е. Расёвой и Р. Сикорским: Rasiowa H., Sikorski R. On the Gentzen Theorem. — Fundam. math., 1960, 48, p. 57—69.

Суть теоремы Эрбрана мы поясним сначала на одном простом примере. Возьмем две формулы

$$\forall x \exists y (x < \varphi(\varphi(y))) \to \forall x \exists y (x < \varphi(y))$$

и

$$\forall x \exists y (x < \varphi(y)) \to \forall x \exists y (x < \varphi(\varphi(y))).$$

Выводимость первой из них легко устанавливается непосредственно. Относительно второй ясно, что при арифметическом ее истолковании она истинна не всегда. Чтобы применить к этим формулам предложения а) и б), мы сначала должны будем привести их к предваренному виду. Это может быть сделано различными способами. Например, первая формула переводима в формулу

$$((1)) \qquad \forall x \exists y \forall z (\neg (y < \varphi(\varphi(z))) \vee x < \varphi(y)),$$

а вторая — в формулу

$$((2)) \qquad \forall x \exists y \forall z (\neg (y < \varphi(z)) \vee x < \varphi(\varphi(y))).$$

Согласно предложению а), необходимое и достаточное условие выводимости формулы ((1)) заключается в возможности указать

некоторую дизъюнкцию, состоящую из членов вида

$$\neg(\mathfrak{f} < \varphi(\varphi(\psi(\mathfrak{f})))) \vee a < \varphi(\mathfrak{f})$$

с некоторыми термами $\mathfrak{f}$, построенными из переменных и из символов φ и ψ, и получающуюся подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний. Такой дизъюнкцией является, например, формула

$$(\neg(a < \varphi(\varphi(\psi(a)))) \vee a < \varphi(a)) \vee (\neg(\varphi(\psi(a)) < \varphi(\varphi(\psi(\varphi(\psi(a)))))) \vee a < \varphi(\varphi(\psi(a)))).$$

Следовательно, формула ((1)) выводима.

Если бы выводимой была и формула ((2)), то можно было бы соответственно найти некоторую дизъюнкцию, состоящую из членов вида

$$\neg(\mathfrak{f} < \varphi(\psi(\mathfrak{f}))) \vee a < \varphi(\varphi(\mathfrak{f})),$$

которая получалась бы подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы. Но для этого потребовалось бы, чтобы некоторая из фигурирующих под знаком отрицания формул $\mathfrak{f} < \varphi(\psi(\mathfrak{f}))$ по внешнему виду совпала с какой-либо формулой $a < \varphi(\varphi(\mathfrak{r}))$, что невозможно, так как терм $\varphi(\mathfrak{r})$ не может совпадать с термом $\psi(\mathfrak{f})$. Тем самым мы убеждаемся, что формула ((2)) невыводима.

Теперь воспользуемся предложением б). Для формулы ((1)), выводимость которой нами установлена, оно утверждает, что найдется некоторая дизъюнкция, состоящая из членов вида

$$\neg(\mathfrak{f} < \varphi(\varphi(\mathfrak{a}))) \vee \mathfrak{b} < \varphi(\mathfrak{f})$$

с переменными $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и с некоторыми, составленными из переменных и функционального символа φ термами $\mathfrak{f}$, причем эта дизъюнкция получается подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний, а формулу ((1)) можно получить из нее с помощью правил (μ) и (ν) и вычеркивания повторяющихся членов дизъюнкции.

В качестве дизъюнкции, обладающей этим свойством, можно, например, взять формулу

$$(\neg(a < \varphi(\varphi(b))) \vee a < \varphi(a)) \vee (\neg(\varphi(b) < \varphi(\varphi(c))) \vee a < \varphi(\varphi(b))).$$

Действительно, эта формула, с одной стороны, получается подстановкой из тождественно истинной формулы

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee A),$$

а с другой стороны, от нее можно прийти к формуле ((1)) следующим образом: сначала применением правила (ν) к переменной c и последующим применением правила (μ) мы получаем формулу

$$(\neg(a < \varphi(\varphi(b))) \vee a < \varphi(a)) \vee \exists y \forall z (\neg(y < \varphi(\varphi(z))) \vee a < \varphi(y)),$$

а затем применением правила (ν) к переменной b и применением правила (μ) получим формулу

$$\exists y \forall z (\neg(y < \varphi(\varphi(z))) \vee a < \varphi(y)) \vee \exists y \forall z (\neg(y < \varphi(\varphi(z))) \vee a < \varphi(y)).$$

А теперь вычеркнем один из двух повторяющихся членов этой дизъюнкции. Применив еще раз правило (ν), мы получим требующуюся формулу

$$\forall x \exists y \forall z (\neg(y < \varphi(\varphi(z))) \vee x < \varphi(y)).$$

Если у какой-либо предваренной формулы $\mathfrak{E}$ выражение, стоящее за кванторной приставкой, имеет вид дизъюнкции $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \mathfrak{A}_r$, члены которой $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ представляют собой выражения без логических знаков или отрицания таких выражений, то с помощью предложения а) можно решить вопрос о выводимости $\mathfrak{E}$. Действительно, согласно этому предложению, для выводимости $\mathfrak{E}$ необходимо и достаточно, чтобы можно было указать получающуюся подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний дизъюнкцию $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \mathfrak{B}_f$, каждый член которой получается из формулы $\mathfrak{E}$ вычеркиванием кванторов и заменой связанных переменных некоторыми термами так, что при этом соблюдаются некоторые структурные условия. При этом каждая из формул $\mathfrak{B}_i$ ($i = 1, \ldots, f$) имеет вид некоторой дизъюнкции $\mathfrak{A}_1^{(i)} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_r^{(i)}$, каждый член которой является либо элементарной формулой, либо отрицанием элементарной формулы. Для того чтобы формула $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_f$ получалась подстановкой из какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний, необходимо и достаточно, чтобы среди $f \cdot r$ членов этой дизъюнкции имелось по меньшей мере два таких члена, один из которых представлял бы собой отрицание другого.

Таким образом, данное в предложении а) необходимое и достаточное условие выводимости формулы $\mathfrak{E}$ сводится к тому, что среди выражений $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ должны найтись два таких выражения $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$, для которых — после сопоставления $\forall$-переменным формулы $\mathfrak{E}$ новых переменных и функциональных знаков — можно указать две такие замены для $\exists$-переменных формулы $\mathfrak{E}$, что — с учетом замен для $\forall$-переменных формулы $\mathfrak{E}$, которые получаются из этих замен в соответствии с указанными структурными условиями, — формула, в которую в результате первой замены переходит формула $\mathfrak{A}_p$, совпадает с отрицанием той формулы, в которую в результате второй замены переходит формула $\mathfrak{A}_q$. Как легко видеть, могут быть явным образом сформулированы условия для возможности построения двух таких замен; так как

при этом количество входящих в рассмотрение пар выражений $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{A}_q$ конечно, то это в конце концов дает нам решение вопроса о выводимости ($\mathfrak{E}$ [1]).

Причиной того, что не может быть решен аналогичным образом вопрос о выводимости произвольной заданной предваренной формулы, является то обстоятельство, что совершенно невозможно указать какую-либо оценку для числа дизъюнктивных членов $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_f$. В рассмотренном частном случае эту дизъюнкцию можно было считать *двучленной* с самого начала. Действительно, если в процессе построения этой дизъюнкции, состоящей из $f \cdot r$ членов, $\mathfrak{A}_p^{(i)}$ и $\mathfrak{A}_q^{(j)}$ являются теми двумя членами, один из которых совпадает с отрицанием другого, то уже дизъюнкция $\mathfrak{B}_i \vee \mathfrak{B}_j$ будет получаться подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

Формулировка и доказательство теоремы Эрбрана, приведенные выше, относятся к предваренным формулам. Но приведенный нами метод доказательства с использованием символьного решения и теоремы об элементарном выводе позволяет дать более общую формулировку этой теоремы, относящуюся ко всем таким формулам, у которых ни один квантор не стоит ни в области действия какого-либо знака отрицания, ни в каком-либо члене импликации или эквивалентности, или, выражаясь позитивно, относящуюся ко всем таким формулам, которые могут быть построены из предваренных формул с помощью конъюнкций, дизъюнкций и кванторов. Такого рода формулы мы будем для краткости называть квазипредваренными. От любой формулы исчисления предикатов с помощью правил 2 и 4 исчисления высказываний [2]) и правила (λ) исчисления предикатов [3]) можно перейти к квазипредваренной формуле. Если, пользуясь этими правилами, образовать отрицание какой-либо квазипредваренной формулы, то при этом получится новая квазипредваренная формула, у которой кванторы существования и всеобщности, а также и конъюнкции и дизъюнкции поменяются друг с другом местами, а отрицание

[1]) Этот разрешимый случай общей проблемы разрешимости отмечался уже Эрбраном в его цитировавшейся выше диссертации. В своей работе «Sur le problème fondamental de la logique mathématique» Эрбран добавляет замечание о том, что критерию выводимости для этого случая можно легко придать следующий вид: для любой заданной формулы рассматриваемого типа можно указать такое число f, что эта формула будет выводима тогда и только тогда, когда она будет f-тождественна (см. цит. соч., с. 34). Это утверждение, доказательства которого Эрбран не сообщил, ввиду его обманчивой правдоподобности было отмечено без всяких комментариев в т. I «Оснований математики» [с. 143 внизу (см. с. 186—188 русск. перевода)]. На то, что справедливость этого утверждения совершенно не очевидна, указал К. Шютте.

[2]) См. т. I, с. 79.

[3]) См. т. I, с. 181.

будет перенесено на выражения, стоящие за кванторами, — совершенно аналогично тому, как это происходит при образовании отрицаний предваренных формул по правилу (λ).

Возможность распространения теоремы Эрбрана на квазипредваренные формулы вытекает из того обстоятельства, что процедура символьного решения способом, сходным со способом применения ее к предваренным формулам, может быть применена и к квазипредваренным формулам.

Поясним эту мысль на примере, воспользовавшись методом формализации символьного решения с помощью ε-символа [1]).

Пусть формула $\mathfrak{F}$, которую мы будем рассматривать, имеет вид

$$\forall x\,(\forall y \exists z \mathfrak{A}(x, y, z) \vee \exists y \forall z \mathfrak{B}(x, y, z)).$$

Эта формула дедуктивно равна формуле

$$\forall y \exists z \mathfrak{A}(a, y, z) \vee \exists u \forall v \mathfrak{B}(a, u, v),$$

а также [ввиду правила (v)] формуле

$$\exists z \mathfrak{A}(a, b, z) \vee \exists u \forall v \mathfrak{B}(a, u, v).$$

С учетом эквивалентностей

$$\exists z \mathfrak{A}(a, b, z) \sim \mathfrak{A}(a, b, \varepsilon_z \mathfrak{A}(a, b, z))$$

и

$$\exists u \forall v \mathfrak{B}(a, u, v) \sim \forall v \mathfrak{B}(a, \varepsilon_u \forall w \mathfrak{B}(a, u, w), v)$$

эта формула может быть преобразована в формулу

$$\mathfrak{A}(a, b, \varepsilon_z \mathfrak{A}(a, b, z)) \vee \forall v \mathfrak{B}(a, \varepsilon_u \forall w \mathfrak{B}(a, u, w), v).$$

Если мы теперь, пользуясь явными определениями

$$\varphi(a, b) = \varepsilon_z \mathfrak{A}(a, b, z)$$

и

$$\psi(a) = \varepsilon_u \forall w \mathfrak{B}(a, u, w),$$

введем функции $\varphi(a, b)$ и $\psi(a)$, то из предыдущей формулы получим формулу

$$\mathfrak{A}(a, b, \varphi(a, b)) \vee \forall v \mathfrak{B}(a, \psi(a), v),$$

которая в свою очередь дедуктивно равна формуле

$$\mathfrak{A}(a, b, \varphi(a, b)) \vee \mathfrak{B}(a, \psi(a), c).$$

Эта формула уже не содержит связанных переменных, и из нее с помощью исчисления предикатов мы можем вновь получить формулу $\mathfrak{F}$. Тем самым нами получено символьное решение формулы $\mathfrak{F}$.

[1]) См. гл. I, с. 35.

А теперь, с учетом этого обобщения символьного решения, рассуждение, примененное на с. 191 — 193 к выводимой средствами исчисления предикатов предваренной формуле $\mathfrak{E}$, с равным успехом может быть применено и к выводимой квазипредваренной формуле $\mathfrak{E}$. В результате этого может быть построена такая дизъюнкция $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\tau$, что: 1) она является формулой, истинной в логике высказываний, и 2) каждый ее член получается из формулы $\mathfrak{E}$ в результате вычеркивания всех ее кванторов и выполнения следующих замен связанных переменных: каждая $\exists$-переменная заменяется некоторым термом; любая $\forall$-переменная, не попадающая в область действия ни одного квантора существования, заменяется некоторым сопоставленным ей индивидным символом; любая $\forall$-переменная, попадающая в область действия каких-либо f кванторов существования, заменяется некоторым функциональным термом с сопоставленным этой $\forall$-переменной f-местным функциональным знаком, причем в качестве его аргументов стоят те же термы, которые появились на месте $\exists$-переменных, связанных упомянутыми f кванторами существования. (При выборе порядка этих аргументов следует руководствоваться очередностью появления соответствующих кванторов существования.)

При этом термы, появляющиеся на месте $\exists$-переменных, могут быть произвольным образом построены из фигурирующих в формуле $\mathfrak{E}$ свободных индивидных переменных, индивидных символов и функциональных знаков, а также из сопоставленных $\forall$-переменным вновь вводимых индивидных символов и функциональных знаков.

С другой стороны, если некоторая дизъюнкция $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\tau$, обладающая перечисленными свойствами, истинна в логике высказываний, то формула $\mathfrak{E}$ выводима средствами исчисления предикатов. Действительно, вместе с этой дизъюнкцией истинна в логике высказываний и дизъюнкция $\mathfrak{E}'_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}'_\tau$, получающаяся из нее в результате замены каждого из входящих в нее термов, начинающихся одним из сопоставленных некоторой $\forall$-переменной функциональных знаков или состоящих просто из некоторого сопоставленного одной из $\forall$-переменных индивидного символа, какой-нибудь (вновь вводимой) свободной индивидной переменной. А от этой дизъюнкции $\mathfrak{E}'_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}'_\tau$ можно средствами исчисления предикатов возвратиться к формуле $\mathfrak{E}$.

Этот обратный переход может быть осуществлен специальным образом, а именно применением правил (μ^*) и (ν^*), которые мы сейчас сформулируем, и вычеркиванием повторяющихся членов дизъюнкции.

Правила (μ^*) и (ν^*) являются обобщениями уже имеющихся у нас правил (μ) и (ν).

Правило (μ^*): *Если формула составлена с помощью конъюнкций и дизъюнкций из некоторых составных частей (членов), то в любом из этих членов любой фигурирующий в нем терм можно заменить какой-либо связанной переменной, проставив перед этим членом соответствующий квантор существования.*

Правило (ν^*): *Если формула составлена с помощью конъюнкций и дизъюнкций из некоторых составных частей (членов) и если один из этих членов содержит какую-нибудь свободную индивидную переменную, не входящую ни в один из остальных членов, то эту свободную переменную можно заменить связанной, проставив перед этим членом соответствующий квантор всеобщности* [1]).

К числу квазипредваренных формул относятся, в частности, дизъюнкции предваренных формул. К рассмотрению таких дизъюнкций нас приводит исследование выводимости одних предваренных формул из других предваренных формул (аксиом). Действительно, любая такая выводимость изображается импликацией вида $\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_f \to \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f$ и $\mathfrak{B}$ — предваренные формулы. Эта импликация элементарным преобразованием может быть переведена в формулу $\neg\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \neg\mathfrak{A}_f \vee \mathfrak{B}$, а формулы $\neg\mathfrak{A}_1, \ldots, \neg\mathfrak{A}_f$ по правилу (λ) [2]) можно преобразовать в предваренные формулы, так что в результате получится дизъюнкция предваренных формул. Разумеется, в этом случае с помощью правила (ι) [3]) можно все кванторы вынести наружу и, таким образом, получить одну-единственную предваренную формулу. Но этот прием в случае применения теоремы Эрбрана в форме предложения а) обладает тем недостатком, что вводимые при этом функциональные знаки получают аргументов больше, чем это необходимо. Это обстоятельство связано с тем, что у дизъюнкции, построенной из предваренных формул, отчетливо проявляются некоторые характерные различия между формулами, а при сведении их в единую предваренную формулу эти различия оказываются замаскированными. Например, любая дизъюнкция вида

$$\exists x \forall y \mathfrak{A}(x, y) \vee \exists x \exists y \exists z \mathfrak{B}(x, y, z)$$

может быть преобразована в предваренную формулу, имеющую вид

$$\exists x \exists y \exists z \forall u \mathfrak{C}(x, y, z, u),$$

но предваренная формула этого вида не всегда может быть расщеплена в дизъюнкцию указанного выше вида. Так и в вопросах,

---

[1]) При применении правил (μ^*) и (ν^*) следует учитывать, что, вообще говоря, одна и та же формула может быть различными способами представлена в виде составных частей, соединенных знаками конъюнкции и дизъюнкции.

[2]) См. т. I, с. 181.

[3]) См. т. I, с. 179.

связанных с проблемой разрешимости, мы часто бываем вынуждены для характеристики типов формул привлекать к рассмотрению дизъюнкции предваренных формул, если речь идет о выводимости, а если речь идет о двойственных вопросах непротиворечивости (неопровеижимости) или о соответствующих неформальных вопросах «выполнимости», — конъюнкции предваренных формул.

В качестве следствия из предложения б) и его обобщения получается, что осуществляемый средствами исчисления предикатов вывод любой квазипредваренной формулы, построенной из переменных и символов исчисления предикатов и, быть может, некоторых дополнительных индивидных, функциональных и предикатных символов, всегда может быть проведен следующим образом. Мы начинаем с некоторой истинной в логике высказываний бескванторной формулы, которая не содержит никаких других символов логики высказываний, кроме встречающихся в заданной формуле, а затем подходящим образом применяем правила (μ^*) и (ν^*) в сочетании с правилом вычеркивания повторений дизъюнктивных членов. Вывод любой не квазипредваренной формулы $\mathfrak{F}$ теперь может быть проделан следующим образом. Сначала мы строим некоторую квазипредваренную формулу $\mathfrak{F}_1$, переводимую в $\mathfrak{F}$. Эту формулу только что описанным способом выводим из некоторой истинной в логике высказываний бескванторной формулы $\mathfrak{E}_1$, а затем надлежащими преобразованиями возвращаемся от $\mathfrak{F}_1$ к $\mathfrak{F}$. Формула $\mathfrak{F}_1$ в свою очередь может быть получена преобразованиями из некоторой построенной из элементарных формул конъюнктивной нормальной формы, которая тоже является истинной в логике высказываний.

Если проанализировать шаги, на которые может быть разложено получение формулы $\mathfrak{F}$ в соответствии со сказанным выше, то можно убедиться, что вполне достаточно пользоваться следующими правилами вывода:

а) Правила ассоциативности и коммутативности для конъюнкции и дизъюнкции.

б) В качестве исходных формул разрешается брать формулы вида

$$\mathfrak{P} \vee \neg\mathfrak{P} \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{Q}_r \qquad (r \geqslant 0)$$

или конъюнкции таких формул; здесь $\mathfrak{P}$ — элементарная формула, а каждое $\mathfrak{Q}_i$ ($i = 1, \ldots, r$) — либо элементарная формула, либо отрицание элементарной формулы.

в) Выражение $\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ может быть заменено выражением $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$;
выражение $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C})$ — выражением $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$.

г) Выражение $\mathfrak{A}$ может быть заменено выражением $\neg\neg\mathfrak{A}$;
выражение $\neg\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{B}$ — выражением $\neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;
выражение $\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B}$ — выражением $\neg(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$.

д) Разрешается вычеркивать повторяющиеся члены дизъюнкции.

е) Выражение $\neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ может быть заменено выражением $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$;
выражение $(\neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B})$ — выражением $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$.

ж) Выражение $\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ может быть заменено выражением $\neg\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$;
выражение $\exists\mathfrak{x}\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ — выражением $\neg\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

з) Если формула $\mathfrak{B}$ не содержит переменной $\mathfrak{x}$, то можно выполнить следующие замены:
выражение $\forall\mathfrak{x}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B})$ может быть заменено выражением $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B}$;
выражение $\exists\mathfrak{x}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B})$ — выражением $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B}$;
выражение $\forall\mathfrak{x}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B})$ — выражением $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B}$;
выражение $\exists\mathfrak{x}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B})$ — выражением $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B}$.

и) Действуют следующие две схемы:

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{v})}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})}$$

(здесь $\mathfrak{t}$ — терм, а $\mathfrak{v}$ — свободная переменная, не входящая в выражение $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$; в первой схеме $\mathfrak{t}$ может входить в $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$; в обеих схемах переменная $\mathfrak{x}$ не должна входить в верхнюю формулу).

к) Разрешается производить переименования связанных переменных, если при этом не возникает коллизий между ними.

В правилах в), г), е), ж) и з) замена производится только в указанном направлении. Эти правила могут применяться не только к целым формулам, но в равной мере и к составным частям формул. Эти части не обязаны быть формулами, но в этом случае они должны быть выражениями, получающимися из формул в результате замены свободных переменных связанными.

В отношении выводимости формул описанное этими правилами ограниченное исчисление предикатов[1] — в силу ранее проведенного нами рассуждения, связанного с теоремой Эрбрана, — равносильно обычному исчислению предикатов. Но эта равносильность не распространяется на выводы формул из других формул. Действительно, в обычном исчислении предикатов выводимость формулы $\mathfrak{B}$ из формулы $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ не содержит свободных переменных, равносильна выводимости импликации $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. В нашем ограниченном исчислении это утверждение уже неверно, потому что среди его правил нет схемы $\dfrac{\mathfrak{C},\ \mathfrak{C} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$. В отличие от этой

[1] Это исчисление очень близко к исчислению K_2, построенному Куртом Шютте в его работе: Schütte K. Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik. — Math. Ann., 1950, 122, S. 47—65. Однако оно немного уже исчисления K_2.

схемы, правила описанного нами ограниченного исчисления предикатов устроены так, что они не дают возможности исключать какие-либо формулы [1]).

Замечание. Формулировка теоремы Эрбрана, не ограничивающаяся квазипредваренными формулами, приведена в работе «False Lemmas in Herbrand» (см. сноску на с. 203). Эта формулировка содержалась уже в диссертации Эрбрана, хотя и не в очень явном виде. Однако в его доказательство потребовалось внести существенное исправление, в результате чего лемму из раздела 3.3 пятой главы диссертации Эрбрана пришлось заменить более слабым и более сложным утверждением. Доказательство этой модифицированной леммы дано в работе Б. Дребена и Дж. Дентона: Dreben B., Denton J. — A. Supplement to Herbrand. — J. Symbolic Logic, 1966, **31**, p. 393—398.

Впрочем, эта общая формулировка теоремы Эрбрана несущественно превосходит ее формулировку для случая квазипредваренных формул. Даваемый ею критерий выводимости формулы эквивалентен критерию, получающемуся преобразованием формулы произвольного вида в квазипредваренную формулу [2]) и применением к этой последней теоремы Эрбрана для квазипредваренных формул.

§ 4. Критерии опровержимости в чистом исчислении предикатов

Наряду с формулировкой, содержащейся в предложениях а) и б) [3]), теорема Эрбрана допускает еще одну формулировку, которая более тесно примыкает к содержательному истолкованию формул и которой сам Эрбран отдавал предпочтение. В общем случае эта формулировка оказывается несколько усложненной, но, если ограничиться случаем чистого исчисления предикатов, она приобретает прозрачный характер.

Для того чтобы подойти к этой формулировке, мы сначала рассмотрим случай, когда формула $\mathfrak{E}$ имеет вид сколемовской нормальной формы

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_s \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

[1]) Систематическое изучение такого рода ограниченных, задаваемых правилами форм исчисления предикатов, дающих ту же самую совокупность выводимых формул, но не содержащих правил, позволяющих исключать какие-либо формулы, было впервые осуществлено Г. Генценом в его трактате «Untersuchungen über das logische Schließen» (см. сноску 2 на с. 202). Рассуждения Генцена относятся к некоторому специальному исчислению — исчислению секвенций. То, что его рассмотрения равным образом могут быть осуществлены и средствами нашего исчисления формул, было показано К. Шютте в его уже упоминавшейся работе «Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik».

[2]) Заметим, что это преобразование не использует тех правил преобразования (règles de passage), которые создают определенные трудности в доказательстве Дребена и Дентона.

[3]) См. с. 201—202.

с следующими свойствами: 1) в кванторной приставке этой формулы содержится по крайней мере один квантор существования и по крайней мере один квантор всеобщности; 2) она не содержит свободных индивидных переменных, а также и никаких связанных переменных, кроме $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ [1]). Если формула $\mathfrak{E}$ является выводимой, то, согласно предложению а), для нее может быть указана некоторая дизъюнкция

$$\mathfrak{A}(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}, \varphi_1(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}), \ldots, \varphi_s(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)})) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \mathfrak{A}(t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}, \varphi_1(t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}), \ldots, \varphi_s(t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)})),$$

истинная в логике высказываний, т. е. выводимая средствами одного только исчисления высказываний. Здесь $t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}, \ldots, t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}$ — термы, построенные из свободных индивидных переменных и r-местных функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$.

Если теперь эти термы заменить какими-либо другими термами таким образом, чтобы совпадающие элементарные формулы снова оказались совпадающими, то эта дизъюнкция перейдет в формулу, которую тоже можно будет вывести средствами исчисления высказываний. Замены такого рода можно производить, в частности, следующим образом: сначала каждый из термов $t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}, \ldots, t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}$, не совпадающий ни с одним из термов $\varphi_i(t_1^{(j)}, \ldots, t_r^{(j)})$ $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, m)$, заменяется цифрой 0 всюду, где он фигурирует либо сам по себе, либо в качестве аргумента какой-либо из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$. В полученной таким образом дизъюнкции $\mathfrak{D}$ каждый из встречающихся в ней термов оказывается построенным из цифры 0 и из функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$.

Затем функциональные знаки $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ мы истолковываем как символы для некоторых вычислимых арифметических функций, зависящих от r аргументов, являющихся цифрами. В результате этого для термов, входящих в дизъюнкцию $\mathfrak{D}$, получается некоторое распределение их значений, и если каждый из этих термов заменить цифрой, являющейся его значением, то у нас получится некоторая выводимая средствами исчисления высказываний дизъюнкция $\mathfrak{D}_1$, состоящая из членов вида

$$\mathfrak{A}(n_1, \ldots, n_r, f_1, \ldots, f_s),$$

[1]) Случаи $r = 0$ и $s = 0$ могут быть разобраны непосредственно на основе рассмотренных ранее элементарных соображений: см. т. I, с. 239—243.

где $n_1, \ldots, n_r$ — цифры, а f_i (при $i = 1, \ldots, s$) представляет собой значение функции $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r)$.

Пусть теперь p — наибольшая среди цифр $n_1, \ldots, n_r$, стоящих в членах дизъюнкции $\mathfrak{D}_1$ на местах $\exists$-переменных формулы $\mathfrak{E}$. Тогда $\mathfrak{D}_1$ будет поддизъюнкцией дизъюнкции, состоящей из $(p+1)^r$ членов вида

$$\mathfrak{A}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, f_{1,j}, \ldots, f_{s,j}),$$

где номер j члена этой дизъюнкции пробегает значения от 0 до $(p+1)^r - 1$ включительно, цифры $f_{i,j}$ (при $i = 1, \ldots, s$) являются значениями функций $\varphi_i(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j})$, а список

$$n_{1,0}, \ldots, n_{r,0}; \ldots; n_{1,(p+1)^r-1}, \ldots, n_{r,(p+1)^r-1}$$

содержит в каком-либо порядке все r-членные наборы цифр, не превосходящих p.

Порядок этот мы выберем так, чтобы из двух наборов, различающихся максимальными входящими в них цифрами, предшествующим считался тот, максимальная цифра которого меньше; а для наборов с одинаковыми максимальными цифрами мы будем считать этот порядок лексикографическим, так что из двух таких наборов предшествующим является тот, у которого цифра, стоящая на первом месте, где эти наборы различаются, является меньшей.

Построенную таким образом дизъюнкцию мы обозначим через $\mathfrak{E}_p^{(\varphi)}$. Она тоже может быть выведена средствами исчисления высказываний, так как дизъюнкция $\mathfrak{D}_1$ содержится в ней в качестве поддизъюнкции.

Для любой цифры q и для любой системы ψ, состоящей из s r-местных арифметических функций $\psi_1, \ldots, \psi_s$, значения которых можно вычислить — а в случае конечной области определения, состоящей из r-членных наборов цифр, не превосходящих q, даже задать путем прямого перечисления, — мы обозначим через $\mathfrak{E}_q^{(\psi)}$ дизъюнкцию, состоящую из членов

$$\mathfrak{A}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, l_{1,j}, \ldots, l_{s,j})$$
$$j = 0, \ldots, (q+1)^r - 1,$$

где $n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}$ — всевозможные r-членные наборы цифр, не превосходящих q, взятые в указанном выше порядке [число этих наборов равно $(q+1)^r$, а цифры $l_{i,j}$ (при $i = 1, \ldots, s$) являются значениями функций $\psi_i(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j})$].

Для любой такой дизъюнкции можно непосредственно выяснить, выводима ли она средствами исчисления высказываний.

С этой целью достаточно заменить различные входящие в нее элементарные формулы различными функциональными переменными без аргументов и проверить, является ли полученная таким образом формула исчисления высказываний тождественно истинной.

Если цифра f меньше q, то дизъюнкция $\mathfrak{E}_f^{(\varphi)}$ является поддизъюнкцией дизъюнкции $\mathfrak{E}_q^{(\varphi)}$. Поэтому, если $\mathfrak{E}_f^{(\varphi)}$ окажется выводимой средствами исчисления высказываний, то же самое можно будет сказать и относительно $\mathfrak{E}_q^{(\varphi)}$.

Итог наших рассуждений сводится к тому, что по любому выводу формулы $\mathfrak{E}$ в исчислении предикатов, произвольным образом выбрав вычислимые арифметические функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ от r аргументов, можно указать такую цифру p, что формула $\mathfrak{E}_p^{(\varphi)}$ будет выводима средствами исчисления высказываний. Эта теорема допускает и еще одну, несколько более общую формулировку ввиду того, что нам совершенно несущественно иметь дело с функциями, задаваемыми законами, имеющими арифметическую природу. Более того, будет достаточно, если значения выражений $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r)$ $(i = 1, \ldots, s)$ будут определяться постепенно, путем последовательного выбора, причем, расширяя те числовые области, из элементов которых будут строиться соответствующие r-членные наборы, мы будем продвигаться до тех пор, пока, используя значения, выбранные для выражений $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r)$, мы не натолкнемся на дизъюнкцию $\mathfrak{E}_p^{(\varphi)}$, которая будет выводима средствами исчисления высказываний.

То, что описанным путем мы всегда придем к некоторой выводимой средствами исчисления высказываний дизъюнкции $\mathfrak{E}_p^{(\varphi)}$, вытекает из предшествующего рассуждения. Действительно, цифра p, о которой идет речь в нашем предложении, была, как мы знаем, получена как наибольшая среди цифр, являющихся (при данном распределении значений) значениями тех выражений, которые в членах дизъюнкции $\mathfrak{D}$ находятся на местах $\exists$-переменных формулы $\mathfrak{E}$. Это распределение значений производилось в результате истолкования функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ как символов для определенных арифметических функций. Но это распределение можно произвести и иначе, а именно — сначала каждому из термов $\varphi_i(0, \ldots, 0)$ $(i = 1, \ldots, s)$ мы припишем значение в виде некоторой цифры и внесем эти значения вместо соответствующих выражений; затем для вновь полученных термов $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r)$ с цифрами $n_1, \ldots, n_r$ мы выберем значения в виде некоторых новых цифр, которые мы опять-таки внесем на соответствующие места, и будем это продолжать до тех пор, пока все термы, входящие в формулу $\mathfrak{D}$, не получат некоторые значе-

ния, причем мы должны будем обращать внимание на то, чтобы при этом равным выражениям $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r)$ всегда приписывались равные же значения.

Если $\mathfrak{p}$ — наибольшая из цифр, которые при этой процедуре становятся значениями термов, находящихся на местах $\exists$-переменных формулы $\mathfrak{E}$ (в членах дизъюнкции $\mathfrak{D}$), и если мы придадим какие-либо значения всем тем выражениям $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r)$, у которых $n_1, \ldots, n_r$ суть цифры из ряда от 0 до $\mathfrak{p}$ и которые пока еще не получили значений, то функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ будут определены в области цифр 0, ..., $\mathfrak{p}$ (возможно, они окажутся определенными уже и для некоторых других наборов значений аргументов) и мы сможем с их помощью построить дизъюнкцию $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$. Эта дизъюнкция будет содержать в качестве поддизъюнкции дизъюнкцию $\mathfrak{D}_1$, которая получается из $\mathfrak{D}$ в результате замены термов их значениями в виде цифр, и поэтому она, как и $\mathfrak{D}$, будет выводиться средствами исчисления высказываний.

При выполнении этой процедуры на значения функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ в области от 0 до $\mathfrak{p}$ не накладывается никаких ограничений (кроме условия однозначной определенности этих значений значениями аргументов). Таким образом, получается, что если в выбранном нами порядке очередности порождать эти r-членные наборы цифр и для каждого из этих наборов произвольным образом устанавливать значения функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ (в виде некоторых цифр), а затем с помощью этих значений последовательно строить формулы $\mathfrak{E}_0^{(\varphi)}$, $\mathfrak{E}_1^{(\varphi)}$, ..., то в конце концов мы придем к некоторой формуле $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$, получающейся подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

(При этом цифра $\mathfrak{p}$ зависит от выбора значений указанных функций; характер этой зависимости можно проследить с помощью вида дизъюнкции $\mathfrak{D}$.)

Неограниченную последовательность значений, определяемую путем произвольного выбора, Брауэр называет свободно становящейся последовательностью. Рассмотренное нами развертывающееся определение функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ представляет собой пример такой свободно становящейся последовательности.

Для полученного нами критерия выводимости имеет место следующее его обращение:

Если для некоторой цифры $\mathfrak{p}$ и для некоторых r-местных арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$, определенных в области значений аргументов от 0 до $\mathfrak{p}$, формула $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ выводима средствами исчисления высказываний и если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ в указанной

области удовлетворяют условиям:

{1} $\varphi_i(n_1, \ldots, n_r) > n_j$ (для $i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, r$)

и

{2} $\varphi_i(m_1, \ldots, m_r) \neq \varphi_f(n_1, \ldots, n_r)$, *кроме случая, когда*

$$i = f,\ m_1 = n_1,\ \ldots,\ m_r = n_r,$$

то можно построить вывод формулы $\mathfrak{E}$ в исчислении предикатов.

Действительно, средствами исчисления высказываний, так же как и формула $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$, выводима дизъюнкция $\tilde{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$, которая получается из $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ в результате замены каждой цифры $\mathfrak{z}$, фигурирующей в каком-либо из членов дизъюнкции $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ (на месте некоторой связанной переменной формулы $\mathfrak{E}$), соответствующей ей нумерованной переменной $a_{\mathfrak{z}}$. А теперь из этой дизъюнкции, состоящей из членов

$$\mathfrak{A}\left(a_{n_{1,j}}, \ldots, a_{n_{r,j}}, a_{f_{1,j}}, \ldots, a_{f_{s,j}}\right),$$

где

$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^r - 1; \quad f_{i,j} = \varphi_i(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}) \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

и являющейся формулой чистого исчисления предикатов, ввиду наложенных на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ условий {1} и {2} можно — аналогично тому, как это делалось в доказательстве второй ε-теоремы [1]) по отношению к формуле (3*), — с помощью правил (μ) и (ν) получить некоторую дизъюнкцию, каждый член которой совпадает с $\mathfrak{E}$ и которая, следовательно, может быть преобразована в $\mathfrak{E}$ средствами исчисления высказываний. Этот вывод формулы $\mathfrak{E}$ из $\tilde{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ вместе с выводом формулы $\tilde{\mathfrak{E}}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний дает нам вывод формулы $\mathfrak{E}$ в исчислении предикатов.

Условия {1} и {2} могут быть удовлетворены различными системами функций $\varphi_1(n_1, \ldots, n_r), \ldots, \varphi_s(n_1, \ldots, n_r)$ не только в конечной, но и в бесконечной числовой области. Такого рода система функций характеризуется тем, что значение каждой входящей в нее функции всегда больше любого из значений аргументов, а также тем, что любое значение принимается не более чем одной функцией и только для одной-единственной системы значений аргументов. Систему функций, обладающую этим свойством, мы в дальнейшем будем называть разделяющей.

---

[1]) См. с. 172—175.

Один из способов, позволяющих получать такого рода системы функций, заключается в следующем. Мы исходим из какой-либо функции $\varphi(n_1, \ldots, n_r)$, сопоставляющей любому r-членному набору цифр $n_1, \ldots, n_r$ некоторую цифру таким образом, что различным наборам сопоставляются различные цифры, а значение функции всегда не меньше любого из значений своих аргументов. Положив

$$\varphi_i(n_1, \ldots, n_r) = \mathfrak{s} \cdot \varphi(n_1, \ldots, n_r) + i \qquad (i = 1, \ldots, \mathfrak{s}),$$

мы получим по такой функции φ некоторую систему функций, которая является разделяющей.

Только что указанным свойством обладает, в частности, функция, сопоставляющая каждому r-членному набору цифр тот номер j, который ему приписан в перечислении всех r-членных наборов цифр

$$n_{1,j}, \ldots, n_{r,j} \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

согласно используемому нами принципу упорядочения (т. е. при упорядочении, производящемся по наибольшей цифре набора, а затем лексикографически).

Таким образом, в силу нашей нумерации r-членных наборов цифр, равенства

$$\varphi_i(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}) = \mathfrak{s} \cdot j + i \qquad (i = 1, \ldots, \mathfrak{s};\ j = 0, 1, \ldots)$$

задают некоторую разделяющую систему функций.

Замечание. В качестве особенно простых в арифметическом отношении разделяющих систем r-местных функций упомянем следующие две:

1. Функция

$$\varphi(n_1, \ldots, n_r) = n_1 + \binom{n_1 + n_2 + 1}{2} + \binom{n_1 + n_2 + n_3 + 2}{3} + \ldots + \binom{n_1 + \ldots + n_r + (r-1)}{r},$$

как нетрудно показать, представляет собой номер набора $n_1, \ldots, n_r$ в некотором перечислении всех r-членных наборов цифр, причем этот номер всегда не меньше любой из цифр набора. Следовательно, из функции $\varphi(n_1, \ldots, n_r)$ получается разделяющая система функций

$$\varphi_i(n_1, \ldots, n_r) = \mathfrak{s} \cdot \varphi(n_1, \ldots, n_r) + i \qquad (i = 1, \ldots, \mathfrak{s}),$$

2. Пусть $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r, \ldots$ — последовательность простых чисел. Тогда функции

$$\varphi_i(n_1, \ldots, n_r) = \mathfrak{p}_0^i \cdot \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r},$$

как легко убедиться, образуют разделяющую систему функций.

А теперь, резюмируя сказанное, мы можем сформулировать наш результат следующим образом:

Для того, чтобы формула $\mathfrak{E}$ *была выводима в исчислении предикатов, необходимо и достаточно, чтобы можно было указать такую цифру* $\mathfrak{p}$ *и такую разделяющую систему функций* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$, *что дизъюнкция* $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ *выводима средствами исчисления высказываний* [1]).

В том случае, когда формула $\mathfrak{E}$ выводима, для произвольной системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ вычислимых функций всегда можно указать такую цифру $\mathfrak{p}$, что дизъюнкция $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ будет выводима средствами исчисления высказываний. Разумеется, в этом случае и для всякой бóльшей цифры $\mathfrak{q}$ формула $\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}^{(\varphi)}$ при тех же самых функциях $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ будет выводима средствами исчисления высказываний. И для любой системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$, заданной посредством развертывающегося *) определения, тоже можно получить цифру $\mathfrak{p}$, для которой формула $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ будет выводима средствами исчисления высказываний.

В этом виде наш результат еще не вполне удобен. Однако небольшой трансформацией и переходом к содержательному истолкованию мы получим некоторую более прозрачную его редакцию.

Эта трансформация будет заключаться в том, что от вопроса о *выводимости* формул рассматриваемого нами специального вида

---

[1]) Следующий пример показывает, что в этой формулировке нельзя отбросить условие, требующее, чтобы система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ была разделяющей; иными словами, существование какой-либо произвольной системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ и какой-либо цифры $\mathfrak{p}$, для которых формула $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ выводима средствами исчисления высказываний, еще не всегда указывает на выводимость формулы $\mathfrak{E}$.

Пусть $\mathfrak{E}$ представляет собой формулу

$$\exists x \forall y (\neg A(x, x) \vee A(x, y)).$$

Здесь $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ равны 1. Пусть φ означает функцию, тождественно равную 0. Тогда $\mathfrak{E}_0^{(\varphi)}$ представляет собой формулу

$$\neg A(0, 0) \vee A(0, 0),$$

которая выводима средствами исчисления высказываний. Между тем формула $\mathfrak{E}$ невыводима, что, например, следует хотя бы из того, что она не является 2-тождественной.

*) См. с. 216. — *Прим. перев.*

мы перейдем к вопросу об *опровержимости* формул *двойственного вида*. Согласно ранее данному определению[1]) под опровержимостью формулы исчисления предикатов мы будем понимать выводимость ее отрицания.

Формула $\mathfrak{E}$ исчисления предикатов, имеющая вид

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma), \tag{1}$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$ — полный список входящих в нее индивидных переменных, может быть преобразована в отрицание формулы

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma), \tag{2}$$

где $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma)$ — отрицание выражения $\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma)$ или результат какого-либо преобразования этого отрицания. И обратно, если мы будем исходить из какой-либо формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов, имеющей вид

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma), \tag{3}$$

то ее опровержимость будет равносильна выводимости формулы

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_\tau \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_\sigma \neg \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma). \tag{4}$$

Если $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$ — полный список входящих в формулу $\mathfrak{F}$ индивидных переменных и если $\tau \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, то формула (4) удовлетворяет всем предположениям, сформулированным нами относительно формулы $\mathfrak{E}$ в проведенном выше рассмотрении. Поэтому к формуле (4) можно применить итог этого рассмотрения. При этом вместо дизъюнкций $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ можно ввести соответствующие конъюнкции, пользуясь тем, что дизъюнкция членов вида

$$\neg \mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\tau, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\sigma)$$

средствами исчисления высказываний может быть преобразована в отрицание конъюнкции соответствующих членов

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\tau, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\sigma).$$

Пусть $\mathfrak{F}$ — формула исчисления предикатов, имеющая вид

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_\sigma \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma) \qquad (\tau, \sigma \neq 0)$$

и не содержащая индивидных переменных, отличных от $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\sigma$. Пусть $\mathfrak{p}$ — некоторая цифра, а φ — система вычислимых τ-местных арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\sigma$. Под $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ мы

[1]) См. т. I, с. 168.

будем понимать *конъюнкцию*, состоящую из членов

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\tau,j}, \mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\sigma,j})$$

$$\left(j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\tau - 1;\ \mathfrak{k}_{i,j} = \varphi_i(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\tau,j}) \text{ для } i = 1, \ldots, \sigma\right),$$

где набор $\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\tau,j}$ пробегает $(\mathfrak{p}+1)^\tau$ различных τ-членных наборов, состоящих из цифр, не превосходящих $\mathfrak{p}$ (эти наборы упорядочены по наибольшей встречающейся в них цифре, а затем лексикографически).

Тогда в применении к формуле $\mathfrak{F}$ наш предыдущий результат изобразится следующим образом.

Если формула $\mathfrak{F}$ опровержима в исчислении предикатов, то на основе ее опровержения можно для любой системы φ вычислимых арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\sigma$ от τ аргументов указать такую цифру $\mathfrak{p}$, что конъюнкция $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ будет опровержима средствами исчисления высказываний, т. е. будет получаться подстановкой из отрицания некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний. Такая цифра $\mathfrak{p}$ получится и в том случае, если заданная система функций будет определяться с помощью свободно становящейся последовательности[1]). С другой стороны, если для некоторой цифры $\mathfrak{p}$ и некоторой разделяющей системы φ функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\sigma$ формула $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ будет опровержима средствами исчисления высказываний, то, пользуясь этой опровержимостью, мы сможем получить опровержение $\mathfrak{F}$ в исчислении предикатов.

Теперь попытаемся разобраться в том, что означает опровержимость формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ средствами исчисления высказываний. Во-первых, она выражает тот факт, что эта формула получается подстановкой из отрицания некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний; и так как формула $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ не содержит связанных переменных, то это в свою очередь означает, что при любом распределении истинностных значений между входящими в $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ элементарными формулами вся формула в целом всегда будет принимать значение «ложь» (если связки исчисления высказываний понимать как истинностные функции).

Далее, если мы учтем, что формула $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ представляет собой конъюнкцию, состоящую из членов

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\tau,j}, \mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\sigma,j}) \qquad (j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\tau - 1),$$

где $\mathfrak{k}_{i,j}$ при $i = 1, \ldots, \sigma$ является значением выражения $\varphi_i(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\tau,j})$, и что $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\tau,j}, \mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\sigma,j})$ не содержит ника-

[1]) См. с. 216.

ких переменных, кроме формульных переменных формулы $\mathfrak{F}$, и никаких других термов, кроме цифр $n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, f_{1,j}, \ldots, f_{s,j}$, то получится, что опровержимость $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$ средствами исчисления высказываний равносильна тому, что если формульные переменные формулы $\mathfrak{F}$ заменить логическими функциями с тем же самым числом аргументов, определенными для цифр, фигурирующих в формуле $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$, а формульные переменные без аргументов — истинностными значениями [1]), то (при данных пробегах логических функций и при интерпретировании связок исчисления высказываний как истинностных функций) формула $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$ будет всегда принимать значение «ложь».

В противоположность этому, неопровержимость формулы $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$ средствами исчисления высказываний заключается в том, что среди возможных замен формульных переменных в $\mathfrak{F}$ логическими функциями найдется по крайней мере одна такая, в результате выполнения которой формула $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$ примет значения «истина» (так как в $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$ входит лишь конечное число цифр, мы можем ограничиться рассмотрением лишь конечного числа систем пробегов их значений). Другими словами, неопровержимость формулы $\mathfrak{F}_p^{(\varphi)}$ средствами исчисления высказываний означает, что можно выбрать такие логические функции для замены формульных переменных в формуле $\mathfrak{F}$, что каждая из формул

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, f_{1,j}, \ldots, f_{s,j})$$
$$\text{для } j = 0, \ldots, (p+1)^r - 1,$$

где $f_{i,j}$ представляет собой значение выражения $\varphi_i(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j})$, примет значение «истина».

Возможность построения таких логических функций мы можем кратко выразить, сказав, что при рассматриваемых арифметических функциях $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, \varphi_1(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}), \ldots, \varphi_s(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}))$$

совместно выполнимы.

Выполнимость при этом понимается как выполнимость с помощью логических функций, которые подставляются вместо формульных переменных формулы $\mathfrak{F}$ (каждая логическая функция берется с тем же самым числом аргументов, что и соответствующая ей формульная переменная, а вместо формульных переменных без аргументов подставляются просто истинностные значения); эти функции определены на конечной индивидной области встречающихся у нас цифр (или, если угодно, на области цифр от 0 до наибольшей из числа встречающихся). Ввиду того, что область эта ограничена, высказывание о совместной выполнимости упомянутых формул имеет финитный смысл.

[1]) Эти истинностные значения можно рассматривать как нульместные логические функции.

В итоге для установленных нами критериев опровержимости формул $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов, имеющих вид

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

где $r, s \neq 0$, а $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ — полный список входящих в эту формулу индивидных переменных, мы получаем следующие более прозрачные формулировки, в которых также используется ранее уже применявшаяся нумерация r-членных наборов цифр

$$n_{1,j}, \ldots, n_{r,j} \qquad (j = 0, 1, \ldots):$$

1. *Если формула $\mathfrak{F}$ опровержима в исчислении предикатов, то для всякой системы вычислимых r-местных арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ формулы*

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, \varphi_1(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}), \ldots, \varphi_s(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}))$$
$$j = 0, \ldots, (p+1)^r - 1$$

не являются совместно выполнимыми, начиная с некоторой цифры p, определяемой для данной системы функций на основе опровержения формулы $\mathfrak{F}$.

2. *Если формула $\mathfrak{F}$ опровержима в исчислении предикатов, то для любой свободно становящейся последовательности s-членных наборов цифр*

$$f_{1,j}, \ldots, f_{s,j} \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, f_{1,j}, \ldots, f_{s,j})$$
$$j = 0, \ldots, (p+1)^r - 1,$$

начиная с некоторой цифры p (получающейся в ходе построения этой последовательности с помощью опровержения формулы $\mathfrak{F}$), не являются совместно выполнимыми [1]).

[1]) Можно было бы пытаться заменить этот критерий более простым, утверждающим, что в случае опровержимости формулы $\mathfrak{F}$, начиная с некоторой цифры p, будет невозможно указать такие s-членные наборы

$$f_{1,j}, \ldots, f_{s,j}, \qquad j = 0, \ldots, (p+1)^r - 1,$$

для которых формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, f_{1,j}, \ldots, f_{s,j})$$

3. *Если для любой цифры* $\mathfrak{p}$ *и для любой разделяющей системы*[1]) *вычислимых арифметических функций* $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ *формулы*

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}, \varphi_1(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}), \ldots, \varphi_\mathfrak{s}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}))$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

не являются совместно выполнимыми, то из невыполнимости этого списка формул следует опровержимость формулы $\mathfrak{F}$ *в исчислении предикатов.*

Первое из этих трех утверждений является непосредственным следствием второго. Действительно, упомянутые в нем $\mathfrak{r}$-местные вычислимые функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ можно использовать для порождения свободно становящейся последовательности, беря всякий раз в качестве $f_{1,j}, \ldots, f_{\mathfrak{s},j}$ значения функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ на наборе $n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}$.

Критерии 1 и 2 дают необходимое условие опровержимости. Критерий 3 дает достаточное условие. Так как это достаточное условие слабее, чем упомянутые необходимые, то *каждое из этих условий является одновременно и необходимым и достаточным условием опровержимости* формулы $\mathfrak{F}$ в исчислении предикатов.

Из критериев 1—3 можно извлечь следующие важные правила, касающиеся установления *неопровержимости* формул вида

$$\forall\mathfrak{x}_1 \ldots \forall\mathfrak{x}_\mathfrak{r} \exists\mathfrak{y}_1 \ldots \exists\mathfrak{y}_\mathfrak{s} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

с отличными от нуля $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ и с единственными индивидными переменными $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}$:

1*. Для того чтобы установить неопровержимость формулы $\mathfrak{F}$ в исчислении предикатов, достаточно указать такую систему вычислимых $\mathfrak{r}$-местных арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$, при которой формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}, \varphi_1(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}), \ldots, \varphi_\mathfrak{s}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}))$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

совместно выполнимы при произвольном выборе цифры $\mathfrak{p}$.

не являются совместно выполнимыми. В таком случае понятие свободно становящейся последовательности здесь было бы излишним.

Однако в действительности упомянутое более простое условие выполняется вовсе не для каждой опровержимой формулы рассматриваемого вида. Это обнаруживается уже на примере формулы

$$\forall x \exists y (A(x) \,\&\, \neg A(y)),$$

которая, разумеется, опровержима, в то время как формулы

$$A(j) \,\&\, \neg A(\mathfrak{p}+1), \qquad j = 0, \ldots, \mathfrak{p},$$

совместно выполнимы при любой цифре $\mathfrak{p}$.

[1]) См. с. 217.

2*. Для того чтобы установить неопровержимость формулы $\mathfrak{F}$ в исчислении предикатов, достаточно показать, что какая-либо свободно становящаяся последовательность $\mathfrak{s}$-членных наборов цифр

$$f_{1,j}, \ldots, f_{\mathfrak{s},j} \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

может быть неограниченно продолжена таким образом, что всякий раз, когда эта последовательность построена до места с номером $j = (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$, формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}, f_{1,j}, \ldots, f_{\mathfrak{s},j})$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

оказываются совместно выполнимыми.

3*. Если формула $\mathfrak{F}$ неопровержима в исчислении предикатов, то формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}, \varphi_1(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}), \ldots, \varphi_\mathfrak{s}(n_{1,j}, \ldots, n_{\mathfrak{r},j}))$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

совместно выполнимы для любой разделяющей системы[1]) вычислимых $\mathfrak{r}$-местных арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ и для любой цифры $\mathfrak{p}$.

Такая формулировка этих критериев имеет определенные преимущества для использования их в вопросах непротиворечивости формализованных систем аксиом первой ступени; эти вопросы, как мы знаем, сводятся к вопросам о неопровержимости тех или иных формул исчисления предикатов.

Однако следует отметить, что этот вариант формулировки данных критериев, — отвлекаясь от того, что он облечен не в форму теорем, а всего лишь в форму правил для неформального вывода, — при финитном рассмотрении не полностью воспроизводит содержание критериев 1—3.

Мы кратко поясним эту мысль на примере критерия 1. Критерий этот утверждает, что из существования какого-либо опровержения формулы $\mathfrak{F}$ вытекает, что для всякой системы вычислимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ существует некоторая цифра $\mathfrak{p}$, обладающая некоторым конкретным, непосредственно устанавливаемым свойством $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s})$.

Отсюда мы сделали заключение, что построение какой-либо системы вычислимых арифметических функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$, для которой можно доказать, что всякая цифра $\mathfrak{p}$ обладает свойством $\neg\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s})$, вместе с тем доказывает, что формула $\mathfrak{F}$ неопровержима. Это и составляет содержание критерия 1*. Но

[1]) См. с. 217.

из него, если дано некоторое опровержение формулы $\mathfrak{F}$, можно лишь заключить, что невозможно найти такую систему вычислимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$, для которой удастся доказать, что для всех цифр $\mathfrak{p}$ имеет место отношение $\neg\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_\delta)$; или, другими словами, что какую бы систему вычислимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$ мы ни взяли, нельзя будет доказать, что для всех цифр $\mathfrak{p}$ имеет место отношение $\neg\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_\delta)$.

Но это еще не говорит о том, что для любой системы вычислимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$ можно найти какую-либо цифру $\mathfrak{p}$, для которой имеет место отношение $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_\delta)$.

Аналогичным образом обстоит дело и с критериями 2 и 2*, а также с критериями 3 и 3*.

Таким образом, с финитной точки зрения критерии опровержимости 1 — 3 сильнее, чем критерии неопровержимости 1* — 3*, получающиеся из них путем неформального применения контрапозиции.

Следует также заметить, что все эти критерии, относящиеся непосредственно лишь к формулам рассмотренного нами специального вида

$$\forall\mathfrak{x}_1 \ldots \forall\mathfrak{x}_\tau\exists\mathfrak{y}_1 \ldots \exists\mathfrak{y}_\delta\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta$ — полный список индивидных переменных, а τ и δ отличны от нуля, могут быть также применены и к исследованию опровержимости (соответственно неопровержимости) *произвольных* формул исчисления предикатов. Действительно, пусть $\mathfrak{C}$ — какая-либо формула исчисления предикатов. Тогда для формулы $\neg\mathfrak{C}$ можно построить некоторую дедуктивно равную ей сколемовскую нормальную форму, причем эту форму можно выбрать так, чтобы она не содержала свободных индивидных переменных. Тогда отрицание этой формулы будет переводимо в некоторую формулу $\mathfrak{F}$ вида

$$\forall\mathfrak{x}_1 \ldots \forall\mathfrak{x}_\tau\exists\mathfrak{y}_1 \ldots \exists\mathfrak{y}_\tau\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta$ — полный список входящих в нее индивидных переменных. Так как формула $\neg\mathfrak{C}$ дедуктивно равна формуле $\neg\mathfrak{F}$, то по опровержению $\mathfrak{C}$ можно будет получить опровержение $\mathfrak{F}$, и наоборот; таким образом, исследование неопровержимости формулы $\mathfrak{C}$ равносильно исследованию неопровержимости $\mathfrak{F}$. Если в кванторной приставке этой формулы имеются только кванторы всеобщности или только кванторы существования, то вопрос о том, является эта формула опровержимой или нет, можно разрешить элементарным образом [1]). Если же в кванторной приставке имеются и кванторы всеобщности, и кванторы существования, то можно воспользоваться только что сформулированными критериями неопровержимости.

[1]) См. уже цитировавшееся недавно место т. I, с. 239 — 243.

Но можно и прямо получить обобщения критериев 1 — 3 на случай произвольных предваренных формул исчисления предикатов, а также на случай формул, являющихся конъюнкциями предваренных. Первым шагом на пути к этому обобщению является допущение в формуле $\mathfrak{F}$ свободных индивидных переменных. Модификация этих критериев на случай, когда в формуле $\mathfrak{F}$ содержатся свободные переменные, заключается в том, что свободные переменные этой формулы надо будет заменить отличными друг от друга цифрами и что, кроме того, в критерии 3 к условию, требующему, чтобы система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$ была разделяющей, надо будет добавить еще одно условие, требующее, чтобы значения этих функций были отличны от цифр, подставленных вместо свободных переменных формулы $\mathfrak{F}$.

Обоснование этих модифицированных критериев вытекает из того простого факта, что формула $\mathfrak{E}_1$, получающаяся из какой-либо формулы $\mathfrak{E}$ исчисления предикатов при замене свободных индивидных переменных какими-либо отличными друг от друга цифрами, выводима средствами исчисления предикатов тогда и только тогда, когда то же самое можно сказать относительно самой формулы $\mathfrak{E}$.

В остальном доказательство протекает совершенно так же, как и раньше; только теперь в дизъюнкции [1])

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(1)}, \varphi_1\left(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(1)}\right), \ldots, \varphi_\delta\left(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(1)}\right)\right) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \mathfrak{A}\left(\mathfrak{t}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(m)}, \varphi_1\left(\mathfrak{t}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(m)}\right), \ldots, \varphi_\delta\left(\mathfrak{t}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(m)}\right)\right)$$

термы $\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(m)}$ сами могут быть цифрами или же могут содержать их, и, в соответствии с этим, переход к дизъюнкции $\mathfrak{D}$ должен быть видоизменен так, чтобы цифрой 0 заменялись только те из термов $\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(m)}$, которые еще не являются цифрами и не совпадают ни с каким из термов $\varphi_i\left(\mathfrak{t}_1^{(j)}, \ldots, \mathfrak{t}_\tau^{(j)}\right)$ $(i = 1, \ldots, \delta;\ j = 1, \ldots, m)$. Добавление упомянутого выше условия, налагаемого на систему функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$, необходимо для того, чтобы сохранялась возможность вывода формулы $\mathfrak{E}$ из дизъюнкции $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ [2]).

[1]) См. с. 213.
[2]) См. с. 215—217.

С точки зрения исследования опровержимости рассмотрение формул со свободными переменными равносильно рассмотрению формул, начинающихся кванторами существования.

Действительно, ведь опровержимость какой-либо формулы исчисления предикатов

$$\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_f),$$

где $a_1, \ldots, a_f$ — полный список входящих в нее свободных индивидных переменных, означает выводимость формулы

$$\neg\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_f).$$

Но эта формула дедуктивно равна формуле

$$\forall\mathfrak{x}_1 \ldots \forall\mathfrak{x}_f \neg\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_f),$$

получающейся из нее в результате замены свободных переменных связанными. Тем самым опровержимость формулы $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_f)$ равносильна опровержимости формулы

$$\exists\mathfrak{x}_1 \ldots \exists\mathfrak{x}_f\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_f).$$

Таким образом, мы всегда можем избежать вхождений свободных индивидных переменных в формулы, опровержимостью которых мы будем интересоваться, если вместо формул со свободными переменными рассматривать формулы, начинающиеся кванторами существования. И наоборот, для применения этих критериев мы будем устранять кванторы существования, заменяя связанные переменные свободными; эти свободные переменные надо будет заменить затем цифрами. Обычно цифры берутся подряд, начиная с 0 или с 1.

А теперь мы укажем обобщение критериев 1—3 на *случай произвольных предваренных формул* $\mathfrak{F}$ без свободных индивидных переменных. Для этого нет необходимости формулировать эти критерии заново, так как вносимые при этом изменения будут незначительными; они заключаются в следующем:

1. Сопоставление функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ $\exists$-переменным формулы $\mathfrak{F}$ в критериях 1 и 3 мы теперь возьмем таким, чтобы каждой $\exists$-переменной $\mathfrak{y}_i$, которой предшествует хотя бы одна $\forall$-переменная, снова соответствовал некоторый функциональный знак φ_i, однако только в качестве аргументов мы будем брать те цифры $n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}$, которые стоят на местах каких-либо $\forall$-переменных формулы $\mathfrak{F}$, предшествующих переменной $\mathfrak{y}_i$. Аналогичным образом в критерии 2 при выборе цифр $f_{i,j}$, которые в различных, подлежащих совместному выполнению выражениях фигурируют вместо переменной $\mathfrak{y}_i$ формулы $\mathfrak{F}$, необходимо следить за тем, чтобы в том случае, когда два набора $n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}$ и $n_{1,j^*}, \ldots, n_{r,j^*}$ совпадают относительно цифр, стоящих на местах каких-либо $\forall$-переменных, *предшествующих* в формуле $\mathfrak{F}$ переменной $\mathfrak{y}_i$, совпадали также и цифры $f_{i,j}$ и f_{i,j^*}.

2. Если формула $\mathfrak{F}$ содержит такие $\exists$-переменные, которым не предшествует ни одна $\forall$-переменная, то в подлежащих совместному выполнению выражениях следует подставлять вместо этих переменных какие-либо отличные друг от друга цифры. В этом случае на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ должно быть наложено дополнительное условие, требующее, чтобы все значения этих функций отличались от этих цифр, берущихся для замены $\exists$-переменных без предшествующих им $\forall$-переменных.

Замечание. В формулировке этих критериев можно избежать особого положения, занимаемого $\exists$-переменными без предшествующих им $\forall$-переменных, разрешив иметь среди функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ знаки *без аргументов*, соответствующие $\exists$-переменным без предшествующих им $\forall$-переменных. Их значения суть цифры, которые надлежит подставлять вместо соответствующих им $\exists$-переменных. В этом случае в критерии 3 не надо будет налагать *никаких дополнительных ограничений на фигурирующую там разделяющую систему функций.*

Указанных модификаций достаточно и для того случая, когда формула $\mathfrak{F}$ представляет собой *конъюнкцию предваренных формул.* В этом случае надо только под «предшествованием» какой-либо $\forall$-переменной соответствующей $\exists$-переменной всякий раз понимать предшествование в том конъюнктивном члене, в который входит эта $\exists$-переменная. При этом связанные переменные, фигурирующие в различных членах конъюнкции, следует рассматривать как различные, даже в том случае, если они имеют одинаковые обозначения.

Чтобы проиллюстрировать эти модификации наших критериев, мы рассмотрим случай формулы $\mathfrak{F}$, имеющей вид

$$\forall x\exists y\exists z\forall u\exists v\mathfrak{A}(x, y, z, u, v) \,\&\, \exists x\exists y\forall z\mathfrak{B}(x, y, z).$$

В этом случае наши критерии формулируются следующим образом. (Во всех приводимых ниже предложениях 1, 2 и 3 под $n_{1,j}$, $n_{2,j}$, $n_{3,j}$ следует понимать тройку цифр с номером j в нумерации троек по величине наибольшей цифры, а при равных наибольших цифрах — в лексикографическом порядке.)

1. Если формула $\mathfrak{F}$ опровержима, то для всякой пары цифр δ_1, δ_2 и для всякой тройки вычислимых арифметических функций φ_1, φ_2, φ_3 на основе опровержения формулы $\mathfrak{F}$ можно найти такую

цифру $\mathfrak{p}$, для которой формулы

$$\mathfrak{A}(n_{1,j}, \varphi_1(n_{1,j}), \varphi_2(n_{1,j}), n_{2,j}, \varphi_3(n_{1,j}, n_{2,j})) \,\&\, \mathfrak{B}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, n_{3,j})$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^3 - 1$$

не являются совместно выполнимыми.

2. Если формула $\mathfrak{F}$ опровержима, то на основе ее опровержения для любой пары цифр $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ и для любой свободно становящейся последовательности троек цифр $f_{1,j}$, $f_{2,j}$, $f_{3,j}$, связанных с тройками $n_{1,j}$, $n_{2,j}$, $n_{3,j}$ следующими условиями:

а) если $n_{1,j}$ совпадает с n_{1,j^*}, то $f_{1,j}$ совпадает с f_{1,j^*} и $f_{2,j}$ совпадает с f_{2,j^*};

б) если $n_{1,j}$ совпадает с n_{1,j^*} и $n_{2,j}$ совпадает с n_{2,j^*}, то $f_{3,j}$ совпадает с f_{3,j^*};

можно построить такую цифру $\mathfrak{p}$, что формулы

$$\mathfrak{A}(n_{1,j}, f_{1,j}, f_{2,j}, n_{2,j}, f_{3,j}) \,\&\, \mathfrak{B}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, n_{3,j})$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^3 - 1$$

не являются совместно выполнимыми.

3. Если для некоторой цифры $\mathfrak{p}$, некоторой пары цифр $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ и некоторой тройки вычислимых арифметических функций φ_1, φ_2 (от одного аргумента) и φ_3 (от двух аргументов), образующих разделяющую систему функций, значения которых всегда отличны от цифр $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$, формулы

$$\mathfrak{A}(n_{1,j}, \varphi_1(n_{1,j}), \varphi_2(n_{1,j}), n_{2,j}, \varphi_3(n_{1,j}, n_{2,j})) \,\&\, \mathfrak{B}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, n_{3,j})$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^3 - 1$$

не являются совместно выполнимыми, то может быть построено опровержение формулы $\mathfrak{F}$ в исчислении предикатов.

Доказательство того, что сформулированные обобщения критериев 1—3 имеют место, не требует никаких новых идей. Читатель может без труда провести его сам, используя доказательство для рассмотренного частного случая и наше доказательство теоремы Эрбрана [1]).

§ 5. Применение полученных критериев к проблеме разрешимости

а) Общие сведения о выполнимости. Теоретико-модельная сколемовская нормальная форма. Полученные нами критерии опровержимости дают формулировку теоремы Эрбрана для чистого исчисления предикатов, основанную на содержательном истолковании формул этого исчисления.

[1]) См., в частности, с. 190—199.

Эта формулировка особенно приспособлена для применений теоремы Эрбрана к проблеме разрешимости.

Рассмотрение этих применений дает нам повод вернуться к рассмотрению вопросов, связанных с выполнимостью и опровержимостью логических формул. Этих вопросов мы уже касались в гл. IV т. I, и нами было высказано обещание обсудить их более подробно [1]).

Мы изложим здесь некоторые вопросы, связанные с теоретико-множественной трактовкой проблемы разрешимости. При этом мы сознательным образом откажемся от выполнения требований финитной точки зрения.

Напомним, что́ мы понимаем под выполнимостью какой-либо формулы $\mathfrak{F}$ чистого исчисления предикатов в теоретико-множественной логике предикатов [2]). Выполнимость формулы $\mathfrak{F}$ означает, что можно выбрать такую индивидную область J и такие замены свободных индивидных переменных формул $\mathfrak{F}$ индивидами из J, формульных переменных без аргументов истинностными значениями и формульных переменных с аргументами логическими функциями с тем же самым числом аргументов, пробегающих область J, что при этих заменах формула $\mathfrak{F}$ примет значение «истина». При этом вычисление значения $\mathfrak{F}$ производится с учетом истинностных значений элементарных формул на основе понимания связок исчисления высказываний как истинностных функций и следующего толкования кванторов: формула

$$\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

при указанных заменах принимает значение «истина», если для каждого индивида a из рассматриваемой индивидной области формула $\mathfrak{A}(a)$ имеет значение «истина», и значение «ложь» в противном случае; а формула

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

при этих заменах принимает значение «истина», если по крайней мере для одного индивида a рассматриваемой индивидной области формула $\mathfrak{A}(a)$ имеет значение «истина», и значение «ложь» в противном случае.

Систему замен, которая в указанном смысле сообщает формуле $\mathfrak{F}$ значение «истина», мы назовем моделью*) формулы $\mathfrak{F}$ с областью J, а логические функции, используемые в качестве замен, будем называть выполняющими логическими функциями.

Тот факт, что выполнимая формула не может быть опровержимой, с использованием теоретико-множественных рассуждений

[1]) См. т. I, с. 169.
[2]) См. т. I, с. 164 и далее.
*) Авторы употребляют термин «die Erfüllung». — *Прим. перев.*

немедленно вытекает из теоремы о том, что всякая выводимая формула исчисления предикатов является общезначимой [1]), т. е. из того, что она принимает значение «истина» при любой замене свободных индивидных переменных элементами индивидной области J, формульных переменных без аргументов истинностными значениями, а формульных переменных с аргументами логическими функциями, аргументы которых пробегают J.

В качестве следствия этой теоремы получается, что любые две переводимые друг в друга формулы либо обе выполнимы, либо обе невыполнимы. Следовательно, проблема изучения выполнимости произвольных формул исчисления предикатов сводится к проблеме изучения выполнимости предваренных формул, поскольку любая формула исчисления предикатов переводима в некоторую предваренную формулу.

Заметим также, что при изучении выполнимости формул исчисления предикатов формульные переменные без аргументов могут быть исключены. Действительно, легко убедиться, что формула $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов, содержащая формульную переменную $\mathfrak{B}$ без аргументов, может быть преобразована в некоторую формулу вида

$$(\mathfrak{F}_1 \& \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{F}_2 \& \neg \mathfrak{B}),$$

не содержащую никаких других формульных переменных без аргументов, кроме тех, которые входят в $\mathfrak{F}$, и такую, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ уже не содержат переменной $\mathfrak{B}$. Эта формула выполнима или невыполнима одновременно с формулой $\mathfrak{F}$; но, с другой стороны, она выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула

$$\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2,$$

которая переменной $\mathfrak{B}$ уже не содержит. Эту процедуру исключения формульной переменной без аргументов можно применить нужное число раз, и в результате у нас получится формула, не содержащая формульных переменных без аргументов и выполнимая или невыполнимая одновременно с формулой $\mathfrak{F}$.

При изучении вопроса о выполнимости какой-либо формулы свободные индивидные переменные тоже могут быть исключены, так как формула $\mathfrak{F}$ со свободными индивидными переменными в отношении выполнимости ведет себя в точности так же, как любая из формул, получающихся из нее в результате замены свободных переменных связанными переменными с проставлением соответствующих *кванторов существования* в начале формулы.

Поэтому, изучая выполнимость, мы можем ограничиться рассмотрением таких предваренных формул, которые не содержат

[1]) См. т. I, с. 168.

ни формульных переменных без аргументов, ни свободных индивидных переменных.

Дальнейшее сведение подобного рода заключается в построении такой нормальной формы из числа форм, найденных Сколемом, которая представляет собой двойственный эквивалент нормальной формы, названной нами сколемовской. Эта теоретико-модельная [1]) сколемовская нормальная форма — как мы ее будем называть в отличие от теоретико-доказательственной сколемовской нормальной формы [2]) — представляет собой такую предваренную формулу, у которой все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования.

Процедура построения такой нормальной формы для заданной предваренной формулы и доказательство того, что в отношении выполнимости эти две формулы одинаковы, аналогичны дедуктивному переходу от предваренной формулы к дедуктивно равной ей сколемовской нормальной форме и доказательству этого дедуктивного равенства. В случае выполнимости это рассмотрение оказывается еще более простым, поскольку мы можем пользоваться рассуждениями, допустимыми с теоретико-множественной точки зрения.

Мы проведем это рассмотрение на каком-либо типичном примере. Для этого мы возьмем формулу $\mathfrak{F}$ вида

$$\forall x \exists u_1 \exists u_2 \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \exists v \forall z_1 \forall z_2 \mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2).$$

Для простоты будем считать, что в эту формулу не входят ни свободные индивидные переменные, ни формульные переменные без аргументов.

Пусть эта формула $\mathfrak{F}$ выполнима в какой-либо индивидной области J. Введем для выполняющих логических функций какие-либо символы (например, занумерованные функциональные знаки Φ_1, Φ_2, ...). Пусть в результате замены в выражении

$$\mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)$$

формульных переменных символами соответствующих логических функций получается выражение

$$\overline{\mathfrak{A}}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2).$$

Если мы обозначим через $\Phi(a, b, c, k, l, m, n)$ логическую функцию, которая для любой системы значений аргументов из J имеет то же самое истинностное значение, что и формула

$$\forall z_1 \forall z_2 \overline{\mathfrak{A}}(a, b, c, k, l, m, n, z_1, z_2),$$

[1]) В тех случаях, когда мы не будем опасаться недоразумений, прилагательное «теоретико-модельный» мы будем опускать.

[2]) См. т. I, с. 203.

а через $\Psi(a, b, c)$ — логическую функцию, которая для любой системы значений аргументов из J имеет то же самое истинностное значение, что и формула

$$\forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \exists v \forall z_1 \forall z_2 \mathfrak{A}(a, b, c, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2),$$

то следующие три формулы:

$$\forall x \forall u_1 \forall u_2 \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \forall v (\Phi(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v) \rightarrow \forall z_1 \forall z_2 \mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)),$$

$$\forall x \forall u_1 \forall u_2 (\Psi(x, u_1, u_2) \rightarrow \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \exists v \Phi(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v))$$

и

$$\forall x \exists u_1 \exists u_2 \Psi(x, u_1, u_2)$$

относительно индивидной области J будут иметь значение «истина», и поэтому, если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ суть формульные переменные, не входящие в формулу $\mathfrak{F}$, то формула

$$(1)\quad \forall x \forall u_1 \forall u_2 \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \forall v (\mathfrak{U}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v) \rightarrow \forall z_1 \forall z_2 \mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)) \& \forall x \forall u_1 \forall u_2 (\mathfrak{B}(x, u_1, u_2) \rightarrow \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \exists v \mathfrak{U}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v)) \& \forall x \exists u_1 \exists u_2 \mathfrak{B}(x, u_1, u_2)$$

будет выполнима в области J.

С другой стороны, если эта формула выполнима, то — вследствие истинности второго и третьего членов конъюнкции — для любой системы выполняющих логических функций выражение

$$\forall x \exists u_1 \exists u_2 \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \exists v \mathfrak{U}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v)$$

принимает значение «истина», а тогда вследствие истинности первого члена конъюнкции и формула $\mathfrak{F}$ принимает значение «истина».

Таким образом, всякая модель формулы $\mathfrak{F}$ дает нам некоторую модель формулы (1) с той же самой индивидной областью и наоборот.

Но формулу (1) легко можно преобразовать (и даже различными способами) в какую-либо теоретико-модельную сколемовскую нормальную форму, например, в формулу

$$(2)\quad \forall x \forall u_1 \forall u_2 \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \forall v \forall z_1 \forall z_2 \exists w_1 \exists w_2 \exists w_3 \{(\mathfrak{U}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v) \rightarrow \mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)) \& (\mathfrak{B}(x, u_1, u_2) \rightarrow \mathfrak{U}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, w_1)) \& \mathfrak{B}(x, w_2, w_3)\}.$$

Тем самым мы совершили искомый переход от формулы $\mathfrak{F}$ к некоторой равносильной ей по выполнимости сколемовской нормальной форме.

Заметим, что в рассмотренном случае равносильность (относительно выполнимости) произвольной формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов некоторой сколемовской нормальной форме $\mathfrak{N}$ мы установили в том сильном смысле, что по каждой модели формулы $\mathfrak{F}$ была построена соответствующая модель формулы $\mathfrak{N}$ с *той же самой* индивидной областью, и наоборот. Такую равносильность двух формул мы будем кратко называть их модельным равенством[1]).

Наряду с этим обнаруживается следующее соотношение двойственности между теоретико-модельной и теоретико-доказательственной сколемовскими нормальными формами: если мы возьмем отрицание формулы (2) и заменим введенные для получения этой нормальной формы формульные переменные $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ их отрицаниями — что будет означать переход к дедуктивно равной формуле, — то получится формула, которую можно будет преобразовать в теоретико-доказательственную сколемовскую нормальную форму формулы $\neg\mathfrak{F}$. Отсюда на основании ранее доказанной теоремы о теоретико-доказательственной сколемовской нормальной форме, в частности, вытекает, что отрицание формулы (2) дедуктивно равно отрицанию формулы $\mathfrak{F}$. И, вообще, этим способом получается, что отрицание любой теоретико-модельной сколемовской нормальной формы $\mathfrak{N}$ какой-либо формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов дедуктивно равно отрицанию $\mathfrak{F}$. Поэтому любая такая нормальная форма $\mathfrak{N}$ формулы $\mathfrak{F}$ не только модельно равна $\mathfrak{F}$, но и равносильна ей в отношении *опровержимости*.

б) Теорема Лёвенгейма и теорема Гёделя о полноте. Теоретико-модельная сколемовская нормальная форма может быть, в частности, использована — и в этих целях ею пользовался, в частности, сам Сколем[2]) — для того, чтобы достаточно простым способом доказать теорему о том, что *всякая выполнимая формула выполнима также и в области натуральных чисел*. Ввиду того, что каждая формула исчисления предикатов модельно равна некоторой сколемовской нормальной форме, эту теорему, которая, как уже упоминалось ранее, была найдена и впервые доказана Лёвенгеймом[3]), достаточно доказать только для этих нормальных форм. Кроме того, согласно сделанным ранее замечаниям, при этом можно ограничиться рассмотрением только таких формул, которые не содержат ни формульных переменных без аргументов, ни свободных индивидных переменных. Можно также считать,

---

[1]) В терминологии Генриха Шольца две формулы, находящиеся в этом отношении, называются связанными по выполнимости.

[2]) Skolem Th. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer ätze nebst einem Theorem über dichte Mengen. — Vid.-Selsk. Skr. Kristiania, I Mat.-Nat. Kl., 1920, № 4.

[3]) Löwenheim L. Über Möglichkeiten im Relativkalkul. — Math. Ann., 1915, 76.

что в кванторной приставке всегда имеется по крайней мере один квантор всеобщности и один квантор существования. Действительно, для предваренной формулы исчисления предикатов, не содержащей либо кванторов всеобщности, либо кванторов существования, справедливость этого утверждения немедленно вытекает из того, что модель любой такой формулы, если она возможна вообще, может быть построена и в конечной индивидной области [1]).

Итак, рассмотрим формулу $\mathfrak{F}$ вида

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\mathfrak{r} \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_\mathfrak{s} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ — полный список входящих в нее индивидных переменных ($\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ отличны от нуля). Будем считать, что в $\mathfrak{F}$ нет формульных переменных без аргументов. Пусть эта формула выполнима в какой-либо индивидной области J. Требуется показать, что тогда она выполнима и в области натуральных чисел.

По предположению, для формулы $\mathfrak{F}$ существует система выполняющих ее логических функций, аргументы которых принимают значения в области J. Пусть $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ обозначает выражение, которое получается из $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ в результате замены формульных переменных сопоставленными им выполняющими логическими функциями. Тогда формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\mathfrak{r} \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_\mathfrak{s} \tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

будет истинной в области J.

Поэтому на основании *принципа выбора* существуют такие математические функции $\chi_1, \ldots, \chi_\mathfrak{s}$ от $\mathfrak{r}$ аргументов, пробегающих область J, что формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\mathfrak{r} \tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}, \chi_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}), \ldots, \chi_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

истинна в этой области. Таким образом, если $a_1, \ldots, a_\mathfrak{r}$ — какие-либо символы или выражения, обозначающие элементы области J, то формула

$$\tilde{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{r}, \chi_1(a_1, \ldots, a_\mathfrak{r}), \ldots, \chi_\mathfrak{s}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{r}))$$

является истинной.

А теперь выделим в области J какой-либо элемент и возьмем в качестве обозначения для него символ α. Затем устроим перечисление всех термов, построенных из символов $\alpha, \chi_1, \ldots, \chi_\mathfrak{s}$, устанавливая порядок этих термов в первую очередь по их

[1]) См. рассуждения, проведенные в т. I на с. 239—243. Эти рассуждения без труда могут быть переложены с языка теории доказательств на язык теории моделей.

кратности относительно символов $\chi_1, \ldots, \chi_\mathfrak{s}$, т. е. по числу входящих в данный терм функциональных знаков, считаемых с учетом их кратности, а при одинаковой кратности — лексикографически.

В этом перечислении каждому числу n однозначно (и даже взаимно однозначно) соответствует некоторый построенный из символов $\alpha, \chi_1, \ldots, \chi_\mathfrak{s}$ терм, имеющий n в качестве номера. По смыслу указанных символов этот терм изображает некоторый элемент области J. Поэтому, сопоставив числу n значение того построенного из символов $\alpha, \chi_1, \ldots, \chi_\mathfrak{s}$ терма, который в нашем перечислении имеет номер n, мы получим некоторую функцию $\xi(n)$ от натурального аргумента со значениями из области J.

Пусть $\mathfrak{i}$ — какое-либо из чисел $1, \ldots, \mathfrak{s}$. Каковы бы ни были числа $n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}$, значение выражения $\chi_\mathfrak{i}(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{r}))$, являющееся элементом области J, тоже изображается выражением, построенным из символов $\alpha, \chi_1, \ldots, \chi_\mathfrak{s}$. Номер этого выражения в его зависимости от чисел $n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}$ и индекса $\mathfrak{i}$ мы обозначим через $\psi_\mathfrak{i}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r})$. Тогда функции

$$\psi_1(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}), \ldots, \psi_\mathfrak{s}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r})$$

будут арифметическими, и значение $\xi(\psi_\mathfrak{i}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}))$ при $\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s}$ всегда будет совпадать со значением

$$\chi_\mathfrak{i}(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{r})).$$

А теперь мы сопоставим каждой входящей в выражение $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ логической функции $\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{p})$ с аргументами, пробегающими область J, соответствующую ей логическую функцию $\mathfrak{P}(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{p}))$ с натуральными аргументами $n_1, \ldots, n_\mathfrak{p}$. Обозначим через $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ выражение, получающееся из $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ в результате замены входящих в него символов логических функций, заданных в области J, символами сопоставленных им логических функций с натуральными аргументами. Тогда с учетом произведенного сопоставления и с учетом равенства значений выражений $\chi_\mathfrak{i}(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{r}))$ и $\xi(\psi_\mathfrak{i}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}))$ значение выражения

$$\mathfrak{B}^*(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}, \psi_1(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}), \ldots, \psi_\mathfrak{s}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}))$$

при произвольных числах $n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}$ будет равно значению выражения

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{r}), \chi_1(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{r})), \ldots, \chi_\mathfrak{s}(\xi(n_1), \ldots, \xi(n_\mathfrak{r}))),$$

т. е. значению «истина». Таким образом, формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \mathfrak{B}^* (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \psi_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r), \ldots, \psi_s(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)),$$

а потому и формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}^* (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

истинна в области натуральных чисел, и, значит, формула $\mathfrak{F}$ выполнима в области натуральных чисел.

В силу доказанной таким образом *теоремы Лёвенгейма* общее понятие выполнимости формул исчисления предикатов может быть заменено в математическом отношении весьма удобным понятием выполнимости в области натуральных чисел.

Одно еще более серьезное упрощение теоретико-множественной проблемы разрешимости получается из *гёделевской теоремы о полноте* [1]), которая утверждает, что *всякая неопровержимая формула является выполнимой.*

В доказательстве этой теоремы опять можно ограничиться рассмотрением формул вида

$$(3) \qquad \forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B} (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ — полный список входящих в нее индивидных переменных. Действительно, если $\mathfrak{C}$ — какая-нибудь формула исчисления предикатов, а $\mathfrak{N}$ — теоретико-модельная сколемовская нормальная форма этой формулы, то, во-первых, $\mathfrak{N}$ является формулой указанного частного вида, а во-вторых, в отношении опровержимости формулы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{C}$ равносильны. Следовательно, если формула $\mathfrak{C}$ неопровержима, то неопровержима и формула $\mathfrak{N}$. С другой стороны, если $\mathfrak{N}$ выполнима, то выполнима и $\mathfrak{C}$. Поэтому, если мы сможем из неопровержимости $\mathfrak{N}$ заключить о ее выполнимости, то то же самое будет верно и относительно $\mathfrak{C}$.

---

[1]) Gödel K. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. — Monatsh. Math. Phys., 37, № 2.

В этой работе Гёдель показал также, что теорема о полноте верна и в некоторой усиленной форме — а именно, что всякая счетная последовательность формул, из которой нельзя вывести противоречия, выполнима. Гёдель получил это усиление, показав, что если выполнима любая конечная подпоследовательность какой-либо счетной последовательности формул, то выполнима и сама эта последовательность. Одно очень прозрачное доказательство этой усиленной теоремы о полноте дано Л. Генкиным в его работе: Henkin L. The Completeness of the First Order Functional Calculus. — J. Symbolic Logic, 1949, **14**, p. 159—166. Затем это доказательство было упрощено Г. Хазенъегером в его работе: Hasenjaeger G. Eine Bemerkung zu Henkins Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls erster Stufe. — J. Symbolic Logic, 1953, **18**, p. 42—48. С тех пор с помощью различных методов были получены и другие доказательства теоремы о полноте.

Далее, можно снова считать, что рассматриваемая нами формула (3) содержит по крайней мере один квантор всеобщности и по крайней мере один квантор существования. Для обоснования этого утверждения нам не нужны рассуждения, с помощью которых мы ранее разобрали случаи $s = 0$ и соответственно $r = 0$. Просто мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что любая формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \mathfrak{B} (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)$$

переводима в формулу

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y} (\mathfrak{B} (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r) \& (A(\mathfrak{y}) \vee \neg A(\mathfrak{y}))),$$

а формула

$$\exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B} (\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

переводима в формулу

$$\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s ((A(\mathfrak{x}) \vee \neg A(\mathfrak{x})) \& \mathfrak{B} (\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s))$$

и что указанные преобразования не меняют выполнимости рассматриваемых формул.

Итак, пусть $\mathfrak{F}$ — неопровержимая формула вида (3), где r и s отличны от нуля, а $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ суть все входящие в эту формулу индивидные переменные. Применим к этой формуле критерий неопровержимости 3^* [1]), взяв в качестве $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ систему функций, которая на основе нашей нумерации r-членных наборов цифр [2]) определяется равенствами

$$\varphi_i (n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}) = s \cdot j + i \qquad (i = 1, \ldots, s;\ j = 0, 1, \ldots).$$

Как было отмечено [2]), эти функции образуют разделяющую систему функций.

Упомянутый критерий позволяет утверждать, что для любой цифры p формулы

$$\mathfrak{B} (n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, s \cdot j + 1, \ldots, s \cdot j + s)$$
$$j = 0, \ldots, (p+1)^r - 1$$

являются совместно выполнимыми.

Это утверждение можно обосновать еще и следующим образом. Если бы для какой-нибудь цифры p указанные формулы не были совместно выполнимыми, то для этой цифры p при любом рас-

---

[1]) См. с. 225. Для читателя, желающего избежать ссылки на упомянутый критерий, вскоре будет дано более прямое рассуждение.

[2]) См. с. 218.

пределении истинностных значений между входящими в упомянутые формулы элементарными формулами по меньшей мере одна из этих формул получила бы значение «ложь»; и, значит, дизъюнкция, составленная из отрицаний этих формул, была бы истинной в логике высказываний, т. е. получалась бы подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний. Но из этой дизъюнкции, применяя производные правила (μ) и (ν) исчисления предикатов [1]), с помощью того же самого приема, который использовался для доказательства второй ε-теоремы, можно было бы получить формулу

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_s \neg \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s).$$

Тогда было бы выводимо отрицание формулы $\mathfrak{F}$, что противоречит нашему предположению.

Полученному результату можно придать следующий вид:

Если обозначить для краткости формулу

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, s \cdot j + 1, \ldots, s \cdot j + s)$$

через $\mathfrak{B}_j$, то для любого числа f конъюнкция

$$\mathfrak{B}_0 \& \mathfrak{B}_1 \& \ldots \& \mathfrak{B}_f$$

будет выполнимой. Эту конъюнкцию, определенную формулой $\mathfrak{F}$ и числом f, мы обозначим через $\mathfrak{F}_f$.

Каждая из формул $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ является подконъюнкцией всех формул $\mathfrak{F}_i$, следующих за ней. Мы покажем, что пользуясь моделями формул $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$, можно построить некоторую общую модель для всех этих формул, а тем самым и модель формулы $\mathfrak{F}$.

С этой целью мы рассмотрим структуру формул $\mathfrak{B}_j$ ($j = 0, 1, \ldots$). Эти формулы составлены из элементарных формул с помощью связок исчисления высказываний. Пусть $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{r_0}$ — элементарные формулы, входящие в формулу $\mathfrak{B}_0$ и расположенные в порядке их первого появления; пусть $\mathfrak{P}_{r_0+1}, \ldots, \mathfrak{P}_{r_1}$ — элементарные формулы, входящие в $\mathfrak{B}_1$, но не входящие в $\mathfrak{B}_0$ и расположенные в порядке их первого появления; ... И вообще, пусть $\mathfrak{P}_{r_j+1}, \ldots, \mathfrak{P}_{r_{j+1}}$ — элементарные формулы, впервые появляющиеся в $\mathfrak{B}_{j+1}$ и расположенные в порядке их первого появления. Тогда каждой модели какой-либо конъюнкции $\mathfrak{F}_f$ будет соответствовать некоторое приписывание истинностных значений элементарным формулам

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}.$$

[1]) См. с. 173.

Имеется 2^{rf} различных возможных распределений истинностных значений для этих элементарных формул, и мы можем изобразить эти распределения числами, беря для изображения значений «истина» и «ложь» цифры 0 и 1 соответственно и представляя полный список $m_1, \ldots, m_{rf}$ истинностных значений, сопоставленных элементарным формулам $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}$, числом

$$2^{rf-1} \cdot m_1 + 2^{rf-2} \cdot m_2 + \ldots + 2 \cdot m_{rf-1} + m_{rf},$$

которое в двоичной системе счисления задается написанными друг за другом цифрами $m_1, \ldots, m_{rf}$. Таким образом, 2^{rf} различным распределениям истинностных значений между элементарными формулами $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}$ в определенном порядке будут приписаны числа от 0 до $2^{rf} - 1$. Если $l > f$, то всякое распределение истинностных значений между элементарными формулами $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rl}$ содержит в себе распределение истинностных значений между формулами $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}$. Из одного и того же распределения истинностных значений для $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}$ могут получиться различные распределения для $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rl}$. Но вследствие принятого нами способа изображения распределений истинностных значений числами можно утверждать, что если s и t — числа, изображающие два распределения истинностных значений для формул $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rl}$, а s^* и t^* — числа, изображающие содержащиеся в этих распределениях распределения для формул $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}$, то если $s^* < t^*$, то и $s < t$.

Распределение истинностных значений для элементарных формул $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{rf}$, при котором формула $\mathfrak{F}_f$ принимает значение «истина», мы будем называть выполняющим распределением для $\mathfrak{F}_f$.

Для каждого числа f имеется по крайней мере одно выполняющее распределение для $\mathfrak{F}_f$, а с другой стороны, их имеется только конечное число (не больше 2^{rf}). Если $f < l$, то всякое выполняющее распределение для $\mathfrak{F}_l$ содержит в себе некоторое выполняющее распределение для $\mathfrak{F}_f$, так как $\mathfrak{F}_f$ является подконъюнкцией конъюнкции $\mathfrak{F}_l$; это выполняющее распределение для $\mathfrak{F}_f$ мы для краткости будем называть f-компонентой этого распределения для $\mathfrak{F}_l$. Если какое-либо выполняющее распределение для $\mathfrak{F}_f$ является f-компонентой некоторого выполняющего распре-

деления для $\mathfrak{F}_q$ и если число l заключено между f и q, то это распределение будет также и f-компонентой того выполняющего распределения для $\mathfrak{F}_l$, которое представляет собой l-компоненту упомянутого выше выполняющего распределения для $\mathfrak{F}_q$. Поэтому среди выполняющих распределений для $\mathfrak{F}_f$ должно иметься по крайней мере одно такое, что для каждого числа l, большего f, оно является f-компонентой некоторого выполняющего распределения для $\mathfrak{F}_l$. При этом среди тех выполняющих распределений для $\mathfrak{F}_f$, которые обладают указанным свойством, однозначным образом выделяется то, которое изображается наименьшим числом. Таким образом для каждого числа f определяется некоторое выделенное распределение истинностных значений между элементарными формулами $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{r_f}$ как первое (по числовому представлению) из таких выполняющих распределений для $\mathfrak{F}_f$, которые для всякого числа l, большего f, представляют собой f-компоненту некоторого выполняющего распределения для $\mathfrak{F}_l$.

Из этого определения выделенного для числа f распределения истинностных значений вытекает, что для любых двух чисел f и l, если $f < l$, то выделенное для f распределение является f-компонентой выделенного для l распределения. Действительно, если n_f и n_l — числа, изображающие выделенные для чисел f и l распределения, и если m — число, изображающее f-компоненту распределения, изображенного числом n_l, то, во-первых, на основании определения n_f число m не может быть меньше n_f. С другой стороны, если бы m было больше n_f, то по определению n_f должно было бы существовать такое выполняющее распределение для $\mathfrak{F}_l$, которое содержит распределение, изображенное числом n_f, в качестве f-компоненты и которое для любого числа q, большего l, представляет собой l-компоненту некоторого выполняющего распределения для $\mathfrak{F}_q$. Далее, так как $n_f < m$, то число, изображающее это распределение, в силу ранее упомянутого свойства нашего изображения распределений истинностных значений числами, должно было бы быть меньше n_l. Таким образом, m должно совпадать с n_f, и, значит, распределение, изображенное числом n_f, является f-компонентой распределения, изображенного числом n_l.

Итак, получается, что все соответствующие различным числам выделенные распределения объединяются в единое, однозначно определенное распределение истинностных значений между элементарными формулами $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$

А теперь это распределение истинностных значений мы можем без труда дополнить до некоторой модели формулы $\mathfrak{F}$. Действительно, элементарные формулы $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ образуются из формульных переменных с цифрами в качестве аргументов и, быть может, еще из формульных переменных без аргументов, причем все входящие в $\mathfrak{F}$ формульные переменные, вообще говоря, встречаются здесь не со всеми возможными наборами значений аргументов, но со всеми теми наборами, которые встречаются в какой-либо из формул $\mathfrak{F}_f$. Итак, этим распределением истинностных значений между элементарными формулами $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$, во-первых, устанавливаются истинностные значения для всех входящих в $\mathfrak{F}$ элементарных формул без аргументов и, во-вторых, определяются подставляемые на место формульных переменных с аргументами логические функции как функции, заданные в области натуральных чисел для тех наборов значений аргументов, которые фигурируют в формулах $\mathfrak{F}_f$. Для прочих наборов значений аргументов истинностные значения этих функций можно определить произвольно, взяв, например, всюду значение «истина». Так мы получим некоторую совместную модель формул

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, s \cdot j + 1, \ldots, s \cdot j + s)$$

в виде логических функций, определенных в области натуральных чисел, а также некоторых истинностных значений, играющих роль замен для формульных переменных без аргументов. Но так как теперь среди наборов $n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}$ $(j = 0, 1, \ldots)$ встречаются все возможные r-членные наборы цифр, то мы получаем модель формулы

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

в области натуральных чисел.

Это доказательство гёделевской теоремы о полноте заодно дает нам и новое доказательство теоремы Лёвенгейма о том, что всякая выполнимая формула выполнима в области натуральных чисел. Действительно, из неопровержимости формулы $\mathfrak{F}$ мы сделали вывод не только о ее выполнимости вообще, но и о выполнимости в области натуральных чисел; с другой стороны, из выполнимости формулы, как мы знаем, вытекает ее неопровержимость.

Замечание 1. В этом втором доказательстве теоремы Лёвенгейма [1]) применение принципа выбора, которым начинается первое

[1]) Упоминание об исчислении предикатов из этого доказательства можно устранить, так что у нас получится чисто теоретико-модельное доказательство. Доказательство такого рода, основанное на соображении о том, что из выполнимости формулы $\mathfrak{F}$ вида (3) следует выполнимость каждой из формул $\mathfrak{F}_f$, было дано Сколемом в его работе: Skolem Th. Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. — Skr. norske Vid.-Akad., Oslo, I Mat.-Nat. Kl., 1929, № 4. См. упоминание об этом в т. I на с. 168 (сноска 3).

доказательство[1]), оказывается излишним. С другой стороны, в новом доказательстве требуется применять (при построении выделенного для числа $\mathfrak{k}$ распределения истинностных значений) принцип «tertium non datur» для целых чисел[2]). Поэтому и новое доказательство, несмотря на то, что принцип выбора в нем не применяется, тоже не является вполне финитным.

Замечание 2. В рассуждении, с помощью которого мы из выполнимости конъюнкций $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... сделали вывод о совместной выполнимости формул $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., а тем самым и о выполнимости формулы $\mathfrak{F}$, никак не используется вид элементарных формул $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., входящих в формулы $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... В нем идет речь лишь о присвоении этим элементарным формулам тех или иных истинностных значений. Поэтому в этом рассуждении указанные элементарные формулы можно заменить переменными для высказываний и тогда получится следующий, относящийся чисто к логике высказываний результат:

Если формулы $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ... построены из переменных для высказываний A_1, A_2, A_3, ... с помощью связок логики высказываний и если для любого $\mathfrak{k}$ формулы $\mathfrak{C}_1$, ..., $\mathfrak{C}_\mathfrak{k}$ совместно выполнимы, то совместно выполнимы и все эти формулы $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ...

Этому утверждению равносильно следующее:

Если выполнимо каждое конечное подмножество данной последовательности формул, то и все формулы этой последовательности тоже являются совместно выполнимыми.

Проведенное рассуждение может быть применено и к критериям опровержимости, которые мы сформулировали[3]) в общем виде для случая формулы $\mathfrak{F}$ вида

$$\forall x \exists y \exists z \forall u \exists v \mathfrak{A}(x, y, z, u, v) \& \exists x \exists y \forall z \mathfrak{B}(x, y, z).$$

Если мы, отказавшись от финитного характера наших рассуждений, применим здесь контрапозицию и воспользуемся только что упомянутым рассмотрением, относящимся к исчислению высказываний, то у нас получится следующий результат: если формула $\mathfrak{F}$ неопровержима, то для произвольных цифр $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ и для любой тройки вычислимых арифметических функций φ_1, φ_2 и φ_3 (φ_1 и φ_2 — одноместные, φ_3 — двуместная), образующих разделяющую систему функций, формула

$$\forall x \forall u \mathfrak{A}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), u, \varphi_3(x, u)) \& \forall z \mathfrak{B}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, z)$$

выполнима; с другой стороны, если эта формула выполнима для

[1]) См. с. 236.
[2]) См. т. I, с. 62.
[3]) См. с. 229—230, критерии 1 и 3.

произвольных цифр $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ и для любой тройки вычислимых функций φ_1, φ_2 и φ_3 указанного типа, то формула $\mathfrak{F}$ неопровержима.

Кроме того, в силу теоремы о полноте в обоих этих утверждениях можно вместо неопровержимости формул говорить о их выполнимости.

Разумеется, во всех этих рассуждениях границы финитных рассмотрений оказались нарушенными.

в) Учет требований финитной точки зрения. Гёделевская теорема о полноте значительно упрощает постановку задач, связанных с проблемой разрешимости, потому что на первый взгляд не связанные друг с другом вопросы выводимости (соответственно опровержимости) и выполнимости формул исчисления предикатов оказываются тесно связанными в том смысле, что установление выполнимости какой-либо формулы равносильно установлению ее неопровержимости, т. е. невыводимости ее отрицания, а установление общезначимости формулы — установлению ее выводимости. К этому добавляется еще и равносильность выполнимости вообще выполнимости в области натуральных чисел.

Эти прозрачные по своему характеру результаты относятся к понятиям теоретико-множественной логики предикатов, и мы не можем перенести их в сферу финитного обсуждения проблемы разрешимости уже по той простой причине, что понятие выполнимости в том виде, как оно было нами определено, непригодно для рассмотрения с финитной точки зрения.

В самом деле, истинностное значение логической функции для заданной системы значений аргументов, вообще говоря, не является чем-то финитно заданным, так как в определении этой логической функции могут, например, участвовать кванторы всеобщности и существования. Что же касается этих кванторов, то хотя их и можно, как известно[1]), интерпретировать финитно, но при этой интерпретации отсутствует альтернатива между истинностью и ложностью всеобщих и экзистенциальных высказываний. Кроме того, термин «модель» в финитном смысле слова может относиться только к какому-либо наглядным образом заданному виду объектов, а не к произвольной чисто гипотетической индивидной области.

И все же существует возможность усилить понятие выполнимости до финитного понятия эффективной выполнимости. Для этого необходимо: 1) выполнимость с самого начала определять как выполнимость в области цифр, 2) от определений логических функций требовать, чтобы они давали способ фактического вычисления истинностных значений этих функций при заданных значениях аргументов и 3) применять финитную интерпретацию кванторов.

[1]) См. т. I, с. 59.

Таким образом мы получим определение эффективной выполнимости по меньшей мере для всех тех формул исчисления предикатов, у которых кванторы не встречаются ни под знаком отрицания, ни в посылке какой-либо импликации и ни в одном из членов какой-либо эквивалентности; этим условиям удовлетворяют, в частности, предваренные формулы и их конъюнкции. Формулу указанного вида мы будем называть эффективно выполнимой в области цифр, если вместо ее свободных индивидных переменных можно подставить такие цифры, вместо формульных переменных без аргументов — такие истинностные значения, а вместо формульных переменных с аргументами — такие вычислимым образом определенные логические функции, что эта формула примет значение «истина» (при вычислении этого значения, естественно, используются истинностные значения элементарных формул, истолкование связок исчисления высказываний как истинностных функций и такое понимание кванторов, при котором формула $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ принимает значение «истина» в том случае, если имеется эффективный способ, позволяющий доказать, что для каждой конкретно предъявленной цифры $\mathfrak{z}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ принимает значение «истина», а формула $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ принимает значение «истина» тогда, когда имеется эффективный способ, позволяющий указать некоторую цифру $\mathfrak{z}$, для которой $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ принимает значение «истина»).

Конечно, это понятие эффективной выполнимости ни в коей мере не является удовлетворительным эквивалентом обычного понятия выполнимости, так как для формул тех типов, к которым применимо понятие эффективной выполнимости, мы не в состоянии доказать, что их эффективная выполнимость совпадает с неопровержимостью. Правда, с помощью нашего критерия 2* удается показать [1]), что каждая эффективно выполнимая формула неопровержима.

Поясним сказанное на примере формулы вида

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_q),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ — полный список связанных, а $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_q$ — полный список свободных индивидных переменных этой формулы. Для простоты мы будем считать, что она не содержит формульных переменных без аргументов. Для формулы такого рода эффективная выполнимость означает, что переменные $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_q$ могут быть заменены такими цифрами $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_q$, а формульные переменные — такими определенными на цифрах вычислимыми логическими функциями, что для каждого r-членного набора цифр $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ можно указать такой s-членный набор $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_s$, что формула

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_s, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_q)$$

с учетом истинностных значений элементарных формул и понимания связок исчисления высказываний как истинностных функций принимает значение «истина». Но с помощью такой системы логических функций, продвигаясь сколь угодно далеко в последовательности занумерованных r-членных набороз цифр

$$\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{r,j} \qquad (j = 0, 1, \ldots),$$

можно для каждого из них указать такой набор

$$\mathfrak{f}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{f}_{s,j},$$

что формулы

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{r,j}, \mathfrak{f}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{f}_{s,j}, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_q)$$

до любого, сколь угодно далекого места будут совместно выполнимыми (в элементарном смысле этого слова, который имеется в виду в наших критериях опровержимости и неопровержимости).

Поэтому, согласно критерию 2*, рассматриваемая формула неопровержима. И вообще, отсюда получается, что любая эффективно выполнимая предваренная формула, а также любая эффективно выполнимая конъюнкция предваренных формул являются неопровержимыми.

Но мы, однако, не в состоянии доказать, что всякая неопровержимая предваренная формула эффективно выполнима. Дело здесь не только в том, что к такому доказательству, т. е. к финитному усилению гёделевского доказательства полноты, у нас нет никакого подхода, но и в том, что, вообще говоря, в случае произвольной неопровержимой предваренной формулы может не быть никакой модели с вычислимыми логическими функциями.

Но мы можем найти другой финитный вариант для имеющей с теоретико-множественной точки зрения место равносильности неопровержимости и выполнимости; в самом деле, подобного рода равносильность обнаруживается в наших критериях опровержимости и неопровержимости.

Гёделевская теорема о полноте получается применением критерия 3* [1]). В этом критерии формулируется, так сказать, финитная часть теоремы Гёделя. С другой стороны, теорему о том, что всякая эффективно выполнимая формула является неопровержимой (она, как мы только установили, является следствием критерия 2*), можно рассматривать как финитную часть теоремы

[1]) См. с. 225.

[1]) См. с. 225.

о неопровержимости любой выполнимой формулы, которая представляет собой обращение гёделевской теоремы о полноте.

Поэтому представляется правдоподобным, что многие рассуждения, относящиеся к теории выполнимости, результаты которых ввиду совпадения выполнимости и неопровержимости могут быть сформулированы и в виде теорем о неопровержимости, т. е. в виде теорем теории доказательств (что, конечно, еще не доказывает этих теорем с финитной точки зрения), с помощью наших критериев опровержимости и неопровержимости могут быть непосредственно переведены в те или иные финитные рассмотрения теории доказательств.

г) Один пример. С помощью доказанной им основной теоремы Эрбран выполнил такого рода перевод для всех имевшихся в его время теоретико-модельных доказательств [1]). С тех пор в теории выполнимости было получено много новых замечательных результатов [2]). Мы не будем здесь заниматься переводом всех этих исследований на язык финитной теории доказательств, хотя такой перевод и мог бы быть осуществлен во всех этих случаях. Мы ограничимся изложением методики этого перевода на примере одной теоремы, недавно доказанной Й. Пепишем [3]). Теорема эта утверждает, что для любой формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов можно указать равнозначную ей по выполнимости формулу, имеющую вид

$$(1) \qquad \forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \,\&\, \forall u_1 \ldots \forall u_m \mathfrak{C}(u_1, \ldots, u_m),$$

где $x, y, z, u_1, \ldots, u_m$ — полный список входящих в нее индивидных переменных.

Пепиш доказывает это следующим образом [4]). Прежде всего, можно считать, что рассматриваемая формула $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов имеет вид [5])

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

[1]) См. уже цитированную выше работу Эрбрана «Sur le problème fondamental de la logique mathématique», ch. II, III.

[2]) См. обзор, приведенный на с. 259—262.

[3]) Pepis Józef. Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. — Fundam. math., 1938, **30**. Эта работа представляет собой продолжение другого, более раннего исследования Пепиша: Pepis J. Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems — Acta Sci. Math. Szeged, 1936/37, 8.

[4]) Изложение, приведенное здесь, отличается от изложения Пепиша лишь несущественными деталями.

[5]) Впрочем, как показал Пепиш в его работе: Pepis J. Ein Verfahren der mathematischen Logik. — J. Symbolic Logic, 1938, **3**, этого подготавливающего дальнейшие изложения использования теоретико-модельной сколемовской нормальной формы здесь можно было бы и избежать. Тем самым мы добились бы некоторого усиления результата.

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ — полный список входящих в нее индивидных переменных, а r и s отличны от нуля. Будем также считать, что $\mathfrak{F}$ не содержит формульных переменных без аргументов. Как мы знаем, любая формула исчисления предикатов эквивалентна по выполнимости некоторой такой формуле. Конечно, эту формулу мы можем выбрать еще и так, чтобы она не содержала формульной переменной A (с аргументами).

Пусть нам дана модель этой формулы $\mathfrak{F}$ с какой-либо индивидной областью J [1]), и пусть для выполняющих логических функций выбраны какие-нибудь символы. Пусть в результате внесения этих символов в формулу $\mathfrak{F}$ вместо ее формульных переменных выражение

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$$

переходит в выражение

$$\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s).$$

Наше рассуждение мы начинаем так же, как начиналось доказательство теоремы Лёвенгейма. Прежде всего, с помощью принципа выбора мы получаем, что при некоторых, надлежащим образом выбранных r-местных функциях $\chi_1, \ldots, \chi_s$, заданных в области J, формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \chi_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r), \ldots, \chi_s(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)),$$

отнесенная к области J, является истинной. Опять выделим какой-нибудь элемент из J и возьмем в качестве обозначающего его символа букву α. Мы опять будем рассматривать выражения, построенные из символов $\alpha, \chi_1, \ldots, \chi_s$. Но, вместо того чтобы прямо перечислять их, мы применим следующее, несколько более общее вспомогательное рассуждение. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — арифметические функции от r аргументов, образующие разделяющую систему функций. Пусть $\mathfrak{Z}_0$ обозначает совокупность тех чисел (цифр) [2]), которые не являются значениями ни одной из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$. Тогда каждое число будет одним и только одним способом представляться с помощью терма, построенного из функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ и чисел, принадлежащих $\mathfrak{Z}_0$.

Это утверждение может быть доказано с помощью полной индукции. Покажем, что оно выполняется для числа 0. Действительно, 0 принадлежит $\mathfrak{Z}_0$, потому что значения функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ всегда превосходят значения своих аргументов, и, значит,

[1]) Мы могли бы воспользоваться здесь теоремой Лёвенгейма, но это не привело бы нас ни к каким упрощениям.

[2]) Числа здесь следует образно представлять в виде цифр. Заметим, кстати, что это наше рассуждение не претендует на то, чтобы быть финитным.

они больше нуля. Теперь покажем, что если это утверждение выполняется для всех чисел, меньших n, то оно выполняется и для n. Действительно, n либо принадлежит $\mathfrak{Z}_0$, либо является значением одной из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$. В последнем случае — поскольку эти функции представляют собой разделяющую систему функций — число n однозначно определяет ту функцию и ту систему аргументов, для которой эта функция принимает значение n. Значения всех этих аргументов меньше n, так что к ним может быть применено наше индуктивное предположение. Итак, каждое число n единственным способом изображается функциональным выражением, построенным с помощью функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$, в котором самыми внутренними аргументами являются числа из $\mathfrak{Z}_0$.

А теперь, если в изображении числа n с помощью функциональных знаков $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$ и чисел из $\mathfrak{Z}_0$ заменить всякое число из $\mathfrak{Z}_0$ символом α, а всякий функциональный знак φ_i $(i = 1, \ldots, \delta)$ — соответствующим знаком χ_i, то у нас получится некоторое отображение, переводящее натуральные числа в элементы области J. Значение полученного таким образом выражения, являющееся элементом из J и однозначно определенное числом n, мы обозначим через $\eta(n)$.

Тогда для произвольных чисел $n_1, \ldots, n_\tau$ и для $i = 1, \ldots, \delta$ значение выражения $\eta(\varphi_i(n_1, \ldots, n_\tau))$ будет совпадать со значением выражения $\chi_i(\eta(n_1), \ldots, \eta(n_\tau))$. Кроме того, любая фигурирующая в $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta)$ логическая функция $\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f})$, заданная в области J, определяет некоторую заданную на натуральных числах логическую функцию $\mathfrak{P}(\eta(n_1), \ldots, \eta(n_\mathfrak{f}))$; и если мы обозначим через $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta)$ выражение, получающееся из $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta)$ в результате замены символов логических функций, заданных в области J, символами соответствующих им (только что указанным способом) логических функций, заданных на натуральных числах, то формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \varphi_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots, \varphi_\delta(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau))$$

будет истинной в области натуральных чисел.

Итог этого вспомогательного рассмотрения теперь может быть выражен в виде следующего усиления теоремы Лёвенгейма [1]):

[1]) Метод доказательства этого вспомогательного утверждения позаимствован нами из работы В. Аккермана: Ackermann W. Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. — Math. Ann., 1936, 112, № 3, к которой примыкает и изложение Пепиша.

Если формула рассматриваемого нами вида

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_\delta \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\delta)$$

выполнима, то формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \varphi_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots, \varphi_\delta(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau))$$

выполнима в области натуральных чисел для любой разделяющей системы функций

$$\varphi_1(n_1, \ldots, n_\tau), \ldots, \varphi_\delta(n_1, \ldots, n_\tau).$$

Итак, для любой разделяющей системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$ мы получаем некоторую формулу

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\tau \mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau, \varphi_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau), \ldots, \varphi_\delta(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\tau)),$$

истинную в области натуральных чисел.

Теперь речь будет идти о том, чтобы найти по возможности более простую разделяющую систему функций. Мы рассмотрим систему, определяемую итерацией только одной функции ψ от двух аргументов. Эту функцию можно взять достаточно произвольным образом. От нее лишь требуется, чтобы для любых чисел a и b выполнялись неравенства

$$\psi(a, b) > a \quad \text{и} \quad \psi(a, b) > b,$$

а также чтобы каждое ее значение принималось только при единственном наборе значений аргументов.

Такой функцией является, например, функция

$$\psi(a, b) = 2^a(2b + 1).$$

А теперь для любого заданного числа $\mathfrak{f}$, отличного от нуля, под $\psi_\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}+1})$ мы будем понимать функцию от $\mathfrak{f}+1$ аргумента, определяемую выражением

$$\psi(a_1, \psi(a_2, \psi(a_3, \ldots, \psi(a_\mathfrak{f}, a_{\mathfrak{f}+1}) \ldots))),$$

в котором функциональный знак ψ фигурирует $\mathfrak{f}$ раз. Из перечисленных свойств функции $\psi(a, b)$ легко вытекают аналогичные свойства и для функции $\psi_\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}+1})$, а именно, что значения этой функции при $\mathfrak{f} \neq 0$ всегда превосходят любой из ее аргументов и что эта функция каждое из своих значений принимает только при единственной системе значений ее аргументов.

Далее, при $\mathfrak{f} \neq 0$ мы под $\psi^{(\mathfrak{f})}(a)$ будем понимать функцию одного аргумента, получающуюся из функции $\psi_\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}+1})$ отождествлением аргументов. Эту функцию можно также

определить рекурсивно, при помощи равенств

$$\psi^{(1)}(a) = \psi(a, a),$$
$$\psi^{(\mathfrak{f}+1)}(a) = \psi(a, \psi^{(\mathfrak{f})}(a)).$$

Как нетрудно убедиться, функция эта удовлетворяет соотношениям

$$\psi^{(\mathfrak{f})}(a) > a \quad \text{и} \quad \psi^{(\mathfrak{f}+1)}(a) > \psi^{(\mathfrak{f})}(a),$$

а также условию, что равенство

$$\psi^{(\mathfrak{f})}(a) = \psi^{(\mathfrak{l})}(b)$$

может иметь место только при $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}$ и $a = b$.

А теперь для $\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s}$ положим

$$\varkappa_{\mathfrak{i}}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}}) = \psi^{(\mathfrak{i})}(\psi_{\mathfrak{r}-1}(n_{\mathfrak{r}}, n_{\mathfrak{r}-1}, \ldots, n_1)).$$

Эти функции, как можно усмотреть из перечисленных выше свойств функций $\psi_{\mathfrak{f}}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{f}+1})$ и $\psi^{(\mathfrak{f})}(a)$, образуют разделяющую систему функций.

Поэтому формула

$$(2)\quad \forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}} \mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}, \varkappa_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}), \ldots, \varkappa_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}))$$

истинна в области натуральных чисел.

Теперь речь пойдет о том, чтобы математические функции $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mathfrak{s}}$ заменить логическими. Так как все функции $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mathfrak{s}}$ получаются итерированием функции $\psi(a, b)$, то будет достаточно ввести одну-единственную логическую функцию от трех натуральных аргументов, которая для любой тройки чисел a, b и c будет принимать значение «истина» или «ложь» в зависимости от того, выполняется или не выполняется равенство

$$\psi(a, b) = c.$$

Для обозначения этой логической функции мы возьмем какой-нибудь символ из числа не встречающихся в формуле (2), например $\Psi(a, b, c)$.

Для того чтобы с использованием этого символа исключить функциональные знаки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\mathfrak{s}}$, мы на время введем знак равенства (вместе с выделенным распределением истинностных значений для равенства), который впоследствии опять исключим. Тогда из формулы (2) мы сначала получим истинную формулу

$$(3)\quad \forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}} \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}} \{\varkappa_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{y}_1 \& \ldots \& \varkappa_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}} \to \mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\}.$$

Отношение

$$\varkappa_1(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}}) = l_1 \& \ldots \& \varkappa_{\mathfrak{s}}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}}) = l_{\mathfrak{s}}$$

теперь с помощью логической функции $\Psi(a, b, c)$ можно выразить следующим образом:

$$\exists \mathfrak{v}_1 \ldots \exists \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1} \{\Psi(n_2, n_1, \mathfrak{v}_1) \& \Psi(n_3, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) \& \Psi(n_4, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) \& \ldots \& \Psi(n_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-2}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}) \& \Psi(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}, l_1) \& \Psi(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}, l_1, l_2) \& \ldots \& \Psi(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}, l_{\mathfrak{s}-1}, l_{\mathfrak{s}})\}.$$

[В случае, когда $\mathfrak{r} = 1$, вместо этой формулы надо будет взять формулу

$$\Psi(n_1, n_1, l_1) \& \Psi(n_1, l_1, l_2) \& \ldots \& \Psi(n_1, l_{\mathfrak{s}-1}, l_{\mathfrak{s}})].$$

Внесем это выражение в формулу (3) и заметим, что любое выражение вида

$$\exists \mathfrak{v}_1 \ldots \exists \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1} \mathfrak{K}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}) \to \mathfrak{L},$$

где $\mathfrak{L}$ не содержит переменных $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}$, может быть преобразовано[1]) в выражение

$$\forall \mathfrak{v}_1 \ldots \forall \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1} (\mathfrak{K}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}) \to \mathfrak{L})$$

и что в предваренной формуле можно произвольным образом поменять порядок следования кванторов всеобщности, не разделенных кванторами существования. Тогда, поместив кванторы всеобщности $\forall \mathfrak{v}_1, \ldots, \forall \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}$ непосредственно вслед за квантором $\forall \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}$ и переименовав[2]) переменные $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}$ в $\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}$, мы получим формулу

$$(4)\quad \forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}} \ldots \forall \mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1} \forall \mathfrak{y}_1 \ldots \forall \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}} \{\Psi(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1}) \& \Psi(\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2}) \& \Psi(\mathfrak{x}_4, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+3}) \& \ldots \& \Psi(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-2}, \mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}) \& \Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{y}_1) \& \Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) \& \ldots \& \Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}-1}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}}) \to \mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\},$$

которая, таким образом, оказывается истинной в области цифр. При этом логическая функция $\Psi(a, b, c)$ удовлетворяет формулам единственности по аргументу c. Покажем, что здесь достаточно воспользоваться первой из этих формул. Для этого мы добавим к формуле (4) истинную в области натуральных чисел формулу

$$(5)\qquad \forall x \forall y \exists z \Psi(x, y, z).$$

---

[1]) Заметим, что в результате преобразования, производимого по правилам исчисления предикатов, из истинной формулы всегда получается формула, также являющаяся истинной.

[2]) Этим переименованием мы избавляемся от необходимости делать какие-либо дополнительные замечания для случая $\mathfrak{r} = 1$.

Если формулы (4) и (5) связать знаком конъюнкции и заменить в получившейся формуле выражение $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$ выражением $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$, а трехместный символ Ψ формульной переменной A с тремя аргументами, то построенная таким образом формула $\mathfrak{S}$ будет выполнимой и будет иметь вид (1).

Этот результат мы получили в качестве следствия из предположения о выполнимости формулы $\mathfrak{F}$. А теперь, наоборот, предположим, что выполнима формула $\mathfrak{S}$. Ее выполнимость означает, что в формулах (4) и (5) предикатные символы можно так интерпретировать как символы для логических функций, определенных в какой-нибудь индивидной области J_1, что при этом истолковании обе эти формулы окажутся истинными.

Из истинности формулы (4) следует истинность формулы

$$\begin{aligned}&\forall\mathfrak{x}_1\ldots\forall\mathfrak{x}_r\exists\mathfrak{x}_{r+1}\ldots\exists\mathfrak{x}_{2r-1}\exists\mathfrak{y}_1\ldots\exists\mathfrak{y}_s(\Psi(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{r+1})\,\&\\ &\qquad\Psi(\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_{r+1}, \mathfrak{x}_{r+2})\,\&\ldots\&\,\Psi(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_{2r-2}, \mathfrak{x}_{2r-1})\,\&\\ &\Psi(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{x}_{2r-2}, \mathfrak{y}_1)\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)\,\&\ldots\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_{s-1}, \mathfrak{y}_s))\\ &\qquad\rightarrow\forall\mathfrak{x}_1\ldots\forall\mathfrak{x}_r\exists\mathfrak{y}_1\ldots\exists\mathfrak{y}_s\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s).\end{aligned}$$

Посылка этой импликации является истинной формулой ввиду истинности формулы (5) [она даже формально выводима из (5)]. Значит, заключение ее тоже является истинным. Но оно получается из $\mathfrak{F}$ путем замены формульных переменных символами конкретных логических функций, так что в результате у нас получается некоторая модель формулы $\mathfrak{F}$ с областью J_1.

Таким образом, с точки зрения выполнимости формула $\mathfrak{S}$ равносильна формуле $\mathfrak{F}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что формула $\mathfrak{S}$ может быть преобразована в сколемовскую нормальную форму

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\exists y\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y), \tag{6}$$

а также в формулу вида

$$\forall x_1\forall x_2\exists y\forall x_3\ldots\forall x_n\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y). \tag{7}$$

Таким образом, для каждой формулы исчисления предикатов может быть указана равносильная ей по выполнимости формула вида (6) или (7).

А теперь от теоретико-модельного рассмотрения мы перейдем к финитному теоретико-доказательственному. С точки зрения теоретико-множественной логики предикатов теорема Пепиша, ввиду совпадения выполнимости и неопровержимости, равносильна утверждению о том, что для всякой формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов может быть указана некоторая формула вида (1), равносильная формуле $\mathfrak{F}$ относительно опровержимости.

Доказательство этого утверждения, получающееся из предшествующего рассуждения в сочетании с гёделевской теоремой о полноте и с теоремой о неопровержимости выполнимых формул, является нефинитным. Однако, используя наши критерии опровержимости [1]), это доказательство можно перевести в некоторое финитное. Действительно, это может быть проделано следующим образом.

Во-первых, для каждой формулы $\mathfrak{A}$ исчисления предикатов может быть указана такая формула $\mathfrak{F}$ вида

$$\forall\mathfrak{x}_1\ldots\forall\mathfrak{x}_r\exists\mathfrak{y}_1\ldots\exists\mathfrak{y}_s\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

где $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ — полный список входящих в нее индивидных переменных, а r и s отличны от нуля, что в нее не входят никакие формульные переменные без аргументов, а также формульная переменная A с аргументами и что ее отрицание дедуктивно равно отрицанию формулы $\mathfrak{A}$, так что формулы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}$ равносильны относительно опровержимости. Поэтому наше утверждение достаточно доказать для формулы $\mathfrak{F}$.

Для этого мы снова воспользуемся формулой $\mathfrak{S}$, записываемой следующим образом:

$$\begin{aligned}&\forall x\forall y\exists z A(x, y, z)\,\&\,\forall\mathfrak{x}_1\ldots\forall\mathfrak{x}_r\ldots\forall\mathfrak{x}_{2r-1}\forall\mathfrak{y}_1\ldots\forall\mathfrak{y}_s\\ &\quad\{A(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{r+1})\,\&\,A(\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_{r+1}, \mathfrak{x}_{r+2})\,\&\,A(\mathfrak{x}_4, \mathfrak{x}_{r+2}, \mathfrak{x}_{r+3})\,\&\ldots\\ &\ldots\&\,A(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_{2r-2}, \mathfrak{x}_{2r-1})\,\&\,A(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_1)\,\&\,A(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)\,\&\ldots\\ &\ldots\&\,A(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_{s-1}, \mathfrak{y}_s)\rightarrow\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)\}.\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$ выражение

$$A(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{r+1})\,\&\ldots\&\,A(\mathfrak{x}_{2r-1}, \mathfrak{y}_{s-1}, \mathfrak{y}_s),$$

фигурирующее в ней в качестве посылки импликации, и через m — цифру $2r+s-1$. С помощью критериев 1 и 3 мы покажем, что формула $\mathfrak{F}$ опровержима в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда опровержима $\mathfrak{S}$. С этой целью мы снова воспользуемся выделенной системой функций $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$, которая была нами определена [2]) с помощью функции $\psi(a, b) = 2^a(2b+1)$, причем теперь будет важно и то, что функции $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ являются вычислимыми.

---

[1]) См. с. 223 и далее.
[2]) См. с. 251 и далее.

Допустим сначала, что опровержима формула $\mathfrak{F}$. Тогда, согласно критерию 1, можно указать такую цифру $\mathfrak{p}$, что формулы

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, \varkappa_1(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}), \ldots, \varkappa_s(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}))$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^r - 1$$

не являются совместно выполнимыми.

Пусть $\mathfrak{q}$ означает наибольшее из значений выражений $\varkappa_i(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j})$ при $i = 1, \ldots, s$; $j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^r - 1$. [Нетрудно, впрочем, убедиться, что это число равно $\varkappa_s(\mathfrak{p}, \ldots, \mathfrak{p})$, но нам это не понадобится.] Тогда при любой замене формульных переменных из $\mathfrak{F}$ какими-либо логическими функциями, определенными для цифр, изменяющихся в пределах от 0 до $\mathfrak{q}$, по крайней мере одна из формул

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, \varkappa_1(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}), \ldots, \varkappa_s(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}))$$
$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^r - 1$$

будет ложной.

Но отсюда следует, что при любой замене формульных переменных из $\mathfrak{G}$ логическими функциями, определенными для цифр, изменяющихся в пределах от 0 до $\psi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ [1]), будет ложной по крайней мере одна из формул

$$(8)\quad A(l_1, l_2, \psi(l_1, l_2)) \,\&\, \{\mathfrak{P}(n_1, \ldots, n_{2r-1}, f_1, \ldots, f_s \to \mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_r, f_1, \ldots, f_s)\},$$

где $l_1, l_2, n_1, \ldots, n_{2r-1}, f_1, \ldots, f_s$ независимо друг от друга пробегают цифры от 0 до $\mathfrak{q}$. Действительно, любая замена формульных переменных в формуле $\mathfrak{G}$ логическими функциями слагается из некоторой замены для формульной переменной A и из замен для формульных переменных формулы $\mathfrak{F}$. А теперь представим себе, что мы каким-либо определенным образом произвели эти замены формульной переменной A и формульных переменных формулы $\mathfrak{F}$ соответствующими логическими функциями, определенными для цифр, не превосходящих $\psi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$. Если в результате этих замен одна из формул $A(l_1, l_2, \psi(l_1, l_2))$, где l_1 и l_2 — цифры, не превосходящие $\mathfrak{q}$, получит значение «ложь», то будет ложной по крайней мере одна из формул (8) с цифрами $l_1, \ldots, f_s$, лежащими в пределах от 0 до $\mathfrak{q}$. Если же в результате этих замен все эти $(\mathfrak{q}+1)^2$ формул $A(l_1, l_2, \psi(l_1, l_2))$ окажутся истинными, то во всех тех формулах (8), в которых $n_1, \ldots, n_r \leqslant \mathfrak{p}$ и

[1]) Для простоты мы пользуемся тем, что функция $\psi(a, b)$ возрастает как при возрастании a, так и при возрастании b.

выполнены равенства

$$(9)\quad \begin{cases} n_{r+1} = \psi(n_2, n_1), \quad n_{r+2} = \psi(n_3, n_{r+1}), \\ n_{r+3} = \psi(n_4, n_{r+2}), \ \ldots, \ n_{2r-1} = \psi(n_r, n_{2r-2}), \\ f_1 = \psi(n_{2r-1}, n_{2r-1}), \\ f_2 = \psi(n_{2r-1}, f_1), \ \ldots, \ f_s = \psi(n_{2r-1}, f_{s-1}), \end{cases}$$

из которых следуют соотношения

$$n_{r+1} < n_{r+2} < \ldots < n_{2r-1} < f_1 < \ldots < f_f,$$
$$f_1 = \varkappa_1(n_1, \ldots, n_r), \ \ldots, \ f_s < \varkappa_s(n_1, \ldots, n_r),$$
$$f_s \leqslant \mathfrak{q},$$

формула $\mathfrak{P}(n_1, \ldots, n_{2r-1}, f_1, \ldots, f_s)$ примет значение «истина»; тем самым каждая из таких $(\mathfrak{p}+1)^r$ формул примет то же самое истинностное значение, что и соответствующая формула

$$\mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_r, \varkappa_1(n_1, \ldots, n_r), \ldots, \varkappa_f(n_1, \ldots, n_r)).$$

Но среди этих формул, как мы знаем, находится по крайней мере одна такая, которая в результате рассматриваемых замен принимает значение «ложь».

Таким образом, действительно, при любой замене формульных переменных логическими функциями, определенными для цифр, лежащих в пределах от 0 до $\psi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$, по крайней мере одна из формул (8) оказывается ложной. Но функция ψ всегда имеет значение, большее, чем ее аргументы, и всякое значение, которое она принимает, принимается ею только один раз. Следовательно, функция ψ образует разделяющую систему функций, и потому, согласно нашему критерию 3, формула $\mathfrak{G}$ опровержима в исчислении предикатов.

Теперь предположим, что опровержима формула $\mathfrak{G}$. Тогда, согласно критерию 1, начиная с некоторой цифры $\mathfrak{p}$, среди тех формул (8), в которых $l_1, l_2, n_1, \ldots, n_{2r-1}, f_1, \ldots, f_s$ изменяются в пределах от 0 до $\mathfrak{p}$, при любой замене формульных переменных формулы $\mathfrak{G}$ логическими функциями должна найтись по крайней мере одна ложная.

В частности, это справедливо и для всех тех замен, при которых вместо формульной переменной $A(a, b, c)$ подставляется логическая функция, которая для любой тройки цифр a, b, c принимает значение «истина» или «ложь» в зависимости от того, является или не является c (вычислимым) значением функции $\psi(a, b)$.

Если мы теперь возьмем для рассматриваемой цифры $\mathfrak{r}$ какие-нибудь замены формульных переменных, входящих в выражение $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$, т. е. формульных переменных, входящих в формулу $\mathfrak{F}$, какими-либо логическими функциями, определенными для цифр, лежащих в пределах от 0 до $\psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ [другие цифры не входят в формулы (8) в качестве аргументов], и объединим эти замены с только что упоминавшейся заменой для формульной переменной $A(a, b, c)$, то в упомянутых формулах (8) все конъюнктивные члены $A(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \psi(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2))$ окажутся истинными. Поэтому значение «ложь» могут принять только те из этих формул, у которых $\mathfrak{P}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\mathfrak{s})$ принимает значение «истина», а $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\mathfrak{s})$ — значение «ложь». Но если этот случай будет иметь место, то вследствие выбора логической функции, заменяющей формульную переменную A, цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\mathfrak{s}$ (принадлежащие ряду от 0 до $\mathfrak{p}$) должны удовлетворять равенствам (9), в соответствии с которыми $\mathfrak{f}_\mathfrak{i}$ при $\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s}$ является значением $\varkappa_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r})$, и потому при рассматриваемых цифрах $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ формула

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \varkappa_1(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}), \ldots, \varkappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}))$$

должна принять значение «ложь». [При этом значения функций $\varkappa_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ должны не превосходить $\mathfrak{p}$.]

И так как это верно для произвольных замен формульных переменных формулы $\mathfrak{F}$ логическими функциями, определенными для цифр, не превосходящих $\psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$, то формулы

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \varkappa_1(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}), \ldots, \varkappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}))$$
$$\mathfrak{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

не могут быть совместно выполнимыми. [Получается, что совместно выполнимыми не являются даже те из этих формул, в которых все значения функций $\varkappa_1(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}), \ldots, \varkappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})$ не превосходят $\mathfrak{p}$.] Поэтому из критерия 3 вытекает, что формула $\mathfrak{F}$ опровержима.

Тем самым установлено, что формулы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ равносильны относительно опровержимости их в исчислении предикатов. Но для всякой формулы $\mathfrak{F}$ рассматриваемого специального вида соответствующую формулу $\mathfrak{G}$ можно указать непосредственно, и эта формула имеет вид (1). Следовательно, для любой формулы $\mathfrak{F}$ рассматриваемого вида, а потому, вследствие сделанного ранее замечания, и для произвольной формулы исчисления предикатов, можно построить равносильную ей с точки зрения опровержимости формулу вида (1).

Таким образом, мы нашли финитное доказательство теоремы Пепиша в ее теоретико-доказательственной формулировке. Как мы убедились, для того чтобы придать этому доказательству финитный характер, не требуется никаких новых соображений. Напротив, наши критерии опровержимости позволяют нам скопировать идеи теоретико-модельного рассуждения и ограничить при этом рассуждения, касающиеся логических функций, конечными индивидными областями. Конечно, перевод теоретико-модельных рассуждений в финитные теоретико-доказательственные не всегда бывает таким простым, как в только что рассмотренном случае; иногда, вместо того чтобы пользоваться критериями опровержимости, оказывается более предпочтительным применять какие-нибудь прямые способы.

Такого рода случай имеет место, например, с теоремой Лёвенгейма о равносильности (в отношении выполнимости) любой формулы исчисления предикатов некоторой «бинарной» формуле, т. е. формуле, все формульные переменные которой являются двуместными.

Теоретико-доказательственным двойником этой теоремы является утверждение о том, что всякая формула исчисления предикатов в отношении выводимости равносильна некоторой бинарной формуле. Для доказательства этой теоремы можно, как это и сделал Эрбран, преобразовать с помощью критериев опровержимости доказательство теоремы Лёвенгейма в финитное доказательство соответствующей теоремы теории доказательств.

И тем не менее это доказательство, как показал Л. Кальмар [1]), можно получить заметно проще некоторым прямым способом.

д) Теоретико-модельные нормальные формы. Мы изложим здесь некоторые новые важные результаты, которые касаются равносильности формул по отношению к выполнимости. Эти результаты также могут быть усилены до соответствующих финитных утверждений, касающихся равносильности формул по отношению к опровержимости. Чтобы иметь возможность кратко формулировать эти результаты, мы введем понятия теоретико-модельной нормальной формы. Так мы будем называть некоторый специальный вид формул, если будет иметься соответствующая процедура, позволяющая преобразовывать формулы исчисления предикатов в формулы рассматриваемого специального вида, равносильные исходным формулам по выполнимости.

Теоретико-модельными нормальными формами, в частности, являются:

---

[1]) Kalmár László. Über einen Löwenheimschen Satz. — Acta Sci. Math. Szeged, 1934, 7, № 2.

1. *Нормальная форма Гёделя*

$$\forall x \forall y \exists u (A(x, y) \& B(y, u)) \& \forall x \forall y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \& \forall x \exists v_1 \ldots \exists v_n \mathfrak{B}(x, v_1, \ldots, v_n),$$

использующая только двуместные формульные переменные [1]).

2. *Нормальная форма Кальмара*

$$\forall x \forall y \exists z \mathfrak{A}(x, y, z) \& \exists u_1 \ldots \exists u_m \forall v_1 \ldots \forall v_n \mathfrak{B}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n),$$

использующая только одну (двуместную) формульную переменную [2]).

3. *Нормальная форма Пепиша*

$$\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \& \forall u_1 \ldots \forall u_n \mathfrak{C}(u_1, \ldots, u_n).$$

4. *Нормальная форма Аккермана* [3])

$$\forall x \exists y A(x, y) \& \exists z \forall u_1 \ldots \forall u_n \mathfrak{B}(z, u_1, \ldots, u_n).$$

Все эти нормальные формы мыслятся как формулы *без свободных индивидных переменных.*

Замечания. В нормальной форме Пепиша первый член

$$\forall x \exists y \exists z A(x, y, z)$$

может быть заменен членом

$$\forall x \forall y \exists z (A(x, z) \& B(y, z)) [4]).$$

[1]) См. Gödel K. Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalkuls. — Monatsh. Math. Phys., 1933, **40**, № 2. Очень похожая теоретико-модельная нормальная форма была указана Т. Сколемом в его работе: Skolem Th. Ein Satz über Zählausdrücke. — Acta Sci. Math. Szeged, 1935, **7**, № 4. Она имеет следующий вид:

$$\forall x \forall y \exists u \mathfrak{A}(x, y, u) \& \forall x \forall y \exists v \mathfrak{B}(x, y, v) \& \forall x \forall y \forall z \mathfrak{C}(x, y, z) \& \forall x \exists w_1 \ldots \exists w_n \mathfrak{K}(x, w_1, \ldots, w_n)$$

и тоже содержит только двуместные формульные переменные. Доказательство Сколема заодно дает и новое доказательство теоремы Лёвенгейма о том, что любая формула исчисления предикатов равносильна по выполнимости некоторой бинарной формуле.

[2]) Kalmár L. Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären Funktionsvariablen. — Compositio math., 1936, **4**, № 1.

[3]) Ackermann W. Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. — Math. Ann., 1936, **112**, № 3.

[4]) Пепиш заметил, что при доказательстве возможности построения его теоретико-модельной нормальной формы (№ 3 в нашем списке) отношение $\psi(a, b) = c$ может быть представлено с помощью двух двуместных логических функций в виде $\Psi_1(a, c) \& \Psi_2(b, c)$, где $\Psi_1(a, c)$ истинно тогда и только тогда, когда 2^a является наибольшей степенью числа 2, делящей c, а $\Psi_2(b, c)$ истинно тогда и только тогда, когда $2b+1$ является наибольшим нечетным числом, делящим c.

Кроме того, как показал Пепиш, можно добиться, чтобы в этой нормальной форме кроме двуместных формульных переменных A и B встречалась только одна одноместная формульная переменная. Отсюда в свою очередь можно заключить, что в нормальной форме Кальмара в качестве m можно взять число 3, так что в приставке второго члена этой конъюнкции будет стоять только три квантора существования [1]).

В нормальных формах Гёделя и Аккермана, как тоже было показано Пепишем [2]), можно обойтись тремя двуместными и одной одноместной формульными переменными. Кальмар показал, что в нормальной форме Аккермана, приведенной к предваренному виду, можно обойтись всего лишь одной-единственной бинарной формульной переменной [3]).

Из нормальных форм 1—4 после приведения фигурирующих там конъюнкций к предваренному виду получаются новые наглядные нормальные формы. В частности, из гёделевской нормальной формы получается некоторая специальная сколемовская нормальная форма, содержащая три квантора всеобщности, а из нормальной формы Пепиша — сколемовская нормальная форма с одним только квантором существования.

Нормальная форма Кальмара переводима в предваренную формулу вида

$$\exists u_1 \ldots \exists u_m \forall x \forall y \exists z \forall v_1 \ldots \forall v_n \mathfrak{C}(u_1, \ldots, u_m, x, y, z, v_1, \ldots, v_n),$$

а нормальная форма Аккермана — в формулу вида

$$\exists z \forall x \exists y \forall u_1 \ldots \forall u_n \mathfrak{C}(x, y, z, u_1, \ldots, u_n).$$

Все упомянутые нормальные формы являются заодно и нормальными формами для исследования опровержимости формул в исчислении предикатов. Конечно, для того чтобы они оказались таковыми в финитном смысле, требуется финитный перевод соответствующих теоретико-модельных доказательств. Путь для такого перевода указывают наши критерии опровержимости 1 и 3, как это было продемонстрировано нами в случае нормальной формы Пепиша.

[1]) На это обстоятельство указал А. Линденбаум в своем реферате цитировавшейся выше статьи Кальмара. См. Zbl. Math., 1937, **15**.

[2]) См. упоминавшуюся на с. 248 работу Пепиша: Pepis J. Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. — Fundam. math., 1938, **30**.

[3]) См. Kalmár L. On the Reduction of the Decision Problem. First Paper. — J. Symbolic Logic, 1939, **4**, p. 1—9.

Позднее Л. Кальмар и Я. Шураньи опубликовали аналогичное доказательство для нормальных форм Гёделя и Пепиша, приведенных к предваренному виду. См. J. Symbolic Logic, 1947, **12**, p. 65—73, и 1950, **15**, p. 161—173.

В последнее время было получено несколько глубоких результатов [1]), касающихся теоретико-модельных нормальных форм. В качестве особенно яркого из них мы упомянем нормальную форму Шураньи

$$\forall x \forall y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \& \forall x \forall y \exists u \mathfrak{B}(x, y, u),$$

в которой фигурируют только одна двуместная формульная переменная, а остальные формульные переменные являются одноместными [2]). В отношении распределения кванторов эта нормальная форма является почти оптимальной. Оптимум был достигнут в работе А. С. Кара, Э. Ф. Мура и Хао Вана [3]), где было установлено, что форма

$$\forall x \exists y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z)$$

с двуместными формульными переменными тоже является теоретико-модельной нормальной формой.

Значение теоретико-модельных нормальных форм становится особенно ясным, если рассмотреть связь, *существующую между формулами исчисления предикатов и различными аксиоматическими системами.*

При анализе этой связи можно ограничиться рассмотрением формул, не содержащих ни свободных индивидных переменных, ни формульных переменных без аргументов. Неопровержимость такой формулы исчисления предикатов равносильна непротиворечивости той аксиомы (соответственно той системы аксиом), которая изображается формулой, получающейся из рассматриваемой формулы в результате замены ее формульных переменных предикатными символами с тем же самым числом аргументов. Если рассматриваемая формула имеет вид конъюнкции предваренных формул, то после замены формульных переменных предикатными символами мы берем каждый ее конъюнктивный член в качестве отдельной аксиомы. От полученной таким образом системы аксиом, аксиомы которой изображаются предваренными формулами без свободных индивидных переменных, мы затем можем перейти к системе аксиом в разрешенном виде, в которой каждому квантору существования без предшествующих ему кванторов всеобщности соответствует некоторый индивидный символ, а каждому квантору существования с предшествующими f кванторами всеобщности соответствует некоторый функциональный знак с f аргументами. В отношении непротиворечивости эта система аксиом в разрешенном виде равносильна прежней системе аксиом.

[1]) По поводу литературы см. Ackermann W. Solvable Cases of the Decision Problem. — Amsterdam, 1954; Suranyi J. Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkul der ersten Stufe. — Budapest, 1959.

[2]) См. теорему X в упомянутой книге Шураньи, с. 72.

[3]) Kahr A. S., Moore E. F. Wang Hao. Entscheidungsproblem reduced to the ∀∃∀ case. — Proc. Nat. Acad. Sci, 1962, 48, p. 365—377. Авторы ссылаются на рассуждения Дж. Р. Бюхи (J. R. Büchi).

Таким образом, если две формулы исчисления предикатов (не содержащие свободных индивидных переменных и формульных переменных без аргументов) равносильны в смысле опровержимости, то и соответствующие им системы аксиом в разрешенном виде будут равносильными в отношении непротиворечивости.

Поэтому каждая нормальная форма, приспособленная для исследования опровержимости формул исчисления предикатов, дает нам некоторую *нормальную форму, приспособленную для исследования непротиворечивости символьно разрешенных систем аксиом*, так что для каждой символьно разрешенной системы аксиом можно указать такую систему аксиом специального вида, которая эквивалентна исходной в отношении непротиворечивости.

Таким образом, нормальным формам 1—4, а также двум нормальным формам, приведенным после них, соответствуют (с учетом упомянутых выше дополнительных уточнений) следующие нормальные формы, приспособленные для исследования непротиворечивости символьно разрешенных систем аксиом:

1. Система аксиом с тремя различными индивидными переменными, с одним двуместным и остальными одноместными функциональными знаками и четырьмя предикатными символами — тремя двуместными и одним одноместным.

2. Система аксиом с единственным (двуместным) функциональным знаком, единственным (двуместным) предикатным символом и тремя индивидными символами.

3. Система аксиом без индивидных символов, с единственным (двуместным) функциональным знаком и тремя предикатными символами — двумя двуместными и одним одноместным.

4. Система аксиом с единственным индивидным символом, единственным (одноместным) функциональным знаком и единственным (двуместным) предикатным символом.

(В нормальных формах 2—4 количество индивидных переменных не ограничивается.)

5. Система аксиом без индивидных символов, с тремя различными индивидными переменными, с единственным (двуместным) функциональным знаком и с одним двуместным и еще некоторыми одноместными предикатными символами.

6. Система аксиом без индивидных символов с двумя различными индивидными переменными, с единственным (одноместным) функциональным знаком и некоторым числом двуместных предикатных символов.

Конечно, при исследовании непротиворечивости систем аксиом первой ступени наши критерии опровержимости могут быть

использованы и непосредственно. В частности, критерий 2* показывает, что для установления непротиворечивости какой-либо заданной в символьно разрешенном виде системы аксиом первой ступени вместо выполнения ее с помощью какой-либо финитной арифметической модели достаточно выполнения в некотором несобственном смысле; это выполнение состоит в том, что последовательно определяются расширяющиеся математические и логические функции, которые в подходящей *конечной числовой области* (до некоторого числа включительно) определены таким образом, что рассматриваемые аксиомы принимают значение «истина» на всех системах значений свободных индивидных переменных, при которых значения всех встречающихся в этих аксиомах термов также лежат в рассматриваемой числовой области, а при переходе от одной числовой области к другой, более широкой, области *математические функции определяются как продолжения, а логические могут быть изменены произвольно.* Если удастся убедиться, что этот процесс последовательно расширяющегося выполнения может быть продолжен неограниченно, то тем самым будет доказана непротиворечивость рассматриваемой системы.

При этом непротиворечивость здесь следует понимать как невозможность вывести противоречие с помощью таких умозаключений, которые формализуются исчислением предикатов.

С точки зрения теоретико-множественной логики предикатов такого рода непротиворечивость ввиду теоремы Гёделя о полноте совпадает с выполнимостью рассматриваемой системы аксиом при помощи некоторой арифметической (разумеется, не обязательно финитной) модели, а уже эта непротиворечивость, связанная с исчислением предикатов, гарантирует и непротиворечивость в неограниченном, содержательном смысле этого слова.

Для такого использования теоремы Гёделя о полноте тоже имеется некоторый финитный эквивалент. Именно, можно показать, что всякая неопровержимая формула исчисления предикатов неопровержима и в рамках любого «арифметически непротиворечивого» формализма, т. е. такого формализма, который, во-первых, непротиворечив и, во-вторых, остается непротиворечивым при добавлении арифметического формализма (если этот последний еще не содержится в нем) и каких-нибудь других верифицируемых формул рекурсивной арифметики (также добавляемых в качестве аксиом).

Но для того, чтобы получить этот результат, требуется некоторый шаг, который до сих пор еще не совершен, а именно нужна формализация рассуждений, проводимых в теории доказательств. К этому методу, который позволяет значительно продвинуться в различных направлениях, мы теперь и перейдем.

ГЛАВА IV

МЕТОД АРИФМЕТИЗАЦИИ МЕТАМАТЕМАТИКИ В ПРИМЕНЕНИИ К ИСЧИСЛЕНИЮ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Арифметизация метаматематики исчисления предикатов и одна ее конкретная реализация

а) Нумерации. В предыдущих трех главах мы имели дело с методами, разработка которых была обусловлена введением гильбертовского ε-символа. В частности, с помощью метода устранения связанных переменных нам удалось получить удовлетворительное решение проблемы символьного решения экзистенциальных аксиом; затем мы доказали одну весьма общую теорему («нп-теорему»), применяя которую, можно с помощью финитных арифметических моделей устанавливать непротиворечивость систем аксиом первой ступени, не пользуясь предположением о непротиворечивости формального анализа.

Кроме того, этот метод позволил нам получить одно естественное доказательство теоремы Эрбрана, являющейся сильным математическим средством для изучения предикатов, а также для финитного рассмотрения различных проблем разрешимости. Однако в части, касающейся арифметического формализма, применение ε-символа привело нас лишь к частичному результату, так как на этом пути удалось доказать [1]) непроворечивость только некоторой части системы (Z), а не всего этого формализма [2]).

Теперь мы перейдем к рассмотрению еще одного метода теории доказательств, разработанного Куртом Гёделем [3]), а именно метода арифметизации метаматематики.

Что касается принципиальной стороны дела, то арифметизация метаматематики возможна в той же самой мере, в какой возможна арифметизация других теорий: арифметика достаточно богата для того, чтобы с ее помощью можно было строить модели различных метаматематических понятий и связей, существующих между

---

[1]) См. с. 162.

[2]) См. Приложение I, с. 468.

[3]) Это было сделано в его новаторской работе: Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. — Monatsh. Math. Phys., 1931, 38, S. 173—198.

ними [1]). Это утверждение справедливо даже независимо от того, что метаматематика по своему характеру является финитной. Но для финитной метаматематики ее арифметическую модель можно, кроме того, построить в виде финитно-арифметической модели.

Эти принципиальные соображения сами по себе, конечно, еще не дают никакого конкретного способа арифметизации. Но главная трудность заключается в том, что вообще заранее нельзя предвидеть, удастся ли математические соотношения, имеющие место в данной арифметической модели метаматематики, проследить настолько эффективно, насколько это требуется для наших применений; к тому же с этой арифметизацией мы должны связать еще и формализацию метаматематики.

Гёдель показал, что средств рекурсивной арифметики вполне достаточно для математического построения такой модели и для ее формализации. Используемый им метод арифметизации состоит в *арифметическом имитировании линейного расположения знаков* в формулах формализованной математики. Действительно, логическую и математическую символику мы всегда можем выбрать таким образом, чтобы расположение символов и переменных в формулах было строго линейным. Если теперь каждому символу, каждой переменной, а также скобкам и запятой сопоставить некоторые цифры (номера данных знаков), то всякой формуле будет взаимно однозначно сопоставлена некоторая цепочка цифр [2]).

Затем, пользуясь однозначностью разложения чисел на простые множители, каждой (конечной) последовательности цифр можно, как было показано ранее [3]), взаимно однозначным образом поставить в соответствие некоторую цифру: а именно, последовательности

$$n_1, \ldots, n_r$$

ставится в соответствие цифра

$$p_0^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_{r-1}^{n_r},$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}$ — первые r простых чисел. Таким образом каждая формула изобразится присвоенным ей номером. Применив аналогичный прием еще раз, можно с помощью номеров охарактеризовать и конечные списки формул. При этом списку, состоящему из формул с номерами $n_1, \ldots, n_r$, будет сопоставлен номер

$$p_0^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_{r-1}^{n_r}.$$

Таким образом, мы будем иметь дело с тремя типами нумераций объектов теории доказательств: во-первых, с нумерацией знаков, являющихся составными частями формул; во-вторых, с нумерацией формул и, в-третьих, с нумерацией списков формул, в частности доказательств.

С помощью этих нумераций структурные свойства формул и списков формул, а также отношения между ними изобразятся некоторыми арифметическими свойствами и отношениями.

Однако арифметизацию можно осуществить и несколько иным способом: вместо того чтобы воспроизводить способ записи формул, мы можем *проимитировать их грамматическую структуру*. Отличительной чертой этого способа будет то, что предикатам, символам и функциональным знакам, а также знакам логических операций мы сопоставим не номера, а некоторые арифметические функции. Для начала мы изложим этот способ *в применении к исчислению предикатов*.

Формулы исчисления предикатов строятся из свободных и связанных индивидных переменных, формульных переменных с аргументами и без них [1]), а также из символов исчисления высказываний и кванторов всеобщности и существования. В качестве номеров для связанных переменных мы возьмем простые числа [2]), отличные от чисел 2, 3 и 5, а в качестве номеров для свободных индивидных переменных — числа вида $2 \cdot p$, где p — простое число, бо́льшее 5. В качестве номеров для формульных

---

[1]) Такую модель можно рассматривать и как модель, выполняющую некоторую систему аксиом, потому что метаматематика любого дедуктивного формализма всегда может быть аксиоматизирована. На такую возможность впервые указал А. Тарский (A. Tarski) в своих работах: Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. — Monatsh. Math. Phys., 1933, 40, и Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. — Trav. Soc. Sci. Varsovie, 1933, немецкий перевод в Studia philos., 1935, в которых он, кроме того, дал аксиоматическое определение понятия выражения для некоторых дедуктивных формализмов. Общий подход к аксиоматизации метаматематики дедуктивных формализмов кратко обрисован Г. Гермесом в его докладе: Hermes H. Ein Axiomensystem für die Syntax des (klassischen) Logikkalküls. — Trav. du IX congr. de philos., Paris, 1937, № 6.

[2]) Идея такого изображения формульных выражений последовательностями цифр и, тем самым, перевода правил построения формальных выражений и приведения формальных доказательств к арифметическим правилам была высказана Гильбертом уже в процессе его размышлений над канторовской проблемой континуума. Но в то время реализация этой идеи казалась слишком сложной.

[3]) См. т. I, с. 394—395.

[1]) Здесь мы предполагаем, что порождение переменных любого типа, в том числе и формульных переменных с любым числом аргументов производится в виде некоторой неограниченной последовательности, подобной натуральному ряду.

[2]) Так как эта арифметизация производится в рамках *содержательной* арифметики, мы говорим здесь о «числах», а не о «цифрах».

переменных без аргументов мы возьмем числа вида $10 \cdot p$, где p — простое число, бо́льшее 5. Формульные переменные с f аргументами мы будем изображать f-местными функциями вида

$$10 \cdot q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot q_f^{a_f},$$

где $q_1, \ldots, q_f$ — простые числа, бо́льшие 5 и такие, что $q_i < q_{i+1}$ при $1 \leqslant i < f$. Это представление формульной переменной нужно понимать следующим образом: выражение, состоящее из формульной переменной с аргументами, номера которых (расположенные в порядке следования аргументов) суть $n_1, \ldots, n_f$, в качестве номера получает число

$$10 \cdot q_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot q_f^{n_f}.$$

Это сопоставление номеров и функций выбирается таким образом, чтобы соответствие между всеми простыми числами, бо́льшими 5, и всеми связанными переменными, между всеми числами этого рода, умноженными на 2, и всеми свободными индивидными переменными, между всеми числами этого рода, умноженными на 10, и всеми формульными переменными без аргументов, а также (при любом f) между упорядоченными по возрастанию всеми f-членными наборами простых чисел, бо́льших 5, и всеми формульными переменными с f аргументами было взаимно однозначным [1]). Для логических операций мы возьмем следующие их изображения:

для отрицания — умножение на 3,
для конъюнкции — функцию $20 \cdot 7^a \cdot 11^b$,
для дизъюнкции — функцию $40 \cdot 7^a \cdot 11^b$,
для импликации — функцию $80 \cdot 7^a \cdot 11^b$,
для эквивалентности — функцию $160 \cdot 7^a \cdot 11^b$.

Квантор всеобщности мы изобразим функцией $50 \cdot q^a$, а квантор существования — функцией $100 \cdot q^a$, где в обоих случаях q представляет собой номер связанной переменной, стоящей за квантором, а вместо a подставляется номер выражения, представляющего собой область действия этого квантора.

Для арифметизации рассмотрений, связанных с проблемой разрешимости, нам еще потребуется какое-либо изображение цифр и функциональных знаков [2]). В качестве номера для цифры n

[1]) Сопоставление f-местных формульных переменных упорядоченным по возрастанию f-членным наборам, состоящим из простых чисел, бо́льших 5, может быть получено на основе перечислимости этих наборов из какого-либо перечисления f-местных формульных переменных.

[2]) Мы считаем, что для любого f может быть произведено неограниченное порождение f-местных функциональных знаков.

мы возьмем число $2 \cdot 3^n$, а всякий f-местный функциональный знак мы изобразим какой-либо функцией

$$5 \cdot q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot q_f^{a_f},$$

где $q_1, \ldots, q_f$ — упорядоченные по возрастанию простые числа, бо́льшие 5.

Выбранная таким образом нумерация не зависит от тех или иных соглашений, касающихся конкретного способа записи формул. Способ записи цифр с помощью нуля и штрих-символа тоже оказывается при этом несущественным. Если же мы теперь захотим произвести нумерацию каких-либо конкретно написанных формул, то нам нужно будет дополнительно условиться относительно нумерации конкретных букв, изображающих те или иные переменные. Например, в полном соответствии с нашими определениями можно условиться, что номерами переменных x, y и z будут считаться числа 7, 11 и 13, номерами переменных a, b и c — числа 14, 22 и 26, номерами формульных переменных A, B и C без аргументов — числа 70, 110 и 130 и что формульные переменные A, B и C с одним аргументом будут изображаться соответственно функциями

$$10 \cdot 7^a, \quad 10 \cdot 11^a \quad \text{и} \quad 10 \cdot 13^a,$$

а формульная переменная A с двумя аргументами — функцией

$$10 \cdot 7^a \cdot 11^b.$$

При этом формула

$$A \,\&\, B \to B \,\&\, A$$

получит в качестве номера число

$$80 \cdot 7^{(20 \cdot 7^{10 \cdot 7} \cdot 11^{10 \cdot 11})} \cdot 11^{(20 \cdot 7^{10 \cdot 11} \cdot 11^{10 \cdot 7})}$$

точнее говоря, число, являющееся результатом вычисления значения этого арифметического выражения), формула

$$\forall x A(x) \to A(c)$$

получит номер

$$80 \cdot 7^{(50 \cdot 7^{(10 \cdot 7^7)})} \cdot 11^{(10 \cdot 7^{26})},$$

а формула

$$\neg \exists x \forall y A(x, y) \vee \forall x \exists y A(y, x)$$

получит номер

$$40 \cdot 7^{(300 \cdot 7^{(50 \cdot 11^{(10 \cdot 7^7 \cdot 11^{11})})})} \cdot 11^{(50 \cdot 7^{(100 \cdot 11^{(10 \cdot 7^{11} \cdot 11^7)})})}.$$

Основное требование, которому должна удовлетворять эта нуме-

рация, заключается в том, что различные выражения должны иметь различные номера. Выполнение этого условия в нашей нумерации обеспечивается тем, что различные типы переменных и символов отличаются друг от друга степенями простых чисел 2, 3 и 5, входящих в качестве множителей в номера, представляющие те или иные выражения или соответственно функции. Так, выражение, состоящее из какой-либо формульной переменной с аргументами или без них, характеризуется тем, что номер его делится на 10, но не делится ни на 20, ни на 25, ни на 30; выражения, являющиеся отрицаниями каких-либо других выражений, и только такие выражения имеют номера, делящиеся на 30; выражение, являющееся конъюнкцией двух других выражений, всегда имеет номер, делящийся на 4 и на 5, но не делящийся ни на какую более высокую степень чисел 2 и 5, а также на число 3; выражение, начинающееся квантором всеобщности, область действия которого распространяется на все это выражение, имеет номер, делящийся на 50, но не делящийся ни на 4, ни на 3. Аналогичным образом характеризуются дизъюнкции, импликации и эквивалентности, а также выражения, начинающиеся квантором существования.

Функциональный знак с аргументами имеет номер, делящийся на 5, но не делящийся ни на 2, ни на 3. Номера цифр характеризуются тем, что они не имеют простых делителей, бо́льших 3. Количество аргументов выражения, состоящего из функционального знака или формульной переменной с одним или несколькими аргументами, может быть охарактеризовано как число тех простых множителей, которые входят в номер этого выражения в степени, большей единицы. (Номер формульной переменной без аргументов не содержит ни одного простого множителя в степени, большей единицы.)

У любых двух различных свободных или соответственно связанных индивидных переменных, а также у любых двух различных формульных переменных с одним и тем же числом аргументов и у любых двух функциональных знаков с одним и тем же числом аргументов номера отличаются набором входящих в них простых множителей. В номера различных цифр множитель 3 всегда входит в различных степенях.

Из сказанного вытекает, что два выражения рассматриваемого формализма, отличающиеся друг от друга знаком внешней операции, всегда имеют различные номера; отсюда индукцией по числу знаков, содержащихся в рассматриваемом выражении, получается, что два любых различных выражения имеют различные номера. При этом надо учесть то обстоятельство, что все арифметические функции, которые, согласно нашим определениям, соответствуют составным формальным выражениям, устроены таким образом, что их значения оказываются больше значений

их аргументов и что различным значениям аргументов или соответственно систем аргументов всегда отвечают различные значения функций.

Замечание. Все арифметические функции, сопоставленные составным формальным выражениям, монотонно возрастают по каждому из своих аргументов (при сохранении значений остальных аргументов).

б) **Вспомогательные средства рекурсивной арифметики.** Теперь мы посмотрим, как структурные свойства выражений исчисления предикатов и отношения между этими выражениями переводятся в арифметические отношения между изображающими эти выражения номерами. В частности, мы увидим, что для непосредственно определяемых свойств выражений исчисления предикатов и отношений между этими выражениями арифметический перевод дается *рекурсивными* функциями и предикатами. При этом под рекурсивной функцией мы, как и раньше[1]), понимаем функцию, определяемую с помощью примитивных рекурсий и подстановок, а f-местный числовой предикат мы называем рекурсивным в том случае, если для него можно указать такую рекурсивную функцию $\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_f)$ от f аргументов, что для любой наперед заданной системы значений аргументов $n_1, \ldots, n_f$ значение $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_f)$ равно 0 тогда и только тогда, когда для системы $n_1, \ldots, n_f$ этот предикат истинен.

В формализме рекурсивной арифметики любая рекурсивная функция изображается некоторым рекурсивным термом[2]), причем различные входящие в него свободные переменные взаимно однозначно соответствуют аргументам этой функции, а любой рекурсивный предикат изображается некоторым равенством

$$t = 0,$$

где t — рекурсивный терм, а различные входящие в t свободные переменные взаимно однозначно соответствуют аргументам (субъектам) этого предиката. И обратно, любое такое равенство, в котором имеется хотя бы одна свободная переменная, изображает некоторый рекурсивный предикат.

Теперь мы воспользуемся нашими прежними знаниями[3]) из области рекурсивной арифметики: сведениями о рекурсивности тех или иных функций, а также о переводимости формул в равенства вида

$$t = 0$$

---

[1]) См. т. I, с. 352, 353, с. 390 внизу и с. 400, 401.
[2]) См. т. I, с. 390.
[3]) См. т. I, с. 381—405.

[называемые рекурсивными формулами][1]). Нам потребуются, в частности, следующие факты:

1. Рекурсивными являются:

функции $a+b$, $a\cdot b$ и a^b;

функция $\operatorname{sgn} n$, которая равна 0 при $n=0$ и 1 в остальных случаях;

функция $\overline{\operatorname{sgn}}\, n$, которая равна 1 при $n=0$ и 0 в остальных случаях;

функция $a \dot{-} b$, равная 0 при $a \leqslant b$, а при $a>b$ удовлетворяющая равенству

$$a = b + (a \dot{-} b);$$

функция $\delta(n)$, совпадающая с $n \dot{-} 1$;

функции $\pi(a, b)$ и $\rho(a, b)$, которые при $b \neq 0$ дают неполное частное и остаток от деления a на b и характеризуются условиями

$$a = \pi(a, b)\cdot b + \rho(a, b), \quad \rho(a, b) < b \quad (\text{при } b \neq 0),$$
$$\pi(a, 0) = 0;$$

функция $\wp_n$, которая дает n-е ($n \geqslant 0$) простое число в нумерации простых чисел по их величине;

функция $\nu(m, k)$, значение которой при $m \neq 0$ равно показателю степени, с которым число $\wp_k$ входит в разложение m на простые множители, а при $m=0$ равно 0;

функция $\lambda(m)$, значение которой при $m>1$ равно номеру наибольшего простого делителя числа m, а в остальных случаях равно m.

Кроме того, с помощью рекурсивной функции $\sigma(a, b)$ и ее обращений $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$ мы получаем такую [начинающуюся с пары (0, 0)] нумерацию числовых пар, при которой паре (0, c) предшествуют те и только те пары, у которых оба члена являются числами, меньшими c[2]).

[1]) Это употребление термина «рекурсивная формула», которого мы в дальнейшем и будем придерживаться, является несколько более узким, чем употребление его в смысле определения, приведенного в гл. VII т. I на с. 390.

[2]) См. т. I, с. 395. Вместо использованного здесь способа нумерации можно взять и такой, при котором порядок будет устанавливаться сначала по наибольшему из чисел, входящих в пару, а затем лексикографически. При этом способе паре (0, c) также предшествуют все те пары (a, b), у которых оба числа a и b меньше c. Функция $\sigma^*(a, b)$, которая описывает эту нумерацию, и ее обращения $\sigma_1^*(n)$ и $\sigma_2^*(n)$ могут быть определены с помощью функции $[\sqrt{n}]$, ставящей числу n в соответствие наибольшее из чисел, квадрат которых не превосходит n (рекурсивное определение этой функции см. в т. I на с. 396), и следующих рекурсий;

$$\sigma^*(a, b) = (a+b^2)\cdot \operatorname{sgn}(b \dot{-} a) + (a^2+a+b)\cdot \overline{\operatorname{sgn}}(b \dot{-} a),$$
$$\sigma_1^*(n) = (n \dot{-} [\sqrt{n}]^2)\cdot \operatorname{sgn}(([\sqrt{n}]^2+[\sqrt{n}]) \dot{-} n) + [\sqrt{n}]\cdot \overline{\operatorname{sgn}}(([\sqrt{n}]^2+[\sqrt{n}]) \dot{-} n),$$
$$\sigma_2^*(n) = [\sqrt{n}]\cdot \operatorname{sgn}(([\sqrt{n}]^2+[\sqrt{n}]) \dot{-} n) + (n \dot{-} ([\sqrt{n}]^2+[\sqrt{n}]))\cdot \overline{\operatorname{sgn}}(([\sqrt{n}]^2+[\sqrt{n}]) \dot{-} n).$$

В результате комбинирования рекурсивных функций всегда получаются функции, являющиеся рекурсивными.

2. Если $t(a)$ — рекурсивный терм, то n-членная сумма $\sum\limits_{x<n} t(x)$ и n-членное произведение $\prod\limits_{x<n} t(x)$, равно как и $\sum\limits_{x\leqslant n} t(x)$ и $\prod\limits_{x\leqslant n} t(x)$, могут быть изображены некоторыми рекурсивными термами.

Вследствие сказанного рекурсивной является, например, функция, принимающая при $n=0$ значение 0, а при $n \neq 0$ — значение, равное числу различных простых множителей, входящих в разложение n, так как она может быть представлена выражением

$$\sum_{x<n} \operatorname{sgn}(\nu(n, x)).$$

Эту функцию мы будем обозначать через $\varkappa(n)$.

3. Рекурсивными являются:

предикат $a=b$, который изображается равенством $(a \dot{-} b) + (b \dot{-} a) = 0$;

предикат $a<b$, который изображается равенством $\overline{\operatorname{sgn}}(b \dot{-} a) = 0$;

предикат $a \leqslant b$, который изображается равенством $a \dot{-} b = 0$;

предикат a делится на b или соответственно b делит a, который изображается равенством $\rho(a, b) = 0$;

предикат число n является простым, который изображается равенством $(2 \dot{-} n) + (n \dot{-} \wp_{\lambda(n)}) = 0$.

Мы будем сокращенно записывать формулу $\rho(a, b) = 0$ в виде $b \mid a$[1]), а формулу $(2 \dot{-} n) + (n \dot{-} \wp_{\lambda(n)}) = 0$ в виде $\Pr(n)$.

4. Из рекурсивных предикатов в результате применения к ним операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности получаются предикаты, снова являющиеся рекурсивными. В частности, отрицание предиката, изображаемого равенством $t=0$, изображается равенством $\overline{\operatorname{sgn}}\, t = 0$, конъюнкция двух предикатов, изображаемых равенствами $s=0$ и $t=0$, изображается

[1]) Символ $a \mid b$ в этом же самом его понимании мы уже употребляли раньше (см. т. I, с. 496), хотя он вводился там с помощью другого определения.

равенством $\mathfrak{s}+\mathfrak{t}=0$, а их дизъюнкция изображается равенством $\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{t}=0$.

5. Если $\mathfrak{P}(a)$ — рекурсивный предикат (который, кроме a, может зависеть и от каких-нибудь других аргументов), то высказывания «для всех чисел x, меньших n, имеет место $\mathfrak{P}(x)$» и «существует число x, меньшее n и такое, что имеет место $\mathfrak{P}(x)$» представляют собой рекурсивные предикаты от входящих в них свободных параметров. То же самое будет верно и в том случае, если в рассматриваемых высказываниях заменить требование: «x меньше n» требованием: «x не превосходит n».

Замечание. Отметим, что в обоих только что приведенных высказываниях переменная x не является параметром, тогда как переменная n входит как параметр.

Далее, для любого рекурсивного предиката $\mathfrak{P}(a)$ можно указать такой рекурсивный терм, который изображает функцию $\operatorname{Min}_{x\leqslant n}\mathfrak{P}(x)$, т. е. функцию, значение которой (для любой системы значений фигурирующих в $\mathfrak{P}(a)$ параметров) равно наименьшему из чисел x, не превосходящих n и таких, что $\mathfrak{P}(x)$ имеет место, а в случае, когда таких чисел нет, это значение равно 0.

6. Если в выражении для рекурсивного предиката (заданном словесно или с помощью какой-либо формулы) мы заменим один или несколько его аргументов рекурсивными функциями, аргументы которых частично или полностью могут быть идентифицированы с аргументами этого предиката, то получившийся при этом предикат тоже будет рекурсивным.

7. Если рекурсивный предикат изображается равенством $\mathfrak{t}=0$ с рекурсивным термом $\mathfrak{t}$, то он изображается и равенством $\operatorname{sgn}\mathfrak{t}=0$, причем терм $\operatorname{sgn}\mathfrak{t}$ для тех систем значений аргументов (свободных переменных), для которых этот предикат выполняется, принимает значение 0, а для прочих — значение 1.

Терм $\operatorname{sgn}\mathfrak{t}$ изображает арифметическую функцию своих аргументов, однозначно определенную рассматриваемым рекурсивным предикатом, в то время как в изображении этого предиката равенством $\mathfrak{t}=0$ арифметическая функция, изображаемая термом $\mathfrak{t}$, определяется этим предикатом не однозначно.

8. Если $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ — взаимоисключающие друг друга рекурсивные предикаты, т. е. если никакие два из них не выполняются одновременно ни для одного набора значений аргументов, и если $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_r, \mathfrak{s}$ — какие-либо рекурсивные термы, то функция, зависящая от аргументов, фигурирующих в $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ и $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_r, \mathfrak{s}$, и определяемая условием, что для любой системы значений своих аргументов, для которой имеет место $\mathfrak{P}_1$, ее значение равно значению терма $\mathfrak{s}_1$, для любой системы значений аргументов, для которой имеет место $\mathfrak{P}_2$, ее значение равно значению терма $\mathfrak{s}_2$, ..., для любой системы значений аргументов, для которой имеет место $\mathfrak{P}_r$, ее значение равно значению терма $\mathfrak{s}_r$, а в остальных случаях ее значение равно значению терма $\mathfrak{s}$, рекурсивна.

Действительно, рекурсивные предикаты $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ изображаются некоторыми равенствами

$$\mathfrak{t}_1=0, \ldots, \mathfrak{t}_r=0$$

с рекурсивными термами $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r$, из которых, по предположению, никакие два не принимают значения 0 для одной и той же системы значений аргументов; а потому функция, удовлетворяющая приведенному выше условию, изображается выражением

$$\mathfrak{s}_1\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,\mathfrak{t}_1+\mathfrak{s}_2\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,\mathfrak{t}_2+\ldots+\mathfrak{s}_r\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,\mathfrak{t}_r+\mathfrak{s}\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,(\mathfrak{t}_1\cdot\ldots\cdot\mathfrak{t}_r)$$

и, значит, является рекурсивной.

9. Любую рекурсию пробега[1]), т. е. любое рекурсивное определение вида

$$\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, 0)=\mathfrak{a}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}),$$

$$\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, n')=$$

$$=\mathfrak{b}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, n, \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, \mathfrak{t}_1(n)), \ldots, \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, \mathfrak{t}_r(n)),$$

где $\mathfrak{f}(\ldots)$ — вводимый функциональный знак с $\mathfrak{f}+1$ аргументом,

$$\mathfrak{a}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, c_1, \ldots, c_r)$$

— рекурсивные термы, а $\mathfrak{t}_1(n), \ldots, \mathfrak{t}_r(n)$ — рекурсивные термы, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathfrak{t}_1(n)\leqslant n, \ldots, \mathfrak{t}_r(n)\leqslant n,$$

можно свести к примитивным рекурсиям.

Рекурсия пробега может быть сформулирована также и в следующей форме:

$$\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{f}, 0)=\mathfrak{a}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}),$$

$$n\neq 0\to\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, n)=\mathfrak{b}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, n),$$

$$\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_1(n)), \ldots, \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_r(n))),$$

где (рекурсивные) термы $\mathfrak{s}_1(n), \ldots, \mathfrak{s}_r(n)$ при $n\neq 0$ должны удовлетворять условиям

$$\mathfrak{s}_1(n)<n, \ldots, \mathfrak{s}_r(n)<n.$$

Замечание. Утверждения 1 — 9 формулируются нами не как сугубо формальные теоремы рекурсивной арифметики, а с исполь-

[1]) См. т. I, с. 402.

зованием *содержательной* финитной арифметики, которая, как мы знаем, может быть формализована в рекурсивной арифметике [1]). Так, мы говорим о функциях и о их значениях, о предикатах и о том, что они имеют место, и т. п. Этот способ выражаться здесь оказывается пригодным потому, что в настоящем рассмотрении нам важно с помощью наших нумераций перевести в арифметический формализм *содержательно устанавливаемые метаматематические отношения*.

в) Арифметизация понятия формулы. После проведенных приготовлений мы возьмем какое-нибудь метаматематическое понятие, и, пользуясь им как примером, продемонстрируем наш способ перевода на язык рекурсивной арифметики. Остановимся на понятии формулы исчисления высказываний. Этому понятию соответствует свойство числа быть (на основании нашей нумерации) номером некоторой формулы исчисления высказываний. Этот числовой предикат «число n является (в соответствии с нашей нумерацией) номером некоторой формулы исчисления высказываний» вне зависимости от способа нумерации мы можем определить следующим образом: «число n является либо номером какой-либо формульной переменной без аргументов, либо номером отрицания какой-либо формулы исчисления высказываний, либо номером конъюнкции или дизъюнкции, или импликации, или эквивалентности каких-либо двух формул исчисления высказываний».

Правда, сказанное еще не дает нам явного определения, так как определяемое понятие номера формулы исчисления высказываний входит в определяющее выражение. Но при этом мы все-таки получаем некоторое рекурсивное определение. Действительно, арифметический перевод сформулированного определения выглядит следующим образом:

«Число n является номером формулы исчисления высказываний, если оно либо имеет вид $10 \cdot p$, где p — простое число, большее 5, либо имеет вид $3 \cdot k$, где k — отличное от 0 число, являющееся номером некоторой формулы исчисления высказываний, либо имеет вид $l \cdot 7^a \cdot 11^b$, где l — одно из чисел 40, 80 и 160, а a и b являются номерами некоторых формул исчисления высказываний».

Если определяемый нами числовой предикат обозначить через $\Phi(n)$, то это определение можно будет изобразить следующей эквивалентностью:

$$\begin{aligned}\Phi(n) \sim (10 \mid n \,\&\, \mathrm{Pr}(\pi(n,\ 10)) \,\&\, \lambda(n) \geqslant 3) \vee \\ (3 \mid n \,\&\, \Phi(\pi(n,\ 3)) \,\&\, n \neq 0) \vee \\ (\nu(n,\ 0) > 1 \,\&\, \nu(n,\ 0) \leqslant 5 \,\&\, \nu(n,\ 1) = 0 \,\&\, \\ \nu(n,\ 2) = 1 \,\&\, \Phi(\nu(n,\ 3)) \,\&\, \Phi(\nu(n,\ 4)) \,\&\, \lambda(n) = 4).\end{aligned}$$

[1]) См. т. I, с. 400.

Эту эквивалентность можно легко превратить в рекурсию пробега для некоторой функции $\mathfrak{f}(n)$, с помощью которой предикат $\Phi(n)$ изобразится в виде

$$\mathfrak{f}(n) = 0.$$

Действительно, сначала из этой эквивалентности получится (дедуктивно или содержательно) $\neg\Phi(0)$, а тем самым и

$$\Phi(0) \sim 1 = 0.$$

Следовательно, мы можем положить

$$\mathfrak{f}(0) = 1.$$

Если теперь мы добавим к указанной эквивалентности в качестве посылки формулу $n \neq 0$ и опустим во втором дизъюнктивном члене ее правой части условие $n \neq 0$, заменим каждое выражение $\Phi(a)$ равенством $\mathfrak{f}(a) = 0$ и затем переведем всю стоящую в правой части эквивалентности формулу в формулу вида $t = 0$, то в результате получится следующая формула:

$$\begin{aligned}n \neq 0 \to \{\mathfrak{f}(n) = 0 \sim [\rho(n,\ 10) + (\pi(n,\ 10) \dot{-} \wp_{\lambda(\pi(n,\ 10))}) + (3 \dot{-} \lambda(n))] \cdot \\ [\rho(n,\ 3) + \mathfrak{f}(\pi(n,\ 3))] \cdot [(2 \dot{-} \nu(n,\ 0)) + (\nu(n,\ 0) \dot{-} 5) + \\ \nu(n,\ 1) + (\nu(n,\ 2) \dot{-} 1) + (1 \dot{-} \nu(n,\ 2)) + \mathfrak{f}(\nu(n,\ 3)) + \\ \mathfrak{f}(\nu(n,\ 4)) + (\lambda(n) \dot{-} 4) + (4 \dot{-} \lambda(n))] = 0\}.\end{aligned}$$

После этого предикат $\Phi(n)$ можно выразить в виде $\varphi(n) = 0$ с помощью функции $\varphi(n)$, определяемой следующей рекурсией:

$$\varphi(0) = 1,$$

$$\begin{aligned}n \neq 0 \to \varphi(n) = [\rho(n,\ 10) + (\pi(n,\ 10) \dot{-} \wp_{\lambda(\pi(n,\ 10))}) + \\ (3 \dot{-} \lambda(n))] \cdot [\rho(n,\ 3) + \varphi(\pi(n,\ 3))] \cdot [(2 \dot{-} \nu(n,\ 0)) + \\ (\nu(n,\ 0) \dot{-} 5) + \nu(n,\ 1) + (\nu(n,\ 2) \dot{-} 1) + (1 \dot{-} \nu(n,\ 2)) + \\ \varphi(\nu(n,\ 3)) + \varphi(\nu(n,\ 4)) + (\lambda(n) \dot{-} 4) + (4 \dot{-} \lambda(n))].\end{aligned}$$

Но эти две формулы представляют собой рекурсию пробега. Действительно, вторая из них имеет вид

$$n \neq 0 \to \varphi(n) = \mathfrak{b}(n,\ \varphi(\pi(n,\ 3)),\ \varphi(\nu(n,\ 3)),\ \varphi(\nu(n,\ 4))),$$

где $\mathfrak{b}(n,\ a,\ b,\ c)$, $\pi(n,\ 3)$, $\nu(n,\ 3)$ и $\nu(n,\ 4)$ суть рекурсивные функции и для $n \neq 0$ выполняются неравенства

$$\pi(n,\ 3) < n,\ \nu(n,\ 3) < n \text{ и } \nu(n,\ 4) < n.$$

Таким образом, для понятия формула исчисления высказываний арифметическая формализация (на основе нашей нумерации) может быть произведена с помощью некоторого рекур-

сивного определения. Используемый здесь вид рекурсии — рекурсия пробега — не является самым общим из числа тех, с которыми нам придется иметь дело при арифметизации метаматематических понятий. Однако и все те более общие типы рекурсий, которые здесь будут встречаться, аналогично рекурсии пробега могут быть сведены к примитивной рекурсии.

В качестве примера, иллюстрирующего эту мысль, мы разберем арифметизацию понятия терм, причем это понятие мы определим для того формализма, для которого была введена наша нумерация, т. е. для исчисления предикатов с добавлением цифр и функциональных знаков.

Выражение этого формализма является термом, если оно либо является свободной индивидной переменной или цифрой, либо представляет собой функциональный знак с термами в качестве аргументов.

Замечание. Под выражением формализма здесь понимается такая построенная из символов и переменных формализма фигура, которая является либо формулой, либо такой составной частью формулы, у которой каждый знак, снабженный местами для аргументов, содержит соответствующие аргументы, а каждый логический символ содержится вместе с областью или с областями, на которые простирается его действие. В соответствии со сказанным выражение рассматриваемого нами формализма либо является термом или формулой, либо получается из терма или из формулы в результате замены некоторых свободных переменных связанными.

Поэтому на основе произведенной нами нумерации получается, что число является номером какого-либо терма тогда и только тогда, когда оно является либо умноженным на 2 простым числом, бо́льшим 5; либо умноженной на 2 степенью числа 3; ли о умноженным на 5 произведением степеней простых чисел, бо́льших или равных 7, причем показатели этих степеней суть номера каких-либо термов. Если перевести эту содержательную формулировку в формализм рекурсивной арифметики, то для предиката «число n является номером некоторого терма», который мы будем обозначать символом $\mathrm{Tm}(n)$, получится следующая эквивалентность:

$$\mathrm{Tm}(n) \sim (2 \mid n \,\&\, \mathrm{Pr}(\pi(n,\ 2)) \,\&\, \lambda(n) \geqslant 3) \vee$$
$$(\nu(n,\ 0) = 1 \,\&\, \lambda(n) \leqslant 1) \vee$$
$$(\nu(n,\ 0) = 0 \,\&\, \nu(n,\ 1) = 0 \,\&\, \nu(n,\ 2) = 1 \,\&\, \lambda(n) \geqslant 3 \,\&$$
$$\forall x\,(x < n \to \nu(n,\ x) = 0 \vee x = 2 \vee \mathrm{Tm}(\nu(n,\ x)))).$$

[В качестве посылки импликации, стоящей в области действия квантора $\forall x$, вместо $x < n$ можно было бы взять $x \leqslant \lambda(n)$.]

На основании этой эквивалентности, предикат $\mathrm{Tm}(n)$ может быть изображен в виде $\mathfrak{t}(n) = 0$ с помощью функции $\mathfrak{t}(n)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\mathfrak{t}(0) = 1,$$
$$n \neq 0 \to \mathfrak{t}(n) =$$
$$(\rho(n,\ 2) + (\pi(n,\ 2) \dot{-} \wp_{\lambda(\pi(n,\ 2))}) + (3 \dot{-} \lambda(n))) \cdot$$
$$((\nu(n,\ 0) \dot{-} 1) + (1 \dot{-} \nu(n,\ 0)) + (\lambda(n) \dot{-} 1)) \cdot$$
$$((\nu(n,\ 0) + \nu(n,\ 1) + (\nu(n,\ 2) \dot{-} 1) + (1 \dot{-} \nu(n,\ 2)) + (3 \dot{-} \lambda(n)) +$$
$$+ \sum_{x<n} \{\nu(n,\ x) \cdot ((x \dot{-} 2) + (2 \dot{-} x)) \cdot \mathfrak{t}(\nu(n,\ x))\}).$$

Эти условия дают нам для $\mathfrak{t}(n)$ рекурсивное определение некоторого специального типа, а именно рекурсию вида

$$\mathfrak{t}(0) = 1,$$
$$n \neq 0 \to \mathfrak{t}(n) = \mathfrak{a}(n) \cdot (\mathfrak{b}(n) + \sum_{x<n} \mathfrak{c}(n,\ x) \cdot \mathfrak{t}(\nu(n,\ x))),$$

где $\mathfrak{a}(n)$, $\mathfrak{b}(n)$ и $\mathfrak{c}(n,\ a)$ — рекурсивные термы. И хотя эта рекурсия не является ни примитивной рекурсией, ни рекурсией пробега, ее можно (тем же самым приемом, что и рекурсию пробега) свести к примитивной рекурсии. Действительно, из формул, описывающих $\mathfrak{t}(n)$, получается следующая рекурсия:

$$\mathfrak{h}(0) = 2,$$
$$\mathfrak{h}(n') = \mathfrak{h}(n) \cdot \wp_{n'}^{\mathfrak{v}(n') \cdot (\mathfrak{b}(n') + \sum\limits_{x<n'} \mathfrak{c}(n',\ x) \cdot \nu(\mathfrak{h}(n),\ \nu(n,\ x)))}$$

для функции

$$\mathfrak{h}(n) = \prod_{x \leqslant n} \wp_x^{\mathfrak{t}(x)}.$$

[При этом используется, то что при $x < n'$ имеет место равенство $\mathfrak{t}(\nu(n',\ x)) = \nu(\mathfrak{h}(n),\ \nu(n',\ x))$, так как $\nu(n',\ x) \leqslant n$ и при $\mathfrak{f} \leqslant n$ имеет место равенство $\mathfrak{t}(\mathfrak{f}) = \nu(\mathfrak{h}(n),\ \mathfrak{f})$.]

Эта рекурсия, описывающая $\mathfrak{h}(n)$, является примитивной, так как функция

$$\sum_{x<n'} \mathfrak{c}(n',\ x) \cdot \nu(c,\ \nu(n',\ x))$$

рекурсивна.

Но $\mathfrak{t}(n)$ определяется по $\mathfrak{h}(n)$ равенством $\mathfrak{t}(n) = \nu(\mathfrak{h}(n),\ n)$. Тем самым предикат «число n является (в нашей нумерации) номером некоторого терма» получает чисто рекурсивное определение.

Совершенно аналогично предикату «число n является номером некоторого терма» может быть определен и предикат «число n является номером некоторого *квазитерма*», причем под квазитермом здесь понимается такое выражение, которое либо является термом, либо получается из какого-либо терма заменой одной или нескольких свободных индивидных переменных связанными. Поправка в определении по сравнению с определением предиката $\mathrm{Tm}(n)$ будет состоять лишь в том, что в определяемой эквивалентности добавится еще один дизъюнктивный член, который будет выражать возможность того, что n является номером какой-либо связанной переменной, т. е. например, дизъюнктивный член $\mathrm{Pr}(n) \,\&\, n \geqslant 7$. В рекурсивном определении изображающего терма этому добавлению будет соответствовать появление в выражении $\mathfrak{a}(n)$ соответствующего множителя, причем в качестве этого множителя можно будет взять выражение $(n \dot{-} \wp_{\lambda(n)}) + (7 \dot{-} n)$.

На этих двух примерах мы исчерпывающим образом изложили метод перевода финитных метаматематических понятий на язык формальных рекурсивных определений. Поэтому при разборе дальнейших переводов метаматематических понятий в формализм рекурсивной арифметики мы, как правило, будем довольствоваться указанием эскиза определения, доведенного до стадии содержательной арифметической формулировки.

Рассмотрение этих двух примеров пока еще не показывает, как далеко можно пойти в рекурсивно-арифметическом переводе метаматематических понятий. В дальнейшем мы убедимся, что для рассматриваемого нами формализма исчисления предикатов с добавлением цифр и функциональных знаков общее понятие формулы и общее понятие формального доказательства (вывода) в нашей нумерации также получают рекурсивные определения.

Для этого в качестве вспомогательного средства мы введем арифметическую функцию двух аргументов $\mathrm{st}(m, k)$, значением которой в том случае, когда k есть простое число и $k \geqslant 7$, а m есть номер какого-либо выражения $\mathfrak{A}$ рассматриваемого формализма, является номер выражения (не обязательно принадлежащего нашему формализму), которое получается из $\mathfrak{A}$ в результате замены переменной с номером k всюду — за исключением тех мест, где она является составной частью какого-либо кванторного комплекса, — цифрой 0; так что, в частности, если переменная с номером k не входит в $\mathfrak{A}$, то значение функции $\mathrm{st}(m, k)$ будет равно m.

Функцию $\mathrm{st}(m, k)$ мы определим с помощью следующего разбора случаев:

«Если $m \geqslant k$ и k есть простое число $\geqslant 7$, то $\mathrm{st}(m, k) = 2$; если $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot n$, причем $c > 0$ и n не делится ни на одно

из чисел 2, 3 и 5, то $\mathrm{st}(m, k) = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \prod_{x<m} \wp_x^{\mathrm{st}(\mathrm{v}(n, x), k)}$; если ни один из перечисленных двух случаев не имеет места, то $\mathrm{st}(m, k) = m$».

Если положить

$$\mathrm{t}_1(m, k) = (m \dot{-} k) + (k \dot{-} m) + (k \dot{-} \wp_{\lambda(k)}) + (3 \dot{-} \lambda(k)),$$
$$\mathrm{t}_2(m, k) = \rho(m, 5) + \overline{\mathrm{sgn}}\, m,$$

то условия, характеризующие эти три случая, изобразятся в виде $\mathrm{t}_1(m, k) = 0$, $\mathrm{t}_2(m, k) = 0$ и $\mathrm{t}_1(m, k) \cdot \mathrm{t}_2(m, k) \neq 0$. После этого для функции $\mathrm{st}(m, k)$ получается следующее представление:

$$\mathrm{st}(m, k) = 2 \cdot \overline{\mathrm{sgn}}\, \mathrm{t}_1(m, k) + \overline{\mathrm{sgn}}\, \mathrm{t}_2(m, k) \cdot \prod_{x<m} \wp_x^{\mathrm{v}(m, x) \cdot \mathrm{sgn}(3 \dot{-} x) + \mathrm{st}(\mathrm{v}(m, x), k) \cdot \overline{\mathrm{sgn}}(3 \dot{-} x)} + m \cdot \mathrm{sgn}(\mathrm{t}_1(m, k) \cdot \mathrm{t}_2(m, k)),$$

которое показывает, что функция $\mathrm{st}(m, k)$ является рекурсивной. Из определения $\mathrm{st}(m, k)$ мы также получаем, что для любых m и k имеет место неравенство $\mathrm{st}(m, k) \leqslant m$.

Теперь мы имеем в своем распоряжении все необходимые вспомогательные средства для того, чтобы с помощью нашей нумерации дать рекурсивно-арифметическое определение понятия формулы.

Любая формула нашего формализма либо является формульной переменной без аргументов или формульной переменной с одним или несколькими термами в качестве аргументов, либо является отрицанием некоторой другой формулы или конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией или эквивалентностью двух других формул, либо же она имеет один из видов $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x}$ — связанная переменная, а $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ — выражение, которое содержит переменную $\mathfrak{x}$, но не содержит кванторов, относящихся к переменной $\mathfrak{x}$, и которое при замене $\mathfrak{x}$ цифрой 0 переходит в некоторую формулу.

Это последнее условие, налагаемое на $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, равносильно тому что данное выражение при замене в нем $\mathfrak{x}$ цифрой 0, если эта замена производится на всех местах, за исключением кванторных комплексов $\forall \mathfrak{x}$ или $\exists \mathfrak{x}$, переходит в некоторую отличную от него формулу.

Затем мы вводим следующее арифметическое определение: «число m является номером некоторой формулы (нашего формализма) тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев: m получается умножением на 10 некоторого простого числа, большего или равного 7, или умножением на 10 некоторого произведения степеней простых чисел, бо́льших или равных 7, каждый из показателей которых является номером

некоторого терма, либо m получается умножением на 3 некоторого отличного от 0 числа, являющегося номером некоторой формулы, или умножением на 20, или на 40, или на 80, или на 160 некоторого числа вида $7^a \cdot 11^b$, где a и b суть номера некоторых формул, или m получается умножением на 50 или на 100 некоторой степени p^a, где p — простое число, большее или равное 7, $\mathrm{st}(a, p) \neq a$ и $\mathrm{st}(a, p)$ является номером некоторой формулы».

Так как для любого простого p выполняются неравенства $\mathrm{st}(a, p) \leqslant a < p^a$, то это определение дает рекурсию пробега для некоторой функции $\mathfrak{f}(n)$, с помощью которой предикат «число m является номером некоторой формулы» может быть изображен в виде $\mathfrak{f}(m) = 0$.

Если у дизъюнкции, с помощью которой мы определили этот предикат, отбросить все члены, за исключением первых двух, то полученная новая дизъюнкция даст определение для предиката «число m является номером *элементарной формулы*»; если же мы отбросим у этой дизъюнкции только последний ее член, то придем к определению понятия «число m является номером *формулы без связанных переменных*, т. е. *бескванторной формулы*». Таким образом, оба эти понятия тоже могут быть определены с помощью примитивной рекурсии.

г) Арифметизация распределений истинностных значений. Теперь, прежде чем перейти к арифметизации понятия *вывода*, мы рассмотрим вопрос о том, как с помощью арифметического перевода может быть оформлена процедура вычисления тех истинностных значений бескванторных формул, которые получаются в результате произвольного приписывания каждой элементарной формуле одного из значений «истина» или «ложь» и истолкования связок исчисления высказываний как истинностных функций.

Возможные распределения истинностных значений по элементарным формулам бескванторной формулы нам пришлось арифметизировать[1]) уже при доказательстве гёделевской теоремы о полноте. Мы установили, что если $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ — элементарные подформулы рассматриваемой формулы, упорядоченные по их первому появлению, то распределение истинностных значений по этим формулам удобно изображать посредством числа

$$2^{r-1} \cdot \mathfrak{m}_1 + 2^{r-2} \cdot \mathfrak{m}_2 + \ldots + 2 \cdot \mathfrak{m}_{r-1} + \mathfrak{m}_r,$$

где $\mathfrak{m}_i$ (при $i = 1, \ldots, r$) равно 0 или 1 в зависимости от того, какое значение принимает формула $\mathfrak{B}_i$ — «истина» или «ложь».

Для проводившегося там рассуждения такое представление было особенно удобно тем, что при этом величина числа, представляющего распределение истинностных значений, зависит в первую очередь от значения $\mathfrak{m}_1$, затем от значения $\mathfrak{m}_2$ и т. д.

[1]) См. с. 239 и далее.

Но будет еще проще, если при тех же самых значениях $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ в качестве числа, представляющего распределение истинностных значений, мы возьмем

$$\mathfrak{m}_1 + 2 \cdot \mathfrak{m}_2 + 4 \cdot \mathfrak{m}_3 + \ldots + 2^{r-1} \cdot \mathfrak{m}_r.$$

Если это число обозначить буквой $\mathfrak{m}$, то для $i = 1, \ldots, r$ будет выполняться равенство

$$\mathfrak{m}_i = \rho(\pi(\mathfrak{m}, 2^{i-1}), 2).$$

Согласно этим последним формулам, при замене числа $\mathfrak{m}$ другим, отличающимся от него на некоторое кратное числа 2^r, для $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ получатся те же самые значения. Функцию $\rho(\pi(m, 2^k), 2)$ мы будем обозначать через $\gamma(m, k)$. Значение $\gamma(m, k)$ представляет собой ту цифру (0 или 1), которая в двоичном разложении числа $\mathfrak{m}$ стоит на $(k+1)$-м [считая справа налево] месте.

Для арифметизации внесения истинностных значений в эти формулы мы добавим к нашему формализму новый символ V, который будем считать *несобственной элементарной формулой*. Мы припишем этому символу в качестве номера число 10. Каждая формула в прежнем смысле (в том числе и элементарная) будет называться *собственной формулой* или соответственно *собственной элементарной формулой*. Обобщение арифметических определений понятий элементарная формула, а также формула на случай добавления символа V производится простым добавлением к дизъюнкции, определяющей предикат «число m является формулой» или соответственно «число m является элементарной формулой», члена $m = 10$. Символом V мы будем изображать значение «истина», а его отрицанием $\neg V$ — значение «ложь».

А теперь мы возьмем некоторую бескванторную формулу и представленное двоичным разложением числа n распределение истинностных значений по ее собственным подформулам. Внесение этого распределения в рассматриваемую формулу может быть произведено следующим образом: сначала первая входящая в рассматриваемую формулу элементарная подформула всюду, где она встречается, заменяется либо символом V, либо его отрицанием $\neg V$ в зависимости от того, какое значение, 0 или 1, принимает $\gamma(n, 0)$; затем в полученной таким образом формуле первая встречающаяся в ней элементарная подформула всюду, где она встречается, заменяется либо символом V, либо его отрицанием $\neg V$ в зависимости от того, какое значение, 0 или 1, принимает $\gamma(n, 1)$, и т. д.; этот процесс повторяется столько раз, сколько различных элементарных формул входит в заданную формулу, так что в конце концов мы приходим к формуле, построенной из одного только сим-

вола V с помощью связок исчисления высказываний. А истинностное значение этой формулы вычисляется в соответствии с нашим пониманием связок исчисления высказываний как истинностных функций. Для того чтобы с помощью нашей нумерации изобразить в рамках рекурсивной арифметики эту процедуру внесения истинностных значений, а также и последующее вычисление результирующего значения, введем некоторые вспомогательные понятия.

Во-первых, мы определим предикат «число m является номером бескванторной формулы, содержащей некоторую собственную элементарную формулу». Определение этого предиката, который мы обозначим посредством $\Phi_1(m)$, может быть дано следующей альтернативной:

«Либо m является номером некоторой собственной элементарной формулы[1]), либо $m = 3 \cdot n$, где n — отличное от 0 число такое, что имеет место $\Phi_1(n)$, либо $m = 20 \cdot q \cdot 7^a \cdot 11^b$, где q является делителем числа 8, числа a и b являются номерами некоторых бескванторных формул и имеет место по крайней мере одно из высказываний $\Phi_1(a)$ и $\Phi_1(b)$».

Затем мы определим функцию $\varphi_1(m)$, устроенную таким образом, что номеру любой бескванторной формулы, содержащей какую-либо собственную элементарную формулу, она сопоставляет номер первой входящей в нее элементарной формулы, а любому другому числу — значение 0.

Неформальное определение функции $\varphi_1(m)$ выглядит следующим образом:

«Если $\Phi_1(m)$ не имеет места, то $\varphi_1(m) = 0$;

если m является номером какой-либо собственной элементарной формулы, то $\varphi_1(m) = m$;

если $\Phi_1(m)$ имеет место и $m = 3 \cdot n$, где n отлично от нуля, то $\varphi_1(m) = \varphi_1(n)$;

если $\Phi_1(m)$ имеет место и $m = k \cdot 7^a \cdot 11^b$, где k — одно из чисел 20, 40, 80 или 160, то в том случае, когда $\Phi_1(a)$ имеет место, $\varphi_1(m) = \varphi_1(a)$; в противном случае $\varphi_1(m) = \varphi_1(b)$».

Далее мы определим функцию $\varphi_2(m, k, l)$, значением которой в случае, когда m является номером некоторой бескванторной формулы $\mathfrak{F}$, k является номером какой-либо входящей в $\mathfrak{F}$ собственной элементарной формулы $\mathfrak{P}$, а l — номером какого-либо выражения $\mathfrak{A}$, будем считать номер того выражения, которое получается из этой формулы $\mathfrak{F}$ заменой элементарной формулы $\mathfrak{P}$ всюду, где она встречается, выражением $\mathfrak{A}$, а в том случае, когда k не является номером никакой элементарной формулы (и, значит, в частности, при $k = 0$), а также если k является номером элементарной формулы, не входящей в формулу $\mathfrak{F}$ с номером m, то положим по определению $\varphi_2(m, k, l) = m$.

[1]) Рекурсивную представимость этого предиката мы отметили выше; см. с. 282, где об «элементарных формулах» говорилось как о «собственных элементарных формулах».

Рекурсивное определение функции $\varphi_2(m, k, l)$ может быть дано следующим образом:

«если $m = k$ и k является номером какой-либо собственной элементарной формулы, то $\varphi_2(m, k, l) = l$;

при $n \neq 0$

$$\varphi_2(30 \cdot n, k, l) = 3 \cdot \varphi_2(10 \cdot n, k, l),$$

для $q = 1, 2, 4$ и 8

$$\varphi_2(q \cdot 20 \cdot 7^a \cdot 11^b, k, l) = q \cdot 20 \cdot 7^{\varphi_2(a, k, l)} \cdot 11^{\varphi_2(b, k, l)};$$

для любых m, k, l, не подпадающих ни под один из перечисленных выше случаев,

$$\varphi_2(m, k, l) = m».$$

С помощью $\varphi_1(m)$ и $\varphi_2(m, k, l)$ мы получаем функцию

$$\varphi_2(m, \varphi_1(m), l),$$

которая в дальнейшем будет обозначаться через $\varphi_3(m, l)$. В том случае, когда m является номером бескванторной формулы $\mathfrak{F}$, содержащей какую-либо элементарную формулу, а l — номером какого-либо выражения $\mathfrak{A}$, значение $\varphi_3(m, l)$ представляет собой номер того выражения, которое получается из $\mathfrak{F}$ заменой первой входящей в $\mathfrak{F}$ собственной элементарной формулы (всюду, где она входит в $\mathfrak{F}$) выражением $\mathfrak{A}$, а в том случае, когда m является номером формулы, не содержащей собственных элементарных формул, оно равняется m. [Действительно, сказанное вытекает из того, что если $\Phi_1(m)$ не имеет места, то $\varphi_1(m) = 0$, и из равенства $\varphi_2(m, 0, l) = m$.]

А теперь процедура последовательного внесения истинностных значений, распределенных по элементарным формулам какой-либо собственной бескванторной формулы $\mathfrak{F}$ с номером m — если это распределение характеризуется числом n — может быть представлена следующим образом. Сначала разыскивается первая входящая в $\mathfrak{F}$ элементарная формула; она является собственной элементарной формулой и имеет номер $\varphi_1(m)$. Затем эта формула всюду, где она встречается в $\mathfrak{F}$, заменяется на V или на $\neg V$ в зависимости от того, равно $\gamma(n, 0)$ нулю или единице, т. е. она заменяется формулой с номером $10 + 20 \cdot \gamma(n, 0)$. В результате этой замены мы получаем формулу с номером $\varphi_2(m, \varphi_1(m), 10 + 20 \cdot \gamma(n, 0))$, т. е. с номером $\varphi_3(m, 10 + 20 \cdot \gamma(n, 0))$. Обозначим эту формулу посредством $\mathfrak{F}_1$, и пусть m_1 — ее номер. Если формула $\mathfrak{F}_1$ содержит еще какие-нибудь собственные элементарные формулы, то мы снова разыскиваем первую из них; ее номером будет число $\varphi_1(m_1)$. Мы заменим эту формулу всюду, где

она входит в $\mathfrak{F}_1$, формулой с номером $10+20\cdot\gamma(n, 1)$, и в результате этого из формулы $\mathfrak{F}_1$ получится формула с номером $\varphi_3(m_1, 10+20\cdot\gamma(n, 1))$. Если же формула $\mathfrak{F}_1$ не содержит собственных элементарных формул, то она дальше не изменяется и тогда $m_1=\varphi_3(m_1, 10+20\cdot\gamma(n, 1))$. Пусть в любом из этих случаев $\mathfrak{F}_2$ обозначает формулу с номером $\varphi_3(m_1, 10+20\cdot\gamma(n, 1))$. С этой формулой мы поступим совершенно так же, как перед этим поступали с $\mathfrak{F}_1$, с тем лишь различием, что теперь вместо числа $\gamma(n, 1)$ мы возьмем число $\gamma(n, 2)$. Будем продолжать этот процесс и далее. Не позже чем через m шагов мы получим формулу, которая больше уже не будет содержать собственных элементарных формул; в самом деле, число отличных друг от друга элементарных формул, входящих в формулу $\mathfrak{F}$ с номером m, во всяком случае меньше m, а в результате каждого шага замены одна из этих формул исключается.

Если мы теперь обозначим посредством $\varphi_4(m, n, k)$ номер формулы, получающейся после k-го шага процесса, начинающегося бескванторной формулой с номером m, то процедура последовательного внесения истинностных значений изобразится следующей примитивной рекурсией:

$$\varphi_4(m, n, 0)=m,$$
$$\varphi_4(m, n, k')=\varphi_3(\varphi_4(m, n, k), 10+20\cdot\gamma(n, k)).$$

Указанная интерпретация функции $\varphi_4(m, n, k)$ будет годиться для любого числа m, являющегося номером какой-либо бескванторной формулы $\mathfrak{F}$. Для формулы такого рода функция $\varphi_4(m, n, m)$ изображает номер той построенной из символа V и связок исчисления высказываний формулы, которая получается из $\mathfrak{F}$ внесением характеризуемого числом n распределения истинностных значений по собственным элементарным подформулам, входящим в формулу $\mathfrak{F}$.

А теперь мы определим функцию $\varphi_5(m)$, которая в том случае, когда m является номером формулы, построенной из символа V с помощью связок исчисления высказываний, принимает значение 0 или 1 в зависимости от того, чему равно (V или $\neg V$) истинностное значение этой формулы, получающееся в результате естественного истолкования связок исчисления высказываний как истинностных функций.

Определение функции $\varphi_5(m)$ может быть дано следующим образом:

$$\varphi_5(10)=0.$$

При $n\neq 0$

$$\varphi_5(3\cdot n)=\begin{cases}1, & \text{если } \varphi_5(n)=0,\\ 0, & \text{если } \varphi_5(n)=1,\\ 2, & \text{если } \varphi_5(n)\neq 0, 1.\end{cases}$$

Если каждое из чисел $\varphi_5(a)$, $\varphi_5(b)$ равно 0 или 1, то

$$\varphi_5(20\cdot 7^a\cdot 11^b)=\operatorname{sgn}(\varphi_5(a)+\varphi_5(b)),$$
$$\varphi_5(40\cdot 7^a\cdot 11^b)=\varphi_5(a)\cdot\varphi_5(b),$$
$$\varphi_5(80\cdot 7^a\cdot 11^b)=\varphi_5(b)\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,\varphi_5(a),$$
$$\varphi_5(160\cdot 7^a\cdot 11^b)=\operatorname{sgn}(\varphi_5(b)\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,\varphi_5(a)+\varphi_5(a)\cdot\overline{\operatorname{sgn}}\,\varphi_5(b)).$$

Во всех остальных случаях $\varphi_5(m)=2$».

Теперь мы можем задать такой рекурсивный предикат, который для любого числа m, являющегося номером какой-либо бескванторной формулы, будет выполняться тогда и только тогда, когда эта формула является результатом какой-нибудь подстановки в некоторую тождественно истинную формулу исчисления высказываний.

Действительно, для любого m, обладающего указанным свойством, это условие равносильно тому, что для любого, описываемого каким-либо числом n распределения истинностных значений будет иметь место равенство

$$\varphi_5(\varphi_4(m, n, m))=0.$$

Если теперь еще заметить, что в формулу с номером m может входить разве лишь $m-1$ различных собственных элементарных формул и что любое распределение истинностных значений по этим элементарным формулам может быть охарактеризовано числом, меньшим 2^m, то легко убедиться, что рассматриваемый предикат допускает представление в виде

$$\sum_{n<2^m}\varphi_5(\varphi_4(m, n, m))=0.$$

Этот предикат, который очевидным образом рекурсивен, мы будем обозначать посредством $\Phi_2(m)$. Из этого определения немедленно получается и определение для понятия тождественно истинной формулы исчисления высказываний. Действительно, m является номером тождественно истинной формулы исчисления высказываний тогда и только тогда, когда m является номером некоторой формулы исчисления высказываний — что мы уже выразили рекурсивно — и когда, кроме того, имеет место $\Phi_2(m)$.

д) Арифметизация понятия вывода. Теперь мы обратимся к понятию вывода. Для того чтобы дать арифметическое определение этого понятия, нам прежде всего потребуется арифметизация правил подстановки и переименования связанных переменных.

Замечание. В основу дальнейших определений мы положим понятие формулы в его *узком* смысле, так что термин формула будет пониматься нами в том смысле, в каком выше говорилось о собственных формулах.

Арифметизацию подстановки вместо формульных переменных без аргументов и вместо свободных индивидных переменных можно без особого труда произвести с помощью некоторой рекурсивной функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$, значение которой в случае, когда m и l являются номерами некоторых выражений нашего формализма, а k — номером какой-либо свободной индивидной переменной или же формульной переменной без аргументов, представляет собой номер того (возможно уже не принадлежащего нашему формализму) выражения, которое получается из выражения с номером m в результате замены переменной с номером k всюду, где она встречается, выражением с номером l. Имея в виду также и арифметизацию переименования связанных переменных, мы определим функцию $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ так, чтобы в том случае, когда m является номером какого-либо выражения нашего формализма, а k и l — номерами связанных переменных, значение функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ представляло собой номер того выражения, которое получается из выражения с номером m в результате замены переменной с номером k всюду, где она встречается, переменной с номером l.

Функцию $\mathrm{st}_1(m, k, l)$, подобно функции $\mathrm{st}(m, k)$ [1], мы определим следующим образом:

«Если $m = k$ и $k = q \cdot p$, причем $q = 1$, или $q = 2$, или $q = 10$, а p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{st}_1(m, k, l) = l;$$

если $m = 2^a \cdot 5 \cdot n$, причем n не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5 и не является простым, то

$$\mathrm{st}_1(m, k, l) = 2^a \cdot 5 \cdot \prod_{x<m} p_x^{\mathrm{st}_1(\nu(n, x), k, l)};$$

если $m = q \cdot 50 \cdot q^a$, $q = 1$ или $q = 2$, а p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{st}_1(m, k, l) = q \cdot 50 \cdot (\mathrm{st}_1(p, k, l))^{\mathrm{st}_1(a, k, l)};$$

если $m = 3 \cdot n$, а $n \neq 0$ и делится на 10, то

$$\mathrm{st}_1(m, k, l) = 3 \cdot \mathrm{st}_1(n, k, l);$$

в остальных случаях

$$\mathrm{st}_1(m, k, l) = m».$$

Теперь с помощью функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ можно рекурсивно выразить отношение, связывающее две формулы, одна из которых получается из другой в результате *подстановки вместо свободной индивидной переменной* или соответственно *вместо формульной переменной без аргументов*. Именно, мы введем следующее определение: «Формула с номером n получается из другой, отличной от нее формулы с номером m в результате подстановки вместо свободной индивидной переменной тогда и только тогда, когда m и n являются номерами формул, $m \neq n$ и существуют число k, не превосходящее m и являющееся номером некоторой свободной индивидной переменной, и число l, не превосходящее n и являющееся номером некоторого терма, такие, что имеет место равенство $\mathrm{st}_1(m, k, l) = n$».

[1]) См. с. 280 и далее.

Совершенно аналогично выглядит определение предиката «формула с номером n получается из отличной от нее формулы с номером m в результате подстановки вместо формульной переменной без аргументов». Это определение отличается от предыдущего лишь тем, что в отношении $\mathrm{st}_1(m, k, l) = n$ число k в данном случае должно быть номером какой-нибудь формульной переменной без аргументов, а число l — номером какой-либо формулы.

Далее, с помощью функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ можно рекурсивно выразить условие, необходимое и достаточное для того, чтобы индивидная переменная с номером k входила в выражение с номером m. Действительно, это условие может быть изображено формулой

$$\mathrm{st}_1(m, k, 2) \neq m.$$

Тем не менее функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ еще недостаточно для того, чтобы непосредственно выразить то обстоятельство, что одна из двух данных формул получается из другой в результате *переименования некоторой связанной переменной*. Причина этого заключается в том, что переименование связанной переменной должно производится не всюду, где рассматриваемая связанная переменная встречается, а только в области действия соответствующего квантора.

Однако с помощью еще одного рекурсивного определения можно добиться, чтобы было учтено и это обстоятельство. Этого можно достичь с помощью функции $\sigma(a, b)$ и ее обращений $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$ [1]), если удастся сформулировать рекурсивное определение для некоторого предиката $\Psi_1(s)$, который для числа s такого, что $\sigma_1(s)$ и $\sigma_2(s)$ суть номера некоторых формул, выполняется тогда и только тогда, когда вторая из этих формул получается из первой в результате переименования какой-либо связанной переменной (производимого в области действия соответствующего квантора).

Определение предиката $\Psi_1(s)$ дается следующей альтернативой:

[1]) См. сноску 2 на с. 272.

«Либо $\sigma_1(s)$ является числом вида $50 \cdot q \cdot p^a$, $\sigma_2(s)$ является числом вида $50 \cdot q \cdot l^b$, где $q = 1$ или $q = 2$, $p \neq l$ — простые числа, бо́льшие или равные 7, и имеет место равенство

$$\mathrm{st}_1(\sigma_1(s),\ p,\ l) = \sigma_2(s);$$

либо

$$\sigma_1(s) = 3 \cdot m,\ \sigma_2(s) = 3 \cdot n,\ m,\ n \neq 0 \text{ и } \Psi_1(\sigma(m,\ n));$$

либо

$$\sigma_1(s) = 50 \cdot q \cdot p^a \text{ и } \sigma_2(s) = 50 \cdot q \cdot p^b,$$

где $q = 1$ или $q = 2$, p — простое число, большее или равное 7, и $\Psi_1(\sigma(a,\ b))$;

либо

$$\sigma_1(s) = 20 \cdot q \cdot 7^a \cdot 11^b \quad \text{и} \quad \sigma_2(s) = 20 \cdot q \cdot 7^c \cdot 11^d,$$

где q — делитель числа 8 и

$$a = c \,\&\, \Psi_1(\sigma(b,\ d)) \quad \text{или} \quad b = d \,\&\, \Psi_1(\sigma(a,\ c))».$$

Определенный таким образом предикат $\Psi_1(\sigma(m,\ n))$ для чисел m и n, являющихся номерами некоторых двух формул, изображает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вторая из этих формул получалась из первой в результате переименования некоторой связанной переменной.

Теперь необходимо еще построить рекурсивное выражение для того факта, что одна из двух заданных формул получается из другой в результате некоторой *подстановки вместо формульной переменной с аргументами*.

Сначала напомним, что для выполнения такой подстановки мы должны взять какую-либо именную форму [1]) той формульной переменной, вместо которой будет производиться подстановка. Все свободные индивидные переменные, являющиеся аргументами этой именной формы, отличны друг от друга; кроме того, иногда бывает нужно, чтобы они отличались еще и от некоторых индивидных переменных той формулы, в которую производится подстановка. Например, если мы хотим из формулы

$$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

получить подстановкой формулу

$$a = b \to (a = a \to b = a),$$

то в качестве именной формы мы не можем взять $A(a)$, так как при подстановке вместо $A(a)$ формулы $a = a$ получилась бы

[1]) См. Приложение 1, с. 460.

не требующаяся нам формула, а формула

$$a = b \to (a = a \to b = b).$$

Таким образом, в этом случае в качестве аргументной переменной нужно взять какую-нибудь индивидную переменную, отличную от a. Такого рода требованиям мы удовлетворим с запасом, если в качестве аргументных переменных именной формы будем брать такие, которые вообще не входят в формулу $\mathfrak{F}$, в которую производится подстановка. Если m — номер этой формулы, то в любом случае в нее не входят переменные, имеющие номера $2 \cdot \wp_k$, где $k \geqslant m$. С другой стороны, число аргументов у формульной переменной, вместо которой будет производиться подстановка, всегда меньше m, так как эта переменная входит в формулу с номером m. Таким образом, в качестве переменных именной формы можно брать переменные с номерами из списка

$$2\wp_m,\ 2\wp_{m+1},\ \ldots,\ 2\wp_{2(m-1)}.$$

Теперь подстановка производится следующим образом. Сначала указывается формула, которая будет подставляться вместо именной формы; эта формула — мы будем кратко называть ее заменителем — должна содержать аргументы именной формы. Затем отыскиваются все вхождения в формулу $\mathfrak{F}$ таких выражений, которые либо совпадают с именной формой, либо отличаются от нее тем, что вместо некоторых из аргументов именной формы или вместо каждого из них в качестве аргументов стоят другие квазитермы; выражения такого рода мы будем кратко называть вариантами этой именной формы. Вместо каждого варианта $\mathfrak{U}$ рассматриваемой именной формы подставляется выражение, которое получается из заменителя в результате тех же самых замен аргументных переменных именной формы, в результате которых из именной формы получается $\mathfrak{U}$.

А теперь это описание операции подстановки необходимо перевести, пользуясь нашей нумерацией, на язык арифметики.

Сначала мы должны будем дать арифметические определения понятиям именная форма, заменитель и вариант, что без особого труда может быть сделано на основе следующих утверждений:

«Число k является номером какой-либо именной формы тогда и только тогда, когда $k = 10 \cdot n$, где n — число, большее 1 и не делящееся ни на одно из чисел 2, 3 и 5 и такое, что каждое из отличных от 0 чисел $\nu(n,\ x)$ $(x < k)$ имеет вид $2 \cdot p$, где p — простое число, не меньшее 7, и что для $x < y < k$ либо $\nu(n,\ x) \neq \nu(n,\ y)$, либо числа $\nu(n,\ x)$ и $\nu(n,\ y)$ оба равны 0».

«Число l является номером некоторого заменителя именной формы с номером k тогда и только тогда, когда k является номером некоторой именной формы, l является номером некоторой

формулы и когда для всех чисел x таких, что $3 \leqslant x < k$ и $\nu(k, x) \neq 0$, свободные переменные с номерами $\nu(k, x)$ входят в формулу с номером l» [1]).

Пусть $\psi_1(m)$ обозначает рекурсивную функцию

$$\prod_{x<n} \wp_x^{\operatorname{sgn} \nu(n, x)}.$$

Тогда «число t является номером некоторого варианта именной формы с номером k тогда и только тогда, когда k является номером некоторой именной формы, $\psi_1(t) = \psi_1(k)$, $\nu(t, 0) = 1$, $\nu(t, 2) = 1$ и когда для каждого числа x такого, что $3 \leqslant x < t$, число $\nu(t, x)$ либо равно 0, либо является номером некоторого квазитерма».

Теперь мы определим функцию $\mathrm{st}_2(m, k, t)$, значение которой, когда m является номером некоторого выражения $\mathfrak{A}$ рассматриваемого нами формализма, k является номером некоторой именной формы, а t — номером некоторого варианта $\mathfrak{T}$ этой именной формы, равняется номеру того выражения, которое получается из $\mathfrak{A}$ в результате замены каждой входящей в $\mathfrak{A}$ аргументной переменной данной именной формы всюду, где она входит в $\mathfrak{A}$, тем квазитермом, который стоит в $\mathfrak{T}$ вместо этой аргументной переменной данной именной формы.

Определение функции $\mathrm{st}_2(m, k, t)$ дается следующей альтернативой:

«Если $m = 2p$, где p — простое число, большее или равное 7, и если существует число x такое, что $3 \leqslant x < k$ и $\nu(k, x) = m$, то $\mathrm{st}_2(m, k, t) = \nu(t, x)$;

если $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot n$, $c > 0$, а n не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5, то

$$\mathrm{st}_2(m, k, t) = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \prod_{x<m} \wp_x^{\mathrm{st}_2(\nu(n, x), k, t)};$$

во всех остальных случаях $\mathrm{st}_2(m, k, t) = m$».

А теперь с помощью функции $\mathrm{st}_2(m, k, t)$ легко определить функцию $\mathrm{st}_3(m, k, l)$, значение которой в том случае, когда m является номером некоторой формулы $\mathfrak{F}$, k — номером некоторой именной формы $\mathfrak{B}$, l — номером некоторого заменителя $\mathfrak{S}$ для этой именной формы, равняется номеру той формулы, которая получается из $\mathfrak{F}$ в результате выполнения подстановки формулы $\mathfrak{S}$ вместо именной формы $\mathfrak{B}$. В самом деле, определение этой функции дается следующей альтернативой:

«Если k является номером некоторой именной формы, а m — номером некоторого варианта этой именной формы, то

$$\mathrm{st}_3(m, k, l) = \mathrm{st}_2(l, k, m);$$

[1]) Относительно представления последнего из этих условий см. с. 289.

если $m = 3 \cdot n$, n отлично от 0 и делится на 10, то

$$\mathrm{st}_3(m, k, l) = 3 \cdot \mathrm{st}_3(n, k, l);$$

если $m = 2^a \cdot 5^b \cdot n$, $a + b > 2$ и n не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5, то

$$\mathrm{st}_3(m, k, l) = 2^a \cdot 5^b \cdot \prod_{x<m} \wp_x^{\mathrm{st}_3(\nu(n, x), k, l)};$$

во всех остальных случаях $\mathrm{st}_3(m, k, l) = m$».

Итак, арифметическое определение подстановки вместо формульной переменной почти завершено; и все же, для того чтобы выразить тот факт, что формула с номером n получается из формулы с номером m в результате подстановки заменителя с номером l вместо именной формы с номером k, требуется (чтобы представление было рекурсивным) некоторая оценка для k и l через m и n. Действительно, нельзя быть уверенным, что k меньше m, так как наша именная форма может содержать переменные, которые не входят в формулу с номером m, и по той же самой причине нельзя быть уверенным, что l меньше n.

Мы воспользуемся здесь тем ранее отмеченным обстоятельством, что при подстановке в формулу с номером m аргументные переменные именной формы могут быть выбраны из числа переменных с номерами $2\wp_m$, $2\wp_{m+1}$, ..., $2\wp_{2(m-1)}$, так что номера всех этих аргументных переменных будут меньше $2\wp_{2m}$. Далее, мы воспользуемся тем, что фактически подстановка в формулу $\mathfrak{F}$ с номером m вместо именной формы с номером k будет производиться только тогда, когда формула $\mathfrak{F}$ содержит в качестве составной части какой-либо вариант этой именной формы или же она сама является ее вариантом. Если в каком-либо входящем в формулу $\mathfrak{F}$ варианте этой именной формы каждую (свободную или связанную) индивидную переменную и каждую цифру заменить переменной с номером $2\wp_{2m}$, то рассматриваемая формульная переменная будет иметь только такие аргументы, номера которых не меньше $2\wp_{2m}$ и, следовательно, больше номеров аргументов именной формы. Поэтому, заменив в формуле $\mathfrak{F}$ каждую индивидную переменную и каждую цифру переменной с номером $2\wp_{2m}$, мы получим выражение, номер которого будет больше k; таким образом, номер этого выражения (которое, впрочем, не обязано принадлежать рассматриваемому нами формализму) дает нам некоторую оценку для k. Эту оценку можно выразить рекурсивно, воспользовавшись функцией $\mathrm{st}_4(m, l)$, определяемой с помощью следующей альтернативы:

«Если $m = p$ или $m = 2p$, где p — простое число, большее или равное 3, или если $m = 2 \cdot 3^k$, то

$$\mathrm{st}_4(m, l) = l;$$

если $m=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot n$, $c>0$, а n не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5, то

$$\mathrm{st}_4(m,\ l)=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot\prod_{x<m}\wp_x^{\mathrm{st}_4(\nu(n,\ x),\ l)};$$

если ни один из перечисленных двух случаев места не имеет, то

$$\mathrm{st}_4(m,\ l)=m».$$

Если числа m и l являются номерами выражений нашего формализма, то $\mathrm{st}_4(m,\ l)$ представляет собой номер того (не обязательно принадлежащего нашему формализму) выражения, которое получается из выражения с номером m в результате замены каждой индивидной переменной и каждой цифры этого выражения выражением с номером l.

Таким образом, найденная нами оценка для k изображается неравенством

$$k<\mathrm{st}_4(m,\ 2\wp_{2m}).$$

Аналогичную оценку мы получим и для номера заменителя. Действительно, если $\mathfrak{S}$ — формула с номером n, т. е. формула, получающаяся подстановкой из формулы $\mathfrak{F}$, то в $\mathfrak{S}$ входит по крайней мере одно такое выражение, которое отличается от заменителя только тем, что вместо аргументных переменных именной формы в нем стоят некоторые квазитермы. Если в такого рода выражении все индивидные переменные и все цифры заменить переменной с номером $2\wp_{2m}$, то получится выражение, номер которой превосходит число l. Если же указанную замену произвести в $\mathfrak{S}$ *повсюду*, то и подавно получится выражение с номером, бо́льшим l, так как вне подставляемых выражений в формуле $\mathfrak{S}$ фигурируют только такие переменные и цифры, которые встречаются и в $\mathfrak{F}$. Таким образом,

$$l<\mathrm{st}_4(n,\ 2\wp_{2m}).$$

А теперь уже можно сформулировать следующее определение: «Формула с номером n получается из другой, отличной от нее формулы с номером m в результате некоторой подстановки вместо формульной переменной с аргументами тогда и только тогда, когда m и n являются номерами формул ($m\neq n$) и существуют числа k и l [k — номер некоторой именной формы, а l — номер соответствующего заменителя] такие, что $k<\mathrm{st}_4(m,\ 2\wp_{2m})$, $l<\mathrm{st}_4(n,\ 2\wp_{2m})$ и $\mathrm{st}_3(m,\ k,\ l)$».

Таким образом, теперь мы уже выразили на языке рекурсивной арифметики все главные понятия, необходимые для определения вывода.

Осталось только дать следующие вспомогательные определения:

«Формула с номером n получается из формулы с номером m по схеме (α) тогда и только тогда, когда m имеет вид $80\cdot 7^a\cdot 11^b$, где a — номер формулы, не содержащей переменной с номером 14, b — номер формулы, содержащей переменную с номером 14, но не содержащей переменной с номером 7, и

$$n=80\cdot 7^a\cdot 11^{50\cdot 7^{\mathrm{st}_1(b,\ 14,\ 7)}}».$$

«Формула с номером n получается из формулы с номером m по схеме (β) тогда и только тогда, когда m имеет вид $80\cdot 7^a\cdot 11^b$, где a — номер формулы, содержащей переменную с номером 14, но не содержащей переменной с номером 7, b — номер формулы, не содержащей переменной с номером 14, и

$$n=80\cdot 7^{100\cdot 7^{\mathrm{st}_1(a,\ 14,\ 7)}}\cdot 11^b».$$

«Формула с номером s получается из формул с номерами m и n по схеме заключения тогда и только тогда, когда m, n и s являются номерами формул и

$$n=80\cdot 7^m\cdot 11^s».$$

Номера следующих двух формул:

$$\forall x A(x)\to A(a)\quad\text{и}\quad A(a)\to\exists x A(x),$$

т. е. числа

$$80\cdot 7^{(50\cdot 7^{(10\cdot 7^7)})}\cdot 11^{(10\cdot 7^{14})}\quad\text{и}\quad 80\cdot 7^{(10\cdot 7^{14})}\cdot 11^{(100\cdot 7^{(10\cdot 7^7)})},$$

мы обозначим через $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$.

Пользуясь тем, что последовательность формул с номерами $m_1,\ \ldots,\ m_r$ может быть изображена числом

$$\wp_0^{m_1}\cdot\ldots\cdot\wp_{r-1}^{m_r},$$

мы приходим к следующему определению:

«Мы говорим, что число m представляет список формул, являющийся выводом формулы с номером n, если выполняются следующие условия:

1) для всякого числа $x\leqslant\lambda(m)$ число $\nu(m,\ x)$ является номером некоторой формулы;

2) $\nu(m,\ \lambda(m))=n$;

3) для каждого из чисел $x\leqslant\lambda(m)$ выполняется следующая альтернатива:

а) $\nu(m,\ x)$ является номером какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний или равняется одному из чисел $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$; либо

б) $x\neq 0$ и формула с номером $\nu(m,\ x)$ получается из формулы с номером $\nu(m,\ x\dot{-}1)$ в результате подстановки вместо какой-либо формульной переменной без аргумента, или вместо

свободной индивидной переменной, или вместо формульной переменной с одним или несколькими аргументами, или в результате переименования какой-либо связанной переменной, или же по одной из схем (α) и (β); либо

в) $x > 1$ и формула с номером $\nu(m, x)$ получается из формул с номерами $\nu(m, x \dot{-} 1)$ и $\nu(m, x \dot{-} 2)$ по схеме заключения; либо

г) существует число $y < x$ такое, что $\nu(m, y) = \nu(m, x)$».

Тем самым построен некоторый рекурсивный предикат — обозначим его $\mathrm{Dd}(m, n)$ (Dd будет напоминать нам о *дедукции*), — который для чисел m и n выполняется тогда и только тогда, когда числа

$$\nu(m, 0), \ldots, \nu(m, \lambda(m))$$

являются номерами таких формул нашего формализма, которые в указанном порядке образуют вывод последней из этих формул (по правилам нашего формализма), причем эта последняя формула имеет номер n. Короче, можно сказать, что высказывание: «Представленный числом m список формул является выводом формулы с номером n» может быть изображено с помощью некоторого рекурсивного предиката $\mathrm{Dd}(m, n)$.

Метод получения этого результата отчетливо показывает, что возможность построения рекурсивного предиката, который с помощью нашей нумерации характеризовал бы данный список формул как вывод некоторой формулы, основывается вовсе не на осо ой структуре рассматриваемого конкретного формализма, т. е. исчисления предикатов с добавлением цифр и функциональных знаков, а только на том, что характер нашего оперирования с объектами этого формализма является строго формальным и одновременно наглядно элементарным.

Мы провели это рассмотрение весьма обстоятельно и не стали облегчать свою задачу различными редукциями формализма (можно было бы, например, с помощью соответствующих определений свести одни логические знаки к другим, а также устранить с помощью формульных схем правило подстановки вместо формульных переменных). Это было сделано, с одной стороны, для того, чтобы подробно проиллюстрировать практику использования нумераций для получения рекурсивных определений метаматематических понятий и показать, как можно устранить различные возникающие при этом трудности, а с другой стороны, еще и потому, что доказанный нами факт рекурсивной определимости характеристических свойств вывода в исчислении предикатов может рассматриваться как некоторое подтверждение того, что правила нашего исчисления предикатов носят точный характер.

Кроме того, мы более детально рассмотрели рекурсивное описание распределений истинностных значений по элементарным подформулам бесквантворных формул и связанные с этим рекурсивные определения в расчете на дальнейшее их использование: впоследствии они помогут нам получить обещанное в конце предыдущей главы финитное усиление теоремы Гёделя о полноте.

§ 2. Применение метода арифметизации к теореме Гёделя о полноте

а) Формализация доказательства теоремы о полноте. Мы теперь возвратимся к доказательству теоремы Гёделя, утверждающей, что всякая неопровержимая формула исчисления предикатов является выполнимой [1]). Доказывая эту теорему, мы исходили из замечания о том, что для любой формулы исчисления предикатов можно указать такую теоретико-модельную сколемовскую нормальную форму, что и в отношении опровержимости, и в отношении выполнимости она будет равносильна исходной формуле. Ввиду этого обстоятельства теорему Гёделя достаточно было доказать только для формул специального вида

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

у которых переменные $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ представляют собой полный список входящих в эту формулу индивидных переменных (при этом можно считать, что r и s отличны от нуля).

Затем мы воспользовались тем обстоятельством, что для любой формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов, имеющей рассматриваемый вид, из доказательства ее неопровержимости можно заключить о совместной выполнимости формул

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, s \cdot j + 1, \ldots, s \cdot j + s)$$

($j = 0, \ldots, f$) для любого f, так что если формулу

$$\mathfrak{B}(n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}, s \cdot j + 1, \ldots, s \cdot j + s)$$

кратко обозначить через $\mathfrak{B}_j$, то для любого f будет выполнима конъюнкция

$$\mathfrak{B}_0 \& \ldots \& \mathfrak{B}_f$$

(мы обозначим ее посредством $\mathfrak{F}_f$). При этом мы пользовались такой нумерацией $n_{1,j}, \ldots, n_{r,j}$ ($j = 0, 1, \ldots$) r-членных наборов цифр, при которой порядок наборов устанавливается по наибольшему из чисел, входящих в данный набор, а при совпадении наибольших чисел — лексикографически.

После этого оставшаяся часть доказательства свелась к тому, чтобы из выполнимости бесквантворных формул $\mathfrak{F}_f$ ($f = 0, 1, \ldots$) заключить о выполнимости формулы $\mathfrak{F}$, и это удалось сделать

[1]) См. с. 238—245.

благодаря тому, что модели формул $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}$ слились в одну общую модель этих формул.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы убедиться, что для каждой отдельно взятой формулы $\mathfrak{F}$ эта процедура может быть формализована в рамках арифметического формализма (правда, при этом нам не удастся обойтись формализмом одной только рекурсивной арифметики).

Первым шагом в этом направлении будет представление использованного нами перечисления $\mathfrak{r}$-членных наборов натуральных чисел с помощью рекурсивных функций.

Действительно, для любого $\mathfrak{r}$ можно определить такие рекурсивные функции

$$\eta_1(n), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}(n), \quad \eta(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{r}}),$$

что для любого $\mathfrak{j}$ будут выполняться равенства

$$\eta_1(\mathfrak{j}) = n_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{j}) = n_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}$$

и для произвольных $n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}}$ значение $\eta(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}})$ будет равно номеру набора $n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}}$ [1]). При $\mathfrak{r}=2$ рекурсивные определения этих функций были приведены непосредственно [2]).

Рекурсивное определение этих функций, вообще говоря, может быть получено следующим образом: сначала для функций $\eta_1(n), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}(n)$ формулируется какая-нибудь одновременная рекурсия, а затем эта последняя с помощью способа, указанного в гл. VII т. I [3]), сводится к примитивным рекурсиям. Тогда на основе рекурсивного определения функций $\eta_1(n), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}(n)$ получится и рекурсивное определение для функции $\eta(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{r}})$. Например, в качестве $\eta(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{r}})$ можно взять [4]) функцию

$$\operatorname*{Min}_{x \leqslant (a_1 + \ldots + a_{\mathfrak{r}} + 1)^{\mathfrak{r}}} (\eta_1(x) = a_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \eta_{\mathfrak{r}}(x) = a_{\mathfrak{r}}).$$

С помощью функций $\eta_1, \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}$ номер формулы $\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}}$ в его зависимости от $\mathfrak{j}$ может быть изображен некоторой рекурсивной функцией $\mathfrak{b}(k)$, а номер формулы $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}$ в его зависимости от $\mathfrak{f}$ — некоторой рекурсивной функцией $\mathfrak{f}(k)$.

---

[1]) Весьма употребительны следующие обозначения этих функций (при переменном $\mathfrak{r}$): $\eta_1^{(\mathfrak{r})}(n), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{r})}(n), \eta^{(\mathfrak{r})}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{r}})$.

[2]) См. с. 272, сноску 2.

[3]) См. т. I, с. 403—405.

[4]) См. т. I, с. 389.

Действительно, в формуле $\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}}$ в качестве аргументов формульных переменных фигурируют цифры

$$n_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, n_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+\mathfrak{s}.$$

Их участие в построении номера $\mathfrak{j}$ формулы $\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}}$ проявляется в том, что числа

$$2\cdot 3^{n_{1,\mathfrak{j}}}, \ldots, 2\cdot 3^{n_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}}, 2\cdot 3^{\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+1}, \ldots, 2\cdot 3^{\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+\mathfrak{s}}$$

фигурируют в качестве показателей степеней соответствующих простых чисел, так что этот номер с помощью некоторой рекурсивной функции

$$\theta_0(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{r}}, a_{\mathfrak{r}+1}, \ldots, a_{\mathfrak{r}+\mathfrak{s}})$$

изображается термом

$$\theta_0(n_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, n_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+\mathfrak{s}).$$

Если мы теперь заменим в нем цифры $n_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, n_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}$ выражениями $\eta_1(\mathfrak{j}), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{j})$, то получим некоторый терм, зависимость значения которого от числа $\mathfrak{j}$ выражается явным образом, и поэтому определенная равенством

$$\mathfrak{b}(k) = \theta_0(\eta_1(k), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}(k), \mathfrak{s}\cdot k+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot k+\mathfrak{s})$$

рекурсивная функция $\mathfrak{b}$ при любом $\mathfrak{j}$ имеет значение, равное номеру формулы $\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}}$.

Что же касается функции $\mathfrak{f}(k)$, то она может быть определена следующей примитивной рекурсией:

$$\mathfrak{f}(0) = \mathfrak{b}(0),$$
$$\mathfrak{f}(k') = 20\cdot 7^{\mathfrak{f}(k)}\cdot 11^{\mathfrak{b}(k')}.$$

Модель (бескванторной) формулы $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}$ представляет собой некоторое распределение истинностных значений по различным элементарным подформулам, которые мы — в порядке первого их появления — обозначили посредством $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_{\mathfrak{f}}}$. Распределения истинностных значений по этим формулам мы изображали соответствующими двоичными числами

$$2^{\mathfrak{r}_{\mathfrak{f}}-1}\cdot \mathfrak{m}_1 + \ldots + 2\cdot \mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_{\mathfrak{f}}-1} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_{\mathfrak{f}}},$$

где $\mathfrak{m}_{\mathfrak{i}}$ $(\mathfrak{i}=1, \ldots, \mathfrak{r}_{\mathfrak{f}})$ равняется 0 или 1 в зависимости от того, какое значение — «истина» или «ложь» — принимает в данном распределении элементарная формула $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}$. Если рассматриваемое

двоичное число равно $\mathfrak{m}$, то при $i = 1, \ldots, \mathfrak{r}_\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{f}}$

$$\mathfrak{m}_i = \rho\left(\pi\left(\mathfrak{m},\ 2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{f} \dot{-} i}\right),\ 2\right).$$

С другой стороны, если выполнены эти условия, то

$$\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{f} - 1} \cdot \mathfrak{m}_1 + \ldots + 2 \cdot \mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{f} - 1} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{f}}.$$

Поэтому всякое число, меньшее $2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{f}}$, однозначно изображает некоторое распределение истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{f}$, и обратно: со всяким таким распределением истинностных значений однозначно связывается некоторое изображающее его число, меньшее $2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{f}}$.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы число $\mathfrak{m}$ представляло такое распределение истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{f}$, которое является «$\mathfrak{f}$-компонентой» некоторого представленного числом $\mathfrak{n}$ распределения истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{l}$, состоит в том, что

$$\mathfrak{f} \leqslant \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{l}} \quad \text{и} \quad \pi\left(\mathfrak{n},\ 2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{l} \dot{-} \mathfrak{r}_\mathfrak{f}}\right) = \mathfrak{m}.$$

(Целесообразно включить сюда и случай $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}$.)

Теперь задача заключается в том, чтобы с помощью некоторого рекурсивного предиката от $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{f}$ выразить отношение «число $\mathfrak{m}$ изображает *выполняющее* распределение истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{f}$». Для этого мы начнем с рассмотрений, проведенных в предыдущем параграфе при арифметической формализации процедуры внесения распределений истинностных значений. К формализму, нумерацию которого мы осуществляем, мы добавим символ V с номером 10, который будет считаться несобственной элементарной формулой, в отличие от остальных, собственных элементарных формул [1]). Кроме того, мы воспользуемся рекурсивными функциями $\varphi_1(m)$ и $\varphi_2(m, a, b)$, которые были определены таким образом [2]), что если m является номером какой-либо бесквантор-ной формулы $\mathfrak{S}$ (которая, быть может, содержит и символ V), то $\varphi_1(m)$ равняется номеру первой входящей в $\mathfrak{S}$ собственной элементарной формулы и нулю, если в $\mathfrak{S}$ нет таких формул, $\varphi_2(m, a, b)$ в том случае, когда a является номером какой-либо входящей в $\mathfrak{S}$ собственной элементарной формулы $\mathfrak{P}$, а b — номером какого-либо выражения $\mathfrak{A}$, принимает в качестве значения

[1]) См. с. 283.
[2]) См. с. 284.

номер той формулы, которая получается из $\mathfrak{S}$ в результате замены элементарной формулы $\mathfrak{P}$ всюду, где она встречается, выражением $\mathfrak{A}$, а в том случае, когда a не является номером никакой собственной элементарной формулы или является номером собственной элементарной формулы, не входящей в $\mathfrak{S}$, значение $\varphi_2(m, a, b)$ равняется m.

С помощью этих функций φ_1 и φ_2 прежде всего мы получим представление числа $\mathfrak{r}_\mathfrak{f}$ в виде рекурсивной функции от $\mathfrak{f}$.

Действительно, если с помощью примитивной рекурсии

$$\chi_1(m, 0) = m,$$
$$\chi_1(m, l') = \varphi_2(\chi_1(m, l),\ \varphi_1(\chi_1(m, l)),\ 10)$$

ввести функцию $\chi_1(m, l)$, то для любого числа m, являющегося номером какой-либо бесквантор-ной формулы $\mathfrak{S}$, и для любого числа l, не превосходящего числа различных входящих в $\mathfrak{S}$ собственных элементарных формул, $\chi_1(m, l)$ будет изображать номер той формулы, которая получается из $\mathfrak{S}$ в результате замены первых l отличных друг от друга элементарных формул (в порядке их первого появления) символом V; а в том случае, когда число l не меньше числа различных входящих в $\mathfrak{S}$ собственных элементарных формул, значение $\chi_1(m, l')$ совпадает со значением $\chi_1(m, l)$ (между тем как в противном случае $\chi_1(m, l) > \chi_1(m, l')$).

Отсюда получается, что функция

$$\chi_2(m) = \sum_{x < m} \operatorname{sgn}(\chi_1(m, x) \dot{-} \chi_1(m, x'))$$

для любого числа m, являющегося номером какой-либо бесквантор-ной формулы, изображает число различных входящих в нее собственных элементарных формул, и поэтому изображение числа $\mathfrak{r}_\mathfrak{f}$ в его зависимости от $\mathfrak{f}$ дается функцией

$$\mathfrak{e}(k) = \chi_2(\mathfrak{f}(k)).$$

Кроме того, функция $\chi_1(m, l)$ в сочетании с функцией φ_1 дает нам изображение номера формулы $\mathfrak{P}_\mathfrak{i}$ как рекурсивной функции индекса $\mathfrak{i}$. Действительно, функция $\varphi_1(\chi_1(m, l))$ для любого числа m, являющегося номером какой-либо бесквантор-ной формулы $\mathfrak{S}$, и для любого числа l, меньшего $\chi_2(m)$, представляет номер $(l+1)$-й из различных собственных элементарных формул, входящих в $\mathfrak{S}$. Поэтому для $l < \mathfrak{e}(k)$ значение функции

$$\varphi_1(\chi_1(\mathfrak{f}(k),\ l))$$

является числом, которое в силу нашей нумерации представляет собой номер формулы $\mathfrak{P}_{l+1}$.

Для любого k справедливо неравенство $k < \mathfrak{e}(k)$, так как у каждой формулы $\mathfrak{B}_j$ в качестве нового аргумента добавляется по крайней мере одна цифра, а именно $6 \cdot j + 1$, а значит, и одна новая, т. е. еще не встречавшаяся в конъюнкции $\mathfrak{B}_0 \& \ldots \& \mathfrak{B}_{j-1}$, элементарная формула.

Поэтому для любого l функция

$$\mathfrak{h}(l) = \varphi_1(\chi_1(\mathfrak{f}(l),\ l))$$

изображает (в рассматриваемой нумерации) номер элементарной формулы $\mathfrak{P}_{l+1}$.

Далее, используя функцию $\mathfrak{e}(k)$, можно представить распределения истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{f}$ с помощью рекурсивной функции

$$\gamma_1(m,\ k,\ l) = \rho(\pi(m,\ 2^{\mathfrak{e}(k) \dot{-} (l+1)}),\ 2),$$

значение которой для любых чисел m, k, l, удовлетворяющих условиям $m < 2^{\mathfrak{e}(k)}$ и $l < \mathfrak{e}(k)$, равно 0 или 1 в зависимости от того, какое значение — «истина» или «ложь» — принимает элементарная формула $\mathfrak{P}_{l+1}$ при том распределении истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_k$, которое представляется числом m [1]).

Теперь мы сравнительно легко получим рекурсивное изображение понятия выполняющего распределения истинностных значений. Мы определим функцию $\chi_3(m,\ n,\ k,\ l)$ примитивной рекурсией:

$$\chi_3(m,\ n,\ k,\ 0) = m,$$
$$\chi_3(m,\ n,\ k,\ l') =$$
$$= \varphi_2(\chi_3(m,\ n,\ k,\ l),\ \varphi_1(\chi_3(m,\ n,\ k,\ l),\ 10 + 20 \cdot \gamma_1(n,\ k,\ l))).$$

Если положить по определению

$$\mathfrak{g}(k,\ n) = \chi_3(\mathfrak{f}(k),\ n,\ k,\ \mathfrak{e}(k)),$$

то для любого значения k и для любого $n < 2^{\mathfrak{e}(k)}$ функция $\mathfrak{g}(k,\ n)$ будет изображать номер той построенной из символа V с помощью связок исчисления высказываний формулы, которая получается из формулы $\mathfrak{F}_k$ в результате внесения того распределения истинностных значений по элементарным подформулам, которое представляется числом n.

[1]) Отметим, что мы здесь используем представление распределений истинностных значений, отличное от того, которым мы пользовались в предыдущем параграфе (см. с. 282—283). Этим, в частности, вызвано и то, что вместо употреблявшейся там функции $\gamma(m,\ l)$ мы вынуждены здесь ввести функцию $\gamma_1(m,\ k,\ l)$.

Результат вычисления этой формулы можно выразить с помощью введенной в предыдущем параграфе функции $\varphi_5(m)$ [1]), которая при любом m, являющемся номером какой-либо формулы, построенной из символа V с помощью связок исчисления высказываний, принимает значение 0, если вычисление этой формулы приводит к значению «истина», и значение 1, если это вычисление дает значение «ложь».

Действительно, каковы бы ни были k и n, предикат

$$n < 2^{\mathfrak{e}(k)} \& \varphi_5(\mathfrak{g}(k,\ n)) = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда число n представляет такое распределение истинностных значений по элементарным формулам $\mathfrak{P}_1$, ..., $\mathfrak{P}_{\mathfrak{e}(k)}$, при котором формула $\mathfrak{F}_k$ принимает значение «истина». Следовательно, этот рекурсивный предикат, который мы будет обозначать посредством $\mathfrak{Q}(k,\ n)$, изображает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы число n представляло выполняющее распределение истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_k$.

Заодно мы получаем, что *выполнимость* формулы $\mathfrak{F}_k$, которая, как мы знаем, утверждает, что среди чисел, меньших $2^{\mathfrak{e}(k)}$, существует число x, для которого имеет место $\mathfrak{Q}(k,\ x)$, может быть выражена в виде

$$\mathfrak{q}(k) = 0, \tag{1}$$

где $\mathfrak{q}(n)$ — некоторая рекурсивная функция. Далее, предположение о том, что для каждого числа k формула $\mathfrak{F}_k$ должна быть выполнимой (из которого исходит проводимое в данный момент рассмотрение), оказывается равносильным *верифицируемости* формулы (1). А теперь мы можем арифметически изобразить и понятие выделенного распределения истинностных значений (правда, уже не в рамках рекурсивной арифметики, а с использованием кванторов и μ-символа).

Тем самым мы попадаем в сферу действия того арифметического формализма, который получается из рекурсивной арифметики в результате присоединения исчисления предикатов (в полном объеме), а также распространения на расширенную область формул схемы индукции и добавления μ-символа с относящимися к нему формулами (μ_1), (μ_2) и (μ_3) [2]). Этот формализм равносилен рассмотренному в гл. VIII т. I формализму арифметики, который получается из формализма системы (Z) в результате присоединения μ-символа и формул (μ_1), (μ_2) и (μ_3). Действительно, как мы показали, в этом формализме с помощью μ-символа можно

[1]) См. с. 286.
[2]) См. с. 74—75.

дать явные определения рекурсивных функций, и в силу этих определений рекурсивные равенства для них станут выводимыми формулами [1]). С другой стороны, аксиомы системы (Z) выводятся в упомянутом ранее формализме [2]), получающемся расширением рекурсивной арифметики.

Как было показано ранее, вместо того чтобы вводить μ-символ вместе с формулами (μ_1), (μ_2) и (μ_3) прямо в формализм, можно было бы поступить иначе: а именно, можно было бы добавить к формализму системы (Z) ι-правило, с помощью которого μ-символу можно дать явное определение, в результате чего формулы (μ_1), (μ_2) и (μ_3) окажутся выводимыми [3]).

Искомое представление понятия выделенного распределения мы без труда получим с помощью предшествующих рекурсивных определений из содержательного определения этого понятия. Выделенное распределение истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{f}$ — это такое выполняющее распределение истинностных значений, которое для любого числа l, большего $\mathfrak{f}$, представляет собой $\mathfrak{f}$-компоненту некоторого выполняющего распределения истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_l$; а среди этих последних оно характеризуется тем, что число, представляющее его, является наименьшим.

А теперь высказывание «m является числом, представляющим k-компоненту некоторого, представленного числом n выполняющего распределения истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_l$» изобразится формулой

$$k \leqslant l \,\&\, \mathfrak{Q}(l,\ n) \,\&\, m = \pi(n,\ 2^{\mathfrak{e}(l) \dot{-} \mathfrak{e}(k)}),$$

которую мы будем кратко обозначать посредством $\mathfrak{H}(k,\ m,\ l,\ n)$.

После этого представляющее число выделенного распределения истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{f}$ может быть охарактеризовано как наименьшее среди таких чисел m (меньших $2^{\mathfrak{e}(\mathfrak{f})}$), что для каждого числа l, большего или равного $\mathfrak{f}$, существует число n, меньшее $2^{\mathfrak{e}(l)}$, для которого имеет место $\mathfrak{H}(\mathfrak{f},\ m,\ l,\ n)$. Таким образом, оно изображается (в зависимости от $\mathfrak{f}$) следующей, определенной с помощью μ-символа, функцией:

$$\mathfrak{a}(k) = \mu_x \forall y\,(k \leqslant y \to \exists z \mathfrak{H}(k,\ x,\ y,\ z)).$$

Конечно, соответствие между этим формальным определением и

[1]) См. т. I, с. 499—510.
[2]) См. т. I, с. 368—369.
[3]) См. Приложение I, с. 468 и далее.

понятием числа, представляющего выделенное распределение истинностных значений, пока усматривается только на основе содержательного смысла μ-символа. Чтобы убедиться, что в арифметическом формализме это определение может быть использовано аналогично соответствующему содержательному понятию, мы должны проверить, что в арифметическом формализме выводима формула

(2) $$\exists x \forall y\,(k \leqslant y \to \exists z \mathfrak{H}(k,\ x,\ y,\ z)),$$

из которой затем на основании определения функции $\mathfrak{a}(k)$ и формул (μ_1) и (μ_2) могут быть получены формулы

(3) $$\forall y\,(k \leqslant y \to \exists z \mathfrak{H}(k,\ \mathfrak{a}(k),\ y,\ z))$$

и

(4) $$\forall y\,(k \leqslant y \to \exists z \mathfrak{H}(k,\ m,\ y,\ z)) \to \mathfrak{a}(k) \leqslant m.$$

В самом деле, вывод формулы (2) *с использованием формулы* (1) *в качестве исходной* может быть осуществлен следующим образом.

Сначала из формулы (1) на основании рекурсивного определения функции $\mathfrak{q}(k)$ получается формула

$$\exists z \mathfrak{Q}(k,\ z),$$

из которой далее — если для краткости обозначить выражение $\pi(n,\ 2^{\mathfrak{e}(k) \dot{-} \mathfrak{e}(l)})$ через $\mathfrak{e}_1(n,\ l,\ k)$ — получается формула

$$k \leqslant l \to \exists z \mathfrak{H}(k,\ \mathfrak{e}_1(z,\ l,\ k),\ l,\ z),$$

а из нее, в сочетании с легко выводимой формулой

$$\mathfrak{H}(k,\ m,\ l,\ n) \to m < 2^{\mathfrak{e}(k)},$$

— формула

(5) $$\forall v\,(k \leqslant v \to \exists u\,(u < 2^{\mathfrak{e}(k)} \,\&\, \exists z \mathfrak{H}(k,\ u,\ v,\ z))).$$

Затем, с помощью полной индукции по r, может быть выведена формула

(6) $$\forall u \exists y A(u,\ y) \,\&\, \forall u \forall v \forall w\,(A(u,\ v) \,\&\, v < w \to A(u,\ w)) \to \exists y \forall u\,(u < r \to A(u,\ y)).$$

Эта формула после подстановки формулы

$$\forall x\,(b < x \to \forall z \neg \mathfrak{H}(k,\ a,\ x,\ z))$$

вместо именной формулы $A(a,\ b)$ и терма $2^{\mathfrak{e}(k)}$ вместо переменной r — ввиду выводимости формулы, которая получается в результате такой же подстановки в формулу

$$\forall u \forall v \forall w\,(A(u,\ v) \,\&\, v < w \to A(u,\ w)),$$

— вместе с формулой (5) и формулой

$$\exists v\,(c<v\,\&\,k\leqslant v)$$

средствами исчисления предикатов дает формулу

$$\exists u\forall y\exists v\,(y<v\,\&\,\exists z\mathfrak{H}\,(k,\ u,\ v,\ z)),$$

а от нее можно прийти к искомой формуле (2) с помощью формулы

(7) $$k\leqslant s\,\&\,s<l\,\&\,\mathfrak{H}\,(k,\ m,\ l,\ n)\to\mathfrak{H}\,(k,\ m,\ s,\ \mathfrak{e}_1(n,\ l,\ s)),$$

которая получается на основании выражения, задающего формулу $\mathfrak{H}(k,\ m,\ l,\ n)$, и рекурсивного определения предиката $\mathfrak{Q}(k,\ n)$ с использованием вывода формулы

(3) $$s<l\,\&\,\mathfrak{Q}\,(l,\ n)\to\mathfrak{Q}\,(s,\ \mathfrak{e}_1(n,\ l,\ s)).$$

[Формула (8) выражает тот факт, что если s меньше l, то выполняющее распределение истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_l$ включает в себя некоторое выполняющее распределение по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_s$. — Правда, фактическое осуществление вывода формулы (8) является делом весьма утомительным.]

Как уже отмечалось выше [1]), после вывода формулы (2) могут быть получены и выводы формул (3) и (4). Из формулы (3) мы получаем формулу

(9) $$\mathfrak{Q}\,(k,\ \mathfrak{a}(k)),$$

которая выражает тот факт, что для каждого k значение $\mathfrak{a}(k)$ представляет выполняющее распределение истинностных значений для $\mathfrak{F}_k$.

Затем мы получаем формулу

(10) $$k<l\to\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ \mathfrak{a}(l))$$

следующим образом. Из формулы (3) получаем

$$k<l\to\forall v\,(l\leqslant v\to\exists z\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ v,\ z)),$$

а потом, используя формулу (7) и выражение для $\mathfrak{H}(k,\ m,\ l,\ n)$, получаем формулу

$$k<l\to\forall v\,[l<v\to\exists z\exists u\,(\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ n)\,\&\,\mathfrak{H}\,(l,\ u,\ v,\ z))],$$

которая может быть преобразована в формулу

$$k<l\to\forall v\,[l<v\to\exists u\,(u<2^{\mathfrak{e}(l)}\,\&\,\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ u)\,\&\,\exists z\mathfrak{H}\,(l,\ u,\ v,\ z))].$$

[1]) См. с. 305.

А теперь из этой формулы — снова с помощью формулы (6), в которую на этот раз вместо именной формы $A(a,\ b)$ подставляется формула

$$\forall x\,(b<x\,\&\,\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ a)\to\forall z\,\neg\,\mathfrak{H}\,(l,\ a,\ x,\ z)),$$

а вместо переменной r терм $2^{\mathfrak{e}(l)}$, — сначала получается формула

$$k<l\to\exists u\forall y\exists v\,(y<v\,\&\,\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ u)\,\&\,\exists z\mathfrak{H}\,(l,\ u,\ v,\ z)),$$

а из нее с помощью (7) формула

$$k<l\to\exists x\,(\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ x)\,\&\,\forall y\,(l\leqslant y\to\exists z\mathfrak{H}\,(l,\ x,\ y,\ z)).$$

Если теперь терм

$$\mu_x[\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ x)\,\&\,\forall y\,(l\leqslant y\to\exists z\mathfrak{H}\,(l,\ x,\ y,\ z))]$$

мы обозначим через $\mathfrak{c}(k,\ l)$, то получим формулу

$$k<l\to\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ \mathfrak{c}(k,\ l))\,\&\,\forall y\,(l\leqslant y\to\exists z\mathfrak{H}\,(l,\ \mathfrak{c}(k,\ l),\ y,\ z)).$$

Из этой формулы, используя выражение для $\mathfrak{H}(k,\ m,\ l,\ n)$, получаем формулу

$$k<l\to\mathfrak{a}(k)=\mathfrak{e}_1(\mathfrak{c}(k,\ l),\ l,\ k)$$

и, кроме того, используя (4), мы получаем формулу

$$k<l\to\mathfrak{a}(l)\leqslant\mathfrak{c}(k,\ l).$$

А из этих двух формул, взятых совместно, с помощью легко выводимой формулы

$$r\leqslant s\to\mathfrak{e}_1(r,\ l,\ k)\leqslant\mathfrak{e}_1(s,\ l,\ k)$$

получается формула

(11) $$k<l\to\mathfrak{e}_1(\mathfrak{a}(l),\ l,\ k)\leqslant\mathfrak{a}(k).$$

С другой стороны, формула (3), если в ней подставить l вместо k, в сочетании с легко выводимой формулой

$$k\leqslant l\,\&\,l\leqslant r\to\mathfrak{e}_1(\mathfrak{e}_1(n,\ r,\ l),\ l,\ k)=\mathfrak{e}_1(n,\ r,\ k)$$

и с использованием выражения для $\mathfrak{H}(k,\ m,\ l,\ n)$ дает нам формулу

$$k<l\to\forall y\,(l\leqslant y\to\exists z\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{e}_1(\mathfrak{a}(l),\ l,\ k),\ y,\ z)),$$

а затем с помощью (7) формулу

$$k<l\to\forall y\,(k\leqslant y\to\exists z\mathfrak{H}\,(k,\ \mathfrak{e}_1(\mathfrak{a}(l),\ l,\ k),\ y,\ z)),$$

из которой на основе (4) получается формула

(12) $$k<l\to\mathfrak{a}(k)\leqslant\mathfrak{e}_1(\mathfrak{a}(l),\ l,\ k).$$

Формулы (11) и (12), взятые совместно, дают формулу

$$k<l \to \mathfrak{a}(k)=\mathfrak{e}_1(\mathfrak{a}(l),\ l,\ k),$$

которая в сочетании с формулой $\mathfrak{Q}(l, \mathfrak{a}(l))$, получающейся подстановкой из (9), приводит нас к искомой формуле (10)

$$k<l \to \mathfrak{H}(k,\ \mathfrak{a}(k),\ l,\ \mathfrak{a}(l)).$$

Формула (10) выражает тот факт, что если число k меньше числа l, то выделенное распределение истинностных значений для формулы $\mathfrak{F}_k$ является k-компонентой выделенного распределения для формулы $\mathfrak{F}_l$, а формулы (9) и (10), взятые друг с другом, выражают то обстоятельство, что выделенные распределения для формул $\mathfrak{F}_k$ ($k=0, 1, \ldots$) объединяются в некоторую модель нашей исходной формулы $\mathfrak{F}$.

Разумеется, это истолкование формул (9) и (10) как формул, выражающих некоторую модель формулы $\mathfrak{F}$, представляет собой некий неформальный комментарий. Мы вывели не формулу, представляющую собой какую-либо формализацию утверждения о выполнимости $\mathfrak{F}$, а только некоторые арифметические формулы, интерпретация которых — если взять за основу неформальное понятие выполнимости — позволяет заключить о выполнимости формулы $\mathfrak{F}$.

Однако, используя только что построенные нами формальные выводы, утверждение о выполнимости $\mathfrak{F}$ можно усилить до установления некоторого дедуктивного факта, касающегося арифметического формализма. Именно, мы установим выводимость некоторой формулы, получающейся из $\mathfrak{F}$ подстановкой вместо формульных переменных, причем эта выводимость будет иметь место в арифметическом формализме с добавлением новой исходной формулы

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{f})=0,$$

которая, как мы знаем, изображает некоторое арифметическое следствие, вытекающее из нашего допущения о неопровержимости $\mathfrak{F}$.

б) Усиление выполнимости до выводимости. Для того чтобы установить указанную нами выводимость, мы сначала построим такие подстановки вместо формульных переменных формулы $\mathfrak{F}$, которые будут подходить для модели формулы $\mathfrak{F}$, образованной выделенными распределениями истинностных значений.

Рассмотрим какую-нибудь формульную переменную с произвольным числом $\mathfrak{p}$ аргументов. В качестве аргументных переменных ее именной формы можно взять переменные $a_1, \ldots, a_\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{p})$ — эта именная форма. В формулах $\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$ формульная переменная $\mathfrak{B}$ всегда входит с какими-нибудь цифрами в качестве аргументов. Если $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p}$ — какие-либо цифры и элементарная формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$ встречается в одной из формул $\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$, то она является одной из элементарных формул $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{i})}$, и, значит, тогда формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$ совпадает с некоторой формулой $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}+1}$ ($\mathfrak{i}<\mathfrak{e}(\mathfrak{i})$), имеющей в нашей нумерации номер $\mathfrak{h}(\mathfrak{i})$ [1]). Номером элементарной формулы $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$ является число

$$10\cdot\mathfrak{q}_1^{(2\cdot 3^{\mathfrak{n}_1})}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_\mathfrak{p}^{(2\cdot 3^{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}})},$$

где $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ суть отличные друг от друга простые числа. Это число, в его зависимости от $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p}$, с помощью рекурсивной функции

$$\mathfrak{t}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{p})=10\cdot\mathfrak{q}_1^{(2\cdot 3^{a_1})}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_\mathfrak{p}^{(2\cdot 3^{a_\mathfrak{p}})}$$

изображается термом $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$.

Поэтому число $\mathfrak{i}$, при котором элементарная формула $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}+1}$ совпадает с $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$, арифметически может быть изображено термом [2])

$$\mu_x(\mathfrak{h}(x)=\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})),$$

а если воспользоваться определениями

$$\mathfrak{h}_1(a)=\mu_x(\mathfrak{h}(x)=a),$$
$$\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{p})=\mathfrak{h}_1(\mathfrak{t}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{p})),$$

то и термом $\mathfrak{f}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$. Благодаря тому, что выполнено неравенство $k<\mathfrak{e}(k)$, в формулу $\mathfrak{F}_\mathfrak{i}$, в которую входят элементарные формулы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{i})}$, входит и формула $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}+1}$. Поэтому в случае совпадения формулы $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$ с формулой $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}+1}$ истинностное значение, получаемое формулой $\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$ при выполнении $\mathfrak{F}$ с помощью выделенных распределений истинностных значений, можно охарактеризовать как то значение, которое в выделенном распределении истинностных значений для $\mathfrak{F}_\mathfrak{i}$ принимает формула $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}+1}$; условие, что это значение представляет собой значение «истина», изображается равенством

$$\gamma_1(\mathfrak{a}(\mathfrak{i}),\ \mathfrak{i},\ \mathfrak{i})=0,$$

---

[1]) См. с. 302.

[2]) Этот терм не является термом рекурсивной арифметики. Число $\mathfrak{i}$ в его зависимости от $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{p}$ можно было бы изобразить и рекурсивным термом. Но для этого надо было бы указать какую-нибудь оценку для $\mathfrak{i}$; однако получение такой оценки в данном случае себя не оправдывает.

а потому и — в зависимости от чисел $n_1, \ldots, n_p$ — формулой

$$\gamma_1(\alpha(\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_p)), \mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_p), \mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_p)) = 0.$$

Поэтому формула

$$\gamma_1(\alpha(\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_p)), \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_p), \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_p)) = 0$$

представляет собой заменитель для формульной переменной $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_p)$, подходящий для модели формулы $\mathfrak{F}$, построенной с помощью выделенных распределений истинностных значений.

Этим способом мы для каждой формульной переменной с аргументами и без них получим некоторый сопоставленный ей заменитель, который мы будем кратко называть соответствующим ей заменителем.

Представим себе формульные переменные формулы $\mathfrak{F}$ выписанными в порядке их первого появления в $\mathfrak{F}$, и пусть число этих переменных равно s. Пусть $\mathfrak{B}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ — именная форма формульной переменной, стоящей в этом упорядочении на i-м месте, причем число p_i может быть равно и нулю. Номер, соответствующий в нашей нумерации формуле $\mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_{p_i})$ с цифрами $n_1, \ldots, n_{p_i}$ в качестве аргументов, изображается, если p_i равно нулю, некоторой цифрой t_i, а в противном случае — с помощью некоторой рекурсивной функции $t_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ термом $t_i(n_1, \ldots, n_{p_i})$; при этом заменителем, соответствующим формульной переменной $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_{p_i})$, будет формула

$$\gamma_1(\alpha(\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})) = 0,$$

где $\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ определяется равенством

$$\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = \mathfrak{h}_1(t_i(a_1, \ldots, a_{p_i})).$$

Этот заменитель, соответствующий переменной $\mathfrak{B}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$, мы будем сокращенно записывать в виде

$$\mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = 0,$$

обозначив через $\mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ терм

$$\gamma_1(\alpha(\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})),$$

для которого легко может быть выведена формула

$$\mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = 0 \vee \mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = 1.$$

Замечание. Для правильного понимания встречающихся здесь термов надо обратить внимание на роль, которую играют свободные индивидные переменные. В то время как терм $t_i(n_1, \ldots, n_{p_i})$, где $n_1, \ldots, n_{p_i}$ — цифры, имеет своим значением номер формулы $\mathfrak{B}_i(n_1, \ldots, n_{p_i})$, терм $t_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ не изображает никакого определенного номера, а значит, в частности, и номера формулы $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_{p_i})$. Номер этой формулы не изображается и тем термом, который получается из терма $t_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$, если в нем вместо свободных переменных подставить номера, сопоставленные в нашей нумерации переменным $a_1, \ldots, a_{p_i}$. Так, например, номер формулы $A(n)$ в его зависимости от цифры n изображается термом $10 \cdot 7^{(2 \cdot 3^n)}$; роль $t(a)$ здесь играет функция $10 \cdot 7^{(2 \cdot 3^a)}$, а номером переменной a является число 14. Однако номером формулы $A(a)$ является не число $10 \cdot 7^{(2 \cdot 3^{14})}$, а число $10 \cdot 7^{14}$.

Формулу, получающуюся из $\mathfrak{F}$ в результате подстановки вместо формульных переменных соответствующих им заменителей, мы будем обозначать посредством $\mathfrak{F}^*$. Она имеет вид

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

где выражение $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$ получается из $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s)$ в результате указанных подстановок.

Далее, формулу

$$\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_r, \mathfrak{s} \cdot \eta(a_1, \ldots, a_r) + 1, \ldots, \mathfrak{s} \cdot \eta(a_1, \ldots, a_r) + \mathfrak{s})$$

мы обозначим посредством $\tilde{\mathfrak{F}}$, а получающуюся из нее в результате указанных подстановок формулу

$$\mathfrak{B}^*(a_1, \ldots, a_r, \mathfrak{s} \cdot \eta(a_1, \ldots, a_r) + 1, \ldots, \mathfrak{s} \cdot \eta(a_1, \ldots, a_r) + \mathfrak{s})$$

посредством $\tilde{\mathfrak{F}}^*$.

Мы покажем, что формула $\mathfrak{F}^*$ может быть выведена в формализме арифметики с добавлением верифицируемой формулы $\mathfrak{q}(k) = 0$ в качестве исходной. Для этого достаточно показать, что в указанном формализме выводима формула $\tilde{\mathfrak{F}}^*$, так как от формулы $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ можно легко перейти к формуле $\mathfrak{F}^*$ средствами исчисления предикатов.

Мы разобьем это рассуждение на несколько этапов.

1. Функция $\mathfrak{b}(k)$ была определена[1]) выражением

$$\theta_0(\eta_1(k), \ldots, \eta_r(k), \mathfrak{s}\cdot k+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot k+\mathfrak{s}),$$

где функция θ_0 обладает тем свойством, что для любых чисел $n_1, \ldots, n_{r+\mathfrak{s}}$ значение выражения

$$\theta_0(n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+\mathfrak{s}})$$

равно номеру формулы

$$\mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+\mathfrak{s}}).$$

Имеют место равенства

$$\eta_1(\eta(a_1, \ldots, a_r)) = a_1, \ldots, \eta_r(\eta(a_1, \ldots, a_r)) = a_r,$$

которые могут быть выведены на основании рекурсивных определений функций $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_r$. Из них мы получаем равенство

$$\mathfrak{b}(\eta(a_1, \ldots, a_r)) =$$
$$= \theta_0(a_1, \ldots, a_r, \mathfrak{s}\cdot\eta(a_1, \ldots, a_r)+1, \ldots, +\mathfrak{s}\cdot\eta(a_1, \ldots, a_r)+\mathfrak{s}),$$

а заодно получается, что для любого r-членного набора цифр $n_1, \ldots, n_r$ терм $\mathfrak{b}(\eta(n_1, \ldots, n_r))$ изображает номер той формулы $\mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_r, l_1, \ldots, l_{\mathfrak{s}})$, у которой цифры $l_1, \ldots, l_{\mathfrak{s}}$ представляют собой значения термов

$$\mathfrak{s}\cdot\eta(n_1, \ldots, n_r)+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot\eta(n_1, \ldots, n_r)+\mathfrak{s}.$$

2. Мы можем определить функцию $\mathfrak{q}_1(s, n, k)$, которая для любой тройки чисел s, n и k, удовлетворяющих условиям $s \leqslant k$, $n < 2^{\mathfrak{e}(k)}$, в качестве значения принимает номер той формулы, которая получается из формулы $\mathfrak{B}_s$ в результате внесения в нее представленного числом n распределения истинностных значений по элементарным подформулам формулы $\mathfrak{F}_k$, так что для любой тройки чисел s, n, k упомянутого вида значение функции $\varphi_5(\mathfrak{g}_1(s, n, k))$ равно 0 или 1 в зависимости от того, какое значение — «истина» или «ложь» — принимает формула $\mathfrak{B}_s$ при представленном числом n распределении истинностных значений для формулы $\mathfrak{F}_k$.

Действительно, сначала мы положим

$$\mathfrak{h}_2(a, k) = \operatorname*{Min}_{x \leqslant \mathfrak{e}(k)} (\mathfrak{h}(x) = a).$$

Если k — какое-либо число, а a — номер какой-либо входящей в $\mathfrak{F}_k$ элементарной формулы $\mathfrak{P}_{i+1}$ (в смысле нашей нумерации), то значение функции $\mathfrak{h}_2(a, k)$ равно i. Связь между рекурсивной

[1]) См. с. 299 и далее.

функцией $\mathfrak{h}_2(a, k)$ и функцией $\mathfrak{h}_1(a)$ (которая определена не рекурсивно[1])) выражается выводимостью формулы

$$(13) \qquad \exists x(\mathfrak{h}(x) = a \,\&\, x \leqslant \mathfrak{e}(k)) \to \mathfrak{h}_2(a, k) = \mathfrak{h}_1(a).$$

Затем, аналогично тому, как мы ранее определили функцию $\chi_3(m, n, k, l)$, определим рекурсивную функцию $\mathfrak{g}_0(s, n, k, l)$ с помощью рекурсивных равенств

$$\mathfrak{g}_0(s, n, k, 0) = \mathfrak{b}(s),$$
$$\mathfrak{g}_0(s, n, k, l') = \varphi_2(\mathfrak{g}_0(s, n, k, l), \varphi_1(\mathfrak{g}_0(s, n, k, l)), 10 + 20\cdot\gamma_1(n, k, \mathfrak{h}_2(\varphi_1(\mathfrak{g}_0(s, n, k, l))))).$$

Искомую функцию $\mathfrak{g}_1(s, n, k)$ мы теперь определим с помощью функции $\mathfrak{g}_0(s, n, k, l)$ равенством

$$\mathfrak{g}_1(s, n, k) = \mathfrak{g}_0(s, n, k, \mathfrak{b}(s)).$$

Заодно для произвольных чисел s, n, k, l, удовлетворяющих условиям $s \leqslant k$, $n < 2^{\mathfrak{e}(k)}$ и $l < \mathfrak{e}(k)$, функция $\varphi_1(\mathfrak{g}_0(s, n, k, l))$ выражает номер (в смысле нашей нумерации) $(l+1)$-й из входящих $\mathfrak{B}_s$ элементарных подформул, упорядоченных по их первому появлению в этой формуле.

Из рекурсивных определений функции $\mathfrak{g}_1(s, n, k)$ и предиката $\mathfrak{Q}(k, n)$ выводится следующая формула[2]):

$$(14) \qquad \mathfrak{Q}(k, n) \to (s \leqslant k \to \varphi_5(\mathfrak{g}_1(s, n, k)) = 0).$$

3. Как было показано ранее[3]), с помощью формулы $\mathfrak{g}(k) = 0$ может быть выведена формула $\mathfrak{Q}(k, \mathfrak{a}(k))$, которая вместе с формулой (14) дает нам

$$(15) \qquad s \leqslant k \to \varphi_5(\mathfrak{g}_1(s, \mathfrak{a}(k), k)) = 0.$$

Затем из формулы (10)

$$k < l \to \mathfrak{H}(k, \mathfrak{a}(k), l, \mathfrak{a}(l)),$$

которая, как мы установили[3]), выводится с помощью формулы $\mathfrak{q}(k) = 0$, на основе определений формулы $\mathfrak{H}$ и функции γ_1 получаем

$$(16) \qquad a < \mathfrak{e}(k) \,\&\, k \leqslant l \to \gamma_1(\mathfrak{a}(k), k, a) = \gamma_1(\mathfrak{a}(l), l, a).$$

4. Мы сложим термы $\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{p}_i})$, сопоставленные различным входящим в формулу $\mathfrak{F}$ формульным переменным[4]), и к полу-

[1]) См. с. 309.
[2]) Вывод формулы (14) является, впрочем, довольно длинным.
[3]) См. с. 306 и далее.
[4]) См. с. 309 и далее.

чившейся сумме прибавим терм $\eta(a_1, \ldots, a_r)$ [1]). Построенный таким образом терм, который не содержит никаких свободных переменных, отличных от $a_1, \ldots, a_r$, мы обозначим посредством $\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)$. Из способа построения этого терма непосредственно получаются формулы

$$(17)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) \leqslant \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r) \quad (i = 1, \ldots, s), \\ \eta(a_1, \ldots, a_r) \leqslant \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r). \end{cases}$$

Формулы (17), взятые совместно с формулой (16) и формулой $k < \mathfrak{e}(k)$, дают равенства

$$\gamma_1(\mathfrak{a}(\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})) =$$
$$= \gamma_1(\mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})),$$

т. е.

$$(18)\quad \mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = \gamma_1(\mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r), \mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

С другой стороны, из формулы (15) в сочетании с последней из формул (17) мы получаем равенство

$$(19)\quad \varphi_5(\mathfrak{g}_1(\eta(a_1, \ldots, a_r), \mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r))) = 0.$$

5. Теперь наша задача сводится к тому, чтобы с помощью формул (13), (17)—(19) вывести формулу $\tilde{\mathfrak{F}}^*$.

С этой целью мы рассмотрим определение функции $\mathfrak{g}_1(s, n, k)$, как оно было дано с помощью рекурсивных равенств для $\mathfrak{g}_0(s, n, k, l)$. Если мы подставим в эти равенства вместо переменных s, n и k соответственно термы $\eta(a_1, \ldots, a_r)$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r))$ и $\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)$, то для функции

$$\mathfrak{g}_0(\eta(a_1, \ldots, a_r), \mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r), l),$$

которую мы обозначим посредством $\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)$, получим следующие рекурсивные равенства:

$$\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, 0) = \mathfrak{b}(\eta(a_1, \ldots, a_r)),$$
$$\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l') = \varphi_2(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l), \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)),$$
$$10 + 20 \cdot \gamma_1(\mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r),$$
$$\mathfrak{h}_2(\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)))).$$

[1]) См. с. 298.

Теперь с помощью этих равенств можно вывести формулу

$$\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)) = 0 \vee$$
$$\exists x(\mathfrak{h}(x) = \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)) \,\&\, x \leqslant \mathfrak{e}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r))),$$

из которой ввиду формулы (13) получается формула

$$\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)) = 0 \vee$$
$$\mathfrak{h}_2(\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)), \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)) = \mathfrak{h}_1(\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l))).$$

С помощью этой формулы и равенства $\varphi_2(m, 0, r) = m$, выводимого из рекурсивного определения [1]) функции $\varphi_2(m, a, b)$, мы из рекурсивных равенств для $\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)$ получаем формулы

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, 0) = \mathfrak{b}(\eta(a_1, \ldots, a_r)), \\ \mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l') = \varphi_2(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l), \\ \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)), 10 + 20 \cdot \gamma_1(\mathfrak{a}(\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r)), \\ \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_r), \mathfrak{h}_1(\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l))))). \end{cases}$$

Вторая из этих формул с использованием равенства $\varphi_2(m, 0, r) = m$ дает формулу

$$(21)\quad \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)) = 0 \to \mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l') = \mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l);$$

кроме того, с использованием равенств, определяющих функции $\mathfrak{f}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ $(i = 1, \ldots, s)$, и равенств (18) получаются формулы

$$(22)\quad \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)) = \mathfrak{t}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) \to$$
$$\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l') = \varphi_2(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l), \mathfrak{t}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}),$$
$$10 + 20 \cdot \mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Далее, на основании определений функций $\mathfrak{g}_1(s, n, k)$ и $\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, l)$ формула (19) может быть переведена в формулу

$$(23)\quad \varphi_5(\mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, \mathfrak{b}(\eta(a_1, \ldots, a_r)))) = 0.$$

6. Пусть $\mathfrak{b}^*(\eta(a_1, \ldots, a_r))$ обозначает терм, получающийся из $\mathfrak{b}(\eta(a_1, \ldots, a_r))$ в результате замены каждого из термов $\mathfrak{t}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$, связанных с элементарными подформулами $\mathfrak{B}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ формулы $\tilde{\mathfrak{F}}$, соответствующим ему термом $10 + 20 \cdot \mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$. Тогда из формул (20)—(22) с помощью вы-

[1]) См. с. 285.

ражения для $\tilde{\mathfrak{F}}$, т. е. для

$$\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_r, \mathfrak{s}\cdot\eta(a_1, \ldots, a_r)+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot\eta(a_1, \ldots, a_r)+\mathfrak{s}),$$

по правилу дизъюнкции, которое, будучи истолковано содержательно, сводится к разбору различных возможностей, касающихся графических совпадений и различий между элементарными подформулами данной формулы

$$\mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_r, \mathfrak{s}\cdot\eta(n_1, \ldots, n_r)+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot\eta(n_1, \ldots, n_r)+\mathfrak{s}),$$

получается равенство

$$(24)\qquad \mathfrak{g}_2(a_1, \ldots, a_r, \mathfrak{b}(\eta(a_1, \ldots, a_r))) = \mathfrak{b}^*(\eta(a_1, \ldots, a_r)).$$

Это рассуждение мы вскоре поясним с помощью одного примера.

Формулы (23) и (24), взятые друг с другом, дают равенство

$$\varphi_5(\mathfrak{b}^*(\eta(a_1, \ldots, a_r))) = 0,$$

из которого в силу определения функции φ_5, применяя уже упоминавшиеся ранее выводимые формулы

$$\mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = 0 \vee \mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

мы получаем искомую формулу $\tilde{\mathfrak{F}}^*$, которая получается из $\tilde{\mathfrak{F}}$ в результате замены каждой из элементарных формул $\mathfrak{B}_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$ соответствующим равенством $\mathfrak{s}_i(a_1, \ldots, a_{p_i}) = 0$.

Пункт 6 приведенного формального вывода мы поясним на примере. Пусть $\mathfrak{F}$ — формула

$$\forall x \forall y \exists z ((A(x, y) \to \neg A(y, x)) \,\&\, A(x, z)).$$

Тогда формула $\tilde{\mathfrak{F}}$ запишется в виде

$$(A(a_1, a_2) \to \neg A(a_2, a_1)) \,\&\, A(a_1, \eta(a_1, a_2)+1).$$

В данном случае у нас имеется только одна формульная переменная и поэтому нам не нужно нумеровать формульные переменные и соответствующие им функции $t_i(a_1, \ldots, a_{p_i})$. Достаточно взять одну двуместную функцию $t(a_1, a_2)$, которая для любой пары чисел n_1, n_2 изображает номер формулы $A(n_1, n_2)$. Эта функция определяется равенством

$$t(a_1, a_2) = 10 \cdot 7^{2\cdot 3^{a_1}} \cdot 11^{2\cdot 3^{a_2}}.$$

С помощью этой функции номер формулы

$$(A(n_1, n_2) \to \neg A(n_2, n_1)) \,\&\, A(n_1, \eta(n_1, n_2)+1)$$

— в которой вместо выражения $\eta(n_1, n_2)+1$ надо подставить его

значение — изобразится значением выражения

$$20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{t(n_1, n_2)} \cdot 11^{3\cdot t(n_2, n_1)})} \cdot 11^{t(n_1, \eta(n_1, n_2)+1)}.$$

В соответствии с этим в качестве $\mathfrak{b}(s)$ мы должны взять функцию

$$20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{t(\eta_1(s), \eta_2(s))} \cdot 11^{3\cdot t(\eta_2(s), \eta_1(s))})} \cdot 11^{t(\eta_1(s), s+1)},$$

и у нас получится

$$\mathfrak{b}(\eta(a_1, a_2)) = 20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{t(a_1, a_2)} \cdot 11^{3\cdot t(a_2, a_1)})} \cdot 11^{t(a_1, \eta(a_1, a_2)+1)}.$$

Теперь, используя первое из равенств (20), а также определения функций φ_1 и φ_2 и формулы (22), мы получим сначала равенство

$$\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 0)) = t(a_1, a_2),$$

а затем формулы

$$a_1 \neq a_2 \to \mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 1) = 20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, a_2)} \cdot 11^{3\cdot t(a_2, a_1)})} \cdot 11^{t(a_1, \eta(a_1, a_2)+1)},$$

и

$$a_1 = a_2 \to \mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 1) = 20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, a_2)} \cdot 11^{3\cdot(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_2, a_1))})} \cdot 11^{t(a_1, \eta(a_1, a_2)+1)}.$$

Аналогично мы получим формулы

$$a_1 \neq a_2 \to \mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 2) = 20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, a_2)} \cdot 11^{3\cdot(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_2, a_1))})} \cdot 11^{t(a_1, \eta(a_1, a_2)+1)}$$

и

$$a_1 = a_2 \to \mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 2) = 20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, a_2)} \cdot 11^{3\cdot(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_2, a_1))})} \cdot 11^{(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, \eta(a_1, a_2)+1))},$$

а из них формулы

$$a_1 \neq a_2 \to \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 2)) = t(a_1, \eta(a_1, a_2)+1)$$

и

$$a_1 = a_2 \to \varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 2)) = 0.$$

Теперь формулы (21) и (22) с использованием альтернативы $a_1 \neq a_2 \vee a_1 = a_2$ дают равенства

$$\mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 3) = 20 \cdot 7^{(80\cdot 7^{10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, a_2)} \cdot 11^{3\,(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_2, a_1))})} \cdot 11^{(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1, \eta(a_1, a_2)+1))},$$

и

$$\varphi_1(\mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 3)) = 0.$$

Из последнего с помощью формулы (21) получается импликация

$$3 \leqslant s \to \mathfrak{g}_2(a_1, a_2, s) = \mathfrak{g}_2(a_1, a_2, 3),$$

а затем, с использованием формулы $3<\mathfrak{b}(s)$, непосредственно вытекающей из определения функции $\mathfrak{b}(s)$, — равенство

$$\mathfrak{g}_2(a_1,\ a_2,\ \mathfrak{b}(\eta(a_1,\ a_2)))=\mathfrak{g}_2(a_1,\ a_2,\ 3),$$

из которого с помощью (23) получается равенство $\varphi_5(\mathfrak{g}_2(a_1,\ a_2,\ 3))=0$.

Это равенство в сочетании с выражением для $\mathfrak{g}_2(a_1,\ a_2,\ 3)$ и в силу определения φ_5 сначала дает равенство

$$\operatorname{sgn}(\overline{\operatorname{sgn}}(\varphi_5(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1,\ a_2)))\cdot\varphi_5(3\cdot(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_2,\ a_1)))+\varphi_5(10+20\cdot\mathfrak{s}(a_1,\ \eta(a_1,\ a_2)+1)))=0,$$

а затем с помощью формулы $\mathfrak{s}(a,\ b)=0\vee\mathfrak{s}(a,\ b)=1$ дает равенство

$$\overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{s}(a_1,\ a_2))\cdot\overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{s}(a_2,\ a_1))+\mathfrak{s}(a_1,\ \eta(a_1,\ a_2)+1)=0.$$

Из последнего равенства мы получим формулу

$$(\mathfrak{s}(a_1,\ a_2)\neq 0\vee\mathfrak{s}(a_2,\ a_1)\neq 0)\ \&\ \mathfrak{s}(a_1,\ \eta(a_1,\ a_2)+1)=0,$$

а из нее преобразованием — формулу

$$(\mathfrak{s}(a_1,\ a_2)=0\to\mathfrak{s}(a_2,\ a_1)\neq 0)\ \&\ \mathfrak{s}(a_1,\ \eta(a_1,\ a_2)+1)=0.$$

Но это и есть та формула, которая из формулы $\tilde{\mathfrak{F}}$, т. е. из

$$(A(a_1,\ a_2)\to\neg A(a_2,\ a_1))\ \&\ A(a_1,\ \eta(a_1,\ a_2)+1),$$

получается в результате подстановки равенства $\mathfrak{s}(a,\ b)=0$ вместо формульной переменной $A(a,\ b)$, т. е. это и есть искомая формула $\tilde{\mathfrak{F}}^*$. —

Тем самым мы получили дедуктивный аналог теоремы Гёделя о полноте. Именно, мы показали, что для всякой формулы $\mathfrak{F}$ исчисления предикатов, имеющей вид

$$\forall\mathfrak{x}_1\ \ldots\ \forall\mathfrak{x}_\mathfrak{r}\exists\mathfrak{y}_1\ \ldots\ \exists\mathfrak{y}_\mathfrak{s}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_\mathfrak{r},\ \mathfrak{y}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{y}_\mathfrak{s}),$$

где $\mathfrak{x}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_\mathfrak{r},\ \mathfrak{y}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ — полный список входящих в эту формулу индивидных переменных, а $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ отличны от нуля, можно указать такую рекурсивную функцию $\mathfrak{q}(k)$, что для каждого числа $\mathfrak{k}$ значение $\mathfrak{q}(\mathfrak{k})$ равно нулю или отлично от нуля в зависимости от того, выполнима или не выполнима бескванторная формула $\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$, так что для любого $\mathfrak{k}$ значение $\mathfrak{q}(\mathfrak{k})$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда отрицание формулы $\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ выводимо средствами исчисления высказываний.

Как мы ранее показали, выводимость средствами исчисления высказываний формулы $\neg\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ для какого-либо числа $\mathfrak{k}$ уже является достаточным условием опровержимости формулы $\mathfrak{F}$ в исчислении предикатов.

Таким образом, из неопровержимости формулы $\mathfrak{F}$ следует, что функция $\mathfrak{q}(k)$ равна 0 при любом значении аргумента, так что

формула $\mathfrak{q}(k)=0$, у которой k является единственной входящей в нее переменной, верифицируема. Мы также показали, что при помощи арифметического формализма, состоящего из формализма системы (Z) вместе с μ-символом, формулами (μ_1), (μ_2) и (μ_3) и дополнительной исходной формулой $\mathfrak{q}(k)=0$, выводима некоторая формула $\mathfrak{F}^*$, получающаяся из $\mathfrak{F}$ в результате подстановок вместо формульных переменных.

Из установленных фактов мы немедленно получаем доказательство сформулированной в конце предыдущей главы теоремы о том, что любая неопровержимая формула исчисления предикатов неопровержима и в любом арифметически непротиворечивом формализме, т. е. в любом таком формализме, который непротиворечив сам, а также остается непротиворечивым после добавления к нему арифметического формализма (если этот последний в него еще не включен) и, быть может, сверх того каких-нибудь верифицируемых формул в качестве исходных.

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — какая-либо формула исчисления предикатов, относительно которой установлено, что она неопровержима в исчислении предикатов, т. е. что ее отрицание $\neg\mathfrak{A}$ невыводимо в исчислении предикатов. Формула $\neg\mathfrak{A}$ дедуктивно равна некоторой сколемовской нормальной форме $\mathfrak{N}$, которая может быть преобразована в отрицание $\neg\mathfrak{F}$ некоторой формулы $\mathfrak{F}$ рассмотренного нами специального вида. Эта формула, так же как и $\mathfrak{A}$, неопровержима в исчислении предикатов, и для нее, по доказанному, можно указать такую рекурсивную функцию $\mathfrak{q}(k)$, что формула $\mathfrak{q}(k)=0$ будет верифицируемой и с помощью арифметического формализма с добавлением этой формулы к числу исходных будет выводима некоторая формула $\mathfrak{F}^*$, которая получается из $\mathfrak{F}$ в результате подстановок вместо формульных переменных.

Если формула $\mathfrak{A}$ опровергается в некотором формализме F, то она и подавно будет опровергаться в формализме G, который получается в результате объединения F с арифметическим формализмом и добавления к числу исходных формул верифицируемой формулы $\mathfrak{q}(k)=0$. Значит, в этом формализме G выводима формула $\neg\mathfrak{A}$; и так как этот формализм включает в себя исчисление предикатов и символы арифметического формализма, то в G выводима и дедуктивно равная формуле $\neg\mathfrak{A}$ формула $\neg\mathfrak{F}$, а также получающаяся из нее в результате подстановок формула $\neg\mathfrak{F}^*$. Но так как формализм G содержит арифметический формализм и исходную формулу $\mathfrak{q}(k)=0$, то в нем выводима формула $\mathfrak{F}^*$. Следовательно, формализм G противоречив, т. е. объединение формализма F с арифметическим формализмом при добавлении некоторой верифицируемой исходной формулы ведет к противоречию. Поэтому вывод формулы $\neg\mathfrak{A}$ в арифметически непротиворечивом формализме невозможен.

Полученному результату можно также придать и другую формулировку, приняв во внимание связь, имеющую место между формулами логики предикатов и системами аксиом. Непротиворечивость какой-либо системы аксиом, представленной с помощью конечного числа формул без функциональных знаков, равносильна неопровержимости формулы $\mathfrak{F}$ логики предикатов, которая получается из этой системы, если входящие в ее состав формализованные аксиомы связать знаком конъюнкции, а затем заменить все входящие в них символы основных предикатов формульными переменными с соответствующим числом мест для аргументов, а все индивидные символы — индивидными переменными, связываемыми проставленными в начале формул кванторами существования. Переход от формулы $\mathfrak{F}$ с помощью соответствующих арифметических подстановок к формуле $\mathfrak{F}^*$ по смыслу представляет собой построение *арифметической модели* рассматриваемой системы аксиом, так как формулы, изображающие эти аксиомы, при замене символов для основных предикатов арифметическими выражениями, подставляемыми вместо соответствующих формульных переменных, переходят в доказуемые арифметические формулы (доказуемые, конечно, только при добавлении некоторой верифицируемой исходной формулы $\mathfrak{q}(k) = 0$, которая выражает непротиворечивость этой системы аксиом в математической формализации и которая сама по себе не обязана быть выводимой в формализме арифметики).

Таким образом, существование арифметической модели для непротиворечивой системы аксиом рассматриваемого нами типа имеет место в некотором дедуктивном смысле.

Разумеется, доказанная теорема имеет смысл теоремы о полноте, т. е. выражает некоторую дедуктивную завершенность исчисления предикатов, только в предположении непротиворечивости этого арифметического формализма, ибо если этот формализм противоречив, то никакого арифметически непротиворечивого формализма не будет вообще.

Это соображение указывает нам на то, что задача установления непротиворечивости всего арифметического формализма в целом в наших исследованиях пока что остается нерешенной проблемой. На самом деле, все рассмотренные нами до сих пор методы установления непротиворечивости оказываются неприменимыми для решения этой задачи. Это обстоятельство, которое может нас озадачить, находит принципиальное объяснение в одной теореме Гёделя о дедуктивных формализмах, первым объектом применения которой является формализм арифметики. Выводы, которые влечет за собой эта теорема, вынуждают нас расширить область допустимых неформальных рассуждений, употребляемых в теории доказательств, по сравнению с тем, что до сих пор допускалось при фактической реализации нашей финитной точки зрения.

ГЛАВА V

ПРИЧИНЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ НЕОБХОДИМОСТЬ РАСШИРЕНИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ РАМОК ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

§ 1. Границы изобразимости и выводимости в дедуктивных формализмах

Метод арифметизации метаматематики был разработан Гёделем в целях доказательства двух весьма общих теорем, выражающих тот факт, что всякий логико-математический формализм, с одной стороны, четко очерченный, а с другой стороны, не слишком узкий, является дедуктивно незавершенным.

Основная идея гёделевского доказательства этих теорем заодно доставляет нам и метод, позволяющий произвести математическое уточнение некоторых логических и теоретико-множественных парадоксов, из числа тех, в которых существенную роль играет соотношение между *обозначением* и *обозначаемым* и для которых в последнее время получило права гражданства название семантических парадоксов, или же семантических антиномий.

Принципиальная сторона гёделевского метода в наиболее простой форме проступает именно тогда, когда мы начинаем прилагать этот метод к упомянутым антиномиям, и потому мы в первую очередь займемся рассмотрением этих приложений.

а) Антиномия лжеца; теорема Тарского о понятии истинности; парадокс Ришара. Одним из простейших семантических парадоксов является парадокс лжеца. Парадокс этот был известен уже древним грекам. Суть его заключается в том, что из высказывания, утверждающего свою собственную ложность, вытекает противоречие. Если некто говорит: «сейчас я лгу» или, более подробно, «я высказываю сейчас утверждение, которое является ложным», то в силу языковой формы, в которую облечено это высказывание, оно носит характер некоторого утверждения. Предположение, что это утверждение является истинным, ввиду содержания этого высказывания немедленно приводит нас к заключению, что оно является ложным. Поэтому, согласно принципу reductio ad absurdum, это утверждение является ложным. Но это означает, что в тот момент времени, когда это высказывание произносится, то, о чем в нем говорится, верно. Следовательно, данное высказывание выражает истинное утверждение. Тем самым

мы пришли к противоречию. (Заметим, кстати, что закон исключенного третьего при этом не использовался.)

Мы не хотели бы вдаваться здесь в философскую дискуссию по поводу этой антиномии, о которой уже много говорилось и писалось [1]).

Во всяком случае, в обиходном языке парадокс этот вызывает определенную трудность, так как он показывает, что оперирование с грамматически правильно построенным предложением по обычным правилам умозаключений иногда может привести к противоречию.

Решение этого парадокса сводится к объяснению причин, по которым требуется наложить определенные ограничения на употребление схем тех или иных грамматических форм и правил умозаключения. Но нас будет интересовать не эта постановка вопроса, а то, может ли *в формализованных языках* сложиться положение вещей, аналогичное парадоксу лжеца, и при каких условиях это может быть. Вспомогательным средством, подходящим для обсуждения этого вопроса, оказывается метод арифметизации метаматематики.

Представим себе, что некоторая часть нашего языка уточнена до некоторого дедуктивного формализма F, и предположим, что для выражений этого формализма установлена определенная нумерация, так что каждому выражению из F взаимно однозначным образом сопоставлено число, считающееся его номером.

Допустим, что формализм F и рассматриваемая нумерация удовлетворяют следующим условиям:

а) Функции, отношения, предложения и способы умозаключений рекурсивной арифметики (включая и соответствующие средства исчисления высказываний) изобразимы в F.

б) С помощью рассматриваемой нумерации свойства выражений формализма F и отношения между ними, формулируемые в терминах внешнего вида этих выражений, изображаются рекурсивными предикатами, а выполняемые над этими выражениями формальные операции изображаются рекурсивными функциями.

в) Имеются переменные некоторого специального вида, называемые числовыми переменными. Некоторые из выражений формализма F выделены в качестве термов. К термам, в частности, относятся числовые переменные и цифры. Всякая рекурсивная функция изображается в F некоторым термом,

[1]) Из литературы по этому вопросу см., в частности, дискуссию между П. Финслером и Х. Липпсом: Finsler P., Lipps H. Über die Lösung von Paradoxien. — Philos. Anzeiger, II Jg., 1927, № 2, работу Р. Карнапа: Carnap R. Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik. — Monatsh. Math. Phys., 1934, **41** № 2, а также работу Э. Стениуса: Stenius E. Das Problem der logischen Antinomien (диссертация, Хельсинки, 1949, Commentationes Physico-Mathematicae XIV 11 Soc. Scient. Fennica).

а аргументы этих функций изображаются числовыми переменными. Если в терме, содержащем какую-либо числовую переменную, ее заменить каким-либо термом, то при этом снова получается некоторый терм (разумеется, при условии отсутствия коллизий между связанными переменными).

Некоторые из выражений формализма F выделены в качестве формул. Равенство любых двух термов является формулой, и потому любое рекурсивное отношение изобразимо в F некоторой формулой.

При замене в формуле входящей в нее числовой переменной каким-либо термом — если при этом не возникает коллизий между связанными переменными — снова получается некоторая формула. Отрицание любой формулы является формулой. Любое выводимое выражение является формулой.

Замечание. Характеризуя определенные выражения из F в качестве термов или формул, мы будем предполагать, что имеется способ, который для каждого выражения, принадлежащего F, проверял бы, является ли оно термом (или соответственно формулой).

Что касается этих подготовительных предположений, то они носят довольно общий характер. Они выражают примерно ту мысль, что формализм F обладает некоторым минимальным запасом изобразительных и дедуктивных возможностей, что обращение с символьными выражениями в F определено достаточно строго и что этот формализм обнаруживает определенное сходство с рассматривавшимся нами до сих пор формализмом арифметики.

Разумеется, в ряде отношений эти предположения могли бы быть ослаблены. Однако мы здесь этого делать не будем, так как эти предположения позволят нам выводить противоречия в рамках хорошо известных дедуктивных методов. С этой точки зрения мы добавим еще одно (очевидным образом несущественное) предположение о том, что в качестве символов для связок исчисления высказываний, символа равенства, символа арифметической функции следования (штрих-символа) и букв для числовых переменных будут браться те же самые символы, которыми мы пользовались ранее.

Для формального моделирования данного парадокса нам потребуется еще одно допущение, касающееся формализуемости свойства высказываний быть истинным. Это допущение может быть сформулировано следующим образом:

г) Имеется формула $\mathfrak{M}(a)$ с числовой переменной a в качестве единственной свободной переменной, обладающая тем свойством, что если n представляет собой номер некоторой формулы $\mathfrak{A}$ без свободных переменных, то в F выводимы импликации

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \rightarrow \mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{M}(\mathfrak{n}).$$

На основе предположений а) — г) мы получаем следующий аналог парадокса лжеца:

Сначала из предположений б) и в) мы заключаем, что существует рекурсивная функция, зависящая от двух аргументов, которая номеру всякого выражения $\mathfrak{K}$ из F и всякой цифре $\mathfrak{l}$ ставит в соответствие номер выражения, получающегося из $\mathfrak{K}$ в результате замены переменной a всюду, где она входит в это выражение, цифрой $\mathfrak{l}$.

Затем, согласно допущениям а) и в), функцию эту можно изобразить некоторым термом $\mathfrak{s}(k, l)$, обладающим тем свойством, что если $\mathfrak{k}$ является номером некоторого выражения $\mathfrak{K}$ из F, $\mathfrak{l}$ — некоторой цифрой, а $\mathfrak{m}$ — номером выражения, получающегося из $\mathfrak{K}$ в результате повсеместной замены переменной a цифрой $\mathfrak{l}$, то в F выводимо равенство

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}) = \mathfrak{m}.$$

Кроме того, терм $\mathfrak{s}(k, l)$ может быть выбран таким образом, чтобы в нем не встречалось никаких связанных переменных, входящих в формулу $\mathfrak{M}(a)$, так что выражение $\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(a, a))$ и его отрицание $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(a, a))$ будут *формулами*. Номер формулы $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(a, a))$ мы обозначим буквой $\mathfrak{p}$.

Если $\mathfrak{k}$ — цифра, являющаяся номером выражения $\mathfrak{K}$, то значение $\mathfrak{s}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$ представляет собой номер того выражения, которое получается из $\mathfrak{K}$ в результате повсеместной замены переменной a цифрой $\mathfrak{k}$. Поэтому значение терма $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ представляет собой номер формулы

$$\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})).$$

Пусть $\mathfrak{q}$ — этот номер, тогда вследствие упоминавшегося выше свойства терма $\mathfrak{s}(k, l)$ в F будет выводимо равенство

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}.$$

Отсюда [по предположению а)] получаются импликации

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{q}).$$

С другой стороны, [согласно допущению г)], так как $\mathfrak{q}$ является номером формулы $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$, не содержащей свободных переменных, то в F выводимы импликации

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \to \neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \quad \text{и} \quad \neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{q}).$$

Теперь мы легко получаем противоречие. Действительно, импликации

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \to \neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})),$$

взятые друг с другом, дают формулу

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})),$$

из которой затем получается формула

$$\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})).$$

С другой стороны, эта формула, взятая вместе с импликациями

$$\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})),$$

дает нам формулу

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})).$$

Тем самым мы получили формализацию антиномии лжеца. При этом высказыванию, утверждающему свою собственную ложность, соответствует формула

$$\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})).$$

Действительно, для любого числа $\mathfrak{n}$, являющегося номером какой-либо формулы $\mathfrak{A}$ без свободных переменных, формула $\mathfrak{M}(\mathfrak{n})$ изображает утверждение об истинности $\mathfrak{A}$, и потому $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{n})$ изображает утверждение о том, что $\mathfrak{A}$ ложно. Так как $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$, а $\mathfrak{q}$ является номером формулы $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$, то формула $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$ изображает утверждение о том, что $\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$ ложно.

То обстоятельство, что эту антиномию можно изложить совершенно формально, отчетливо показывает, что она не имеет никакого отношения к вопросу о реальной истине как гносеологической проблеме. Более того, в данной ситуации от понятия истинности данного высказывания для получения противоречия нам потребовалось лишь то, что было формализовано в предположении г) и что в обиходном языке может быть сформулировано примерно следующим образом: «Любое предложение вида „высказывание $\mathfrak{A}$ истинно" само является высказыванием; из этого высказывания следует высказывание $\mathfrak{A}$, и обратно: это предложение следует из высказывания $\mathfrak{A}$».

Но перечисляя явным образом предположения, сделанные относительно рассматриваемого дедуктивного формализма, и формализуя эту антиномию, мы добиваемся в первую очередь не парадокса. У нас получается некоторый общий факт, относящийся к дедуктивным формализмам вообще. Именно, обнаруженное противоречие показывает, что для любого непротиворечивого формализма F, удовлетворяющего условиям а) — г), если имеется взаимно однозначная нумерация его выражений, обладающая указанными в допущении б) свойствами, то невозможна такая формализация в рамках самого F числового предиката «n является номером некоторой формулы из формализма F, изображающей истинное утверждение», которая удовлетворяла бы условию г).

Как уже упоминалось, сделанные нами предположения в некоторых отношениях могут быть ослаблены. В этой связи заметим, в частности, следующее:

1. Не обязательно требовать, чтобы в формализме F имелись *свободные переменные*. В самом деле, в нашем выводе противоречия свободная переменная a фигурирует лишь постольку, поскольку, с одной стороны, в определении рекурсивной функции, представленной термом $\mathfrak{s}(k, l)$, используется ссылка на замену переменной a некоторой цифрой и, с другой стороны, цифра $\mathfrak{p}$ определяется как номер выражения $\mathfrak{M}(\mathfrak{s}(a, a))$. Но для этого вовсе не требуется, чтобы переменная a принадлежала формализму F, а нужно лишь, чтобы она была включена в нашу нумерацию.

Аналогичным образом в формулировке наших предположений свободные переменные могут быть использованы для указания мест аргументов также без того, чтобы включать их в сам формализм F.

2. Не обязательно требовать, чтобы в формализме F содержались цифры. Вместо цифр в F могут фигурировать какие-нибудь более сложные термы (быть может, содержащие и переменные), относительно которых нужно только предположить, что имеется некоторое отображение, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между этими термами и цифрами; эти термы можно будет также использовать вместо цифр в качестве номеров выражений из F в нашей нумерации.

3. Нет необходимости требовать, чтобы каждая рекурсивная функция была *изобразима* в формализме F. Достаточно потребовать, чтобы в F была представима в некотором смысле одна такая функция при условии, что формализм F по меньшей мере содержит квантор всеобщности вместе с соответствующим образом обобщенным понятием формулы, а также связанные с квантором всеобщности способы умозаключения, формализованные каким-то образом. Характер требуемой при этом представимости проще всего выяснить на примере разобранного нами случая, проанализировав роль, которую при выводе данного противоречия начинает играть предположение об изобразимости в F рекурсивных функций. Фактически это предположение использовалось в выводе только один раз, а именно когда мы изображали одну рекурсивную функцию с помощью терма $\mathfrak{s}(k, l)$. Рассматриваемая при этом функция — мы обозначим ее $\mathrm{sb}(k, l)$ — сопоставляет номеру $\mathfrak{k}$ какого-либо выражения $\mathfrak{K}$ и цифре $\mathfrak{l}$ номер $\mathrm{sb}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ выражения, получающегося из $\mathfrak{K}$ в результате замены переменной a цифрой $\mathfrak{l}$.

Для формализации рассматриваемой антиномии вместо того, чтобы изображать функцию $\mathrm{sb}(k, l)$ термом $\mathfrak{s}(k, l)$, нам достаточно изобразить трехместный предикат $\mathrm{sb}(k, l) = m$ такой формулой $\mathfrak{S}(k, l, m)$ из F, не содержащей отличных от k, l и m свободных переменных, чтобы для произвольных цифр $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$, удовлетворяющих равенству

$$\mathrm{sb}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}) = \mathfrak{m},$$

в F была выводима формула $\mathfrak{S}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ и чтобы, кроме того, в F выводилась формула

$$(1) \qquad \forall x \forall y \forall u \forall v (\mathfrak{S}(x, y, u) \,\&\, \mathfrak{S}(x, y, v) \to u = v).$$

Действительно, пусть $\mathfrak{p}$ — номер формулы

$$\forall x (\mathfrak{S}(a, a, x) \to \neg \mathfrak{M}(x)),$$

а $\mathfrak{q}$ — цифра, являющаяся значением $\mathrm{sb}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$. Тогда $\mathfrak{q}$ является номером формулы

$$\forall x (\mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, x) \to \neg \mathfrak{M}(x)).$$

Так как эта формула не содержит свободных переменных, то, согласно предположению г), в F выводимы формулы

$$(2) \qquad \mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \to \forall x (\mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, x) \to \neg \mathfrak{M}(x))$$

и

$$(3) \qquad \forall x (\mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, x) \to \neg \mathfrak{M}(x)) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{q}).$$

Далее, так как справедливо равенство

$$\mathrm{sb}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q},$$

то в F выводима формула

$$(4) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}).$$

Из формул (2) и (4) можно получить формулу

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{q}) \to \neg \mathfrak{M}(\mathfrak{q}),$$

а из нее — формулу

$$\neg \mathfrak{M}(\mathfrak{q}).$$

Эта формула, взятая вместе с формулами (4) и (1), на основании общей аксиомы равенства дает формулу

$$\forall x (\mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, x) \to \neg \mathfrak{M}(x)),$$

которая в сочетании с (3) дает формулу

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{q}),$$

так что мы снова получаем противоречие.

Замечание. В этом рассуждении мы пользовались предположением, что формализм F удовлетворяет условию в). Однако совершенно аналогичным образом можно рассуждать и в том случае, когда формализм F не содержит свободных переменных. В этом случае выражение $\mathfrak{S}(k, l, m)$ не будет принадлежать фор-

мализму F, а будет играть роль именной формы. Зато для произвольных $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ выражение $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m})$, а также выражение (1) будут формулами из F. Переменная a будет учтена в нумерации выражений, входящих в F, так что метаматематический смысл функции $\mathrm{sb}(k, l)$ сохранится и выражение

$$\forall x (\mathfrak{S}(a, a, x) \to \neg \mathfrak{M}(x))$$

получит некоторый номер, хотя оно и не будет принадлежать формализму F.

Это рассуждение равным образом может быть распространено и на случай такого формализма F, в котором роль цифр играют какие-нибудь другие, более сложным образом устроенные термы.

На основе всех наших замечаний относительно возможности ослабления предположений а) — г) мы могли бы сформулировать какую-нибудь модифицированную версию этих предположений. Однако такая версия, по-видимому, была бы довольно громоздкой и снова содержала бы ненужные ограничения на формализм F. Окончательная общность в этом направлении едва ли может быть достигнута.

Но эти замечания о возможности ослабления наших предположений показывают, что обстоятельство, которое было отмечено в связи с формализацией антиномии лжеца и для которого достаточно предположений а), б) и в), имеет место и в формализмах гораздо более общей структуры. Это обстоятельство состоит в том, что в формализмах указанного типа при условии их непротиворечивости понятие истинности данного высказывания не может быть изображено способом, соответствующим основным формальным свойствам этого понятия.

Тот факт, что такая невозможность имеет место во всех арифметически достаточно выразительных формализмах, а также в достаточно формально описанных дедуктивных формализмах, удовлетворяющих определенным, весьма общим условиям, был обнаружен Альфредом Тарским в его работе «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen» и высказан в виде теоремы [1]), причем Тарский подчеркнул, что аналогичная ситуация имеет место и по отношению к другим семантическим понятиям, отличным от понятия истинности данного высказывания. И действительно, при условиях, аналогичных указанным выше, формально-дедуктивное изображение различных понятий, относящихся к связи между обозначением и обозначаемым, также оказывается невозможным.

[1]) Указанное сочинение Тарского сначала появилось на польском языке в Travaux de la soc. des sciences ... de Varsovie в Варшаве в 1933 г. после анонса: Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen — Akad. d. Wissensch. Wien, Anzeiger, 1932, 69. Немецкий перевод этого сочинения опубликован, с послесловием, в Studia philosophica, 1935, 1.

Замечательным фактом этого рода является невозможность изобразить понятие «значения выражения, определяющего некоторое число», которая также может быть установлена при весьма общих предположениях относительно рассматриваемого дедуктивного формализма. Мы даже могли бы извлечь ее непосредственно из нашего предыдущего результата, касающегося формализации понятия истинного высказывания, если бы наложили на рассматриваемые формализмы некоторое дополнительное условие.

При этом мы, как и прежде, ограничимся рассмотрением таких дедуктивных формализмов, которые удовлетворяют предположениям а), б) и в).

Добавляемое к этим предположениям *дополнительное условие* заключается в том, что мы требуем, чтобы для каждой формулы $\mathfrak{A}$ формализма F, не содержащей свободных переменных, можно было указать такой терм $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$ без свободных переменных, что формула $\mathfrak{A}$ переводима в равенство

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{A}) = 0,$$

причем это сопоставление формуле $\mathfrak{A}$ терма $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$ должно производиться таким образом, чтобы номер терма $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$ был рекурсивной функцией номера формулы $\mathfrak{A}$.

Это дополнительное предположение, которое мы обозначим посредством $\mathrm{в}_1$), выполняется всякий раз, когда формализм F содержит кванторы, ι-символ и относящиеся к ним правила и формулы (или схемы формул).

Действительно, в каком случае в качестве $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$ можно взять ι-терм

$$\iota_x (\mathfrak{A} \to x = 0 \,\&\, \neg \mathfrak{A} \to x = 1),$$

который мы в гл. VIII т. I обозначали посредством $\omega(\mathfrak{A})$ и для которого может быть выведена эквивалентность

$$\mathfrak{A} \sim \omega(\mathfrak{A}) = 0\ ^{1}).$$

Совершенно аналогичным образом допущение $\mathrm{в}_1$) выполняется и тогда, когда в F содержится ε-символ вместе с ε-формулой или вместо них μ-символ и квантор существования вместе с формулой (μ_1) и основной формулой (b), причем упомянутые формулы могут быть заменены соответствующими схемами формул.

Вместо условия г) теперь вводится следующее условие:

$\mathrm{г}_1$) Существует терм $\mathfrak{e}(a)$ с числовой переменной a в качестве единственной входящей в него свободной переменной, обладающий тем свойством, что если n является номером некоторого терма $\mathfrak{t}$, не содержащего свободных переменных, то в F выводимо

[1]) См. т. I, с. 478 — 479.

равенство

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{t}.$$

Чтобы убедиться, что это допущение Γ_1) в сочетании с предположениями а), б), в) и B_1) ведет к противоречию, достаточно показать, что в случае совместного выполнения условий а), б), в), B_1) и Γ_1) будет выполняться и утверждение г). Это может быть сделано следующим образом:

По предположению B_1), для любой формулы $\mathfrak{A}$ из F, не содержащей свободных переменных, номер терма $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$ изображается (в его зависимости от номера формулы $\mathfrak{A}$) с помощью некоторой рекурсивной функции, а эта функция в свою очередь изображается в F с помощью некоторого терма $\mathfrak{b}(a)$. Это означает, что если $\mathfrak{n}$ является номером формулы $\mathfrak{A}$, не содержащей свободных переменных, а $\mathfrak{l}$ является номером терма $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$, то в F выводимо равенство

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{l}.$$

В тех же обозначениях в силу допущения Γ_1) в F выводимо равенство

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{l})) = \mathfrak{h}(\mathfrak{A}),$$

так как $\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$ является термом без свободных переменных. Равенства

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{l} \quad \text{и} \quad \mathfrak{e}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{h}(\mathfrak{A}),$$

взятые друг с другом, с помощью общей аксиомы равенства (J_2) дают формулу

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{b}(\mathfrak{n})) = \mathfrak{h}(\mathfrak{A}),$$

с помощью которой равенство

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{b}(\mathfrak{n})) = 0$$

переводимо в равенство

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{A}) = 0.$$

Но это равенство, согласно предположению B_1), переводимо в формулу $\mathfrak{A}$. Тем самым в F выводимы формулы

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{b}(\mathfrak{n})) = 0 \to \mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \to \mathfrak{e}(\mathfrak{b}(\mathfrak{n})) = 0.$$

Эти выводимости имеют место всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ является формулой из F без свободных переменных, а $\mathfrak{n}$ является номером этой формулы. Следовательно, формула $\mathfrak{e}(\mathfrak{b}(a)) = 0$ обладает свойством, которое в условии г) требуется от формулы $\mathfrak{M}(a)$.

Таким образом, выполнение условия г) действительно является следствием выполнения предположений а), б), в), B_1) и Γ_1). Но, согласно замеченному ранее, отсюда следует, что в случае непротиворечивого дедуктивного формализма, удовлетворяющего условиям а), б), в) и B_1), условие Γ_1) выполняться не может.

Невозможность выполнения — при указанных предположениях — условия Γ_1) означает, что дедуктивный формализм F, удовлетворяющий этим предположениям, не может содержать такое функциональное выражение, которое формализовало бы некую нумерацию, при которой каждому числу, являющемуся номером терма без свободных переменных (т. е. некоторого определяющего число выражения из F), сопоставляется значение этого выражения.

Было бы соблазнительно интерпретировать это обстоятельство проще. Однако надо заметить, что в условии Γ_1) отнюдь не требуется, чтобы было возможно *эффективное* вычисление значения любого терма $\mathfrak{t}$, не содержащего свободных переменных. Действительно, если $\mathfrak{n}$ — номер терма $\mathfrak{t}$, то требуется только выводимость равенства

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{t},$$

а не выводимость равенства

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{m}$ — *цифра*, являющаяся значением этого терма $\mathfrak{t}$. Таким образом, допущение Γ_1) требует формализуемости только *понятия* значения, а не какого-либо формально-дедуктивного вычисления в рамках F.

Ситуация, обнаруженная нами в связи с условием Γ_1), находится в тесной взаимосвязи с теми семантическими антиномиями, которые обычно объединяются под общим названием *парадокса Ришара*[1]. Эту взаимосвязь мы изложим здесь на примере одного особенно известного частного случая парадокса Ришара. Речь пойдет о следующем рассуждении:

Рассмотрим совокупность тех арифметических функций (т. е. функций, сопоставляющих каждому натуральному значению аргумента натуральное же значение функции), которые могут быть определены с помощью некоторых текстов на русском *) языке[2]).

---

[1]) Ж. Ришар является первооткрывателем некоторых из этих антиномий. См. его работу: Richard Jules. Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. — Rev. générale sci. pur. appl. 1905, **16**, и в дополнение к этому Acta math., 1906, 8. Впрочем, см. также работу Ю. Кёнига: König Julius. Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. — Math. Ann. 1905, **61**.

*) В подлиннике, естественно, речь идет о немецком языке. — *Прим. перев.*

[2]) Понятие «текста на русском языке» здесь следует понимать достаточно широко — так, чтобы в качестве принадлежащих русскому языку рассматривались и различные общеупотребительные научные термины, — например такие, как «функция». Разумеется, эти термины можно было бы заменить соответствующими русскими словами.

Ввиду перечислимости всех конечных последовательностей, состоящих из букв русского алфавита и знаков препинания, можно построить перечисление и для указанных функций. При этом мы можем ограничиться одним только русским алфавитом, а в качестве знаков препинания можно будет взять только точку, запятую, точку с запятой, кавычки, скобки (левую и правую) и знак пробела между словами.

Нумерацию этих последовательностей можно произвести следующим образом: сначала устанавливается определенная очередность для отдельных знаков (например, сначала пишутся буквы алфавита, а затем только что перечисленные знаки препинания — в указанном порядке), а потом устанавливается очередность последовательностей, составленных из знаков: в первую очередь по количеству знаков в последовательности, а при равном количестве — лексикографически.

Среди занумерованных таким образом последовательностей содержатся, в частности, все те, которые представляют собой русские тексты определений каких-либо арифметических функций. Каждый такой текст получает при этом определенный номер и тем самым получается некоторое перечисление, — правда, с повторениями — арифметических функций, определяемых по крайней мере одним из таких текстов: $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$, ...

Теперь к этой последовательности функций мы можем применить канторовскую диагональную процедуру, состоящую в построении функции $(\psi_n(n))'$. Эта функция тоже является арифметической, но она отличается от всех функций последовательности $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$, ..., потому что если бы для какого-нибудь номера t выполнялось равенство

$$\psi_t(n) = (\psi_n(n))',$$

то у нас получилось бы ложное равенство

$$\psi_t(t) = (\psi_t(t))'.$$

Значит, функция $(\psi_n(n))'$ не может встречаться в последовательности $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$, ... Но, с другой стороны, эту функцию можно определить с помощью некоторого русского текста. Действительно, описание нашего способа перечисления (с повторениями) арифметических функций, определимых с помощью русских текстов, было сформулировано на русском языке, а последующее символическое построение функции $(\psi_n(n))'$ может быть заменено следующим определением, записанным на русском языке: «Та самая арифметическая функция, которая для каждого данного натурального числа принимает значение, на единицу большее числа, являющегося значением той функции, номер которой в полученной последовательности арифметических функций равен данному числу».

Следовательно, функция $(\psi_n(n))'$ должна встречаться в нашей последовательности $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$, ... Таким образом, мы приходим к противоречию.

При анализе этой антиномии в первую очередь бросается в глаза то, что понятие *определения арифметической функции при помощи текста на русском языке* является довольно неточным, и поэтому выделение тех текстов, которые определяли бы арифметические функции, представляется проблематичным. Однако такая точка зрения еще не дает полного объяснения парадокса. В самом деле, при формализации этой антиномии мы могли бы исключить указанную трудность, ограничившись рассмотрением лишь таких дедуктивных формализмов, в которых выражения, изображающие арифметические функции, выделяются среди прочих выражений своей формальной структурой.

Действуя в духе этого ограничения, добавим к нашим допущениям[1] а) — в) относительно формализма F, которые мы опять положим в основу формализации рассматриваемой антиномии[2], следующее дополнительное ограничение:

в*) Среди выражений формализма F термы распознаются по своему внешнему виду, так что (с учетом произведенной нумерации) свойство числа «быть номером какого-либо терма» представляет собой рекурсивный предикат. Далее, каждый терм, не содержащий свободных переменных, изображает некоторое, однозначно определенное число. Однако это определение может быть всего лишь описательным, т. е. без указания эффективного построения соответствующего числа.

При соответствующем выборе определений условие в*) будет выполняться для формализма арифметики, а также для формализма анализа и объемлющих их формализмов[3].

Мы теперь покажем, что из предположений а) — в) и в*) относительно формализма F и рассматриваемой нами нумерации в сочетании с допущением r_1) следует выводимость в F некоторого противоречия.

Действительно, из предположений б), в) и в*) получается, что свойство числа m «быть номером некоторого терма с число-

---

[1]) См. с. 322 и далее.

[2]) Для простоты мы снова предполагаем, что числовые переменные, а также символы для предиката равенства и для арифметической функции следования совпадают с употреблявшимися ранее. Кроме того, мы предполагаем, что номер терма t всегда меньше номера терма t'. Эти несущественные добавки к допущениям а) — в) в дальнейшем специально оговариваться не будут.

[3]) Например, оно выполняется для формализма, описанного в книге Р. Карнапа: Carnap R. Logische Syntax der Sprache. — Wien, 1934 под названием «Sprache II». Этот формализм представляет собой теорию типов с включением аксиом Пеано и формализации понятия наименьшего числа.

вой переменной a в качестве единственной свободной переменной» является рекурсивным предикатом. Обозначим его через $\mathfrak{F}(m)$.

Рассмотрим номера термов a, a', ..., $a^{(r)}$. Все эти номера обладают свойством $\mathfrak{F}$ и являются попарно различными. Номер терма $a^{(r)}$ в его зависимости от r изображается некоторой рекурсивной функцией $\mathfrak{v}(n)$. Для этой функции выполняются неравенства

$$n \leqslant \mathfrak{v}(n) \quad \text{и} \quad \mathfrak{v}(n) < \mathfrak{v}(n').$$

Кроме того, имеет место

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{v}(n)).$$

Последовательность цифр, обладающих свойством $\mathfrak{F}$, можно изобразить — в порядке их возрастания — с помощью некоторой рекурсивной функции $\mathfrak{t}(n)$. Именно, $\mathfrak{t}(n)$ можно определить рекурсивными равенствами [1])

$$\mathfrak{t}(0) = \operatorname*{Min}_{x \leqslant \mathfrak{v}(0)} \mathfrak{F}(x),$$

$$\mathfrak{t}(n') = \operatorname*{Min}_{x \leqslant \mathfrak{v}(n')} (\mathfrak{F}(x) \,\&\, \mathfrak{t}(n) < x).$$

Для этой функции справедливы следующие (выводимые в рекурсивной арифметике) формулы:

$$\mathfrak{t}(n) \leqslant \mathfrak{v}(n), \quad \mathfrak{t}(n) < \mathfrak{t}(n'), \quad n \leqslant \mathfrak{t}(n), \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{t}(n)).$$

Согласно предположению а) функция $\mathfrak{t}(n)$ изображается в F некоторым термом $\mathfrak{f}(n)$ таким, что единственной его свободной переменной является числовая переменная n.

Последовательность значений термов $\mathfrak{f}(0)$, $\mathfrak{f}(0')$, $\mathfrak{f}(0'')$, ... представляет собой перечисление номеров всех тех термов в F, которые имеют a в качестве единственной свободной переменной. Таким образом, последовательности $\mathfrak{f}(0)$, $\mathfrak{f}(0')$, $\mathfrak{f}(0'')$, ... соответствует некоторое перечисление (с повторениями) $\psi_1(a)$, $\psi_2(a)$, ... всех арифметических функций, представимых в F с помощью каких-либо термов с единственной свободной переменной a. При этом для всякой цифры $\mathfrak{n}$ значение терма $\mathfrak{f}(\mathfrak{n})$ является номером некоторого терма $\mathfrak{f}_{\mathfrak{n}}(a)$ в F [2]), изображающего функцию $\psi_{\mathfrak{n}}$ с аргументом a. Если в этот терм вместо a подставить цифру $\mathfrak{n}$, то номер получающегося при этом терма будет [в силу характеристического свойства функции $\mathfrak{s}(k, l)$ [3])] значением терма $\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{n}), \mathfrak{n})$. Поэтому на основании свойства функции $\mathfrak{e}(n)$ [допущение $\mathfrak{r}_1$)] [4]),

[1]) Относительно функции Min см. с. 274 и далее.

[2]) Индекс $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{f}_{\mathfrak{n}}$ указывает только на зависимость рассматриваемого терма от $\mathfrak{n}$.

[3]) См. с. 324.

[4]) См. с. 329 и далее.

получается, что в F выводимо равенство

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{n}), \mathfrak{n})) = \mathfrak{f}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}).$$

Следовательно, функция $(\psi_n(n))'$ может быть представлена в F посредством терма $(\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(a), a)))'$.

Номер этого терма должен встречаться в списке термов $\mathfrak{f}(0)$, $\mathfrak{f}(0')$, $\mathfrak{f}(0'')$, ... Пусть, например, это будет $\mathfrak{f}(\mathfrak{p})$. Если $\mathfrak{m}$ — номер терма

$$(\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})))',$$

то на основе характеристического свойства функции $\mathfrak{s}(k, l)$ в F выводимо равенство

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}) = \mathfrak{m},$$

откуда с помощью аксиом равенства выводится формула

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})) = \mathfrak{e}(\mathfrak{m}).$$

С другой стороны, в силу характеристического свойства функции $\mathfrak{e}(n)$, в F выводимо равенство

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})))'.$$

Но два последних равенства, взятые друг с другом, дают

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})) = (\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})))',$$

в то время как в силу предположения а) в F выводима формула

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})) \neq (\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})))'.$$

Таким образом, формализм F содержит противоречие.

Тем самым мы доказали, что никакой непротиворечивый формализм, удовлетворяющий условиям а) — в) и в*), не может удовлетворять еще и условию $\mathfrak{r}_1$) [1]).

Способ усиления парадокса Ришара, сходный с изложенным нами, приведен Клини и Россером, — правда, для формализмов несколько другого типа [2]). В их рассмотрении вместо нашего допущения в) взяты некоторые другие предположения, а допущение в*) заменено более слабым. Результат этого рассуждения авторы применяют к построенным А. Чёрчем и Х. Б. Карри системам логистики и на этом пути устанавливают непротиворечивость указанных систем.

[1]) Это доказательство можно было бы получить несколько проще. Именно, вместо терма $\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{f}(a), a)))'$ достаточно было бы рассматривать терм $(\mathfrak{e}(\mathfrak{s}(a, a)))'$. Но мы хотели здесь прояснить связь между полученным результатом и усиленным парадоксом Ришара.

[2]) См. Kleene S. C., Rosser J. B. The inconsistency of certain formal logics. — Ann. Math., 1935, 36, 3. См. также Curry H. B. The Paradox of Kleene and Rosser. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 50, p. 454—516.

Прежде чем закончить это изложение семантических парадоксов и их формальное усиление, мы хотели бы подчеркнуть еще одно обстоятельство. Результаты, касающиеся невозможности формального изображения понятия истинного высказывания и понятия значения выражения, определяющего число, в формализованных языках (дедуктивных формализмах), были получены при некоторых общих предположениях относительно этих формализмов. Они справедливы лишь в том смысле, что эти понятия, будучи отнесены к рассматриваемым формализованным языкам, *не могут быть изображены внутри самих этих языков.* Между тем они никоим образом не исключают возможности изображения этих понятий в рамках каких-либо объемлющих формализованных языков. Более того, такая возможность имеется, по всей видимости, в самом общем смысле. И, действительно, формальное изображение этих понятий может быть осуществлено, с одной стороны, аксиоматическим путем, а с другой, — с помощью соответствующих явных определений.

Что касается формализации понятия истинного высказывания при помощи явных определений (определений истинности), то такие определения для различных систем исчисления классов и исчисления предикатов (включая и исчисления второй ступени) были проведены Тарским[1]). Для одного формализма теории типов с включением арифметических аксиом Р. Карнап[2]) дал набросок определения истинности, изложенный на естественном языке. Это определение может быть формализовано в рамках некоторой логистической системы, обладающей достаточными изобразительными возможностями.

В предыдущих главах мы уже познакомились с различными примерами определений истинности, сформулированных на естественном языке. Такими определениями являются определения верифицируемости[3]), сформулированные нами для ряда формализмов. Встречающиеся при рассмотрении проблемы разрешимости определения понятий общезначимости и выполнимости также можно рассматривать (со ссылкой на какой-либо формализм, в рамках которого могут быть формально изображены общезначимость и выполнимость формул исчисления предикатов) как определения истинности или же фрагменты таких определений. В дальнейшем мы рассмотрим пример одного такого формализованного определения истинности[4]).

[1]) В его уже цитированном сочинении: «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen».

[2]) Carnap R. Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik. — Monatsh. Math. Phys., 1935, 42, № 1.

[3]) См. т. I, с. 294, 305, 307, 336, 339, 343, 360, 363, 441, 449.

[4]) См. с. 406—411.

Замечание. Термин определение истинности сам по себе не должен вводить нас в соблазн. Мы не должны ожидать от такого определения философского объяснения понятия истины. Напротив, в большинстве случаев речь здесь идет лишь о некотором уточнении того понимания формул, которое и без того лежит в основе обычного использования формализма, и задача такого определения заключается в том, чтобы выразить это понимание в общем виде, *в его зависимости от структуры рассматриваемой формулы.*

Впрочем, определения истинности, как правило, *не допускают какого-либо финитного истолкования.*

б) Первая теорема Гёделя о неполноте. От антиномии лжеца к упоминавшимся в начале этой главы теоремам Гёделя нас приводит рассмотрение одной модификации этой антиномии и применение к ней метода формального уточнения.

Эта модификация заключается в том, что мы рассматриваем высказывание, выражающее свою собственную *недоказуемость.* Если некто произносит фразу: «предложение, которое я сейчас произношу, не может быть получено в результате какого-либо доказательства», то предположение о том, что это предложение может получиться в результате некоторого доказательства, ведет к противоречию. Таким образом, это предположение должно быть отвергнуто. Но тогда получается, что имеет место именно то, о чем говорится в этом предложении и, значит, это предложение получается в результате некоторого доказательства.

Поначалу складывается впечатление, что мы добавили к антиномии лжеца лишь ненужное осложнение. Но для формального уточнения произведенная нами модификация оказывается очень существенной, так как относительно дедуктивного формализма понятие результата доказательства имеет более элементарный характер, чем понятие истинного высказывания.

Для формализма исчисления предикатов мы в свое время показали, что с помощью соответствующей нумерации отношение между списком формул и формулой $\mathfrak{A}$, указывающее, что этот список является выводом формулы $\mathfrak{A}$, изображается *рекурсивным* отношением $\mathrm{Dd}(m, n)$ между номером этого списка и номером формулы $\mathfrak{A}$ [1]).

Способ, с помощью которого мы получили это изображение, показывает, что возможность такого рекурсивного изображения отношения между числом m, являющимся номером какого-либо списка формул, представляющего собой некоторый вывод, и числом n, являющимся номером заключительной формулы этого вывода, не обусловлена какими-то специфическими особенностями исчисления предикатов, а имеет место для любого достаточно

[1]) См. с. 296.

четко очерченного дедуктивного формализма. Позже мы еще убедимся в рекурсивной изобразимости этого отношения специально в применении к арифметическому формализму.

Гёдель установил рекурсивную изобразимость упомянутого отношения для одного формализма, получающегося из системы, изложенной в Principia mathematica, в результате отказа от различения ступеней, замены аксиомы бесконечности аксиомами Пеано, а также некоторых упрощений. Системы аксиоматической теории множеств при их формализации приводят нас к дедуктивным формализмам, для которых — при подходящей нумерации — отношение номера списка формул, являющегося выводом, к номеру его заключительной формулы также выражается рекурсивным образом [1]).

Поэтому при формализации модифицированной антиномии лжеца не может быть речи о том, чтобы при определенных общих предположениях относительно дедуктивного формализма, включая и предположение о его непротиворечивости, доказывать невозможность формализации понятия результата доказательства. Напротив, мы с самого начала положим в основу нашего рассмотрения обратное предположение, что при нашей нумерации отношение «число m является номером некоторого вывода формулы с номером n» допускает определенное рекурсивное изображение. Это предположение является усилением нашего прежнего допущения относительно рассматриваемого дедуктивного формализма F. Кроме того, мы введем еще одно (правда, лишь незначительное) усиление наших предположений а), б) и в) [2]): в то время как до сих пор только предполагалось, что в формализме F имеются некоторые изображения для функциональных выражений рекурсивной арифметики, теперь мы будем предполагать, что в F содержатся и сами символы для рекурсивных функций. Это предположение выполняется всякий раз уже тогда, когда выполнено условие а) и допускается введение функциональных знаков при помощи явных определений.

Замечание. Собственно говоря, мы могли бы обойтись и без этого предположения, но, с одной стороны, оно облегчает наше рассмотрение, а с другой стороны, его добавление не накладывает на наш результат никаких существенных ограничений.

Далее, приняв ранее уже использованное предположение, что в формализме F символы для связок исчисления высказываний, а также штрих-символ и символ равенства совпадают с символами, которые мы обычно используем для них, и распространив это предположение на символы 0, $<$ и $\leqslant$, мы приходим к тому, что вместо допущений а) и в) можно взять следующее допущение:

a_1) Формализм F содержит термы и формулы рекурсивной арифметики [1]), не считая, быть может, тех, в которых содержатся формульные переменные. Каждая формула без формульных переменных, выводимая в рекурсивной арифметике, выводима и в F, и каждый выполнимый средствами рекурсивной арифметики переход от одной формулы из F к другой выполним и в F.

Допущение б) — после того, как в предшествующих рассмотрениях мы познакомились со способами его использования, — мы сформулируем несколько уже, а кроме того, мы присоединим к нему новое предположение о рекурсивной изобразимости отношения «число m является номером некоторого вывода формулы с номером n». В итоге мы приходим к следующей формулировке.

$б_1$) Существует взаимно однозначная нумерация выражений формализма F натуральными числами, обладающая следующими свойствами:

1. Номер выражения, получающегося из выражения $\mathfrak{A}$ с номером $\mathfrak{k}$ в результате повсеместной замены числовой переменной a цифрой $\mathfrak{l}$, изображается — в его зависимости от $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ — значением некоторой двуместной рекурсивной функции $\mathfrak{s}(k, l)$ при значениях ее аргументов, равных $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$.

2. Высказывание «число m является номером некоторой последовательности выражений из F, являющейся выводом выражения с номером n» с помощью нумерации конечных последовательностей выражений из F, получающейся из нумерации выражений из F путем использования разложения целых чисел $\geqslant 2$ на простые множители, изображается двуместным рекурсивным предикатом и, тем самым, в формализме рекурсивной арифметики оно выражается некоторой рекурсивной формулой [2]) $\mathfrak{B}(m, n)$, у которой m и n суть единственные входящие в нее переменные.

А теперь, чтобы на основе предположений a_1) и $б_1$) получить формализацию нашей модифицированной антиномии лжеца, достаточно установить, что в F имеется такая формула, которая изображает утверждение о своей собственной невыводимости (в формализме F); т. е. если $\mathfrak{q}$ является номером этой формулы, то она изображает высказывание: «каково бы ни было число m, оно не является номером какого-либо списка формул, представляющего собой вывод формулы с номером $\mathfrak{q}$».

Так как мы не предполагали, что формализм F содержит квантор всеобщности, то для только что приведенного высказывания, являющегося предложением типа всеобщности, мы возьмем такое

[1]) Один очень прозрачный формализм этого рода, продолжающий набросок У. В. Куайна (см. Quine W. V. Set-theoretic foundations for logic: — J. Symbolic Logic, 1936, 1; в особенности см. с. 45, 46) и существенно использующий ε-символ, построен Аккерманом в его работе Ackermann W. Mengentheoretische Begründung der Logik. — Math. Ann., 1937, 115, № 1.

[2]) См. с. 322 и далее.

[1]) См. с. 271 и далее.

[2]) См. с. 272.

его изображение, в котором всеобщность будет формализоваться с помощью свободной числовой переменной.

При этом мы будем опираться на восходящий к Гёделю и ранее уже применявшийся метод использования функции $\mathfrak{s}(k, l)$.

Мы строим формулу

$$\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(a, a)),$$

которая, согласно предположению a_1), является формулой формализма F. Пусть эта формула имеет номер $\mathfrak{p}$. Ввиду характеристического свойства функции $\mathfrak{s}(k, l)$ значение $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ является номером формулы

$$\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})).$$

Если этот номер равен $\mathfrak{q}$, то равенство

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$$

выводимо в F, и поэтому формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$ переводима в формулу $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$.

Формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ представляет собой формализацию высказывания «каково бы ни было число m, оно не является номером вывода формулы с номером $\mathfrak{q}$» или, короче, «формула с номером $\mathfrak{q}$ невыводима». Терм $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ является выражением, определяющим цифру $\mathfrak{q}$. Следовательно, только что упомянутое высказывание формализуется и формулой

$$\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})).$$

Так как, с другой стороны, эта формула имеет номер $\mathfrak{q}$, то она является искомой формулой, формализующей утверждение о своей собственной невыводимости.

А теперь уже можно рассуждать следующим образом. Допустим, что формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ выводима в F. Тогда выводима и формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$, т. е. формула с номером $\mathfrak{q}$. Следовательно, можно указать список формул, являющийся выводом формулы с номером $\mathfrak{q}$. Если $\mathfrak{l}$ является номером некоторого такого списка, то имеет место отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$, которое является нумерически устанавливаемым равенством (или соответственно может быть преобразовано в такое равенство), и тогда формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ выводима в F. Так как, с другой стороны, согласно сделанному предположению, выводима формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$, то, согласно предположению a_1), выводима и формула $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$. Тем самым в формализме F появляется противоречие.

То же самое следствие получается и из предположения, что отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ имеет место для какой-либо цифры $\mathfrak{l}$. Действительно, если это отношение выполняется, то, с одной стороны, в F выводима формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$. С другой стороны, в этом случае $\mathfrak{l}$ является номером некоторого списка формул, представляющего собой вывод формулы с номером $\mathfrak{q}$, т. е. формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$. Следовательно, эта формула выводима в F, а значит, выводима и формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$, из которой выводима формула $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$.

Если мы теперь еще заметим, что, согласно предположению a_1), для любой цифры $\mathfrak{l}$ выводима либо формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$, которая является нумерической, либо ее отрицание $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ и что одновременно с выводимостью формулы $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ имеет место отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$, а одновременно с выводимостью формулы $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ имеет место отношение $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$, то получим следующий результат: если формализм F непротиворечив, то для любой цифры $\mathfrak{l}$ имеет место отношение $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ и формула $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ выводима в F, между тем как формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ в F невыводима. То, что отношение $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ имеет место для любой цифры $\mathfrak{l}$, означает, что формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ *верифицируема*. Будучи рекурсивной, эта формула переводима в некоторое равенство $\mathfrak{f}(m) = 0$, где $\mathfrak{f}$ — рекурсивно введенный функциональный знак с одним аргументом.

Тем самым получается следующая

Теорема. *Для любого непротиворечивого дедуктивного формализма F, удовлетворяющего условиям a_1) и $б_1$), можно указать такую одноместную рекурсивную функцию $\mathfrak{f}$, что формула*

$$\mathfrak{f}(m) = 0$$

невыводима в F, хотя она и является верифицируемой, так что для каждой цифры $\mathfrak{l}$ в F выводимо равенство

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{l}) = 0.$$

Эту теорему, которую Гёдель получил указанным здесь способом, мы будем называть *первой теоремой Гёделя о неполноте*. В гёделевской формулировке фигурирует не сама эта теорема, а некоторое извлекаемое из нее следствие, которое говорит о существовании таких арифметических предложений, которые в рассматриваемом формализме F являются формально неразрешимыми. При этом под формально неразрешимым в F предложением понимается такое предложение, которое изображается в F некоторой формулой без свободных переменных, причем ни сама эта формула, ни ее отрицание невыводимы в F [1]).

---

[1]) Содержащееся в этом определении требование ограничиваться формулами без свободных переменных является обязательным, потому что при изображении предложений типа всеобщности с помощью формул с одной или несколькими свободными переменными отрицание такого предложения не изображается отрицанием соответствующей формулы. Формула со свободными переменными, невыводимая в данном формализме вместе со своим отрицанием, еще может и не изображать формально неразрешимое в этом формализме предложение. Так, например, в формализме арифметики (если он непротиворечив) невыводимы ни формула $a = 0$, ни формула $a \neq 0$. Формулу $a = 0$ можно считать изображением

Для получения упомянутого следствия мы должны дополнительно предположить, что формализм F содержит квантор всеобщности вместе с относящимися к нему формальными способами умозаключений, так что если $\mathfrak{A}(a)$ является формулой из F, не содержащей связанной переменной $\mathfrak{x}$, то $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ также является формулой из F, а кроме того, схема формул $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}(a)$ является основной или выводимой, а схема (α) — основной или производной схемой в F.

В этом случае из невыводимости формулы

$$\mathfrak{f}(m) = 0$$

получается, что невыводима также и формула

$$\forall x (\mathfrak{f}(x) = 0).$$

Сделаем теперь относительно F некоторое *дополнительное допущение*, представляющее собой усиление требования непротиворечивости этого формализма, а именно, будем считать, что если для каждой цифры $\mathfrak{n}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ выводима в F, то формула $\neg \forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ невыводима в F.

Тогда из того, что в F для каждой цифры $\mathfrak{l}$ выводимо равенство

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{l}) = 0,$$

будет вытекать невыводимость в F формулы

$$\neg \forall x (\mathfrak{f}(x) = 0).$$

Если мы, следуя Гёделю, назовем непротиворечивый дедуктивный формализм, удовлетворяющий этому дополнительному условию, ω-непротиворечивым, то получим следующую теорему:

Для всякого формализма F, удовлетворяющего условиям $\mathfrak{a}_1$) *и* $\mathfrak{б}_1$), *содержащего квантор всеобщности (вместе с относящимися к нему формальными способами умозаключений) и, кроме того, ω-непротиворечивого, можно указать такую формулу без свободных переменных, что ни сама она, ни ее отрицание не будут выводимы в F.*

Однако, как недавно показал Баркли Россер [1]), предположение об ω-непротиворечивости F из формулировки этой теоремы может быть исключено, т. е. вместо ω-непротиворечивости F мы, как

(ложного) предложения «каждое число равно нулю». Но отрицание этого предложения изображается не формулой $a \neq 0$, а формулой $\neg \forall x (x = 0)$, которая в действительности выводима в арифметическом формализме. Таким образом, упомянутое предложение не является формально неразрешимым в формализме арифметики.

[1]) См. Rosser J. B. Extensions of some theorems of Gödel and Church. — J. Symbolic Logic, 1936, **1**, № 3.

и раньше, можем говорить о непротиворечивости F в обычном смысле этого слова.

Для доказательства этого усиления теоремы Гёделя целесообразно ввести предположение, что, кроме квантора всеобщности, формализм F содержит еще и квантор существования вместе с относящимися к нему формальными способами умозаключений. Потом можно будет снять это предположение. Впрочем, по-прежнему должны быть выполнены предположения $\mathfrak{a}_1$) и $\mathfrak{б}_1$) и, кроме того, еще одно предположение $\mathfrak{б}_1'$): имеется такая рекурсивная функция $\mathfrak{e}(n)$, которая номеру любой формулы формализма F ставит в соответствие номер отрицания этой формулы.

Вместо фигурирующей в гёделевском доказательстве формулы $\neg \mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(a, a))$ мы рассмотрим формулу

$$\forall x \{\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(a, a)) \to \exists y (y \leqslant x \,\&\, \mathfrak{B}(y, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(a, a))))\}.$$

Пусть $\mathfrak{p}$ является номером этой формулы, а $\mathfrak{q}$ является номером формулы

$$\forall x \{\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \exists y (y \leqslant x \,\&\, \mathfrak{B}(y, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))))\},$$

которую мы для краткости обозначим буквой $\mathfrak{C}$. Тогда в F будет выводимо равенство

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q},$$

а потому формула $\mathfrak{C}$ будет переводима в формулу

$$\forall x \{\mathfrak{B}(x, \mathfrak{q}) \to \exists y (y \leqslant x \,\&\, \mathfrak{B}(y, \mathfrak{e}(\mathfrak{q})))\},$$

которую мы обозначим $\mathfrak{C}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{C}$ выводима в F. Тогда для некоторой цифры $\mathfrak{l}$, являющейся номером вывода формулы $\mathfrak{C}$, будет иметь место отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$. А тогда в F будет выводима и формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$, а также и формула $\mathfrak{C}_1$. Из $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})$ получается формула

$$\exists y (y \leqslant \mathfrak{l} \,\&\, \mathfrak{B}(y, \mathfrak{e}(\mathfrak{q}))),$$

которая с помощью выводимой средствами рекурсивной арифметики формулы

$$c \leqslant \mathfrak{l} \sim c = 0 \vee \ldots \vee c = \mathfrak{l}$$

и с использованием аксиом равенства переводима в дизъюнкцию

$$\mathfrak{B}(0, \mathfrak{e}(\mathfrak{q})) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{e}(\mathfrak{q})).$$

Эта дизъюнкция является формулой без переменных. Поэтому, вычисляя соответствующие рекурсивные функции и интерпретируя связки исчисления высказываний как истинностные функции, можно найти ее истинностное значение.

Если эта дизъюнкция является истинной, то истинна по крайней мере одна из формул

$$\mathfrak{B}(0, e(q)), \ldots, \mathfrak{B}(l, e(q)),$$

и тогда по крайней мере одна из цифр от 0 до l является номером некоторого вывода формулы $\neg\mathfrak{C}$, номер которой равен значению $e(q)$. Следовательно, в этом случае формула $\neg\mathfrak{C}$ выводима в F. Но по нашему предположению в F выводима и формула $\mathfrak{C}$. Значит, в этом случае формализм F противоречив.

Если же дизъюнкция

$$\mathfrak{B}(0, e(q)) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}(l, e(q))$$

является ложной, то ее отрицание истинно, а значит, и выводимо в F, между тем как, с другой стороны, в F выводима и сама эта дизъюнкция. Тем самым формализм F опять оказывается противоречивым.

Предположим теперь, что в F выводима формула $\neg\mathfrak{C}$. Тогда для некоторой конкретной цифры l имеет место отношение $\mathfrak{B}(l, e(q))$, а тогда в F выводима также и формула $\mathfrak{B}(l, e(q))$. Из этой формулы мы получаем формулу

$$l < c \to \exists y\,(y \leqslant c \,\&\, \mathfrak{B}(y, e(q))),$$

а из нее

$$\neg\exists y\,(y \leqslant c \,\&\, \mathfrak{B}(y, e(q))) \to c \leqslant l.$$

С другой стороны, предположенная выводимой формула $\neg\mathfrak{C}$ переводима в $\neg\mathfrak{C}_1$, а эта в свою очередь — в формулу

$$\exists x\,\{\mathfrak{B}(x, q) \,\&\, \neg\exists y\,(y \leqslant x \,\&\, \mathfrak{B}(y, e(q)))\}.$$

Эта формула, взятая вместе с только что выведенной из $\mathfrak{B}(l, e(q))$ формулой, дает

$$\exists x\,(\mathfrak{B}(x, q) \,\&\, x \leqslant l),$$

а эта формула с помощью ранее уже упоминавшейся эквивалентности

$$c \leqslant l \sim c = 0 \vee \ldots \vee c = l$$

переводима в дизъюнкцию

$$\mathfrak{B}(0, q) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}(l, q).$$

А теперь мы можем опять произвести соответствующий разбор случаев. Указанная дизъюнкция является либо истинной, либо ложной. Если она истинна, то истинен один из ее членов, и тогда формула с номером q, т. е. формула $\mathfrak{C}$, выводима в F, между тем как, с другой стороны, по предположению выводима формула $\neg\mathfrak{C}$; значит, в этом случае формализм F противоречив.

Если же эта дизъюнкция ложна, то истинно ее отрицание, и тогда это отрицание выводимо в F, между тем как, с другой стороны, выводима сама эта дизъюнкция. Значит, и в этом случае формализм F тоже противоречив.

Таким образом, в целом получается, что и в том случае, когда в F выводима формула $\mathfrak{C}$, и в том случае, когда в F выводима $\neg\mathfrak{C}$, этот формализм оказывается противоречивым, так что если формализм F непротиворечив, то формула $\mathfrak{C}$ изображает некоторое формально неразрешимое в F предложение.

Впрочем, формула $\mathfrak{C}$ может быть переведена в некоторую формулу вида

$$\forall x\,(\mathfrak{f}(x) = 0),$$

где $\mathfrak{f}(\cdot)$ — рекурсивно определенный функциональный знак, так как формула

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \exists y\,[y \leqslant m \,\&\, \mathfrak{B}(y, e(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})))]$$

задает некоторый рекурсивный предикат $\mathfrak{P}(m)$.

Наше рассуждение также показывает, что если формализм F непротиворечив, то для любой цифры l формула $\mathfrak{B}(l, q)$ ложна, и потому всякая нумерическая формула, получающаяся преобразованием формулы

$$\mathfrak{B}(l, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) \to \exists y\,(y \leqslant l \,\&\, \mathfrak{B}(y, e(\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})))),$$

является истинной, а потому и выводимой в F формулой. (Тем самым в F выводима и сама указанная формула.)

Как уже отмечалось, из этого рассмотрения можно исключить предположение о наличии в формализме F квантора существования. Для этого достаточно всюду заменить выражения вида $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ соответствующими им выражениями $\neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и воспользоваться тем, что любая формула вида

$$\neg\forall\mathfrak{x}\neg(\mathfrak{x} \leqslant l \,\&\, \mathfrak{K}(\mathfrak{x})),$$

где l — цифра, может быть переведена сначала в формулу

$$\neg\forall\mathfrak{x}\,(\mathfrak{x} \leqslant l \to \neg\mathfrak{K}(\mathfrak{x})),$$

а затем с помощью формулы

$$c \leqslant l \sim c = 0 \vee \ldots \vee c = l$$

в формулу

$$\neg(\neg\mathfrak{K}(0) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\mathfrak{K}(l)).$$

Упомянем еще одно замечание, которое Россер делает в его уже цитированной работе в связи с гёделевским доказательством первой теоремы о неполноте[1]), а также в связи со своей моди-

[1]) Это замечание относится, впрочем, и ко второй теореме Гёделя о неполноте.

фикацией этого доказательства. В этих доказательствах предположение о том, что формула $\mathfrak{B}(m, n)$ является рекурсивным изображением отношения «число m является номером некоторого вывода в F формулы с номером n», используется не в полном объеме. Из свойств формулы $\mathfrak{B}(m, n)$, кроме того, что она является рекурсивной формулой, не содержащей отличных от m и n переменных, используется только то, что цифра $\mathfrak{n}$ является номером некоторой выводимой в F формулы тогда и только тогда, когда для некоторой конкретной цифры $\mathfrak{m}$ имеет место отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовала рекурсивная формула $\mathfrak{B}(m, n)$, обладающая указанным свойством, заключается в том, что номера формул, выводимых в F, должны образовывать область значений некоторой одноместной рекурсивной функции $\mathfrak{d}(n)$, так что последовательность значений этой функции

$$\mathfrak{d}(0), \quad \mathfrak{d}(0'), \quad \mathfrak{d}(0''), \ \ldots$$

будет представлять собой пересчет (может быть, с повторениями) номеров выводимых в F формул.

Действительно, если это условие выполняется, то равенство

$$\mathfrak{d}(m) = n$$

представляет собой рекурсивную формулу, обладающую указанным свойством.

Но указанное условие является также и необходимым. Действительно, как это показал Клини[1]), для всякой рекурсивной формулы $\mathfrak{B}(m, n)$, для которой известна по крайней мере одна пара чисел $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ такая, что формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ является истинной, можно указать одноместную рекурсивную функцию $\mathfrak{d}(n)$ такую, что для всякой пары чисел $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ такой, что $\mathfrak{s}$ является значением $\mathfrak{d}(\mathfrak{r})$, можно указать цифру $\mathfrak{q}$, для которой формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{q}, \mathfrak{s})$ истинна, и для всякой пары чисел $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{s}$ такой, что формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{q}, \mathfrak{s})$ истинна, можно указать цифру $\mathfrak{r}$ такую, что $\mathfrak{s}$ является значением $\mathfrak{d}(\mathfrak{r})$. В самом деле, такую функцию $\mathfrak{d}(n)$ можно получить следующим образом: будучи рекурсивной, формула $\mathfrak{B}(m, n)$ допускает перевод в равенство

$$\mathfrak{t}(m, n) = 0,$$

где $\mathfrak{t}(m, n)$ — некоторый рекурсивный терм. Пусть $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$ — введенные в гл. VII т. I рекурсивные функции, обращающие рекурсивную функцию $\sigma(a, b)$, которая дает взаимно однозначное отображение числовых пар на числа[1]). Возьмем цифру $\mathfrak{n}$, входящую в какую-нибудь такую цифровую пару $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, что формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ оказывается истинной. Тогда выражение

$$\mathfrak{n} \cdot \operatorname{sgn}(\mathfrak{t}(\sigma_1(n), \sigma_2(n))) + \sigma_2(n) \cdot \overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{t}(\sigma_1(n), \sigma_2(n))),$$

как легко убедиться, задает некоторую функцию $\mathfrak{d}(n)$, обладающую искомым свойством[2]).

Таким образом, в допущении $\mathfrak{b}_1$) условие, относящееся к формуле $\mathfrak{B}(m, n)$, может быть заменено более слабым требованием, чтобы номера выводимых в F формул образовывали область значений какой-либо одноместной рекурсивной функции[3]).

Итоговое допущение, которое таким образом появляется на месте предположения $\mathfrak{b}_1$), мы обозначим через $\mathfrak{b}_1^*$). Введя вместо $\mathfrak{b}_1$) это допущение $\mathfrak{b}_1^*$) и объединив утверждение о существовании формально неразрешимых предположений с нашей формулировкой первой теоремы Гёделя о неполноте, мы получаем следующий *усиленный вариант* этой теоремы:

1. *Для всякого непротиворечивого дедуктивного формализма F, удовлетворяющего условиям* $\mathfrak{a}_1$) *и* $\mathfrak{b}_1^*$), *можно указать такую рекурсивную функцию* $\mathfrak{f}(m)$, *что равенство*

$$\mathfrak{f}(m) = 0$$

невыводимо в F, в то время как для любой цифры $\mathfrak{l}$ равенство

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{l}) = 0$$

является истинной и выводимой в F формулой.

2. *Для всякого непротиворечивого дедуктивного формализма F, удовлетворяющего условиям* $\mathfrak{a}_1$), $\mathfrak{b}_1^*$) *и* $\mathfrak{b}_1'$) *и содержащего квантор*

[1]) Kleene S. C. General recursive functions of natural numbers. — Math. Ann., 1936, **112**, № 5, теорема III.

[1]) См. т. I, с. 395 и далее.

[2]) В данном частном случае, когда рекурсивная формула $\mathfrak{B}(m, n)$ изображает отношение доказуемости, искомую функцию $\mathfrak{d}(n)$ можно получить несколько более простым способом. В этом случае формула $\mathfrak{B}(m, n)$ имеет вид

$$\mathfrak{B}_1(m) \,\&\, (\mathfrak{v}(m, \lambda(m)) = n),$$

где $\mathfrak{B}_1(m)$ — некоторый рекурсивный предикат, т. е. предикат, представимый некоторым равенством $\mathfrak{b}_1(m) = 0$, где $\mathfrak{b}_1(m)$ — рекурсивная функция. Поэтому, если $\mathfrak{n}$ является номером какой-либо доказуемой формулы, то рекурсивный терм

$$\mathfrak{n} \cdot \operatorname{sgn}(\mathfrak{b}_1(m)) + \mathfrak{v}(m, \lambda(m)) \cdot \overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{b}_1(m))$$

со свободной переменной m дает пересчет (с повторениями) номеров выводимых в F формул.

[3]) Например, это требование будет выполнено, если можно указать такую рекурсивную формулу $\mathfrak{C}(l, m, n)$, не содержащую отличных от l, m и n переменных, что цифра $\mathfrak{m}$ является номером некоторого вывода формулы с номером $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда отношение $\mathfrak{C}(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ имеет место для некоторой цифры $\mathfrak{l}$. В этом можно убедиться, воспользовавшись вместо только что использованного пересчета числовых пар рекурсивным пересчетом числовых троек.

всеобщности вместе с относящимися к нему формальными способами умозаключений, можно указать такую рекурсивную функцию $\mathfrak{f}(m)$, *что ни формула*

$$\forall x\,(\mathfrak{f}(x) = 0),$$

ни ее отрицание не будут выводимы в F.

[Из невыводимости формулы $\neg\,\forall x\,(\mathfrak{f}(x) = 0)$, в частности, следует, что для любой цифры $\mathfrak{l}$ формула $\mathfrak{f}(\mathfrak{l}) = 0$ является истинной и выводимой в F.]

Поэтому каждый обладающий достаточными изобразительными возможностями и достаточно четко очерченный формализм является дедуктивно незавершенным; точнее говоря, существуют предложения, причем даже предложения рекурсивной арифметики, которые формулируемы в нем, но дедуктивно неразрешимы. Если же удастся доказать непротиворечивость этого формализма F, то найдется такое предложение рекурсивной арифметики, которое хотя и будет доказуемым, но не будет *формально доказуемым в* F. Действительно, если формализм F непротиворечив, то предложение, изображаемое рассматриваемым нами равенством $\mathfrak{f}(m) = 0$, в силу доказанной теоремы о неполноте будет истинным.

Поэтому любой дедуктивный формализм, для которого удается провести доказательство его непротиворечивости, не может содержать в себе запас всех возможных доказательств арифметических предложений.

Если даже отвлечься от трудностей, связанных с проблемой установления непротиворечивости, то и тогда — уже в силу констатированной нами дедуктивной незавершенности любого обладающего достаточными изобразительными возможностями и достаточно четко очерченного дедуктивного формализма — идея характеризации математики как дедуктивного формализма, время от времени выдвигавшаяся различными логистическими системами, представляется бесперспективной *).

Излагая наше представление об исходной проблематике и о целевой установке теории доказательств, мы с самого начала избегали введения идеи о какой-либо всеобъемлющей системе математики в каком-либо философски принципиальном смысле слова. Более того, мы удовольствуемся тем, что реально существующую систематику анализа и теории множеств мы охарактеризуем как дающую нам подходящие рамки для упорядочения геометрических и физических дисциплин. Этой цели может служить и такой формализм, который не является дедуктивно вполне завершенным.

Наша точка зрения, согласно которой при построении системы анализа и теории множеств на основе содержательной установки речь идет об образовании идей, экстраполирующих действительность, тоже хорошо согласуется с незавершенностью этой системы: способы умозаключений этой системы ориентированы в сторону представления о завершенной, окончательно определенной действительности и представляют собой формальное выражение этого представления. Но отсюда вовсе не следует, что порождаемая этими способами умозаключений *дедуктивная* (метаматематически оформленная) *структура* должна обладать свойством абсолютной завершенности. Разумеется, в известной степени она наверняка обладает методической завершенностью, а именно той завершенностью, в силу которой мы при обычных способах рассуждений, применяемых в анализе и теории множеств, так сказать, сами по себе остаемся в области этого формализма, и такой степени завершенности вполне хватает для той цели, которой служит этот дедуктивный формализм.

*) У авторов «unsachgemäß» — *Прим. перев.*

И все же возникает некоторая другая проблематика, если принять во внимание то вытекающее из теоремы Гёделя соображение, что финитное доказательство непротиворечивости формализма анализа и теории множеств позволило бы нам получить финитное доказательство некоторого арифметического предложения, невыводимого в указанном формализме. Выглядит несколько парадоксальным, что при доказательстве арифметических предложений методы финитной теории доказательств в определенном отношении превосходят методы анализа и теории множеств.

Это приводит нас к проблеме выяснения границ применимости финитных методов и одновременно с этим к проблеме разумного ограничения методической установки теории доказательств. В дальнейшем мы более подробно займемся этими вопросами. —

С результатом Гёделя связана еще одна точка зрения, которую П. Финслер в своей работе «Формальные доказательства и разрешимость» [1]) высказал за несколько лет до гёделевского исследования формально неразрешимых предложений. Интересно, что уже в этой работе Финслер высказал тезис о том, что в любом четко определенном и обладающем достаточными изобразительными возможностями формализованном языке могут быть сформулированы такие предложения, которые в этом формализме дедуктивно неразрешимы, между тем как с содержательной точки зрения они являются истинными.

Разумеется, аргументация, с помощью которой Финслер обосновывает свое утверждение (она представляет собой некоторую модификацию парадокса Ришара), не может быть использована в теории доказательств [2]) и само это утверждение является

[1]) Finsler P. Formale Beweise und Entscheidbarkeit. — Math. Z., 1926, 25.

[2]) Формализмы, которые рассматривает Финслер, обладают такими большими семантическими изобразительными возможностями, что в них может быть получен обыкновенный парадокс Ришара. Финслер не считает этот па-

лишь некоторым аналогом теоремы Гёделя, так как оно формулируется в совсем других предположениях.

Но во всяком случае заслуживает серьезного внимания та имеющая принципиальное значение мысль, которую Финслер — со ссылкой на существование в достаточно богатых выразительными возможностями формализованных языках дедуктивно неразрешимых предложений — выдвинул здесь на первый план, связав ее с вопросом о непротиворечивости. Он подчеркнул, что доказательство непротиворечивости какого-либо формализма в обычном смысле этого слова еще не дает никаких гарантий от противоречий, потому что противоречие может заключаться в формальной выводимости отрицания некоторого выразимого в данном формализме, но не выводимого предложения, которое, однако, с содержательной точки зрения может быть признано истинным.

Теорема Гёделя показывает, что это соображение применимо и к формализмам, рассматриваемым в теории доказательств, причем даже в том случае, когда в основу рассмотрения кладется финитная точка зрения. Действительно, возьмем какой-либо формализм F, удовлетворяющий условиям $а_1$) и $б_1^*$) и содержащий квантор всеобщности, и на основании этой теоремы построим такую одноместную рекурсивную функцию $\mathfrak{f}(m)$, для которой в случае непротиворечивости этого формализма равенство $\mathfrak{f}(\mathfrak{l}) = 0$ истинно при любой цифре $\mathfrak{l}$ и невыводима формула $\forall x(\mathfrak{f}(x) = 0)$. Если к исходным формулам этого формализма добавить формулу $\neg \forall x(\mathfrak{f}(x) = 0)$, то полученный формализм F_1 — в предположении, что в исходном формализме F действует дедукционная теорема [1]) — будет обладать тем свойством, что с доказательством непротиворечивости F будет получаться и его непротиворечивость. Несмотря на непротиворечивость F_1, выводимая в F_1 формула $\neg \forall x(\mathfrak{f}(x) = 0)$ в данном случае будет изображать отрицание истинного высказывания, и эта непротиворечивость формализма F_1 будет утрачена, если мы добавим к F_1 в качестве формальной аксиомы изображение некоторого истинного высказывания, которое дается формулой $\forall x(\mathfrak{f}(x) = 0)$.

радокс возникающим в таком формализме с необходимостью, а рассматривает его лишь как противоречие, возникающее вследствие недоразумения. При этом под формализмом Финслер понимает нечто совсем отличное от того, что под этим понимается в теории доказательств; а именно, формализм понимается им всего лишь как придание словам, грамматическим формам и составным конструкциям определенных значений, на основе которых для любого конкретно предъявленного текста с помощью надлежащего разбора можно решить вопрос о том, выражает ли он какое-либо содержание (или, соответственно, что́ именно он выражает). — Из рассуждений Финслера совершенно не вытекает, что формально неразрешимые предложения могут возникать и в формализмах, рассматриваемых в теории доказательств.

[1]) См. т. I, с. 194—199.

Но от непротиворечивого в полном смысле этого слова дедуктивного формализма арифметики мы будем требовать, чтобы никакая выводимая в нем формула не была отрицанием формулы, изображающей какой-либо факт, устанавливаемый финитно.

Это требование мы будем называть условием внешней непротиворечивости. Мы указывали на него уже при нашем первоначальном изложении теории доказательств [1]). Правда, фигурирующее здесь понятие финитно устанавливаемого факта является неточным. В качестве более точного *минимального требования внешней непротиворечивости для арифметических формализмов* можно выдвинуть следующее: непротиворечивость формализма должна сохраняться при добавлении к нему каких угодно верифицируемых формул в качестве исходных; причем эти формулы могут строиться как из символов рассматриваемого формализма, так и из каких-нибудь вновь вводимых функциональных или предикатных символов (в последнем случае верифицируемость формул должна устанавливаться на основе специально добавляемой процедуры нахождения истинностных значений элементарных формул, построенных из этих символов и цифр).

Замечание. В случае выполнения этого условия непротиворечивость формализма будет сохраняться и при добавлении таких исходных формул, которые могут быть выведены из формул, верифицируемых в только что указанном широком смысле этого слова. Пусть, например, у нас имеется формула

$$\forall x \exists y \forall u \exists v \mathfrak{A}(x, y, u, v),$$

изображающая высказывание, которое с помощью введения двух вычислимых функций $\mathfrak{f}(a)$ и $\mathfrak{g}(a, b)$ может быть в финитном смысле усилено до утверждения: «для любых чисел $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ имеет место отношение $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}, \mathfrak{f}(\mathfrak{k}), \mathfrak{l}, \mathfrak{g}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}))$». Тогда формула

$$\mathfrak{A}(a, \mathfrak{f}(a), b, \mathfrak{g}(a, b))$$

верифицируема, а формула

$$\forall x \exists y \forall u \exists v \mathfrak{A}(x, y, u, v)$$

выводится из этой формулы. Если, теперь, какой-либо арифметический формализм будет удовлетворять сформулированному выше минимальному требованию внешней непротиворечивости, то его непротиворечивость не нарушится ни при добавлении в качестве исходной формулы верифицируемой формулы

$$\mathfrak{A}(a, \mathfrak{f}(a), b, \mathfrak{g}(a, b)),$$

---

[1]) См. т. I, с. 72. — Что касается соотношения между ω-непротиворечивостью и внешней непротиворечивостью, то безусловно можно считать, что ни первая из них не следует из второй, ни вторая из первой.

ни при добавлении формулы

$$\forall x \exists y \forall u \exists v \mathfrak{A}(x, y, u, v).$$

Мы упомянем также следующие, касающиеся внешней непротиворечивости результаты, которые могут быть извлечены из наших предшествующих доказательств:

1. Из теоремы, полученной нами в результате формального усиления теоремы Гёделя о полноте[1]), вытекает, что если некоторая система аксиом первой ступени непротиворечива в рамках исчисления предикатов, то она останется непротиворечивой также и после формализации в ней какого-либо содержательно правильного рассуждения, по крайней мере если эта формализация возможна в каком-нибудь арифметически непротиворечивом формализме.

2. Параллельно с тем доказательством непротиворечивости, которое мы в начале гл. II провели с помощью нп-теоремы для рассматривавшегося там ограниченного формализма арифметики[2]), была установлена и внешняя непротиворечивость этого формализма (в смысле сформулированного нами минимального требования). Действительно, мы установили, что полученное доказательство непротиворечивости остается в силе и в случае присоединения к этому формализму правила, позволяющего добавлять верифицируемые исходные формулы, а также вводить с помощью верифицируемых аксиом новые функциональные знаки.

Впрочем, этот дополнительный результат получается, как легко заметить, и с помощью другого, изложенного в гл. II, метода доказательства непротиворечивости, использующего процедуру цифровых замен.

в) Вторая теорема Гёделя о неполноте. В рассуждении, с помощью которого была получена первая теорема Гёделя о неполноте[3]), формализация модифицированной антиномии лжеца произведена не полностью. Правда, предложение, говорящее о своей собственной недоказуемости, изображается в нем некоторой *формулой*, а именно формулой $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$ или соответственно переводимой в нее формулой $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$. Но затем следует *неформальное* доказательство, с помощью которого мы убеждаемся, что в рассматриваемом нами формализме F — к которому относятся предположенные свойства формулы $\mathfrak{B}(m, n)$ и рекурсивной функции $\mathfrak{s}(k, l)$, а также задание цифр $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ невыводима, если этот формализм непротиворечив, и что, с другой стороны, при выполнении этого условия для любой цифры $\mathfrak{m}$ отношение $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{q})$ выполняется и формула $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{q})$ выводима в F.

[1]) См. с. 264 и 318—319.
[2]) См. с. 79 и далее.
[3]) См. с. 339 и далее.

Однако формальное имитирование этой антиномии может быть продвинуто дальше. И это тоже было сделано Гёделем.

Действительно, рассуждение, показывающее, что в случае непротиворечивости формализма F для каждой цифры $\mathfrak{m}$ имеет место отношение $\neg\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{q})$, при известных предположениях, которые мы в дальнейшем укажем[1]), может быть формализовано с помощью некоторого вывода в F: именно, формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ (с переменной m) может быть выведена из формулы $\mathfrak{G}$, выражающей утверждение о непротиворечивости F в следующей его редакции: «Никакая формула формализма F не может быть выведена в этом формализме вместе со своим отрицанием».

А теперь на основе этого вывода, который вскоре будет рассмотрен более подробно, получается, что в случае непротиворечивости формализма F не может существовать формализованного в F доказательства этой непротиворечивости, т. е. вывода в F уже упоминавшейся нами формулы $\mathfrak{G}$.

Действительно, из такого вывода в сочетании с выводом, упомянутым ранее, получилось бы, что выводима формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$, а относительно нее мы ранее убедились, что в случае непротиворечивости F она не может быть выведена в этом формализме.

Этим доказательством, показывающим, что в случае непротиворечивости F формула $\mathfrak{G}$, выражающая эту непротиворечивость, не будет выводима в F, формализация модифицированной антиномии лжеца достигает своего полного завершения. В самом деле, эта невыводимость как раз и представляет собой то, что в четко очерченных дедуктивных формализмах соответствует противоречию, получающемуся при изложении данной антиномии в рамках естественного языка. Возможность избежать этого противоречия, которая ввиду указанной невыводимости имеется в дедуктивных математических формализмах, в обиходном языке отсутствует потому, что в нем правила логического следования не являются абсолютно установленными, а мыслятся как обосновываемые с помощью разумных соглашений. Тем самым заранее исключено, чтобы корректно проводимые доказательства при отсутствии ложных посылок давали противоречие. Поэтому при рассуждении в рамках естественного языка всякое допущение, приводящее нас к заключению о *доказуемости* некоторого предложения вместе с его отрицанием, тем самым оказывается ложным, в то время как при формальных рассуждениях в рамках какого-либо математического формализма соответствующее рассуждение еще требует добавления посылки, которая выражала бы предположение о непротиворечивости этого формализма.

Замечание. Заметим, что преодоление противоречия при формализации модифицированной антиномии лжеца происходит

[1]) Допущения a_2) и $б_2$) и условия на выводимость (см. с. 354—355).

существенно иначе, чем при формализации первоначальной антиномии. В то время как при формальном имитировании первоначальной антиномии противоречие устраняется тем, что определенное словосочетание нашего языка оказывается непереводимым на язык формализма, в случае модифицированной антиномии все входящие в рассмотрение языковые термины допускают соответствующее изображение в формализме, и здесь устранение противоречия основывается на том, что некоторый способ рассуждения, допустимый при аргументации в рамках естественного языка, становится недопустимым после того, как мы переведем его на язык формализма.

Теперь речь пойдет о том, чтобы убедиться, что при определенных предположениях вывод формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ из формулы $\mathfrak{C}$, формализующей утверждение о непротиворечивости формализма F, оказывается осуществимым в F.

Что касается формулировки этих предположений, то мы сначала обобщим допущение a_1)[1]), добавив предположение, что формализм F содержит кванторы вместе с соответствующими им формальными способами умозаключений. Так, вместо допущения a_1) у нас появится следующее более сильное допущение:

a_2) Формализм F содержит символы и переменные рекурсивной арифметики и исчисления предикатов, за исключением, быть может, формульных переменных; каждая формула, выводимая средствами рекурсивной арифметики и не содержащая формульных переменных, выводима также и в F, а каждый производимый средствами исчисления предикатов переход от одной формулы формализма F к другой производим также и в F.

Условие $б_1^*$)[2]), которое неявно использовалось уже при построении формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$, теперь будет заменено следующим, более общим требованием:

$б_2$) Имеется нумерация выражений формализма F, обладающая следующими свойствами:

Номер отрицания формулы с номером $\mathfrak{n}$ изображается в его зависимости от $\mathfrak{n}$ некоторой рекурсивной функцией $\mathfrak{e}(n)$.

Номер формулы, получающейся из формулы с номером $\mathfrak{f}$ в результате повсеместной замены переменной a цифрой $\mathfrak{l}$, изображается в его зависимости от $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ некоторой рекурсивной функцией $\mathfrak{s}(k, l)$.

Существует рекурсивная формула $\mathfrak{B}(m, n)$, не содержащая отличных от m и n переменных и обладающая тем свойством, что цифра $\mathfrak{n}$ является номером некоторой выводимой в F формулы тогда и только тогда, когда можно указать цифру $\mathfrak{m}$ такую, что имеет место отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

[1]) См. с. 339.
[2]) См. с. 347.

Наконец, мы еще добавим следующие условия на выводимость:

1. Если в F можно указать вывод формулы с номером $\mathfrak{l}$ из формулы с номером $\mathfrak{f}$, то в F выводима формула

$$\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{f}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{l}).$$

2. Формула

$$\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(k)) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(k, l)))$$

выводима в F.

3. Если $\mathfrak{f}(m)$ — рекурсивный терм, не содержащий переменных, отличных от переменной m, а $\mathfrak{r}$ — номер равенства $\mathfrak{f}(a) = 0$, то формула

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))$$

выводима в F.

Замечание. Формула, упомянутая в условии 2, представляет собой формализацию следующего высказывания: «если в F выводимо отрицание формулы $\mathfrak{A}$ (с номером $\mathfrak{f}$), то для любой цифры $\mathfrak{l}$ в F выводимо и отрицание формулы, получающейся из $\mathfrak{A}$ в результате подстановки цифры $\mathfrak{l}$ вместо переменной a».

Теперь, после того как мы перечислили наши предположения относительно F, мы должны еще выбрать в качестве формулы $\mathfrak{C}$ одну из формализаций утверждения о непротиворечивости F.

Формализация этого утверждения может быть произведена при помощи формулы

$$\neg(\mathfrak{B}(l, n) \,\&\, \mathfrak{B}(m, \mathfrak{e}(n))),$$

где $\mathfrak{e}(\cdot)$ — фигурирующая в предположении $б_2$) рекурсивная функция, которая номеру всякой формулы из F сопоставляет номер ее отрицания.

Этой формуле дедуктивно равна следующая, в дедуктивном отношении более удобная формула

$$\exists x\mathfrak{B}(x, n) \to \neg\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(n)).$$

Эту формулу мы и возьмем в качестве формулы $\mathfrak{C}$, из которой должна быть выведена формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$.

Напомним, что $\mathfrak{q}$ определяется как номер формулы

$$\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})),$$

а $\mathfrak{p}$ — как номер формулы

$$\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(a, a)),$$

откуда, на основании предположенного нами свойства рекурсивной функции $\mathfrak{s}(k, l)$, следует справедливость равенства

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$$

и выводимость этого равенства в F.

Номер формулы $\mathfrak{B}(a, \mathfrak{q})$ мы обозначим через $\mathfrak{r}$, и пусть $\mathfrak{r}_1$ обозначает номер формулы $\neg\mathfrak{B}(a, \mathfrak{q})$. Тогда будет иметь место равенство

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}_1.$$

После этих приготовлений вывод формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ из формулы $\mathfrak{C}$ может быть получен следующим образом.

Вследствие выводимости равенства $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ выводима из формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$. Далее, формула $\neg\mathfrak{B}(a, \mathfrak{q})$ получается из $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ в результате подстановки. Поэтому $\neg\mathfrak{B}(a, \mathfrak{q})$, т. е. формула с номером $\mathfrak{r}_1$ выводима в F из формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$, имеющей номер $\mathfrak{q}$. Поэтому, согласно условию 1, формула

$$\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{r}_1)$$

выводима в F. Эта формула, взятая вместе с формулой

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{q}),$$

выводимой средствами исчисления предикатов, дает формулу

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{r}_1),$$

а затем на основании выводимого в F равенства

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}_1$$

— формулу

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{r})).$$

Эта формула вместе с формулой

$$\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(k)) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(k, l))),$$

которая выводима в F согласно условию 2 и в которой вместо переменной k можно подставить цифру 1, а вместо переменной l переменную m, дает формулу

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))),$$

откуда путем контрапозиции получается формула

$$\neg\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{n}(\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))) \to \neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}).$$

С другой стороны, формула $\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ имеет вид $\mathfrak{b}(m, \mathfrak{q}) = 0$, где $\mathfrak{b}(m, \mathfrak{q})$ — рекурсивный терм, содержащий единственную переменную m. Номером равенства $\mathfrak{b}(a, \mathfrak{q}) = 0$, т. е. формулы $\mathfrak{B}(a, \mathfrak{q})$, является число $\mathfrak{r}$. Поэтому в F, согласно условию 3, выводима формула

$$\mathfrak{b}(m, \mathfrak{q}) = 0 \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)),$$

т. е. формула

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)).$$

А теперь воспользуемся формулой $\mathfrak{C}$. Эта формула в результате подстановки терма $\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)$ вместо переменной n дает формулу

$$\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)) \to \neg\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{r}\ m))),$$

которая вместе с только что полученной формулой

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))$$

и ранее выведенной формулой

$$\neg\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))) \to \neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$$

с помощью двукратного применения правила силлогизма дает формулу

$$\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}) \to \neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q}),$$

которая с помощью элементарного преобразования позволяет получить искомую формулу $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$.

Таким образом, мы установили, что в формализме F может быть осуществлен вывод формулы $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ из формулы $\mathfrak{C}$. В случае выводимости в F формулы $\mathfrak{C}$ в F будет выводима и формула $\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$, а отсюда, согласно предыдущему, будет следовать противоречивость формализма F.

Итак, оказывается справедливой следующая

Теорема. *В непротиворечивом формализме F, удовлетворяющем условиям $\mathfrak{a}_2$) и $\mathfrak{б}_2$), а также трем сформулированным выше «условиям на выводимость», не может быть выведена формула*

$$\exists x\mathfrak{B}(x, n) \to \neg\exists x\mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(n)),$$

представляющая собой формализацию утверждения о непротиворечивости F.

Это утверждение составляет содержание второй *теоремы Гёделя о неполноте* в применении к формализмам, удовлетворяющим условию $\mathfrak{a}_2$), т. е. к таким формализмам, в которых выводимы все выводимые формулы рекурсивной арифметики, не содержащие формульных переменных, и в которых могут быть воспроизведены все умозаключения исчисления предикатов.

Эта теорема может быть распространена и на формализмы несколько иного типа. Мы не обязательно должны требовать, чтобы формализм F содержал в себе формулы арифметического формализма непосредственно; вполне достаточно, чтобы соотношения рекурсивной арифметики как-то были выражены в нем с помощью соответствующих выводимых формул.

Так, в частности, можно получить все те обобщения, возможность которых мы отметили при формализации первоначальной антиномии лжеца:

1. Не требуется, чтобы формализм F содержал какие-либо свободные переменные. (Достаточно, чтобы переменная a включалась в нумерацию.)

2. Если с помощью какого-либо выражения $\mathfrak{Z}(x)$ в формализме F может быть изображен предикат «объект x является числом», то не обязательно, чтобы в F имелся специально выделенный сорт числовых переменных. Вместо цифр тоже могут фигурировать какие-либо соответствующие им более сложные выражения.

3. Можно не требовать, чтобы рекурсивные функции были непосредственно изобразимы в F. Достаточно требовать некоторой заменимости этих функций, наподобие того, как это было сделано при замене функциональных знаков соответствующими предикатными символами или при замене в формализме (Z) равенств рекурсивной арифметики соответствующими формулами.

Случай 3 имеет, в частности, место в модифицированном формализме Principia Mathematica, на основе которого Гёдель изложил свои теоремы о неполноте.

Каждое из перечисленных обобщений требует определенной модификации предположений этой теоремы (в частности, условий на выводимость), а также модификации формулы $\mathfrak{C}$, формализующей утверждение о непротиворечивости F, и той формулы, которая изображает утверждение о своей собственной невыводимости.

В случае второй теоремы Гёделя необходимо тщательно следить за выполнением условий ее применимости к дедуктивному формализму. На это обстоятельство указал Г. Крайзел [1]), построивший в связи с этим следующий пример.

Будем исходить из формализма F, удовлетворяющего условиям a_2) и $б_2$) [2]). Будем считать, что имеется нумерация формул и списков формул, обладающая перечисленными в предположении $б_2$) свойствами.

Следующее предположение не повлечет за собой никаких ограничений на формализм F, а на нумерацию наложит только некоторое несущественное ограничение: мы предположим, что номер формулы, в которую входит цифра $\mathfrak{m}$, равен по меньшей мере $\mathfrak{m}$, так что для любой цифры $\mathfrak{r}$, являющейся номером какой-либо формулы, содержащей переменную a, и для любой цифры $\mathfrak{m}$ значение $\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, \mathfrak{m})$ равно по меньшей мере $\mathfrak{m}$, и что соответственно этому формула

$$m \leqslant \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)$$

с переменной m выводима в рекурсивной арифметике, а тем самым и в F.

[1]) Kreisel G. A survey of proof theory.—J. Symbolic Logic, 1968, 33, см. подстрочную сноску на с. 331, 332 и раздел «Mathematical Logic» в книге: Saati T. L. Lectures on Modern Mathematics III.—N. Y.; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1965, p. 154—155.

[2]) См. с. 354.

Кроме того, будем считать, что формализм F удовлетворяет трем нашим условиям на выводимость [1]), так что по второй теореме Гёделя о неполноте формула

$$\mathfrak{B}(k, p) \to \neg \mathfrak{B}(l, \mathfrak{e}(p)),$$

которая в силу нумерации для F изображает непротиворечивость этого формализма, невыводима в F, если формализм F действительно непротиворечив [2]).

Перейдем к рассмотрению некоторого модифицированного формализма F^*, отличающегося от F только следующим усилением условия формальной доказуемости: список формул с номером $\mathfrak{m}$ называется выводом формулы $\mathfrak{R}$ в F^*, если он является выводом этой формулы в F и если, кроме того, ни у каких двух списков формул, являющихся выводами в F и имеющих номера, не превосходящие $\mathfrak{m}$, их заключительные формулы не совпадают (это свойство всегда может быть непосредственно проверено путем перебора всех выводов с номерами, не превосходящими $\mathfrak{m}$).

Как мы уже знаем, в формализме F высказывание о том, что список формул с номером $\mathfrak{m}$ является выводом формулы с номером $\mathfrak{n}$, в силу свойств нумерации формул и списков формул изображается при помощи рекурсивного предиката $\mathfrak{B}(m, n)$ формулой $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. В формализме F^* роль рекурсивного предиката $\mathfrak{B}(m, n)$ будет играть предикат

$$\mathfrak{B}(m, n) \,\&\, \forall u \forall v \forall w \forall z\,(u \leqslant m \,\&\, v \leqslant m \,\&\, \mathfrak{B}(u, w) \,\&\, \mathfrak{B}(v, z) \to z \neq \mathfrak{e}(w)),$$

который мы сокращенно будем обозначать посредством $\mathfrak{B}^*(m, n)$. Этот предикат ввиду соотношения $\mathfrak{B}(m, n) \to n < m$ тоже является рекурсивным.

Так как выводимость в F^* определялась как выводимость в F при некоторых дополнительных условиях, то всякая формула, выводимая в F^*, будет выводимой и в F.

Однако если F не содержит противоречия, то будет верно и обратное. Действительно, пусть нам дан вывод в F с номером $\mathfrak{m}$ формулы с номером $\mathfrak{n}$. Если бы условие $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ было не выполнено, то для некоторых цифр $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$, являющихся номерами заключительных формул каких-либо двух выводов в F с номерами, не превосходящими $\mathfrak{m}$, имело бы место равенство $\mathfrak{s} = \mathfrak{e}(\mathfrak{r})$, т. е. в F были бы выводимы две формулы, одна из которых является отрицанием другой, т. е. формализм F был бы противоречив.

С другой стороны, формализм F^* непротиворечив всегда, т. е. независимо от того, непротиворечив ли F. Действительно, если

[1]) См. с. 355.

[2]) Все требования, предъявляемые здесь к формализму F и к нумерации для него, в следующем параграфе окажутся выполненными для приводимого там арифметического формализма (Z_μ) и для некоторой нумерации этого формализма.

бы две формулы, одна из которых является отрицанием другой [и которые, следовательно, имеют номера i и $e(i)$], обе были выводимы в F^*, то для некоторых двух чисел f и l, являющихся номерами соответствующих доказательств, имели бы место отношения $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{f}, i)$ и $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{l}, e(i))$. Однако по определению выражения $\mathfrak{B}^*$ эти условия не могут выполняться ни при $\mathfrak{f}<\mathfrak{l}$, ни при $\mathfrak{l}<\mathfrak{f}$.

Это чрезвычайно элементарное доказательство непротиворечивости F^* может быть формализовано в F выводом формулы

$$\mathfrak{B}^*(k, n) \to \neg \mathfrak{B}^*(l, e(n)),$$

и поскольку F не содержит в себе противоречия, то отсюда, как уже отмечалось выше, следует, что может быть получен вывод этой формулы и в F^*. Таким образом, если F представляет собой непротиворечивый формализм, удовлетворяющий условиям a_2) и $б_2$), то в соответствующем формализме F^* может быть доказана его собственная непротиворечивость.

Но это вовсе не означает какого-либо опровержения второй теоремы Гёделя. Действительно, эта теорема, как мы помним, содержит в качестве посылок условия 1, 2 и 3, наложенные на понятие выводимости, и мы не показали, что эти условия в F^* выполнены. При ближайшем рассмотрении условие 1 для F^* оказывается вообще неопределенным, так как в F^* не определена выводимость одной формулы из другой.

Этот недостаток можно было бы устранить. Но в данном случае нам не нужно заниматься этим, так как можно показать, что условие 3 для F^* не будет выполняться, если допустить, что формализм F непротиворечив. Действительно, условие 3 для F^* утверждает, что если $\mathfrak{f}(m)$ — какой-либо рекурсивный терм, а $\mathfrak{r}$ — номер равенства $\mathfrak{f}(a)=0$, то формула

$$\mathfrak{f}(m)=0 \to \exists x \mathfrak{B}^*(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))$$

выводима в F^*. Тем более эта формула должна выводиться в F. Если, в частности, в роли $\mathfrak{f}(m)$ взять терм $m \dot{-} m$, то равенство $\mathfrak{f}(m)=0$ будет выводимо в рекурсивной арифметике, а потому и в F, так как этот формализм должен удовлетворять условию a_2). Поэтому в F должна быть выводимой и формула

$$\exists x \mathfrak{B}^*(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)).$$

В подробной записи эта формула имеет вид

$$\exists x [\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m)) \& \forall u \forall v \forall w \forall z (u \leqslant x \& v \leqslant x \& \mathfrak{B}(u, w) \& \mathfrak{B}(v, z) \to z \neq e(w))].$$

Из нее и из доказуемой формулы

$$\mathfrak{B}(m, n) \to n < m$$

получается формула

$$\exists x [\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m) < x \& \forall u \forall v (u \leqslant x \& v \leqslant x \to \forall w \forall z (\mathfrak{B}(u, w) \& \mathfrak{B}(v, z) \to z \neq e(w)))].$$

Отсюда (на основании формул для $\leqslant$ и $<$) следует формула

$$\forall u \forall v (u \leqslant \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m) \& v \leqslant \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m) \to \forall w \forall z (\mathfrak{B}(u, w) \& \mathfrak{B}(v, z) \to z \neq e(w))),$$

и из нее в результате перехода от связанных переменных к свободным получается формула

$$k \leqslant \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m) \& l \leqslant \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m) \to (\mathfrak{B}(k, p) \& \mathfrak{B}(l, q) \to q \neq e(p)).$$

Следовательно, последняя формула тоже должна быть выводимой в F. Между тем, согласно нашему предположению о нумерации, в F выводима формула

$$m \leqslant \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m).$$

Значит, в F выводима и формула

$$k \leqslant m \& l \leqslant m \to (\mathfrak{B}(k, p) \& \mathfrak{B}(l, q) \to q \neq e(p)).$$

Из этой формулы подстановкой терма $k+l$ вместо переменной m получается импликация

$$k \leqslant k+l \& l \leqslant k+l \to (\mathfrak{B}(k, p) \& \mathfrak{B}(l, q) \to q \neq e(p)),$$

а тем самым и формула

$$\mathfrak{B}(k, p) \& \mathfrak{B}(l, q) \to q \neq e(p).$$

Из этой формулы, подставив $e(p)$ вместо q и воспользовавшись формулой $a=a$, мы средствами исчисления высказываний получим формулу

$$\mathfrak{B}(k, p) \to \neg \mathfrak{B}(l, e(p)).$$

Итак, эта формула выводима в F. Но на основе наших предположений относительно формализма F и нумерации для него, было установлено, что в случае непротиворечивости F эта формула в формализме F невыводима.

Таким образом, если формализм F непротиворечив, и если для него и для соответствующей нумерации выполняются сформулированные нами условия, то соответствующий формализм F^* удовлетворять условию 3 не может.

В дальнейшем речь пойдет о том, чтобы от условной формулировки теорем Гёделя перейти к установлению того факта, что невыводимости, утверждаемые в этих теоремах для дедуктивных формализмов определенных типов, имеют место и в случае формализма арифметики, состоящего из системы (Z), аксиом (μ_1), (μ_2)

и (μ_3) для μ-символа и явных определений, а также для более широких формализмов арифметики. С этой целью мы рассмотрим соответствующие формализмы на предмет выяснения того, выполняются ли для них предположения этих теорем, т. е. допущения a_2) и $б_2$), содержащие в себе более ранние допущения a_1) и $б_1^*$) [1]), и условия на выводимость. Тем самым мы возвращаемся к рассмотрению арифметизации метаматематики.

§ 2. Формализованная метаматематика арифметического формализма

а) Описание одного арифметического формализма. Как мы знаем, уже формализм системы (Z) дает формализацию арифметики с включением принципа «tertium non datur». Однако в этом формализме рекурсивные функции (за исключением тех из них, которые могут быть построены с помощью сложения и умножения) непосредственно не изобразимы, а только могут быть представлены в некотором смысле этого слова. Этот недостаток можно устранить, добавив к системе (Z) ι-правило. В этом случае можно, как было показано в гл. VIII т. I [2]), явно определить μ-символ таким образом, чтобы формулы (μ_1), (μ_2) и (μ_3) оказались выводимыми с помощью аксиомы индукции; в результате этого мы придем к изображению не только рекурсивных, но и вообще всех тех арифметических функций, которые могут быть определены с помощью принципа наименьшего числа. Изображение рекурсивных функций при этом таково, что соответствующие рекурсивные равенства являются выводимыми формулами.

С дедуктивной точки зрения этот формализм вполне удовлетворителен. Однако арифметизация его метаматематики оказывается довольно неудобной, потому что в соответствии с ι-правилом свойство выражения $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ быть термом зависит от выводимости связанных с формулой $\mathfrak{A}(c)$ формул единственности [3]), так что определение понятия терм оказывается переплетенным с определением выводимости.

Этого осложнения можно избежать путем введения вместо ι-правила ε-формулы, опираясь на которую, ε-символ, как известно, может взять на себя роль ι-символа [4]), так что, в частности, с помощью ε-символа можно будет дать явное определение μ-символа. Кроме того, в этом случае, как было показано в гл. II [5]), возникает возможность устранить аксиому индукции путем добавления к формуле

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x))$$

формулы

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

в качестве второй аксиомы для ε-символа и взятия в качестве аксиомы формулы

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

или же, вместо нее, формулы

$$a \neq 0 \to \exists x\,(x' = a)\ [1]).$$

Однако этот формализм по сравнению с формализмом ι-символа имеет тот недостаток, что не каждый его терм без переменных представляет собой формализацию определения какого-либо числа. Именно, если наряду с ε-символом ввести еще один символ $\varepsilon_x^*\mathfrak{A}(x)$ с соответствующими двумя формальными аксиомами, то нам не удастся вывести равенство

$$\varepsilon_x A(x) = \varepsilon_x^* A(x),$$

по крайней мере, если рассматриваемый арифметический формализм (без ε*-символа) непротиворечив [2]).

Тем не менее арифметизация метаматематики арифметического формализма позволит нам доказать одно наше (сделанное при обсуждении парадокса Ришара) замечание [3]) относительно того, что условие, обозначенное нами посредством в*), в случае арифметического формализма может быть удовлетворено. Это условие утверждает, во-первых, что при подходящей нумерации свойство

---

[1]) См. с. 339, 347.
[2]) См. т. I, с. 481.
[3]) См. т. I, с. 468.
[4]) См. с. 34.
[5]) См. с. 116—119.

[1]) То, что здесь формула

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

может быть заменена формулой

$$a \neq 0 \to \exists x\,(x' = a),$$

проще всего получается из того, что при введении символа $\delta(a)$ посредством явного определения

$$\delta(a) = \varepsilon_z(z' = a)$$

формула

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

выводится из формулы

$$a \neq 0 \to \exists x\,(x' = a)$$

с помощью ε-формулы и схемы (β).

[2]) Например, в предположении непротиворечивости рассматриваемого арифметического формализма можно довольно просто показать, что добавление к аксиомам для ε-символа и ε*-символа равенств

$$\varepsilon_x \exists y\,(x = 2 \cdot y) = 0'' \quad \text{и} \quad \varepsilon_x^* \exists y\,(x = 2 \cdot y) = 0'''$$

не приводит к противоречию.

[3]) См. с. 333.

числа m быть номером какого-либо терма изображается с помощью некоторого рекурсивного предиката и, во-вторых, что каждый терм, не содержащий свободных переменных, однозначно (хотя, может быть, и не эффективно) определяет некоторое число.

Доказательство того, что при подходящем выборе арифметического формализма оба эти требования могут быть удовлетворены совместно, будет проведено с использованием некоторого рекурсивно-арифметического изображения понятия терма (на основе соответствующей нумерации), поскольку наш формализм мы выберем таким образом, чтобы каждый не содержащий аргументов терм представлял собой формализацию однозначного определения некоторого числа.

Последнему из этих требований удовлетворяет формализм ι-правила и не удовлетворяет, как мы только что установили, формализм ε-символа. С другой стороны, формализм ε-символа дает возможность рекурсивно изобразить понятие терма, в то время как в формализме ι-правила этому мешает переплетение понятия терма с условиями на выводимость.

Обоим содержащимся в условии в*) требованиям можно удовлетворить, вводя μ-символ не с помощью явного определения, а непосредственно, в качестве основного символа с формулами (μ_1), (μ_2) и (μ_3), принимаемыми в качестве аксиом. Кроме того, мы должны еще условиться, что, помимо штрих-символа и символов для операций сложения и умножения, будут допускаться только такие функциональные знаки, которые вводятся с помощью каких-либо явных определений.

С точки зрения аксиоматики здесь желательна еще одна модификация. В самом деле, в результате введения формулы (μ_1) в качестве аксиомы схема (β) становится производной. Но если эту схему опустить, то исчезнет двойственная симметрия исчисления предикатов.

Этой трудности не будет, если мы заменим формулу (μ_1) дедуктивно ей равной и аналогичной ε-формуле формулой [1])

(μ_1') $$A(a) \to A(\mu_x A(x)).$$

[1]) В результате этого появится возможность, пользуясь μ-символом, явно определить кванторы, как это было сделано в формализме ε-символа, и при этом основные формулы (a) и (b) станут выводимыми, а схемы (α) и (β) производными. Однако мы не будем здесь этим заниматься. — Вместо того чтобы трансформировать формулу (μ_1) в (μ_1'), можно было бы также добавить в качестве новой аксиомы формулу

$$A(\mu_x \neg A(x)) \to \forall x A(x)$$

и опустить схемы (α) и (β). Тогда формулы

$$A(\mu_x \neg A(x)) \to \forall x A(x)$$

и

$$\exists x A(x) \to A(\mu_x A(x))$$

В этом случае будет логично исключить квантор и в формуле (μ_3), взяв в качестве аксиомы вместо этой формулы переводимую в нее формулу

(μ_3') $$\neg A(\mu_x A(x)) \to \mu_x A(x) = 0.$$

Аксиомы для μ-символа, если взять в качестве аксиомы формулу

$$a \neq 0 \to \exists x (x' = a)$$

и ввести надлежащее определение для символа $\leqslant$ или $<$, позволяют не брать в качестве исходной формулы аксиому индукции. При этом целесообразно слегка изменить и формулу (μ_2), взяв вместо нее переводимую в нее формулу

(μ_2') $$A(a) \to \mu_x A(x) < a'.$$

Выводимость аксиомы индукции вытекает из того ранее уже отмечавшегося факта, что схема индукции, а потому и аксиома индукции, выводима средствами исчисления предикатов из двух аксиом для ε-символа, формулы $a \neq 0 \to \exists x (x' = a)$ и аксиомы равенства (J_2). В этом выводе аксиомы для ε-символа могут быть заменены аналогичными им формулами для μ-символа, т. е. формулой (μ_1') и

$$A(a) \to \mu_x A(x) \neq a'.$$

Но последняя из этих формул с помощью аксиомы равенства (J_2) и формулы $\neg(a<a)$ выводится из формулы (μ_2'), а формула $\neg(a<a)$ получается из первого рекурсивного равенства для сложения $a+0=a$, если предикатный символ $<$ определить с помощью эквивалентности

$$a < b \sim \forall x (b + x \neq a),$$

которая выводится из эквивалентностей

$$a < b \sim \neg(b \leqslant a),$$
$$a \leqslant b \sim \exists x (a + x = b).$$

Формализм, к которому мы таким образом приходим, содержит переменные, символы, исходные формулы и правила исчисления предикатов; кроме того, к ним добавляются следующие символы и аксиомы:

выступали бы в качестве обращений формул

$$\forall x A(x) \to A(a) \quad \text{и} \quad A(a) \to \exists x A(x).$$

Эти две пары формул соответствуют формулам «τ-группы» из работы Дж. фон Неймана: von Neumann J. Zur Hilbertschen Beweistheorie. — Math. Z., 1927, **26**, S. 16.

знак равенства с аксиомой (J_2)

$$a=b\to(A(a)\to A(b));$$

индивидный символ 0 и штрих-символ с числовыми аксиомами

$$a'\neq 0,\quad a'=b'\to a=b \quad\text{и}\quad a\neq 0\to\exists x\,(x'=a);$$

символы для сложения и умножения с рекурсивными равенствами

$$a+0=a,\qquad a\cdot 0=0,$$
$$a+b'=(a+b)',\quad a\cdot b'=a\cdot b+a;$$

символы $a\leqslant b$ и $a<b$ с эквивалентностями

$$a\leqslant b\sim\exists x\,(a+x=b)\quad\text{и}\quad a<b\sim\forall x\,(b+x\neq a)$$

и μ-символ с аксиомами

(μ_1') $$A(a)\to A(\mu_x A(x)),$$

(μ_2') $$A(a)\to\mu_x A(x)<a'$$

и

(μ_3') $$\neg A(\mu_x A(x))\to\mu_x A(x)=0.$$

Кроме того, с помощью *явных определений* могут быть дополнительно введены какие-либо новые функциональные знаки и предикатные символы. Эти определения при введении функциональных знаков представляют собой некоторые равенства, а в случае введения предикатных символов — эквивалентности. При этом в качестве *переменных для аргументов* вводимые символы должны иметь *только индивидные переменные*. Ввиду соглашений относительно общего вида явных определений [1]), выражения, стоящие в правых частях определяющих равенств или эквивалентностей, не должны иметь никаких других свободных переменных, кроме аргументов определяемых символов.

Описанный таким образом арифметический формализм — в дальнейшем он будет обозначаться посредством (Z_μ) — мы теперь рассмотрим более подробно и убедимся, что для него выполняются все предположения обеих теорем Гёделя о неполноте [2]).

[1]) См. т. I, с. 357 или Приложение I, с. 465 и далее.

[2]) Мы могли бы взять несколько более узкий формализм, воспользовавшись тем обстоятельством, что при рассмотрении вопроса о непротиворечивости формализма (Z_μ) формульные переменные могут быть исключены (методом, изложенным в гл. VI т. I; см. с. 275—283, 286—288). Однако в нашем случае, когда мы опираемся на уже имеющуюся арифметизацию метаматематики исчисления предикатов, это едва ли привело бы к каким-нибудь упрощениям.

Предположение a_2) [1]) для этого формализма выполняется, так как он содержит в себе исчисление предикатов, а также аксиомы равенства и аксиому $a'\neq 0$ и так как в нем явно определены рекурсивные функции, для которых соответствующие рекурсивные равенства являются выводимыми формулами. Таким образом, нам остается проверить выполнение условия $б_2$), а также трех условий 1—3 на выводимость [2]).

Для этого в первую очередь требуется ввести подходящую нумерацию нашего формализма.

б) Построение нумерации формализма (Z_μ). Чтобы получить нумерацию этого формализма, мы начнем с имеющейся у нас нумерации исчисления предикатов, которая в свое время была распространена также на цифры и на функциональные знаки [3]).

Приведем краткую сводку основных фактов, касающихся этой нумерации.

В качестве номеров для связанных индивидных переменных мы взяли простые числа, бóльшие или равные 7; в качестве номеров для свободных индивидных переменных — те же числа, умноженные на 2; в качестве номеров для формульных переменных без аргументов — те же числа, умноженные на 10; в качестве номера для цифры f — число $2\cdot 3^f$.

Функциональный знак с $\mathfrak{r}$ аргументами мы изобразили функцией $5\cdot\mathfrak{q}_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}^{a_{\mathfrak{r}}}$, а формульную переменную с $\mathfrak{r}$ аргументами — функцией $10\cdot\mathfrak{q}_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}^{a_{\mathfrak{r}}}$, где $\mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}$ — попарно различные простые числа, бóльшие или равные 7, а вместо переменных $a_1,\ \ldots,\ a_{\mathfrak{r}}$ должны подставляться номера аргументов.

Логические связки мы изобразили следующим образом: отрицание — умножением на 3; конъюнкцию — функцией $1\cdot 20\cdot 7^a\cdot 11^b$; дизъюнкцию — функцией $2\cdot 20\cdot 7^a\cdot 11^b$; импликацию — функцией $4\cdot 20\cdot 7^a\cdot 11^b$; эквивалентность — функцией $8\cdot 20\cdot 7^a\cdot 11^b$; кванторы всеобщности и существования с переменной $\mathfrak{x}$ — функциями $50\cdot\mathfrak{q}^a$ и $100\cdot\mathfrak{q}^a$ соответственно (здесь $\mathfrak{q}$ — номер переменной $\mathfrak{x}$, а вместо переменной a должен подставляться номер того выражения, на которое распространяется изображаемый квантор).

Чтобы из этой нумерации получить нумерацию для системы (Z_μ), мы сопоставим μ-символу с переменной $\mathfrak{x}$ функцию $25\cdot\mathfrak{q}^a$, в которой $\mathfrak{q}$ — номер переменной $\mathfrak{x}$, а вместо переменной a должен подставляться номер того выражения, на которое распространяется изображаемый μ-символ. Для изображения суммы

[1]) См. с. 354.

[2]) См. с. 355 и далее.

[3]) См. с. 267 и далее.

и произведения мы возьмем функции $5\cdot 11^a\cdot 13^b$ и $5\cdot 11^a\cdot 17^b$, что соответствует нашему прежнему соглашению об изображении функциональных знаков, а для изображения предикатных символов $=$, $\leqslant$ и $<$ мы возьмем функции $70\cdot 11^a\cdot 13^b$, $70\cdot 11^a\cdot 17^b$ и $70\cdot 13^a\cdot 17^b$ соответственно.

Отметим, что такое изображение данных трех предикатных символов не вступает в коллизию с нашим способом изображения формульных переменных. Действительно, наименьшим числом, которое по нашим соглашениям может быть номером какого-либо выражения, является число 2 (номер цифры 0). Если f и l суть номера каких-либо выражений, то значение любого из выражений $70\cdot 11^f\cdot 13^l$, $70\cdot 11^f\cdot 17^l$ и $70\cdot 13^f\cdot 17^l$ не может быть номером какой-либо формульной переменной без аргументов; но оно не может быть и номером формульной переменной с аргументами, потому что в этом случае оно должно было бы делиться на 7^n, где n — число, являющееся номером некоторого выражения и поэтому большее 1.

Что касается изображения штрих-символа, то мы должны учитывать то обстоятельство, что любая цифра в арифметическом формализме представляет собой либо символ 0, либо выражение, получающееся из символа 0 в результате (однократного или многократного) применения к нему штрих-символа. Учитывая имеющуюся уже нумерацию цифр, мы будем изображать применение штрих-символа к какому-либо квазитерму умножением номера этого квазитерма на 3. При этом для нумерации цифр достаточно будет приписать символу 0 номер 2.

Это изображение штрих-символа не вступает в коллизию с изображением отрицания, так как отрицание применяется только к таким выражениям, которые либо сами являются формулами, либо получаются из формул в результате замены свободных индивидных переменных связанными. Эти выражения, которые мы будем называть к в а з и ф о р м у л а м и, в нашей нумерации характеризуются тем, что их номера делятся на 10. Поэтому умножение на 3, примененное к номеру какого-либо выражения, изображает или отрицание или применение штрих-символа в зависимости от того, делится этот номер на 10 или же нет.

Для полного задания нумерации теперь нам недостает только соглашения относительно способа описания символов, вводимых явными определениями [как мы помним, в формализме (Z_μ) допускаются только такие (не считая основных) функциональные знаки и предикатные символы, которые вводятся с помощью явных определений]. Это обстоятельство доставляет нам известные трудности, поскольку мы хотели бы иметь возможность изобразить свойство числа быть номером терма или соответственно формулы с помощью рекурсивного предиката. Но эти трудности мы можем устранить, сделав номер символа, вводимого посредством

явного определения, зависящим от номера определяющего его выражения [1]).

С этой целью мы условимся, что во всяком явном определении в качестве аргументов определяемого r-местного символа всегда будут браться переменные с номерами $2\cdot\mathfrak{p}_3$, $2\cdot\mathfrak{p}_4$, ..., $2\cdot\mathfrak{p}_{r+2}$, стоящие друг за другом в указанном порядке, так что место l-го аргумента определяемого символа всегда будет занимать переменная с номером $2\cdot\mathfrak{p}_{l+2}$. А теперь мы примем соглашение, что r-местный функциональный знак или предикатный символ, вводимый посредством явного определения с определяющим выражением, имеющим номер n, будет изображаться функцией $5\cdot\mathfrak{p}_n^{a_1}\cdot\mathfrak{p}_{n+1}^{a_2}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_{n+r-1}^{a_r}$ или функцией $70\cdot\mathfrak{p}_n^{a_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_{n+r-1}^{a_r}$ соответственно.

Это не будет вступать в конфликт с изображениями символов $+$, $\cdot$, $=$, $\leqslant$ и $<$ с помощью функций. Действительно, наибольшим простым делителем у этих изображений является число 17, т. е. $\mathfrak{p}_6$, в то время как при изображении явно определенных символов простое число $\mathfrak{p}_n$ по крайней мере равно $\mathfrak{p}_{14}$, так как определяющее выражение содержит не менее одной свободной переменной, и потому его номер самое меньшее равен 14.

Последнее соглашение изменяет прежнее изображение функциональных знаков, поскольку функция $5\cdot\mathfrak{q}_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_r^{a_r}$, у которой $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ суть попарно различные простые числа, бо́льшие или равные 7, для нашей нынешней нумерации только тогда является изображением какого-либо функционального знака, когда либо $r=2$ и пара простых чисел $\mathfrak{q}_1$ и $\mathfrak{q}_2$ совпадает с 11 и 13, или с 11 и 17, либо простые числа $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ совпадают с $\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n+r-1}$, причем n является номером некоторого терма, содержащего r (и не больше) различных свободных индивидных переменных. (Этот терм может в свою очередь содержать один или несколько явно определенных символов; но в этом случае определяющее выражение любого из этих символов будет иметь номер, меньший номера данного терма.)

Аналогичное ограничение справедливо и для изображений предикатных символов функциями вида $70\cdot\mathfrak{q}_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_r^{a_r}$.

Тем самым нумерация формализма (Z_μ) по существу закончена. Остается только условиться относительно номеров некоторых конкретных переменных, которые мы возьмем теми же, что

---

[1]) Подобного рода способ задания явных определений был впервые применен Р. Карнапом в его книге: C a r n a p R. Logische Syntax der Sprache (см. с. 59). Этот способ — с известной модификацией — распространен в этой книге и на рекурсивные определения.

и раньше. Так, в частности, для переменных a, b и c мы снова возьмем номера 14, 22 и 26; для переменных x, y и z — номера 7, 11 и 13, а формульную переменную A с одним аргументом мы изобразим функцией $10 \cdot 7^a$.

Построенная нумерация формализма (Z_μ) является взаимно однозначной. Это означает, что не только каждое выражение из (Z_μ) имеет единственный вполне определенный номер, но и что номера двух отличных друг от друга выражений из (Z_μ) всегда различны. В этом можно убедиться точно так же, как мы это сделали ранее для нумерации исчисления предикатов [1]). Специальное рассмотрение требуется только для того, чтобы показать, что номера предикатных символов с аргументами отличаются от номеров формульных переменных, а также что номера явно определенных функциональных знаков и предикатных символов отличаются от номеров символов $+$, $\cdot$, $=$, $\leqslant$ и $<$. Но мы это сделали уже при самом выборе нумерации [2]).

Если в качестве номера последовательности выражений, имеющих номера $\mathfrak{n}_0, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$, мы возьмем число $\wp_0^{\mathfrak{n}_0} \cdot \wp_1^{\mathfrak{n}_1} \cdot \ldots \cdot \wp_\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}_\mathfrak{r}}$ — в точности так же, как это делалось в случае нумерации для исчисления предикатов, — то имеющаяся у нас нумерация выражений из (Z_μ) даст некоторую нумерацию конечных последовательностей выражений из (Z_μ).

в) Проверка условия $б_2$) для формализма (Z_μ) и построенной для него нумерации. А теперь мы убедимся, что выбранная нами нумерация удовлетворяет условию $б_2$) и трем сформулированным выше [3]) условиям на выводимость.

Рекурсивность изображения отрицания очевидна. В самом деле, функция $e(n)$, которая изображает номер отрицания формулы в его зависимости от номера самой этой формулы, — это попросту функция $3 \cdot n$.

Далее, легко определить такую рекурсивную функцию $\mathfrak{s}(k, l)$, которая будет изображать в зависимости от $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ номер выражения, которое получается из выражения с номером $\mathfrak{f}$ в результате замены переменной a цифрой $\mathfrak{l}$.

С этим определением мы свяжем определение некоторой другой функции $\mathrm{st}^*(m, k, l)$, которая соответствует введенной ранее (при рассмотрении исчисления предикатов) функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ [4]) и обладает тем свойством, что ее значение для любых цифр $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{l}$, являющихся номерами выражений из (Z_μ), и для каждой цифры $\mathfrak{f}$, являющейся номером какой-либо индивидной переменной или формульной переменной без аргументов, представляет собой номер того [не обязательно принадлежащего формализму (Z_μ)] выражения, которое получается из выражения с номером $\mathfrak{m}$ в результате замены переменной с номером $\mathfrak{f}$ (всюду, где она в это выражение входит) выражением с номером $\mathfrak{l}$.

[1]) См. с. 269 и далее.
[2]) См. с. 367—369.
[3]) См. с. 354—355.
[4]) См. с. 288.

Определение этой функции будет только незначительно отличаться от определения функции $\mathrm{st}_1(m, k, l)$. Именно, оно дается с помощью следующего разбора случаев:

«Если $m = k$ и $k = q \cdot p$, где q — одно из чисел 1, 2 или 10; а p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{st}^*(m, k, l) = l.$$

Если $m = 2^a \cdot 5 \cdot n$, где n — составное число, не делящееся ни на одно из чисел 2, 3 и 5, то

$$\mathrm{st}^*(m, k, l) = 2^a \cdot 5 \cdot \prod_{x < m} \wp_x^{\mathrm{st}^*(\nu(n, x), k, l)}.$$

Если $m = q \cdot 25 \cdot p^a$, q является делителем 4, а p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{st}^*(m, k, l) = q \cdot 25 \cdot (\mathrm{st}(p, k, l))^{\mathrm{st}^*(a, k, l)}.$$

Если $m = 3 \cdot n$ и $n \neq 0$, то

$$\mathrm{st}^*(m, k, l) = 3 \cdot \mathrm{st}^*(n, k, l).$$

В остальных случаях

$$\mathrm{st}^*(m, k, l) = m».$$

Функцию $\mathfrak{s}(k, l)$ с нужными нам свойствами мы получим из функции $\mathrm{st}^*(m, k, l)$, положив

$$\mathfrak{s}(k, l) = \mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l).$$

В дальнейшем мы еще воспользуемся функцией $\mathrm{st}^*(m, k, l)$. Здесь же мы заметим, что если цифра $\mathfrak{m}$ является номером некоторого выражения из (Z_μ), а цифра $\mathfrak{f}$ является номером какой-либо индивидной переменной, то формула

$$\mathrm{st}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}, 2) \neq \mathfrak{m}$$

рекурсивно изображает тот факт, что выражение с номером $\mathfrak{m}$ содержит переменную с номером $\mathfrak{f}$.

Замечание. Что касается изображения рекурсивных функций в формализме (Z_μ), то для этих функций в (Z_μ) могут быть взяты те же самые символы, которые ранее использовались нами в рекурсивной арифметике. Однако надо обратить внимание на то, что арифметическое изображение такого функционального знака в рамках нашей нумерации дается, если этот знак не принадлежит к числу основных, с помощью некоторого явного опре-

деления, которое, вообще говоря, не является определением его в рекурсивной арифметике, а строится с использованием μ-символа.

Теперь, после того как для формализма (Z_μ) оказались выполненными два из содержащихся в условии $б_2$) специальных требований [1]), мы должны еще рассмотреть требование, относящееся к существованию рекурсивной формулы $\mathfrak{B}(m, n)$ (не содержащей отличных от m и n переменных), обладающей тем свойством, что любая цифра $\mathfrak{n}$ является номером какой-либо выводимой в (Z_μ) формулы тогда и только тогда, когда можно указать такую цифру $\mathfrak{m}$, что истинно отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

Для формализма (Z_μ) и для введенной нами нумерации выполняется не только это только что сформулированное требование, но и — аналогично тому, как это имело место в случае исчисления предикатов, — более сильное, содержащееся в допущении $б_1$) условие [2]), что с помощью некоторой рекурсивной формулы $\mathfrak{B}(m, n)$, не содержащей отличных от m и n переменных, может быть изображено высказывание «число m является номером некоторой последовательности выражений, являющейся выводом выражения с номером n».

Для доказательства нам потребуется некоторая модификация рассмотрения, проведенного ранее для формализма исчисления предикатов с включенными в него цифрами и функциональными знаками.

С этой целью нужно в первую очередь четко представить себе различия, имеющиеся между средствами формализма (Z_μ) и средствами ранее рассматривавшегося формализма.

Прежде всего, важное различие заключается в том, что понятие терма и формулы в формализме (Z_μ) нельзя сформулировать в отрыве друг от друга, потому что свойство выражения $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ быть термом зависит от того, является ли формулой выражение $\mathfrak{A}(c)$. Следовательно, рекурсивное определение предикатов «число n является номером некоторого терма» и «число n является номером некоторой формулы» мы должны сформулировать одновременно. Но для этого нам не потребуется одновременная рекурсия для двух предикатов; будет достаточно дать только рекурсивное определение предиката «число n является номером некоторого терма или некоторой формулы», причем мы воспользуемся тем обстоятельством, что в силу свойств нашей нумерации (Z_μ) число, удовлетворяющее этому предикату, является номером некоторого терма, если оно не делится на 10, и номером некоторой формулы, если оно делится на 10.

Другое существенное отличие заключается в добавлении схемы явного определения, а также тех соглашений, которые были

[1]) См. с. 354.
[2]) См. с. 339 и далее.

приняты относительно способа изображения явно определенных символов [1]) в рамках рассматриваемой нумерации.

Своеобразное осложнение возникает также вследствие того, что при подстановках вместо формульной переменной в формулах (μ_1') и (μ_3'), т. е. в формулах

$$A(a) \to A(\mu_x A(x)) \quad \text{и} \quad \neg A(\mu_x A(x)) \to \mu_x A(x) = 0,$$

мы оказываемся вынужденными одновременно с выполнением подстановки производить (во избежание коллизий между связанными переменными) еще и некоторые переименования связанных переменных, подобно тому как это делалось при подстановках вместо формульной переменной, входящей в состав ε-формулы [2]).

Модификации, вызванные указанными обстоятельствами и необходимые для построения рекурсивной формулы $\mathfrak{B}(m, n)$, касаются, во-первых, рекурсивного определения формулы $\mathfrak{S}(n)$, изображающей предикат «число n является номером некоторого терма или некоторой формулы», во-вторых, рекурсивного изображения предиката «число n является номером некоторого явного определения» и, наконец, рекурсивного изображения предиката «число n является номером некоторой формулы, получающейся из формулы (μ_1') или формулы (μ_3') в результате подстановки (быть может, в сочетании с переименованием связанных переменных)». Мы рассмотрим подходы к этим определениям подробнее.

Чтобы определить формулу $\mathfrak{S}(n)$, мы сначала введем следующие обозначения. Пусть

$$\lambda_1(n) = \operatorname*{Min}_{x \leqslant n} \wp_x \mid n,$$

так что при $n \geqslant 2$ простое число $\wp_{\lambda_1}(n)$ является наименьшим простым делителем n.

Далее, обозначим через $\mathfrak{C}(n)$ формулу

$$\lambda_1(n) > 3 \,\&\, \forall x\,(x < \lambda(n) \to (\wp_x \mid n \to \wp_{x+1} \mid n)) \,\&$$
$$\forall x\,[x \leqslant n \to (x + \lambda_1(n) \leqslant \lambda(n) \sim \mathrm{st}^*(\lambda_1(n),\ 2 \cdot \wp_{x+3},\ 2) \neq \lambda_1(n))],$$

которая в силу своей структуры изображает некоторый рекурсивный предикат. Число n, для которого $\lambda_1(n)$ является номером некоторого выражения $\mathfrak{A}$ из (Z_μ), удовлетворяет этому предикату тогда и только тогда, когда, во-первых, n является произведением степеней некоторых, следующих друг за другом простых чисел $\wp_f, \wp_{f+1}, \ldots, \wp_{f+r}$, наименьшее из которых больше 7, и, во-вторых, в $\mathfrak{A}$ входят те и только те свободные переменные, номерами которых являются числа $2 \cdot \wp_3, 2 \cdot \wp_4, \ldots, 2 \cdot \wp_{3+r}$.

[1]) См. с. 368.
[2]) См. с. 31 — 32.

Кроме того, как и раньше[1]), мы используем некоторую функцию $\mathrm{st}(m, k)$, определение которой теперь мы дадим следующим разбором случаев:

«Если $m = 3^a \cdot k$ и k — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{st}(m, k) = 2 \cdot 3^a.$$

Если $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot n$, $c > 0$ и n не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5, то

$$\mathrm{st}(m, k) = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \prod_{x<m} \wp_x^{\mathrm{st}(\nu(n, x), k)}.$$

В остальных случаях $\mathrm{st}(m, k) = m$».

По отношению к (Z_μ) эта функция обладает свойствами, аналогичными свойствам функции с тем же обозначением в отношении ранее рассматривавшегося формализма. Именно, ее значение $\mathrm{st}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f})$ для цифры $\mathfrak{m}$, являющейся номером некоторого выражения $\mathfrak{A}$, и для цифры $\mathfrak{f}$, являющейся номером некоторой связанной переменной $\mathfrak{x}$, равняется номеру того [не обязательно принадлежащего формализму (Z_μ)] выражения, которое получается из $\mathfrak{A}$ в результате повсеместной замены переменной $\mathfrak{x}$ цифрой 0, за исключением тех мест, где она фигурирует в качестве составной части какого-либо квантора всеобщности $\forall\mathfrak{x}$ или существования $\exists\mathfrak{x}$ или в качестве индекса у какого-либо μ-символа.

А теперь мы изложим определение предиката $\mathfrak{S}(n)$ [сначала в содержательной метаматематической форме].

Термами и формулами являются следующие выражения:

а) цифра 0, свободные индивидные переменные, формульные переменные без аргументов;

б) терм с идущим за ним штрих-символом, формула со стоящим перед ней знаком отрицания;

в) формульные переменные с термами в качестве аргументов,

г) символы $+$, $\cdot$, $=$, $\leqslant$ и $<$ с термами в качестве аргументов;

д) введенные посредством явных определений функциональные знаки и предикатные символы с термами в качестве аргументов;

е) конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность двух формул;

ж) выражения $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ — выражение, содержащее связанную переменную $\mathfrak{x}$ [но не в области действия какого-либо одноименного с ней квантора или μ-символа] и такое, что $\mathfrak{A}(0)$ является формулой.

Условия, наложенные в пункте ж) на выражение $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, можно сформулировать еще и следующим образом: если переменную $\mathfrak{x}$ всюду заменить цифрой 0, за исключением тех мест, где она фигурирует в качестве составной части какого-либо квантора всеобщности $\forall\mathfrak{x}$ или существования $\exists\mathfrak{x}$ или в качестве индекса у какого-либо μ-символа, то из $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ получится некоторая формула и эта формула будет отлична от $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

[1]) См. с. 280 и далее.

Перечисленным возможным типам термов и формул соответствуют следующие возможности наличия свойства $\mathfrak{S}(n)$ у числа n:

а) $n = 2$ или $n = 2 \cdot p$, или $n = 10 \cdot p$, где p — простое число, большее или равное 7;

б) $n = 3 \cdot m$, $m \neq 0$ и $\mathfrak{S}(m)$;

в) $n = 10 \cdot m$, где $\lambda_1(m) \geqslant 3$ и для любого x, меньшего m, либо $\nu(m, x) = 0$, либо $\mathfrak{S}(\nu(m, x)) \,\&\, \neg(10 \mid \nu(m, x))$;

г) n имеет один из видов $5 \cdot 11^a \cdot 13^b$, $5 \cdot 11^a \cdot 17^b$, $70 \cdot 11^a \cdot 13^b$, $70 \cdot 11^a \cdot 17^b$, $70 \cdot 13^a \cdot 17^b$, где всякий раз $\mathfrak{S}(a)$, $\mathfrak{S}(b)$, $\neg(10 \mid a)$ и $\neg(10 \mid b)$;

д) $n = q \cdot 5 \cdot m$, где $q = 1$, если $\lambda_1(m)$ не делится на 10, и $q = 14$, если $\lambda_1(m)$ делится на 10; кроме того, $\mathfrak{S}(m)$, $\mathfrak{S}(\lambda_1(m))$ и для любого x, меньшего m, либо $\nu(m, x) = 0$, либо $\mathfrak{S}(\nu(m, x)) \,\&\, \neg(10 \mid \nu(m, x))$;

е) $n = q \cdot 20 \cdot 7^a \cdot 11^b$, q делит 8 и $\mathfrak{S}(a)$, $\mathfrak{S}(b)$, $10 \mid a$ и $10 \mid b$;

ж) $n = q \cdot 25 \cdot p^a$, q делит 4, p — простое число, большее или равное 7, $\mathrm{st}(a, p) \neq a$, $\mathfrak{S}(\mathrm{st}(a, p))$ и $10 \mid \mathrm{st}(a, p)$.

Из этой семичленной альтернативы, которой без труда можно придать совершенно формальный вид, мы получим некоторую эквивалентность

$$\mathfrak{S}(n) \sim \mathfrak{A}_1(n) \vee \mathfrak{A}_2(n) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_7(n),$$

из которой изложенным ранее[1]) способом получим рекурсивное определение некоторой одноместной функции $\mathfrak{f}(n)$, с помощью которой предикат $\mathfrak{S}(n)$ изобразится в виде

$$\mathfrak{f}(n) = 0.$$

[Для того чтобы можно было сформулировать это определение, существенно выполнение соотношений $\nu(m, k) < m$; $\lambda_1(m) < m$ при $m \neq 0$; $\mathrm{st}(a, p) < p^a$.]

Сформулировав рекурсивное определение предиката $\mathfrak{S}(n)$, мы легко получим изображения понятий терма и формулы с помощью некоторых рекурсивных формул: именно, высказывание «число n является номером некоторого терма» изобразится формулой $\mathfrak{S}(n) \,\&\, \neg(10 \mid n)$, а высказывание «число n является номером некоторой формулы» изобразится формулой $\mathfrak{S}(n) \,\&\, 10 \mid n$.

Если определение предиката $\mathfrak{S}(n)$ изменить, допустив, чтобы в пункте а) число n само могло быть простым числом, бо́льшим или равным 7, или, выражаясь формально, если дизъюнктивно

[1]) См. с. 277 и далее.

добавить в члене $\mathfrak{A}_1(n)$ выражение $\mathrm{Pr}(n) \& n \geqslant 7$ и всюду, где стоит какое-либо выражение $\mathfrak{S}(t)$, написать вместо него $\mathfrak{S}_1(t)$, то получится рекурсивное определение некоторого предиката $\mathfrak{S}_1(n)$, который для любого n выполняется тогда и только тогда, когда оно является номером некоторого квазитерма или некоторой квазиформулы, т. е. такого выражения, которое либо само является термом или формулой, либо получается из терма или из формулы в результате замены одной или нескольких свободных индивидных переменных связанными.

Формула $\mathfrak{S}_1(n) \& \neg(10 \mid n)$ изображает высказывание «число n является номером некоторого квазитерма», формула $\mathfrak{S}_1(n) \& 10 \mid n$ — высказывание «число n является номером некоторой квазиформулы».

С другой стороны, если мы в пункте а) определения предиката $\mathfrak{S}(n)$ оставим только условие $n = 2$, а кроме того, исключим пункт в) [так что вместо формулы $\mathfrak{A}_1(n)$ будет стоять равенство $n = 2$, а формула $\mathfrak{A}_3(n)$ вовсе выпадет из дизъюнкции $\mathfrak{A}_1(n) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_7(n)$], то придем к некоторой рекурсивной формуле $\mathfrak{S}_2(n)$, которая изобразит высказывание «число n является номером некоторого терма или некоторой формулы без свободных переменных».

Так как в формализме (Z_μ) всякий терм без свободных переменных является выражением, определяющим некоторое число (т. е. выражением, формализующим однозначное определение некоторого конкретного числа), и так как и обратно—всякое такое выражение в (Z_μ) является термом без свободных переменных, то для формализма (Z_μ) и для рассматриваемой нами нумерации свойство числа n быть номером выражения, определяющего какое-либо число, изображается с помощью рекурсивного предиката

$$\mathfrak{S}_2(n) \& \neg(10 \mid n).$$

Таким образом, формализм (Z_μ) удовлетворяет условию, которое ранее в этой главе [1]) мы обозначили посредством в*).

Еще одна интересная модификация определения предиката $\mathfrak{S}(n)$ получается, если опустить дизъюнктивный член $\mathfrak{A}_3(n)$, а вместо $\mathfrak{A}_1(n)$ взять формулу $n = 2 \vee (2 \mid n \& \mathrm{Pr}(\pi(n, 2)) \& n \geqslant 14)$. Эта модификация дает нам рекурсивное изображение понятий «формула без формульных переменных» и «терм без формульных переменных».

С помощью формулы $\mathfrak{G}(n)$, использованной нами при определении предиката $\mathfrak{S}(n)$ [2]), мы теперь легко получим рекурсивное изображение высказывания «число n является номером некоторого

[1]) См. с. 333.
[2]) См. с 373.

явного определения». Сначала мы представим это высказывание в виде дизъюнкции «число n является номером явного определения некоторого функционального знака или число n является номером явного определения некоторого предикатного символа». Для того чтобы по возможности кратко записать изображения обоих членов этой дизъюнкции, мы обозначим посредством $\mathfrak{G}_1(n)$ следующую рекурсивную формулу:

$$\forall y\,(y \leqslant \lambda(n) \& \lambda_1(n) \leqslant y \to \nu(n, y) = 2 \cdot \wp_{(y+3) \dot{-} \lambda_1(n)}),$$

которая при $n \geqslant 2$ выражает тот факт, что в разложении n на простые множители фигурируют все простые числа от $\wp_{\lambda_1(n)}$ до $\wp_{\lambda(n)}$ включительно и имеют при этом степени $2 \cdot \wp_3$, $2 \cdot \wp_4$, ..., $2 \cdot \wp_{(\lambda(n) \dot{-} \lambda_1(n))+3}$ соответственно.

Тогда высказывание «число n является номером явного определения некоторого функционального знака» изобразится посредством формулы

$$n = 70 \cdot 11^{\nu(n,\,4)} \cdot 13^{\nu(n,\,5)} \& \mathfrak{S}(\nu(n,\,5)) \& \neg(10 \mid \nu(n,\,5)) \& \exists x\,\{x < n \& \nu(n,\,4) = 5 \cdot x \& \nu(n,\,5) = \lambda_1(x) \& \mathfrak{C}(x) \& \mathfrak{G}_1(x)\},$$

а высказывание «число n является номером явного определения некоторого предикатного символа» изобразится формулой

$$n = 160 \cdot 7^{\nu(n,\,3)} \cdot 11^{\nu(n,4)} \& \mathfrak{S}(\nu(n,\,4)) \& 10 \mid \nu(n,\,4) \& \exists x\,\{x < n \& \nu(n,\,3) = 70 \cdot x \& \nu(n,\,4) = \lambda_1(x) \& \mathfrak{C}(x) \& \mathfrak{G}_1(x)\}.$$

Теперь из подлежащих рассмотрению рекурсивных определений, требующих в формализме (Z_μ) нового по сравнению с формализмом, рассмотренным в гл. IV, подхода, остается только определение предиката «число n является номером формулы, получающейся из формул (μ_1') и (μ_3') в результате подстановки вместе с возможными переименования каких-либо связанных переменных».

Чтобы сформулировать это определение, мы сначала введем предикат $\Psi_2(s)$, с помощью которого, используя функцию $\sigma(a, b)$ и ее обращения [1]) $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$, изобразим отношение между двумя квазитермами или квазиформулами, состоящее в их совпадении с точностью до обозначений связанных переменных. Это может быть сделано аналогично тому, как мы ранее с помощью предиката $\Psi_1(s)$ изобразили отношение между двумя формулами, состоящее в том, что одна из них получается из другой в результате переименования некоторой связанной переменной в области действия соответствующего квантора [2]).

[1]) См. с. 272.
[2]) См. с. 289—290.

Рекурсивное определение этого предиката $\Psi_2(s)$ получается с учетом того, что для любого числа n он должен выполняться тогда и только тогда, когда выполняется $\mathfrak{S}_1(\sigma_1(s)) \& \mathfrak{S}_1(\sigma_2(s))$ и, кроме того, имеет место один из следующих случаев:

а) $\sigma_1(s) = \sigma_2(s)$;

б) $\sigma_1(s) = 25 \cdot q \cdot p^a$, $\sigma_2(s) = 25 \cdot q \cdot l^b$, где q — делитель числа 4, а p и l — простые числа, бо́льшие или равные 7, $p \neq l$ и

$$\mathrm{st}^*(\sigma_1(s),\ p,\ l) = \sigma_2(s);$$

в) при $k \leqslant 2$ имеет место равенство

$$\nu(\sigma_1(s),\ k) = \nu(\sigma_2(s),\ k),$$

а при $3 \leqslant k < s$ выполняется условие

$$\Psi_2(\sigma(\nu(\sigma_1(s),\ k),\ \nu(\sigma_2(s),\ k))).$$

А теперь с помощью рекурсивной формулы $\Psi_2(s)$ можно рекурсивно изобразить высказывание «число n является номером некоторой формулы, получающейся из формулы (μ_1') или из формулы (μ_3') в результате подстановки вместе с возможным переименованием каких-либо связанных переменных».

Действительно, это высказывание равносильно следующему: «Существуют числа u и v, являющиеся номерами некоторых формул $\mathfrak{A}(a)$ и $\mathfrak{B}(a)$, которые содержат переменную a и не содержат переменной x, не имеют общих связанных переменных и отличаются друг от друга разве лишь обозначениями связанных переменных; эти числа u и v меньше числа n, являющегося номером одной из формул

$$\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(\mu_x \mathfrak{B}(x)),\quad \neg \mathfrak{A}(\mu_x \mathfrak{B}(x)) \to \mu_x \mathfrak{B}(x) = 0».$$

По этой формулировке мы получаем следующее формальное изображение этого высказывания с помощью формул $\mathfrak{S}(n)$, $\Psi_2(s)$ и функции $\mathrm{st}^*(m, k, l)$:

$$\begin{aligned}
&\exists u \exists v \{u < n \,\&\, v < n \,\&\, \mathfrak{S}(u) \,\&\, \mathfrak{S}(v) \,\&\, \mathrm{st}^*(u,\ 14,\ 2) \neq u \\
&\quad \&\, \mathrm{st}^*(v,\ 14,\ 2) \neq v \,\&\, \mathrm{st}^*(u,\ 7,\ 2) = u \,\&\, \mathrm{st}^*(v,\ 7,\ 2) = v \\
&\quad \&\, \forall z (z < n \,\&\, 3 \leqslant z \to \mathrm{st}^*(u,\ \wp_z,\ 2) = u \vee \mathrm{st}^*(v,\ \wp_z,\ 2) = v) \\
&\quad \&\, \Psi_2(\sigma(u,\ v)) \,\&\, [n = 80 \cdot 7^u \cdot 11^{\mathrm{st}^*(u,\ 14,\ 25 \cdot 7^{\mathrm{st}^*(v,\ 14,\ 7)})} \\
&\qquad \vee n = 80 \cdot 7^{3 \cdot \mathrm{st}^*(u,\ 14,\ 25 \cdot 7^{\mathrm{st}^*(v,\ 14,\ 7)})} \cdot 11^{70 \cdot 11^{25 \cdot 7^{\mathrm{st}^*(v,\ 14,\ 7)}}} \cdot 13^2]\}.
\end{aligned}$$

Но по внешнему виду этой формулы легко заключить, что она переводима в некоторое равенство вида $\mathfrak{f}(n) = 0$, где $\mathfrak{f}(n)$ — одноместная рекурсивная функция.

Небольшой модификацией этой формулы мы получим также рекурсивное изображение двуместного предиката «число m является номером одной из формул (μ_1') и (μ_3'), а n представляет собой номер формулы, получающейся из формулы с номером m в результате некоторой подстановки вместо формульной переменной этой формулы, быть может, вместе с переименованием одной или нескольких связанных переменных».

А теперь мы можем приступить к построению требуемой в условии $\mathfrak{б}_2$) формулы $\mathfrak{B}(m, n)$, посредством которой формализуется высказывание: «число m является номером списка формул, представляющего собой вывод в (Z_μ) формулы, номером которой является n».

Это высказывание в точности означает следующее:

Для любого числа x такого, что $x \leqslant \lambda(m)$, $\nu(m, x)$ представляет собой номер некоторой формулы из (Z_μ), причем $\nu(m, \lambda(m)) = n$; а кроме того, имеет место одно из следующих утверждений а) — к):

а) $\nu(m, x)$ является номером какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний;

б) $\nu(m, x)$ является номером одной из формул (a) и (b) исчисления предикатов или одной из аксиом формализма (Z_μ);

в) $\nu(m, x)$ является номером явного определения какого-либо функционального знака или предикатного символа;

г) $x \neq 0$, и формула с номером $\nu(m, x)$ получается из формулы с номером $\nu(m, x \dot{-} 1)$ в результате некоторой подстановки вместо какой-либо свободной индивидной переменной или вместо формульной переменной без аргументов;

д) $x \neq 0$, и формула с номером $\nu(m, x)$ получается из формулы с номером $\nu(m, x \dot{-} 1)$ в результате некоторой подстановки вместо какой-либо формульной переменной с одним или несколькими аргументами;

е) $x \neq 0$, и формула с номером $\nu(m, x)$ получается из формулы с номером $\nu(m, x \dot{-} 1)$ в результате переименования одной или нескольких связанных переменных;

ж) $x \neq 0$, $\nu(m, x \dot{-} 1)$ является номером одной из формул (μ_1') и (μ_3'), а формула с номером $\nu(m, x)$ получается из этой формулы в результате некоторой подстановки вместо ее формульной переменной в сочетании с переименованием одной или нескольких связанных переменных;

з) $x \neq 0$, и формула с номером $\nu(m, x)$ получается из формулы с номером $\nu(m, x \dot{-} 1)$ по одной из схем (α) и (β);

и) $x > 1$, и формула с номером $\nu(m, x)$ получается по схеме заключения из формул с номерами $\nu(m, x \dot{-} 1)$ и $\nu(m, x \dot{-} 2)$;

к) существует число y, меньшее x, такое, что формулы с номерами $\nu(m, x)$ и $\nu(m, y)$ совпадают.

А теперь все десять членов этой альтернативы мы рассмотрим на предмет выяснения их рекурсивной изобразимости. По большей части мы сможем воспользоваться рекурсивными изображе-

ниями соответствующих отношений, полученными в свое время для формализма исчисления предикатов с добавлением цифр и функциональных знаков. Только теперь потребуется всюду вместо старых определений внести новые, приспособленные к формализму (Z_μ) определения понятий формулы, терма и квазитерма, а функцию $\mathrm{st}_1(m, k, l)$ нужно будет заменить функцией $\mathrm{st}^*(m, k, l)$. Так мы получим изображения для членов а), г), д), з) и и). Для членов в) и ж) их рекурсивные изображения были определены только что. Член е) изобразится выражением

$$x \neq 0 \,\&\, \mathfrak{v}(m, x) \neq \mathfrak{v}(m, x \dot{-} 1) \,\&\, \Psi_2(\sigma(\mathfrak{v}(m, x), \mathfrak{v}(m, x \dot{-} 1))),$$

член к) — выражением

$$\exists y\,(y < x \,\&\, \mathfrak{v}(m, x) = \mathfrak{v}(m, y)),$$

а член б) изобразится дизъюнкцией

$$\mathfrak{v}(m, x) = \mathfrak{n}_1 \vee \mathfrak{v}(m, x) = \mathfrak{n}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{v}(m, x) = \mathfrak{n}_{16},$$

где $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ суть номера основных формул (a) и (b) исчисления предикатов, $\mathfrak{n}_3$ и $\mathfrak{n}_4$ — номера аксиом равенства, $\mathfrak{n}_5$, $\mathfrak{n}_6$ и $\mathfrak{n}_7$ — номера трех арифметических аксиом, $\mathfrak{n}_8$, $\mathfrak{n}_9$, $\mathfrak{n}_{10}$ и $\mathfrak{n}_{11}$ — номера рекурсивных равенств для сложения и умножения, $\mathfrak{n}_{12}$ и $\mathfrak{n}_{13}$ — номера формул для символов $\leqslant$ и $<$, а $\mathfrak{n}_{14}$, $\mathfrak{n}_{15}$ и $\mathfrak{n}_{16}$ — номера формул (μ_1'), (μ_2') и (μ_3').

Если мы запишем полученные выражения для всех членов от а) до к) включительно, то в качестве формализации высказывания, изображаемого искомой формулой $\mathfrak{B}(m, n)$, у нас сначала получится некоторая формула вида

$$\mathfrak{v}(m, \lambda(m)) = n \,\&\, \forall x\,(x \leqslant \lambda(m) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{v}(m, x)) \,\&\, 10 \mid \mathfrak{v}(m, x) \,\&\, \mathfrak{D}(m, x)),$$

где $\mathfrak{D}(m, k)$ — дизъюнкция, не содержащая отличных от m и k свободных переменных, члены которой переводимы в рекурсивные формулы. По внешнему виду этой формулы, которую мы обозначим посредством $\mathfrak{B}^*(m, n)$, ясно, что она может быть переведена в некоторую рекурсивную формулу, не содержащую переменных, отличных от m и n. Тем самым искомая формула $\mathfrak{B}(m, n)$ построена.

Итак, мы убедились, что для формализма (Z_μ) условие $б_2$) выполняется во всех его частях.

Для дальнейшего мы также заметим, что фигурирующая в формуле $\mathfrak{B}^*(m, n)$ дизъюнкция $\mathfrak{D}(m, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}_1(\mathfrak{v}(m, x)) \vee (x \neq 0 \,\&\, \mathfrak{D}_2(\mathfrak{v}(m, x), \mathfrak{v}(m, x \dot{-} 1)))\\ &\quad \vee (0' < x \,\&\, \mathfrak{D}_3(\mathfrak{v}(m, x), \mathfrak{v}(m, x \dot{-} 1), \mathfrak{v}(m, x \dot{-} 2)))\\ &\quad \vee \exists y\,(y < x \,\&\, \mathfrak{v}(m, x) = \mathfrak{v}(m, y)).\end{aligned}$$

При этом $\mathfrak{D}_1(a)$, $\mathfrak{D}_2(a, b)$ и $\mathfrak{D}_3(a, b, c)$ суть формулы из (Z_μ), допускающие перевод в рекурсивные формулы. Формула $\mathfrak{D}_2(a, b)$ содержит в качестве дизъюнктивного члена формулу

$$\exists y \exists z\,\{y < b \,\&\, z < a \,\&\, \mathrm{Pr}(y) \,\&\, 7 \leqslant y \,\&\, \mathfrak{S}(z) \,\&\, \neg(10 \mid z) \,\&\, a = \mathrm{st}^*(b, 2 \cdot y, z)\},$$

а формула $\mathfrak{D}_3(a, b, c)$ представляет собой равенство

$$b = 80 \cdot 7^a \cdot 11^c.$$

г) Проверка условий на выводимость. Теперь мы еще должны убедиться, что формализм (Z_μ), а также введенная для него нумерация и построенная на основе этой нумерации формула $\mathfrak{B}(m, n)$ удовлетворяют нашим трем условиям на выводимость, фигурирующим во второй теореме Гёделя о неполноте в качестве предположений [1]).

Рассмотрим сначала первые два из этих условий. В применении к формализму (Z_μ) они утверждают, что:

1) если из формулы с номером $\mathfrak{f}$ выводима формула с номером $\mathfrak{l}$, то в (Z_μ) выводима формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{f}) \to \exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{l});$$

2) формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(k)) \to \exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(k, l)))$$

выводима в (Z_μ).

При этом с учетом произведенной нами нумерации в качестве $\mathfrak{e}(k)$ следует взять функцию $3 \cdot k$, а в качестве $\mathfrak{s}(k, l)$ — функцию $\mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)$ [2]).

Установлению искомых выводимостей мы предпошлем следующие два замечания. Во-первых, мы заметим, что при рассмотрении упомянутых выводимостей в (Z_μ) формула $\mathfrak{B}(m, n)$ повсюду может быть заменена формулой $\mathfrak{B}^*(m, n)$, так как она переводима в эту формулу. Далее, мы заметим, что в результате небольшого видоизменения формулы $\mathfrak{B}^*(m, n)$ может быть получено изображение высказывания «число m является номером списка формул, являющегося выводом в (Z_μ) формулы с номером n при добавлении формулы с номером k к числу исходных формул». Действительно, это высказывание изображается формулой

$$\begin{aligned}&\mathfrak{v}(m, \lambda(m)) = n \,\&\, \forall x\,(x \leqslant \lambda(m) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{v}(m, x)) \,\&\,\\ &\qquad 10 \mid \mathfrak{v}(m, x) \,\&\, (\mathfrak{D}(m, x) \vee \mathfrak{v}(m, x) = k)).\end{aligned}$$

Эта формула, которую мы обозначим посредством $\mathfrak{B}^*(m, k, n)$,

[1]) См. с. 355.
[2]) См. с. 370—371.

тоже может быть переведена в некоторую рекурсивную формулу $\mathfrak{B}(m, k, n)$, которая не содержит переменных, отличных от m, k и n.

Рассмотрим теперь первое условие на выводимость. В нем предполагается, что из формулы с номером $\mathfrak{f}$ может быть выведена формула с номером $\mathfrak{l}$[1]). Пусть этот вывод представляет собой список формул с номером $\mathfrak{m}$. В этом случае рекурсивная формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l})$ без переменных является истинным отношением между числами $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$, и потому эта формула выводима в (Z_μ).

Мы ищем вывод формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{f}) \to \exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{l}).$$

Как было замечено выше, чтобы доказать выводимость этой формулы, достаточно установить выводимость формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{f}) \,\&\, \mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}) \to \exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{l})$$

или же выводимость формулы

$$\exists x \mathfrak{B}^*(x, \mathfrak{f}) \,\&\, \mathfrak{B}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l}) \to \exists x \mathfrak{B}^*(x, \mathfrak{l}).$$

Но выводима даже формула

$$\exists x \mathfrak{B}^*(x, k) \,\&\, \mathfrak{B}^*(m, k, l) \to \exists x \mathfrak{B}^*(x, l)$$

с переменными m, k и l вместо цифр $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$. Действительно, эта формула получается средствами исчисления предикатов из формулы

$$\mathfrak{B}^*(n, k) \,\&\, \mathfrak{B}^*(m, k, l) \to \mathfrak{B}^*\left(n \cdot \prod_{x \leqslant \lambda(m)} \wp_{\lambda(n)+x'}^{\nu(m, x)},\ l\right),$$

а эта последняя, имеющая вид

$$\mathfrak{B}^*(n, k) \,\&\, \mathfrak{B}^*(m, k, l) \to \mathfrak{B}^*(\mathfrak{t}(n, m), l),$$

где $\mathfrak{t}(n, m)$ обозначает терм

$$n \cdot \prod_{x \leqslant \lambda(m)} \wp_{\lambda(n)+x'}^{\nu(m, x)},$$

в свою очередь получается на основе определения формул $\mathfrak{B}^*(m, n)$ и $\mathfrak{B}^*(m, k, n)$ с использованием выводимых формул

$$a \leqslant \lambda(n) \to \nu(\mathfrak{t}(n, m), a) = \nu(n, a),$$

$$a \leqslant \lambda(m) \to \nu(\mathfrak{t}(n, m), \lambda(n) + a') = \nu(m, a)$$

и

$$\lambda(\mathfrak{t}(n, m)) = \lambda(n) + (\lambda(m))'$$

[1]) Под выводимостью и невыводимостью в данных рассмотрениях, относящихся к условиям на выводимость, всюду, где не оговорено противное, будет пониматься выводимость и соответственно невыводимость *в формализме* (Z_μ).

с учетом вида выражения, сокращенно обозначенного через $\mathfrak{D}(m, x)$[1]).

Тем самым первое из рассматриваемых нами условий на выводимость для формализма (Z_μ) оказывается выполненным.

Что же касается выводимости формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, 3 \cdot k) \to \exists x \mathfrak{B}(x, 3 \cdot \mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)),$$

то эта формула получается в результате подстановки и использования [выводимого из определения функции $\mathrm{st}^*(m, k, l)$] равенства

$$\mathrm{st}^*(3 \cdot m, k, l) = 3 \cdot \mathrm{st}^*(m, k, l)$$

из формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, k) \to \exists x \mathfrak{B}(x, \mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)),$$

а значит, и из формулы

$$\exists x \mathfrak{B}^*(x, k) \to \exists x \mathfrak{B}^*(x, \mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)). \tag{1}$$

Эта формула в свою очередь выводится средствами исчисления предикатов из формулы

$$\mathfrak{B}^*(m, k) \to \mathfrak{B}^*\left(m \cdot \wp_{\lambda(m)+1}^{\mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)},\ \mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)\right),$$

которая на основании вида формулы $\mathfrak{B}^*(m, n)$, в частности, с учетом вида выражения $\mathfrak{D}(m, x)$, получается с помощью выводимых формул[2])

$$\mathfrak{S}(2 \cdot 3^l), \quad \neg(10 \mid 2 \cdot 3^l),$$

$$\mathrm{st}^*(k, n, l) \neq k \to n \leqslant k$$

и

$$\mathfrak{S}(k) \,\&\, 10 \mid k \to \mathfrak{S}(\mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l)) \,\&\, 10 \mid \mathrm{st}^*(k, 14, 2 \cdot 3^l).$$

Таким образом, выполненным оказывается и второе условие на выводимость.

Вместе с тем проведенное доказательство дает несколько более общий результат, так как фигурирующее на месте второго аргумента функции st^* число 14 в этом выводе может быть заменено номером любой свободной индивидной переменной, т. е. любым числом вида $2 \cdot \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простое число, большее или равное 3. Так для любого простого числа $\mathfrak{p} \geqslant 3$ получается выводимость формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, k) \to \exists x \mathfrak{B}(x, \mathrm{st}^*(k, 2 \cdot \mathfrak{p}, 2 \cdot 3^l)).$$

[1]) См. с. 380.

[2]) Для вывода упомянутой формулы (1) надо вернуться от рекурсивных определений функции st^* и формулы $\mathfrak{S}$ к тем дизъюнкциям (альтернативам), из которых эти определения были получены. Оставшуюся часть вывода можно будет затем провести, взяв за образец неформальное теоретико-множественное рассуждение.

Обратимся теперь к третьему условию на выводимость. В применении к формализму (Z_μ) и к рассматриваемой нами нумерации оно утверждает следующее:

Если $\mathfrak{f}(m)$ — какой-либо рекурсивный терм, содержащий единственную переменную m, а n — номер равенства $\mathfrak{f}(a) = 0$, то формула

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathrm{st}^*(\mathrm{n},\ 14,\ 2 \cdot 3^m))$$

выводима в (Z_μ).

Из этой формулировки мы прежде всего можем исключить функцию st*. Это удается сделать с помощью следующего замечания:

Для всякого выражения $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ из (Z_μ), где $a_1, \ldots, a_r$ — какие-либо отличные друг от друга свободные индивидные переменные, можно указать такое элементарно-арифметическое выражение $\mathfrak{t}(a_1, \ldots, a_r)$, что для любых цифр $\delta_1, \ldots, \delta_r$ значение $\mathfrak{t}(\delta_1, \ldots, \delta_r)$ равно номеру выражения $\mathfrak{A}(\delta_1, \ldots, \delta_r)$.

Действительно, каждая из переменных $a_1, \ldots, a_r$ всюду, где она входит в $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ — сама по себе или с некоторым числом штрихов — фигурирует либо в качестве аргумента какой-либо формульной переменной или предикатного символа, либо в качестве аргумента функционального знака. Каждому такому вхождению рассматриваемой переменной a_i в выражение $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ в рамках нашей нумерации соответствует вхождение номера этой переменной, — возможно, несколько раз умноженного на 3 — в качестве показателя степени некоторого простого числа, а замене переменной a_i цифрой δ_i соответствует замена номера этой переменной значением выражения $2 \cdot 3^{\delta_i}$. Поэтому искомое функциональное выражение $\mathfrak{t}(a_1, \ldots, a_r)$ можно получить, имитируя средствами нашей нумерации построение выражения $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$; при этом всюду, где переменная a_i $(i = 1, \ldots, r)$ входит, — возможно, с несколькими штрихами — в качестве аргумента какой-либо формульной переменной, предикатного символа или функционального знака и где в соответствии с этим в изображающем $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ арифметическом выражении в качестве показателя степени при каком-либо простом числе фигурирует номер этой переменной a_i, — быть может, умноженный на какую-либо степень числа 3, — мы должны вместо номера этой переменной a_i подставить выражение $2 \cdot 3^{a_i}$.

Пусть, например, $\mathfrak{A}(a, b)$ представляет собой импликацию

$$c < a \to c < a'' + b.$$

Тогда $\mathfrak{t}(a, b)$ будет представлять собой выражение

$$80 \cdot 7^{70 \cdot 13^{26} \cdot 17^{2 \cdot 3^a}} \cdot 11^{70 \cdot 13^{26} \cdot 17^{5 \cdot 11^{9 \cdot 2 \cdot 3^a}} \cdot 13^{2 \cdot 3^b}}.$$

Функциональное выражение $\mathfrak{t}(a_1, \ldots, a_r)$, построенное указанным способом для выражения $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ из (Z_μ) со свободными индивидными переменными $a_1, \ldots, a_r$, мы будем называть арифметическим функциональным выражением, сопоставленным выражению $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_r)$ относительно переменных $a_1, \ldots, a_r$. При этом указание «относительно переменных $a_1, \ldots, a_r$» может быть опущено, если рассматриваемое выражение никаких других свободных индивидных переменных не содержит.

Проверяя для (Z_μ) третье условие на выводимость [1]), мы постоянно будем использовать эту конструкцию. Сначала мы применим ее для того, чтобы придать этому условию другую редакцию, опираясь на следующее обстоятельство:

Если r — номер выражения из (Z_μ), содержащего переменную c, а $\mathfrak{g}(c)$ — сопоставленное этому выражению относительно переменной c арифметическое функциональное выражение, то в (Z_μ) выводимо равенство [2])

$$\mathrm{st}^*(\mathrm{r},\ 14,\ 2 \cdot 3^c) = \mathfrak{g}(c).$$

В силу этой выводимости рассматриваемое нами условие на выводимость равносильно следующему:

Если $\mathfrak{f}(m)$ — рекурсивный терм, содержащий единственную переменную m, а $\mathfrak{g}(a)$ — арифметическое функциональное выражение, сопоставленное равенству $\mathfrak{f}(a) = 0$ (относительно переменной a), то формула

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{g}(m))$$

выводима в (Z_μ).

Поясним это условие на каком-нибудь простом примере. Возьмем в качестве $\mathfrak{f}(m)$ терм $m + 0$. Тогда роль $\mathfrak{g}(a)$ будет играть выражение

$$70 \cdot 11^{(5 \cdot 11^{2 \cdot 3^a} \cdot 13^2)} \cdot 13^2.$$

Требуется найти вывод формулы

$$m + 0 = 0 \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{g}(m)).$$

Но эта формула переводима в формулу

$$\exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{g}(0)),$$

[1]) См. с. 355.

[2]) В этом нетрудно убедиться с помощью определения функции st^*_i см. с. 371.

а значит, и в формулу

$$\exists x \mathfrak{B}(x,\ 70 \cdot 11^{5 \cdot 11^{2} \cdot 13^{2}} \cdot 13^{2}).$$

Значение выражения

$$70 \cdot 11^{5 \cdot 11^{2} \cdot 13^{2}} \cdot 13^{2}$$

является номером формулы

$$0+0=0.$$

Если обозначить этот номер буквой $\mathfrak{n}$, а буквой $\mathfrak{m}$ обозначить номер списка формул, состоящего из двух формул $a+0=a$ и $0+0=0$ (первая из которых является одним из рекурсивных равенств для сложения, а вторая получается из первой в результате подстановки вместо переменной a), то формула $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ — а потому и $\mathfrak{B}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ — будет выводима в (Z_μ).

Но из нее получается формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{n}).$$

Таким образом, в этом весьма частном случае выполнимость рассматриваемого условия установлена.

Теперь мы убедимся, что искомая выводимость имеет место всегда. Прежде всего мы напомним смысл высказывания, которое формализуется посредством формулы

$$\mathfrak{f}(m)=0 \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{g}(m)),$$

где $\mathfrak{f}(m)$ — рекурсивный терм с единственной переменной m, а $\mathfrak{g}(a)$ — арифметическое функциональное выражение, сопоставленное равенству $\mathfrak{f}(a)=0$ относительно переменной a. Это высказывание может быть сформулировано следующим образом: «Если для какой-либо цифры $\mathfrak{z}$ значение терма $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ равно 0, то равенство

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z})=0$$

выводимо в (Z_μ)».

Содержательная истинность этого утверждения усматривается следующим образом:

Любое вычисление значения рекурсивного терма без переменных в рамках рекурсивной арифметики может быть формализовано выводом равенства, указывающего результат этого вычисления. В этом выводе в качестве исходных формул используются рекурсивные равенства для рекурсивных функций, прямо или косвенно фигурирующих в этом терме, и аксиомы равенства. При этом использование этих формул производится с помощью подстановок и схем заключения. Если к используемым рекурсивным равенствам, не являющимися равенствами для сложения и умножения, добавить их выводы, то из любого такого вывода в рамках рекурсивной арифметики получится некоторый вывод в формализме (Z_μ). В самом деле, рекурсивные функции, за исключением

сложения и умножения, в формализме (Z_μ) вводятся посредством явных определений и, как мы знаем, рекурсивные равенства, соответствующие этим функциям, выводимы на основе этих определений.

Таким образом, задача искомого доказательства заключается в том, чтобы показать, что применение только что проведенного метаматематического рассуждения к любому рекурсивному терму $\mathfrak{f}(a)$ может быть формализовано в (Z_μ) выводом соответствующей формулы

$$\mathfrak{f}(m)=0 \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{g}(m)).$$

Замечание. Отличие искомого доказательства от только что проведенного рассуждения будет заключаться в том, что в данном рассуждении содержательная всеобщность распространяется как на терм $\mathfrak{f}(a)$, так и на цифру $\mathfrak{z}$, а в искомом доказательстве содержательная всеобщность будет распространяться только на терм $\mathfrak{f}(a)$, тогда как всеобщность в отношении цифры $\mathfrak{z}$ заменится некоторой формальной всеобщностью, которая выразится в появлении переменной m в зависящей от заданного терма $\mathfrak{f}(a)$ формуле, вывод которой ищется.

Сначала мы докажем следующую *лемму*:

Если некоторая выводимая в формализме (Z_μ) формула содержит переменные $a_1, \ldots, a_r$, а $\mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_r)$ представляет собой арифметическое функциональное выражение, сопоставленное этой формуле относительно переменных $a_1, \ldots, a_r$, то формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_r))$$

тоже выводима в (Z_μ).

Для доказательства мы воспользуемся сделанным ранее замечанием[1]), что для любого простого числа $\mathfrak{p}$, большего или равного 3, в (Z_μ) выводима формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x,\ k) \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathrm{st}^*(k,\ 2 \cdot \mathfrak{p},\ 2 \cdot 3')).$$

Применяя это замечание нужное число раз, мы получаем, что для произвольных простых чисел $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, бо́льших или равных 3, и для произвольных отличных друг от друга свободных индивидных переменных $a_1, \ldots, a_r$ в (Z_μ) выводима формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x,\ k) \to \exists x \mathfrak{B}(x,\ \mathrm{st}^*(\mathrm{st}^*(\ldots$$
$$\ldots(\mathrm{st}^*(k,\ 2 \cdot \mathfrak{p}_1,\ 2 \cdot 3^{a_1}),\ 2 \cdot \mathfrak{p}_2,\ 2 \cdot 3^{a_2}), \ldots),\ 2 \cdot \mathfrak{p}_r,\ 2 \cdot 3^{a_r})).$$

Если в эту формулу вместо k мы подставим номер $\mathfrak{n}$ какой-либо выводимой в (Z_μ) формулы, то посылка $\exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{n})$ окажется выво-

[1]) См. с. 383.

димой формулой, и поэтому выводимой будет и формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x, \mathrm{st}^*(\mathrm{st}^*(\ldots(\mathrm{st}^*(\mathfrak{n}, 2\cdot\mathfrak{p}_1, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_1}), 2\cdot\mathfrak{p}_2, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_2}), \ldots), 2\cdot\mathfrak{p}_\mathfrak{r}, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_\mathfrak{r}})).$$

Следовательно, для доказательства нашей леммы достаточно убедиться в выводимости в (Z_μ) равенства

$$\mathrm{st}^*(\mathrm{st}^*(\ldots(\mathrm{st}^*(\mathfrak{n}, 2\cdot\mathfrak{p}_1, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_1}), 2\cdot\mathfrak{p}_2, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_2}), \ldots, 2\cdot\mathfrak{p}_\mathfrak{r}, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_\mathfrak{r}}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$$

в предположении, что $\mathfrak{n}$ является номером некоторого выражения $\mathfrak{A}$ из (Z_μ), содержащего переменные $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r}$, числа $2\cdot\mathfrak{p}_1, \ldots, 2\cdot\mathfrak{p}_\mathfrak{r}$ суть номера этих переменных, а $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ — арифметическое функциональное выражение, сопоставленное выражению $\mathfrak{A}$ относительно этих переменных.

Мы немедленно получим вывод указанного равенства (с использованием аксиом равенства), если сумеем вывести равенства

$$\mathrm{st}^*(\mathfrak{t}_{\mathfrak{i}-1}, 2\cdot\mathfrak{p}_\mathfrak{i}, 2\cdot 3^{\mathfrak{a}_\mathfrak{i}}) = \mathfrak{t}_\mathfrak{i} \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{r}),$$

где $\mathfrak{t}_0$ представляет собой цифру $\mathfrak{n}$, а $\mathfrak{t}_\mathfrak{i}$ при $\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{r}$ означает арифметическое функциональное выражение, сопоставленное выражению $\mathfrak{A}$ относительно переменных $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$.

Но вывод этих равенств может быть получен на основании рекурсивного определения функции $\mathrm{st}^*(m, k, l)$, если вспомнить структуру выражений $\mathfrak{t}_\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{i} = 0, \ldots, \mathfrak{r})$ и учесть, что индукцией по a может быть выведено равенство

$$\mathrm{st}^*(2\cdot 3^a, k, l) = 2\cdot 3^a.$$

(Как мы помним, схема индукции в формализме (Z_μ) является производной.)

Таким образом, наша лемма доказана. Чтобы несколько облегчить ее применения, мы введем два сокращения. Одно из них будет заключаться в том, что выражение формализма (Z_μ), имеющее вид $\exists x \mathfrak{B}(x, \mathfrak{t})$, мы будем обозначать посредством $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{t})$. Далее, мы условимся, что если $\mathfrak{A}$ — выражение из (Z_μ), а $\mathfrak{t}$ — арифметическое функциональное выражение, сопоставленное выражению $\mathfrak{A}$ относительно всех входящих в него свободных индивидных переменных, то это функциональное выражение, фигурирующее в качестве аргумента формулы $\tilde{\mathfrak{B}}$, мы будем записывать в виде заключенного в фигурные скобки выражения $\mathfrak{A}$. В соответствии с этим, например, $\tilde{\mathfrak{B}}(\{a = b\})$ будет обозначать формулу

$$\exists x \mathfrak{B}(x, 70\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 13^{2\cdot 3^b})$$

[а не $\exists x \mathfrak{B}(x, 70\cdot 11^{14}\cdot 13^{22})$]. Заметим, что формулы, о выводимости которых идет речь при проверке интересующего нас условия на выводимость, могут быть заданы в виде

$$(*) \qquad \mathfrak{f}(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{i}(m) = 0\}).$$

Наша лемма с небольшой специализацией может быть сформулирована следующим образом:

По любому выводу в (Z_μ) формулы $\mathfrak{A}$ может быть получен некоторый вывод формулы $\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{A}\})$.

(Специализация этой формулировки по сравнению с первоначальной заключается в том, что фигурирующее в $\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{A}\})$ сопоставленное $\mathfrak{A}$ арифметическое функциональное выражение берется относительно всех входящих в $\mathfrak{A}$ свободных индивидных переменных.) В дальнейшем эта лемма всегда будет применяться в данной формулировке.

Применяя эти сокращенные обозначения с фигурными скобками, следует помнить, что выражения $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, вообще говоря, не являются составными частями формулы $\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\})$, так что *не для любых* термов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ из аксиомы равенства (J_2) может быть выведена формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\})).$$

В то время как оперируя с равенствами в сокращенно-скобочной записи, надо соблюдать особые меры предосторожности, действия над импликациями в фигурных скобках подчиняются прозрачным правилам. В этом плане мы хотели бы отметить следующее:

Если $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ — формулы из (Z_μ), то формула

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\}) \to (\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S}\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{T}\}))$$

выводима в (Z_μ).

Действительно, если формуле $\mathfrak{S}$ относительно входящих в нее свободных индивидных переменных сопоставлено арифметическое функциональное выражение $\mathfrak{s}$, а формуле $\mathfrak{T}$ — выражение $\mathfrak{t}$, то формуле $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ относительно входящих в нее свободных индивидных переменных сопоставляется арифметическое выражение $80\cdot 7^{\mathfrak{s}}\cdot 11^{\mathfrak{t}}$. Поэтому формула, выводимость которой надо установить, имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{B}}(80\cdot 7^{\mathfrak{s}}\cdot 11^{\mathfrak{t}}) \to (\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{s}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{t})).$$

Следовательно, она получается подстановкой из формулы

$$\tilde{\mathfrak{B}}(80\cdot 7^s\cdot 11^t) \to (\tilde{\mathfrak{B}}(s) \to \tilde{\mathfrak{B}}(t)).$$

Но для этой формулы вывод получается в силу определения формулы $\mathfrak{B}^*(m, n)$, которая, как мы знаем, переводима в $\mathfrak{B}(m, n)$.

Тем самым мы получаем некоторую выводимую схему формул

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\}) \to (\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S}\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{T}\})),$$

которую мы кратко будем называть первой $\tilde{\mathfrak{B}}$-схемой.

Из этой схемы с помощью нашей леммы тут же получается в качестве производной схемы следующая вторая $\tilde{\mathfrak{B}}$-схема:

$$\frac{\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S}\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{T}\})}.$$

В самом деле, согласно лемме, по выводу формулы $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ может быть получен вывод формулы $\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\})$, а отсюда с помощью первой $\tilde{\mathfrak{B}}$-схемы и схемы заключения мы получаем формулу

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{S}\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{T}\}).$$

Из второй $\tilde{\mathfrak{B}}$-схемы мы сначала выведем следующее утверждение:

Если $\mathfrak{f}(m)$ и $\mathfrak{f}_1(m)$ — термы и если равенство

$$\mathfrak{f}(m) = \mathfrak{f}_1(m),$$

а также формула

$$\mathfrak{f}_1(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}_1(m) = 0\})$$

выводимы в (Z_μ), то формула

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\})$$

тоже выводима в (Z_μ).

В самом деле, из равенства

$$\mathfrak{f}(m) = \mathfrak{f}_1(m)$$

с помощью аксиомы равенства (J_2) получается формула

$$\mathfrak{f}_1(m) = 0 \to \mathfrak{f}(m) = 0,$$

которая по второй $\tilde{\mathfrak{B}}$-схеме дает формулу

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}_1(m) = 0\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\}),$$

а эта формула вместе с формулой

$$\mathfrak{f}_1(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}_1(m) = 0\}),$$

выводимость которой мы предполагаем, по правилу силлогизма дает формулу

$$\mathfrak{f}_1(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\}).$$

Наконец, эта формула, взятая совместно с формулой

$$\mathfrak{f}(m) = \mathfrak{f}_1(m),$$

с помощью аксиомы равенства (J_2) дает нам искомую формулу

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\}).$$

В силу только что доказанного утверждения, в искомом доказательстве формулы (*) можно ограничится рассмотрением только таких рекурсивных термов $\mathfrak{f}(m)$, у которых все входящие в них функциональные знаки, кроме штрих-символа, вводятся с помощью соответствующих рекурсивных равенств; причем все знаки — и непосредственно встречающиеся в $\mathfrak{f}(m)$, и те, которые входят в рекурсивные определения непосредственно встречающихся, — являются одноместными или двуместными. Устроенные таким образом рекурсивные термы называются нормальными. Сами по себе функциональные знаки, фигурирующие в рекурсивных термах, могут иметь большое число аргументов, равно как и функциональные знаки, вводимые явными определениями в качестве сокращений для термов, образованных суперпозициями рекурсивных функций. Однако такие явные определения могут быть устранены; а кроме того, как было показано ранее в гл. VII т. I [1]), любая многоместная рекурсивная функция может быть составлена из одноместных и двуместных. Поэтому для любого рекурсивного терма t можно указать нормальный рекурсивный терм t_1 с теми же самыми переменными, для которого в рамках рекурсивной арифметики, а значит, и в формализме (Z_μ), выводится равенство

$$t = t_1.$$

Следовательно, для любого рекурсивного терма $\mathfrak{f}(m)$ с единственной переменной m, если он сам еще не является нормальным, можно указать такой содержащий единственную переменную m нормальный терм $\mathfrak{f}_1(m)$, что в (Z_μ) выводимо равенство

$$\mathfrak{f}(m) = \mathfrak{f}_1(m).$$

Если для этого терма $\mathfrak{f}_1(m)$ мы сможем вывести формулу

$$\mathfrak{f}_1(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}_1(m) = 0\}),$$

то, по ранее доказанному, можно будет вывести и формулу

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\}).$$

Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы для любого нормального рекурсивного терма $\mathfrak{f}(m)$ с единственной

[1]) См. т. I, с. 396 и далее.

переменной m установить выводимость формулы

$$\mathfrak{f}(m)=0\to\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(m)=0\}).$$

С этой целью мы покажем, что, вообще, для любого нормального рекурсивного терма t и для любой свободной индивидной переменной c может быть выведена формула

$$t=c\to\mathfrak{B}(\{t=c\}).$$

Отсюда, в частности, получится выводимость формулы

$$\mathfrak{f}(m)=c\to\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(m)=c\})$$

для любого нормального рекурсивного терма $\mathfrak{f}(m)$ с единственной переменной m. Если арифметическое функциональное выражение, сопоставленное терму $\mathfrak{f}(m)$ относительно переменной m, обозначить посредством $\mathfrak{h}(m)$, то эта формула будет иметь вид

$$\mathfrak{f}(m)=c\to\mathfrak{B}(70\cdot 11^{\mathfrak{h}(m)}\cdot 13^{2\cdot 3^c}).$$

Отсюда, в результате подстановки цифры 0 вместо переменной c, мы получим формулу

$$\mathfrak{f}(m)=0\to\mathfrak{B}(70\cdot 11^{\mathfrak{h}(m)}\cdot 13^{2}).$$

Но это и есть формула

$$\mathfrak{f}(m)=0\to\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(m)=0\}),$$

которую требуется доказать.

А теперь, чтобы убедиться, что для любого нормального рекурсивного терма t и для любой свободной индивидной переменной c выводима формула

$$t=c\to\mathfrak{B}(\{t=c\}),$$

мы сначала заметим, что эта формула имеет вид

$$t=c\to\mathfrak{B}(70\cdot 11^{t_1}\cdot 13^{2\cdot 3^c}),$$

где t_1 представляет собой арифметическое функциональное выражение, сопоставленное терму t относительно всех входящих в него переменных. Если переменная c не входит в t, то она не входит и в t_1 (как мы знаем, t_1 содержит те же самые переменные, что и t), и тогда из рассматриваемой формулы выводима формула

$$\forall y(t=y\to\mathfrak{B}(70\cdot 11^{t_1}\cdot 13^{2\cdot 3^y}).$$

Обратно: из этой формулы мы для любой свободной переменной c получаем формулу

$$t=c\to\mathfrak{B}(70\cdot 11^{t_1}\cdot 13^{2\cdot 3^c}).$$

Таким образом, выводимость формулы

$$t=c\to\mathfrak{B}(\{t=c\})$$

для любой свободной индивидной переменной c равносильна выводимости формулы

$$\forall y(t=y\to\mathfrak{B}(70\cdot 11^{t_1}\cdot 13^{2\cdot 3^y}),$$

где t_1 — арифметическое функциональное выражение, сопоставленное терму t относительно всех входящих в него переменных. Эту формулу, однозначно определенную термом t, мы будем обозначать посредством $\mathfrak{F}[t]$[1]). Теперь наша задача может быть сформулирована следующим образом: требуется показать, что для любого наперед заданного нормального рекурсивного терма t выводима формула $\mathfrak{F}[t]$.

С этой целью мы рассмотрим способ образования нормальных рекурсивных термов. Любой такой терм, как мы знаем, либо является символом 0 или свободной индивидной переменной, либо получается из какого-либо нормального рекурсивного терма в результате применения штрих-символа, либо представляет собой рекурсивно введенный одноместный или же двуместный функциональный знак, аргументами которого являются нормальные рекурсивные термы. С процессом порождения каждого такого терма, кроме фактического построения самого терма, связывается еще и определенная упорядоченная последовательность $\mathfrak{R}$ рекурсивных определений, в которой для каждого фигурирующего в t функционального знака, отличного от штрих-символа (а может быть, и для каких-нибудь еще функциональных знаков), содержатся относящиеся к нему рекурсивные равенства, причем эти рекурсивные равенства в зависимости от того, какая функция вводится — одноместная или двуместная, имеют либо вид

$$\mathfrak{f}(0)=\mathfrak{a},\qquad \mathfrak{f}(n')=\mathfrak{b}(n,\mathfrak{f}(n)),$$

либо вид

$$\mathfrak{f}(a,0)=\mathfrak{a}(a),\qquad \mathfrak{f}(a,n')=\mathfrak{b}(a,n,\mathfrak{f}(a,n)),$$

где в первом случае термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}(n,m)$, а во втором случае термы $\mathfrak{a}(a)$ и $\mathfrak{b}(a,n,m)$ суть нормальные рекурсивные термы, не содержащие других переменных, кроме указанных, и такие, что кроме штрих-символа в них фигурируют только такие функциональные знаки, что относящиеся к ним рекурсивные равенства в последовательности $\mathfrak{R}$ предшествуют рассматриваемой рекурсии.

---

[1]) В этом обозначении прямые скобки указывают на то, что зависимость формулы $\mathfrak{F}[t]$ от терма t, вообще говоря, заключается не только в том, что терм t входит в эту формулу.

После сказанного наша задача сводится к доказательству следующих четырех утверждений:

1. Формула $\mathfrak{F}[0]$, а также любая формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{c}]$ со свободной индивидной переменной $\mathfrak{c}$ выводимы.

2. Каков бы ни был терм $\mathfrak{t}$, по выводу формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{t}]$ может быть построен вывод формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{t}']$.

3. Если $\mathfrak{s}(\mathfrak{c})$ — терм, $\mathfrak{c}$ — фигурирующая в нем, но не входящая в $\mathfrak{s}(0)$ свободная индивидная переменная, а $\mathfrak{f}$ — терм, не содержащий переменной $\mathfrak{c}$, и если формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{s}(\mathfrak{c})]$ и $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}]$ выводимы, то выводима также и формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{s}(\mathfrak{f})]$.

4. Если $\mathfrak{a}$ — рекурсивный терм без переменных такой, что формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{a}]$ выводима, а $\mathfrak{b}(n, c)$ — такой рекурсивный терм, не содержащий отличных от n и c переменных, что выводима формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{b}(n, c)]$, и если функциональный знак $\mathfrak{f}(n)$ вводится рекурсивными равенствами

$$\mathfrak{f}(0) = \mathfrak{a} \quad \text{и} \quad \mathfrak{f}(n') = \mathfrak{b}(n, \mathfrak{f}(n)),$$

то формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(n)]$ выводима.

Если $\mathfrak{a}(a)$ — рекурсивный терм с единственной переменной a такой, что выводима формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{a}(a)]$, если $\mathfrak{b}(a, n, c)$ — рекурсивный терм без отличных от a, n и c переменных такой, что выводима формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{b}(a, n, c)]$, и если функциональный знак $\mathfrak{f}(a, n)$ вводится рекурсивными равенствами

$$\mathfrak{f}(a, 0) = \mathfrak{a}(a) \quad \text{и} \quad \mathfrak{f}(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \mathfrak{f}(a, n)),$$

то формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)]$ выводима.

Замечание. Предположение о том, что переменная $\mathfrak{c}$ в терм $\mathfrak{f}$ не входит, из утверждения 3 может быть исключено. Действительно, если выполнены остальные предположения утверждения 3, а $\mathfrak{f}$ содержит переменную $\mathfrak{c}$, то мы возьмем свободную индивидную переменную $\mathfrak{d}$, не входящую ни в $\mathfrak{s}(\mathfrak{c})$, ни в $\mathfrak{f}$. Согласно утверждению 1 формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{d}]$ выводима. Поэтому, согласно утверждению 3, выводима формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{s}(\mathfrak{d})]$, а отсюда, снова согласно утверждению 3, вытекает выводимость формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{s}(\mathfrak{f})]$.

Утверждения 1—4 мы получим следующим образом:

1. Формула $\mathfrak{F}[0]$ записывается в виде

$$\forall y\,(0 = y \to \mathfrak{B}(70 \cdot 11^{2} \cdot 13^{2 \cdot 3^{y}})).$$

С помощью аксиомы равенства (J_2) она выводится из формулы

$$\mathfrak{B}(70 \cdot 11^{2} \cdot 13^{2 \cdot 3^{0}}),$$

а значит, и из формулы

$$\mathfrak{B}(70 \cdot 11^{2} \cdot 13^{2}),$$

т. е. из

$$\mathfrak{B}(\{0 = 0\}).$$

Но, согласно нашей лемме, эта формула выводима, так как выводима формула $0 = 0$.

Если $\mathfrak{c}$ — свободная индивидная переменная, то $\mathfrak{F}[\mathfrak{c}]$ представляет собой формулу

$$\forall y\,(\mathfrak{c} = y \to \mathfrak{B}(70 \cdot 11^{2 \cdot 3^{\mathfrak{c}}} \cdot 13^{2 \cdot 3^{y}})),$$

которая с помощью аксиомы (J_2) выводится из формулы

$$\mathfrak{B}(70 \cdot 11^{2 \cdot 3^{\mathfrak{c}}} \cdot 13^{2 \cdot 3^{\mathfrak{c}}}),$$

т. е. из формулы

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\}),$$

которая, по нашей лемме, выводима вследствие выводимости формулы $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

2. Пусть $\mathfrak{t}$ — терм, и пусть формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{t}]$ выводима. Возьмем две различные свободные индивидные переменные $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$, не входящие в $\mathfrak{t}$.

Формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{t}]$ дедуктивно равна формуле

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t} = \mathfrak{c}\}).$$

Из выводимой формулы

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to \mathfrak{t}' = \mathfrak{c}'$$

по второй $\mathfrak{B}$-схеме мы получаем формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{t} = \mathfrak{c}\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}'\}).$$

Тем самым мы получаем формулу

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}'\}). \tag{1}$$

С другой стороны, из формулы

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to \mathfrak{t}' = \mathfrak{c}' \tag{2}$$

получается формула

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{t}' = \mathfrak{d} \to \mathfrak{d} = \mathfrak{c}').$$

Так как $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{c}$ — свободные индивидные переменные, то формула

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{c}'\})$$

имеет вид

$$\mathfrak{B}(70 \cdot 11^{2 \cdot 3^{\mathfrak{d}}} \cdot 13^{3 \cdot 2 \cdot 3^{\mathfrak{c}}}),$$

и поэтому формула

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{c}' \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{c}'\})$$

переводима в формулу

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{c}' \to \mathfrak{B}\left(70 \cdot 11^{2\cdot 3^{\mathfrak{d}}} \cdot 13^{2\cdot 3^{\mathfrak{c}'}}\right).$$

Эта формула с помощью аксиомы равенства (J_2) выводима из формулы

$$\mathfrak{B}\left(70 \cdot 11^{2\cdot 3^{\mathfrak{d}}} \cdot 13^{2\cdot 3^{\mathfrak{d}}}\right),$$

т. е. из формулы

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\}),$$

которая выводима в силу нашей леммы и выводимости формулы $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}$.

Поэтому выводима формула

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{c}' \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{c}'\}),$$

а значит, согласно формуле (2), выводима и формула

(3) $$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{t}' = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{c}'\})).$$

Кроме того, из выводимой формулы

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{c}' \to (\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}' \to \mathfrak{t}' = \mathfrak{d})$$

мы по второй $\mathfrak{B}$-схеме получаем формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{c}'\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}' \to \mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\}),$$

а первая $\mathfrak{B}$-схема дает нам формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}' \to \mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\}) \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}'\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\})),$$

которая вместе с предыдущей формулой дает формулу

(4) $$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{d} = \mathfrak{c}'\}) \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{c}'\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\})).$$

Полученные нами формулы (1), (3) и (4) с помощью средств исчисления высказываний дают формулу

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{t}' = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\})).$$

Затем с помощью средств исчисления предикатов (так как переменная $\mathfrak{c}$ не входит в $\mathfrak{t}$ и отлична от $\mathfrak{d}$) мы получаем формулу

$$\exists y\,(\mathfrak{t} = y) \to (\mathfrak{t}' = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\}))$$

и, далее, вследствие выводимости формулы $\exists y\,(\mathfrak{t} = y)$ — формулу

$$\mathfrak{t}' = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{t}' = \mathfrak{d}\}).$$

Но так как переменная $\mathfrak{d}$ в терм $\mathfrak{t}$ не входит, из этой формулы мы получаем формулу $\mathfrak{F}[\mathfrak{t}']$.

3. Пусть $\mathfrak{s}(\mathfrak{c})$ и $\mathfrak{f}$ — термы, и пусть $\mathfrak{c}$ — свободная индивидная переменная, не входящая в $\mathfrak{s}(\mathfrak{f})$. Пусть формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{s}(\mathfrak{c})]$ и $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}]$ выводимы.

Возьмем какую-либо свободную индивидную переменную $\mathfrak{d}$, не входящую ни в $\mathfrak{s}(\mathfrak{c})$, ни в $\mathfrak{f}$. Из формул $\mathfrak{F}(\mathfrak{s}(\mathfrak{c})]$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{f})$ мы сначала получим формулы

(5) $$\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d}\}),$$
$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f} = \mathfrak{c}\}).$$

Первая из них в сочетании с выводимой формулой

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d})$$

дает формулу

(6) $$\mathfrak{f} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d}\})).$$

Далее, из выводимой формулы

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d})$$

мы по второй $\mathfrak{B}$-схеме получаем формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f} = \mathfrak{c}\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\}),$$

из которой затем с помощью формулы

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\}) \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d}\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\})),$$

получающейся по первой $\mathfrak{B}$-схеме, получаем формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f} = \mathfrak{c}\}) \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d}\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\})),$$

которая вместе с (5) дает формулу

(7) $$\mathfrak{f} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{d}\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\})).$$

Формулы (6) и (7), взятые вместе, дают формулу

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c} \to (\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\})).$$

Так как переменная $\mathfrak{c}$ не входит в $\mathfrak{s}(\mathfrak{f})$ и отлична от $\mathfrak{d}$, то из последней формулы, используя выводимую формулу $\exists x\,(\mathfrak{f} = x)$, средствами исчисления предикатов получаем формулу

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d} \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{s}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{d}\}),$$

а эта формула дает нам формулу $\mathfrak{F}[\mathfrak{s}(\mathfrak{f})]$, так как переменная $\mathfrak{d}$ не входит в терм $\mathfrak{s}(\mathfrak{f})$.

4. Что касается схем рекурсии для одноместных и для двуместных функций, то рассуждения в этих двух случаях совершенно аналогичны. Поэтому достаточно рассмотреть схему рекурсии для введения двуместных функциональных знаков:

$$\mathfrak{f}(a, 0) = \mathfrak{a}(a),$$
$$\mathfrak{f}(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \mathfrak{f}(n)).$$

Здесь мы предполагаем, что термы $\mathfrak{a}(a)$ и $\mathfrak{b}(a, n, c)$ содержат только указанные переменные и что формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{a}(a)]$ и $\mathfrak{F}[\mathfrak{b}(a, n, c)]$ выводимы.

Формулы

$$\mathfrak{f}(a, 0) = \mathfrak{a}(a) \quad \text{и} \quad \mathfrak{f}(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \mathfrak{f}(a, n))$$

выводимы в (Z_μ) с помощью явного определения функции $\mathfrak{f}(a, n)$. Из этого явного определения получается и конкретное изображение этого функционального знака в нашей нумерации. Арифметическое функциональное выражение, сопоставленное терму $\mathfrak{f}(a, n)$ относительно переменных a и n, имеет вид

$$5 \cdot \mathfrak{p}^{2 \cdot 3^a} \cdot \mathfrak{q}^{2 \cdot 3^n},$$

где $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — некоторые конкретные простые числа, и потому формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)]$ имеет вид

$$\forall y (\mathfrak{f}(a, n) = y \to \mathfrak{B}(70 \cdot 11^{5 \cdot \mathfrak{p}^{2 \cdot 3^a} \cdot \mathfrak{q}^{2 \cdot 3^n}} \cdot 13^{2 \cdot 3^y})).$$

Если обозначить эту формулу посредством $\mathfrak{F}_1(n)$, то, как легко видеть, формула $\mathfrak{F}_1(0)$ будет переводима в формулу $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, 0)]$, а формула $\mathfrak{F}_1(n')$ — в формулу $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n')]$. Поэтому с помощью схемы индукции, которая, как известно, в (Z_μ) является производной, формулу $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)]$ можно получить из формул

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, 0)] \quad \text{и} \quad \mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)] \to \mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n')].$$

Обе эти формулы выводимы на основе наших предположений. Действительно, формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{f}(a, 0)]$ получается следующим образом.

Из выводимой формулы $\mathfrak{f}(a, 0) = \mathfrak{a}(a)$ с помощью аксиомы (J_2) мы получаем

$$\mathfrak{a}(a) = c \to \mathfrak{f}(a, 0) = c \tag{8}$$

и

$$\mathfrak{f}(a, 0) = c \to \mathfrak{a}(a) = c, \tag{9}$$

а из формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{a}(a)]$ получаем

$$\mathfrak{a}(a) = c \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{a}(a) = c\}). \tag{10}$$

Формулы (9) и (10), взятые вместе, дают

$$\mathfrak{f}(a, 0) = c \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{a}(a) = c\}). \tag{11}$$

С другой стороны, из формулы (8) по второй $\mathfrak{B}$-схеме можно получить формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{a}(c) = c\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, 0) = c\}),$$

а эта формула, взятая вместе с формулой (11), дает нам формулу

$$\mathfrak{f}(a, 0) = c \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, 0) = c\}),$$

из которой немедленно получается $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, 0)]$.

Формула $\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)] \to \mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n')]$ получается следующим образом: Средствами исчисления предикатов мы сначала получаем

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)] \to (\mathfrak{f}(a, n) = c \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, n) = c\})). \tag{12}$$

Из выводимого рекурсивного равенства $\mathfrak{f}(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \mathfrak{f}(a, n))$ с помощью аксиомы (J_2) получаем

$$\mathfrak{f}(a, n) = c \to (\mathfrak{f}(a, n') = d \to \mathfrak{b}(a, n, c) = d) \tag{13}$$

и

$$\mathfrak{f}(a, n) = c \to (\mathfrak{b}(a, n, c) = d \to \mathfrak{f}(a, n') = d). \tag{14}$$

Затем из формулы $\mathfrak{F}[\mathfrak{b}(a, n, c)]$ получаем формулу

$$\mathfrak{b}(a, n, c) = d \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{b}(a, n, c) = d\}),$$

которая вместе с формулой (13) дает

$$\mathfrak{f}(a, n) = c \to (\mathfrak{f}(a, n') = d \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{b}(a, n, c) = d\})). \tag{15}$$

С другой стороны, формула (14) по второй $\mathfrak{B}$-схеме дает формулу

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, n) = c\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{b}(a, n, c) = d \to \mathfrak{f}(a, n') = d\}),$$

откуда, с помощью получаемой по первой $\mathfrak{B}$-схеме формулы

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{b}(a, n, c) = d \to \mathfrak{f}(a, n') = d\}) \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{b}(a, n, c) = d\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, n') = d\})),$$

получается

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, n) = c\}) \to (\mathfrak{B}(\{\mathfrak{b}(a, n, c) = d\}) \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, n') = d\})). \tag{16}$$

Формулы (12), (15) и (16), взятые вместе, с помощью исчисления высказываний дают нам формулу

$$\mathfrak{f}(a, n) = c \to (\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)] \to (\mathfrak{f}(a, n') = d \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(a, n') = d\}))),$$

из которой мы средствами исчисления предикатов с использованием выводимой формулы $\exists x (\mathfrak{f}(a, n) = x)$ получаем

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n)] \to \mathfrak{F}[\mathfrak{f}(a, n')].$$

Тем самым мы завершили доказательство того, что формализм (Z_μ) удовлетворяет третьему условию на выводимость. Заметим, что это доказательство дает также некоторое финитное уточнение

утверждения о выводимости формулы

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \mathfrak{B}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\})$$

(для любого наперед заданного рекурсивного терма $\mathfrak{f}(m)$ с единственной переменной m), поскольку мы получаем метод, позволяющий по заданному терму $\mathfrak{f}(m)$ эффективно строить вывод рассматриваемой формулы. В самом деле, все использованные нами вспомогательные утверждения о тех или иных выводимостях, а также доказательства утверждений 1 — 4 были таковы, что в них либо содержался некоторый способ вывода для формул какого-либо конкретного вида, либо показывалось, как по заданному выводу какой-либо конкретной формулы можно получить вывод какой-либо другой конкретной формулы.

Аналогичное замечание может быть сделано и относительно проведенной нами для формализма (Z_μ) проверки выполнения первых двух условий на выводимость [1]).

Общий итог предпринятых выше рассмотрений состоит в том, что для формализма (Z_μ) оказываются выполненными все предположения второй теоремы Гёделя о неполноте. Таким образом, согласно этой теореме, формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x, n) \to \neg \exists x \mathfrak{B}(x, 3 \cdot n),$$

изображающая утверждение о непротиворечивости формализма (Z_μ), не может быть выведена в (Z_μ), ибо иначе формализм (Z_μ) был бы противоречив.

Аналогичным образом можно убедиться, что предположение $б_2$) и добавляемые к нему условия на выводимость выполняются также и для всех таких формализмов, которые, с одной стороны, очерчены достаточно четко, а с другой стороны, включают в себя способы умозаключений исчисления предикатов и обладают средствами, достаточными для изображения понятий и способов умозаключений арифметики, так что в них, в частности, изобразимы рекурсивные функции и соответствующие рекурсивные равенства являются либо аксиомами, либо выводимыми формулами, а кроме того, содержится (в качестве основного правила или производной схемы) схема индукции. Поэтому ко всем таким формализмам применима вторая теорема Гёделя о неполноте.

Как уже упоминалось ранее, условия, фигурирующие в нашей формулировке этой теоремы, могут быть заменены более общими.

В частности, теорема эта — на что указали Гёдель и Крайзел — может быть распространена на формализмы без связанных переменных — например, на рекурсивную арифметику. Для рекурсивной арифметики это вытекает из того, ранее уже отмеченного обстоятельства, что доказательства, устанавливающие выполнимость в (Z_μ) условий на выводимость 1 — 3, являются эффективными [1]).

[1]) См. с. 381 — 383.

Мы еще вкратце наметим путь, на котором для формализма (Z) можно установить, что формализованное высказывание, утверждающее его непротиворечивость, не может быть выведено в нем самом, если он непротиворечив.

д) Распространение второй теоремы Гёделя о неполноте на формализм (Z). — Формулировка определения истинности для этого формализма. Формализм (Z) получается из исчисления предикатов путем добавления к нему символов 0, ′, +, · и =, а также аксиом равенства (J_1) и (J_2), аксиом Пеано $a' \neq 0$ и $a' = b' \to a = b$, рекурсивных равенств для сложения и умножения и аксиомы индукции. Схема явного определения не включается.

Так как формализм (Z) содержит только такие символы и переменные, которые имеются и в (Z_μ), то из нумерации выражений, входящих в (Z_μ) [2]), немедленно получается нумерация и для выражений, входящих в (Z).

Опираясь на эту нумерацию, можно построить рекурсивную функцию $\mathfrak{s}(k, l)$, которая номеру всякого выражения $\mathfrak{A}$ из (Z) и всякой цифре l ставит в соответствие номер выражения, получающегося из $\mathfrak{A}$ в результате замены переменной a цифрой l. Можно также построить рекурсивную фомулу $\mathfrak{B}(m, n)$, изображающую отношение между номером списка формул и номером формулы, для которой этот список является ее выводом в формализме (Z). Хотя функция $\mathfrak{s}(k, l)$ в формализме (Z) и неизобразима, она в нем все же представима; именно, оказывается, что можно указать некоторую формулу $\mathfrak{S}(a, b, c)$ формализма (Z), не содержащую отличных от a, b и c свободных переменных, переводимую в рамках (Z_μ) в равенство $\mathfrak{s}(a, b) = c$. Точно так же по формуле $\mathfrak{B}(m, n)$ можно построить формулу $\mathfrak{B}_1(m, n)$ формализма (Z), не содержащую отличных от m и n свободных переменных, такую, что в рамках (Z_μ) она переводима в формулу $\mathfrak{B}(m, n)$.

Исходя из этого, мы теперь покажем, как путем некоторой модификации вышеприведенного доказательства, относящегося к формализму (Z_μ), вторая теорема Гёделя о неполноте может быть распространена на формализм (Z).

При этом мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что любая формула, выводимая в формализме (Z_μ), выводима и в том формализме, который получается из (Z) путем присоединения к нему ι-правила и общей схемы явного определения [3]). По теореме об устранимости ι-правила отсюда следует, что каж-

[1]) Для первого и второго условий это даже может быть усмотрено непосредственно из выводов для формул, приведенных на с. 382 в строке 21 и на с. 383 в строке 17.

[2]) См. с. 367 и далее.

[3]) Относительно соотношения между формализмами (Z_μ) и (Z) см. с. 362—366.

дая формула формализма (Z), выводимая в (Z_μ), выводима также и в (Z).

Сказанное дает нам возможность по выводам в (Z_μ) получать соответствующие выводы в (Z), и поэтому нам нужно будет лишь слегка модифицировать рассуждения, потребовавшиеся для доказательства второй теоремы Гёделя и ее применения к формализму (Z_μ).

Первая модификация будет заключаться в том, что вместо формулы $\mathfrak{B}(m, \mathfrak{s}(a, a))$ мы будем рассматривать формулу

$$\forall x(\mathfrak{S}(a, a, x) \to \neg \mathfrak{B}_1(m, x)).$$

Пусть $\mathfrak{p}$ — номер этой формулы, а $\mathfrak{q}$ — значение терма $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$, т. е. номер формулы

$$\forall x(\mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, x) \to \neg \mathfrak{B}_1(m, x)),$$

которая с помощью выводимых в (Z) формул

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{S}(a, b, c) \& \mathfrak{S}(a, b, d) \to c = d$$

переводима в формулу

$$\neg \mathfrak{B}_1(m, \mathfrak{q}).$$

Пусть $\mathfrak{r}$ — номер формулы $\mathfrak{B}_1(a, \mathfrak{q})$, а $\mathfrak{r}_1$ — номер ее отрицания. В качестве $\mathfrak{e}(n)$ можно снова взять функцию $3 \cdot n$. Выражение $3 \cdot n$ является термом и в (Z). Поэтому утверждение о непротиворечивости формализма (Z) может быть изображено формулой

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \neg \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot n),$$

которую мы и на этот раз возьмем в качестве формулы $\mathfrak{C}$.

Для искомого доказательства невыводимости в формализме (Z) — в предположении непротиворечивости этого формализма — формулы $\mathfrak{C}$ достаточно показать, что из $\mathfrak{C}$ средствами формализма (Z) выводима формула $\neg \mathfrak{B}_1(m, \mathfrak{q})$. Действительно, если это будет установлено, то из предположения о выводимости $\mathfrak{C}$ в формализме (Z) будет следовать выводимость в (Z) формулы с номером $\mathfrak{q}$, и значит, истинность $\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, \mathfrak{q})$ для некоторой конкретной цифры $\mathfrak{f}$, а тем самым и выводимость в (Z) формулы $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{f}, \mathfrak{q})$, которая вместе с формулой $\neg \mathfrak{B}_1(m, \mathfrak{q})$ дает противоречие.

А теперь, чтобы убедиться в выводимости в формализме (Z) формулы $\neg \mathfrak{B}_1(m, \mathfrak{q})$ из формулы $\mathfrak{C}$, — что по дедукционной теореме равносильно выводимости формулы

$$\forall u(\exists x \mathfrak{B}_1(x, u) \to \neg \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot u)) \to \neg \mathfrak{B}_1(m, \mathfrak{q}),$$

— согласно сделанному выше замечанию достаточно установить выводимость этой формулы в формализме (Z_μ), а это в свою очередь равносильно выводимости в рамках формализма (Z_μ)

формулы $\neg \mathfrak{B}_1(m, \mathfrak{q})$ из формулы

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \neg \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot n).$$

В этой выводимости можно убедиться, рассуждая аналогично тому, как при рассмотрении формализма (Z_μ) для построенной применительно к этому формализму формулы $\mathfrak{B}(m, n)$ доказывалась выводимость $\neg \mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ из формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, n) \to \neg \exists x \mathfrak{B}(x, 3 \cdot n).$$

При этом на месте тех трех условий на выводимость, выполнимость которых мы установили для формализма (Z_μ), теперь появляются следующие три условия:

1. По заданному выводу формулы с номером $\mathfrak{l}$ средствами формализма (Z), к которому добавлена формула с номером $\mathfrak{f}$ в качестве исходной, можно построить вывод в (Z_μ) формулы

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, \mathfrak{f}) \to \exists x \mathfrak{B}_1(x, \mathfrak{l}).$$

2. Формула

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot k) \to \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot \mathfrak{s}(k, l))$$

выводима в (Z_μ).

3. Если $\mathfrak{f}(m)$ — рекурсивный терм с единственной переменной m, а $\mathfrak{r}$ — номер равенства $\mathfrak{f}(a) = 0$, то формула

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \exists x \mathfrak{B}_1(x, \mathfrak{s}(\mathfrak{r}, m))$$

выводима в (Z_μ).

(Заметим, что во всех этих трех предположениях речь идет о построении некоторого вывода в (Z_μ).)

Проверка условий 1 и 2 может быть произведена в точности так же, как проверка выполнения первых двух условий в случае формализма (Z_μ). Утверждение 3 можно свести (сначала введя рекурсивную функцию $\mathrm{st}^*(m, k, l)$, а затем устранив ее[1])) к следующему предложению:

Если $\mathfrak{f}(m)$ — какой-либо рекурсивный терм с единственной переменной m, $\mathfrak{G}(m)$ — формула из (Z) с единственной свободной переменной m, переводимая средствами формализма (Z_μ) в равенство $\mathfrak{f}(m) = 0$, а $\mathfrak{g}(m)$ — арифметическое функциональное выражение, сопоставленное этой формуле $\mathfrak{G}(m)$ относительно переменной m, то формула

$$\mathfrak{G}(m) \to \exists x \mathfrak{B}_1(x, \mathfrak{g}(m)),$$

а потому и формула

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \exists x \mathfrak{B}_1(x, \mathfrak{g}(m)),$$

выводима в (Z_μ).

[1]) См. рассуждение на с. 384—385.

Доказательство этого предложения совершенно аналогично проведенному нами для формализма (Z_μ) доказательству выводимости формулы

$$\mathfrak{f}(m) = 0 \to \tilde{\mathfrak{B}}(\{\mathfrak{f}(m) = 0\})$$

для случая рекурсивного терма $\mathfrak{f}(m)$ с единственной переменной m. Используя соответствующие сокращенные обозначения [1]), можно доказать следующий аналог нашей леммы [1]):

Если формула $\mathfrak{A}$ выводима в (Z), то формула $\mathfrak{B}_1(\{\mathfrak{A}\})$ выводима в (Z_μ).

Равным образом, применительно к формуле $\mathfrak{B}_1(m, n)$ действуют соответствующие $\tilde{\mathfrak{B}}_1$-с х е м ы, аналогичные двум рассмотренным ранее $\tilde{\mathfrak{B}}$-сжемам [2]).

А вот два последних утверждения из утверждений [3]) 1 — 4 должны быть модифицированы в соответствии с содержанием доказываемого предложения. Нам достаточно привести эту модификацию для утверждения 4 и притом для случая двуместной рекурсивной функции.

Мы должны здесь воспользоваться представимостью в (Z) рекурсивных функций. Любой паре рекурсивных равенств

$$\mathfrak{f}(a, 0) = \mathfrak{a}(a), \quad \mathfrak{f}(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \mathfrak{f}(a, n))$$

в (Z) соответствует пара выводимых формул

$$\mathfrak{P}(a, 0, c) \sim \mathfrak{K}(a, c),$$
$$\mathfrak{P}(a, n, b) \to (\mathfrak{P}(a, n', c) \sim \mathfrak{L}(a, n, b, c)),$$

где a, n, и c суть все свободные переменные в формуле $\mathfrak{P}(a, n, c)$, a и c суть все свободные переменные в $\mathfrak{K}(a, c)$, а a, n, b и c суть все свободные переменные в $\mathfrak{L}(a, n, b, c)$, причем в (Z_μ) выводимы эквивалентности

$$\mathfrak{K}(a, c) \sim \mathfrak{a}(a) = c, \ \mathfrak{L}(a, n, c, d) \sim \mathfrak{b}(a, n, c) = d,$$
$$\mathfrak{P}(a, n, c) \sim \mathfrak{f}(a, n) = c.$$

Кроме того, опираясь на выводимую формулу $\exists z \mathfrak{P}(a, n, z)$, из формулы

$$\mathfrak{P}(a, n, b) \to (\mathfrak{P}(a, n', c) \sim \mathfrak{L}(a, n, b, c))$$

можно получить эквивалентность

$$\mathfrak{P}(a, n', c) \sim \exists z (\mathfrak{P}(a, n, z) \,\&\, \mathfrak{L}(a, n, z, c)).$$

[1]) См. с. 388.
[2]) См. с. 390.
[3]) См. с. 394.

Поэтому утверждение, которое должно быть доказано вместо утверждения 4, имеет вид:

Пусть в (Z_μ) выводимы формулы

$$\mathfrak{K}(a, c) \to \tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\mathfrak{K}(a, c)\})$$

и

$$\mathfrak{L}(a, n, c, d) \to \tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\mathfrak{L}(a, n, c, d)\}).$$

Пусть, кроме того, в (Z) выводимы эквивалентности

$$\mathfrak{P}(a, 0, c) \sim \mathfrak{K}(a, c)$$

и

$$\mathfrak{P}(a, n', c) \sim \exists z (\mathfrak{P}(a, n, z) \,\&\, \mathfrak{L}(n, a, z, c)).$$

Тогда в (Z_μ) выводима формула

$$\mathfrak{P}(a, n, c) \to \tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\mathfrak{P}(a, n, c)\}).$$

Это утверждение будет доказано, если мы покажем, что полной индукцией по n может быть выведена формула $\forall x \mathfrak{Q}(n, x)$, где $\mathfrak{Q}(n, c)$ обозначает формулу

$$\mathfrak{P}(a, n, c) \to \tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\mathfrak{P}(a, n, c)\}).$$

Возможность проведения этой индукции по n, т. е. выводимость обеих формул

$$\forall x \mathfrak{Q}(0, x) \quad \text{и} \quad \forall x \mathfrak{Q}(n, x) \to \forall x \mathfrak{Q}(n', x),$$

устанавливается на основе нашей леммы, а также $\tilde{\mathfrak{B}}_1$-схем, с помощью которых, в частности, получается, что для произвольных формул $\mathfrak{A}(c)$ и $\mathfrak{H}(c)$ формализма (Z), содержащих переменную c, в (Z_μ) выводима формула

$$\tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\mathfrak{A}(c)\}) \,\&\, \tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\mathfrak{H}(c)\}) \to \tilde{\mathfrak{B}}_1(\{\exists z (\mathfrak{A}(z) \,\&\, \mathfrak{H}(z))\}).$$

Таким образом, мы убеждаемся, что и для формализма (Z) невозможно осуществить — при условии его непротиворечивости — формализованное в самом (Z) доказательство его непротиворечивости. Тем самым заодно мы получаем, что при условии непротиворечивости (Z) непротиворечивость эта не может быть доказана *даже в формализме* (Z_μ). В самом деле, по выводу формулы

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \neg \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot n)$$

в формализме (Z_μ) мы смогли бы получить вывод этой формулы и в формализме (Z).

Этот результат ставит теперь перед нами вопрос о том, каким должно быть расширение формализма (Z) для того, чтобы в нем было возможно формализованное доказательство непротиворечивости (Z); в частности, требуется ли для этого введение какого-

либо нового типа связанных переменных, — например, связанных формульных переменных?

Прежде чем заняться этим вопросом, мы сначала найдем какое-нибудь неформальное доказательство непротиворечивости (Z). При этом мы не будем связывать себя требованиями финитной точки зрения, а потому в рассмотрение сможет войти и такое доказательство, которое опирается на обычное истолкование формализма (Z), соответствующее содержательному применению принципа «tertium non datur» к целым числам. Наиболее простой, напрашивающийся способ доказательства заключается в том, чтобы сформулировать для формул формализма (Z) какое-либо определение понятия истинности, на основе которого можно было бы доказать, что всякая выводимая формула является истинной и что отрицание всякой истинной формулы истинным не является.

Следует ожидать, что при этом, ввиду теоремы Тарского о формализации понятия истинности [1]), наше определение понятия истинности будет выходить за пределы формализма (Z). В самом деле, к формализму (Z) и к нашей нумерации этого формализма, извлеченной нами из нумерации для (Z_μ), полностью применимо прежнее рассуждение, с помощью которого мы в свое время усилили антиномию лжеца [2]). Поэтому получается, что в формализме (Z), если он непротиворечив, не может существовать формулы $\mathfrak{M}(a)$ с единственной свободной переменной a, обладающей тем свойством, что для любой цифры $\mathfrak{n}$, являющейся номером какой-либо формулы $\mathfrak{A}$ без свободных переменных, формула

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}$$

выводима в (Z).

Далее, получается, что в формализме (Z_μ) — при условии его непротиворечивости — тоже не может быть такой формулы $\mathfrak{M}(a)$, для которой упомянутая эквивалентность выполнялась бы всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ — какая-либо формула из (Z) без свободных переменных, а $\mathfrak{n}$ — номер этой формулы. Действительно, для всякой такой формулы $\mathfrak{M}(a)$ можно было бы, исключив из нее μ-символ, построить такую формулу $\mathfrak{M}_1(a)$, чтобы в (Z_μ) была выводима эквивалентность

$$\mathfrak{M}_1(a) \sim \mathfrak{M}(a).$$

Тогда для любой цифры $\mathfrak{n}$, являющейся номером какой-либо

[1]) См. с. 328.

[2]) Формализм (Z) и наша нумерация этого формализма с самого начала удовлетворяют условию б). Предположения а) и в), правда, выполняются не полностью, так как рекурсивные функции, вообще говоря, в (Z) не изобразимы, а лишь представимы. Но, как мы помним, этот более общий случай был нами специально предусмотрен (см. с. 326—327).

формулы $\mathfrak{A}$ из (Z) без свободных переменных, в (Z_μ) была бы выводима эквивалентность

$$\mathfrak{M}_1(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}.$$

Но так как эта эквивалентность является формулой формализма (Z), то она должна была бы выводиться и в (Z) Тогда формула $\mathfrak{M}_1(a)$ обладала бы свойством, относительно которого мы только что установили, что наличие в (Z) формулы с этим свойством не совместимо с непротиворечивостью (Z), а значит, и с непротиворечивостью (Z_μ).

Так мы получаем метод, позволяющий про формализованные определения истинности для формул формализма (Z) доказывать, что они выводят за пределы формализма (Z), а также за пределы формализма (Z_μ), если формализм (Z_μ), а следовательно, и формализм (Z), непротиворечив. Действительно, это с полной гарантией имеет место всякий раз, когда добавление этого определения к формализму (Z) дает формулу $\mathfrak{M}(a)$, обладающую тем свойством, что для любой формулы $\mathfrak{A}$ формализма (Z), не содержащей свободных переменных, и для ее номера $\mathfrak{n}$ выводима формула $\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}$.

А теперь, в духе этого рассуждения, мы перейдем к построению некоторого *определения истинности для формализма* (Z). Для этого мы будем пользоваться рекурсивными изображениями различных понятий, относящихся к формализму (Z) и к построенной нами нумерации этого формализма.

Свойство числа n быть *номером постоянного* *) *терма* изображается с помощью некоторой рекурсивной формулы $\mathfrak{T}_0(n)$. Соответствующее определение немедленно получается из того, что любой постоянный терм из (Z) либо является цифрой 0, либо имеет вид $\mathfrak{a}'$, где $\mathfrak{a}$ — некоторый постоянный терм, либо имеет вид $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ или $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — какие-либо постоянные термы.

Значение постоянного терма есть функция номера этого терма. Эта функция изображается с помощью некоторой рекурсивной функции $\mathrm{vl}(n)$ [1]), определяемой следующим разбором случаев:

«Если $n=2$, то $\mathrm{vl}(n)=0$;
если $n=3\cdot m$ и $m\neq 0$, то $\mathrm{vl}(n)=(\mathrm{vl}(m))'$;
если $n=5\cdot 11^a\cdot 13^b$, то $\mathrm{vl}(n)=\mathrm{vl}(a)+\mathrm{vl}(b)$;
если $n=5\cdot 11^a\cdot 17^b$, то $\mathrm{vl}(n)=\mathrm{vl}(a)\cdot\mathrm{vl}(b)$;
во всех остальных случаях $\mathrm{vl}(n)=n$.»

Рекурсивное изображение понятия номера формулы для формализма (Z) может быть дано совершенно аналогично тому,

*) Авторы употребляют термин «variablenlos». — *Прим. перев.*

[1]) То, что возможность этого изображения, несмотря на наш прежний результат относительно изображения понятия «значение выражения, определяющего число» (см. с. 328), согласуется с непротиворечивостью (Z), основывается на том, что рекурсивные функции, вообще говоря, неизобразимы в (Z).

как оно ранее давалось для исчисления предикатов с добавлением цифр и функциональных знаков[1]). Мы обозначим его через $\mathfrak{S}(n)$.

Без труда могут быть получены рекурсивные изображения и для следующих предикатов:

«число n является номером некоторой формулы без свободных переменных» — посредством некоторой формулы $\mathfrak{S}_0(n)$;

«число n является номером некоторой формулы без переменных» — посредством некоторой формулы $\mathfrak{S}_1(n)$;

«число n является номером некоторой квазиформулы» — посредством некоторой формулы $\mathfrak{P}(n)$;

«число n является номером некоторой бескванторной квазиформулы» — посредством некоторой формулы $\mathfrak{P}_0(n)$.

Затем мы можем рекурсивно определить понятие номера предваренной квазиформулы. Действительно, сначала можно ввести рекурсивный предикат $\mathfrak{P}_1(n, k)$, изображающий высказывание «число n является номером некоторой предваренной квазиформулы с k кванторами». Это может быть сделано с помощью рекурсивного определения, которое в неформальном виде выглядит следующим образом:

«$\mathfrak{P}_1(n, 0)$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $\mathfrak{P}_0(n)$;

$\mathfrak{P}_1(n, k')$ имеет место тогда и только тогда, когда $n = q \cdot 50 \cdot p^a$, где $q \mid 2$, p — простое число, большее или равное 7, а кроме того, имеют место $\mathfrak{P}(n)$ и $\mathfrak{P}_1(a, k)$».

Теперь высказывание «число n является номером некоторой предваренной квазиформулы» изобразится формулой

$$\exists x\,(x < n \,\&\, \mathfrak{P}_1(n, x)),$$

и эта формула может быть переведена в некоторую рекурсивную формулу $\mathfrak{P}_1(n)$. Формула

$$\mathfrak{P}_1(n) \,\&\, \mathfrak{S}(n)$$

будет изображать высказывание «число n является номером некоторой предваренной формулы».

Теперь мы можем определить такую рекурсивную функцию $\mathrm{pr}(n)$, которая номеру каждой формулы ставит в соответствие номер некоторой предваренной формулы, переводимой в эту исходную формулу. Но предварительно мы определим рекурсивный предикат $\mathrm{Sp}(n)$, изображающий высказывание «число n является номером некоторой квазиформулы такой, что для всякой входящей в нее связанной переменной либо все вхождения этой переменной находятся в области действия единственного в данной квазиформуле одноименного с этой переменной квантора, либо таких кванторов в данной квазиформуле нет вообще».

[1]) См. с. 280 и далее.

Кратко говоря, смысл этого высказывания заключается в том, что n является номером такой квазиформулы, в которой связанные переменные путем соответствующих переименований обособлены друг от друга. Такого рода квазиформулу мы будем называть нормированной квазиформулой.

Например, квазиформулы

$$\forall\, \mathfrak{A}(x) \,\&\, \forall x \mathfrak{B}(x) \quad \text{и} \quad \forall x\,(\mathfrak{A}(x, z) \to \forall y \forall z \mathfrak{B}(x, y, z))$$

не являются нормированными, а квазиформула

$$\forall x\,(A(x, y) \to \exists z B(x, z)),$$

напротив, является нормированной.

Далее, может быть введена рекурсивная функция $\mathrm{sp}(n)$, которая номеру любой формулы ставит в соответствие номер формулы, получающейся из нее в результате замены переменных при кванторах (в порядке появления этих кванторов) переменными с номерами $\wp_3, \wp_4, \ldots$, причем всякая такая замена распространяется на всю область действия соответствующего квантора. Формула, получающаяся в результате применения этой операции, а также каждая являющаяся ее составной частью квазиформула представляют собой нормированные квазиформулы.

Определение искомой функции $\mathrm{pr}(n)$ дается с помощью двух вспомогательных функций $\mathrm{pr}_1(n)$ и $\mathrm{pr}_2(n)$.

Функция $\mathrm{pr}_1(n)$ определяется следующим образом:

«Если $n = 3 \cdot m$, $m = q \cdot 50 \cdot p^a$, $q \mid 2$, p — простое число, большее или равное 7, и $\mathfrak{P}_1(m)$, то

$$\mathrm{pr}_1(n) = \pi(2, q) \cdot 50 \cdot p^{\mathrm{pr}_1(3 \cdot a)};$$

если $\mathrm{Sp}(n)$, $n = q \cdot 20 \cdot 7^a \cdot 11^b$, $q \mid 2$, $\mathfrak{P}_1(a)$, $\mathfrak{P}_1(b)$, $a = q_1 \cdot 50 \cdot p^c$, $q_1 \mid 2$ и p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{pr}_1(n) = q_1 \cdot 50 \cdot p^{\mathrm{pr}_1(q \cdot 20 \cdot 7^c \cdot 11^b)};$$

если $\mathrm{Sp}(n)$, $n = q \cdot 20 \cdot 7^a \cdot 11^b$, $q \mid 2$, $\mathfrak{P}_0(a)$, $\mathfrak{P}_1(b)$, $b = q_1 \cdot 50 \cdot p^c$, $q_1 \mid 2$ и p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{pr}_1(n) = q_1 \cdot 50 \cdot p^{\mathrm{pr}_1(q \cdot 20 \cdot 7^a \cdot 11^c)};$$

во всех остальных случаях $\mathrm{pr}_1(n) = n$».

Определение функции $\mathrm{pr}_2(n)$ выглядит следующим образом:

«Если $\mathrm{Sp}(n)$, $n = 3 \cdot m$ и $m \neq 0$, то

$$\mathrm{pr}_2(n) = \mathrm{pr}_1(3 \cdot \mathrm{pr}_2(m));$$

если $\mathrm{Sp}(n)$, $n = q \cdot 50 \cdot p^a$, $q \mid 2$ и p — простое число, большее или равное 7, то

$$\mathrm{pr}_2(n) = q \cdot 50 \cdot p^{\mathrm{pr}_2(a)};$$

если $\mathrm{Sp}(n)$, $n = q \cdot 20 \cdot 7^a \cdot 11^b$ и $q \mid 2$, то

$$\mathrm{pr}_2(n) = \mathrm{pr}_1(q \cdot 20 \cdot 7^{\mathrm{pr}_2(a)} \cdot 11^{\mathrm{pr}_2(b)});$$

если $\mathrm{Sp}(n)$ и $n = 80 \cdot 7^a \cdot 11^b$, то

$$\mathrm{pr}_2(n) = \mathrm{pr}_1(40 \cdot 7^{\mathrm{pr}_2(3 \cdot a)} \cdot 11^{\mathrm{pr}_2(b)});$$

если $\mathrm{Sp}(n)$ и $n = 160 \cdot 7^a \cdot 11^b$, то

$$\mathrm{pr}_2(n) = \mathrm{pr}_1(20 \cdot 7^{\mathrm{pr}_1(40 \cdot 7^{\mathrm{pr}_2(3 \cdot a)} \cdot 11^{\mathrm{pr}_2(b)})} \cdot 11^{\mathrm{pr}_1(40 \cdot 7^{\mathrm{pr}_2(a)} \cdot 11^{\mathrm{pr}_2(3 \cdot b)})});$$

во всех остальных случаях $\mathrm{pr}_2(n) = n$».

Теперь функция $\mathrm{pr}(n)$ может быть определена равенством

$$\mathrm{pr}(n) = \mathrm{pr}_2(\mathrm{sp}(n)).$$

Далее, мы введем еще рекурсивное отношение $\mathrm{St}(m, n)$, которое будет изображать высказывание «либо $m = n$, либо выражение с номером n получается из выражения с номером m в результате подстановки вместо одной или вместо нескольких переменных (индивидных или формульных)». Введем также функцию $\mathrm{st}(m, k, l)$, которая номеру $\mathfrak{m}$ какого-либо выражения $\mathfrak{A}$, номеру $\mathfrak{k}$ какой-либо индивидной переменной $\mathfrak{c}$ и номеру $\mathfrak{l}$ какого-либо выражения $\mathfrak{t}$ будет ставить в соответствие номер выражения, получающегося из $\mathfrak{A}$ в результате повсеместной замены переменной $\mathfrak{c}$ выражением $\mathfrak{t}$.

Теперь искомое определение истинности может быть построено следующим образом:

Сначала мы определяем какую-либо рекурсивную формулу $\mathfrak{M}_0(n)$, изображающую высказывание «число n является номером некоторой истинной формулы без переменных»; затем мы даем формализованное определение для предиката $\mathsf{M}(n, k)$, изображающего высказывание «число n является номером некоторой истинной предваренной формулы без свободных переменных с k-кванторной приставкой». Затем, используя символ $\mathsf{M}(n, k)$, мы с помощью эквивалентности

$$\mathfrak{M}_1(n) \sim \exists z\,(z \leqslant n \,\&\, \mathsf{M}(n, z))$$

строим изображение $\mathfrak{M}_1(n)$ высказывания «число n является номером некоторой истинной предваренной формулы без свободных переменных». Затем с помощью эквивалентности

$$\mathfrak{M}(n) \sim \mathfrak{M}_1(\mathrm{pr}(n))$$

мы получаем изображение $\mathfrak{M}(n)$ высказывания «число n является номером некоторой истинной формулы без свободных переменных» и, наконец, получаем общее определение истинности с помощью формулы

$$\mathfrak{S}(n) \,\&\, \forall x\,(\mathrm{St}(n, x) \,\&\, \mathfrak{S}_0(x) \to \mathfrak{M}(x)),$$

которую мы будем обозначать посредством $\mathfrak{M}^*(n)$.

Рекурсивное определение формулы $\mathfrak{M}_0(n)$ получается из следующей эквивалентности:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_0(n) \sim n = 70 \cdot 11^{\mathrm{v}(n,\,4)} \cdot 13^{\mathrm{v}(n,\,5)} \,\&\, \mathfrak{T}_0(\mathrm{v}(n,\,4)) \\ \&\, \mathfrak{T}_0(\mathrm{v}(n,\,5)) \,\&\, (\mathrm{vl}(\mathrm{v}(n,\,4)) = \mathrm{vl}(\mathrm{v}(n,\,5))) \\ \vee\, \exists x\,(x < n \,\&\, n = 3 \cdot x \,\&\, \mathfrak{S}_1(x) \,\&\, \neg\, \mathfrak{M}_0(x)) \\ \vee\, [\mathfrak{S}_1(n) \,\&\, \exists x \exists y\,\{x < n \,\&\, y < n \,\& \\ ((x = 20 \cdot 7^x \cdot 11^y \,\&\, \mathfrak{M}_0(x) \,\&\, \mathfrak{M}_0(y)) \\ \vee\, (x = 40 \cdot 7^x \cdot 11^y \,\&\, (\mathfrak{M}_0(x) \vee \mathfrak{M}_0(y))) \\ \vee\, (x = 80 \cdot 7^x \cdot 11^y \,\&\, (\mathfrak{M}_0(x) \to \mathfrak{M}_0(y))) \\ \vee\, (x = 160 \cdot 7^x \cdot 11^y \,\&\, (\mathfrak{M}_0(x) \sim \mathfrak{M}_0(y))))\}].\end{aligned}$$

Определение предиката $\mathsf{M}(n, k)$ мы сначала поясним нефор-мально. Истинная предваренная формула без кванторной приставки представляет собой истинную формулу без переменных. Истинная предваренная формула с $\mathfrak{k}'$-кванторной приставкой является либо формулой вида $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и тогда для любой цифры $\mathfrak{z}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ является истинной предваренной формулой с $\mathfrak{k}$-кванторной приставкой, либо формулой вида $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и тогда по крайней мере для одной цифры $\mathfrak{z}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ является истинной предваренной формулой с $\mathfrak{k}$-кванторной приставкой.

Это определение в арифметической формализации изображается следующим образом:

$$(\mathfrak{D})\begin{cases} \mathsf{M}(n,\,0) \sim \mathfrak{M}_0(n), \\ \mathsf{M}(n,\,k') \sim [n = 50 \cdot \wp_{\lambda(n)}^{\mathrm{v}(n,\,\lambda(n))} \,\&\, \lambda(n) \geqslant 3 \,\& \\ \qquad\qquad \forall x \mathsf{M}(\mathrm{st}(\mathrm{v}(n,\,\lambda(n)),\, \wp_{\lambda(n)},\, 2 \cdot 3^x),\, k)] \\ \qquad \vee\, [n = 100 \cdot \wp_{\lambda(n)}^{\mathrm{v}(n,\,\lambda(n))} \,\&\, \lambda(n) \geqslant 3 \,\& \\ \qquad\qquad \exists x \mathsf{M}(\mathrm{st}(\mathrm{v}(n,\,\lambda(n)),\, \wp_{\lambda(n)},\, 2 \cdot 3^x),\, k)]. \end{cases}$$

С помощью формулы $\mathsf{M}(n, k)$ мы, как было замечено ранее, можем получить следующие явные определения для формул $\mathfrak{M}(n)$ и $\mathfrak{M}^*(n)$:

$$\mathfrak{M}(n) \sim \exists z\,(z \leqslant \mathrm{pr}(n) \,\&\, \mathsf{M}(\mathrm{pr}(n),\, z)),$$

$$\mathfrak{M}^*(n) \sim \mathfrak{S}(n) \,\&\, \forall x\,(\mathrm{St}(n,\, x) \,\&\, \mathfrak{S}_0(x) \to \mathfrak{M}(x)).$$

Итак, мы получили искомое определение истинности для формализма (Z). Рассматривая его с учетом планируемого применения теоремы Тарского, мы должны напомнить, что в формализме (Z_μ) все рекурсивные функции допускают явные определения, причем таким образом, что на основе этих определений рекурсивные равенства являются выводимыми формулами. Значит, в частности, в (Z_μ) рекурсивное определение функции $\mathrm{pr}(n)$ может быть заме-

нено явным. Равным образом, и рекурсивное определение предиката $\mathfrak{M}_0(n)$ тоже может быть заменено прямым построением соответствующей формулы из (Z_μ) и даже из (Z).

Отметим далее, что для любой конкретной цифры $\mathfrak{k}$ из формул $(\mathfrak{D})$ выводима эквивалентность

$$\mathsf{M}(n, \mathfrak{k}) \sim \mathfrak{H}(n),$$

где $\mathfrak{H}(n)$ — некоторая (зависящая от $\mathfrak{k}$) формула из (Z_μ). Поэтому при любой заданной цифре $\mathfrak{n}$ формула $\mathfrak{M}(\mathfrak{n})$, ввиду эквивалентности

$$\exists z\,(z \leqslant \mathrm{pr}(\mathfrak{n}) \,\&\, \mathsf{M}(\mathrm{pr}(\mathfrak{n}), z)) \sim \mathsf{M}(\mathrm{pr}(\mathfrak{n}), 0) \vee \mathsf{M}(\mathrm{pr}(\mathfrak{n}), 0') \vee \ldots \vee \mathsf{M}(\mathrm{pr}(\mathfrak{n}), \mathfrak{z}),$$

где $\mathfrak{z}$ — значение терма $\mathrm{pr}(\mathfrak{n})$, переводима в некоторую формулу из $(\mathbf{Z}_\mu)$.

Затем, если $\mathfrak{n}$ является номером некоторой формулы $\mathfrak{A}$ из (Z) без свободных переменных, то рассматриваемая формула переводима в формулу $\mathfrak{A}$. Действительно, для любой такой цифры $\mathfrak{n}$ значение $\mathfrak{z}$ терма $\mathrm{pr}(\mathfrak{n})$ является, как мы знаем, номером некоторой переводимой в формулу $\mathfrak{A}$ предваренной формулы $\mathfrak{A}_1$, а формула

$$\mathsf{M}(\mathrm{pr}(\mathfrak{n}), 0) \vee \ldots \vee \mathsf{M}(\mathrm{pr}(\mathfrak{n}), \mathfrak{z}),$$

в которую переводима формула $\mathfrak{M}(\mathfrak{n})$, со своей стороны, может быть переведена в такую предваренную формулу $\mathfrak{N}$, у которой кванторная приставка совпадает с приставкой формулы $\mathfrak{A}_1$, а стоящее после кванторной приставки выражение имеет вид $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{v}))$; здесь $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{v}$ — различные входящие в формулу $\mathfrak{A}_1$ связанные переменные, и если $\mathfrak{A}_2(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{v})$ — выражение, стоящее в $\mathfrak{A}_1$ после кванторной приставки, то $\mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{v})$ представляет собой арифметическое функциональное выражение, которое сопоставляется формуле $\mathfrak{A}_2(a_1, \ldots, a_\mathfrak{v})$ относительно переменных $a_1, \ldots, a_\mathfrak{v}$.

А теперь, опираясь на определение формулы $\mathfrak{M}_0(n)$ и используя выводимую формулу

$$\mathrm{vl}(2 \cdot 3^a) = a,$$

можно вывести эквивалентность

$$\mathfrak{M}_0(\mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_\mathfrak{v})) \sim \mathfrak{A}_2(a_1, \ldots, a_\mathfrak{v}),$$

а из этой эквивалентности средствами исчисления предикатов можно вывести формулу

$$\mathfrak{N} \sim \mathfrak{A}_1,$$

которая вместе с выводимыми формулами

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{N} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}_1$$

дает нам искомую эквивалентность

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}.$$

Замечание. Если формула $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и, значит, является формулой без переменных, то непосредственно получаются эквивалентности

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{M}_0(\mathfrak{n}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_0(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}.$$

Описанную здесь лишь вкратце выводимость формулы $\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}$ мы поясним на примере, когда $\mathfrak{A}$ представляет собой формулу

$$\forall x\,(x \neq 0 \to \exists y\,(x \cdot y = y')),$$

которая очевидным образом является ложной. Если $\mathfrak{n}$ — номер этой формулы, то имеет место равенство $\mathrm{sp}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$, а $\mathrm{pr}(\mathfrak{n})$ является номером формулы

$$\forall x \exists y\,(\neg\neg(x = 0) \vee x \cdot y = y').$$

Этот номер представляет собой число

$$50 \cdot 7^{100 \cdot 11^{40 \cdot 7^9 \cdot 70 \cdot 11^7 \cdot 13^2} \cdot 11^{70 \cdot 11^5 \cdot 11^7 \cdot 17^{11}} \cdot 13^{3 \cdot 11}}.$$

Мы обозначим его буквой $\mathfrak{z}$.

Формула $\mathfrak{M}(\mathfrak{n})$ переводима в дизъюнкцию

$$\mathsf{M}(\mathfrak{z}, 0) \vee \ldots \vee \mathsf{M}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}),$$

которая с помощью выводимых формул

$$\mathsf{M}(\mathfrak{z}, 0) \sim \mathfrak{M}_0(\mathfrak{z}), \quad \neg\mathfrak{M}_0(\mathfrak{z}),$$

$$\wp_{\lambda(\mathfrak{z})} = 7, \quad \lambda(\mathfrak{z}) = 3, \quad \mathfrak{z} = 50 \cdot \wp_{\lambda(\mathfrak{z})}^{\nu(\mathfrak{z}, \lambda(\mathfrak{z}))}$$

переводима в формулу

(1) $\forall x \mathsf{M}(\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{z}, \lambda(\mathfrak{z})), 7, 2 \cdot 3^x), 0) \vee \ldots \vee \forall x \mathsf{M}(\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{z}, \lambda(\mathfrak{z})), 7, 2 \cdot 3^x), \mathfrak{z} - 1).$

Легко видеть, что

$$\nu(\mathfrak{z}, \lambda(\mathfrak{z})) = 100 \cdot 11^{40 \cdot 7^9 \cdot 70 \cdot 11^7 \cdot 13^2} \cdot 11^{70 \cdot 11^5 \cdot 11^7 \cdot 17^{11}} \cdot 13^{3 \cdot 11},$$

а из определения $\mathrm{st}(m, k, l)$ получается, что

$$\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{z}, \lambda(\mathfrak{z})), 7, 2 \cdot 3^a) = 100 \cdot 11^{40 \cdot 7^9 \cdot 70 \cdot 11^{2 \cdot 3^a} \cdot 13^2} \cdot 11^{70 \cdot 11^5 \cdot 11^{2 \cdot 3^a} \cdot 17^{11}} \cdot 13^{3 \cdot 11}.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, мы обозначим посредством $\mathfrak{c}(a)$.

Из рекурсивных определений функций [1]) $\wp_n$, $\lambda(n)$ и $\nu(n, k)$ могут быть выведены формулы

$$\wp_{\lambda(\mathfrak{c}(a))} = 11, \quad \lambda(\mathfrak{c}(a)) = 4, \quad \mathfrak{c}(a) = 100 \cdot \wp_{\lambda(\mathfrak{c}(a))}^{\nu(\mathfrak{c}(a),\, \lambda(\mathfrak{c}(a)))}.$$

Из этих формул мы сначала получим формулу $\neg\mathfrak{M}_0(\mathfrak{c}(a))$, а затем формулу

$$\mathsf{M}(\mathfrak{c}(a),\ k') \sim \exists y \mathsf{M}(\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{c}(a),\ \lambda(\mathfrak{c}(a))),\ 11,\ 2\cdot 3^y),\ k).$$

Поэтому дизъюнкцию (1), которая переводима в формулу

$$\forall x \mathsf{M}(\mathfrak{c}(x),\ 0) \vee \ldots \vee \forall x \mathsf{M}(\mathfrak{c}(x),\ \mathfrak{z}-1),$$

можно перевести в формулу

(2) $\forall x \exists y \mathsf{M}(\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{c}(x),\ \lambda(\mathfrak{c}(x))),\ 11,\ 2\cdot 3^y),\ 0) \vee \ldots$

$$\ldots \vee \forall x \exists y \mathsf{M}(\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{c}(x),\ \lambda(\mathfrak{c}(x))),\ 11,\ 2\cdot 3^y),\ \mathfrak{z}-2).$$

По определению функции $\mathrm{st}(m, k, l)$ мы получаем равенство

$$\mathrm{st}(\nu(\mathfrak{c}(a),\ \lambda(\mathfrak{c}(a))),\ 11,\ 2\cdot 3^b) =$$

$$= 40 \cdot 7^{9\cdot 70\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 13^2} \cdot 11^{70\cdot 11^{5\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 17^{2\cdot 3^b}}\cdot 13^{2\cdot 3^{b'}}}.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, мы обозначим посредством $\mathfrak{g}(a, b)$. С помощью выводимой формулы $\mathfrak{g}(a, b) \neq 50\cdot n$ мы получим $\neg\mathsf{M}(\mathfrak{g}(a, b),\ k')$, а отсюда средствами исчисления предикатов получим формулу

$$\neg\forall x \exists y \mathsf{M}(\mathfrak{g}(x,\ y),\ k').$$

Поэтому формула (2) переводима в формулу

$$\forall x \exists y \mathfrak{M}_0(\mathfrak{g}(x,\ y)).$$

А теперь, чтобы убедиться в переводимости этой формулы в формулу

$$\forall x \exists y (\neg\neg(x=0) \vee x\cdot y = y'),$$

достаточно установить выводимость эквивалентности

(3) $$\mathfrak{M}_0(\mathfrak{g}(a,\ b)) \sim \neg\neg(a=0) \vee a\cdot b = b'.$$

Эта эквивалентность легко может быть получена следующим образом. Пользуясь определением формулы $\mathfrak{M}_0(n)$, мы сначала с помощью выводимых формул

$$\mathfrak{g}(a,\ b) = 40\cdot 7^{\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 3)} \cdot 11^{\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 4)} \quad \text{и} \quad \mathfrak{S}_1(\mathfrak{g}(a,\ b))$$

получим эквивалентность

(4) $$\mathfrak{M}_0(\mathfrak{g}(a,\ b)) \sim \mathfrak{M}_0(\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 3)) \vee \mathfrak{M}_0(\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 4)).$$

[1]) См. с. 272.

Затем, опираясь на выводимые равенства

$$\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 3) = 9\cdot 70\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 13^2,$$

$$\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 4) = 70\cdot 11^{5\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 17^{2\cdot 3^b}}\cdot 13^{2\cdot 3^{b'}}$$

и снова пользуясь определением $\mathfrak{M}_0(n)$, получим формулы

$$\mathfrak{M}_0(\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 3)) \sim \neg\neg(\mathfrak{T}_0(2\cdot 3^a) \,\&\, \mathfrak{T}(2) \,\&\, \mathrm{vl}(2\cdot 3^a) = \mathrm{vl}(2)),$$

$$\mathfrak{M}_0(\nu(\mathfrak{g}(a,\ b),\ 4)) \sim \mathfrak{T}_0(5\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 17^{2\cdot 3^b}) \,\&\, \mathfrak{T}_0(2\cdot 3^{b'}) \,\&\, \mathrm{vl}(5\cdot 11^{2\cdot 3^a}\cdot 17^{2\cdot 3^b}) = \mathrm{vl}(2\cdot 3^{b'}).$$

Но формулы, стоящие в правых частях этих эквивалентностей, с помощью определений формулы $\mathfrak{T}_0$ и функций vl могут быть переведены в формулы

$$\neg\neg(a=0) \quad \text{и} \quad a\cdot b = b',$$

так что из эквивалентности (4) мы получаем формулу

$$\mathfrak{M}_0(\mathfrak{g}(a,\ b)) \sim \neg\neg(a=0) \vee a\cdot b = b',$$

т. е. искомую эквивалентность (3).

Показанная на этом примере выводимость формулы $\mathfrak{M}(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}$ средствами формализма (Z_μ), к которому добавлены формулы $(\mathfrak{D})$, имеет место всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ является формулой без свободных переменных, а $\mathfrak{n}$ — ее номером. На основании предыдущего рассуждения это позволяет нам сделать вывод о том, что невозможно указать такую формулу $\mathfrak{C}(n, k)$, принадлежащую формализму (Z_μ), — если, конечно, этот формализм непротиворечив, — чтобы при замене символа $\mathsf{M}(n, k)$ этой формулой эквивалентности $(\mathfrak{D})$ становились выводимы формулами. Действительно, в противном случае формула

$$\exists z (z \leqslant \mathrm{pr}(n) \,\&\, \mathfrak{C}(\mathrm{pr}(n),\ z))$$

была бы формулой $\mathfrak{M}^*(n)$ из формализма (Z_μ), удовлетворяющей условию, что для любой формулы $\mathfrak{A}$ без свободных переменных и для ее номера $\mathfrak{n}$ в (Z_μ) выводима эквивалентность $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{n}) \sim \mathfrak{A}$; но, как мы уже убедились в свое время, возможность построения такого рода формулы не совместима с непротиворечивостью (Z_μ) [1]).

Таким образом, в предположении непротиворечивости формализма (Z_μ), мы получаем, что введение посредством формул $(\mathfrak{D})$ предикатного символа $\mathsf{M}(n, k)$ представляет собой некий акт выхода за рамки формализма (Z_μ).

Формулы $(\mathfrak{D})$ имеют вид

$$\mathsf{M}(n,\ 0) \sim \mathfrak{R}(n),$$

$$\mathsf{M}(n,\ k') \sim (\mathfrak{R}_1(n) \,\&\, \forall x \mathsf{M}(\mathfrak{f}(n,\ x),\ k)) \vee (\mathfrak{R}_2(n) \,\&\, \exists x \mathsf{M}(\mathfrak{f}(n,\ x),\ k)).$$

[1]) См. с. 343.

При этом $\mathfrak{R}(n)$, $\mathfrak{R}_1(n)$ и $\mathfrak{R}_2(n)$ суть рекурсивные формулы, а $\mathfrak{f}(n, m)$ — рекурсивный терм, в котором фигурируют только явно указанные переменные.

Следовательно, такого рода схема не может быть общим способом сведена к явным определениям в (Z_μ). С другой стороны, следует отметить, что схема указанного вида, как и примитивная рекурсия, носит характер некоторого определения. Действительно, для любой цифры $\mathfrak{k}$ она дает [как мы уже убедились в этом для формул $(\mathfrak{D})$] некоторую эквивалентность

$$\mathsf{M}(n, \mathfrak{k}) \sim \mathfrak{H}(n),$$

где $\mathfrak{H}(n)$ — формула из (Z_μ).

С другой стороны, эта схема имеет нефинитный характер, т. е. она не может быть интерпретирована как способ, позволяющий для любых заданных чисел $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{k}$ выяснить, имеет ли место $\mathsf{M}(\mathfrak{n}, \mathfrak{k})$. Но в любом случае, если содержательно допустить принцип «tertium non datur» для целых чисел, эта схема будет представлять собой изображение некоторого рода абстрактного определения двуместного предиката. Значит, выход такой схемы за рамки формализма (Z_μ) свидетельствует о том, что *в формализме* (Z_μ) *невозможно полностью формализовать содержательное применение принципа* «tertium non datur» *для целых чисел.*

Можно даже предполагать, что эта неформальная точка зрения вообще не может быть исчерпывающим образом формализована никаким дедуктивным формализмом, удовлетворяющим условию [1]) $б_2$).

Выход определения $(\mathfrak{D})$ за рамки формализма (Z_μ) (в предположении его непротиворечивости) проявляется еще в одном пункте. С помощью символа $\mathsf{M}(n, k)$, как мы знаем, получается формальное выражение $\mathfrak{M}^*(n)$ для предиката «число n является номером некоторой истинной формулы формализма (Z)». Теперь, опираясь на это формализованное определение, можно дать и *формальное доказательство непротиворечивости формализма* (Z).

В самом деле, с помощью рекурсивных определений для $\mathfrak{M}_0(n)$, $\mathrm{pr}(n)$, $\mathfrak{S}(n)$, $\mathfrak{S}_0(n)$ и $\mathrm{St}(n, k)$, которые все в (Z_μ) сводятся к явным определениям, с помощью определения

$$\mathfrak{M}^*(n) \sim \mathfrak{S}(n) \,\&\, \forall x\,(\mathrm{St}(n, x) \,\&\, \mathfrak{S}_0(x) \to \exists z\,(z \leqslant \mathrm{pr}(x) \,\&\, \mathsf{M}(\mathrm{pr}(x), z))),$$

а также формул $(\mathfrak{D})$ и средств формализма (Z_μ) можно вывести, — что́ мы здесь лишь упомянем, не вникая в подробности, — формулы

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \mathfrak{M}^*(n)$$

и

$$\mathfrak{M}^*(n) \to \neg\, \mathfrak{M}^*(3 \cdot n),$$

[1]) См. с. 354.

из которых получается формула

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \neg\, \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot n).$$

Если бы определение $(\mathfrak{D})$ сводилось к какому-нибудь явному определению в формализме (Z_μ), то мы получили бы в (Z_μ) и вывод формулы

$$\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \neg\, \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot n),$$

а тем самым — поскольку эта формула принадлежит формализму (Z) — и вывод ее в (Z). По второй теореме Гёделя о неполноте отсюда следовало бы, что формализм (Z), а тем более и (Z_μ), противоречив.

Этот путь заодно убеждает нас в том, что для проведения формального доказательства непротиворечивости формализма (Z) не требуется введения связанных переменных какого-либо нового сорта.

Следует также обратить внимание на то, что, вследствие представимости рекурсивных функций в системе (Z), в использованной нами схеме определения, имеющей вид

$$\mathsf{M}(n, 0) \sim \mathfrak{R}(n),$$

$$\mathsf{M}(n, k') \sim (\mathfrak{R}_1(n) \,\&\, \forall x \mathsf{M}(\mathfrak{f}(n, x), k)) \vee (\mathfrak{R}_2(n) \,\&\, \exists x \mathsf{M}(\mathfrak{f}(n, x), k)),$$

рекурсивные формулы $\mathfrak{R}(n)$, $\mathfrak{R}_1(n)$ и $\mathfrak{R}_2(n)$ могут быть заменены соответствующими формулами $\mathfrak{A}(n)$, $\mathfrak{A}_1(n)$ и $\mathfrak{A}_2(n)$ из (Z), а кроме того, вместо рекурсивной функции $\mathfrak{f}(n, m)$ может быть введена представляющая ее формула $\mathfrak{P}(n, m, l)$ из (Z), которая в рамках (Z_μ) переводима в равенство

$$\mathfrak{f}(n, m) = l.$$

Тем самым схема эта может быть взята в виде

$$\mathsf{M}(n, 0) \sim \mathfrak{A}(n),$$

$$\mathsf{M}(n, k') \sim (\mathfrak{A}_1(n) \,\&\, \forall x \forall y\,(\mathfrak{P}(n, x, y) \to \mathsf{M}(y, k)) \vee (\mathfrak{A}_2(n) \,\&\, \exists x \exists y\,(\mathfrak{P}(n, x, y) \,\&\, \mathsf{M}(y, k))),$$

где в правых частях эквивалентностей, кроме символа M, фигурируют лишь выражения из (Z). И уже добавление такой схемы определений к формализму (Z) дает возможность формально доказать непротиворечивость этого формализма [1]).

Замечание. Характерным во внешнем виде этой дополнительной схемы является то, что в выражении для $\mathsf{M}(n, k')$ символ M фигурирует со *связанной* переменной на месте первого

[1]) В данном случае предполагать непротиворечивость (Z) не требуется, потому что если этот формализм противоречив, то для вывода формулы $\exists x \mathfrak{B}_1(x, n) \to \neg\, \exists x \mathfrak{B}_1(x, 3 \cdot n)$ хватает его собственных средств.

аргумента. Как показал Т. Сколем, некоторые более простые схемы этого рода еще могут быть сведены к явным определениям в (Z) [1]).

Благодаря нашему последнему рассмотрению утверждение второй теоремы Гёделя о неполноте в применении к формализмам (Z) и (Z_μ) получает некоторое позитивное дополнение.

Однако наши представления относительно возможности *формального* доказательства непротиворечивости системы (Z) еще ничего не решают в вопросе о том, ка́к обстоит дело с возможностью финитного доказательства непротиворечивости этого формализма. Этим вопросом мы теперь и займемся.

§ 3. Выход за рамки рассматривавшейся до сих пор методической установки теории доказательств. — Доказательства непротиворечивости формализма арифметики

а) Рассмотрение вопроса о формализуемости проводившихся до сих пор метаматематических рассуждений. В предшествующем изложении мы установили применимость второй теоремы Гёделя к формализмам (Z) и (Z_μ). Применимость эта, как мы убедились, имеет место в том усиленном смысле слова, что для формализма (Z) не может существовать такого доказательства его непротиворечивости, которое с помощью построенной нами нумерации этого формализма могло бы быть формализовано внутри (Z_μ). Поэтому, если бы для системы (Z) оказалось возможным какое-либо финитное доказательство непротиворечивости, то оно бы не могло быть формализовано в (Z_μ) с помощью нашей нумерации для (Z).

С другой стороны, если мы рассмотрим доказательства различных полученных нами метаматематических теорем с точки зрения возможности их формализации, то убедимся, что бóльшая часть встречающихся в них понятий и умозаключений допускает формализацию уже в рамках рекурсивной арифметики [2]) (хотя фактическое осуществление такой формализации для большинства доказательств было бы делом в высшей степени утомительным). При этом можно ограничиться первоначальным формализмом рекурсивной арифметики, в котором схемой индукции является

[1]) См. Skolem Th. Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf arithmetische. — Acta Sci. Szeged, 1937, 8, № 2, 3. Соответственно этому схема рекурсии

$$\Psi(k, 0) \sim \mathfrak{B}(k),$$

$$\Psi(k, n') \sim \exists x (\Psi(x, n) \,\&\, \mathfrak{B}(k, x, n)),$$

приведенная Бернайсом в его работе: Bernays P. Quelques points essentiels de la métamathématique. — L'enseignement Math., 1935, 34, p. 90, еще не представляет собой примера рекурсии, не укладывающейся в рамки формализма (Z_μ).

[2]) См. с. 271 и далее.

обычная (и единственная) рекурсивная схема — схема примитивной рекурсии; кроме того, как мы знаем, эту схему достаточно применять только к одноместным и двуместным функциям.

Разумеется, во многих случаях оказывается, что этого формализма уже недостаточно для проведения требующейся нам формализации. Но в этих случаях всякий раз оказывается возможной формализация в (Z_μ). Ряд методов, выходящих за пределы рекурсивной арифметики (в первоначальном смысле этого слова), был рассмотрен нами уже в гл. VII т. I: мы имеем в виду определение функций с помощью перекрестных рекурсий, а также некоторые обобщения схемы индукции. При этом мы указывали на возможность формализации этих схем рекурсии и индукции в рамках формализма для арифметики в целом [1]).

Мы вкратце обсудим здесь и некоторые другие типичные примеры этого рода.

1. Как мы показали, в любом формализме, удовлетворяющем определенным условиям, понятие значения выражения, определяющего число, не может быть формализовано с помощью какой-либо функции, изобразимой в самом рассматриваемом формализме [2]). Можно убедиться, что эти условия выполнены для формализма рекурсивной арифметики, и таким образом получается, что *значение рекурсивного терма без переменных* в его зависимости от номера этого терма не может быть изображено (на основе нашей нумерации рекурсивной арифметики) никакой рекурсивной (т. е. определяемой примитивными рекурсиями) функцией.

Чтобы убедиться в выполнении упомянутых предположений, можно взять следующую нумерацию формализма рекурсивной арифметики:

Для свободных переменных, для символов исчисления высказываний и для арифметических символов 0, ′ и = изображение берется тем же самым, что и в нумерации, построенной нами для формализма (Z_μ) [3]), а для функциональных знаков, вводимых рекурсиями, изображение строится способом, указанным ниже.

Если $\mathfrak{f}$ — какой-либо одноместный функциональный знак, вводимый рекурсией

$$\mathfrak{f}(0) = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{f}(n') = \mathfrak{b}(n, \mathfrak{f}(n)),$$

то номер выражения $\mathfrak{f}(\mathfrak{c})$ в его зависимости от номера аргумента $\mathfrak{c}$ мы будем изображать функцией $5 \cdot \wp_n^a$, причем если $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ суть номера выражений $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}(a, b)$, то в качестве n мы возьмем значение выражения $2^{\mathfrak{f}} \cdot 3^{\mathfrak{l}}$.

[1]) См. т. I, с. 419—427 и с. 509, 510, а также с. 74—75 настоящего тома.
[2]) См. с. 329—335.
[3]) См. с. 367 и далее.

Аналогично для двуместного функционального знака $\mathfrak{f}$, вводимого равенствами

$$\mathfrak{f}(a, 0) = \mathfrak{a}(a), \quad \mathfrak{f}(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \mathfrak{f}(a, n))$$

(в качестве переменного параметра здесь всегда можно брать переменную a), номер выражения $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ в его зависимости от номеров аргументов $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ будет изображаться функцией $5 \cdot \wp_{\mathfrak{n}}^{a} \cdot \wp_{\mathfrak{n}+1}^{\mathfrak{c}}$, причем если $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ суть номера выражений $\mathfrak{a}(a)$ и $\mathfrak{b}(a, b, c)$, то в качестве $\mathfrak{n}$ мы будем брать значение выражения $2^{\mathfrak{f}} \cdot 3^{\mathfrak{l}}$.

Таким изображением рекурсивно введенных функциональных знаков мы добиваемся, в частности, того, что по номеру любого рекурсивного терма можно получить набор всех тех рекурсивных равенств, которые участвуют в его рекурсивном построении [1]). Номер последовательности, состоящей из этих рекурсивных равенств, записанных в порядке возрастания их номеров, рекурсивно зависит от номера рассматриваемого терма. Пусть $\mathfrak{j}(m)$ обозначает некоторую рекурсивную функцию, выражающую эту зависимость.

С помощью этой функции мы изобразим в (Z_μ) понятие значения рекурсивного терма без переменных.

Действительно, вычисление значения такого терма $\mathfrak{t}$ может быть формализовано посредством вывода, который от рекурсивных равенств, участвующих в рекурсивном построении $\mathfrak{t}$, ведет к равенству $\mathfrak{t} = \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — значение этого терма. При этом используются аксиома равенства (J_2), правила подстановки и средства исчисления высказываний. С помощью подходящей рекурсивной формулы $\mathfrak{B}(m, k, n)$ можно изобразить высказывание «список формул с номером m является выводом формулы с номером $\mathfrak{f}$, использующим аксиому равенства (J_2), правила подстановки и средства исчисления высказываний». И поэтому значение терма $\mathfrak{t}$ в его зависимости от номера этого терма в формализме (Z_μ) изображается функцией

$$\mu_x \exists y \mathfrak{B}(y, \mathfrak{j}(a), 70 \cdot 11^{a} \cdot 13^{2 \cdot 3^{x}}).$$

2. В критериях опровержимости, полученных нами с помощью теоремы Эрбрана, было использовано общее понятие *вычислимой функции* [2]). Ограничение рассматривавшихся там функций вычислимыми было произведено для того, чтобы придать рассмотрению финитный характер. Априори не ясно, как само по себе неточное

[1]) На возможность такой нумерации рекурсивно введенных функциональных знаков, которая удовлетворяла бы указанному условию, вероятно, впервые указал Рудольф Карнап (см. Carnap R. Logische Syntax der Sprache. — Wien, 1934, S. 59).

[2]) См. с. 223, а также с. 214 и далее.

интуитивное понятие вычислимости может быть подвергнуто формализации. Однако в последнее время это уточнение все-таки было осуществлено, причем таким образом, что при этом заодно получилась и формальная изобразимость этого уточнения в формализме (Z_μ).

Уточнение это было произведено посредством трех существенно отличных друг от друга понятий, относительно которых впоследствии было установлено, что они описывают одну и ту же совокупность функций. Это — восходящее к Эрбрану и Гёделю понятие общерекурсивной функции, принадлежащее Чёрчу и Клини понятие λ-определимой функции и введенное А. М. Тьюрингом и Э. Л. Постом понятие вычислимой функции. Совпадение объемов первых двух понятий было установлено Чёрчем и Клини, а совпадение объемов третьего и первых двух — Тьюрингом (с использованием уже обнаруженного совпадения объемов первых двух понятий) [1]).

Здесь мы приведем лишь существенный для данного контекста результат этих исследований. По поводу его обоснования мы отсылаем читателя к Приложению II [2]), а здесь только отметим, что это обоснование опирается на одно предположение, которое вследствие неточности обиходного понятия вычислимости лишь может быть сделано правдоподобным и оправданным последующими результатами. Речь идет о предположении, что любая вычислительная процедура может быть изображена в виде вывода в подходящем, специально для этой цели построенном дедуктивном формализме, причем этот формализм может быть устроен так (и это существенно!), что на основе надлежащим образом выбранной нумерации совокупность номеров выводимых в этом формализме выражений совпадает с совокупностью значений некоторой конкретной рекурсивной функции.

Это в высшей степени правдоподобное предположение в качестве одного из своих следствий позволяет нам заключить, что любая вычислимая функция $\mathfrak{f}(n)$ одного аргумента (рассмотрение многоместных вычислимых функций легко сводится к рассмотрению одноместных) может быть изображена в формализме (Z_μ)

[1]) Об этом см. Church Alonzo. An unsolvable problem of elementary number theory. — Amer. J. Math., 1936, 58, № 2; Kleene S. C. General recursive functions of natural numbers. — Math. Ann., 1936, 112, № 5; Kleene S. C. λ-definability and recursiveness. — Duke Math. J., 1936, 2, № 2; Post E. L. Finite combinatory processes. — J. Symbolic Logic, 1936, 1, № 2 [русский перевод: Пост Э. Л. Финитные комбинаторные процессы. — В кн.: Успенский В. А. Машина Поста. М.: Наука, 1979, с. 89—95]; Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. — Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 1936/37, 42, Appendix; Turing A. M. Computability and λ-definability. — J. Symbolic Logic, 1937, 2, № 4.

[2]) См. с. 477 и далее.

в виде

$$\mathfrak{h}(\mu_x \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, n, x)),$$

где $\mathfrak{h}(m)$ — некоторая не зависящая от $\mathfrak{f}$ рекурсивная функция [1]), $\mathfrak{R}(k, l, m)$ — тоже не зависящая от $\mathfrak{f}$ рекурсивная формула, не содержащая свободных переменных, отличных от k, l и m, а $\mathfrak{f}$ — цифра, зависящая от определения функции $\mathfrak{f}$, такая, что для любой цифры $\mathfrak{l}$ может быть указана некоторая цифра $\mathfrak{m}$, находящаяся с $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ в отношении $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m})$.

Функция $\mathfrak{f}(n)$ изображается указанным выражением в том смысле, что для любой цифры $\mathfrak{l}$, если $\mathfrak{n}$ является значением $\mathfrak{f}(\mathfrak{l})$, то формула

$$\mathfrak{h}(\mu_x \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, x)) = \mathfrak{n}$$

выводима в (Z_μ) и даже в некотором (определенном независимо от функции $\mathfrak{f}(n)$) подформализме формализма (Z_μ) [2]).

С другой стороны, можно непосредственно убедиться, что если цифра $\mathfrak{f}$ обладает тем свойством, что с помощью некоторой конкретной процедуры для любой цифры $\mathfrak{l}$ может быть указана цифра $\mathfrak{m}$, для которой выполняется отношение $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m})$, то выражение $\mathfrak{h}(\mu_x \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, n, x))$ изображает (в только что разъясненном смысле) некоторую вычислимую функцию аргумента n.

Таким образом, в качестве формализации в формализме (Z_μ) совокупности вычислимых функций можно рассматривать совокупность тех чисел $\mathfrak{f}$, которые удовлетворяют условию, изображенному формулой

$$\forall x \exists y \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, x, y).$$

А понятие значения вычислимой функции при фиксированном значении аргумента формализуется термом

$$\mathfrak{h}(\mu_x \mathfrak{R}(k, l, x)),$$

где переменная k представляет зависимость от функции, а переменная l — зависимость от значения аргумента.

Правда, надо отметить, что это изображение вычислимых функций в формализме (Z_μ) все-таки не является таким изображением в полном смысле слова, какое мы имеем для рекурсивных функций в (Z_μ). Более того, можно показать [3]), что существуют числа $\mathfrak{f}$ такие, что для каждой цифры $\mathfrak{l}$ можно указать

[1]) Под **рекурсивными** функциями здесь, как и ранее, понимаются такие функции, которые могут быть определены примитивными рекурсиями.

[2]) Этот формализм является также подформализмом рассмотренного нами в конце гл. II (с. 163—165) непротиворечивого арифметического формализма.

[3]) Это следует из одной общей теоремы Клини, доказанной в его уже упоминавшейся работе «General recursive functions of natural numbers» (теорема XIII).

цифру $\mathfrak{m}$, связанную с $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ отношением $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m})$, без того, чтобы формула

$$\forall x \exists y \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, x, y)$$

была выводимой в (Z_μ), — по меньшей мере в предположении, что для любой рекурсивной формулы $\mathfrak{A}(a, b)$ из выводимости в (Z_μ) формулы $\forall x \exists y \mathfrak{A}(x, y)$ может быть извлечена эффективная возможность для каждой цифры $\mathfrak{m}$ указывать некоторую цифру $\mathfrak{n}$, связанную с $\mathfrak{m}$ отношением $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

3. Иногда в наших доказательствах непротиворечивости используется один вид полной индукции, который не формализуется схемой индукции рекурсивной арифметики. Этот выход за рамки рекурсивной арифметики связан с тем, что в наших формулировках и доказательствах время от времени встречаются такие допущения, в которых говорится об истинности некоторых всеобщих предложений; таковы, например, предположение о невыводимости или о неопровержимости какой-либо формулы, или предположение о непротиворечивости какого-либо формализма, или же предположение о верифицируемости какой-либо формулы, что, согласно определению, означает, что эта формула при любой замене свободных переменных цифрами оказывается истинной. Любое высказывание, содержащее такого рода предположение, представляет трудности и для финитного понимания. Как известно, финитное допущение всегда относится к какой-либо наглядно характеризуемой ситуации. Но истинность всеобщего предложения не может считаться таковой. Правда, вместо предположения, что рассматриваемое всеобщее предложение истинно, можно взять предположение о том, что истинность этого предложения установлена. В этом случае мы имеем допущение о наличии некоторого доказательства. Но при этом данное доказательство должно допускаться как *неформальное*; а неформальная убедительность доказательства опять-таки не является интуитивно ясной. Интуитивная неясность неформального представления о доказательстве как раз и является причиной, вызывающей необходимость формализации доказательств, с помощью которой — по крайней мере в рамках определенных дедуктивных формализмов — оказывается возможной наглядно определенная характеризация доказательства как такового.

Однако на самом деле и в тех случаях, когда мы пользуемся предположениями вроде предположения о верифицируемости какой-либо формулы $\mathfrak{A}$, мы ссылаемся вовсе не на структуру какого-либо возможного неформального доказательства верифицируемости $\mathfrak{A}$; самое бо́льшее, что подразумевается в таком предположении, — это то, что в любом месте рассуждения, где речь идет о какой-то формуле, получающейся из $\mathfrak{A}$ в результате подста-

новки, мы можем воспользоваться тем, что рассматриваемая формула является истинной.

Поэтому было бы правильным утверждения, у которых в качестве посылок фигурируют какие-либо всеобщие предложения, в рамках финитного рассмотрения оформлять не в виде предложений, а в виде правил умозаключений, как мы это уже и делали при изложении критериев опровержимости формул исчисления предикатов [1]).

Такие правила, в частности, могут применяться в сочетании с полной индукцией так, что переход от n к $n+1$ происходит не с помощью какого-то предложения, а с помощью некоторого правила. В таком случае вторую посылку схемы индукции мы не можем изобразить в рамках рекурсивной арифметики формулой

$$\mathfrak{A}(n) \to \mathfrak{A}(n+1).$$

Такой случай имел место, например, в одном ранее проведенном нами рассуждении [2]). В этом рассуждении рассматривался арифметический формализм, получающийся из исчисления предикатов путем добавления к нему символов 0, ′, +, · и =, аксиом

$$a=a, \quad a=b \to (a=c \to b=c),$$
$$a=b \sim a'=b', \quad a' \neq 0$$

и рекурсивных равенств для сложения и умножения. Непротиворечивость этого формализма получалась прямо из нп-теоремы, из которой мы, кроме того, получили, что любая формула, выводимая средствами упомянутого формализма с добавлением, быть может, верифицируемых исходных формул, не содержащих формульных и связанных индивидных переменных, является верифицируемой.

На основании этого результата и со ссылкой на одно проведенное в гл. VII т. I рассуждение [3]) мы сделали заключение, что это доказательство может быть распространено и на ограниченную схему индукции (т. е. на схему индукции, применяемую к формулам без связанных переменных). Действительно, для этого достаточно показать что в любом выводе нумерической формулы, осуществляемом средствами рассмотренного формализма с добавлением ограниченной схемы индукции, после исключения формульных переменных результирующие формулы всех применений схемы индукции являются верифицируемыми. Это, однако, доказывается с помощью полной индукции: мы показываем, что если результирующие формулы первых $\mathfrak{f}$ применений схемы индукции являются верифицируемыми, то и результирующая формула $(\mathfrak{f}+1)$-го применения схемы индукции — в предположении, что таковая в рассматриваемом выводе имеется, — тоже является верифицируемой.

[1]) См. с. 224.
[2]) См. гл. II, с. 75—77.
[3]) См. т. I, с. 364—365.

А теперь посмотрим, как это индуктивное рассуждение может быть изображено с помощью нумерации рассматриваемого формализма.

Рассматриваемый арифметический формализм, расширенный присоединением ограниченной схемы индукции, мы обозначим посредством (Z_1). Имеющаяся у нас нумерация формализма (Z_μ) автоматически порождает некоторую нумерацию этого формализма. Число применений схемы индукции, содержащихся в данном выводе в формализме (Z_1), в его зависимости от номера списка формул, образующего этот вывод, изображается некоторой рекурсивной функцией $\mathfrak{g}_1(m)$. Мы можем определить рекурсивную функцию $\mathfrak{g}_2(m, k)$, значение которой для числа $\mathfrak{m}$, являющегося номером некоторого вывода в (Z_1), и для числа $\mathfrak{f}$, меньшего $\mathfrak{g}_1(\mathfrak{m})$, будет изображать номер (в рассматриваемой нумерации) результирующей формулы $(\mathfrak{f}+1)$-го входящего в этот вывод применения схемы индукции, так что если $\mathfrak{m}$ — номер какого-либо вывода в (Z_1), содержащего $\mathfrak{r}$ применений схемы индукции, то $\mathfrak{g}_2(\mathfrak{m}, 0), \ldots, \mathfrak{g}_2(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}-1)$ будут номерами результирующих формул этих применений схемы индукции.

Затем с помощью некоторой рекурсивной формулы $\mathfrak{K}(m)$ может быть изображено высказывание «число m является номером некоторого списка формул, представляющего собой вывод в формализме (Z_1), осуществленный без использования формульных переменных», а с помощью другой рекурсивной формулы $\mathfrak{L}(a, b)$ — высказывание «числа a и b являются номерами некоторых формул из (Z_1) и формула с номером b получается из формулы с номером a путем замены каждой свободной индивидной переменной некоторой цифрой». И, наконец, с помощью некоторой рекурсивной формулы $\mathfrak{N}(a)$ может быть изображено высказывание «число a является номером некоторой формулы без переменных такой, что после вычисления всех входящих в нее функциональных выражений она становится истинной нумерической формулой».

А теперь, с помощью перечисленных выше рекурсивных функций и формул, высказывание «в любом выводе в формализме (Z_1), не содержащем формульных переменных, результирующая формула любого входящего в него применения схемы индукции является верифицируемой» изобразится формулой

$$\mathfrak{K}(m) \,\&\, k < \mathfrak{g}_1(m) \,\&\, \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_2(m, k), c) \to \mathfrak{N}(c),$$

которая переводима в некоторую рекурсивную формулу $\mathfrak{H}(m, k, c)$.

Высказывание «для любого числа k, меньшего n, имеет место отношение $\mathfrak{H}(m, k, c)$» тоже может быть изображено при помощи некоторой рекурсивной формулы $\mathfrak{H}_1(m, n, c)$.

Но теперь для формальной реализации упомянутого индуктивного рассуждения требуется выразить заключение «если в выводе с номером m все применения схемы индукции по n-е включительно имеют верифицируемые результирующие формулы, то применения схемы индукции по $(n+1)$-е включительно тоже имеют верифицируемые результирующие формулы», или — с помощью рекурсивной формулы $\mathfrak{H}_1(m, k, c)$ — «если для любых чисел m и n отношение $\mathfrak{H}_1(m, n, c)$ имеет место для всех чисел c, то для тех же самых чисел m и n и для всех чисел c будет иметь место отношение $\mathfrak{H}_1(m, n', c)$».

Это гипотетическое отношение, которое в рамках финитного рассмотрения допустимо как способ вывода следствия, хотя и не как финитное предложение, в рамках рекурсивной арифметики не может быть изображено какой-либо формулой. Но в рамках формализма (Z_μ) оно изображается формулой

$$\forall x \mathfrak{H}_1(m, n, x) \to \forall x \mathfrak{H}_1(m, n', x).$$

Остается нерешенным вопрос о том, можно ли доказательству, которое здесь представлено схематически в довольно сыром виде, придать такую форму, чтобы оказалась возможной его формализация при помощи какой-либо из схем расширенной таким образом рекурсивной арифметики.

Вообще же надо отметить, что при формализации финитных рассуждений в системе (Z_μ) бóльшая часть характерных черт финитной аргументации теряется. Это объясняется тем, что формализм (Z_μ) не рассчитан на то, чтобы как-то различать конструктивные и экзистенциальные рассмотрения.

б) Устранимость принципа «tertium non datur» при исследовании непротиворечивости системы (Z). Различные выборочные пробы, произведенные нами в процессе исследования возможности формализации полученных к настоящему времени метаматематических теорем и их доказательств, позволяют нам заключить, что методы теории доказательств, применявшиеся нами до сих пор, хотя частично и выходят за пределы рекурсивной арифметики, тем не менее, как нам кажется, они укладываются в рамки понятий и способов умозаключений, изобразимых средствами формализма (Z_μ).

В этом обстоятельстве мы можем усмотреть известные объяснения и причинам, по которым нам не удалось доказать с помощью этих методов непротиворечивость формализма (Z). Действительно, такое доказательство, как было установлено, непременно потребовало бы привлечения каких-либо способов рассуждения, выходящих за пределы формализма (Z_μ).

А теперь перед нами возникает вопрос о том, могут ли финитные методы вообще выйти за пределы формализуемых в (Z_μ) способов рассуждений.

Этот вопрос в том виде, как он только что сформулирован, поставлен, конечно, неточно, потому что понятие «финитности» было введено нами не в качестве четко описанного термина, а лишь в качестве названия для некоторой методической установки, которая хотя и позволяет квалифицировать одни конкретные понятия и рассуждения как определенно финитные, а другие — как определенно нефинитные, но все-таки не указывает никакой точной границы между теми из них, которые удовлетворяют требованиям финитности, и теми, которые этим требованиям не удовлетворяют.

С типичным сомнительным в этом отношении случаем мы встретились при обсуждении вопроса о допустимости предложений типа всеобщности в качестве посылок. В этом случае мы избежали трудности путем проведения различия между предложениями и правилами умозаключений [1]).

Однако во многих случаях это выглядит неестественным, и нам остается просто-напросто признать, что мы вынуждены сделать границы финитных рассмотрений несколько размытыми. Первоначальное более узкое понятие финитного высказывания в области арифметики состоит в том, что в качестве финитных арифметических высказываний допускаются лишь такие высказывания, которые либо сами изображаются в формализме рекурсивной арифметики с добавлением, быть может, некоторых символов для конкретных вычислимых арифметических функций (одного или нескольких аргументов), однако без использования формульных переменных, либо имеют некоторую усиленную интерпретацию с помощью высказываний, изобразимых в таком формализме.

К высказываниям первого рода принадлежат, в частности, высказывания вида «если имеется число x со свойством $\mathfrak{A}(x)$, то имеет место $\mathfrak{B}$». Действительно, всякое такое высказывание (если переменная a не входит в $\mathfrak{B}$) изобразимо формулой $\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{B}$.

Примерами высказываний второго рода являются высказывания вида «для любого числа x существует число y такое, что $\mathfrak{A}(x, y)$». Для всякого такого высказывания в нашем распоряжении имеется усиленная версия в виде высказывания, изобразимого формулой $\mathfrak{A}(c, \varphi(c))$, где $\varphi(c)$ — конкретная вычислимая функция.

Примерами высказываний, не являющихся финитными в указанном смысле, служат предложения, содержащие предложения типа всеобщности в посылке.

Однако для формализации ряда общих результатов теории доказательств желательно было бы допустить в качестве теорем и предложения только что упомянутого типа, — например, предложения, в посылках которых стоят утверждения о верифици-

[1]) См. с. 225, а также с. 424 и далее.

руемости тех или иных формул или же о вычислимости тех или иных функций. Однократный акт такого рода не выглядит нарушением основных методических идей финитной теории доказательств.

Но совершив такой шаг однажды, мы приходим к необходимости пойти в этом направлении и дальше. Дальнейший, уже упоминавшийся шаг такого рода заключается в том, чтобы утверждения с предложениями типа всеобщности в посылках в свою очередь использовать в качестве посылок в индуктивных рассуждениях.

У нас нет четкой исходной точки зрения для решения вопроса о том, какие методические расширения в указанном направлении являются еще допустимыми (при условии, что мы намерены придерживаться основных тенденций теории доказательств).

Во всяком случае, имеется возможность с помощью такого рода расширений выйти за границы формализуемых в (Z_μ) способов умозаключений без использования типично нефинитных рассуждений. Таким способом даже удается дать одно очень простое доказательство непротиворечивости системы (Z).

К этому доказательству нас приводит следующее рассуждение: Характерной чертой типично нефинитных рассмотрений, применяемых в области арифметики, является использование отрицания в смысле контрадикторной противоположности в применении к произвольным высказываниям, построенным с помощью понятий «все», «существует» и связок исчисления высказываний.

При формализации арифметических доказательств в формализме (Z) такое употребление отрицания изображается средствами исчисления высказываний, а в основных формулах и в схемах для кванторов, а также в аксиоме индукции отрицания нет вообще.

Пользуясь теперь исчислением высказываний в его аксиоматической форме, мы можем формализм (Z) ограничить таким образом, чтобы оказались изобразимыми только такие способы умозаключений, которые не зависят от предположения о том, что для любого высказывания существует другое высказывание, являющееся его контрадикторной противоположностью [1]). Если удастся осуществить эту редукцию так, что ограниченный формализм в отношении непротиворечивости будет равносильным формализму (Z), то тем самым непротиворечивость (Z) будет доказана с точки зрения любых предположений, достаточных для какого-ли о истолкования типа верификации этого ограниченного формализма.

[1]) Впервые исчисление высказываний, ограниченное в духе этого требования, было построено А. Гейтингом в его уже упоминавшейся работе: Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. — Sitzgsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, II. Относительно одного еще более сильного ограничения см. работу И. Йогансона: Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. — Compositio Math., 1936, 4, № 1.

Мы покажем, что такая редукция, обладающая желательным для нас свойством, действительно оказывается осуществимой.

Сначала мы можем исключить дизъюнкцию, квантор существования и формульные переменные. Действительно, дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание. При этом всякая тождественно истинная формула исчисления высказываний снова перейдет в тождественно истинную формулу. Далее, каждое выражение вида $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ может быть заменено выражением $\neg \forall \mathfrak{x} \neg \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$. При этом основная формула (b) будет выводимой, а схема (β) — производной. Исключение формульных переменных можно — как это уже неоднократно делалось — произвести с помощью метода возвратного переноса подстановок в исходные формулы [1]). Только при этом нам нужно будет модифицировать понятие доказательства, взяв вместо исходных формул, содержащих формульные переменные — таковыми являются тождественно истинные формулы исчисления высказываний, основная формула (a) исчисления предикатов, аксиома равенства (J_2) и аксиома индукции, — соответствующие схемы формул. Впрочем, аксиому индукции, как известно, с самого начала можно заменить схемой индукции.

После того как мы таким образом сузим наш формализм, мы ограничим еще и исчисление высказываний, разрешив применять конъюнкции и импликации только в *способах умозаключений позитивной логики* [2]). Для формализации этих способов достаточно взять следующие схемы формул и схемы вывода [3]):

$$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}},\qquad \frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}},$$

$$\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{B},\quad \frac{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})},$$

из которых в качестве производных схем получаются, в частности, следующие:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}},\quad \frac{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}},\quad \frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C})},\quad \frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}},\quad \frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}}.$$

Ввиду исключения дизъюнкции из рассмотрения, из числа связок исчисления высказываний — помимо импликации, конъюнк-

[1]) См. с. 473.
[2]) См. т. I, с. 99—101, а также Приложение III, с. 512 и далее.
[3]) Подробнее об этом см. в Приложении III, в особенности на с. 521—529.

ции и эквивалентности $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, которую мы рассматриваем как сокращение для выражения $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$, — у нас остается только отрицание. Мы возьмем его не в качестве основного знака, а в качестве знака, вводимого посредством явного определения

$$\neg \mathfrak{A} \sim (\mathfrak{A} \to 0' = 0).$$

Опираясь на это определение, мы из схем

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})},$$

взяв в них вместо $\mathfrak{C}$ формулу $0' = 0$, получим схемы

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}{\neg \mathfrak{A}} \quad \text{и} \quad \frac{\neg (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}.$$

Равным образом из производных схем

$$\frac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}, \quad \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})}$$

мы получим для отрицания схемы

$$\frac{\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}{\neg (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}, \quad \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\neg \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}}.$$

Разумеется, все эти схемы мы получили бы тем же самым способом и в том случае, если бы, взяв произвольную формулу $\mathfrak{F}$, мы определили отрицание посредством эквивалентности

$$\neg \mathfrak{A} \sim (\mathfrak{A} \to \mathfrak{F}).$$

Получаемые таким способом схемы для отрицания — это в точности схемы, действующие в так называемом минимальном исчислении Йогансона[1]).

В исчислении высказываний Гейтинга ко всему этому добавляется схема формул

$$\neg \mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}),$$

которая у нас может быть выведена на основе данного нами определения отрицания.

Действительно, согласно нашему определению, эта схема может быть получена из формулы

$$(\mathfrak{A} \to 0' = 0) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}),$$

а эта формула с помощью имеющихся у нас схем выводима из

[1]) См. подстрочное примечание на с. 4[illegible].

схемы

$$0' = 0 \to \mathfrak{B}.$$

Но эта схема выводима, и ее вывод получается — с использованием схемы индукции и схемы для равенства — следующим образом:

Сначала индукцией по n с использованием выводимой формулы

$$a = b \to a' = b'$$

получаем формулу

$$0' = 0 \to n' = n.$$

С помощью этой формулы индукций по a получаем формулу

$$0' = 0 \to a = 0,$$

из которой с использованием выводимой формулы

$$a = 0 \& b = 0 \to a = b$$

получается формула

$$0' = 0 \to a = b,$$

а из этой формулы подстановкой можно получить формулу

$$0' = 0 \to \mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — произвольные термы.

Далее получаются следующие утверждения:

1. Для любой формулы $\mathfrak{C}$, опираясь на определение отрицания и на выводимость схемы $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$, можно получить схему

$$0' = 0 \to \neg \mathfrak{C}.$$

2. Из двух формул вида

$$0' = 0 \to \mathfrak{B}_1 \quad \text{и} \quad 0' = 0 \to \mathfrak{B}_2$$

с помощью наших схем выводятся формулы

$$0' = 0 \to \mathfrak{B}_1 \& \mathfrak{B}_2 \quad \text{и} \quad 0' = 0 \to (\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2).$$

3. Из формулы

$$0' = 0 \to \mathfrak{C}(a),$$

содержащей свободную переменную a и не содержащей связанной переменной $\mathfrak{x}$, с помощью схемы (α) получается формула

$$0' = 0 \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}).$$

А теперь, опираясь на эти утверждения и прослеживая процесс построения $\mathfrak{B}$ из элементарных формул (в данном случае из

равенств), можно показать, что формула

$$0' = 0 \to \mathfrak{B}$$

выводима при любой формуле $\mathfrak{B}$.

Но мы должны еще формализовать предположение о том, что для равенства натуральных чисел имеется его контрадикторная противоположность. Это может быть сделано следующим образом. Мы вводим в качестве основного знака символ различия $\neq$ вместе со следующими относящимися к нему аксиомами различия [1]):

$$a \neq b \to (a = b \to 0' = 0),$$
$$(a = b \to 0 = 0') \to a \neq b,$$
$$(a \neq b \to 0' = 0) \to a = b.$$

Третья из них представляет собой усиление формулы

$$0' = 0 \to a = b,$$

выводимость которой установлена. Из второй аксиомы мы получаем формулу

$$0' = 0 \to a \neq b,$$

откуда получается, что для расширенного понятия формулы утверждение о выводимости любой формулы вида $0' = 0 \to \mathfrak{B}$ тоже справедливо.

Пользуясь знаком отрицания, мы получим из этих трех аксиом формулы

$$a \neq b \to \neg(a = b), \quad a = b \to \neg(a \neq b),$$
$$\neg(a = b) \to a \neq b, \quad \neg(a \neq b) \to (a = b),$$

а тем самым и формулы

$$a \neq b \sim \neg(a = b), \quad a = b \sim \neg(a \neq b),$$
$$\neg\neg(a = b) \to a = b, \quad \neg\neg(a \neq b) \to a \neq b.$$

Так, в итоге, мы приходим к следующей модификации формализма (Z): в качестве элементарных формул у нас будут фигурировать лишь выражения вида $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — термы, а в качестве формул — такие выражения, которые либо являются элементарными формулами, либо строятся из них применением операций конъюнкции, импликации, эквивалентности, отрицания, а также замены какой-либо свободной переменной связанной переменной (ранее в этом выражении не встречавшейся)

[1]) Чтобы оправдать этот подход, мы сошлемся на то, что в рассматриваемом формализме все термы, не содержащие свободных переменных, нумерически вычислимы и, следовательно, имеют значение (в виде некоторой цифры).

с последующим связыванием всего выражения одноименным с этой переменной квантором всеобщности.

К таким формулам применимы упомянутые выше пять схем исчисления высказываний, а также определения для эквивалентности и отрицания. В отношении свободных индивидных переменных у нас действует правило подстановки, а для квантора всеобщности имеется схема формул, соответствующая основной формуле (a), а также схема (α).

Тем самым логическое исчисление описано. К нему добавляется аксиома $a = a$ и схема

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

для равенства. В качестве арифметических аксиом у нас имеются две аксиомы Пеано

$$\neg(a' = 0) \quad \text{и} \quad a' = b' \to a = b,$$

три аксиомы для символа $\neq$, а также рекурсивные равенства для сложения и умножения. Ко всему этому добавляется еще одна арифметическая схема — схема индукции.

Определенный таким образом арифметический формализм мы будем обозначать посредством (З). Можно показать, что в этом формализме выводима всякая формула, выводимая в системе (Z) и не содержащая формульных переменных, дизъюнкций и кванторов существования.

Действительно, если мы рассмотрим средства, остающиеся в формализме (Z) после исключения формульных переменных, дизъюнкции и квантора существования и после замены всех исходных формул, которые содержат формульные переменные, соответствующими схемами формул, а аксиомы индукции схемой индукции, то увидим, что в формализме (З) из этих средств непосредственно отсутствуют только следующие два: схемы формул, соответствующие тождественно истинным формулам исчисления высказываний, и взаимозаменяемость выражений $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ и $\neg(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$. Эта последняя, однако, имеет место ввиду выведенной нами эквивалентности

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \sim \neg(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}).$$

Что же касается схем формул, соответствующих тождественно истинным формулам исчисления высказываний, то у нас рассматриваются лишь те из них, в которых из числа символов исчисления высказываний фигурируют только конъюнкция, импликация, эквивалентность и отрицание.

Можно показать (мы будем говорить об этом в Приложении III) [1]), что любая из этих схем выводима из пяти схем

[1]) См. Приложение III, § 3, с. 532—542.

системы (З) для конъюнкции и импликации, схем

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}}{\neg\mathfrak{A}} \quad \text{и} \quad \frac{\neg(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}}$$

(которые, как уже упоминалось, получаются из них с помощью явного определения для отрицания), правила относительно заменимости $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ формулой $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\,\&\,(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})$, а также схемы формул

$$\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}.$$

Значит, наше утверждение о формализме (З) будет доказано, если мы покажем, что любая формула вида

$$\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$$

выводима в (З).

При этом мы можем ограничиться такими формулами $\mathfrak{A}$, которые не содержат явно определенных связок, т. е. отрицания и эквивалентности.

Для элементарных формул $\mathfrak{A}$ выводимость в (З) импликации $\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ получается из установленной нами выводимости формул

$$\neg\neg(a=b)\to a=b \quad \text{и} \quad \neg\neg(a\neq b)\to a\neq b.$$

Поэтому, для того чтобы выводимость в (З) импликации

$$\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$$

установить для любой формулы $\mathfrak{A}$ (из числа входящих в наше рассмотрение), достаточно установить справедливость следующих утверждений 1—3:

1. Если формулы

$$\neg\neg\mathfrak{B}\to\mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \neg\neg\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$$

выводимы в (З), то в (З) выводима также и формула

$$\neg\neg(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})\to\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}.$$

2. Если формула

$$\neg\neg\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$$

выводима в (З), то в (З) выводима также и любая формула

$$\neg\neg(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}).$$

3. Если $\mathfrak{B}(c)$ — формула, не содержащая ни связанной переменной $\mathfrak{x}$, ни свободной переменной a, и если формула

$$\neg\neg\mathfrak{B}(a)\to\mathfrak{B}(a)$$

выводима в (З), то в (З) выводима также и формула

$$\neg\neg\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})\to\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}).$$

Для доказательства этих утверждений мы воспользуемся схемой

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{B}},$$

которая получается двукратным применением производной схемы

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{A}}.$$

Эту схему мы будем называть схемой *двойной контрапозиции*. Кроме того (для утверждения 2), мы воспользуемся выводимой схемой формул

$$(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to(\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{B}).$$

С использованием этих схем указанные три утверждения получаются сравнительно просто. Именно:

1. С помощью двойной контрапозиции из схем $\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ мы получаем схемы

$$\neg\neg(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})\to\neg\neg\mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \neg\neg(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})\to\neg\neg\mathfrak{C}.$$

С помощью этих схем со ссылкой на выводимость формул $\neg\neg\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ и $\neg\neg\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ получается выводимость формул

$$\neg\neg(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})\to\mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \neg\neg(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})\to\mathfrak{C},$$

а следовательно, и формулы

$$\neg\neg(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})\to\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}.$$

2. Схема

$$(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to(\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{B})$$

в сочетании с выводимой схемой

$$\mathfrak{B}\to((\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to\mathfrak{C})$$

дает схему

$$\mathfrak{B}\to(\neg\neg(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to\neg\neg\mathfrak{C}).$$

Из этой схемы в случае выводимости формулы $\neg\neg\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ мы для произвольных $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ получаем формулу

$$\mathfrak{B}\to(\neg\neg(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to\mathfrak{C}),$$

а из нее формулу

$$\neg\neg(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}).$$

3. Из схемы $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{B}(a)$ двойной контрапозицией мы получаем схему

$$\neg\neg\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})\to\neg\neg\mathfrak{B}(a).$$

Следовательно, для формулы $\mathfrak{B}(c)$, для которой импликация $\neg\neg\mathfrak{B}(a)\rightarrow\mathfrak{B}(a)$ выводима, выводима также и формула

$$\neg\neg\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})\rightarrow\mathfrak{B}(a).$$

Наконец, если $\mathfrak{B}(c)$, а потому и $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$, не содержит переменной a, отсюда по схеме (α) получается формула

$$\neg\neg\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})\rightarrow\forall\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}).$$

Таким образом, действительно, для любой формулы $\mathfrak{A}$ формализма (3) формула $\neg\neg\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}$ выводима в (3).

Замечание. Обратим внимание, что это утверждение по своему характеру отличается от утверждений о том, что из основных схем формализма (3) выводимы те или иные схемы формул. Выводимая схема формул остается применимой и в том случае, когда к формализму добавляются какие-либо новые символы, в то время как наше утверждение о выводимости формул вида $\neg\neg\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}$ существенным образом связано со способом построения рассматриваемых формул $\mathfrak{A}$ и перестает быть применимым, если мы, например, включим в формализм (3) символ дизъюнкции.

Итак, наше утверждение, что любая не содержащая формульных переменных, дизъюнкций и кванторов существования формула системы (Z), выводимая в этом формализме, выводима также и в (3), доказано. Тем самым получается, что для формул системы (Z), не содержащих формульных переменных, замена всякого выражения $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ выражением $\neg(\neg\mathfrak{A}\,\&\,\neg\mathfrak{B})$ и всякого выражения $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ выражением $\neg\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ представляет собой некоторого рода *перевод*, при котором каждой выводимой в (Z) формуле в качестве ее перевода соответствует некоторая формула, выводимая в (3).

Формализм (3) образует (об этом мы здесь только упомянем) подсистему того формализма, который был предложен Гейтингом в качестве формализации интуиционистской арифметики [1]). Правда, в формализме Гейтинга отрицание фигурирует в качестве основной операции. Однако в нем выводима эквивалентность

$$\neg A\sim(A\rightarrow 1+1=1),$$

так что и здесь отрицание может быть выражено через импликацию.

Возможность такого перевода обычного арифметического формализма (если ограничиться формулами без формульных переменных) в формализм Гейтинга, при котором выводимые формулы

[1]) Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. — Sitzungsber. preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, II.

будут переходить в выводимые, была установлена Гёделем [1]). Наше рассуждение по методу совпадает с рассуждением Гёделя.

Из полученного результата, в частности, вытекает, что противоречие в системе (Z) дало бы также себя знать и в виде противоречия в системе (3). Действительно, в случае выводимости в системе (Z) двух формул $\mathfrak{A}$ и $\neg\mathfrak{A}$ в (Z) была бы выводима формула $0'=0$, а тогда эта формула должна была бы выводиться и в системе (3).

Таким образом, оказывается, что трудность финитного доказательства непротиворечивости формализма всей арифметики определяется вовсе не тем, что в этом формализме содержится формализованная версия закона исключенного третьего. Препятствия возникают уже при попытке финитно доказать непротиворечивость (3). В самом деле, рассуждение, с помощью которого мы доказали, что наличие противоречия в (Z) имело бы в качестве следствия противоречие в (3), было вполне финитным.

С другой стороны, если мы стоим на содержательной точке зрения, то формальные выводы в (3) должны истолковываться как изображения правильных с содержательной точки зрения рассуждений, и потому ввиду связи, установленной между формализмами (Z) и (3), непротиворечивость системы (Z) становится для нас очевидной.

Главная проблема содержательного истолкования формализма (3) заключается в истолковании импликации. Пожалуй, наиболее просто приходящая в голову интерпретация импликации $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ как гипотетического предложения «если $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$» оказывается здесь неподходящей, поскольку фигурирующие в (3) импликации, вообще говоря, не выражают зависимости от переменных условий; и, действительно, по большей части мы имеем дело с такими импликациями $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$, у которых посылка $\mathfrak{A}$ не содержит свободных переменных. Истолкование «не $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$», принятое в логистике, здесь не подходит, так как оно пригодно лишь в том случае, когда в основе рассмотрения лежит закон исключенного третьего. (Так, уже истолкование импликации $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}$ дало бы нам закон «не $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}$».)

Можно было бы попытаться дать для импликации дедуктивное (beweistechnische) истолкование — вроде того, чтобы каждую

[1]) Gödel K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. — Ergebn. eines math. Kolloq., 1932. Такое же открытие вскоре после этого было сделано и Генценом. Сходное утверждение содержится уже в опубликованной в 1925 г. работе: Колмогоров А. Н. О принципе tertium non datur. — Матем. сб., 1925, **32**, с. 646—667. Как указывает Гёдель, в исчислении высказываний возможность перевода обычного формализма в некоторый подформализм гейтинговского формализма получается из одного замечания В. И. Гливенко; см. его работу: Glivenko V. Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer. — Acad. roy. de Belgique, Bull. Cl. Sci., Ser. 5, 1929, **15**.

импликацию $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ рассматривать как некоторую *схему доказательства*, с помощью которой мы констатируем возможность получения формулы $\mathfrak{B}$ из формулы $\mathfrak{A}$. Однако такой подход сопряжен с многими неприятностями. Во-первых, при истолковании формул вида $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}$ получается несогласованность, состоящая в том, что, с одной стороны, посылка этой импликации должна истолковываться неформально, в то время как, с другой стороны, в силу дедуктивного подхода эта посылка должна рассматриваться как формула, потому что у нас нет никаких правил для вывода следствий из неформальных предложений. А во-вторых, если бы мы попытались доказать на основе такого истолкования непротиворечивость нашего формализма, то, помимо всего прочего, мы должны были бы показать, что схема заключения

$$\frac{\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

всегда от истинных (в смысле этого истолкования) формул ведет к истинным. Для этого мы должны были бы показать, что если формула $\mathfrak{S}$ истинна, а из $\mathfrak{S}$ по нашим правилам выводима формула $\mathfrak{T}$, то $\mathfrak{T}$ тоже истинна. Если в качестве $\mathfrak{S}$ взять какую-нибудь истинную формулу, например $0=0$, то дело сведется к тому, чтобы показать, что каждая выводимая по нашим правилам формула является истинной. Но в этом как раз и заключается наша задача доказательства непротиворечивости.

Этих трудностей можно избежать, последовательно интерпретируя импликацию в содержательном смысле, так, чтобы импликация $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ выражала возможность приходить на основании содержания формулы $\mathfrak{A}$ к констатации содержания формулы $\mathfrak{B}$ [1]).

Такой взгляд на импликацию находит, в частности, применение при брауэровском понимании импликации $\mathfrak{A} \to 0' = 0$ как «абсурдности». Такая неформальная интерпретация логического формализма в сочетании с общеупотребительным пониманием арифметических символов дает нам некоторую содержательную верификацию для аксиом и схем системы (3). Однако, став на путь такого содержательного понимания следования, мы совершенно отходим от гильбертовских идей теории доказательств, и потому напрашивается вопрос, не можем ли мы при доказательстве непротиворечивости системы (Z) избежать этого содержательного понимания, даже если мы и выходим за рамки финитного рассмотрения, допуская (хотя бы в интерпретированном виде) в качестве посылок предложения типа всеобщности.

[1]) Это истолкование близко к истолкованию импликации $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, данному Колмогоровым в рамках его интерпретации гейтинговского исчисления высказываний как исчисления *задач*: «в предположении, что дано решение задачи $\mathfrak{A}$, решить задачу $\mathfrak{B}$» (см. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. — Math. Z., 1932, 35, № 1).

Кроме того, находясь на позициях теории доказательств, мы будем ощущать некоторую неудовлетворенность, если для системы (Z) у нас будет только такое доказательство непротиворечивости, которое в сущности основывается на некотором истолковании какого-то формализма. Рассматривая формализм рекурсивной арифметики и устанавливая его непротиворечивость, мы также не удовлетворились одной лишь ссылкой на возможность его финитного истолкования, а еще убедились в этом с помощью специально разработанного метода возвратного переноса подстановок в исходные формулы и дополнительного рассмотрения, проведенного для схемы индукции. Так, и для формализма (Z) тоже желательно было бы найти такое доказательство его непротиворечивости, которое основывалось бы на прямом рассмотрении этого формализма.

Обоим указанным требованиям удовлетворяет доказательство, непротиворечивости формализма (Z), которое недавно было дано Герхардом Генценом [1]). Мы изложим здесь это доказательство без подробностей, а более детально остановимся только на одном существенно используемом в нем способе рассуждений из канторовской теории множеств, представляющем собой как раз ту часть доказательства, которая не укладывается в рамки формализма (Z_μ).

в) Трансфинитная индукция одного частного вида и ее применение в генценовском доказательстве непротиворечивости системы (Z). До сих пор в качестве средств, выводящих при доказательствах непротиворечивости за рамки формализма (Z_μ), нам

[1]) Gentzen G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. — Math. Ann., 1936, 112, № 4; Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. — Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, 1938, № 4. (Русские переводы обеих работ имеются в сб. «Математическая теория логического вывода». — М.: Физматгиз, 1967, с. 77—153 и 154—190. — Прим. перев.) Во второй работе содержится методически улучшенное и более элементарное изложение этого доказательства. С другой стороны, материал, содержащийся в первой работе, является более обширным, так как, кроме непротиворечивости рассматриваемого формализма, там устанавливается еще и некоторое свойство редуцируемости любой выводимой формулы этого формализма.

Добавление при втором издании. Опубликованному в Math. Ann. генценовскому доказательству непротиворечивости предшествовало еще одно, более раннее доказательство, которое в свое время по техническим причинам — или, как бы мы сегодня, пожалуй, сказали: необоснованно — было отклонено и вследствие этого заменено Генценом доказательством, опубликованным в Math. Ann. Это более раннее доказательство, гранки которого сохранились, содержится в английском издании собрания сочинений Генцена, вскоре выходящем в свет под редакцией Манфреда Сабо. Несколько упрощенное изложение этого доказательства содержится в работе Бернайса: Bernays P. On the original Gentzen consistency proof for number theory. — In: Intuitionism and Proof Theory: Proceedings of the Summer Conference at Buffalo, N. Y. Amsterdam: North-Holland, 1968.

были известны лишь различные определения истинности. И в только что рассмотренном доказательстве непротиворечивости системы (Z), опирающемся на определенное истолкование системы (3), выход за пределы формализма (Z_μ) тоже происходит за счет того, что формализация этого истолкования формализма (3) сводится к некоторому определению истинности.

В генценовском доказательстве непротиворечивости формализма (Z) появляется другой тип выхода за рамки (Z_μ). Этот выход происходит в связи с обоснованием одного конкретного обобщения принципа полной индукции.

Речь идет об одном специальном способе умозаключений, применяемом в канторовской теории множеств, который называется трансфинитной индукцией, потому что он представляет собой распространение обычного принципа индукции для конечных чисел на «трансфинитные» порядковые числа. Принимая во внимание наше стремление подчеркивать методические различия, это название следует признать вводящим в заблуждение. На самом деле немалую часть теории трансфинитных порядковых чисел можно рассматривать вполне финитными методами.

Так, в частности, тому специальному случаю принципа трансфинитной индукции, который мы в дальнейшем будем рассматривать, можно придать вид некоторого логико-арифметического принципа.

Чтобы выразить этот принцип в нужном нам виде, мы определим рекурсивным образом некоторые, зависящие от числа n отношения порядка

$$a \underset{n}{\prec} b.$$

Отношение $a \underset{0}{\prec} b$ по определению будет означать обычное отношение порядка $a < b$.

Отношение $a \underset{n+1}{\prec} b$ по определению будет означать, что $b \neq 0$ и что либо $a = 0$, либо у числа b имеется такой простой делитель $\wp_f$, который в разложение b входит в степени большей, чем в разложение a, и номер которого f в отношении $\underset{n}{\prec}$ находится после номеров всех тех отличных от $\wp_f$ простых чисел, которые в разложения a и b входят в различных степенях.

(Отношение $a \underset{n}{\prec} b$ словами будет читаться следующим образом: «число a предшествует в порядке $\underset{n}{\prec}$ числу b», или «число a в порядке $\underset{n}{\prec}$ находится до числа b», или «число b в порядке $\underset{n}{\prec}$ находится после числа a».)

Формально данное определение может быть изображено с использованием переменной n следующим образом:

$$a \underset{0}{\prec} b \sim a < b,$$

$$a \underset{n'}{\prec} b \sim b \neq 0 \,\&\, (a = 0 \vee \exists x\,(x \leqslant b \,\&\, \nu(a,\ x) < \nu(b,\ x) \,\&\, \forall z\,(z \leqslant \max(a,\ b) \,\&\, x \underset{n}{\prec} z \to \nu(a,\ z) = \nu(b,\ z)))).$$

В последней эквивалентности, согласно установленному ранее [1]), кванторы могут быть исключены, так что выражение, стоящее в правой части, может быть переведено в некоторый рекурсивный предикат. Отсюда видно, что отношение $a \underset{n}{\prec} b$ представляет собой рекурсивный предикат, зависящий от a, b и n. Далее, легко убедиться, что при любом фиксированном n отношение $a \underset{n}{\prec} b$ обладает свойствами отношения порядка, которые выражаются посредством формул [2])

$$(1) \qquad \begin{cases} \neg(a \underset{n}{\prec} a), \\ a \underset{n}{\prec} b \,\&\, b \underset{n}{\prec} c \to a \underset{n}{\prec} c, \end{cases}$$

и что, кроме того, имеет место альтернатива

$$(2) \qquad a = b \vee a \underset{n}{\prec} b \vee b \underset{n}{\prec} a.$$

Затем, как и для обычного отношения порядка между числами, имеют место следующие соотношения:

$$c \neq 0 \,\&\, a \underset{n}{\prec} b \to a \cdot c \underset{n}{\prec} b \cdot c,$$

$$a \neq 0 \,\&\, c \neq 0 \,\&\, c \neq 0' \to a \underset{n}{\prec} a \cdot c.$$

С другой стороны, если c отлично от 0, а a и b взаимно просты с c и если $a \underset{n}{\prec} c$ и $b \underset{n}{\prec} c$, то $a \cdot b \underset{n}{\prec} c$.

Кроме того, имеет место следующее, характеристическое для взаимосвязи между отношениями $\underset{n}{\prec}$ и $\underset{n+1}{\prec}$ соотношение

$$(3) \qquad \wp_k \underset{n+1}{\prec} \wp_l \sim k \underset{n}{\prec} l.$$

В каждом из порядков $\underset{n}{\prec}$ число 0 предшествует всем остальным, а вслед за ним идет 1. Поэтому простое число $\wp_0$, т. е. 2,

---

[1]) См. с. 273—274.

[2]) В настоящем рассмотрении мы используем эти формулы только в качестве сокращений для утверждений, которые сами по себе мыслятся как неформальные.

предшествует, согласно (3), всем остальным простым числам и следующее за ним простое число есть 3. Отсюда в свою очередь получаем, что в каждом из этих порядков после 1 непосредственно следует число 2.

К перечисленным элементарным свойствам отношений $\underset{n}{\prec}$ добавляется еще одно, которое, говоря на теоретико-множественном языке, характеризует эти отношения порядка как полные порядки. Воспользовавшись принципом «tertium non datur» для целых чисел, это свойство можно выразить при помощи некоторого обобщения принципа наименьшего числа, которое, подобно этому принципу для отношения $a<b$, изображается формулой

$$A(a) \to \exists x (A(x) \,\&\, \forall y (A(y) \to x = y \vee x \underset{n}{\prec} y)).$$

Преобразуя эту формулу с использованием альтернативы (2) и подстановки формулы $\neg A(c)$ вместо формульной переменной $A(c)$, мы получаем следующую дедуктивно равную ей формулу:

$$\forall x (\forall y (y \underset{n}{\prec} x \to A(y)) \to A(x)) \to A(a).$$

Таким образом, последняя формула изображает некий принцип, который, если принять «tertium non datur», равносилен принципу наименьшего числа. Содержание его может быть выражено следующим образом:

«Если какой-либо предикат выполняется для числа m всякий раз, когда он выполняется для любого l такого, что $l \underset{n}{\prec} m$, то этот предикат выполняется для любого числа». При этом условие, что предикат выполняется для всякого l такого, что $l \underset{n}{\prec} m$, следует считать соблюдающимся при $m=0$, так что в условии этого принципа содержится требование, чтобы рассматриваемый предикат выполнялся для числа 0. При содержательном изложении этого принципа целесообразно это требование формулировать специально.

Вместо того чтобы изображать этот принцип формулой, его можно изобразить с помощью схемы

$$\frac{\forall x (x \underset{n}{\prec} c \to \mathfrak{A}(x)) \to \mathfrak{A}(c)}{\mathfrak{A}(a)}.$$

Эта схема при $n=0$ имеет вид

$$\frac{\forall x (x < c \to \mathfrak{A}(x)) \to \mathfrak{A}(c)}{\mathfrak{A}(a)}.$$

Последняя в силу свойств отношения $<$, а также ввиду того, что всякое число, за исключением 0, имеет непосредственно ему предшествующее, равносильна принципу полной индукции, причем эта равносильность получается без использования принципа «tertium non datur».

[Формально упомянутая схема получается из схемы индукции средствами исчисления предикатов с использованием формул

$$a < n' \sim (a < n \vee a = n), \quad \neg(a<0), \quad (J_2) \quad \text{и} \quad a < a',$$

а обратный переход может быть произведен с помощью формул

$$a < a', \quad a \neq 0 \to a = \delta(a)' \quad \text{и} \quad (J_2).]$$

Изображаемый схемой

$$\frac{\forall x (x \underset{n}{\prec} c \to \mathfrak{A}(x)) \to \mathfrak{A}(c)}{\mathfrak{A}(a)}$$

способ умозаключений, распространенный на произвольные числа n, и представляет собой тот частный случай трансфинитной индукции, который мы будем рассматривать.

Мы изучим вопрос о том, как можно убедиться в приемлемости этого способа рассуждений, который мы будем называть обобщенным принципом индукции для порядков $\underset{n}{\prec}$. При этом отступление от нашего прежнего способа ведения финитных доказательств будет заключаться лишь в том, что в качестве посылок утверждений мы будем допускать предложения типа всеобщности [1]).

Однако всякий раз — и мы это особо подчеркнем — в качестве посылок будут фигурировать только такие предложения типа всеобщности, которые впоследствии на основании результата нашего рассуждения окажутся истинными. Так, например, уже в самом этом правиле вывода всеобщее предложение $\forall x (x \underset{n}{\prec} c \to \mathfrak{A}(x))$ встречается в качестве посылки предложения, формулирующего предположение. В каждом случае применения этого правила получается, что предикат $\mathfrak{A}$ выполняется для произвольного числа. Тем самым устанавливается и истинность этой посылки.

Ход нашего доказательства будет таков: при $n=0$ этот принцип, как уже было сказано, совпадает с обычным принципом полной индукции. Поэтому нам будет достаточно найти способ, позволяющий в предположении справедливости обобщенного принципа индукции для порядка $\underset{n}{\prec}$ доказать справедливость его для порядка $\underset{n+1}{\prec}$.

[1]) См. с. 427.

Итак, предположим, что справедливость обобщенного принципа индукции для порядка $\underset{n}{\prec}$ уже установлена. Пусть нам дан предикат $\mathfrak{A}(c)$, выполняющийся для числа 0 и такой, что мы в состоянии из того, что он выполняется для любого числа, предшествующего числу $\mathfrak{k}$ в порядке $\underset{n+1}{\prec}$, заключить, что он выполняется и для самого $\mathfrak{k}$. Требуется убедиться в том, что этот предикат выполняется для любого числа.

С этой целью мы сначала рассмотрим следующий, построенный по предикату $\mathfrak{A}(c)$ числовой предикат $\mathfrak{B}(l)$: «каково бы ни было число m, не имеющее простых делителей, предшествующих числу $\wp_l$ в порядке $\underset{n+1}{\prec}$; если предикат $\mathfrak{A}(c)$ выполняется для любого числа, предшествующего числу m в порядке $\underset{n+1}{\prec}$, то он выполняется и для любого числа, предшествующего числу $m\cdot\wp_l$ в порядке $\underset{n+1}{\prec}$».

Ввиду соблюдения эквивалентности (3) условие отсутствия у m простых делителей, предшествующих в $\underset{n+1}{\prec}$ числу $\wp_l$, т. е. то, что $\wp_l$ в порядке $\underset{n+1}{\prec}$ является наименьшим простым делителем числа $m\cdot\wp_l$, равносильно условию, что для любого отличного от $\wp_l$ простого делителя $\wp_k$ числа m выполняется соотношение $l \underset{n}{\prec} k$.

Это условие изображается формулой

$$\forall x\,(x<m \,\&\, \mathfrak{v}(m,\ x)\neq 0 \,\&\, x\neq l \to l \underset{n}{\prec} x) \,\&\, m\neq 0,$$

которая ввиду наличия члена $x<m$ может быть переведена в некоторую рекурсивную формулу $\mathfrak{C}_n(m, l)$, вид которой, кстати, не зависит от предиката $\mathfrak{A}(c)$.

Тем самым, для предиката $\mathfrak{B}(l)$ мы получаем изображение в виде формулы

$$\forall x(\mathfrak{C}_n(x,\ l) \,\&\, \forall y\,(y \underset{n+1}{\prec} x \to \mathfrak{A}(y)) \to \forall y\,(y \underset{n+1}{\prec} x\cdot\wp_l \to \mathfrak{A}(y))).$$

Чтобы иметь возможность выразить высказывание $\mathfrak{B}(l)$ более кратко, мы, фиксируя предикат $\mathfrak{A}(c)$ и порядок $\underset{n+1}{\prec}$, назовем число m достижимым, если для любого предшествующего этому числу в порядке $\underset{n+1}{\prec}$ числа k, а тем самым, ввиду нашего предположения относительно $\mathfrak{A}(c)$, и для самого числа m выполняется высказывание $\mathfrak{A}(k)$. Таким образом, достижимость m выражается формулой

$$\forall y\,(y \underset{n+1}{\prec} m \to \mathfrak{A}(y)),$$

а также формулой

$$\forall y\,(y \underset{n+1}{\prec} m \vee y=m \to \mathfrak{A}(y)).$$

В терминах достижимости высказывание $\mathfrak{B}(l)$ может быть сформулировано следующим образом: «каково бы ни было число m, из того, что m достижимо и простое число $\wp_l$ является наименьшим в порядке $\underset{n+1}{\prec}$ простым делителем числа $m\cdot\wp_l$, следует, что число $m\cdot\wp_l$ также достижимо».

Нам потребуется следующая

Лемма. *Если число q разлагается на простые множители $\wp_k$, для которых имеет место $\mathfrak{B}(k)$, и если m — достижимое число, не содержащее простых множителей, предшествующих в порядке $\underset{n+1}{\prec}$ какому-либо из простых делителей числа q, то число $m\cdot q$ тоже достижимо.*

Действительно, пусть $q=\wp_{k_1}\cdot\ldots\cdot\wp_{k_j}$, где очередность следования простых множителей $\wp_{k_i}$ выбрана так, что $\wp_{k_i}$ $(i=1, \ldots, j)$ является «наибольшим» (в порядке $\underset{n+1}{\prec}$) из простых чисел $\wp_{k_i}$, $\wp_{k_{i+1}}, \ldots, \wp_{k_j}$. Положим

$$m_0=m,$$
$$m_i=m_{i-1}\cdot\wp_{k_i} \qquad (i=1, \ldots, j).$$

Тогда $m_j=m\cdot q$, а кроме того, имеют место высказывания $\mathfrak{B}(k_1), \ldots, \mathfrak{B}(k_j)$ и для $i=1, \ldots, j$ число $\wp_{k_i}$ является «наименьшим» (в порядке $\underset{n+1}{\prec}$) простым делителем числа m_i. Поэтому для $i=1, \ldots, j$ из достижимости m_{i-1} следует достижимость m_i. Так как, по предположению, число m_0, т. е. m, достижимо, то достижимо и число m_j, т. е. $m\cdot q$.

Применив эту лемму к случаю, когда $m=1$, мы получим следующий результат:

Если предикат $\mathfrak{B}(l)$ выполняется для любого числа, то любое число достижимо, а потому предикат $\mathfrak{A}(c)$ тоже выполняется для любого числа.

Поэтому, для того чтобы доказать, что предикат $\mathfrak{A}(n)$ выполняется для любого числа n, нам достаточно доказать, что для

любого l имеет место высказывание $\mathfrak{B}(l)$. А это мы сделаем с помощью обобщенного принципа индукции для порядка $\prec_{\mathfrak{n}}$; здесь мы предполагаем, что справедливость этого принципа для $\prec_{\mathfrak{n}}$ уже установлена. Мы должны показать, что имеет место $\mathfrak{B}(0)$ и что для числа l, отличного от нуля, предикат $\mathfrak{B}(c)$ имеет место всякий раз, когда он имеет место для любого числа, предшествующего l в порядке $\prec_{\mathfrak{n}}$.

Так как $\wp_0$ представляет собой число 2, то высказывание $\mathfrak{B}(0)$ утверждает, что для любого отличного от 0 достижимого числа m число $2 \cdot m$ тоже достижимо.

Это вытекает из того, что в порядке $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ простое число 2 предшествует всем остальным числам, и потому для любого отличного от 0 числа m число $2 \cdot m$ непосредственно следует за m.

Второе утверждение, которое мы должны доказать, гласит следующее: пусть l — какое-либо число, отличное от 0, и пусть предикат $\mathfrak{B}(c)$ выполняется для любого числа, предшествующего l в порядке $\prec_{\mathfrak{n}}$. Пусть m — такое отличное от 0 число, которое не имеет простых делителей, предшествующих в порядке $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ простому числу $\wp_l$, так что $\wp_l$ является наименьшим в порядке $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ простым делителем числа $m \cdot \wp_l$, и пусть m достижимо. Тогда $m \cdot \wp_l$ тоже достижимо.

В этом можно убедиться следующим образом. Пусть r — какое-либо число, для которого имеет место $r \prec_{\mathfrak{n}+1} m \cdot \wp_l$. Если это число совпадает с числом m или предшествует ему в порядке $\prec_{\mathfrak{n}+1}$, то, согласно нашему допущению, имеет место высказывание $\mathfrak{A}(r)$. Если же $m \prec_{\mathfrak{n}+1} r$ и $r \prec_{\mathfrak{n}+1} m \cdot \wp_l$, то на основе предположенного нами относительно m и определения порядка $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ число r должно иметь вид $m \cdot q$, где q — число, отличное от 0 и от 1, которое имеет только такие простые делители, которые предшествуют в порядке $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ простому числу $\wp_l$. Для каждого из этих простых делителей $\wp_k$ имеет место $\mathfrak{B}(k)$, а число m не имеет простых множителей, которые предшествовали бы в порядке $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ одному из простых делителей числа q. Таким образом, условия применимости нашей леммы выполнены, и из этого следует, что $m \cdot q$, т. е. r, является достижимым числом, так что имеет место

высказывание $\mathfrak{A}(r)$. Следовательно, и число $m \cdot \wp_l$ является достижимым.

Таким образом, мы получили сведение обобщенного принципа индукции для порядка $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ к принципу для порядка $\prec_{\mathfrak{n}}$, и тем самым, ввиду справедливости этого принципа для порядка $\prec_0$, получается, что он справедлив для любого порядка $\prec_{\mathfrak{n}}$.

А теперь посмотрим, как обстоит дело с возможностью формализации этого доказательства в формализме (Z_μ). Рассуждение, сводящее принцип индукции для порядка $\prec_{\mathfrak{n}+1}$ к этому принципу для порядка $\prec_{\mathfrak{n}}$, как легко убедиться, может быть формализовано в системе (Z_μ). При заданных цифре $\mathfrak{n}$ и формуле $\mathfrak{A}(c)$ это дает нам вывод в (Z_μ) формулы

$$[\forall x(\forall y(y \prec_{\mathfrak{n}} x \to \mathfrak{B}(y)) \to \mathfrak{B}(x)) \to \forall x \mathfrak{B}(x)] \to$$
$$[\forall x(\forall y(y \prec_{\mathfrak{n}+1} x \to \mathfrak{A}(y)) \to \mathfrak{A}(x)) \to \forall x \mathfrak{A}(x)].$$

Здесь $\mathfrak{B}(l)$ представляет собой формулу

$$\forall x\{\dot{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{n}}(x, l) \,\&\, \forall y(y \prec_{\mathfrak{n}+1} x \to \mathfrak{A}(y)) \to \forall y(y \prec_{\mathfrak{n}+1} x \cdot \wp_l \to \mathfrak{A}(y))\},$$

где $\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}(m, l)$ — ранее так уже обозначавшаяся рекурсивная, не зависящая от формулы $\mathfrak{A}(c)$ формула.

Если мы обозначим выражение $\mathfrak{B}(l)$, подчеркивая его зависимость от формулы $\mathfrak{A}(c)$ и цифры $\mathfrak{n}$, посредством $\mathfrak{B}_x(l, \mathfrak{A}(x), \mathfrak{n})$, а формулу

$$\forall x(\forall y(y \prec_{\mathfrak{n}} x \to \mathfrak{A}(y)) \to \mathfrak{A}(x)) \to \forall x \mathfrak{A}(x)$$

посредством $\mathrm{Ind}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{n})$, то упомянутая выше выводимая формула изобразится в следующем сокращенно записанном виде:

$$\mathrm{Ind}_x(\mathfrak{B}_y(x, \mathfrak{A}(y), \mathfrak{n}), \mathfrak{n}) \to \mathrm{Ind}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{n}+1).$$

Взяв в качестве $\mathfrak{A}(c)$ формулу $A(c)$, мы с помощью этой импликации можем из формулы $\mathrm{Ind}_x(A(x), \mathfrak{n})$ вывести $\mathrm{Ind}_x(A(x), \mathfrak{n}+1)$.

Так как, кроме того, в (Z_μ) выводима формула $\mathrm{Ind}(A(x), 0)$, то отсюда для любой цифры $\mathfrak{n}$ получается некоторый вывод формулы $\mathrm{Ind}_x(A(x), \mathfrak{n})$ в формализме (Z_μ).

Однако утверждение, что обобщенный принцип индукции справедлив для любого из порядков $\prec_{\mathfrak{n}}$, этим все-таки еще не формализуется. Для этого нужно, чтобы на месте цифры $\mathfrak{n}$ стояла свободная или связанная числовая переменная.

Правда, формула

$$\mathrm{Ind}_x(\mathfrak{B}_y(x,\ A(y),\ n),\ n) \to \mathrm{Ind}_x(A(x),\ n')$$

выводима с переменной n. И все-таки эта формула вместе с формулой $\mathrm{Ind}_x(A(x),\ 0)$ еще не позволяет применить в рамках формализма (Z_μ) схему индукции. Такая возможность имелась бы в том случае, если бы в нашем распоряжении были связанные формульные переменные. Тогда мы смогли бы вывести формулу [1])

$$\forall U\ \mathrm{Ind}_x(U(x),\ n) \to \forall U\ \mathrm{Ind}_x(U(x),\ n').$$

Другая возможность заключается во введении некоторого предикатного символа (в расширенном смысле этого слова) $\Gamma_z(c,\ A(z),\ n,\ k)$ с помощью следующих рекурсивных эквивалентностей:

$$\Gamma_z(c,\ A(z),\ n,\ 0) \sim A(c),$$
$$\Gamma_z(c,\ A(z),\ n,\ k') \sim \mathfrak{B}_y(c,\ \Gamma_z(y,\ A(z),\ n,\ k),\ n \dot{-} k').$$

Вторая из этих эквивалентностей дает нам формулу

$$l < n \to (\Gamma_z(c,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l) \sim \mathfrak{B}_y(c,\ \Gamma_z(y,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l'),\ l)),$$

из которой с помощью формулы

$$\mathrm{Ind}_x(\mathfrak{B}_y(x,\ A(y),\ n),\ n) \to \mathrm{Ind}_x(A(x),\ n'),$$

куда вместо n нужно подставить l, а вместо формульной переменной $A(a)$ — формулу

$$\Gamma_z(a,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l'),$$

мы получаем формулу

$$l < n \to [\mathrm{Ind}_x(\Gamma_z(x,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l),\ l) \to \mathrm{Ind}_x(\Gamma_z(x,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l'),\ l')],$$

а далее при помощи средств исчисления высказываний с использованием формул

$$l < n \sim l' \leqslant n \quad \text{и} \quad l < n \to l \leqslant n$$

получаем формулу

$$[l \leqslant n \to \mathrm{Ind}_x(\Gamma_z(x,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l),\ l)] \to [l' \leqslant n \to \mathrm{Ind}_x(\Gamma_z(x,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l'),\ l')].$$

[1]) При этом применение связанных формульных переменных можно было бы ограничить таким образом, чтобы вместо свободных формульных переменных допускались подстановки только таких формул, которые сами связанных формульных переменных не содержат.

Если к этой формуле добавить формулу

$$0 \leqslant n \to \mathrm{Ind}_x(\Gamma_z(x,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} 0),\ 0),$$

получающуюся из формулы $\mathrm{Ind}_x(A(x),\ 0)$, то можно будет применить схему индукции. Эта схема даст нам формулу

$$l \leqslant n \to \mathrm{Ind}_x(\Gamma_z(x,\ A(z),\ n,\ n \dot{-} l),\ l)$$

и, подставив в нее n вместо l, мы с помощью формул $n \leqslant n$, $n \dot{-} n = 0$ и $\Gamma_z(c,\ A(z),\ n,\ 0) \sim A(c)$ получим формулу

$$\mathrm{Ind}_x(A(x),\ n),$$

которая дает формальное изображение обобщенного принципа индукции относительно любого порядка $\underset{n}{\prec}$.

Этой формализации можно будет придать несколько более элементарный вид, если мы удовлетворимся тем, что вместо выводимости формулы $\mathrm{Ind}_x(A(x),\ n)$ с формульной переменной $A(c)$ получим только выводимость формулы $\mathrm{Ind}_x(\mathfrak{A}(x),\ n)$ для каждой отдельно взятой формулы $\mathfrak{A}(c)$, не содержащей формульных переменных. В этом случае для каждой отдельной формулы $\mathfrak{A}(c)$ (без формульных переменных), где $a_1, \ldots, a_\tau$ — возможно фигурирующие в ней отличные от c свободные индивидные переменные, мы вместо символа $\Gamma_z(c,\ A(z),\ n,\ k)$ определим некоторый предикатный символ

$$\mathfrak{Q}(c,\ a_1,\ \ldots,\ a_\tau,\ n,\ k),$$

который введем аналогично символу Γ_z с помощью некоторых рекурсивных эквивалентностей. При этом, как и в определениях рекурсивных функций, параметры $a_1, \ldots, a_\tau$ можно будет редуцировать в один-единственный, в качестве которого мы возьмем переменную a.

Для формулы $\mathfrak{A}(c)$, которая кроме c, содержит переменную a и никаких других свободных переменных не содержит, эти рекурсивные эквивалентности, с помощью которых вводится соответствующий предикатный символ $\mathfrak{Q}(c,\ a,\ n,\ k)$ с параметром a, записываются следующим образом:

$$\mathfrak{Q}(c,\ a,\ n,\ 0) \sim \mathfrak{A}(c),$$
$$\mathfrak{Q}(c,\ a,\ n,\ k') \sim \mathfrak{B}_y(c,\ \mathfrak{Q}(y,\ a,\ n,\ k),\ n \dot{-} k').$$

[Если формула $\mathfrak{A}(c)$ других свободных переменных кроме c не содержит, то вводимый предикатный символ будет содержать только три аргумента c, n и k.]

Здесь $\mathfrak{B}_y(c,\ A(y),\ n)$ представляет собой формулу

$$\forall x\{\mathfrak{C}_n(x,\ c) \,\&\, \forall y(y \underset{n+1}{\prec} x \to A(y)) \to \forall y(y \underset{n+1}{\prec} x \cdot \mathfrak{p}_c \to A(y))\};$$

поэтому выражение $\mathfrak{B}_y(c, \mathfrak{Q}(y, a, n, k), n \dot{-} k')$ имеет вид

$$\forall x\{\mathfrak{R}_1(x, c, n, k) \& \forall y(\mathfrak{R}_2(x, y, n, k) \to \mathfrak{Q}(y, a, n, k)) \to \forall y(\mathfrak{R}_2(x \cdot \wp_c, y, n, k) \to \mathfrak{Q}(y, a, n, k))\},$$

где $\mathfrak{R}_1(a, b, n, k)$ и $\mathfrak{R}_2(a, b, n, k)$ — некоторые рекурсивные формулы, и может быть преобразовано в формулу

$$\forall x\{\neg\mathfrak{R}_1(x, c, n, k) \vee \exists y(\mathfrak{R}_2(x, y, n, k) \& \neg\mathfrak{Q}(y, a, n, k)) \vee \forall y(\neg\mathfrak{R}_2(x \cdot \wp_c, y, n, k) \vee \mathfrak{Q}(y, a, n, k))\}.$$

Таким образом, рекурсивное определение символа $\mathfrak{Q}(c, a, n, k)$ аналогично тому, с помощью которого мы ввели символ $\mathsf{M}(n, k)$ при определении истинности для формализма (Z) [1]).

Относительно введения символа $\mathsf{M}(n, k)$ мы выяснили, что оно выводит как за пределы формализма (Z), так и за пределы (Z_μ) [2]). В связи с этим в высшей степени правдоподобно, что приведенная выше схема, определяющая предикатный символ $\mathfrak{Q}(c, a, n, k)$, окажется средством, не укладывающимся в рамки формализма (Z_μ), т. е., вообще говоря, не будет заменяться явными определениями в (Z_μ).

То, что этот способ введения предикатных символов, а тем самым и доказательство рассмотренного частного случая трансфинитной индукции, выводит за пределы формализма (Z_μ), следует из того, что применение этого способа умозаключений вместе с рассуждениями, которые формализуются в (Z_μ), позволяет провести генценовское доказательство непротиворечивости формализма (Z) [3]).

Мы приведем здесь — хотя бы в схематическом виде — ход этого доказательства, причем в новой его редакции [4]). С этой целью к проведенному рассмотрению данного частного случая трансфинитной индукции мы добавим еще одно дополнительное рассуждение.

Каждый из порядков $\prec$, если отвлечься от конкретного устройства упорядочиваемых им элементов (в данном случае являющихся числами), по терминологии Кантора, изображает некоторый порядковый тип, причем даже некоторое порядковое число, так как все эти порядки являются полными. Эти порядковые типы мы можем сделать более наглядными, если вместо чисел в качестве упорядочиваемых элементов возьмем некоторые выражения из формализма канторовской теории второго числового класса.

Эти выражения вместе с упорядочивающим их отношением, которое мы будем обозначать обычными знаками $<$ и $>$ для меньше и больше, мы получим с помощью некоторого рекурсивного приема: Исходным, а заодно и наименьшим по этому порядку выражением является символ 0. Если $a_1, \ldots, a_r$ — уже полученные выражения (в конечном числе r), удовлетворяющие условию $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r$ (знак равенства здесь означает совпадение по написанию), то из них может быть построено выражение

$$\omega^{a_1} + \ldots + \omega^{a_r}.$$

Число r при этом может быть равно и 1.

Между двумя такими выражениями

$$\omega^{a_1} + \ldots + \omega^{a_r} \quad \text{и} \quad \omega^{b_1} + \ldots + \omega^{b_s}$$

отношение порядка

$$\omega^{a_1} + \ldots + \omega^{a_r} < \omega^{b_1} + \ldots + \omega^{b_s}$$

вводится таким образом, что для соблюдения его должен иметь место один из следующих двух случаев:

1) $a_j = b_j$ для $j = 1, \ldots, r$ и число r меньше s;

2) для некоторого i из списка $1, \ldots, r$ имеет место $a_i < b_i$, причем, если $i \neq 1$, то $a_j = b_j$ для $j = 1, \ldots, i-1$.

Полученные описанным образом выражения мы будем называть 0-ω-фигурами. По любому заданному выражению всегда можно выяснить, является ли оно 0-ω-фигурой, и по любым двум отличным друг от друга 0-ω-фигурам всегда можно узнать, которая из них является меньшей. Действительно, любая 0-ω-фигура является либо символом 0, либо степенным выражением ω^a, где a — снова 0-ω-фигура, либо она представляет собой построенное из таких степеней выражение, для которого дополнительно выполняется условие $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r$. Поэтому для выяснения интересующего нас вопроса получается некоторая рекурсивная процедура, которая от рассмотрения заданных фигур позволяет перейти к рассмотрению их составных частей и потому всегда обрывается.

---

[1]) См. с. 411.

[2]) См. с. 415.

[3]) Это рассуждение использует вторую теорему Гёделя. В одной более поздней работе: Gentzen G. Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. — Math. Ann., 1943, 119, S. 140—161, Генцен показал, что с помощью некоторой модификации доказательства непротиворечивости можно и без ссылки на эту теорему Гёделя убедиться в том, что обобщенный принцип индукции существенным образом не укладывается в рамки арифметического формализма.

[4]) См. сноску на с. 439.

Так, например, мы можем констатировать, что выражение

$$\omega^{\omega^{\omega^0}}+\omega^{\omega^0}+\omega^0+\omega^0+\omega^0$$

является 0-ω-фигурой, в то время как выражения

$$\omega^{\omega^0}+0 \quad \text{и} \quad \omega^{\omega^0+\omega^0}+\omega^{\omega^{\omega^0}}$$

0-ω-фигурами не являются, а также что первая из двух 0-ω-фигур

$$\omega^{\omega^{\omega^0}}+\omega^{\omega^0+\omega^0}+\omega^{\omega^0+\omega^0} \quad \text{и} \quad \omega^{\omega^{\omega^0}+\omega^0}+\omega^{\omega^0}$$

меньше второй.

Замечание. В суммах и степенных выражениях, участвующих в построении 0-ω-фигур, мы можем обходиться без каких бы то ни было скобок: в суммах — потому что процесс последовательного написания выражений ассоциативен сам по себе, а в степенях — потому что всякий раз строятся только степени вида ω^a, так что выражение ω^{ω^c} может восприниматься только как степень ω с показателем ω^c.

Фигуры ω^0, ω^{ω^0}, $\omega^{\omega^{\omega^0}}$ будут обозначаться нами как $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$. И вообще, посредством $\mathfrak{v}_n$ мы будем обозначать 0-ω-фигуру, получающуюся из $\mathfrak{v}_0$ путем n-кратного применения операции перехода от выражения a к выражению ω^a [1]).

Между порядками $\prec_n$ и порядком, введенным для 0-ω-фигур, имеет место следующее соотношение: для всякого числа n может быть построена функция $\zeta_n(k)$, отображающая числа на 0-ω-фигуры, меньшие $\mathfrak{v}_{n+1}$, таким образом, что числовой порядок $\prec_n$ переходит в порядок 0-ω-фигур, или, другими словами, что меньшему из двух чисел в смысле порядка $\prec_n$ соответствует и меньшая 0-ω-фигура.

Замечание. Тот факт, что для каждого числа n может существовать не более одного отображения с указанным свойством, может быть доказан с помощью обобщенного принципа индукции для порядков $\prec_n$. Однако этим обстоятельством мы здесь пользоваться не будем.

[1]) В канторовской теории второго числового класса вместо фигуры ω^0 пишут цифру 1, вместо n-членной суммы $\omega^0+\ldots+\omega^0$ — цифру n, а вместо ω^1 — просто ω. Таким образом $\mathfrak{v}_0=1$, $\mathfrak{v}_1=\omega$, $\mathfrak{v}_2=\omega^\omega$. Рекурсивное определение $\mathfrak{v}_n$ выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{v}_0=1, \quad \mathfrak{v}_{n+1}=\omega^{\mathfrak{v}_n}.$$

«Предел» последовательности $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}_1$, ... является первым канторовским ε-числом, т. е. наименьшим из тех чисел α второго числового класса, которые удовлетворяют условию $\alpha=\omega^\alpha$. Одновременно это число является наименьшим из чисел второго числового класса, уже не представимых 0-ω-фигурами.

Функции $\zeta_n(k)$ определяются следующим образом: $\zeta_0(0)$ приписывается значение 0; при $f\neq 0$ $\zeta_0(f)$ в качестве значения приписывается f-членная сумма $\omega^0+\ldots+\omega^0$. Функция $\zeta_{n+1}(f)$ определяется с помощью $\zeta_n(k)$: $\zeta_{n+1}(0)$ приписывается значение 0; $\zeta_{n+1}(2^t)$ при $t=0, 1, \ldots$ в качестве значения приписывается $(t+1)$-членная сумма $\omega^0+\ldots+\omega^0$. Если f отлично от нуля и не является степенью числа 2 и если $\wp_{r_1}\cdot\ldots\cdot\wp_{r_s}$ — разложение f на простые множители, упорядоченные (при $s>1$) таким образом, что при $1\leqslant i\leqslant s$ либо $r_{i+1}=r_i$, либо $r_{i+1}\prec_n r_i$, то $\zeta_{n+1}(f)$ приписывается значение $\omega^{\zeta_n(r_1)}+\ldots+\omega^{\zeta_n(r_s)}$.

Легко убедиться, что определенные таким образом функции $\zeta_n(k)$ доставляют нам отображения с указанным выше свойством; причем это доказывается с использованием того факта, что любая отличная от нуля 0-ω-фигура, имеющая вид $\omega^{a_1}+\ldots+\omega^{a_r}$ (здесь $a_1\geqq\ldots\geqq a_r$), тогда и только тогда меньше $\mathfrak{v}_{n+1}$, когда $a_1<\mathfrak{v}_n$. Из указанного факта также следует, что для всякой 0-ω-фигуры a можно определить такое число n, для которого $a<\mathfrak{v}_n$.

В итоге мы, таким образом, убеждаемся, что числовой порядок $\prec_n$ совпадает с некоторым начальным отрезком упорядочения 0-ω-фигур по этому порядковому типу, т. е. если упорядочиваемые элементы рассматривать только как указатели места: именно, $\prec_n$ совпадает с тем начальным отрезком, который образуется 0-ω-фигурами, меньшими $\mathfrak{v}_{n+1}$. Этот начальный отрезок простирается тем дальше, чем больше число n, и каждая 0-ω-фигура принадлежит некоторому такому отрезку.

Но отсюда немедленно вытекает, что обобщенный принцип индукции имеет место и для 0-ω-фигур, упорядоченных указанным образом.

Замечание 1. Доказательство обобщенного принципа индукции для порядка 0-ω-фигур, естественно, можно дать и путем непосредственного рассмотрения этих фигур. Метод доказательства при этом будет лишь несущественно отличаться от метода, примененного нами для порядков $\prec_n$: из справедливости этого принципа для 0-ω-фигур, меньших $\mathfrak{v}_n$ ($n=1, 2, \ldots$), мы заключаем о справедливости его для 0-ω-фигур, меньших $\mathfrak{v}_{n+1}$. Мы рассмот-

рели вначале порядки $\prec_n$, так как нам было важно выяснить вопрос о формализуемости этого рассуждения в формализме (Z_μ). Доказанная нами теорема о порядках $\prec_n$ — это, так сказать, арифметическая версия обобщенного принципа индукции для 0-ω-фигур.

Замечание 2. Вместо принципа индукции для 0-ω-фигур нам хватило бы и теоремы о том, что всякая убывающая последовательность 0-ω-фигур после конечного числа шагов обрывается (кончается нулем). Сравнительно простое доказательство этой теоремы приводится в Приложении V [1]).

А теперь, пользуясь принципом индукции для 0-ω-фигур, можно, следуя Генцену, убедиться в непротиворечивости системы (Z).

Для этого формализм (Z) сначала сводится к некоторому другому [2]). Об этом формализме — назовем его $(\mathfrak{Z}_1)$ — мы здесь только скажем, что в нем всякое доказательство состоит из так называемых секвенций, т. е. обобщенных импликаций вида

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s,$$

где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ и $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s$ суть формулы, построенные из элементарных с помощью знаков конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, а также кванторов всеобщности и существования. Число r антецедентов, равно как и число s сукцедентов секвенции может быть любым, в том числе оно может равняться и нулю [3]).

---

[1]) См. с. 621 и далее.

[2]) То, что для успеха доказательства это сведение не существенно и что, более того, для формализма (Z) или для формализма, получающегося из него путем исключения формульных переменных, соответствующее рассуждение получается даже несколько более простым, было показано Л. Кальмаром осенью 1938 г. в одной до сих пор не опубликованной работе «Über Gentzens Beweis für die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie». Вскоре после этого В. Аккерману удалось с использованием индукции до первого ε-числа довести рассмотренный в гл. II (с. 124—161) метод, исходящий из первоначального гильбертовского подхода и не ведущий финитными средствами к искомому результату, до доказательства непротиворечивости арифметического формализма. См. его работу: Ackermann W. Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie. — Math. Ann., 1940, **117**, S. 162—194. Изложение этих доказательств Кальмара и Аккермана будет дано в Приложении V.

[3]) Такие секвенции Генцен использовал уже в работе: Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen — Math. Z., 1934, **39**, № 2—3 (русский перевод см. в сб. «Математическая теория логического вывода» — М.: Физматгиз, 1967, с. 9—74. — *Прим. перев.*). Секвенции вида

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r \to \mathfrak{B}$$

впервые были введены Паулем Герцем в его исследованиях по системам предложений: Hertz P. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. — Math. Ann., 1923, **89**, № 1/2 и 1929, **101**, № 4. Фигуры заключения Генцена примыкают к формализму систем предложений Герца.

Секвенция

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s,$$

где r и s отличны от нуля, при содержательном ее понимании, равнозначна импликации

$$\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_r \to \mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_s,$$

секвенция

$$\to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s$$

равнозначна формуле

$$\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_s,$$

секвенция

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r \to$$

равнозначна формуле

$$\neg(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_r),$$

а «пустая секвенция» $\to$ равнозначна ложной формуле.

Из противоречивости системы (Z) следовала бы выводимость в формализме $(\mathfrak{Z}_1)$ пустой секвенции, т. е. секвенции без антецедента и сукцедента. Поэтому для доказательства непротиворечивости системы (Z) достаточно показать, что в $(\mathfrak{Z}_1)$ невыводима пустая секвенция.

Для этого некоторым элементарно-рекурсивным способом каждому выводу в $(\mathfrak{Z}_1)$ приписывается определенная 0-ω-фигура — порядковое число этого вывода. Затем показывается, как по каждому выводу пустой секвенции, в предположении, что таковой у нас имеется, с помощью некоторого редукционного шага можно получить другой вывод пустой секвенции, с меньшим порядковым числом.

Отсюда вытекает, что если $\mathfrak{c}$ — порядковое число и если для любого $\mathfrak{n}$, меньшего $\mathfrak{c}$, всякий вывод в $(\mathfrak{Z}_1)$ с порядковым числом $\mathfrak{n}$ (при условии, что таковые вообще бывают) оканчивается непустой секвенцией, то это должно быть верно и для $\mathfrak{c}$. Отсюда по принципу индукции для 0-ω-фигур получается, что в $(\mathfrak{Z}_1)$ вообще не существует вывода пустой секвенции.

Замечание. Примененное в этом доказательстве косвенное рассуждение с точки зрения финитной установки не является проблематичным, так как допущение о существовании вывода в $(\mathfrak{Z}_1)$ с порядковым числом $\mathfrak{n}$, оканчивающегося пустой секвенцией, обладает интуитивно ясной определенностью. — Впрочем, этого косвенного рассуждения здесь можно было бы и избежать. В самом деле, это генценовское доказательство можно, например, превратить в позитивное доказательство утверждения о том, что у любой выводимой в $(\mathfrak{Z}_1)$ секвенции, у которой в антецеденте и сукценденте фигурируют только равенства между цифрами, имеется по крайней мере одна истинная (в смысле выделенной оценки

истинности равенства) формула в сукцеденте или по крайней мере одна ложная (в том же самом смысле) в антецеденте.

Метод этого кратко намеченного здесь доказательства позволяет вместе с тем получить и некоторые более сильные результаты. В частности, в связи с вопросом о внешней непротиворечивости [1]) мы упомянем результат о том, что рассмотренный формализм остается непротиворечивым, если к нему добавить какие-либо верифицируемые формулы [2]) в качестве исходных, а также если ввести какие-либо функциональные знаки для вычислимых функций или предикатные символы для разрешимых отношений между числами вместе с характеризующими их аксиомами, которые на основе неформального истолкования этих символов либо сами являются верифицируемыми формулами, либо выводятся из формул этого рода.

Генценовский метод доказательства рассчитан не только на до сих пор осуществленное с его помощью доказательство непротиворечивости для арифметического формализма, но в значительной мере и на возможные применения к более широким формализмам, в частности к формализму анализа [3]). В самом деле, основная идея генценовского доказательства связана не с тем, что в рассматриваемом формализме имеется какая-либо возможность исключать трансфинитные средства, а только с тем, что, с одной стороны, выводы данного формализма в известной мере могут быть вполне упорядочены по степени их сложности и что, с другой стороны, для таких выводов, заключительные формулы которых изображают нечто в элементарном смысле ложное, может быть определена редукция, в результате однократного применения которой к заданному выводу, так сказать, исключается некоторый шаг этого вывода и порядковое число вывода при этом уменьшается.

Разумеется, — и это является одним из последствий теоремы Гёделя — чем шире рассматриваемый формализм, тем более высокими должны быть используемые в доказательствах порядковые типы, т. е. тем более сложными должны быть формы применяемого обобщенного принципа индукции, и методические требования к содержательному обоснованию этих принципов задают масштаб тех методических предпосылок, которые должны быть положены в основу нашей содержательной установки для того, чтобы мы могли доказать непротиворечивость рассматриваемого формализма.

[1]) См. с. 351.
[2]) См. с. 58.
[3]) Формализация анализа, как и формализация арифметики, может быть осуществлена с помощью отличающихся друг от друга эквивалентных формализмов; но здесь имеется значительно большее многообразие возможностей. — Различные виды формализации анализа обсуждаются в Приложении IV; см. с. 546 и далее.

СВЕДЕНИЯ ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ И ПРИМЫКАЮЩИХ К НЕМУ ФОРМАЛИЗМАХ

§ 1. Чистое исчисление предикатов

Переменными у нас являются: свободные и связанные индивидные переменные, а также формульные переменные без аргументов и формульные переменные с одним или несколькими местами для аргументов.

В качестве индивидных переменных мы используем строчные, а в качестве формульных — прописные буквы латинского алфавита. Свободные и связанные индивидные переменные мы рассматриваем как различные сорта переменных. Для их различения мы используем одни буквы этого алфавита в качестве свободных переменных, а другие — в качестве связанных; так, в качестве свободных переменных мы, как правило, берем буквы a, b, c, k, l, m, n, r и s, а в качестве связанных — x, y, z, u, v и w.

Замечание. Мы оставляем за собой право придерживаться этого разграничения по мере надобности; будет вполне достаточно, если мы всякий раз сможем соблюдать его внутри отдельных связных дедуктивных рассмотрений. Этой свободой мы уже пользовались в отношении буквы t, которая в гл. III данного тома использовалась как связанная, а в гл. IV как свободная переменная.

Формульные переменные считаются различными, если они либо различаются как буквы, либо имеют разное число аргументов.

Символами являются: символы для связок исчисления высказываний (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность) и кванторы (всеобщности и существования).

Применяя отрицание, мы получаем из выражения $\mathfrak{A}$ выражение $\neg\mathfrak{A}$; из выражений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ применением конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности мы получаем соответственно выражения

$$\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B},\quad \mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\quad \mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\quad \mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}.$$

Каждый из кванторов всеобщности и существования имеет при себе по одной связанной переменной. Употребление этих кванторов в роли логических операций состоит в том, что, исходя из какого-либо выражения $\mathfrak{A}(c)$, в котором встречается свободная

переменная c и не встречается связанная переменная $\mathfrak{x}$, мы строим выражения

$$\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \quad \text{и} \quad \exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}).$$

При этом $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ обозначает выражение, которое получается из $\mathfrak{A}(c)$ в результате повсеместной замены в этом последнем переменной c переменной $\mathfrak{x}$.

Мы говорим, что в выражении $\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ (или $\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$) переменная $\mathfrak{x}$ относится к квантору $\forall_{\mathfrak{x}}$ (или соответственно к $\exists_{\mathfrak{x}}$) и что она связывается этим квантором. Выражение $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ мы будем называть областью действия соответствующего квантора.

Относительно самих кванторов всеобщности $\forall_{\mathfrak{x}}$ и существования $\exists_{\mathfrak{x}}$ мы говорим, что они относятся к переменной $\mathfrak{x}$. Кванторы, относящиеся к одной и той же связанной переменной, мы называем одноименными.

При построении сложных выражений, отправляясь от более простых, мы, как обычно, употребляем *скобки*. В целях экономии скобок мы пользуемся следующими соглашениями: выражения вида $\neg\mathfrak{A}$, $\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и $\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ в скобки не заключаются; конъюнкции и дизъюнкции в качестве членов импликаций и эквивалентностей разрешается в скобки не заключать; конъюнкцию в качестве первого члена какой-либо другой конъюнкции, а также дизъюнкцию в качестве первого члена какой-либо другой дизъюнкции разрешается не заключать в скобки, так что многочленные конъюнкции и дизъюнкции могут строиться без скобок.

Среди выражений, которые могут быть построены из переменных и символов исчисления предикатов, формулы характеризуются следующим образом:

Элементарными формулами являются либо формульные переменные без аргументов, либо формульные переменные со свободными индивидными переменными в качестве аргументов. Формулы исчисления предикатов — это либо элементарные формулы, либо выражения, получающиеся из элементарных формул в результате описанного выше применения к ним символов исчисления предикатов. Таким образом, формулы мы получаем согласно следующему рекурсивному определению:

Всякая элементарная формула является формулой. Если $\mathfrak{A}$ — формула, то выражение $\neg\mathfrak{A}$ тоже является формулой. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть формулы, то выражения $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ тоже являются формулами. Если $\mathfrak{A}(c)$ — формула, содержащая свободную переменную c, но не содержащая связанной переменной $\mathfrak{x}$, то выражения $\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ и $\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ тоже являются формулами [1]).

[1]) Во всех этих построениях предполагается, что обязательно употребляются скобки, являющиеся необходимыми для выделения составных частей, а необязательные скобки могут быть опущены. Так, например, если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — формулы, то выражения $(\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B})\to\mathfrak{C}$, $(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})\to\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ тоже являются формулами, в то время как выражение $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ формулой не является.

Формула исчисления предикатов, не содержащая вхождений индивидных переменных, называется формулой исчисления высказываний. Тождественно истинные, или, как мы иногда для краткости говорим, тождественные формулы исчисления высказываний, среди прочих формул характеризуются при помощи следующей процедуры вычисления их значений. Связки исчисления высказываний мы определяем как истинностные функции (т. е. как функции, заданные в области из двух значений «истина» и «ложь», обозначаемых буквами И и Л) при помощи следующих равенств:

$$\neg\text{И}=\text{Л},\ \neg\text{Л}=\text{И},\ \text{И}\,\&\,\text{И}=\text{И},\ \text{И}\,\&\,\text{Л}=\text{Л},$$
$$\text{Л}\,\&\,\text{И}=\text{Л},\ \text{Л}\,\&\,\text{Л}=\text{Л};\ p\vee q=\neg(\neg p\,\&\,\neg q),$$
$$p\to q=\neg p\vee q,\ p\sim q=(p\,\&\,q)\vee(\neg p\,\&\,\neg q)$$

(для произвольных p и q, принимающих значения И и Л). Тогда тождественно истинные формулы исчисления высказываний характеризуются тем, что они принимают значение «истина» при любом распределении истинностных значений по всем входящим в эти формулы формульным переменным.

Чтобы определить понятие вывода в исчислении предикатов, мы должны сначала описать операцию подстановки, а также операцию переименования связанных переменных.

Подстановка в формулу $\mathfrak{A}$ вместо свободной *индивидной* переменной $\mathfrak{a}$ заключается в том, что эта переменная всюду, где она встречается в $\mathfrak{A}$, заменяется одной и той же свободной индивидной переменной $\mathfrak{b}$; в этом случае мы говорим, что в формулу $\mathfrak{A}$ вместо переменной $\mathfrak{a}$ подставляется переменная $\mathfrak{b}$.

Переименование какой-либо связанной индивидной переменной $\mathfrak{x}$ в формуле $\mathfrak{A}$ заключается в том, что эта переменная всюду в области действия относящегося к ней квантора и в самом этом кванторе заменяется одной и той же отличной от нее связанной индивидной переменной $\mathfrak{y}$, так что выражение $\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ (или $\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$), являющееся формулой или составной частью какой-либо другой формулы, при этом преобразуется в $\forall_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$ (в $\exists_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$ соответственно). В этом случае мы говорим, что переменная $\mathfrak{x}$ переименовывается в области действия относящегося к ней квантора в переменную $\mathfrak{y}$.

Подстановка вместо *формульной* переменной $\mathfrak{B}$ *без* аргументов в какую-либо формулу $\mathfrak{A}$ заключается в том, что эта переменная всюду, где она встречается в формуле $\mathfrak{A}$, заменяется одной и той же формулой $\mathfrak{C}$. В этом случае мы говорим, что в фор-

мулу $\mathfrak{A}$ вместо формульной переменной $\mathfrak{B}$ подставляется формула $\mathfrak{C}$.

Подстановка вместо формульной переменной *с одним или несколькими* аргументами производится с помощью так называемой именной формы. Именной формой какой-либо формульной переменной, имеющей аргументы, называется элементарная формула, состоящая из той же самой формульной переменной с попарно различными свободными индивидными переменными в роли аргументов; эти переменные в рассматриваемой ситуации мы называем аргументными переменными данной именной формы.

Вариантом данной именной формы мы называем всякое выражение, получающееся из этой именной формы в результате замены каждой ее аргументной переменной какой-либо свободной или связанной индивидной переменной, а под заменителем для данной именной формы мы понимаем любую формулу, в которой встречаются все аргументные переменные данной именной формы[1]).

Для задания подстановки в данную формулу вместо данной формульной переменной с аргументами нужно для какой-либо именной формы этой формульной переменной указать некоторый заменитель. Выполнение подстановки в этом случае заключается в том, что всюду, где в данной формуле встречается какой-либо вариант рассматриваемой именной формы, этот вариант заменяется тем выражением, которое получается из указанного заменителя при помощи тех же самых замен, в результате которых этот вариант получается из рассматриваемой именной формы.

Замечание. Для того чтобы в результате подстановки вместо формульной переменной (с аргументами или без них) или переименования связанной переменной в какой-либо формуле снова получилась формула, необходимо, чтобы в получающемся выражении никакой квантор не оказывался в области действия другого одноименного квантора, или — как мы говорим короче — чтобы не возникало коллизий между связанными переменными.

Кроме подстановок и переименований, в выводах исчисления предикатов для перехода от одной формулы к другой используются также следующие схемы (α) и (β):

Схема (α) состоит в переходе от какой-либо формулы $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a)$, в которой $\mathfrak{B}(a)$ не содержит переменной x, к формуле

$$\mathfrak{A} \to \forall x \mathfrak{B}(x),$$

[1]) В первоначальном изложении исчисления предикатов (т. I, гл. IV) термины вариант и заменитель не вводились. Впервые они появляются в данном томе на с. 291.

а схема (β) состоит в переходе от формулы $\mathfrak{B}(a) \to \mathfrak{A}$, в которой $\mathfrak{B}(a)$ не содержит переменной x, к формуле

$$\exists x \mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A};$$

при этом в обеих схемах переменная a не должна входить ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{B}(x)$.

Замечание. Исключительная роль переменных a и x в схемах (α) и (β) может быть устранена путем применения правил подстановки и переименования, так что вместо указанных двух схем (α) и (β) мы можем получить соответствующие им производные схемы, в которых вместо переменной a будет фигурировать произвольная свободная, а вместо переменной x — произвольная связанная переменная.

В известной мере обращениями этих двух схем (α) и (β) являются следующие две основные формулы:

(a) $$\forall x A(x) \to A(a)$$

и

(b) $$A(a) \to \exists x A(x).$$

И, наконец, еще в качестве схемы исчисления высказываний у нас имеется схема заключения, согласно которой от двух формул $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ разрешается перейти к формуле $\mathfrak{T}$.

Теперь определение вывода можно сформулировать следующим образом. Под выводом в исчислении предикатов мы понимаем явно предъявленную (и, следовательно, конечную) последовательность формул исчисления предикатов, в которой для каждой формулы имеет место один из следующих случаев:

1. Эта формула является тождественно истинной формулой исчисления высказываний или одной из формул (a) и (b).

2. Эта формула не является первой формулой рассматриваемой последовательности и получается из непосредственно предшествующей ей формулы либо в результате некоторой подстановки вместо индивидной или формульной переменной, либо в результате переименования какой-либо связанной переменной, либо в результате применения одной из схем (α) и (β).

3. Эта формула не является ни первой, ни второй формулой рассматриваемой последовательности и получается из двух непосредственно предшествующих ей формул по схеме заключения.

4. Эта формула совпадает с одной из предшествующих ей формул рассматриваемой последовательности.

Вывод, последней формулой которого является формула $\mathfrak{R}$, называется выводом формулы $\mathfrak{R}$.

Формулы вывода, удовлетворяющие условию 1, мы называем исходными формулами этого вывода. Как таковые они характеризуются тем, что они не получены ни из каких предшествующих формул этого вывода ни в результате повторения,

ни в результате подстановки либо переименования, ни в результате применения какой-либо схемы из числа вышеупомянутых. Те формулы, которые могут служить исходными формулами каких-либо выводов в исчислении предикатов, мы называем исходными формулами исчисления предикатов.

Согласно сказанному исходные формулы исчисления предикатов — это тождественно истинные формулы исчисления высказываний и основные формулы (a) и (b).

Формула называется выводимой, если она является последней формулой какого-либо вывода.

Говоря о правилах подстановки и переименования, мы всегда имеем в виду допустимые в каком-либо выводе подстановки и переименования. Именно, предполагается, что подстановка вместо какой-либо индивидной или формульной переменной или же переименование какой-либо связанной индивидной переменной (в соответствии с точным смыслом этих выражений) могут быть произведены только в том случае, если в результате этого из данной формулы снова получается некоторая формула, т. е. если в итоге не получается каких-либо коллизий между связанными переменными.

Относительно какой-либо формулы, получающейся из формулы $\mathfrak{A}$ в результате одной или нескольких непосредственно следующих друг за другом подстановок, мы для краткости говорим также, что она получается из $\mathfrak{A}$ «в результате подстановки».

Формулу, которая получается в результате подстановки из какой-либо тождественно истинной формулы, мы называем формулой, истинной в логике высказываний.

Вывод, в котором в качестве исходных формул используются только тождественно истинные формулы исчисления высказываний, а в качестве прочих вспомогательных средств — только правила подстановки вместо формульных переменных без аргументов, правило повторения и схема заключения, мы называем выводом средствами исчисления высказываний или при помощи средств исчисления высказываний.

Ту часть формализма, которая получается из исчисления предикатов в результате выбрасывания связанных переменных, а также относящихся к ним правил, мы называем элементарным исчислением со свободными переменными.

§ 2. Применение исчисления предикатов к формализованным системам аксиом. ι-правило. Арифметические формализмы

Формализация аксиоматических теорий при помощи исчисления предикатов производится следующим образом.

Сначала путем введения некоторых внелогических символов расширяется понятие формулы. При этом к рассмотрению могут

быть привлечены символы трех родов: индивидные символы, предикатные символы и функциональные знаки.

Замечание. Мы для краткости говорим о *функциональных знаках*, вместо того чтобы говорить о символах для математических функций. При этом под *математическими* функциями мы понимаем такие функции, которые всякому объекту из индивидной области (или всякому $\mathfrak{k}$-членному набору таких объектов, если эта функция является $\mathfrak{k}$-местной) сопоставляют объект, снова принадлежащий этой области. В отличие от математических, *логические* функции всякому объекту индивидной области (соответственно всякому $\mathfrak{k}$-членному набору таких объектов) сопоставляют одно из двух истинностных значений «истина» или «ложь».

Затем, исходя из свободных индивидных переменных, индивидных символов и функциональных знаков, мы получаем термы. Это происходит согласно следующему рекурсивному определению: любая свободная индивидная переменная считается термом; любой индивидный символ считается термом; любой функциональный знак, у которого на местах аргументов стоят какие-либо термы, считается термом.

Затем с помощью понятия терма расширяется понятие элементарной формулы. Это делается следующим образом: элементарной формулой считается либо формульная переменная без аргументов, либо формульная переменная с термами в качестве аргументов, либо предикатный символ с термами в качестве аргументов.

От понятия элементарной формулы тем же самым способом, что и в чистом исчислении предикатов, мы переходим к общему понятию формулы.

Полученное таким образом понятие теперь кладется в основу определения вывода, ввиду чего правило подстановки вместо формульных переменных мы применяем в некотором расширенном смысле слова.

Правило подстановки вместо свободных индивидных переменных также подвергается некоторому расширению, поскольку теперь при подстановке вместо какой-либо свободной индивидной переменной эту переменную всюду, где она встречается в рассматриваемой формуле, мы заменяем каким-либо одним и тем же термом.

Кроме того, при определении понятия вывода к исходным формулам исчисления предикатов добавляется ряд конкретных формул, которые выделяются нами в качестве аксиом.

Аксиома называется собственной, если она не содержит формульных переменных. Систему аксиом мы называем системой аксиом первой ступени, если она состоит лишь из конечного числа аксиом, причем все они, за исключением аксиомы

равенства

$$a = b \to (A(a) \to A(b)),$$

являются собственными аксиомами.

Добавление к исчислению предикатов предикатного символа $=$ [1] и двух аксиом равенства

(J_1) $$a = a$$

и

(J_2) $$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

представляет собой расширение исчисления предикатов, относящееся еще к формализации общей логики.

Другое подобного рода расширение представляет собой формализация понятия «тот, который». Она производится путем добавления ι-символа вместе с относящимся к нему ι-правилом. Подобно кванторам, ι-символ имеет при себе некоторую связанную переменную. Применение этого символа заключается в образовании выражения $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, которое мы строим, исходя из формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$, содержащей свободную переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащей связанной переменной $\mathfrak{x}$.

Это правило утверждает, что если для какой-либо формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ выведены соответствующие ей формулы единственности

$$\exists \mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \text{ и } \forall \mathfrak{x}\forall \mathfrak{y}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{A}(\mathfrak{y}) \to \mathfrak{x} = \mathfrak{y}),$$

то выражение $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ может быть использовано в качестве терма, а любая формула $\mathfrak{A}(\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x}))$, в которой выражение $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ отличается от $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ разве лишь обозначениями связанных переменных, может быть взята в качестве исходной формулы [2].

Для связанных переменных любых ι-символов, так же как и для переменных, входящих в состав кванторов, должно действовать правило их переименования.

Требование отсутствия коллизий между связанными переменными при образовании новых формул, а также при выполнении подстановок и переименований теперь формулируется в следующем обобщенном виде: никакой квантор $\forall\mathfrak{x}$ или $\exists\mathfrak{x}$ и никакое выражение $\iota_{\mathfrak{x}}$ не должно фигурировать в области действия какого-либо из символов $\forall\mathfrak{x}$, $\exists\mathfrak{x}$ и $\iota_{\mathfrak{x}}$ с *той же самой* переменной $\mathfrak{x}$.

Термы вида $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ мы называем ι-термами.

[1] Отрицание равенства $a = b$ мы записываем в виде $a \neq b$.

[2] Приведенная здесь формулировка ι-правила отличается от его формулировки, приведенной в гл. VIII т. I (с. 469), лишь тем, что вместо выделенных там переменных x и y здесь допускаются произвольные связанные переменные $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$. Равнозначность этих двух формулировок ι-правила может быть установлена с использованием правила переименования связанных переменных.

Имеет место доказанная в гл. VIII т. I теорема об устранимости ι-правила, которая гласит, что из произведенного с помощью ι-правила вывода любой не содержащей ι-символов формулы применение ι-символа может быть полностью исключено [1].

Удобная для нашего исчисления и для рассмотрения выводов в нем обобщенная версия ι-правила заключается в том, что для любой формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$, содержащей свободную переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащей связанной переменной $\mathfrak{x}$, выражение $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ объявляется термом и в качестве ι-аксиомы берется формула

$$\exists x \forall y (A(y) \sim y = x) \to A(\iota_x A(x)).$$

В таком случае прежнее ι-правило становится производным. Для этого обобщенного правила также справедливо утверждение об устранимости ι-символов из любых выводов, внелогические исходные формулы (собственные аксиомы) которых, а также их заключительные формулы не содержат ι-символов.

В качестве еще одного способа расширения дедуктивных формализмов, построенного по образу содержательной логики, следует упомянуть правило допущения явных определений, с помощью которого формализуется метод введения номинальных определений. Всякое явное определение представляет собой какую-либо добавляемую к дедуктивному формализму аксиому, представляющую собой либо равенство, с помощью которого вводится новый индивидный символ или новый функциональный знак, либо эквивалентность, с помощью которой вводится какой-либо предикатный символ. В левой части этого равенства или этой эквивалентности стоит вводимый символ с отличными друг от друга свободными переменными в качестве аргументов, а в правой части — выражение (определяющее выражение), свободные переменные которого совпадают со свободными переменными левой части и в котором содержатся только символы, принадлежащие исходному формализму. В случае равенства выражение, стоящее в правой части, является термом, а в случае эквивалентности — формулой.

В качестве аргументов вводимого символа могут также фигурировать и формульные переменные; если формульная переменная с аргументами фигурирует в явном определении в качестве аргумента вводимого символа, то в качестве ее аргументов в этом определении берутся отличные друг от друга связанные переменные, которые пишутся у вводимого символа в качестве индексов.

Характерной особенностью любого явного определения является то, что из осуществленного с использованием этого определения

[1] Если речь идет о выводе из собственных аксиом, то, естественно, нужно предполагать, что эти аксиомы тоже не содержат ι-символов.

вывода какой-либо формулы, не содержащей символа, введенного этим определением, этот символ всегда может быть полностью устранен. Действительно, для этого достаточно произвести следующие замены: если вводимый символ является индивидным, то его следует всюду заменить определяющим данный символ выражением, а если этот символ имеет аргументы, то его следует заменить выражением, получающимся из определяющего выражения в результате замены аргументных переменных этого символа стоящими на соответствующих местах аргументами этого символа. Возможно, что в целях предотвращения коллизий между связанными переменными при этом придется произвести некоторые переименования переменных.

От явных определений следует отличать *рекурсивные определения*, которые фигурируют в *арифметических формализмах*. Арифметические формализмы характеризуются тем, что в них содержится та или иная формализация натурального ряда. В качестве индивидного символа для исходного элемента натурального ряда мы берем знак 0, а в качестве функционального знака, формализующего переход от данного числа к следующему за ним числу, мы берем штрих-символ. Построенные из символа 0 и штрих-символа термы такие, как 0, 0′, 0″ и т. д., мы называем цифрами. Введение же привычных числовых символов может быть произведено с помощью явных определений таких, например, как

$$1 = 0', \quad 2 = 0'', \quad 3 = 0''' \text{ и т. д.}$$

Структура натурального ряда позволяет использовать особого рода определения для функций, у которых значениями аргументов и значениями самих этих функций являются числа натурального ряда, который мы считаем начинающимся с нуля. Такие функции мы называем арифметическими. Именно, определение арифметических функций иногда может быть произведено таким образом, что нахождение значения функции для заданного числового значения некоторого выделенного аргумента сводится к нахождению значений для меньших значений этого аргумента; при этом нужно еще дополнительно задать значение функции (или соответственно пробег ее значений) для равного 0 значения данного аргумента.

Определения такого рода называются рекурсивными определениями. Простейшим и важнейшим видом рекурсивных определений [1]) арифметических функций является определение с помощью примитивной рекурсии или, более общо, с помощью последовательности примитивных рекурсий, каждый член которой вводит новый функциональный знак с одним или несколькими аргументами. Всякая примитивная рекурсия состоит

[1]) В связи с этим см. т. I, с. 352—357 и 401.

из пары рекурсивных равенств вида

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l, 0) = \mathfrak{a}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l),$$
$$\mathfrak{f}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l, n') = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l, n, \mathfrak{f}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l, n)),$$

где $\mathfrak{f}(\cdots)$ — вводимый функциональный знак, $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l$ — какие-либо свободные переменные [1]) (параметры этой рекурсии), а

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l) \text{ и } \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l, n, m)$$

— определенные термы, которые, кроме указанных свободных индивидных переменных (впрочем, эти переменные не обязаны присутствовать в полном составе), символа 0 и штрих-символа, могут содержать в качестве составных частей лишь функциональные знаки, введенные предшествующими примитивными рекурсиями.

В частности, такой вид имеют рекурсивные равенства для сложения и умножения:

$$a + 0 = a, \qquad a \cdot 0 = 0,$$
$$a + n' = (a + n)'; \qquad a \cdot n' = a \cdot n + a.$$

Первая пара этих равенств дает рекурсивное определение сама по себе, а вторая — в том случае, если она вводится после первой.

Функцию, рекурсивное определение которое дается некоторой примитивной рекурсией или последовательностью примитивных рекурсий, мы кратко называем рекурсивной функцией.

Рекурсивные определения содержательно могут интерпретироваться как некоторые вычислительные процедуры, и в сочетании с аксиомами равенства они дают определенный способ формализованного вычисления значений рекурсивных функций такой, что если $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_l)$ представляет собой рекурсивную функцию, то для каждого набора цифр $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_l$ данное рекурсивное определение в сочетании с аксиомами равенства позволяет вывести равенство

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_l) = \mathfrak{n},$$

где цифра $\mathfrak{n}$ представляет собой значение этой функции для набора аргументов $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_l$, причем для получения этого вывода нам требуются средства одного только элементарного исчисления со свободными переменными.

Общее правило, позволяющее допускать рекурсивные равенства любых примитивных рекурсий в качестве исходных формул выводов, называется схемой примитивной рекурсии.

Способу рекурсивного определения противостоит в качестве специфически арифметического способа умозаключений так называе-

[1]) Переменные $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_l, n$ должны быть попарно различными.

мая полная индукция (заключение от n к $n+1$). Одна из формализаций этого способа умозаключений дается так называемой схемой индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)},$$

в которой требуется, чтобы в формуле $\mathfrak{A}(0)$ отсутствовала переменная a.

Добавив к элементарному исчислению со свободными переменными схему примитивной рекурсии и схему индукции вместе с аксиомами равенства и аксиомой $0' \neq 0$, мы получим формализм рекурсивной арифметики.

Если в основу рассмотрения положить исчисление предикатов, взятое в его полном составе, то упоминавшаяся выше схема индукции будет равносильна так называемой аксиоме индукции[1]:

$$A(0) \,\&\, \forall x\,(A(x) \to A(x')) \to A(a).$$

Систему арифметических аксиом, состоящую из аксиомы равенства (J_2), аксиом

(P_1) $$a' \neq 0,$$

(P_2) $$a' = b' \to a = b,$$

а также рекурсивных равенств для сложения и умножения и аксиомы индукции, мы называем системой (Z), а формализм, состоящий из исчисления предикатов и символов и аксиом системы (Z), мы называем формализмом системы (Z) или, для краткости, формализмом (Z).

Аксиомами (P_1), (P_2) и аксиомой индукции формализуются — на основе введения символа 0 и штрих-символа — аксиомы арифметики в том виде, как их, следуя Дедекинду, сформулировал Пеано. Мы кратко называем эти аксиомы аксиомами Пеано.

При дедуктивном построении арифметики на базе формализма (Z) с добавленным к нему ι-правилом очень существенным шагом является введение так называемого μ-символа с помощью следующего явного определения:

$$\mu_x A(x) = \iota_x \{(\forall z \neg A(z) \to x = 0) \,\&\, (\exists z A(z) \to A(x) \,\&\, \forall u\,(A(u) \to x \leqslant u))\}.$$

Для этого нужно сначала с помощью ι-правила[2]) ввести стоящий в правой части этого равенства ι-терм. Необходимые в данном случае формулы единственности выводятся с использованием формулы

$$A(a) \to \exists x\,(A(x) \,\&\, \forall y\,(A(y) \to x \leqslant y)),$$

посредством которой формализуется так называемый принцип наименьшего числа, т. е. принцип, утверждающий, что для каждого числового предиката, выполняющегося хотя бы для одного числа, имеется наименьшее число, для которого этот предикат выполняется.

Упомянутая формула выводится на основе явного определения[1])

$$a \leqslant b \sim \exists x\,(a + x = b)$$

с помощью аксиомы индукции и аксиом

$$(J_2), \quad a + 0 = a, \quad a + n' = (a + n)' \quad \text{и} \quad a' = b' \to a = b.$$

Из приведенного выше явного определения для символа $\mu_x A(x)$ при помощи ι-правила получаются формулы

(μ_1) $$\exists x A(x) \to A(\mu_x A(x)),$$

(μ_2) $$A(a) \to \mu_x A(x) \leqslant a,$$

(μ_3) $$\forall x \neg A(x) \to \mu_x A(x) = 0.$$

Содержательно μ-символ истолковывается следующим образом: для любого числового предиката $\mathfrak{A}(a)$ в том случае, если этот предикат выполняется хотя бы для одного числа, терм $\mu_x \mathfrak{A}(x)$ изображает наименьшее среди таких чисел, а в противном случае он изображает число 0.

Как это уже было отмечено в гл. VII т. I, рекурсивные определения для сложения и умножения в формализме системы (Z) не могут быть — в отличие от явных определений — устранены при помощи каких-либо замен. Но зато все остальные определения функций, сформулированные в виде примитивных рекурсий, при условии добавления к формализму (Z) ι-символа могут быть сведены к явным определениям; это означает, что для любого рекурсивно введенного функционального знака вместо рекурсивного его определения можно указать такое явное определение, при помощи которого рекурсивные равенства этого рекурсивного

[1]) См. т. I, с 325.
[2]) См. т. I, с. 480.

[1]) В т. I вместо этого явного определения мы использовали определения

$$a < b \sim \exists x\,(x \neq 0 \,\&\, a + x = b)$$

и

$$a \leqslant b \sim a = b \vee a < b$$

(см. с. 438 и 358). Эквивалентность, используемая здесь для определения символа $\leqslant$, выводится из этих двух формул.

определения могут быть выведены [1]). Формулировка такого явного определения производится с использованием μ-символа.

Из факта сводимости рекурсивных определений к явным и с учетом теоремы об устранимости ι-правила получается следующее утверждение о заменимости рекурсивных определений в формализме (Z):

Всякой рекурсивной функции $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_v)$ *может быть сопоставлена такая построенная из символов формализма* (Z) *и индивидных переменных формула* $\mathfrak{F}(n_1, \ldots, n_v, n)$, *где* $n_1, \ldots, n_v, n$ — *встречающиеся в ней свободные переменные, что для любого набора цифр* $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_v, \mathfrak{f}$ *в формализме системы* (Z) *будет выводима формула* $\mathfrak{F}(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_v, \mathfrak{f})$ *или ее отрицание в зависимости от того, равно или не равно цифре* $\mathfrak{f}$ *значение этой функции для набора значений аргументов* $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_v$. *Далее, при помощи эквивалентности*

$$\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_v) = n \sim \mathfrak{F}(n_1, \ldots, n_v, n)$$

и соответствующих эквивалентностей для всех функций, встречающихся в рекурсивном определении функции $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_v)$ (*если эти эквивалентности добавить к нашему формализму в качестве аксиом*), *могут быть выведены рекурсивные равенства для функции* $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_v)$.

Так, в случае рекурсивных равенств

$$\varphi(a, 0) = \mathfrak{a}(a),$$
$$\varphi(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \varphi(a, n))$$

это выглядит следующим образом. Термам $\mathfrak{a}(c)$ и $\mathfrak{b}(c, d, m)$ соответствуют некоторые формулы $\mathfrak{A}(c, k)$ и $\mathfrak{B}(c, d, m, k)$ системы (Z), а двуместной функции φ в (Z) соответствует некоторая формула $\mathfrak{G}(a, b, k)$. Это соответствие имеет место в том смысле, что если указанные рекурсивные определения присоединить к системе (Z), то станут доказуемыми формулами следующие эквивалентности:

$$\mathfrak{A}(c, k) \sim \mathfrak{a}(c) = k,$$
$$\mathfrak{B}(c, d, m, k) \sim \mathfrak{b}(c, d, m) = k,$$
$$\mathfrak{G}(a, b, k) \sim \varphi(a, b) = k.$$

В самой системе (Z) будут выводимы формулы

$$\mathfrak{G}(a, 0, c) \sim \mathfrak{A}(a, c),$$
$$\mathfrak{G}(a, n, b) \sim (\mathfrak{G}(a, n', c) \sim \mathfrak{B}(a, n, b, c)),$$

соответствующие рекурсивным равенствам для функции φ.

[1]) См. в связи с этим т. I, с. 499—510.

Дедуктивный формализм мы называем непротиворечивым, если не существует таких двух формул $\mathfrak{A}$ и $\neg\mathfrak{A}$, которые можно было бы вывести средствами этого формализма. Опираясь на тождественную формулу $A \to (\neg A \to B)$, из пары формул $\mathfrak{A}$ и $\neg\mathfrak{A}$ можно вывести любую формулу рассматриваемого формализма. Поэтому для установления непротиворечивости любого формализма, включающего в себя наше исчисление высказываний, достаточно показать, что в рассматриваемом формализме не выводима какая-нибудь специально подобранная формула этого формализма.

§ 3. Теоремы об исчислении предикатов

Приведем еще ряд понятий и фактов [1]), относящихся к исчислению предикатов и к таким дедуктивным формализмам, которые получаются из него, как только что было описано в § 2, путем добавления каких-либо индивидных и предикатных символов, функциональных знаков, а также тех или иных аксиом [2]). (ι-правило сюда не включается.)

1. Формула $\mathfrak{A}$ называется переводимой в формулу $\mathfrak{B}$, если выводима эквивалентность $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ или — что сводится к тому же самому — если выводимы обе импликации $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

2. Любая формула переводима в некоторую предваренную формулу, у которой все входящие в нее кванторы стоят в начале, а области их действия простираются до конца этой формулы.

3. Формула $\mathfrak{A}$ называется дедуктивно равной формуле $\mathfrak{B}$, если при включении в число исходных формулы $\mathfrak{A}$ становится выводимой формула $\mathfrak{B}$, а при включении в число исходных формулы $\mathfrak{B}$ становится выводимой формула $\mathfrak{A}$, или, короче, если из $\mathfrak{A}$ выводима формула $\mathfrak{B}$, а из $\mathfrak{B}$ выводима формула $\mathfrak{A}$.

4. Всякая формула $\mathfrak{A}$ дедуктивно равна любой такой формуле $\mathfrak{B}$, которая получается из $\mathfrak{A}$, если каждую входящую в нее свободную индивидную переменную заменить какой-нибудь соответствующей ей ранее еще не встречавшейся связанной переменной, а относящиеся к введенным связанным переменным кванторы всеобщности в произвольном порядке записать в начале формулы, распространив тем самым области их действия до самого конца формулы. Эта операция, преобразующая формулу $\mathfrak{A}$ в дедуктивно равную ей формулу $\mathfrak{B}$, называется заменой свободных переменных связанными; обратная операция зачеркивания стоящих перед формулой кванторов всеобщности и замены отно-

[1]) См. в связи с этим т. I, с. 173, 182—185, 191—208, 250, 275—282, 286—288, 456—459.

[2]) В дальнейших формулировках мы не всегда будем оговаривать то, что мы ограничиваемся рассмотрением таких формализмов.

сящихся к ним связанных переменных ранее не встречавшимися свободными переменными называется соответственно заменой связанных переменных свободными.

5. Всякая формула дедуктивно равна некоторой сколемовской нормальной форме, т. е. такой предваренной формуле, в кванторной приставке которой никакой квантор всеобщности не предшествует никакому квантору существования [1]).

6. Имеет место следующая

Дедукционная теорема. *Если формула* $\mathfrak{B}$ *выводится из некоторой формулы* $\mathfrak{A}$ *таким образом, что никакая фигурирующая в* $\mathfrak{A}$ *свободная переменная при этом не затрагивается, т. е. не используется ни в одной производимой вместо нее подстановке, а также не фигурирует в качестве выделенной переменной какой-либо из схем* (α) *и* (β), *то формула* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *может быть выведена без использования формулы* $\mathfrak{A}$.

7. Аксиома равенства (J_2), т. е. формула

$$a = b \to (A(a) \to A(b)),$$

при выводе формул, не содержащих формульных переменных, может быть заменена конечным списком собственных аксиом вида

$$a = b \to (\mathfrak{P}(a) \to \mathfrak{P}(b))$$

и

$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b),$$

где $\mathfrak{P}$ — предикатный символ, а $\mathfrak{f}$ — функциональный знак рассматриваемого формализма, причем, кроме явно указанного аргумента, они могут содержать и какие-нибудь другие аргументы, отличные от a и b.

Формулу такого вида мы называем специальной формулой равенства, соответствующей (или относящейся к) указанному аргументу рассматриваемого предикатного символа или функционального знака.

[Этим предикатным символом или соответственно функциональным знаком и указанием интересующего нас аргумента такая формула определяется однозначно с точностью до обозначения свободных переменных, стоящих на месте остальных аргументов, если таковые имеются.]

В число формул вида

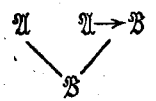
$$a = b \to (\mathfrak{P}(a) \to \mathfrak{P}(b)),$$

[1]) Эту «теоретико-доказательственную» сколемовскую нормальную форму следует отличать от двойственной ей (т. е. получающейся из нее в результате изменения ролей кванторов всеобщности и существования) «теоретико-модельной сколемовской нормальной формы» (см. с. 233 этого тома).

в частности, включается и формула

$$a = b \to (a = c \to b = c).$$

8. Всякий вывод допускает разложение на нити. Если, начиная с заключительной формулы вывода, мы напишем над каждой формулой, получающейся из какой-либо предшествующей ей в выводе формулы в результате повторения, подстановки или переименования либо по одной из схем (α) и (β), эту самую предшествующую формулу, а над каждой результирующей формулой какой-либо схемы заключения — обе формулы, из которых она получается по этой схеме, причем с соблюдением следующего порядка:



то получим то, что мы называем фигурой разложения данного вывода.

Взаимно однозначного соответствия между формулами получившейся таким образом фигуры и формулами самого вывода, вообще говоря, нет. Более того, одна и та же формула вывода в фигуре разложения может стоять во многих местах.

Над исходными формулами в фигуре разложения не стоят никакие другие формулы; над результирующей формулой любой схемы заключения стоят две формулы (здесь имеет место ветвление вверх); над любой другой формулой стоит по одной формуле. Последовательность формул из данной фигуры разложения, начинающаяся какой-либо исходной формулой и такая, что за каждой формулой, не являющейся заключительной формулой вывода, следует формула, стоящая в этой фигуре непосредственно под ней, называется нитью доказательства.

9. С помощью этой процедуры разложения вывода на нити в любом конкретном выводе можно все подстановки перенести в исходные формулы, т. е. по данному выводу можно построить такой другой вывод, в котором подстановки производятся только в исходные формулы или в такие формулы, которые получаются из исходных в результате одной или нескольких следующих друг за другом подстановок. Разумеется, при этом нужно допустить, чтобы в схемах (α) и (β) вместо переменной a могли фигурировать другие свободные индивидные переменные.

§ 4. Исчисление предикатов без правила подстановки

Возможность переноса подстановок в исходные формулы открывает перед нами возможность обходиться *без использования правила подстановки*. Этого можно добиться, допустив в качестве исходных формул не только прежние исходные формулы рассматриваемого

формализма, но еще и формулы, получающиеся из них в результате одной или нескольких следующих друг за другом подстановок, а кроме того, ликвидировав выделенную роль переменной a в схемах (α) и (β).

В частности, таким образом удается полностью исключить формульные переменные из выводов формул, не содержащих формульных переменных, так что формально-дедуктивное рассмотрение аксиоматических теорий вполне может производиться *без привлечения формульных переменных*.

При таком способе изложения правило, позволяющее брать в качестве исходных формул любые тождественно истинные формулы исчисления высказываний, расширяется: в качестве исходных формул допускаются любые формулы, получающиеся из тождественно истинных формул исчисления высказываний в результате каких-либо подстановок. Функции основных формул (a) и (b) в этом случае выполняют схемы формул

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(t)$$

и

$$\mathfrak{A}(t) \to \exists x \mathfrak{A}(x),$$

где t обозначает некоторый терм, а место аксиом занимают схемы аксиом, в которых прежние свободные индивидные переменные заменены обозначениями произвольных термов, а прежние формульные переменные заменены обозначениями произвольных формул. Так, например, вместо аксиом равенства у нас появляются схемы аксиом

$$t = t$$

и

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s})),$$

где $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ и t обозначают произвольные термы.

Тем не менее здесь имеется возможность сохранить в аксиомах свободные индивидные переменные (и, в частности, избежать замены собственных аксиом соответствующими схемами) без того, чтобы потребовалось добавлять правило подстановки. Действительно, с помощью схемы формул $\forall x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(t)$ и схемы (α) в ее модифицированном виде

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(c)}{\mathfrak{A} \to \forall x \mathfrak{B}(x)},$$

где c — произвольная, не входящая ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{B}(x)$ свободная индивидная переменная, правило подстановки вместо свободных индивидных переменных мы получаем в качестве производного

правила. Это означает, что из формулы $\mathfrak{G}(a)$ со свободной переменной a для произвольного терма t может быть выведена формула $\mathfrak{G}(t)$. Это достигается следующим образом.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{G}(a)$ не содержит переменной x. Мы возьмем какую-нибудь выводимую формулу $\mathfrak{P}$ (например, формулу вида $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$), в которую не входит переменная a. Образованная с помощью этой формулы формула $\mathfrak{G}(a) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{G}(a))$ может быть взята в качестве исходной формулы, так как она получается в результате подстановки из тождественно истинной формулы $A \to (B \to A)$). Вместе с формулой $\mathfrak{G}(a)$ она при помощи схемы заключения дает нам формулу $\mathfrak{P} \to \mathfrak{G}(a)$, из которой при помощи схемы (α) — поскольку $\mathfrak{P}$ не содержит переменной a — мы получаем формулу $\mathfrak{P} \to \forall x \mathfrak{G}(x)$. С другой стороны, схема формул для квантора всеобщности дает нам формулу $\forall x \mathfrak{G}(x) \to \mathfrak{G}(t)$. Но две полученные формулы вместе с выводимой формулой $\mathfrak{P}$ двухкратным применением схемы заключения дают нам формулу $\mathfrak{G}(t)$.

В том случае, если формула $\mathfrak{G}(a)$ содержит переменную x, мы сначала перейдем от этой формулы к некоторой формуле $\mathfrak{G}^*(a)$, переименовывая x в какую-нибудь другую, не встречающуюся в формуле $\mathfrak{G}(a)$ связанную переменную; затем из $\mathfrak{G}^*(a)$ только что указанным способом мы получим формулу $\mathfrak{G}^*(t)$, а из этой последней путем переименования появившейся вместо x переменной получим формулу $\mathfrak{G}(t)$.

Правило переименования связанных переменных мы, впрочем, тоже можем сделать производным, если в схемах формул для кванторов ликвидируем выделенную роль переменной x. Тогда эти схемы формул будут иметь вид

$$\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}(t) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}(t) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}),$$

а модифицированные схемы (α) и (β) запишутся в виде

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{s})}{\mathfrak{A} \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x})} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{A}}{\exists \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}},$$

причем для свободной переменной $\mathfrak{s}$ и для связанной переменной $\mathfrak{x}$ должно выполняться условие, что $\mathfrak{s}$ не входит в $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{x}$ не входит в $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$.

Тот факт, что правило переименования становится производным, если за основу взять эти две схемы, вытекает из того, что с помощью этих схем может быть выведена любая формула вида

$$\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \forall \mathfrak{y} \mathfrak{A}(\mathfrak{y}),$$

равно как и любая формула вида

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \exists \mathfrak{y} \mathfrak{A}(\mathfrak{y}).$$

Например, для того чтобы вывести формулу

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \rightarrow \exists \mathfrak{y} \mathfrak{A}(\mathfrak{y}),$$

мы возьмем не входящую в $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ свободную индивидную переменную $\mathfrak{c}$. Схема формул для квантора существования даст нам формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \rightarrow \exists \mathfrak{y} \mathfrak{A}(\mathfrak{y}),$$

а из этой последней по модифицированной схеме (β) мы получим формулу

$$\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \rightarrow \exists \mathfrak{y} \mathfrak{A}(\mathfrak{y}).$$

Таким образом, мы приходим к некоторой видоизмененной форме исчисления предикатов, где в качестве исходных формул мы допускаем:

1) формулы, получающиеся в результате подстановки из тождественно истинных формул исчисления высказываний,

2) формулы, получающиеся из схем для кванторов,

3) собственные аксиомы и формулы, получающиеся из схем аксиом.

Переход от исходных формул или соответственно от ранее полученных формул к последующим формулам производится исключительно при помощи модифицированных схем (α), (β) и схемы заключения.

Наконец, укажем на возможность произвести *исключение формульных переменных с сохранением правила подстановки вместо свободных индивидных переменных, а также правила переименования связанных переменных.* Тогда на месте исходных формул, содержащих связанные переменные, у нас появятся такие схемы формул, которые от соответствующих формул будут отличаться только тем, что эти формульные переменные будут заменены буквами, обозначающими формулы; так, в частности, вместо основных формул (a) и (b) у нас появятся схемы формул

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}(a) \rightarrow \exists x \mathfrak{A}(x),$$

а вместо аксиомы равенства (J_2) появится схема

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)).$$

В остальном же первоначальный формализм останется без изменений.

УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВЫЧИСЛИМОЙ ФУНКЦИИ И ТЕОРЕМА ЧЁРЧА О ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШИМОСТИ

§ 1. Понятие регулярно вычислимой функции. Вычисление в формализме (Z^0)

Под арифметической функцией мы понимаем функцию, областью изменения аргументов которой является натуральный ряд (мы считаем его начинающимся с нуля) и все значения которой тоже являются натуральными.

При любом $\mathfrak{r} > 1$ рассмотрение арифметических функций $\mathfrak{r}$ аргументов может быть сведено к рассмотрению функций одного аргумента. Это делается при помощи введенной в гл. IV настоящего тома[1]) рекурсивной функции $\eta^{(\mathfrak{r})}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}})$ и обращающих ее рекурсивных функций $\eta_1^{(\mathfrak{r})}(n), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{r})}(n)$, устанавливающих взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{r}$-членными наборами чисел и самими этими числами. Действительно, для любой функции $\mathfrak{r}$ аргументов $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}})$ можно определить функцию одного аргумента

$$\mathfrak{f}^*(n) = \mathfrak{f}\left(\eta_1^{(\mathfrak{r})}(n), \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{r})}(n)\right),$$

при помощи которой исходная функция $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}})$ представляется в виде

$$\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{f}^*(\eta^{(\mathfrak{r})}(n_1, \ldots, n_{\mathfrak{r}})).$$

Так как функции $\eta^{(\mathfrak{r})}, \eta_1^{(\mathfrak{r})}, \ldots, \eta_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{r})}$ могут быть определены посредством примитивных рекурсий, вычисление значений функции $\mathfrak{f}$ для заданной системы значений ее аргументов сводится к вычислению некоторого значения функции $\mathfrak{f}^*$; и обратно: вычисление значений функции $\mathfrak{f}^*$ сводится к вычислению значений функции $\mathfrak{f}$.

Ниже речь пойдет об уточнении понятия вычислимой арифметической функции и, как следует из только что проведенного

[1]) См. с. 298.

рассуждения, мы можем при этом ограничиться рассмотрением функций только *одного аргумента* [1]).

Относительно процедур вычисления арифметических функций одного аргумента можно считать, что каждая такая процедура может быть изображена в виде процедуры вывода в подходящем дедуктивном формализме, содержащем цифры, знак равенства и одноместный функциональный знак $\mathfrak{f}(m)$ или же какое-нибудь составное выражение $\mathfrak{f}(m)$ с одной аргументной переменной, представляющее вычисляемую функцию. Вычисление значения этой функции для значения аргумента, равного $\mathfrak{m}$, мы будем интерпретировать как вывод равенства

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n},$$

где $\mathfrak{n}$ — значение вычисляемой функции для данного аргумента; при этом для любой цифры $\mathfrak{l}$, отличной от $\mathfrak{y}$, равенство $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{l}$ должно быть невыводимым.

Если это условие выполнено для некоторой функции $\mathfrak{f}$ и данного формализма F, то функцию $\mathfrak{f}$ мы будем называть вычислимой в формализме F.

Факт переноса вычисления в дедуктивный формализм сам по себе еще не обязательно дает какое-либо пригодное для применений уточнение понятия вычислимости, если не потребовать, чтобы оперирование с выражениями происходило в этом формализме по четко описанным правилам. Поэтому мы введем предположение, которое однажды уже было положено в основу изложения теорем Гёделя: мы будем считать, что может быть установлена такая нумерация выражений нашего формализма натуральными числами, при которой номера выводимых формул будут представлять собой значения некоторой рекурсивной функции [2]) $j(n)$.

Замечание. Это условие, как ранее было показано [3]), выполняется всякий раз, когда нумерация выражений формализма такова, что может быть указан некоторый рекурсивный предикат $\mathfrak{B}(m, n)$, который для любых чисел $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}$ является номером некоторой последовательности формул, которая представляет собой вывод формулы с номером $\mathfrak{n}$.

К упомянутому выше допущению мы добавим два — не очень существенных — ограничения на нумерацию: мы будем считать, что можно указать рекурсивную формулу $\mathfrak{P}(m, n)$, обладающую тем свойством, что любые два числа $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ находятся в отношении $\mathfrak{P}(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{l}$ является номером равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r}$ — некоторая цифра. Будем также считать, что можно указать такую рекурсивную функцию $c(m)$, что значение ее для числа $\mathfrak{k}$, являющегося номером равенства $\mathfrak{t} = \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — цифра, равно самой этой цифре $\mathfrak{n}$.

Так мы приходим к следующему определению: арифметическую функцию одного аргумента мы будем называть регулярно вычислимой, если она вычислима в таком дедуктивном формализме F, для выражений которого можно установить нумерацию, удовлетворяющую только что перечисленным условиям. Условия эти мы будем называть условиями рекурсивности.

Существенным в этом определении является то, что для каждой отдельной подлежащей вычислению функции может быть выбран свой формализм F. Согласно сказанному этот формализм всякий раз представляет собой изображение некоторой процедуры вычисления, которая, хотя определенным образом и нормируется, но все-таки может быть определена с достаточной степенью свободы.

Однако может быть указан некоторый формализм, обладающий тем свойством, что всякая регулярно вычислимая функция вычислима и в этом формализме, причем этот формализм может быть взят довольно узким. Достаточно взять, например, следующий формализм (Z^0):

Всякая формула этого формализма представляет собой равенство между термами. В качестве термов мы берем, во-первых, термы рекурсивной арифметики (рекурсивные термы), с тем, однако, ограничением, что используемые функциональные знаки берутся только одноместными и двуместными. Во-вторых, термами считаются выражения вида $\tilde{\mu}_x \mathfrak{s}(x)$ и $\tilde{\mu}_x(\mathfrak{s}(x), \mathfrak{t})$, где $\mathfrak{s}(c)$ — какой-либо рекурсивный терм. В-третьих, термами считаются выражения, представляющие собой введенные посредством явных определений функциональные знаки с термами в качестве аргументов. И, наконец, термами считаются также любые выражения, получающиеся из других термов в результате замены одной или нескольких свободных индивидных переменных какими-либо термами [1]).

---

[1]) Впрочем, все дальнейшие определения и теоремы, формулируемые для функций одного аргумента, совершенно аналогичным образом могут быть распространены и на функции нескольких аргументов, и это показывает, что полученное таким образом понятие вычислимой функции нескольких аргументов в части результатов совпадает с тем уточнением, которое получается из уточнения понятия вычислимой функции одного аргумента посредством только что указанного сведения функций нескольких аргументов к функциям одного аргумента с помощью функции $\eta^{(r)}(n_1, \ldots, n_r)$ и ее обращений.

[2]) Термин рекурсивный мы будем здесь употреблять в том же самом смысле, в каком он употреблялся нами в рекурсивной арифметике. Так, под рекурсивной функцией мы будем понимать такую функцию, которая может быть определена при помощи примитивных рекурсий. См. с. 271.

[3]) См. с. 345—347.

[1]) В отличие от установленных нами правил оперирования со связанными переменными, обычное ограничение, требующее не допускать коллизий между связанными переменными (см., например, с. 31), здесь

В качестве исходных формул в выводах допускаются:

1. Рекурсивные равенства, построенные по схеме примитивной рекурсии, и, значит, в частности, рекурсивные равенства для сложения и умножения, а также рекурсивные равенства для функций $\operatorname{sgn}(n)$ и $\overline{\operatorname{sgn}}(n)$:

$$\operatorname{sgn}(0)=0, \quad \operatorname{sgn}(n')=0',$$
$$\overline{\operatorname{sgn}}(0)=0', \quad \overline{\operatorname{sgn}}(n')=0.$$

2. Явные определения вида

$$\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_r)=\mathfrak{t}(n_1, \ldots, n_r),$$

где $\mathfrak{f}$ — некоторый r-местный (ранее не использовавшийся) функциональный знак, а $\mathfrak{t}(n_1, \ldots, n_r)$ — терм с единственными свободными переменными $n_1, \ldots, n_r$.

3. Формулы вида

$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), a)=\operatorname{sgn}(\mathfrak{t}(a))\cdot\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), a')+\overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{t}(a))\cdot a$$

и

$$\tilde{\mu}_x\mathfrak{t}(x)=\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), 0),$$

где $\mathfrak{t}(a)$ — какой-либо рекурсивный терм [схема формул $(\tilde{\mu})$].

Разрешаются следующие способы перехода от уже имеющихся формул к новым:

1. Подстановка какого-либо терма вместо всех вхождений данной свободной индивидной переменной в данную формулу.

2. Схема замены

$$\frac{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{a})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{b})},$$

где $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ означает формулу, получающуюся из выражения $\mathfrak{A}(y)$ в результате замены буквы (именной переменной) y термом $\mathfrak{a}$, а $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$ получается из $\mathfrak{A}(y)$ в результате замены y термом $\mathfrak{b}$.

Замечание. Эту именную переменную мы не причисляем к свободным индивидным переменным, которые у нас считаются термами. Она используется лишь для описания схемы замены.

Описанный нами формализм (Z^0) не содержит ни логических символов, ни формульных переменных. В качестве единственной

не формулируется. Это ограничение в рассматриваемом формализме оказывается на самом деле ненужным, так как не разрешается в качестве операции построения термов применять $\tilde{\mu}$-символ к какому-либо терму, в котором уже содержится некоторый $\tilde{\mu}$-символ, и поэтому терм вида $\tilde{\mu}_x\mathfrak{f}(x, \tilde{\mu}_x\mathfrak{l}(x, x))$ может возникнуть лишь в результате замены какой-нибудь индивидной переменной термом $\tilde{\mu}_x\mathfrak{l}(x, x)$. Это обстоятельство позволяет нам обходиться здесь переменной x в качестве единственной связанной переменной.

связанной переменной в нем фигурирует относящаяся к $\tilde{\mu}$-символу переменная x.

Схема замены, примененная к формуле $a+0=a$ (при этом в качестве $\mathfrak{A}(y)$ берется выражение $y=a$), дает нам формулу $a=a$. С помощью этой формулы и схемы замены от равенства $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ можно перейти к равенству $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$. В сочетании с этим переходом схема замены позволяет для любой рекурсивной функции $\mathfrak{g}$ одного аргумента и для любой цифры $\mathfrak{f}$ вывести из рекурсивных равенств, представляющих собой рекурсивное определение функции $\mathfrak{g}$, равенство $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})=\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — значение $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$.

Чтобы прокомментировать схему формул $(\tilde{\mu})$, мы заметим, что с помощью этой схемы для любого рекурсивного терма $\mathfrak{t}(a)$ и для любой цифры $\mathfrak{n}$ получается равенство

$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n})=\mathfrak{n},$$

если значение терма $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ равно 0, и равенство

$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n})=\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n}'),$$

если значение $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ отлично от 0.

Пусть $\mathfrak{l}$ — цифра такая, что $\mathfrak{l}\geqslant\mathfrak{n}$, и пусть значение $\mathfrak{f}(\mathfrak{l})$ равно 0. Пусть терм $\mathfrak{t}(\mathfrak{f})$ — первый среди термов $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}), \mathfrak{t}(\mathfrak{n}'), \ldots, \mathfrak{t}(\mathfrak{l})$, принимающий значение 0. Тогда с помощью схемы $(\tilde{\mu})$ можно получить равенства

$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n})=\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n}'),$$
$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n}')=\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n}''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{f}-1)=\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{f}),$$
$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{f})=\mathfrak{f},$$

а из них — равенство

$$\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), \mathfrak{n})=\mathfrak{f}.$$

Таким образом, для любого рекурсивного терма $\mathfrak{t}(a)$ на основе схемы $(\tilde{\mu})$ терм $\tilde{\mu}_x(\mathfrak{t}(x), n)$ формально представляет некоторую функцию от n, значение которой для любого числа $\mathfrak{n}$, для которого может быть указано $\mathfrak{l}$ такое, что $\mathfrak{l}\geqslant\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{t}(\mathfrak{l})=0$, равно наименьшему среди чисел этого рода, а в том случае, когда для всех $\mathfrak{l}\geqslant\mathfrak{n}$ значение терма $\mathfrak{t}(\mathfrak{l})$ отлично от 0, значения этой функции для всех чисел, бóльших или равных $\mathfrak{n}$, определены лишь с точностью до совпадения [1]).

[1]) С. К. Клини в своей диссертации: Kleene S. C. A theory of positive integers in formal logic. — Amer. J. Math., 1933, 57, № 1, 2, показал, что любая функция такого рода допускает явное определение в построенном А. Чёрчем формализме «конверсий».

Схема

$$\tilde{\mu}_x t(x) = \tilde{\mu}_x (t(x), 0)$$

представляет собой явное определение символа $\tilde{\mu}_x t(x)$. Если $t(a)$ — какой-либо рекурсивный терм, для которого может быть указана цифра n такая, что имеет место равенство $t(n) = 0$, и если $\mathfrak{k}$ является наименьшей среди цифр, удовлетворяющих этому условию [после указания цифры n она может быть найдена путем вычисления термов $t(0)$, $t(0')$, ..., $t(n-1)$], то при помощи этого определения, взятого в сочетании со схемой $(\tilde{\mu})$, можно будет вывести равенство

$$\tilde{\mu}_x t(x) = \mathfrak{k}.$$

В том случае, когда значение терма $t(n)$ отлично от 0 для всех цифр n, определяющее равенство для $\tilde{\mu}_x t(x)$ и схема $(\tilde{\mu})$ не позволяют формально вычислить значение терма $\tilde{\mu}_x t(x)$ [1]).

Что же касается вопроса о непротиворечивости (Z^0), то непротиворечивость в смысле невозможности одновременного вывода какой-нибудь формулы и ее отрицания имеет место тривиальным образом, так как этот формализм вообще не содержит отрицания. Однако из этой непротиворечивости еще не вытекает — в отличие от рассматривавшихся до сих пор арифметических формализмов, — что каждое выводимое нумерическое равенство является верным равенством и что, следовательно, не может быть выведено равенство между двумя различными цифрами. Это условие мы будем называть нумерической непротиворечивостью.

Все же формализм (Z^0) удовлетворяет этому условию. В этом мы сможем убедиться, рассмотрев некоторый формализм (Z^1), получающийся из рекурсивной арифметики путем добавления к ней μ-символа и относящихся к нему формул [2])

$$(\mu_1') \qquad A(a) \to A(\mu_x A(x)),$$

$$(\mu_2) \qquad A(a) \to \mu_x A(x) \leqslant a,$$

$$(\mu_3') \qquad \neg A(\mu_x A(x)) \to \mu_x A(x) = 0$$

с соблюдением следующих соглашений.

[1]) Следовательно, в этом отношении имеется существенное различие между ролью терма $\tilde{\mu}_x t(x)$ в формализме (Z^0) и ролью терма $\mu_x(t(x) = 0)$ в рассмотренном в гл. V данного тома формализме (Z_μ). Как мы знаем, в случае выводимости в (Z_μ) формулы $\forall x(t(x) \neq 0)$ с помощью аксиомы (μ_3') может быть выведено равенство

$$\mu_x(t(x) = 0) = 0.$$

[2]) Обозначения этих формул выбраны в соответствии с обозначениями, приведенными на с. 164.

Если $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ — формула, не содержащая связанной переменной $\mathfrak{x}$, то выражение $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ считается термом. Относящаяся к какому-либо μ-символу $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ связанная переменная $\mathfrak{x}$ может быть переименована в какую-нибудь другую; при этом переименование должно производиться во всей области действия рассматриваемого μ-символа. Подстановки вместо свободных переменных, как и переименования связанных, должны производиться таким образом, чтобы в результате их выполнения ни один μ-символ не попадал в область действия другого, снабженного той же самой связанной переменной (условие недопущения коллизий между связанными переменными).

Употребление формул (μ_1'), (μ_2) и (μ_3') в качестве исходных формул выводов должно подчиняться тому условию, что ни в одной из формул, которые при возвратном переносе подстановок в исходные формулы будут подставляться в формулы (μ_1'), (μ_2) и (μ_3') вместо именной формы $A(\mathfrak{c})$, переменная $\mathfrak{c}$ не должна находиться в области действия какого-либо из μ-символов [1]).

Замечание. С учетом только что наложенного условия, в формализме (Z^1) — так же, как это было сделано при описании формализма (Z^0), — можно было бы сэкономить правило недопущения коллизий между связанными переменными, так что мы и здесь могли бы обойтись одной-единственной связанной переменной x. Однако мы этого не делаем, так как хотим, чтобы формализм (Z^1) представлял собой *подформализм рассмотренного в гл. V формализма* (Z_μ), чем, в частности, мы достигаем того, что всякая выводимость, установленная в формализме (Z^1), автоматически будет иметь место и в (Z_μ).

Непротиворечивость же формализма (Z^1) — а тем самым и его нумерическая непротиворечивость — вытекает из рассуждений, проведенных нами в конце гл. II [2]).

С другой стороны, мы можем показать, что каждое числовое равенство, выводимое в (Z^0), выводимо также и в (Z^1).

[1]) Условие это нацелено на то, чтобы при замене формул (μ_1'), (μ_2) и (μ_3') соответствующими схемами формул в ходе применения этих схем у μ-символов не возникало никаких подчинений вида $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mu_{\mathfrak{z}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}))$ или $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mu_{\mathfrak{z}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}), \mathfrak{x})$.

[2]) См. с. 163—165. По сравнению с формализмом, непротиворечивость которого была там установлена, формализм (Z^1) существенно более узок, так как, во-первых, в нем отсутствуют кванторы, а во-вторых, ограничительное условие, которое в формализме, рассмотренном в гл. II, было наложено на применения формулы (μ_2), в (Z^1) распространяется также и на применения формул (μ_1') и (μ_3').

Ввиду этой особенности формализма (Z^1) процедуру построения общих замен и получения резольвенты при установлении его непротиворечивости необходимо применять лишь в случае, когда все критические формулы (в том числе и формулы ε-равенства) имеют ранг 1, так что процедурой функциональных замен здесь можно и не пользоваться, ограничившись одними лишь цифровыми заменами.

Действительно, кроме тех дедуктивных средств, которые содержатся непосредственно в (Z^1), формализм (Z^0) содержит только явные определения функциональных знаков, явное определение функции $\tilde{\mu}_x t(x)$, схему замены и схему $(\tilde{\mu})$.

Явные определения из выводов нумерических равенств устраняются легко. Схема замены в формализме (Z^1), ввиду наличия в нем аксиомы (J_2), правила подстановки и схемы заключения, является производной схемой. А выводимость схемы формул $(\tilde{\mu})$ может быть установлена в (Z^1) с использованием явного определения символа $\tilde{\mu}_x(t(x), n)$. Это делается следующим образом. Сначала с помощью равенства

$$(1) \qquad \mu_x(A(x), n) = \mu_x(n \leqslant x \,\&\, A(x))$$

мы вводим символ $\mu_x(A(x), n)$. Опираясь на это равенство, мы с помощью формул (μ_1'), (μ_2) и (μ_3') получаем формулы

$$(2) \quad \begin{cases} a \leqslant b \,\&\, A(b) \to A(\mu_x(A(x), a)), \\ a \leqslant b \,\&\, A(b) \to a \leqslant \mu_x(A(x), a), \\ a \leqslant b \,\&\, A(b) \to \mu_x(A(x), a) \leqslant b, \\ \mu_x(A(x), a) \neq 0 \to A(\mu_x(A(x), a)), \\ \mu_x(A(x), a) \neq 0 \to a \leqslant \mu_x(A(x), a), \end{cases}$$

а затем с помощью формул

$$a \leqslant a, \quad a \leqslant b \,\&\, b \leqslant a \to a = b,$$
$$a \neq 0 \,\&\, a \leqslant b \to b \neq 0,$$
$$a \leqslant b \,\&\, a \neq b \to a' \leqslant b,$$
$$a' \leqslant b \to a \leqslant b, \quad a' \leqslant b \to b \neq 0,$$

аксиомы равенства (J_2) и средств исчисления высказываний — формулы

$$(3) \quad \begin{cases} A(a) \to \mu_x(A(x), a) = a, \\ \neg A(a) \to \mu_x(A(x), a) = \mu_x(A(x), a'), \end{cases}$$

причем для вывода второй из этих формул нужно воспользоваться дизъюнкцией

$$\mu_x(A(x), a) = 0 \vee \mu_x(A(x), a) \neq 0.$$

Если мы теперь добавим еще определяющую схему

$$\tilde{\mu}_x(t(x), n) = \mu_x(t(x) = 0, n),$$

применение которой ограничим рекурсивными термами $t(a)$, то, подставив в (3) вместо именной формы $A(c)$ входящей в (3) формульной переменной какую-либо рекурсивную формулу $t(c) = 0$,

мы с помощью этой схемы получим формулы

$$(4) \quad \begin{cases} t(a) \neq 0 \to \tilde{\mu}_x(t(x), a) = \tilde{\mu}_x(t(x), a'), \\ t(a) = 0 \to \tilde{\mu}_x(t(x), a) = a, \end{cases}$$

из которых, далее, с помощью формул

$$b = 0 \to \operatorname{sgn}(b) \cdot c + \overline{\operatorname{sgn}}(b) \cdot a = a,$$
$$b \neq 0 \to \operatorname{sgn}(b) \cdot c + \overline{\operatorname{sgn}}(b) \cdot a = c,$$
$$b = 0 \vee b \neq 0$$

получится формула

$$(5) \qquad \tilde{\mu}_x(t(x), a) = \operatorname{sgn}(t(a)) \cdot \tilde{\mu}_x(t(x), \cdot a') + \overline{\operatorname{sgn}}(t(a)) \cdot a.$$

Таким образом, мы можем каждую из получаемых по схеме $(\tilde{\mu})$ формул вывести из формул (μ_1'), (μ_2) и (μ_3'), пользуясь средствами рекурсивной арифметики и добавляя к ним одни лишь явные определения.

При этом формулы (μ_1'), (μ_2) и (μ_3') используются допустимым в (Z^1) способом. В самом деле, при выводе формул (2) вместо именной формы $A(c)$ формульной переменной, фигурирующей в этих формулах, требуется подставлять формулу $a \leqslant c \,\&\, A(c)$, а после этого при выводе формул (4) в получившиеся формулы вместо формульной переменной $A(c)$ надо будет подставить рекурсивную формулу $t(c) = 0$. Остальные подстановки в выводе интересующей нас формулы (5) мы должны будем производить только вместо индивидных переменных. Кроме того, так как эта формула не содержит формульных переменных, то при ее использовании в выводе некоторой нумерической формулы после применения к этому выводу операции возвратного переноса подстановок в исходные формулы все подстановки в формулу (5) будут производиться только вместо индивидных переменных.

Таким образом, при возвратном переносе в исходные формулы всех подстановок будут производиться только такие подстановки вместо именной формы $A(c)$ в формулы (μ_1'), (μ_2) и (μ_3'), при которых подставляемая формула будет получаться из некоторой формулы

$$a \leqslant c \,\&\, t(c) = 0$$

с рекурсивным термом $t(c)$ в результате ряда подстановок вместо индивидных переменных. Так как в этих подстановках подставляемые термы определены независимо от выбора переменной c именной формы $A(c)$, то мы можем осуществить этот выбор таким образом, чтобы переменная c в упомянутые термы не входила. Тогда мы добьемся того, чтобы в этих формулах, подставляемых вместо формульной переменной $A(c)$ в формулы (μ_1'), (μ_2) и (μ_3')

и получающихся из формул вида

$$a \leqslant \mathfrak{c} \,\&\, \mathfrak{t}(\mathfrak{c}) = 0$$

в результате подстановок вместо индивидных переменных, переменная $\mathfrak{c}$ никогда не попадала в область действия никакого μ-символа.

Таким образом, действительно, по любому выводу нумерического равенства, произведенному средствами формализма (Z^0), можно построить вывод этого равенства в формализме (Z^1), и так как этот последний формализм нумерически непротиворечив, то отсюда получается и нумерическая непротиворечивость формализма (Z^0).

Теперь мы покажем, что *всякая регулярно вычислимая арифметическая функция одного аргумента вычислима в* (Z^0).

В самом деле, пусть нам дана регулярно вычислимая арифметическая функция одного аргумента. Для нее может быть указан такой формализм F, в котором она представлена каким-либо одноместным функциональным знаком $\mathfrak{f}(m)$ или каким-либо выражением $\mathfrak{f}(m)$ с единственной аргументной переменной, причем это представление таково, что если $\mathfrak{n}$ является значением этой функции для аргумента $\mathfrak{m}$, то равенство

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$$

выводимо в F, в то время как для любой отличной от $\mathfrak{n}$ цифры $\mathfrak{l}$ равенство $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{l}$ в F невыводимо. Кроме того, для этого формализма должна иметься такая нумерация, по отношению к которой будут выполняться три упоминавшихся выше условия рекурсивности. Мы будем считать, что нумерация с этим свойством задана, и по очереди воспользуемся всеми тремя этими условиями.

Первое из них гласит, что номера выводимых в F формул образуют область значений некоторой рекурсивной функции $\mathfrak{j}(n)$. Пусть $\mathfrak{m}$ — какая-либо цифра, а $\mathfrak{n}$ — значение рассматриваемой нами функции для аргумента $\mathfrak{m}$. Тогда вследствие выводимости равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$ номер этого равенства является некоторым значением функции $\mathfrak{j}(n)$, т. е. можно указать такую цифру $\mathfrak{z}$, что значение $\mathfrak{j}(\mathfrak{z})$ будет номером этого равенства. Пусть $\mathfrak{e}$ — наименьшая из тех цифр $\mathfrak{f}$, для которых значение $\mathfrak{j}(\mathfrak{f})$ представляет собой номер некоторого равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$. Тогда $\mathfrak{j}(\mathfrak{e})$ является номером некоторого выводимого в F равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$, и так как в F, кроме равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$, невыводимо никакое другое равенство $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$ с какой-либо цифрой $\mathfrak{r}$, то $\mathfrak{r}$ должно совпадать с $\mathfrak{n}$, а следовательно, и значение $\mathfrak{j}(\mathfrak{e})$ должно совпадать со значением $\mathfrak{j}(\mathfrak{z})$.

Второе условие рекурсивности утверждает, что может быть указана такая рекурсивная формула $\mathfrak{P}(m, n)$, что для любых цифр $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ отношение $\mathfrak{P}(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{l}$ является номером некоторого равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$, где

$\mathfrak{r}$ — цифра. Согласно только что доказанному имеет место соотношение $\mathfrak{P}(\mathfrak{j}(\mathfrak{e}), \mathfrak{m})$, в то время как для любой цифры $\mathfrak{f}$, меньшей $\mathfrak{e}$, отношение $\mathfrak{P}(\mathfrak{j}(\mathfrak{f}), \mathfrak{m})$ места не имеет. При этом формула $\mathfrak{P}(m, n)$, будучи рекурсивной, имеет вид

$$\mathfrak{p}(m, n) = 0,$$

где $\mathfrak{p}(m, n)$ — некоторый рекурсивный терм. Равным образом и выражение $\mathfrak{p}(\mathfrak{j}(l), \mathfrak{m})$ тоже является рекурсивным термом, а цифра $\mathfrak{e}$ — наименьшей среди тех цифр $\mathfrak{z}$, для которых равенство $\mathfrak{p}(\mathfrak{j}(\mathfrak{z}), \mathfrak{m}) = 0$ имеет место. В соответствии со сказанным в формализме (Z^0) выводимо равенство

$$\tilde{\mu}_x \mathfrak{p}(\mathfrak{j}(x), \mathfrak{m}) = \mathfrak{e},$$

а потому и равенство

$$\mathfrak{e} = \tilde{\mu}_x \mathfrak{p}(\mathfrak{j}(x), \mathfrak{m}).$$

Согласно третьему условию рекурсивности может быть указан такой рекурсивный терм $\mathfrak{c}(n)$, что для любой цифры $\mathfrak{f}$, являющейся номером некоторого равенства $\mathfrak{t} = \mathfrak{r}$, значение постоянного терма $\mathfrak{c}(\mathfrak{f})$ равно $\mathfrak{r}$, и тем самым в формализме (Z^0) выводимо равенство

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{r}.$$

Так как значение $\mathfrak{j}(\mathfrak{e})$ представляет собой номер равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$, то в ($Z^0$) выводимо, в частности, равенство

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{j}(\mathfrak{e})) = \mathfrak{n}.$$

Но это равенство, взятое вместе с формулой

$$\mathfrak{e} = \tilde{\mu}_x \mathfrak{p}(\mathfrak{j}(x), \mathfrak{m}),$$

с применением схемы замены дает равенство

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{j}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{p}(\mathfrak{j}(x), \mathfrak{m}))) = \mathfrak{n}.$$

В общем, как следствие выполнения условий рекурсивности получается, что для всякой цифры $\mathfrak{m}$ в формализме (Z^0) выводимо равенство

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{j}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{p}(\mathfrak{j}(x), \mathfrak{m}))) = \mathfrak{n},$$

где $\mathfrak{n}$ — значение рассматриваемой [представленной в F символом или выражением $\mathfrak{f}(m)$] функции для аргумента $\mathfrak{m}$. Таким образом, если с помощью равенства

$$\mathfrak{q}(n) = \mathfrak{c}(\mathfrak{j}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{p}(\mathfrak{j}(x), n)))$$

ввести одноместный функциональный знак $\mathfrak{q}(n)$ (как мы знаем, в формализме (Z^0) это допустимо), то для любой цифры $\mathfrak{m}$, если $\mathfrak{n}$

является значением рассматриваемой функции для аргумента $\mathfrak{m}$, мы получим в (Z^0) в качестве выводимой формулы равенство

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}.$$

С другой стороны, ни для какой другой, отличной от $\mathfrak{n}$ цифры $\mathfrak{r}$ равенство

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$$

не будет выводимо, потому что в противном случае в (Z^0) было бы выводимо ложное равенство

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{r},$$

в то время как формализм (Z^0), как мы это установили, нумерически непротиворечив.

Таким образом, действительно, рассматриваемая нами функция, вычислимая в F, вычислима также и в (Z^0), причем в (Z^0) она изображается некоторым термом

$$\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x)),$$

где $\mathfrak{a}(n)$ и $\mathfrak{b}(n, m)$ — рекурсивные термы $\mathfrak{c}(\mathfrak{j}(n))$ и $\mathfrak{p}(\mathfrak{j}(m), n)$. При этом терм $\mathfrak{b}(n, m)$ обладает тем свойством, что для каждой цифры $\mathfrak{m}$ можно указать такую цифру $\mathfrak{f}$, что имеет место отношение $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 0$. В самом деле, для каждой цифры $\mathfrak{m}$ в F, как мы знаем, выводима формула $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$ с некоторой цифрой $\mathfrak{r}$, а по этой формуле можно указать такую цифру $\mathfrak{f}$, что значение $\mathfrak{j}(\mathfrak{f})$ является номером этой формулы; а тогда имеет место отношение $\mathfrak{P}(\mathfrak{j}(\mathfrak{f}), \mathfrak{m})$, т. е. $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 0$.

В результате мы получаем, что любая регулярно вычислимая арифметическая функция одного аргумента вычислима также и в (Z^0) и может быть представлена в виде $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x))$, где $\mathfrak{a}(n)$ и $\mathfrak{b}(m, n)$ — рекурсивные термы, содержащие только указанные переменные, причем терм $\mathfrak{b}(m, n)$ обладает тем свойством, что для всякой цифры $\mathfrak{m}$ может быть указана цифра $\mathfrak{f}$ такая, что имеет место равенство $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 0$.

Верно и обратное: если $\mathfrak{b}(m, n)$ — рекурсивный терм, обладающий указанным свойством и зависящий только от переменных m и n, то терм $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x))$ изображает вычислимую в (Z^0) функцию. Действительно, для всякой цифры $\mathfrak{m}$ после нахождения цифры $\mathfrak{f}$, для которой выполняется равенство $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 0$, при помощи перебора цифр от 0 до $\mathfrak{f}$ мы найдем наименьшую из таких цифр $\mathfrak{r}$, для которых выполняется равенство $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}) = 0$. Если обозначить эту наименьшую цифру через $\mathfrak{e}$, то в (Z^0) будет выводимо равенство

$$\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(\mathfrak{m}, x) = \mathfrak{e},$$

и если $\mathfrak{n}$ представляет собой значение рекурсивного терма $\mathfrak{a}(\mathfrak{e})$ без переменных, то равенство

$$\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(\mathfrak{m}, x)) = \mathfrak{n}$$

также будет выводимо в (Z^0), в то время как ни для какой отличной от $\mathfrak{n}$ цифры $\mathfrak{r}$ равенство $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(\mathfrak{m}, x)) = \mathfrak{r}$ не будет выводимо в (Z^0). Значит, функция $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x))$ действительно вычислима в (Z^0).

В связи с этим мы рассуждаем еще следующим образом: если какой-либо рекурсивный терм $\mathfrak{b}(m, n)$ удовлетворяет тому условию, что по каждой цифре $\mathfrak{m}$ можно указать некоторую цифру $\mathfrak{n}$ такую, что выполняется равенство $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = 0$, то отношение

$$\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x) = l,$$

как это следует из только что проведенного рассуждения, равносильно рекурсивному предикату «имеет место равенство $\mathfrak{b}(n, l) = 0$ и ни для какого z, меньшего l, равенство $\mathfrak{b}(n, z) = 0$ места не имеет». Значит, если теперь обозначить этот предикат через $\mathfrak{C}(n, l)$, то число $\mathfrak{l}$ будет представлять собой значение изображенной термом $\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x)$ функции в том и только том случае, если можно будет указать такое число $\mathfrak{n}$, что имеет место отношение $\mathfrak{C}(\mathfrak{n}, \mathfrak{l})$. Но отсюда по одному ранее уже использованному нами замечанию Клини [1]) получается, что область значений функции, изображенной термом $\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x)$, совпадает с областью значений некоторой рекурсивной функции. Поэтому то же самое верно и в отношении любой функции, представимой в виде $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x))$, где $\mathfrak{a}(n)$ — какая-либо рекурсивная функция.

Тем самым из полученного нами результата о представлении в (Z^0) регулярно вычислимых функций вытекает, что область значений любой регулярно вычислимой функции совпадает с областью значений некоторой рекурсивной функции. Используя квантор существования, мы можем выразить этот факт следующим образом: всякое высказывание вида $\exists x(\mathfrak{f}(x) = a)$, где $\mathfrak{f}$ — какая-либо регулярно вычислимая функция, равносильно некоторому высказыванию вида $\exists x(\mathfrak{g}(x) = a)$, где $\mathfrak{g}$ — соответствующая рекурсивная функция.

§ 2. Общерекурсивные и регулярно вычислимые функции. Нормальное представление. Вычисление в формализме (Z_{00}). Применение канторовской диагональной процедуры

Полученный нами результат о представимости регулярно вычислимых арифметических функций одного аргумента при помощи термов $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x))$ формализма (Z^0) может вызвать подозрение, что понятие регулярно вычислимой функции было определено нами слишком узко.

[1]) См. с. 346.

Чтобы в противовес этому подозрению подчеркнуть широту введенного нами понятия, мы сравним его с другим уточнением понятия вычислимой функции, представляющим собой некоторое обобщение понятия рекурсивной функции. Арифметическую функцию мы будем в дальнейшем называть общерекурсивной или квазирекурсивной, если для вычисления ее значений может быть указана система $\mathfrak{S}$, состоящая из конечного числа равенств следующего типа: выражения,стоящие в левой и правой частях каждого из этих равенств, построены из свободных индивидных переменных, символа 0, штрих-символа и функциональных знаков; среди этих функциональных знаков имеется один, $q(n_1, \ldots, n_r)$, представляющий рассматриваемую функцию в том смысле, что для всякого набора значений $n_1, \ldots\ldots, n_r$ аргументов из системы $\mathfrak{S}$ может быть выведено равенство

$$q(n_1, \ldots, n_r) = f,$$

где f представляет собой соответствующее этому набору аргументов значение функции, и ни для какой отличной от f цифры l равенство

$$q(n_1, \ldots, n_r) = l$$

не может быть выведено из $\mathfrak{S}$. При этом соответствующий вывод может состоять только из шагов следующих трех типов:

1. Подстановка какого-либо терма вместо индивидной переменной, т. е. подстановка некоторого выражения, построенного из символа 0, штрих-символа и функциональных знаков и переменных этой системы равенств;

2. применение схемы замены

$$\frac{a = b, \quad \mathfrak{A}(a)}{\mathfrak{A}(b)},$$

которое производится, как и в случае формализма (Z^0), при помощи (не причисляемой к термам) именной переменной y;

3. применение схемы перестановки

$$\frac{a = b}{b = a}.$$

Замечание. Указанного типа шаги, из которых и состоят рассматриваемые нами выводы, обладают тем свойством, что от равенств между термами они снова ведут к равенствам того же самого рода.

Относительно рассматриваемой системы равенств $\mathfrak{S}$ мы при выполнении указанных условий будем говорить, что она представляет собой квазирекурсивное определение функции, представленной функциональным знаком $q(n_1, \ldots, n_r)$. Легко убедиться, что в соответствии с этим определением[1]), в котором мы следуем С. К. Клини, каждая рекурсивная, т. е. определенная примитивными рекурсиями, функция квазирекурсивна.

Но и каждая регулярно вычислимая функция тоже является квазирекурсивной. Действительно, всякая такая функция в системе (Z^0) представляется, как мы знаем, некоторым термом

$$a(\tilde{\mu}_x b(n, x)),$$

где $a(n)$ и $b(n, m)$ суть рекурсивные термы, содержащие только указанные переменные, причем для каждой цифры m может быть указана цифра f такая, что справедливо равенство $b(m, f) = 0$. Теперь, если мы сначала напишем рекурсивные определения для всех входящих в $a(n)$ и $b(n, m)$ функциональных знаков, потом напишем рекурсивные равенства для функций $\operatorname{sgn}(n)$, $\overline{\operatorname{sgn}}(n)$, $a+b$ и $a \cdot b$ (если они еще не попали в число написанных), а затем введем один двуместный функциональный знак $q(n, m)$ и один одноместный знак $f(n)$ и добавим для них следующие равенства:

$$q(n, a) = \operatorname{sgn}(b(n, a)) \cdot q(n, a') + \overline{\operatorname{sgn}}(b(n, a)) \cdot a,$$

$$f(n) = a(q(n, 0)),$$

---

[1]) См.: Kleene S. C. General recursive functions of natural numbers. — Math. Ann., 1936, **112**, № 5. — Наше определение отклоняется от определения Клини в двух пунктах: во-первых, мы допускаем подстановки не только цифр, но и термов вообще, а во-вторых, добавляем схему перестановки $\frac{a = b}{b = a}$. Эта более общая формулировка правила подстановки облегчает установление квазирекурсивности некоторых функций. Правда, из-за этого несколько усложняется формализация метаматематики самого формализма вычислений; однако для появляющихся при этом дополнительных рассуждений мы можем воспользоваться кое-чем из наших прежних рассмотрений. Принятие схемы перестановки избавляет нас от необходимости добавлять, когда мы пишем определяющие системы равенств для квазирекурсивных функций, к каждому равенству $f = l$ еще и равенство $l = f$, как это, вообще говоря, следует делать при клиниевском определении. — Клиниевское определение понятия общерекурсивной функции является модификацией одного определения К. Гёделя, сформулированного им в одной из принстонских лекций (1934 г.). Это определение в свою очередь восходит к одному похожему, но менее определенно сформулированному понятию, введенному Ж. Эрбраном: Herbrand J. Sur la non-contradiction de l'Arithmétique. — J. reine angew. Math., 1931, **166**, № 1, § 2, Groupe C. — То, что определения Гёделя и Клини описывают один и тот же класс функций, показано в упоминавшейся уже работе Клини. Из нее можно также вывести, что и наше определение описывает тот же самый класс функций.

то получим квазирекурсивное определение нашей функции. При этом $\mathfrak{q}(n, a)$ — функция (не обязательно квазирекурсивная), которая изображается в формализме (Z^0) термом $\tilde{\mu}_x(\mathfrak{b}(n, x), a)$, а $\mathfrak{f}(n)$ — рассматриваемая функция, представленная в (Z^0) термом

$$a(\tilde{\mu}_x \mathfrak{b}(n, x)).$$

Рассуждение, с помощью которого мы убеждались в вычислимости этой функции в формализме (Z^0), показывает нам и то, что написанная система равенств представляет собой квазирекурсивное определение этой функции.

Итак, мы видим, что любая регулярно вычислимая арифметическая функция одного аргумента является квазирекурсивной.

Теперь нам хотелось бы убедиться в справедливости обращения этой теоремы, т. е. показать, что всякая квазирекурсивная арифметическая функция одного аргумента является регулярно вычислимой.

Для любой квазирекурсивной арифметической функции одного аргумента определяющая ее система равенств, взятая вместе с правилом подстановки, схемой замены и схемой перестановки, образует некоторый дедуктивный формализм, в котором эта функция вычислима. Поэтому, чтобы убедиться в том, что она регулярно вычислима, достаточно показать, что для этого формализма можно выбрать такую нумерацию, при которой все три условия рекурсивности окажутся выполненными.

Стремясь несколько усилить этот результат, мы слегка модифицируем наше рассмотрение, расширив рассматриваемые формализмы следующим образом. Мы будем считать, что у нас имеется некоторый неограниченный, общий для всех квазирекурсивных определений, запас индивидных переменных, а также (для каждого $\mathfrak{r}$) общий запас $\mathfrak{r}$-местных функциональных знаков; из этого запаса и будут черпаться переменные и функциональные знаки для наших систем равенств. Термами мы будем называть выражения, которые можно образовывать из символа 0, штрих-символа, а также переменных и функциональных знаков из этого запаса. Это независимое от текущей системы равенств понятие терма будет играть в нашем правиле подстановки важную роль.

Тем самым правило подстановки подвергается некоторому обобщению, но это обобщение не оказывает никакого влияния на выводимость равенств вида

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n},$$

где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — цифры, а $\mathfrak{q}$ является символом какой-либо задаваемой

посредством соответствующей системы равенств функции [1]). Действительно, из любого вывода такого равенства, произведенного на базе обобщенного понятия терма, мы можем при помощи процедуры возвратного переноса подстановок [2]) сначала получить такой вывод, в котором любой подставляемый вместо переменной терм не содержит переменных и в котором поэтому фигурируют только такие переменные, которые входят в определяющие равенства. Затем мы можем устранить все использованные в этом выводе функциональные знаки, не встречающиеся в определяющей системе равенств (знак $\mathfrak{q}$ в ней встречается), заменив цифрой 0 каждый терм, состоящий из какого-либо не входящего в данную систему равенств функционального знака с произвольными термами в качестве аргументов. В самом деле, в результате этих замен на месте любой подстановки всегда будет стоять новая допустимая подстановка, а применения схем замены и перестановки снова перейдут в применения этих схем (возможно в тривиальные применения вида

$$\frac{\mathfrak{a} = \mathfrak{a},\ \mathfrak{A}(\mathfrak{a})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{a})}, \qquad \frac{\mathfrak{a} = \mathfrak{a}}{\mathfrak{a} = \mathfrak{a}},$$

которые можно будет опустить).

Поэтому каждая квазирекурсивная функция одного аргумента вычислима в некотором формализме, определяемом — если взять за основу расширенное понятие терма — заданием некоторой системы равенств между термами (играющих роль исходных формул) и трех упоминавшихся правил вывода: правила подстановки терма вместо индивидной переменной, схемы замены и схемы перестановки.

Мы зададим теперь общую для всех таких формализмов нумерацию, при которой для каждого из формализмов подобного рода будут выполняться указанные три условия рекурсивности [3]).

Задание этой нумерации выглядит следующим образом:

Индивидным переменным в качестве номеров мы сопоставляем простые числа, бóльшие 7; отличной от них именной переменной y мы сопоставляем номер 7; символу 0 — номер 8. Приписыванию (справа) штрих-символа будет соответствовать операция умножения на 3; $\mathfrak{r}$-местным функциональным знакам ставятся в соответствие функции $5 \cdot \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{\mathfrak{r}}^{n_{\mathfrak{r}}}$, где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\mathfrak{r}}$ — различные простые числа $\geqslant 7$, упорядоченные по возрастанию; это означает, что

[1]) Это соображение очень важно, так как понятие выводимости в данном формализме включает в себя не только условия выводимости соответствующего равенства, но также и условия невыводимости других равенств.

[2]) См. Приложение I, с. 473.

[3]) Список рекурсивных функций, а также понятий и фактов рекурсивной арифметики, необходимых для дальнейшего рассмотрения, см. на с. 271—276.

выражение, получающееся в результате заполнения мест аргументов рассматриваемого функционального знака в порядке их следования выражениями с номерами $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$, получает в качестве номера число

$$5 \cdot \mathfrak{p}_1^{\mathfrak{n}_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}_\mathfrak{r}}.$$

Наконец, равенству, у которого выражения, стоящие в его левой и правой частях, имеют номера $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, мы сопоставляем номер $10 \cdot 7^{\mathfrak{m}} \cdot 11^{\mathfrak{n}}$.

Равенство между термами будет называться **формулой**, конечная последовательность таких равенств — **списком формул**. В качестве номера списка формул, состоящего из формул с номерами $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\mathfrak{s}$, мы возьмем, подобно тому как это делалось в ранее рассматривавшихся нумерациях, число $\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{m}_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{\mathfrak{s}-1}^{\mathfrak{m}_\mathfrak{s}}$.

Убедимся сначала, что для так построенной нумерации выполняются второе и третье условия рекурсивности. В качестве рекурсивной функции $\mathfrak{c}(n)$, которая — как этого требует третье условие рекурсивности — номеру любого равенства, правой частью которого является какая-либо цифра, сопоставляет эту самую цифру, можно взять функцию $\mathfrak{v}(\mathfrak{v}(n, 4), 1)$. Эту функцию мы сокращенно обозначим посредством $\mathfrak{c}_0(n)$.

Для проверки выполнения второго условия рекурсивности требуется указать такую рекурсивную формулу $\mathfrak{P}(l, m)$, что отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ для чисел $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{l}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{l}$ является номером некоторого равенства $\mathfrak{f}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r}$ — цифра, а $\mathfrak{f}$ — функциональный знак, обозначающий определяемую квазирекурсивную функцию. Если функциональному знаку $\mathfrak{f}$ в соответствии с нашей нумерацией сопоставлена функция $5 \cdot \mathfrak{p}^n$ (с конкретным простым числом $\mathfrak{p}$), то это отношение может быть арифметически сформулировано следующим образом: «число l имеет вид $10 \cdot 7^a \cdot 11^b$, причем $a = 5 \cdot \mathfrak{p}^{8 \cdot 3^m}$, а b имеет вид $8 \cdot 3^c$». Это высказывание представляет собой некоторый рекурсивный предикат от l и m, и поэтому оно может быть изображено некоторой рекурсивной формулой, которую мы, подчеркивая фигурирующее в ней в качестве параметра простое число $\mathfrak{p}$, обозначим через $\mathfrak{P}_0(l, m, \mathfrak{p})$.

Зависимости от параметра $\mathfrak{p}$ здесь можно избежать, согласившись, что при обозначении функциональных знаков (вообще говоря, достаточно произвольном) в квазирекурсивных определениях функций одного аргумента в качестве функционального знака для определяемой функции берется знак, которому в нашей нумерации соответствует функция $5 \cdot 7^n$. Если ограничиться такими «**нормированными**» квазирекурсивными определениями, то

формула $\mathfrak{P}_0(l, m, \mathfrak{p})$ получит специальный вид — $\mathfrak{P}_0(l, m, 7)$. Эту рекурсивную формулу мы будем сокращенно обозначать посредством $\mathfrak{P}_0(l, m)$.

Теперь остается рассмотреть первое условие рекурсивности. Для любого дедуктивного формализма, состоящего, как мы знаем, из квазирекурсивного определения какой-либо арифметической функции одного аргумента и трех правил, касающихся способов применения определяющих равенств, это условие выполняется всякий раз, когда по отношению к этому формализму и к описанной нами нумерации высказывание «число m является номером списка формул, представляющего собой вывод формулы с номером n» является рекурсивным предикатом.

Мы покажем здесь несколько больше, а именно, что может быть указана некоторая рекурсивная формула $\mathfrak{B}(l, m, n)$, не содержащая переменных, отличных от l, m и n, и обладающая тем свойством, что для любых цифр $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ имеет место тогда и только тогда, когда в нашей нумерации $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ являются номерами списков формул, $\mathfrak{n}$ является номером некоторого равенства $\mathfrak{G}$ и список с номером $\mathfrak{m}$ представляет собой вывод равенства $\mathfrak{G}$ из равенств списка с номером $\mathfrak{l}$ при помощи правила подстановки и схем замены и перестановки.

Построение такой рекурсивной формулы $\mathfrak{B}(l, m, n)$ мы начнем с рекурсивного изображения предиката «число n является номером некоторого терма». Такое изображение на основе нашей нумерации может быть дано следующей, равносильной изображаемому высказыванию альтернативой: «$n = 8$ или n является простым числом $\geqslant 11$ или $n = 3 \cdot m$, где m отлично от 0 и является номером некоторого терма, или n имеет вид $5 \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_\mathfrak{r}^{n_\mathfrak{r}}$, где $p_1, \ldots, p_\mathfrak{r}$ — различные простые числа $\geqslant 7$, а $n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}$ — номера каких-либо термов».

Исходя из этой альтернативы и применяя способ, аналогичный тому, который мы применяли в гл. IV [1]) в связи со сходной задачей для рассматривавшегося там формализма, мы действительно получим рекурсивное определение некоторой функции $\mathfrak{t}(n)$, с помощью которой высказывание «число n является номером некоторого терма» изобразится равенством $\mathfrak{t}(n) = 0$.

Вслед за этим мы немедленно получим рекурсивное изображение предиката «число n является номером некоторого равенства между термами», так как этот предикат, как мы знаем, может быть сформулирован в виде высказывания «n является числом вида $10 \cdot 7^a \cdot 11^b$, где a и b суть номера некоторых термов».

Далее, отсюда мы получим изображение предиката «число n является номером некоторого списка формул» в виде некоторой

[1]) См. с. 278—279.

рекурсивной формулы $\mathfrak{Q}(n)$. В самом деле, этот предикат равнозначен следующему арифметическому высказыванию: «для каждого числа x, удовлетворяющего условию $x \leqslant \lambda(n)$, число $\nu(n, x)$ является номером некоторого равенства между термами».

Теперь мы можем рекурсивно изобразить и высказывание «числа m и n являются номерами равенств, второе из которых получается из первого в результате применения схемы перестановки». В самом деле, это высказывание равнозначно следующему: «существуют числа x и y, меньшие m и такие, что $m = 10 \cdot 7^x \cdot 11^y$, а $n = 10 \cdot 7^y \cdot 11^x$», а это последнее переводимо в некоторую рекурсивную формулу $\mathfrak{Q}_1(m, n)$.

Для того чтобы дать рекурсивную формулировку правила подстановки и схемы замены, мы введем рекурсивную функцию $\mathrm{st}(m, k, l)$, рекурсивное определение которой извлекается из следующей альтернативы[1]):

«Если $m = 3^a \cdot k$ и k является простым числом $\geqslant 7$, то

$$\mathrm{st}(m, k, l) = 3^a \cdot l;$$

если $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot n$, $c > 0$ и n не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5, то

$$\mathrm{st}(m, k, l) = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \prod_{x < m} \wp_x^{\mathrm{st}(\nu(n, x), k, l)};$$

если ни один из названных случаев места не имеет, то

$$\mathrm{st}(m, k, l) = m.»$$

С помощью этой функции для любого числа $\mathfrak{m}$, являющегося номером какой-либо формулы, можно будет выразить тот факт, что из этой формулы в результате подстановки получается формула с номером $\mathfrak{n}$. Это может быть сделано с помощью следующего рекурсивного предиката, зависящего от переменных m и n: «для некоторого простого числа x такого, что $11 \leqslant x < m$, и для некоторого числа $y < n$, являющегося номером некоторого терма, имеет место отношение $\mathrm{st}(m, x, y) = n$».

Для любых чисел $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$, являющихся номерами некоторых двух формул, условие, что из этих формул по правилу замены получается формула с номером $\mathfrak{n}$, может быть выражено с помощью следующего рекурсивного предиката, зависящего от переменных l, m и n[2]): «существует число $x < m$, обладающее тем

[1]) Переход от одной совершенно аналогичной альтернативы к соответствующему рекурсивному определению проделан в гл. IV на с. 280—281.

[2]) В этой арифметической формулировке данного условия проявляется то обстоятельство, что число 7, являющееся номером именной переменной y, меньше номера любой допускаемой в качестве терма индивидной переменной, а также меньше номера символа 0.

свойством, что

$$\mathrm{st}(x, 7, \nu(l, 3)) = m \quad \text{и} \quad \mathrm{st}(x, 7, \nu(l, 4)) = n».$$

Оба упомянутых предиката тоже могут быть изображены рекурсивными формулами, которые мы обозначим посредством $\mathfrak{Q}_2(m, n)$ и $\mathfrak{Q}_3(l, m, n)$ соответственно.

После того как мы таким образом получили рекурсивные изображения для всех содержащихся в понятии вывода терминов и отношений, искомую рекурсивную формулу $\mathfrak{B}(l, m, n)$ мы построим путем рекурсивного перевода следующего арифметического высказывания: «имеет место $\mathfrak{Q}(l)$ и $\nu(m, \lambda(m)) = n$ и для любого числа $x \leqslant \lambda(m)$ выполняется альтернатива: либо существует число $y \leqslant \lambda(l)$, для которого $\nu(m, x) = \nu(l, y)$, либо существует число $y < x$, для которого имеет место $\mathfrak{Q}_1(\nu(m, y), \nu(m, x))$ или $\mathfrak{Q}_2(\nu(m, y), \nu(m, x))$, либо существует число $y < x$ и число $z < x$, для которых имеет место $\mathfrak{Q}_3(\nu(m, y), \nu(m, z), \nu(m, x))$».

Этим закончено доказательство утверждения о том, что любая квазирекурсивная функция одного аргумента вычислима в некотором формализме, для выражений которого можно построить нумерацию, удовлетворяющую трем условиям рекурсивности, или, короче, что *любая квазирекурсивная функция одного аргумента является регулярно вычислимой.*

Этот результат вместе с ранее установленной квазирекурсивностью всякой регулярно вычислимой функции одного аргумента позволяет сделать вывод, что класс регулярно вычислимых арифметических функций одного аргумента совпадает с классом квазирекурсивных функций одного аргумента.

Проведенное нами рассуждение дает еще один результат. В самом деле, пусть $\mathfrak{f}(n)$ — какая-либо квазирекурсивная функция одного аргумента, и пусть $\mathfrak{l}$ — номер какого-либо представляющего собой нормированное квазирекурсивное определение функции $\mathfrak{f}$ списка формул только что рассмотренного нами формализма, или — что короче — номер некоторого квазирекурсивного определения $\mathfrak{f}$. Пусть $\mathfrak{n}$ — цифра, $\mathfrak{f}$ — значение $\mathfrak{f}(\mathfrak{n})$, а $\mathfrak{q}$ — функциональный знак, который в этом квазирекурсивном определении представляет функцию $\mathfrak{f}$. Тогда номер формулы $\mathfrak{q}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{f}$ будет равен числу

$$10 \cdot 7^{5 \cdot 7^{8 \cdot 3^{\mathfrak{n}}}} \cdot 11^{8 \cdot 3^{\mathfrak{f}}}.$$

Далее, можно указать цифру $\mathfrak{m}$, являющуюся номером некоторого списка формул, представляющего собой вывод формулы $\mathfrak{q}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{f}$ из формул списка с номером $\mathfrak{l}$. Вывод этот, как мы знаем, производится с помощью правил подстановки и схем замены и пере-

становки. При этом выполняется условие

$$\mathfrak{B}\left(\mathfrak{l},\ \mathfrak{m},\ 10\cdot 7^{5\cdot 7^{8\cdot 3^{\mathfrak{n}}}}\cdot 11^{8\cdot 3^{\mathfrak{f}}}\right).$$

Если число $\mathfrak{r}$ равно $2^{\mathfrak{f}}\cdot 3^{\mathfrak{m}}$, то $\mathfrak{f}=\nu(\mathfrak{r},\ 0)$, $\mathfrak{m}=\nu(\mathfrak{r},\ 1)$, и, значит, имеет место отношение

$$\mathfrak{B}\left(\mathfrak{l},\ \nu(\mathfrak{r},\ 1),\ 10\cdot 7^{5\cdot 7^{8\cdot 3^{\mathfrak{n}}}}\cdot 11^{8\cdot 3^{\nu(\mathfrak{r},\ 0)}}\right).$$

При этом

$$\mathfrak{B}\left(l,\ \nu(r,\ 1),\ 10\cdot 7^{5\cdot 7^{8\cdot 3^{n}}}\cdot 11^{8\cdot 3^{\nu(r,\ 0)}}\right)$$

является рекурсивной формулой, не содержащей отличных от l, n и r переменных, и, следовательно, имеет вид некоторого равенства

$$\mathfrak{h}(l,\ n,\ r)=0,$$

где $\mathfrak{h}(l,\ n,\ r)$ — рекурсивный терм, не содержащий переменных, отличных от l, n и r. Если $\mathfrak{l}$ является номером нормированного квазирекурсивного определения какой-либо функции одного аргумента, то для некоторой, подходящим образом выбранной цифры $\mathfrak{r}$ найденное нами соотношение

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{r})=0$$

имеет место при произвольном выборе цифры $\mathfrak{n}$. Тогда для любой цифры $\mathfrak{r}$, для которой выполняется отношение $\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{r})=0$, значение $\nu(\mathfrak{r},\ 0)$ будет равно значению $\mathfrak{f}(\mathfrak{n})$ определяемой этим квазирекурсивным определением функции $\mathfrak{f}$.

Для фигурирующей здесь рекурсивной функции $\nu(m,\ 0)$ мы будем употреблять функциональный знак $\nu_0(m)$.

Если мы теперь объединим полученный нами результат с тем, что́ было установлено относительно выводов в формализме (Z^0), то получится, что для цифры $\mathfrak{l}$, являющейся номером какого-либо нормированного квазирекурсивного определения, и для произвольной цифры $\mathfrak{n}$ в формализме (Z^0) выводимо равенство

$$\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ x)=\mathfrak{e},$$

где $\mathfrak{e}$ — наименьшая из цифр $\mathfrak{r}$ таких, что значение $\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{r})$ равно 0; из этого равенства, далее, в (Z^0) выводимо равенство

$$\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ x))=\mathfrak{f},$$

где $\mathfrak{f}$ — цифра, являющаяся значением квазирекурсивной функции, определяемой системой равенств с номером $\mathfrak{l}$, при значении аргумента, равном $\mathfrak{n}$. С другой стороны, вследствие нумерической непротиворечивости формализма (Z^0) ни для какой цифры $\mathfrak{s}$, отличной от $\mathfrak{f}$, равенство

$$\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ x))=\mathfrak{s}$$

невыводимо в (Z^0).

Тем самым для любой квазирекурсивной, а значит, и для любой регулярно вычислимой функции одного аргумента в (Z^0) получается некоторое нормальное представление в виде

$$\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ n,\ x)).$$

При этом произвольная отдельно взятая регулярно вычислимая функция характеризуется цифрой $\mathfrak{l}$, а сама функция $\mathfrak{h}(l,\ n,\ a)$ определяется независимо от функций, которые ей надлежит изображать.

Впрочем, терм $\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ n,\ x))$ изображает квазирекурсивную (а тем самым и регулярно вычислимую) функцию не только при цифре $\mathfrak{l}$, являющейся номером какого-либо нормированного квазирекурсивного определения. Это имеет место всякий раз, когда для любой цифры $\mathfrak{n}$ может быть указана такая цифра $\mathfrak{r}$, что имеет место равенство $\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{r})=0$.

В самом деле, в конце § 1 мы показали, что любой терм из (Z^0), имеющий вид $\mathfrak{a}(\tilde{\mu}_x\mathfrak{b}(n,\ x))$, где $\mathfrak{a}(n)$ и $\mathfrak{b}(n,\ m)$ суть рекурсивные термы, содержащие только указанные переменные, причем для каждой цифры $\mathfrak{n}$ может быть указана цифра $\mathfrak{r}$, для которой имеет место равенство $\mathfrak{b}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{r})=0$, всегда изображает регулярно вычислимую функцию; это верно, в частности, и для терма

$$\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l},\ n,\ x)),$$

если цифра $\mathfrak{l}$ удовлетворяет указанному условию.

В формализме (Z^1) в роли терма $\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(l,\ n,\ x))$ выступает терм

$$\nu_0(\mu_x(\mathfrak{h}(l,\ n,\ x)=0)),$$

т. е. терм вида

$$\nu_0(\mu_x\mathfrak{R}(l,\ n,\ x))$$

с рекурсивной формулой $\mathfrak{R}(l,\ n,\ m)$. Этим термом каждая регулярно вычислимая арифметическая функция одного аргумента также представляется в виде $\nu_0(\mu_x\mathfrak{R}(\mathfrak{l},\ n,\ x))$ в том смысле, что имеет место выводимость равенств $\nu_0(\mu_x\mathfrak{R}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ x))=\mathfrak{f}$, когда цифра $\mathfrak{l}$ является номером какого-либо нормированного квазирекурсивного определения этой функции; с другой стороны, терм $\nu_0(\mu_x\mathfrak{R}(\mathfrak{l},\ n,\ x))$ представляет регулярно вычислимую функцию всякий раз уже тогда, когда для любой цифры $\mathfrak{n}$ можно указать такую цифру $\mathfrak{r}$, для которой имеет место отношение $\mathfrak{R}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{n},\ \mathfrak{r})$.

Если мы перейдем от формализма (Z^1) к формализму (Z), добавив сначала ι-символы, то можно будет воспользоваться ранее

установленной нами представимостью рекурсивных функций [1]), а также явной определимостью μ-символа через ι-символ [2]) и устранимостью ι-символов. Таким образом, в итоге получается, что все квазирекурсивные функции одного аргумента представимы в (Z). Здесь, как и в наших предыдущих результатах, относящихся к квазирекурсивным функциям, как мы отмечали уже в самом начале [3]), можно было бы не ограничиваться рассмотрением функций одного аргумента. Действительно, в определении квазирекурсивной функции одного аргумента ее аргумент играет роль параметра; поэтому переход к большему числу параметров является непринципиальным обобщением, так как с помощью рекурсивного перечисления пар чисел, троек чисел и т. д. несколько параметров всегда могут быть сведены к одному [4]).

Кроме того, следует заметить, что представимость квазирекурсивных функций в формализмах (Z^1) и (Z), равно как и представимость рекурсивных функций в (Z), имеет место в *более сильном* смысле [5]). Это следует из представимости квазирекурсивных функций в виде $\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(l, n, x))$ и из того факта, что с помощью формул для μ-символа могут быть выведены любые формулы, получающиеся путем применения схемы $(\tilde{\mu})$ [6]), если в ней $\tilde{\mu}_x(t(x), a)$ заменить на $\mu_x(t(x)=0 \,\&\, a \leqslant x)$, а $\tilde{\mu}_x t(x)$ — на $\mu_x(t(x)=0)$.

Установление представимости квазирекурсивных функций в формализмах (Z^1) и (Z) позволяет, в частности, получить доказательство с более общей точки зрения для ранее установленного [7]) другим способом утверждения, что функции, введенные посредством перекрестных (многократных) рекурсий при добавлении характеристик (ι-символов) могут быть явно определены в системе (Z).

Следствием полученного нами нормального представления для регулярно вычислимых функций является тот факт, что каждая из этих функций вычислима не только в формализме (Z^0), но и в некотором более узком формализме. В самом деле, для того чтобы иметь возможность для каждой заданной цифры l, являющейся номером какого-либо нормированного квазирекурсивного определения, вычислять функцию $\nu_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(l, n, x))$, нам не нужен весь формализм (Z^0). Вместо общей схемы примитивной рекурсии

[1]) См. т. I, с. 533 и определение представимости функций, т. I, с. 433 и далее.
[2]) См. т. I, с. 481.
[3]) См. с. 478, сноску 1.
[4]) См. рассуждение относительно параметров в рекурсивных определениях, т. I, с. 396.
[5]) См. т. I, с. 534.
[6]) См. с. 480 и 484—485.
[7]) В связи с этим см. т. I, с. 509—510.

нам было бы достаточно взять конечное число рекурсивных равенств, встречающихся в рекурсивных определениях, входящих в $\mathfrak{h}(l, n, r)$ функциональных знаков; вместо схемы $(\tilde{\mu})$ и явного определения символа $\tilde{\mu}_x t(x)$ было бы достаточно взять формулы

$$(\theta)\quad \begin{cases} \theta(l, n, a) = \operatorname{sgn}(\mathfrak{h}(l, n, a)) \cdot \theta(l, n, a') + \overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{h}(l, n, a)) \cdot a, \\ \theta^*(l, n) = \nu_0(\theta(l, n, 0)), \end{cases}$$

которыми вводятся функциональные знаки $\theta(l, n, a)$ и $\theta^*(l, n)$, вместе с рекурсивными определениями встречающихся в этих равенствах функциональных знаков sgn, $\overline{\operatorname{sgn}}$, +, · и ν_0; а схему явного определения можно было бы опустить.

Так мы приходим к некоторому формализму (Z_{00}), обладающему следующими свойствами:

1. Он получается в результате некоторого ограничения формализма (Z^0). [Добавленные исходные равенства (θ) выводятся в (Z^0) при помощи явных определений для символов $\theta(l, n, a)$ и $\theta^*(l, n)$.] Поэтому из нумерической непротиворечивости (Z^0) следует нумерическая непротиворечивость (Z_{00}).

2. По своему характеру он является одним из рассматривавшихся до сих пор формализмов, в которых вычисление квазирекурсивных функций осуществляется на основе определяющих эти функции систем равенств. Действительно, каждая формула является равенством между термами; термы строятся из символа 0, штрих-символа, индивидных переменных и функциональных знаков; задается конечное число исходных равенств и выводы производятся при помощи правила подстановки и схемы замены [1]). Поэтому для формализма (Z_{00}) мы можем использовать построенную при рассмотрении квазирекурсивных определений нумерацию и определенные со ссылкой на эту нумерацию рекурсивные изображения различных понятий.

3. Каждая регулярно вычислимая функция одного аргумента вычислима в (Z_{00}). Действительно, каждая такая функция является, как мы знаем, квазирекурсивной, и если l является номером ее нормированного квазирекурсивного определения, то она представляется в (Z_{00}) термом $\theta^*(l, n)$ в том смысле, что для каждой цифры n может быть указана такая цифра r (и притом, вследствие нумерической непротиворечивости (Z_{00}), только одна такая цифра), что равенство

$$\theta^*(l, n) = r$$

будет выводимо в (Z_{00}).

Из свойства 2 формализма (Z_{00}) можно, кроме того, извлечь некоторое обращение утверждения 3, состоящее в том, что *всякая вычислимая в* (Z_{00}) *функция одного аргумента регулярно вычислима.*

[1]) Схема перестановки в (Z_{00}), как и в (Z^0), является производной схемой.

Для доказательства этого мы покажем, что при вычислении любой функции в (Z_{00}) для упомянутой в свойстве 2 нумерации выполняются все три условия рекурсивности.

Выполнение первого условия устанавливается следующим образом: если мы составим какой-либо конечный список исходных равенств формализма (Z_{00}) и возьмем номер $\mathfrak{z}$ этого списка, то необходимое и достаточное условие того, что список формул с номером $\mathfrak{m}$ будет представлять собой вывод в (Z_{00}) равенства с номером $\mathfrak{n}$, изобразится в его зависимости от $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ рекурсивной формулой $\mathfrak{B}_0(\mathfrak{z}, m, n)$, которая получится из формулы, ранее обозначенной нами через $\mathfrak{B}(l, m, n)$, в результате отбрасывания относящегося к схеме перестановки члена $\mathfrak{Q}_1(\nu(m, y), \nu(m, x))$ и замены переменной l цифрой $\mathfrak{z}$.

Как мы знаем, отсюда вытекает, что номера выводимых в (Z_{00}) формул образуют область значений некоторой рекурсивной функции $j_0(n)$. Эту функцию $j_0(n)$ мы можем определить, например, следующим образом: формула $\mathfrak{B}_0(\mathfrak{z}, m, n)$ имеет вид некоторого равенства $\mathfrak{b}_0(m, n) = 0$ с рекурсивным термом $\mathfrak{b}_0(m, n)$. Если мы положим

$$j_0(n) = \operatorname{sgn}(\mathfrak{b}_0(\nu(n, 0), \nu(n, 1))) \cdot \nu(\mathfrak{z}, 0) + \overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{b}_0(\nu(n, 0), \nu(n, 1))) \cdot \nu(n, 1),$$

то для любой цифры $\mathfrak{n}$ будем иметь $j_0(\mathfrak{n}) = \nu(\mathfrak{n}, 1)$, если значение $\nu(\mathfrak{n}, 0)$ является номером некоторого списка формул в (Z_{00}), являющегося выводом формулы с номером $\nu(\mathfrak{n}, 1)$, и будем иметь $j_0(\mathfrak{n}) = \nu(\mathfrak{z}, 0)$ в противном случае. В обоих случаях значение $j_0(\mathfrak{n})$ является номером некоторой выводимой в (Z_{00}) формулы; именно, $\nu(\mathfrak{z}, 0)$ равно номеру первой формулы в нашем списке исходных формул формализма (Z_{00}). Если же $\mathfrak{r}$ является номером какой-либо выводимой в (Z_{00}) формулы и если $\mathfrak{m}$ является номером списка формул, представляющего собой вывод этой формулы в (Z_{00}), то

$$\mathfrak{b}_0(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}) = 0,$$

$$\operatorname{sgn}(\mathfrak{b}_0(\mathfrak{m}, \mathfrak{r})) = 0, \quad \overline{\operatorname{sgn}}(\mathfrak{b}_0(\mathfrak{m}, \mathfrak{r})) = 1,$$

$$\nu(2^{\mathfrak{m}} \cdot 3^{\mathfrak{r}}, 0) = \mathfrak{m}, \quad \nu(2^{\mathfrak{m}} \cdot 3^{\mathfrak{r}}, 1) = \mathfrak{r},$$

а потому

$$j_0(2^{\mathfrak{m}} \cdot 3^{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{r}.$$

Таким образом, среди значений функции $j_0(n)$ встречается номер любой выводимой в (Z_{00}) формулы и не встречается никаких других чисел.

Что касается второго условия рекурсивности, то в его выполнимости можно убедиться следующим образом: пусть какая-либо вычислимая в (Z_{00}) функция представляется в этом формализме

термом $\mathfrak{t}(n)$; пусть $\mathfrak{s}$ — номер этого терма, а $\mathfrak{p}$ — номер переменной n; тогда с помощью рекурсивной функции $\operatorname{st}(m, k, l)$, которую мы в свое время определили в связи с построением формулы $\mathfrak{B}(l, m, n)$, предикат «число m является номером некоторого равенства $\mathfrak{t}(k) = r$ с данной цифрой k и некоторой цифрой r» может быть переведен в следующий рекурсивный предикат, зависящий от m и k: «существует число $x < m$, для которого

$$m = 10 \cdot 7^{\operatorname{st}(\mathfrak{s}, \mathfrak{p}, 8 \cdot 3^k)} \cdot 11^{8 \cdot 3^x}».$$

Наконец, выполнение третьего условия можно усмотреть непосредственно, точно так же, как это делалось при рассмотрении квазирекурсивных определений.

Тем самым наше утверждение, что каждая вычислимая в (Z_{00}) функция одного аргумента регулярно вычислима, установлено, и поэтому на основании утверждения 3 получается, что совокупность функций одного аргумента, вычислимых в (Z_{00}), совпадает с совокупностью регулярно вычислимых функций одного аргумента, которая в свою очередь, как мы знаем, совпадает с совокупностью квазирекурсивных функций одного аргумента.

Замечание. Для формализма (Z^0) тоже можно показать, что каждая вычислимая в нем функция одного аргумента регулярно вычислима. Однако доказательство этого факта является более трудным, чем в случае формализма (Z_{00}).

Ряд следствий из полученных нами результатов можно извлечь на основе канторовской диагональной процедуры. Применение этой процедуры здесь в известной мере подсказывается тем обстоятельством, что в представлении квазирекурсивных функций одного аргумента термом $\mathfrak{d}^*(\mathfrak{l}, n)$ участвует — говоря на языке теории множеств — взаимно однозначное соответствие между совокупностью этих функций и некоторым подмножеством натурального ряда.

В частности, на этом пути получается следующая доказанная Клини [1])

Теорема. *Не существует такой регулярно вычислимой функции, которая могла бы служить содержательным истолкованием терма* $\mu_x(\mathfrak{h}(n, n, x) = 0)$ *формализма* (Z^1); *более того, по всякой регулярно вычислимой функции одного аргумента* $\mathfrak{f}(n)$ *можно указать такую цифру* $\mathfrak{l}$, *что в формализме* (Z^1) *будет выводима формула*

$$\mu_x(\mathfrak{h}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, x) = 0) \neq \mathfrak{n}$$

с цифрой $\mathfrak{n}$, *являющейся значением* $\mathfrak{f}(\mathfrak{l})$.

---

[1]) В уже цитированной работе «General recursive functions of natural numbers»; теорема XIV.

Действительно, всякая регулярно вычислимая функция одного аргумента $\mathfrak{f}(n)$, как мы знаем, вычислима в (Z_{00}), а потому то же самое верно и в отношении функции $v_0(\mathfrak{f}(n))+1$. Следовательно, эта функция квазирекурсивна, и для нее можно указать нормированное квазирекурсивное определение. Пусть $\mathfrak{l}$ — номер этого определения. Тогда функция $v_0(\mathfrak{f}(n))+1$ представляется в (Z_{00}) термом $\theta^*(\mathfrak{l}, n)$ и потому если, в частности, $\mathfrak{n}$ является значением $\mathfrak{f}(\mathfrak{l})$, то в (Z_{00}) выводимо равенство

$$\theta^*(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = v_0(\mathfrak{n})+1,$$

а также равенство

$$v_0(\theta(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, 0)) = v_0(\mathfrak{n})+1.$$

Аналогично, в формализме (Z^0) выводимо равенство

$$v_0(\tilde{\mu}_x\mathfrak{h}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, x)) = v_0(\mathfrak{n})+1,$$

а в (Z^1) — равенство

$$v_0(\mu_x(\mathfrak{h}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, x)=0) = v_0(\mathfrak{n})+1.$$

Но из этого равенства с помощью выводимой в рекурсивной арифметике, а значит, и в (Z^1), формулы

$$v_0(a) = v_0(b)+1 \to a \neq b$$

получается, что формула

$$\mu_x(\mathfrak{h}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, x)=0) \neq \mathfrak{n}$$

выводима в формализме (Z^1).

Заодно ввиду непротиворечивости формализма (Z^1) получается, что формула

$$\mu_x(\mathfrak{h}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}, x)=0) = \mathfrak{n}$$

не может быть выведена в (Z^1).

Только что доказанное утверждение дает нам пример арифметической функции одного аргумента, однозначно определенной в смысле традиционной математики, т. е. с содержательным использованием принципа «tertium non datur» для целых чисел, и отличающейся от каждой регулярно вычислимой функции хотя бы при одном значении аргумента. Впрочем, эта функция имеет вид $\mu_x\mathfrak{R}(n, x)$, где $\mathfrak{R}(n, a)$ — рекурсивная формула, и с помощью принципа «tertium non datur» она содержательно определяется как такая функция, которая всякому числу $\mathfrak{n}$, находящемуся в отношении $\mathfrak{R}(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})$ по крайней мере с одним числом $\mathfrak{r}$, ставит в соответствие наименьшее из чисел $\mathfrak{r}$, обладающих этим свойством, а всякому другому числу ставит в соответствие 0.

Имеют место и многие другие теоремы, говорящие о невозможности реализовать те или иные соответствия при помощи регулярно вычислимых функций. Наиболее значительным результатом этого рода является теорема Алонзо Чёрча, касающаяся проблемы разрешимости исчисления предикатов, которую мы здесь и рассмотрим.

§ 3. Невозможность общего решения проблемы разрешимости для исчисления предикатов

Проблема разрешимости для исчисления предикатов, рассматриваемая с точки зрения теории доказательств, — в дальнейшем мы будем интересоваться именно этим аспектом данной проблемы — касается исследования формул исчисления предикатов на предмет выяснения их выводимости. Общее решение этой проблемы должно было бы состоять в указании какого-либо общего метода, процедуры, с помощью которой относительно любой конкретной формулы исчисления предикатов можно было бы выяснить вопрос о том, является она выводимой в исчислении предикатов или же нет.

Понятие разрешающей процедуры является неточным. Прояснение понятия разрешимости данного математического вопроса за конечное число шагов как раз и является одной из задач, поставленных Гильбертом перед теорией математического доказательства в его докладе «Аксиоматическое мышление»[1]).

В рассматриваемой ситуации, как и в ряде других аналогичных случаев, задание разрешающей процедуры можно свести к заданию процедуры вычисления некоторой арифметической функции. Действительно, благодаря наличию нашей нумерации исчисления предикатов каждая формула этого исчисления характеризуется ее номером, который всегда может быть легко найден по предъявленной конкретной формуле и по которому, обратно, может быть найдена сама эта формула.

Кроме того, по любому числу можно непосредственно выяснить, является оно номером какой-либо формулы исчисления предикатов или же нет. Требующийся для этого способ мы ранее (в гл. IV) облекли в форму рекурсивного определения понятия формулы исчисления предикатов.

Если теперь предположить, что в нашем распоряжении имеется способ, позволяющий распознавать выводимость любой конкретной формулы исчисления предикатов, то по любому данному нам числу мы, во-первых, сможем выяснить, является ли оно вообще

[1]) Доклад прочитан в 1917 г. в Цюрихе, опубликован в Math. Ann., 78, № 3/4.

номером какой-либо формулы, и если это имеет место, то мы сможем найти соответствующую формулу и по ней узнать, является ли она выводимой. Если эта формула выводима, мы сопоставим данному числу в качестве значения 0, а во всех остальных случаях — число 1. Тем самым оказывается заданной процедура вычисления значений некоторой арифметической функции одного аргумента, сопоставляющей каждому числу, являющемуся номером какой-либо выводимой формулы исчисления предикатов, значение 0, а всем остальным числам — значение 1. И обратно, если бы нам была известна какая-либо процедура вычисления значений подобной функции, то она давала бы способ для распознавания выводимости любой конкретной формулы исчисления предикатов.

И вообще, любую арифметическую функцию одного аргумента, которая по отношению к данному дедуктивному формализму F и к данной нумерации выражений этого формализма обладает тем свойством, что ее значение для всякого числа, являющегося номером какой-либо выводимой в F формулы, равняется 0, в то время как для остальных чисел оно равно 1, мы будем называть разрешающей функцией для F, связанной с данной нумерацией выражений этого формализма.

В этих терминах результат только что проведенного рассуждения выглядит следующим образом: общее решение проблемы разрешимости для исчисления предикатов равносильно нахождению способа, позволяющего вычислять значения разрешающей функции для исчисления предикатов, связанной с нашей нумерацией этого исчисления.

Теперь мы можем воспользоваться тем, что понятие вычислимой функции было уточнено с помощью понятия регулярно вычислимой арифметической функции одного аргумента. Тогда вопрос о возможности общего решения проблемы разрешимости для исчисления предикатов приобретет следующую более точную формулировку: можно ли для исчисления предикатов и установленной для него нумерации формул указать какую-либо регулярно вычислимую разрешающую функцию?

Как показал Чёрч [1]), ответ на этот вопрос является отрицательным. Доказательство Чёрча мы приведем здесь в несколько измененном виде.

Для доказательства нам потребуется следующая

[1]) См. работу Чёрча: Church A. A note on the Entscheidungsproblem. — J. Symbolic Logic, 1936, 1, № 1 и исправление к ней: J. Symbolic Logic, 1936, 1, № 3. Другое доказательство, появившееся вскоре после работы Чёрча, принадлежит А. М. Тьюрингу. Это доказательство основывается на теории машин, впоследствии названных его именем. См. Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. — Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, 1937, 42, в особенности см. с. 259—265.

Лемма. *Не существует регулярно вычислимой функции, которая для формализма* (Z_{00}) *была бы разрешающей функцией, связанной с введенной нами нумерацией этого формализма.*

Эта лемма доказывается при помощи рассуждения Россера [1]), которое проводится по образцу гёделевского уточнения антиномии лжеца:

Допустим, что имеется некоторая регулярно вычислимая разрешающая функция для формализма (Z_{00}). Тогда эта функция представима в (Z_{00}) соответствующим термом $t(n)$.

Рекурсивная функция $st(k, \mathfrak{p}, 8\cdot 3^k)$, где $\mathfrak{p}$ — номер переменной a, изображается в (Z_{00}) некоторым термом $\mathfrak{s}(k)$ [2]). Если $\mathfrak{f}$ является номером какого-либо выражения $\mathfrak{A}$ из (Z_{00}), то значение терма $\mathfrak{s}(\mathfrak{f})$ является номером того выражения, которое получается из $\mathfrak{A}$ в результате замены переменной a всюду, где она входит в $\mathfrak{A}$, цифрой $\mathfrak{f}$. Пусть $\mathfrak{l}$ является номером формулы

$$t(\mathfrak{s}(a)) = 0',$$

а $\mathfrak{m}$ — номером формулы

$$t(\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) = 0';$$

тогда $\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ принимает значение $\mathfrak{m}$, а равенство $\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{m}$ выводится в (Z_{00}).

Теперь рассмотрим значение терма $t(\mathfrak{m})$. По нашему предположению $t(n)$ является разрешающей функцией для (Z_{00}). Поэтому значение $t(\mathfrak{m})$ должно было бы равняться 0 или 1 в зависимости от того, выводится или не выводится в (Z_{00}) формула с номером $\mathfrak{m}$, т. е. формула

$$t(\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) = 0'.$$

Но ни тот, ни другой случай не могут иметь места. Действительно, если бы терм $t(\mathfrak{m})$ имел значение 0, то, с одной стороны, так как функция $t(n)$ вычислима в (Z_{00}), равенство

$$t(\mathfrak{m}) = 0$$

должно было бы быть выводимым в (Z_{00}), а с другой стороны, так как $t(n)$ является разрешающей функцией для (Z_{00}), в (Z_{00}) должна была бы быть выводимой формула

$$t(\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) = 0',$$

[1]) См. Rosser J. B. Extensions of some theorems of Gödel and Church. — J. Symbolic Logic, 1936, 1, № 3, теорема III.

[2]) Терм $\mathfrak{s}(k)$ может быть выбран в (Z_{00}) даже рекурсивным, так как рекурсивное определение функции $st(m, k, l)$ фигурирует в рекурсивном определении функции $\mathfrak{h}(l, n, r)$ и тем самым содержится в исходных формулах формализма (Z_{00}).

а потому и формула

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{m}) = 0'.$$

Но тогда в (Z_{00}) было бы выводимо равенство

$$0 = 0',$$

в то время как этот формализм нумерически непротиворечив.

А если бы $\mathfrak{t}(\mathfrak{m})$ имело значение 1, то, вследствие вычислимости $\mathfrak{t}(n)$ в (Z_{00}), в (Z_{00}) было бы выводимо равенство

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{m}) = 0',$$

а с помощью этого последнего — и формула

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) = 0'.$$

Но тогда вследствие того, что функция $\mathfrak{t}(n)$ является разрешающей функцией для (Z_{00}), терм $\mathfrak{t}(\mathfrak{m})$ должен был бы иметь значение 0, что противоречит сделанному предположению.

Замечание. В приведенном доказательстве леммы использовались только немногие свойства формализма (Z_{00}). На самом деле нами доказан существенно более общий результат, который может быть сформулирован следующим образом:

Пусть F — непротиворечивый дедуктивный формализм, в котором схемы замены и перестановки содержатся в качестве основных или производных схем. Пусть в F вычислима такая арифметическая функция одного аргумента, которая для вполне определенной взаимно однозначной нумерации выражений формализма F и конкретной числовой переменной $\mathfrak{a}$ любому числу $\mathfrak{f}$, являющемуся номером некоторого выражения $\mathfrak{K}$ из F, ставит в соответствие номер того выражения, которое получается из $\mathfrak{K}$ в результате замены переменной $\mathfrak{a}$ всюду, где она встречается в $\mathfrak{K}$, числом $\mathfrak{f}$. Тогда для формализма F и для данной его нумерации не может существовать вычислимой в F разрешающей функции[1]).

(При этом относительно F не предполагается, что номера выводимых в нем формул при какой-либо нумерации образуют область значений какой-либо рекурсивной функции.)

Из установленной нами невозможности построения какой-либо регулярно вычислимой разрешающей функции для формализма (Z_{00}) мы получим невозможность построения регулярно вычислимой разрешающей функции и для формализма исчисления предикатов[2]).

Для этого мы воспользуемся тем фактом, что при нашей нумерации формализма (Z_{00}) номера выводимых в (Z_{00}) формул представляют собой значения некоторой рекурсивной функции $\mathfrak{j}_0(n)$.

[1]) Это утверждение тесно связано с теоремой 1 части II монографии А. Мостовского, Р. М. Робинсона и А. Тарского: Mostowski A., Robinson R. M., Tarski A. Undecidable Theories. — Amsterdam, 1953, p. 46.

[2]) Приведенное здесь рассуждение заимствовано из доказательства Чёрча.

Поэтому число $\mathfrak{n}$ является номером какой-либо выводимой в (Z_{00}) формулы тогда и только тогда, когда можно указать такое число $\mathfrak{m}$, для которого выполняется равенство

$$\mathfrak{j}_0(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}.$$

Но это имеет место тогда и только тогда, когда формула

$$\exists x\,(\mathfrak{j}_0(x) = \mathfrak{n})$$

выводима в некотором формализме G, получающемся из исчисления предикатов добавлением к нему равенств, использованных при определении $\mathfrak{j}_0(n)$, и аксиом равенства

(J_1) $$a = a$$

и

(J_2) $$a = b \to (A(a) \to A(b)).$$

Действительно, в случае выполнения равенства $\mathfrak{j}_0(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$ оно, а тем самым и формула $\exists x\,(\mathfrak{j}_0(x) = \mathfrak{n})$, выводимо в G. И обратно: в случае выводимости этой формулы в G по доказанной в гл. I нп-теореме[1]) может быть указано число $\mathfrak{m}$, для которого выполняется равенство $\mathfrak{j}_0(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$.

Далее, в соответствии с полученными в гл. III результатами, касающимися возможности исключения функциональных знаков при исследовании выводимости формул[2]), выводимость в G формулы $\exists x\,(\mathfrak{j}_0(x) = \mathfrak{n})$ равносильна выводимости некоторой формулы $\mathfrak{K}$ без функциональных знаков в некотором формализме G_1, который получается из G, если сначала исключить из G штрих-символ и остальные функциональные символы и ввести вместо них соответствующие предикатные символы, содержащие по одному дополнительному аргументу каждый, а затем для каждого предикатного символа $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a})$ с дополнительным аргументом $\mathfrak{a}$, введенного вместо функционального знака $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$, взять в качестве аксиом «формулы единственности»

$$\exists x \mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, x)$$

и

$$\forall x \forall y\,(\mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, x) \,\&\, \mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, y) \to x = y),$$

а рекурсивные равенства заменить теми не содержащими функциональных знаков аксиомами, в которые переходят эти равенства в результате использования для каждого исключаемого функционального знака соответствующей эквивалентности

$$A(\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)) \sim \forall x\,(\mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, x) \sim A(x)).$$

[1]) О применении нп-теоремы к арифметическим формализмам см. гл. II § 1 (в частности, с. 81).

[2]) См. с. 183—186 или соответственно т. I, с. 538—544.

При этом рассматриваемая формула $\mathfrak{K}$ в G_1 с применением только что упомянутой эквивалентности может быть переведена в формулу $\exists x\,(j_0(x) = \mathfrak{n})$. Если предикатный символ, введенный вместо штрих-символа, обозначить через $\mathrm{Sq}(a, b)$, то формулу $\mathfrak{K}$ можно будет взять в виде

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_{\mathfrak{n}-1} \forall x\,(\mathrm{Sq}(0, \mathfrak{x}_1) \,\&\, \mathrm{Sq}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \,\&\ldots\&\, \mathrm{Sq}(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}) \,\&\ldots\&\, \mathrm{Sq}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}-2}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{n}-1}) \,\&\, \mathrm{Sq}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}-1}, x) \to \mathfrak{C}(x)).$$

Здесь $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{n}-1}$ — отличные друг от друга и от x связанные переменные, а выражение $\mathfrak{C}(x)$ не зависит от числа $\mathfrak{n}$, а значит, оно определяется уже рекурсивным определением функции $j_0(n)$. Впрочем, формула $\mathfrak{K}$ не содержит свободных переменных.

Наконец, — ввиду теоремы о представимости общей аксиомы равенства (J_2) с помощью собственных аксиом[1]) — здесь вместо формализма G_1 можно рассмотреть формализм G_2, получающийся из G_1 в результате замены исходной формулы $a = b \to (A(a) \to A(b))$ специальными формулами равенства, относящимися к предикатным символам из G_1 (или к их различным аргументам), включая и формулу $a = b \to (a = c \to b = c)$. Это означает, что формула $\mathfrak{K}$ выводима в G_1 тогда и только тогда, когда она выводима в G_2.

Но по одной ранее доказанной теореме[2]) выводимость $\mathfrak{K}$ в формализме G_2, который получается из исчисления предикатов добавлением ряда предикатных символов и символа 0, равносильна выводимости в исчислении предикатов некоторой конкретной формулы $\mathfrak{L}$, которая получается из $\mathfrak{K}$, если во всех аксиомах формализма G_2 все свободные переменные заменить связанными (т. е. связанными соответствующими кванторами всеобщности), затем по так модифицированным аксиомам $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_8$ построить формулу

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathfrak{A}_8 \to \mathfrak{K}$$

и в ней заменить символ 0 переменной a, а различные предикатные символы — различными формульными переменными, причем для каждого предикатного символа нужно брать соответствующую формульную переменную с тем же числом аргументов.

Если мы теперь примем во внимание, что рекурсивное определение функции $j_0(n)$ может быть задано в явном виде и что с помощью этого определения могут быть явно написаны аксиомы G, равно как и аксиомы G_2, а потому и формулы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_8$, и что с помощью этого определения может быть также построено выражение $\mathfrak{C}(x)$, то станет ясно, что номер, который при нашей

[1]) См. т. I, с. 456—459 или Приложение I к данному тому, с. 472—473.
[2]) См. с. 188.

нумерации исчисления предикатов получит формула $\mathfrak{L}$, в его зависимости от числа $\mathfrak{n}$ определится некоторой рекурсивной (и даже достаточно простой) функцией $\mathfrak{b}(n)$.

Таким образом, значение $\mathfrak{b}(\mathfrak{n})$ этой функции для числа $\mathfrak{n}$ является номером такой формулы исчисления предикатов, которая выводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{n}$ является номером формулы, выводимой в (Z_{00}).

Если мы теперь допустим, что для исчисления предикатов можно указать регулярно вычислимую разрешающую функцию $\mathfrak{f}$, то функция $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}(n))$ каждому числу, являющемуся при нашей нумерации (Z_{00}) номером некоторой выводимой в (Z_{00}) формулы, будет сопоставлять значение 0, а всякому другому числу — значение 1. Кроме того, эта функция, как и $\mathfrak{f}$, будет регулярно вычислимой. Таким образом, мы получаем регулярно вычислимую разрешающую функцию для (Z_{00}), что, однако, невозможно.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

О НЕКОТОРЫХ ФРАГМЕНТАХ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ИХ ДЕДУКТИВНОМ ОПИСАНИИ С ПОМОЩЬЮ СХЕМ

§ 1. Позитивно тождественные импликативные формулы

В гл. III т. I при рассмотрении исчисления высказываний из всей логики высказываний в целом нами была особо выделена так называемая позитивная логика, представляющая собой совокупность таких способов умозаключений, которые не зависят от допущения о том, что для каждого суждения имеется другое, ему противоположное.

Первоначально это выделение носило эвристический характер. Затем для импликативной логики оно было формально уточнено посредством понятия позитивно тождественной импликативной формулы[1]), которое было введено с помощью следующего определения:

Под импликативной формулой понимается формула, которая строится из переменных исчисления высказываний (т. е. из формульных переменных без аргументов) с помощью одного только символа импликации. Импликативная формула называется регулярной, если она имеет вид

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B})\ldots),$$

где посылка любой входящей в формулы $\mathfrak{A}$, ..., $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}$ импликации представляет собой некоторую переменную, а формула $\mathfrak{B}$ либо совпадает с одной из формул $\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_n$, либо выводится из этих формул с использованием одной только схемы заключения

$$\frac{\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}.$$

Импликативная формула называется позитивно тождественной, если она либо является регулярной формулой, либо получается из какой-либо регулярной формулы в результате подстановки, либо выводится из формул этого рода с помощью схемы заключения.

Из этого определения следует, что совокупность позитивно тождественных формул совпадает с совокупностью тех формул,

[1]) См. т. I, с. 100.

которые могут быть выведены из регулярных формул в результате применения подстановок и схем заключения. В самом деле, это вытекает из того, что в любом выводе, производимом с помощью подстановок и схем заключения, все подстановки могут быть перенесены в исходные формулы[1]).

Поэтому, если под выводом мы будем понимать вывод с помощью подстановок и схемы заключения, то в качестве системы исходных формул (аксиом) для вывода всех позитивно тождественных импликативных формул (и только их) можно будет взять любую систему регулярных импликативных формул, из которой выводятся все регулярные импликативные формулы.

В качестве такой системы аксиом можно взять систему, состоящую из следующих трех регулярных формул:

$$A \to (B \to A),$$
$$(A \to (A \to B)) \to (A \to B),$$
$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)),$$

т. е. из формул I 1)—3) приведенной в гл. III т. I системы аксиом для исчисления высказываний[2]), а также систему, состоящую из двух формул

$$I^* \qquad \begin{cases} A \to (B \to A), \\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)). \end{cases}$$

Сказанное мы дополним в нескольких направлениях. Во-первых, мы дадим более простую характеристику позитивно тождественных импликативных формул. Во-вторых, докажем, что обе только что приведенные системы формул действительно достаточны для вывода всех регулярных, а тем самым и всех позитивно тождественных формул. И, в-третьих, мы распространим понятие позитивно тождественной формулы на формулы исчисления высказываний, строящиеся с помощью импликации и конъюнкции.

В качестве общего средства, помогающего провести все эти рассмотрения, мы используем одну весьма общую теорему, представляющую собой некоторое обобщение доказанной в гл. IV т. I дедукционной теоремы[3]). Впрочем, возможности применения этой теоремы не ограничиваются приводимыми здесь рассуждениями (и даже исчислением высказываний).

Эта теорема о посылках, как мы ее будем называть, относится к таким дедуктивным формализмам, для которых

[1]) См. Приложение I, с. 473.
[2]) См. т. I, с. 96.
[3]) См. т. I, с. 194—199 или Приложение I, с. 472. Правда, приводимая теорема в определенном смысле носит несколько более частный характер, чем дедукционная теорема.

определено понятие формулы и в которых производятся выводы при помощи тех или иных исходных формул, схем для исходных формул и схем вида

$$\frac{\{\mathfrak{M}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{M}_r\}}{\{\mathfrak{N}\}} \quad (r \geqslant 2),$$

где $\{\mathfrak{M}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{M}_r\}, \{\mathfrak{N}\}$ следует понимать как задания определенных видов формул, в которых совпадающие составные части формул обозначены одинаковыми буквами.

Кроме этих схем, принадлежащих к числу первоначальных правил данного дедуктивного формализма Q и называемых соответственно основными схемами формул и основными схемами вывода этого формализма, мы рассматриваем также выводимые схемы формул и производные схемы вывода. Схему формул $\mathfrak{S}$ мы будем называть выводимой в Q, если каждая формула описываемого этой схемой $\mathfrak{S}$ вида выводима в формализме Q, а $(r+1)$-членную схему вида

$$\frac{\{\mathfrak{M}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{M}_r\}}{\{\mathfrak{N}\}}$$

мы будем называть производной схемой вывода в Q, если формула $\mathfrak{B}$ выводима из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ средствами формализма Q всякий раз, когда формулы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}$ графически находятся в отношении, выраженном обозначениями $\{\mathfrak{M}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{M}_r\}, \{\mathfrak{N}\}$.

Теорема о посылках может быть сформулирована следующим образом:

Пусть Q — дедуктивный формализм указанного выше типа, содержащий импликацию (т. е. связку, сопоставляющую формулам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ формулу $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$). Пусть, во-первых, среди основных или выводимых схем формул формализма Q содержится схема формул $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$; во-вторых, среди основных или производных схем вывода содержится схема вывода

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}$$

и, кроме того, для каждой $(r+1)$-членной основной схемы вывода формализма Q

$$(1) \qquad \frac{\{\mathfrak{M}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{M}_r\}}{\{\mathfrak{N}\}}$$

при некотором выборе буквы $\mathfrak{P}$, не входящей в $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{N}$,

схема вывода

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{P} \to \{\mathfrak{M}_1\}, \ldots, \mathfrak{P} \to \{\mathfrak{M}_r\}}{\mathfrak{P} \to \{\mathfrak{N}\}}$$

является либо основной, либо производной схемой вывода в Q. Тогда формула

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}) \ldots)$$

выводима в Q всякий раз, когда формула $\mathfrak{B}$ выводима из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ средствами формализма Q.

Доказательство этого утверждения почти очевидно. Рассмотрим сначала частный случай, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть такие формулы из Q, что имеется вывод $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{A}$ по правилам формализма Q. Если к каждой формуле этого вывода мы импликативно добавим посылку $\mathfrak{A}$, то на том месте, где формула $\mathfrak{A}$ используется в качестве исходной формулы, окажется выводимая формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, на месте каждой исходной формулы $\mathfrak{C}$ формализма Q окажется выводимая из нее формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, а на месте, где применяется какая-либо основная схема (1) формализма Q, будет применяться соответствующая производная схема (2) формализма Q. Заключительная формула вывода $\mathfrak{B}$ перейдет при этом в формулу $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Значит, эта формула выводима в Q.

Теперь теорему о посылках в ее общей формулировке мы сведем к рассмотренному частному случаю. В самом деле, пусть Q_1 — формализм, получающийся из Q в результате присоединения формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ к числу исходных. Тогда Q_1 также удовлетворяет условиям нашей теоремы, а формула $\mathfrak{B}$ средствами формализма Q_1 выводима из формулы $\mathfrak{A}_n$ и, значит, по только что доказанному формула $\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}$ выводима в Q_1. Тем же самым способом мы убеждаемся, что в формализме Q_2, получающемся из Q присоединением формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-2}$ к числу исходных, выводима формула

$$\mathfrak{A}_{n-1} \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}).$$

Продолжая это рассуждение дальше, мы через n шагов получим, что в Q выводима формула

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}) \ldots).$$

Установленная таким образом теорема о посылках имеет разнообразные применения. Сначала мы используем ее для рассмотрения формализма, в котором формулами являются импликативные формулы исчисления высказываний, а выводимость определяется

на основе схем формул

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}),$$
$$(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$$

и схемы заключения

$$\frac{\mathfrak{S},\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}.$$

Условия теоремы о посылках для этого формализма выполняются. В самом деле, схема вывода

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}$$

является производной схемой, и факт этот устанавливается непосредственно при помощи первой схемы формул и схемы заключения. Схема вывода

$$\frac{\mathfrak{P} \to \mathfrak{S},\ \mathfrak{P} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})}{\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}}$$

является производной схемой, и этот факт устанавливается при помощи второй схемы формул и схемы заключения, а каждая формула вида $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ может быть выведена следующим образом:

$$\frac{\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}),\ (\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A})) \to ((\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}))}{(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})}$$

$$\frac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}),\ (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}$$

(здесь исходные формулы получаются из указанных выше схем формул — две из первой схемы и одна из второй — и дважды применяется схема заключения).

Согласно теореме о посылках импликативная формула

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B})\ldots)$$

выводима в рассматриваемом формализме всякий раз, когда формула $\mathfrak{B}$ выводима средствами этого формализма из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ и, значит, в частности, когда формула $\mathfrak{B}$ совпадает с одной из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ или выводится при помощи схемы заключения из всех этих формул.

Вообще, формулу исчисления высказываний (и, в частности, импликативную формулу) мы будем называть непосредственно тождественной, если она имеет вид

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B})\ldots),$$

где формула $\mathfrak{B}$ совпадает с одной из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ или может быть выведена из них при помощи схемы заключения.

Чтобы оправдать эту терминологию, заметим, что, согласно данному определению, всякая непосредственно тождественная формула исчисления высказываний является тождественно истинной, или, как мы иногда говорим, тождественной формулой. В самом деле, если в какой-либо такого рода формуле

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B})\ldots)$$

приписать входящим в нее переменным значения «истина» и «ложь», то, в соответствии с истолкованием связок исчисления высказываний как истинностных функций, либо одна из формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ примет значение «ложь», и тогда вся формула примет значение «истина», либо каждая из этих формул примет значение «истина», и тогда его примет также и формула $\mathfrak{B}$, так как по условию она выводится из них в результате применения схемы заключения или же совпадает с одной из них. Тем самым и вся рассматриваемая формула примет значение «истина».

Из определения непосредственно тождественной формулы сразу следует, что всякая регулярная импликативная формула является непосредственно тождественной. Далее, легко видеть, что формулы, получающиеся из непосредственно тождественных формул в результате подстановок, также являются непосредственно тождественными. Для этого достаточно заметить, что если какую-либо формульную переменную, фигурирующую в схеме заключения, заменить всюду, где она в этой схеме встречается, одной и той же формулой, то снова получится некоторая схема заключения.

Поэтому всякая формула, получающаяся из какой-либо регулярной импликативной формулы в результате подстановки, является непосредственно тождественной, а следовательно, всякая позитивно тождественная импликативная формула выводится из непосредственно тождественных импликативных формул с помощью одной только схемы заключения.

Но мы пока не установили, что всякая непосредственно тождественная формула является позитивно тождественной. А кроме того, например, неверно, что любая непосредственно тождественная импликативная формула получается из какой-либо регулярной импликативной формулы в результате подстановки. Так, например, импликативная формула

$$((A \to B) \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

является непосредственно тождественной, так как формула C

может быть выведена из формул

$$(A \to B) \to (B \to C), \quad A \to B, \quad A$$

троекратным применением схемы заключения; но тем не менее она не является регулярной и, как показывает разбор могущих здесь представиться случаев, не может быть получена в результате подстановки из какой-либо регулярной импликативной формулы.

И все же утверждение о том, что всякая непосредственно тождественная импликативная формула является позитивно тождественной, имеет место, и его можно извлечь из нашего недавнего результата, полученного с помощью теоремы о посылках. В самом деле, этот результат утверждает, что всякая непосредственно тождественная импликативная формула выводима из схем

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$$

и

$$(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$$

с помощью схемы заключения, а значит, она выводима из формул

$$A \to (B \to A)$$

и

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

(т. е. из формул I*) с помощью подстановок и схемы заключения. Но формулы I* регулярны и потому каждая формула, выводимая из них с помощью подстановок и схем заключения, является позитивно тождественной.

Поэтому каждая непосредственно тождественная формула, а тем самым и каждая формула, выводимая из таких формул с помощью схемы заключения, является позитивно тождественной. С другой стороны, ранее мы установили, что всякая позитивно тождественная формула выводима из непосредственно тождественных формул с помощью схемы заключения. Тем самым позитивно тождественные формулы могут быть охарактеризованы как такие импликативные формулы, которые либо являются непосредственно тождественными формулами, либо выводимы из них с помощью схемы заключения [1]).

Эта характеристика позитивно тождественных импликативных формул проще нашего первоначального определения в двух отношениях: во-первых, в ней нет речи о подстановках и, во-вторых, в определении непосредственно тождественных импликативных

[1]) Первую из этих возможностей здесь можно было бы особо и не упоминать. Действительно, любая непосредственно тождественная формула $\mathfrak{A}$ выводима с помощью схемы заключения из непосредственно тождественных формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$.

формул отсутствует ограничение, налагаемое на структуру регулярных импликативных формул.

Наряду с этим упрощением характеризации позитивно тождественных импликативных формул, доказанная нами теорема о выводимости непосредственно тождественных импликативных формул из формул I* с помощью подстановок и схем заключения позволяет получить еще один обещанный нами результат, а именно, утверждение, что формулы I* представляют собой систему аксиом, достаточную для вывода (с помощью подстановок и схемы заключения) всех позитивно тождественных формул.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что система формул I 1), 2), 3) тоже представляет собой систему аксиом, достаточную для вывода всех позитивно тождественных формул. Для этого достаточно показать, что формализм, исходными формулами которого являются импликативные формулы исчисления высказываний, а выводимость определяется с помощью схемы заключения и трех [соответствующих формулам I 1), 2) и 3)] схем формул

(3) $$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}),$$

(4) $$(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}),$$

(5) $$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})),$$

удовлетворяет условиям теоремы о посылках, т. е. что схема формул $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ является выводимой, а схемы

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}$$

и

$$\frac{\mathfrak{P} \to \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{P} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})}{\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}}$$

являются производными схемами этого формализма.

Это может быть проделано без особого труда. Действительно, схему

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}$$

мы получаем из схемы (3) и схемы заключения; вывод любой формулы вида $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ мы получаем с помощью схем (3) и (4) и схемы заключения следующим образом:

$$\frac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}), \quad (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}};$$

а из двух формул $\mathfrak{P} \to \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{P} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})$ с помощью схем (4) и (5) и схемы заключения следующим образом может быть выведена формула $\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}$:

$$\frac{\mathfrak{P} \to \mathfrak{S}, \quad (\mathfrak{P} \to \mathfrak{S}) \to ((\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}))}{(\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})};$$

$$\frac{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}), \quad (\mathfrak{P} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})) \to [((\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})) \to (\mathfrak{P} \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}))]}{((\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})) \to (\mathfrak{P} \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}))};$$

$$\frac{((\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})), \quad ((\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})) \to (\mathfrak{P} \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}))}{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})};$$

$$\frac{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}), \quad (\mathfrak{P} \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{T})}{\mathfrak{P} \to \mathfrak{T}}.$$

Замечания. Относительная простота полученных нами доказательств полноты объясняется тем обстоятельством, что понятие позитивно тождественной импликативной формулы определяется при помощи условий, формулируемых в терминах выводимости.

Еще одна характеристика совокупности позитивно тождественных импликативных формул может быть получена — об этом мы здесь лишь упомянем — из *исчисления допущений*, которое независимо друг от друга разработали Г. Генцен и С. Яськовский [1]).

§ 2. Позитивно тождественные I-К-формулы

При формализации чистой логики следования с помощью исчисления высказываний нельзя ограничиться рассмотрением одних только импликативных формул, потому что при этом нет возможности иметь сразу несколько посылок у одного заключения. Этот недостаток преодолевается при помощи введенного П. Герцем и детально разработанного Генценом [2]) исчисления секвенций.

[1]) Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. — Math. Z., 1934, **39**, № 2 и 3 (имеется русский перевод в сб. «Математическая теория логического вывода». — М.: Физматгиз, 1967, с. 9—74. — *Прим. перев.*). — Jaskowski St. On the rules of suppositions in formal logic. — Studia logica, Warszawa, 1934. Яськовский предпринял это исследование по инициативе Я. Лукасевича.

[2]) Hertz P. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. — Math. Ann., 1923, **89**, № 1/2 и 1929, **101**, № 4; Gentzen G. Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen. — Math. Ann., 1932, **107**, № 3, а также Untersuchungen über das logische Schließen. — Math. Z., 1934, 39 (см. прим. перев. в предыдущей сноске).

Здесь вводятся секвенции с несколькими посылками

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}.$$

Другая напрашивающаяся возможность состоит в использовании конъюнкции, с помощью которой составная импликация вида

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}) \ldots)$$

может быть преобразована в *одну* импликацию

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}.$$

Формулу исчисления высказываний, которая строится из формульных переменных с помощью одних только символов импликации и конъюнкции, мы будем называть I-К-формулой.

При записи I-К-формул мы будем учитывать наше соглашение об экономии скобок. По этому соглашению конъюнкция, являющаяся посылкой или заключением импликации, либо первым членом другой конъюнкции, может не заключаться в скобки [1]). Например, выражение

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C} \to \mathfrak{K} \,\&\, \mathfrak{L}$$

является сокращенной записью выражения

$$((\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \,\&\, \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{K} \,\&\, \mathfrak{L}).$$

Теперь речь пойдет о том, чтобы найти подходящее обобщение понятия позитивно тождественной импликативной формулы для случая I-К-формул.

При этом в качестве ориентира мы будем иметь в виду, что выражение

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}$$

должно считаться равнозначным выражению

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}) \ldots),$$

выражение

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}_n$$

— равнозначным конъюнкции

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_n),$$

а выражение

$$\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$$

— равнозначным выражению

$$(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \,\&\, \mathfrak{C}.$$

[1]) См. Приложение I, с. 458.

Эти соображения приводят нас к процедуре построения формулы, которая будет называться трансформацией данной I-K-формулы. Операция эта заключается в следующем:

Сначала вычеркиваются все те скобки, которые окаймляют конъюнкции. Затем среди импликаций «с конъюнкциями», т. е. среди таких импликаций, у которых в посылке или в заключении имеется конъюнкция, разыскиваются «самые внутренние», т. е. такие, у которых каждая импликация, фигурирующая в посылке или в заключении, уже не содержит конъюнкций. Такая самая внутренняя импликация «с конъюнкциями» (с учетом первого шага преобразований) имеет вид

$$\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1 \& \ldots \& \mathfrak{B}_n,$$

где формулы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ не содержат вхождений конъюнкции и одно из чисел m и n (но не оба одновременно) может равняться 1. Теперь каждая из этих импликаций заменяется следующей соответствующей ей формулой:

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1)\ldots)]\\ &\&[\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_2)\ldots)]\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\&(\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_n)\ldots)].\end{aligned}$$

В результате этого количество импликаций «с конъюнкциями» во всей данной формуле уменьшится. Эту (выполняемую в два указанных шага) процедуру надо будет повторить нужное число раз до тех пор, пока в рассматриваемой формуле все импликации не освободятся от конъюнкций, так что результирующая формула либо сама по себе будет импликативной, либо будет представлять собой конъюнкцию импликативных формул. И, наконец, надо будет еще опустить скобки вокруг конъюнкций.

Полученная таким образом формула будет называться трансформацией первоначально заданной формулы.

Пример. Трансформацией формулы

$$(A \to B \,\&\, C) \to A \,\&\, (B \,\&\, D)$$

является формула

$$((A \to B) \to ((A \to C) \to A)) \,\&\, ((A \to B) \to ((A \to C) \to B)) \,\&\, ((A \to B) \to ((A \to C) \to D)).$$

Трансформацией любой импликативной формулы является она сама. Трансформацией конъюнкции $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ является конъюнкция трансформаций формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Трансформация импликации $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ совпадает с трансформацией импликации $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{B}_1$, где $\mathfrak{A}_1$ является трансформацией формулы $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B}_1$ — трансформацией формулы $\mathfrak{B}$.

Теперь мы определим понятие позитивно тождественной I-K-формулы следующим образом: I-K-формула будет называться позитивно тождественной, если ее трансформация является позитивно тождественной импликативной формулой или конъюнкцией таких формул.

Таким образом, каждая позитивно тождественная I-K-формула является тождественно истинной. Действительно, всякая позитивно тождественная импликативная формула (а потому и конъюнкция таких формул) является тождественно истинной; а кроме того, все операции, из которых состоит переход от формулы к ее трансформации, таковы, что при любом распределении истинностных значений переменных истинностное значение всей формулы в целом остается без изменений.

Для импликативных формул новое понятие позитивной тождественности совпадает с прежним. Аналогия нового понятия с понятием позитивно тождественной импликативной формулы проявляется и в следующих предложениях, которые мы докажем ниже:

Всякая непосредственно тождественная I-K-*формула является позитивно тождественной. Всякая формула, выводимая из позитивно тождественных* I-K-*формул с помощью подстановок и схемы заключения, является позитивно тождественной.*

Эти предложения вытекают из следующей дедуктивной характеризации совокупности позитивно тождественных I-K-формул:

Совокупность всех позитивно тождественных I-K-формул совпадает с совокупностью формул, которые могут быть получены с использованием следующих двух схем формул:

$$(S_1) \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A},$$

$$(S_2) \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$$

и трех схем вывода:

$$(S_3) \qquad \frac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})},$$

$$(S_4) \qquad \frac{\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}},$$

$$(S_5) \qquad \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\quad \mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}},$$

если ограничиться применением этих схем к I-K-формулам.

Для доказательства этого утверждения нам потребуется установить два факта. С одной стороны, нужно будет показать, что каждая формула, полученная с помощью применяемых к I-K-формулам схем $(S_1) - (S_5)$, является позитивно тождественной,

а с другой стороны, что каждая позитивно тождественная I-K-формула может быть получена применением к I-K-формулам схем $(S_1)-(S_5)$.

Первая часть доказательства получается из следующих утверждений:

1. Трансформация любой I-K-формулы, имеющей вид $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, либо сама является непосредственно тождественно импликативной формулой, либо является конъюнкцией таких формул.

2. Трансформация I-K-формулы $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ совпадает с трансформацией формулы $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})$.

3. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — позитивно тождественные I-K-формулы, то каждый конъюнктивный член трансформации формулы $\mathfrak{B}$ (или соответственно сама эта трансформация) выводим из позитивно тождественных импликативных формул с помощью схемы заключения и, следовательно, сам является позитивно тождественной импликативной формулой.

4. Если $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})$ — позитивно тождественные I-K-формулы, то каждый конъюнктивный член трансформации формулы $\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$ (или соответственно сама эта трансформация) является позитивно тождественной импликативной формулой.

Утверждения 1, 2 и 3 получаются непосредственно из определений позитивно тождественной I-K-формулы и трансформации. Утверждение 4 получается с помощью следующей леммы:

Если импликативная формула $\mathfrak{T}$ выводима из импликативных формул $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_f$ и еще каких-нибудь позитивно тождественных импликативных формул с помощью одной только схемы заключения, то импликативная формула

$$\mathfrak{S}_1\to(\mathfrak{S}_2\to\ldots\to(\mathfrak{S}_f\to\mathfrak{T})\ldots)$$

является позитивно тождественной.

Эта лемма в свою очередь получается из двух ранее доказанных результатов: результата о том, что совокупность позитивно тождественных импликативных формул совпадает с совокупностью формул, получающихся в результате применения к импликативным формулам схем формул

$$\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}) \quad\text{и}\quad (\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}))\to((\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}))$$

и схемы заключения, и результата о том, что теорема о посылках верна для выводов, осуществляемых с помощью этих схем.

Таким образом, мы убедились, что эти схемы, будучи применены к I-K-формулам, дают только позитивно тождественные формулы. Теперь нам остается показать, что любая позитивно тождественная I-K-формула может быть получена путем применения этих схем к I-K-формулам.

Для этого удобно воспользоваться следующими вспомогательными утверждениями:

1) Из схем (S_1) и (S_3) в качестве выводимой схемы получается схема формул

$$\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}),$$

а из нее с помощью схемы заключения (S_4) в качестве производной схемы получается схема вывода

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}};$$

а с помощью этой схемы и схемы (S_5) в качестве производной схемы вывода получается схема силлогизма

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\quad \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}}.$$

Из схемы силлогизма в сочетании со схемой (S_5) в качестве производной схемы получается схема вывода

$$\frac{\mathfrak{P}\to\mathfrak{A},\quad \mathfrak{P}\to\mathfrak{B},\quad \mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})}{\mathfrak{P}\to\mathfrak{C}}$$

(эту схему вывода мы будем кратко называть схемой двукратного устранения).

Если в эту схему мы вместо $\mathfrak{P}$ подставим выражение $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, то, опираясь на (S_1) и (S_2), получим схему вывода

$$\frac{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}},$$

представляющую собой обращение схемы (S_3). Схема (S_3) по образцу терминологии, применяемой в исчислении высказываний [1]), может быть названа схемой разъединения посылок, а ее обращение, оказывающееся производной схемой вывода, естественно назвать схемой соединения посылок.

2) Из схем (S_2) и (S_3) получается схема формул

$$\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}),$$

из которой в сочетании со схемой заключения (S_4) получается схема формул

$$\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}.$$

Если в нее подставить вместо $\mathfrak{A}$ выражение $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, то с помощью

[1]) См. т. I, с. 116.

схемы разъединения посылок получится схема формул

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}).$$

Эта схема, с одной стороны, в сочетании со схемой заключения (S_4) дает схему

$$\frac{\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}},$$

а с другой стороны, в сочетании со схемой двукратного устранения — схему

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\quad \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}}.$$

Из последней в сочетании со схемами (S_1) и (S_2) мы получаем схему формул

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{A},$$

а затем, с использованием схемы силлогизма, — схемы формул

$$(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \,\&\, \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$$

и

$$\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \,\&\, \mathfrak{C}.$$

Из утверждений 1) и 2) получается, что для любого дедуктивного формализма, заключающегося в разрешении применять схемы (S_1) — (S_5) к каким-либо образом очерченной совокупности формул, содержащей импликацию и конъюнкцию (в качестве двуместных связок между формулами), выполняются условия теоремы о посылках. Действительно, мы уже убедились, что схема формул $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ выводима с помощью схем (S_1) — (S_5), а схема вывода

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}$$

является производной, так что теперь остается только проверить выполнение условий, касающихся двухчленных и трехчленных основных схем вывода (S_3), (S_4) и (S_5). Для схемы заключения (S_4) это непосредственно очевидно, так как в нашем расположении имеется схема (S_5). Для схем (S_5) и (S_3) упомянутое условие заключается в том, что должны быть производными схемы вывода

$$\frac{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}),\quad \mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}))}{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})}$$

и

$$\frac{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}))}.$$

Для первой из них это получается из схемы (S_5) в сочетании со схемами соединения и разъединения посылок, а для второй — тоже с помощью схем соединения и разъединения посылок, взятых в сочетании со схемой формул

$$(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \,\&\, \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$$

и со схемой силлогизма.

Таким образом, для выводов, осуществляемых с помощью схем (S_1) — (S_5) в рамках как угодно ограниченной совокупности формул, содержащей импликацию и конъюнкцию, действует теорема о посылках. Используя этот факт, можно сравнительно просто доказать, что с помощью схем (S_1) — (S_5), применяемых к I-К-формулам, может быть выведена любая позитивно тождественная I-К-формула. Искомое доказательство распадается на три части. В ходе этого доказательства выводимость мы всегда будем понимать как выводимость при помощи схем (S_1) — (S_5), применяемых к I-К-формулам.

1)) По теореме о посылках каждая I-К-формула вида

$$(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$$

выводима.

С другой стороны, как мы знаем, выводима схема формул

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}),$$

и у нас в распоряжении имеется схема заключения.

Тем самым по полученной нами в § 1 дедуктивной характеризации совокупности позитивно тождественных импликативных формул каждая позитивно тождественная импликативная формула выводима с помощью схем (S_1) — (S_5), а благодаря производности схемы

$$\frac{\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$$

выводима и любая конъюнкция позитивно тождественных импликативных формул.

Таким образом, трансформация любой позитивно тождественной I-К-формулы выводима. Поэтому задача нашего доказательства сводится к установлению того, что если выводима трансформация какой-либо I-К-формулы, то выводима и сама эта формула. Мы сейчас покажем, что любая I-К-формула дедуктивно равна своей трансформации (при этом две I-К-формулы мы будем называть дедуктивно равными, если каждая из них выводима из другой с помощью схем (S_1) — (S_5), применяемых к I-К-формулам).

2)) Из теоремы о посылках следует, что если I-K-формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дедуктивно равны, то выводимы обе импликации $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ [1]).

Отсюда, далее, получается, что если I-K-формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дедуктивно равны, то для произвольной I-K-формулы $\mathfrak{C}$ формула $\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}$, формула $\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$, формула $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{C}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}$, а формула $\mathfrak{C}\,\&\,\mathfrak{A}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{C}\,\&\,\mathfrak{B}$.

Так как две формулы, порознь дедуктивно равные третьей, дедуктивно равны и между собой, то из только что приведенных соотношений вытекает, что любая I-K-формула при замене любой ее составной части формулой, дедуктивно равной этой части, переходит в дедуктивно равную ей формулу.

Таким образом, для доказательства того, что всякая I-K-формула дедуктивно равна своей трансформации, нам остается показать, что процедура построения трансформации распадается на такие элементарные шаги, которые состоят из замены какой-либо I-K-формулы (отдельно взятой или фигурирующей в качестве составной части другой формулы) формулой, дедуктивно ей равной.

3)) Процедура построения трансформации I-K-формулы может быть разложена на следующие элементарные шаги: а) замена формулы $\mathfrak{A}\,\&\,(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})$ соответствующей ей формулой $(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})\,\&\,\mathfrak{C}$, вместо которой можно писать и короче: $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}$; б) замена формулы $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ формулой $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})$; в) замена формулы $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}$ формулой $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\,\&\,(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C})$. С помощью установленных нами ранее выводимостей можно непосредственно убедиться, что в каждом из этих трех случаев происходит замена формулы дедуктивно равной ей формулой.

Тем самым искомое доказательство закончено, а значит, обосновано и утверждение о том, что совокупность позитивно тождественных I-K-формул совпадает с совокупностью тех формул, которые могут быть выведены с использованием схем $(S_1)-(S_5)$, применяемых к I-K-формулам. Наше доказательство заодно позволяет утверждать, что теорема о посылках справедлива и для выводов, производимых путем применения схем $(S_1)-(S_5)$ к произвольным формулам, содержащим импликацию и конъюнкцию.

Отсюда мы можем, в частности, получить два обещанных нами следствия. В самом деле, ввиду справедливости теоремы о посылках для выводов с помощью схем $(S_1)-(S_5)$ и с учетом того факта, что схема заключения входит в число этих схем, получается, что каждая непосредственно тождественная I-K-формула выводима с помощью схем $(S_1)-(S_5)$, применяемых к I-K-

[1]) То, что это предложение, не имеющее места в обычном дедуктивном исчислении высказываний, здесь оказывается верным, связано с тем, что в рассматриваемом дедуктивном формализме отсутствует правило подстановки.

формулам, а отсюда следует, что каждая такая формула является позитивно тождественной.

Теперь заметим, что если в выводе какой-либо I-K-формулы, производимом с помощью схем $(S_1)-(S_5)$, какую-либо формульную переменную повсеместно заменить произвольной I-K-формулой, то снова получится вывод, производимый с помощью тех же самых схем. Отсюда следует, что из позитивно тождественных I-K-формул в результате подстановок, а тем самым и в результате подстановок и применений схемы заключения, снова получаются позитивно тождественные I-K-формулы.

К сказанному мы сделаем несколько дополнительных замечаний. Первое из них будет касаться вопроса о *независимости схем* $(S_1)-(S_5)$.

Независимость схемы заключения (S_4) от остальных схем (S_1), (S_2), (S_3) и (S_5) вытекает из того, что в результате применения каждой из этих четырех схем всякий раз получаются формулы, имеющие вид импликаций. Поэтому, например, формула

$$(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})\,\&\,(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}),$$

которая является позитивно тождественной и, следовательно, выводится с помощью указанных пяти схем, не может быть получена без использования схемы заключения.

То, что ни одна из схем (S_1), (S_2), (S_3) и (S_5) тоже не является излишней, следует из того, что в рамках выводов, производимых с помощью подстановок и схемы заключения, соответствующие этим схемам формулы

$$A\,\&\,B\to A,$$
$$A\,\&\,B\to B,$$
$$(A\,\&\,B\to C)\to(A\to(B\to C))$$

и

$$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$$

не зависят друг от друга.

Соответствующие доказательства могут быть получены с использованием разработанного в гл. III т. I метода оценок [1]). Для установления независимости первых трех формул достаточно воспользоваться теми оценками, с помощью которых мы в свое время доказали независимость трех формул I 1), 2) и 3) в рамках системы формул I — V [2]). Естественно, в рассматриваемых оценках должны приниматься в расчет лишь определения значений для импликации и конъюнкции. Независимость формулы

$$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$$

[1]) См. т. I, с. 103 и далее.

[2]) См. т. I, с. 96—97 и 108—111.

устанавливается с помощью следующей оценки с тремя значениями α, β и γ: во-первых, должны выполняться основные равенства[1])

$$\left.\begin{array}{lll} A\to A=\alpha, & A\to\alpha=\alpha, & \beta\to A=\alpha,\\ A\,\&\,A=A, & A\,\&\,\alpha=A, & A\,\&\,\beta=\beta \end{array}\right\}\ \text{при любом значении } A,$$

$$A\,\&\,B=B\,\&\,A \text{ при любых значениях } A \text{ и } B,$$

а кроме того, — дополнительные равенства

$$\alpha\to\beta=\beta,\quad \alpha\to\gamma=\gamma,\quad \gamma\to\beta=\gamma.$$

При этой оценке первые три из рассматриваемых формул, а также любые формулы, выводимые из них с помощью подстановок и схемы заключения, всегда принимают значение α. Четвертая из указанных формул этим свойством не обладает. Действительно,

$$(\gamma\to(\gamma\to\beta))\to((\gamma\to\gamma)\to(\gamma\to\beta))=(\gamma\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma)=\alpha\to\gamma=\gamma.$$

Проведенное рассмотрение заодно показывает, что при выводах с помощью подстановок и схемы заключения указанные четыре формулы образуют систему аксиом, достаточную для получения всех позитивно тождественных I-K-формул.

Такого рода систему аксиом для позитивно тождественных I-K-формул образуют и формулы I 1) — 3) и II 1) — 3) из приведенной в т. I и только что упоминавшейся системы аксиом для исчисления высказываний. Напомним эти формулы:

$$A\to(B\to A),$$
$$(A\to(A\to B))\to(A\to B),$$
$$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)),$$
$$A\,\&\,B\to A,$$
$$A\,\&\,B\to B,$$
$$(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\,\&\,C)).$$

Чтобы убедиться в достаточности этой системы формул для вывода всех позитивно тождественных I-K-формул, нам нужно только установить, что по отношению к этой системе (при использовании подстановок и схемы заключения) схемы формул (S_1) и (S_2) в их применении к I-K-формулам оказываются выводимыми, а схемы вывода (S_3) и (S_5) — производными. Для схем (S_1) и (S_2) это очевидно. Для схемы (S_5) мы это доказали в § 1; кроме того, там уже было установлено, что из формул I 1) — 3) с помощью подстановок и схемы заключения выводима любая позитивно тождественная импликативная формула. Но с помощью позитивно

[1]) См. т. I, с. 108.

тождественных импликативных формул и формулы

$$(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\,\&\,C))$$

из I-K-формулы $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ легко вывести формулу $\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})$, так что схема (S_3) тоже оказывается производной схемой.

Вместо системы формул I 1) — 3) и II 1) — 3) можно также взять систему, состоящую из формул I 2), 3), II 1), 2) и формулы

$$A\to(B\to A\,\&\,B).$$

Действительно, для этой системы схемы формул (S_1) и (S_2) опять-таки оказываются выводимыми, а схема вывода (S_5) — производной (последняя — согласно доказанному в § 1). То же самое верно и в отношении схемы силлогизма.

Осталось еще показать, что схема вывода (S_3), т. е. схема

$$\frac{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})}$$

тоже является производной схемой. Это делается следующим образом. Формула

$$A\to(B\to A\,\&\,B)$$

дает нам схему формул

$$\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}),$$

а тем самым и схему вывода

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{A}}.$$

С другой стороны, из схем (S_1), (S_2), (S_5) и схемы силлогизма мы получаем схему

$$\frac{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})}{\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}},$$

так что в итоге, применив еще раз схему силлогизма, мы получаем схему вывода

$$\frac{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}),\quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}}.$$

Из этой схемы в сочетании со схемой формул

$$(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to((\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C})),$$

получающейся из формулы I 3), мы получаем схему

$$\frac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C})}.$$

Теперь, если дважды применить эту схему к формуле $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, то получится формула

$$(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B})) \to (\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})),$$

а потому, ввиду выводимости формулы

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}),$$

и формула $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$.

Укажем на еще один вариант формулировки, которую можно придать полученной нами теореме, характеризующей позитивно тождественные I-K-формулы как формулы, выводимые с помощью применений к I-K-формулам схем $(S_1) - (S_5)$. Заметим, что выводы, производимые в области I-K-формул при помощи схем $(S_1) - (S_5)$, протекают совершенно аналогично выводам схем формул, производимым при помощи указанных пяти схем безотносительно к какой-либо конкретной области формул, исключительно путем оперирования с обозначениями формул, связываемые друг с другом знаками импликации и конъюнкции. Это приводит нас к следующей теореме:

Схемы формул, выводимые из схем $(S_1) - (S_5)$ без указания какой-либо конкретной области формул, совпадают со схемами, получающимися из позитивно тождественных I-K-формул в результате замены формульных переменных буквами, обозначающими произвольные формулы.

§ 3. Тождественные I-K-N-формулы

В проведенном нами в гл. V [§ 5, п. б)] рассуждении пока отсутствует доказательство утверждения [1]) о том, что любая схема формул, соответствующая тождественно истинной формуле исчисления высказываний и не содержащая дизъюнкции, выводима с помощью схем $(S_1) - (S_5)$, схем вывода

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}{\neg \mathfrak{A}}$$

и

$$\frac{\neg (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}},$$

схемы формул

$$\neg\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$$

и правила замены любой эквивалентности $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ соответствующим ей выражением $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$ [и, разумеется, этого выражения указанной эквивалентностью].

[1]) См. с. 433—434.

В этом утверждении мы можем заменить схемы формул, соответствующие тождественно истинным формулам, самими этими формулами, считая, что используемые в выводах схемы применяются к формулам исчисления высказываний, не содержащим знака дизъюнкции. Это вытекает из упомянутого в конце предыдущего параграфа результата, утверждающего, что выводы, производимые с помощью схем, применяемых к формулам исчисления высказываний, протекают совершенно аналогично выводам, применяемым к схемам формул, получающимся из соответствующих формул в результате замены формульных переменных буквами, обозначающими произвольные формулы.

Далее, при доказательстве этого утверждения мы можем отвлечься от эквивалентности, так как всякая тождественно истинная формула исчисления высказываний при замене каждой ее составной части $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ соответствующим выражением $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$ переходит снова в тождественно истинную формулу, и поэтому всякая тождественно истинная формула, не содержащая знака дизъюнкции, с помощью правила замены для эквивалентности может быть получена из некоторой тождественно истинной формулы, не содержащей знаков дизъюнкции и эквивалентности.

Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением таких формул исчисления высказываний, которые в качестве логических символов содержат только импликацию, конъюнкцию и отрицание. Формулы этого рода мы будем кратко называть I-K-N-формулами.

Наряду со схемами $(S_1) - (S_5)$ рассмотрим еще следующие три схемы вывода:

(S_6) $$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}{\neg \mathfrak{A}},$$

(S_7) $$\frac{\neg (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}}$$

и

(S_8) $$\neg\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}.$$

Легко видеть, что применение этих схем к формулам исчисления высказываний дает только тождественно истинные формулы.

Мы должны доказать, что для I-K-N-формул имеет место обращение этого утверждения, а именно что любая тождественно истинная I-K-N-формула может быть выведена с помощью применений схем $(S_1) - (S_8)$ к I-K-N-формулам.

Для этого мы воспользуемся одной модификацией конъюнктивной нормальной формы [1]) обычного исчисления высказываний [2]).

Как мы знаем, при истолковании формул исчисления высказываний, получающемся на основе понимания связок исчисления высказываний как истинностных функций, любая формула равнозначна некоторой конъюнкции, члены которой являются либо формульными переменными, либо отрицаниями формульных переменных — выражения этих двух типов мы будем называть примарными выражениями [3]), — либо дизъюнкциями, состоящими из нескольких примарных выражений. При этом упомянутая равнозначность имеет место в том смысле, что соответствующая конъюнкция задает ту же самую истинностную функцию, что и первоначальная формула.

Любая дизъюнкция примарных выражений

$$\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_f$$

задает ту же истинностную функцию, что и отрицание некоторой конъюнкции примарных выражений. Тем самым каждая формула исчисления высказываний в указанном смысле равнозначна такой конъюнкции, у которой каждый член является либо примарным выражением, либо отрицанием конъюнкции примарных выражений. Формулу такого рода в данном рассмотрении мы будем называть конъюнктивно нормированной, а какую-либо конъюнктивно нормированную формулу, равнозначную формуле $\mathfrak{A}$, мы будем называть конъюнктивно нормированной формулой, связанной с формулой $\mathfrak{A}$.

По конъюнктивно нормированной формуле можно непосредственно установить, является ли она тождественно истинной. Действительно, это, как легко убедиться, имеет место тогда и только тогда, когда каждый ее дизъюнктивный член является отрицанием

[1]) См. т. I, с. 82—85 и 96—98.

[2]) Как некоторую модификацию получаемого с помощью конъюнктивной нормальной формы метода доказательства полноты систем аксиом исчисления высказываний можно рассматривать доказательство, которое недавно дали Гермес и Шольц для первоначально установленного Лукасевичем факта, что формулы I* вместе с формулой $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ при использовании подстановок и схемы заключения представляют собой систему, достаточную для вывода всех тождественно истинных формул исчисления высказываний, построенных с помощью одних только знаков импликации и отрицания. См.: Hermes H., Scholz H. Ein neuer Vollständigkeitsbeweis für das reduzierte Fregesche Axiomensystem des Aussagenkalküls. — Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, 1937, № 1.

Роль аналога конъюнкции «простых» дизъюнкций в случае конъюнктивной нормальной формы здесь играют конечные множества импликаций некоторого специального вида.

[3]) Это понятие примарного *выражения* не находится ни в какой связи с введенным в т. I (с. 188 и 250) понятием примарной *формулы*.

такой конъюнкции, у которой имеются два члена, один из которых является отрицанием другого.

Такая структура тождественно истинных конъюнктивно нормированных формул позволяет заключить, что каждая из них выводима с помощью применяемых к I-K-N-формулам схем $(S_1) - (S_6)$. Действительно, если $\mathfrak{K}$ является конъюнкцией примарных выражений, среди которых имеется некоторое выражение $\mathfrak{U}$ вместе с его отрицанием, то с помощью схем $(S_1) - (S_5)$ будут выводимы [1]) формулы

$$\mathfrak{K} \to \mathfrak{U} \quad \text{и} \quad \mathfrak{K} \to \neg \mathfrak{U};$$

но из них с помощью схемы (S_6) мы получим формулу $\neg \mathfrak{K}$. Поэтому тождественно истинная конъюнктивно нормированная формула является конъюнкцией формул, выводимых с помощью схем $(S_1) - (S_6)$, а из этих формул с помощью схем $(S_1) - (S_5)$ может быть выведена и сама эта конъюнктивно нормированная формула.

Если мы теперь заметим, что конъюнктивно нормированная формула, связанная с тождественной истинной формулой, является тождественно истинной, то отсюда ио только что доказанному получится, что для обоснования нашего утверждения о выводимости любой тождественно истинной I-K-N-формулы путем применения схем $(S_1) - (S_8)$ к I-K-N-формулам достаточно показать, что для каждой I-K-N-формулы можно указать такую связанную с ней конъюнктивно нормированную формулу, которая дедуктивно равна ей относительно схем $(S_1) - (S_8)$, применяемых к I-K-N-формулам.

Это мы проделаем следующим образом: сначала мы укажем некоторую процедуру, сопоставляющую каждой I-K-N-формуле некоторую связанную с ней конъюнктивно нормированную формулу, а затем покажем, что формула, полученная при помощи этой процедуры, дедуктивно равна относительно схем $(S_1) - (S_8)$ исходной формуле.

Для того чтобы изложить упомянутую процедуру, мы воспользуемся одной классификацией формул, построенных из формульных переменных с помощью знаков конъюнкции и отрицания (такие формулы мы будем называть K-N-формулами). Каждой такой формуле мы припишем следующим образом некоторый параметр, который назовем ее *порядком*. Знак отрицания будет назы-

[1]) При дедуктивных преобразованиях конъюнкций нужно помнить, что в соответствии с нашими соглашениями бесскобочная конъюнкция $\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n$ является сокращением для выражения

$$(\ldots(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2) \& \ldots \& \mathfrak{A}_{n-1}) \& \mathfrak{A}_n.$$

ваться примарным, если он входит в примарное выражение. Далее, два или большее число знаков отрицания, входящих в какую-либо K-N-формулу, будут называться наслаивающимися друг на друга, если по меньшей мере одна формульная переменная данной формулы попадает в область действия каждого из этих знаков. Порядок данной K-N-формулы мы определим как максимальное число входящих в нее наслаивающихся друг на друга непримарных отрицаний.

Согласно этому определению примарное выражение всегда имеет нулевой порядок. Отрицание какой-либо K-N-формулы n-го порядка, не состоящей из одной только формульной переменной, является формулой $(n+1)$-го порядка, а порядок конъюнкции K-N-формул равен максимальному из порядков ее членов. K-N-формула является конъюнктивно нормированной тогда и только тогда, когда ее порядок не превосходит единицы. Далее, из определения порядка можно извлечь следующие два предложения:

1. Любая K-N-формула порядка выше первого содержит в качестве составной части по меньшей мере одно отрицание какой-либо формулы первого порядка.

2. Если в какой-либо формуле порядка выше первого каждое входящее в нее отрицание формулы первого порядка заменить связанной с ней конъюнктивно нормированной формулой, то формула, которая при этом получится, будет иметь порядок, меньший порядка первоначальной формулы.

Закончив эти приготовления, мы теперь укажем способ, позволяющий преобразовать любую наперед заданную I-K-N-формулу в некоторую связанную с ней конъюнктивно нормированную формулу. Сначала мы исключим из исходной формулы все вхождения импликации, заменив каждое выражение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ соответствующим ему выражением $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B})$. Обозначим получившуюся в результате этого формулу через $\mathfrak{S}$. Либо формула $\mathfrak{S}$ является конъюнктивно нормированной и тогда наша процедура заканчивается, либо она содержит по меньшей мере одну составную часть вида $\neg \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — формула первого порядка. Для каждой такой составной части $\neg \mathfrak{C}$ мы следующим образом построим некоторую конъюнктивно нормированную формулу, которой будем ее заменять.

Будучи формулой первого порядка, $\mathfrak{C}$ содержит по меньшей мере один конъюнктивный член $\neg \mathfrak{K}$ первого порядка, т. е. либо $\mathfrak{C}$ вообще состоит из одной такой формулы $\neg \mathfrak{K}$, либо $\mathfrak{C}$ имеет вид $\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{K}$ или же переходит в формулу такого вида в результате перестановки последнего члена первого порядка с идущими за ним конъюнктивными членами нулевого порядка.

В первом случае $\neg \mathfrak{C}$ имеет вид $\neg\neg \mathfrak{K}$. Убрав двойное отрицание, мы получим формулу нулевого порядка и, значит, конъюнктивно нормированную формулу.

Во втором случае $\neg \mathfrak{C}$ либо уже имеет вид

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{K}),$$

либо переходит в формулу этого вида после соответствующей перестановки некоторых конъюнктивных членов. В более подробной записи $\neg \mathfrak{C}$ будет иметь вид

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg(\mathfrak{P}_1 \& \ldots \& \mathfrak{P}_r)),$$

где $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ — примарные выражения.

Тогда мы заменим это выражение сначала выражением

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{P}_1) \& \neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{P}_2) \& \ldots \& \neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{P}_r),$$

а затем выражением

$$\neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{Q}_1) \& \neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{Q}_2) \& \ldots \& \neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{Q}_r),$$

где (при $i = 1, \ldots, r$) $\mathfrak{Q}_i$ в том случае, когда $\mathfrak{P}_i$ представляет собой формульную переменную, является примарным выражением $\neg \mathfrak{P}_i$, а в случае, когда $\mathfrak{P}_i$ представляет собой отрицание формульной переменной, является этой формульной переменной. В обоих этих случаях $\mathfrak{Q}_i$ является примарным выражением.

Таким образом, формула $\neg \mathfrak{C}$ заменена конъюнкцией

$$\neg \mathfrak{C}_1 \& \neg \mathfrak{C}_2 \& \ldots \& \neg \mathfrak{C}_r,$$

где каждая из формул $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_r$ содержит меньше конъюнктивных членов первого порядка, чем $\mathfrak{C}$; действительно, в $\mathfrak{C}_i$ вместо конъюнктивного члена $\neg \mathfrak{K}$ формулы $\mathfrak{C}$, который имеет первый порядок, фигурирует примарное выражение $\mathfrak{Q}_i$.

Повторив эту процедуру достаточное число раз, мы заменим формулу $\neg \mathfrak{C}$ конъюнкцией

$$\neg \mathfrak{C}_1^* \& \neg \mathfrak{C}_2^* \& \ldots \& \neg \mathfrak{C}_n^*,$$

где формулы $\mathfrak{C}_1^*, \ldots, \mathfrak{C}_n^*$ вообще не содержат конъюнктивных членов первого порядка и, следовательно, являются формулами нулевого порядка, так что конъюнкция

$$\neg \mathfrak{C}_1^* \& \ldots \& \neg \mathfrak{C}_n^*$$

является формулой первого порядка и тем самым конъюнктивно нормированной формулой.

Заменив, согласно этому предписанию, в формуле $\mathfrak{S}$ каждую составную часть второго порядка вида $\neg \mathfrak{C}$ соответствующей конъюнктивно нормированной формулой, мы получим вместо $\mathfrak{S}$ некоторую K-N-формулу, имеющую порядок, меньший порядка $\mathfrak{S}$. Этот процесс надо будет повторить достаточное число раз, и тогда мы

придем к некоторой K-N-формуле первого порядка, т. е. к конъюнктивно нормированной формуле.

То, что полученная таким образом конъюнктивно нормированная формула связана с той I-K-N-формулой, из которой мы исходили, т. е. что она определяет ту же самую истинностную функцию, что и исходная формула, вытекает из того, что описанная процедура складывается из составных частей следующих типов (детали, касающиеся лишь способа записи, мы в расчет не принимаем):

1) замена выражения $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ выражением $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B})$,
2) замена выражения $\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C})$ выражением $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \& \mathfrak{C}$;
3) замена выражения $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ выражением $\mathfrak{B} \& \mathfrak{A}$;
4) замена выражения $\neg\neg\mathfrak{A}$ выражением $\mathfrak{A}$;
5) замена выражения $\neg(\mathfrak{A} \& \neg(\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}))$ выражением $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B}) \& \& \neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{C})$.

[Шаги последнего типа позволяют осуществлять переходы от выражений типа

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg(\mathfrak{P}_1 \& \ldots \& \mathfrak{P}_v))$$

к соответствующим выражениям

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{P}_1) \& \ldots \& \neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{P}_v).]$$

В самом деле, при понимании импликации, конъюнкции и отрицания как истинностных функций каждая из этих пяти замен ни при каком наборе истинностных значений формульных переменных не меняет значений преобразуемого выражения.

Теперь мы должны еще установить, что любая I-K-N-формула дедуктивно равна (относительно схем $(S_1) - (S_8)$) той конъюнктивно нормированной формуле, которая получается для нее в результате применения описанной процедуры. Для доказательства этого факта мы можем воспользоваться замечаниями, сделанными в конце § 2 по поводу выводимости формул с помощью схем $(S_1) - (S_5)$. В силу этих замечаний и в случае применения схем $(S_1) - (S_5)$ к I-K-N-формулам схема силлогизма, схема соединения посылок и схема

$$\frac{\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$$

будут производными схемами вывода, схемы формул

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \& \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \& \mathfrak{C}$$

и

$$(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \& \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C})$$

будут выводимыми, а любая формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$ будет дедуктивно равна формуле $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$.

Схема

$$\frac{\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}},$$

обращения которой

$$\frac{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

непосредственно получаются из схем (S_1), (S_2) и (S_4), сама является производной схемой. Из этого следует, что если формулы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ дедуктивно равны на основе схем $(S_1) - (S_5)$ формулам $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ соответственно, то на основе этих схем формула $\mathfrak{M} \& \mathfrak{N}$ будет дедуктивно равна формуле $\mathfrak{M}_1 \& \mathfrak{N}_1$.

К этому мы добавим следующие утверждения, относящиеся к выводам с помощью схем $(S_1) - (S_8)$:

С помощью схем (S_1), (S_2) и (S_6) может быть получена схема формул

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{A}),$$

а из нее с помощью (S_7) — схема формул

$$\mathfrak{A} \to \neg\neg\mathfrak{A}.$$

На основании этой схемы и схемы (S_8) любая формула $\mathfrak{A}$ дедуктивно равна формуле $\neg\neg\mathfrak{A}$. С помощью схем (S_1), (S_2), (S_6), (S_7) и схемы силлогизма получается — с использованием производной схемы вывода

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\neg(\neg\mathfrak{B} \& \mathfrak{A})}$$

— схема контрапозиции

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\neg\mathfrak{B} \to \neg\mathfrak{A}}.$$

С помощью схем (S_1), (S_2), (S_6) и схемы силлогизма получается схема вывода

$$\frac{\mathfrak{A} \to \neg\mathfrak{B}}{\neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})},$$

которая представляет собой обращение схемы (S_7), а также схема вывода

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\neg(\mathfrak{A} \& \neg\mathfrak{B})}.$$

Обращение этой последней выводится с помощью схем (S_7), (S_8) и схемы силлогизма.

Таким образом, любая формула $\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}$ дедуктивно равна формуле $\neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, а любая формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ дедуктивно равна формуле $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B})$. Применим сказанное к формулам вида $\neg(\mathfrak{A} \& \neg(\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}))$. Такая формула, как только что было замечено, дедуктивно равна формуле $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$; а эта в свою очередь, как уже упоминалось, дедуктивно равна формуле $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$. Но члены этой конъюнкции дедуктивно равны формулам $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B})$ и $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{C})$ соответственно, а отсюда, в силу одного отмеченного выше утверждения, получается, что формула

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$$

дедуктивно равна формуле

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B}) \& \neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{C}).$$

Значит, последняя формула также дедуктивно равна формуле

$$\neg(\mathfrak{A} \& \neg(\mathfrak{B} \& \mathfrak{C})).$$

Полученные утверждения теперь уже делают вполне очевидным тот факт, что все шаги замены 1) — 5), на которые распадается рассмотренная нами процедура перехода от заданной I-K-N-формулы к связанной с ней конъюнктивно нормированной формуле, таковы, что на каждом шаге некоторое выражение заменяется другим, дедуктивно равным ему на основе схем $(S_1) - (S_8)$ выражением.

Теперь для установления интересующего нас дедуктивного равенства нам осталось только убедиться, что при любой замене в I-K-N-формуле какого-либо выражения, фигурирующего в качестве ее составной части, дедуктивно равным ему выражением получается формула, дедуктивно равная исходной.

С учетом структуры I-K-N-формул для этого достаточно показать, что если I-K-N-формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дедуктивно равны (по отношению к выводам с помощью схем $S_1 - S_8$), то для любой I-K-N-формулы $\mathfrak{C}$ формула $\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$, формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, формула $\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$, формула $\mathfrak{C} \& \mathfrak{A}$ дедуктивно равна формуле $\mathfrak{C} \& \mathfrak{B}$ и формула $\neg \mathfrak{A}$ дедуктивно равна формуле $\neg \mathfrak{B}$.

Это доказывается аналогично тому, как в § 2 было доказано аналогичное утверждение о схемах $(S_1) - (S_5)$ и о I-K-формулах: соответствующие дедуктивные равенства, справедливость которых утверждается в предположении дедуктивного равенства формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, получатся из наших утверждений о выводимостях с помощью схем $(S_1) - (S_8)$, если мы сможем показать, что если I-K-N-формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дедуктивно равны по отношению к схемам $(S_1) - (S_8)$,

то с помощью применений этих схем к I-K-N-формулам могут быть выведены импликации $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

А это может быть получено из теоремы о посылках. В самом деле, условия этой теоремы, если рассматривать выводы с помощью схем $(S_1) - (S_8)$, выполняются (даже в том случае, если брать произвольные формулы, лишь бы они содержали в числе связок импликацию, конъюнкцию и отрицание).

Именно, выполнимость условий этой теоремы применительно к выводам при помощи схем $(S_1) - (S_5)$ мы установили в § 2. В результате присоединения схем (S_6), (S_7) и (S_8) требуется еще проверить, что следующие две схемы вывода:

$$\frac{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}), \quad \mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B})}{\mathfrak{P} \to \neg \mathfrak{A}}$$

и

$$\frac{\mathfrak{P} \to \neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}{\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B})}$$

— являются производными схемами.

Но в том, что это справедливо, легко убедиться следующим образом. Из двух формул

$$\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B})$$

с помощью производной схемы соединения посылок мы получим формулы

$$\mathfrak{P} \& \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \mathfrak{P} \& \mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}.$$

Эти формулы при помощи схемы (S_6) дают формулу $\neg(\mathfrak{P} \& \mathfrak{A})$, а из нее по схеме (S_7) мы получим формулу $\mathfrak{P} \to \neg \mathfrak{A}$.

Из формулы $\mathfrak{P} \to \neg(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ при помощи обращения схемы (S_7) получается формула $\neg(\mathfrak{P} \& (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}))$; с другой стороны, из выводимой формулы

$$(\mathfrak{P} \& \mathfrak{A}) \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{P} \& (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$$

при помощи производной схемы контрапозиции получается формула

$$\neg(\mathfrak{P} \& (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})) \to \neg((\mathfrak{P} \& \mathfrak{A}) \& \mathfrak{B}).$$

Из этих двух полученных нами формул при помощи схемы заключения (S_4) получается формула

$$\neg((\mathfrak{P} \& \mathfrak{A}) \& \mathfrak{B}),$$

а из нее при помощи схем (S_7) и (S_3) мы получаем формулу

$$\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{B}).$$

Заметим, что в только что приведенных выводах схема формул (S_8) не используется. Отсюда следует, что теорема о посылках применима как к формализму схем $(S_1)-(S_8)$, так и к формализму схем $(S_1)-(S_7)$.

Итак, доказательство выводимости всех тождественно истинных I-K-N-формул при помощи схем $(S_1)-(S_8)$ закончено.

Что же касается вопроса о *независимости* схем $(S_1)-(S_8)$, то легче всего можно убедиться в независимости схемы заключения (S_4): она вытекает из того, что с помощью остальных схем не может быть выведена никакая формула вида $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$.

Независимость схем (S_1), (S_2), (S_5), (S_6) и (S_8) получается с помощью тех оценок, посредством которых мы в гл. III т. I установили независимость формул II 1), 2), I 3) и V 1), 3) в системе, состоящей из формул I — V [с использованием подстановок и схемы заключения][1]). При этом из упомянутых оценок здесь нужно взять только определения значений для импликации, конъюнкции и отрицания. Доказательство независимости с помощью такого рода оценки для любой данной схемы (S_i) проводится следующим образом. Сначала для каждой отличной от (S_i) схемы из списка $(S_1)-(S_8)$, являющейся схемой формул, мы показываем, что каждая построенная по этой схеме I-K-N-формула на основании рассматриваемой оценки при произвольных значениях переменных принимает только вполне определенные, выделенные значения; затем для каждой из остальных, отличных от (S_i) схем мы показываем, что от формул, принимающих только выделенные значения, эта схема снова ведет к формуле, также обладающей этим свойством. Тогда отсюда получается, что каждая I-K-N-формула, выводимая по отличным от (S_i) схемам, при любых значениях формульных переменных принимает выделенное значение. С другой стороны, указывается тождественно истинная I-K-N-формула, которая при некоторых значениях формульных переменных на основании рассматриваемой оценки принимает невыделенное значение. Эта формула, как было показано, выводима с помощью схем $(S_1)-(S_8)$, но она не может быть выведена без использования схемы (S_i). В этих доказательствах, проводимых с помощью упомянутых пяти оценок, в качестве выделенного значения используется значение α.

Независимость схемы (S_3) мы получаем с помощью оценки с четырьмя значениями α, β, γ и δ, определяемой следующим образом:

$$A\to A=\alpha,\quad \beta\to A=\alpha \quad \text{при любом значении } A;$$

[1]) См. т. I, с. 107 и 110—111.

если $A\neq B$ и $A\neq\beta$, то $A\to B=B$;

$A\,\&\,A=A$, $A\,\&\,\alpha=A$, $A\,\&\,\beta=\beta$ при любом значении A;

$A\,\&\,B=B\,\&\,A$ при любых значениях A и B;

$$\gamma\,\&\,\delta=\beta;$$

$$\neg\alpha=\beta,\quad \neg\beta=\alpha,\quad \neg\gamma=\delta,\quad \neg\delta=\gamma.$$

При этой оценке I-K-N-формулы, выводимые при помощи схем (S_1), (S_2), $(S_4)-(S_8)$, всегда принимают значение α; в то же самое время тождественно истинная формула

$$A\to(B\to A\,\&\,B)$$

при $A=\gamma$ и $B=\delta$ принимает значение β.

Независимость схемы (S_7) удается доказать при помощи оценки, отличающейся от только что указанной лишь равенствами

$$\gamma\,\&\,\delta=\delta,\quad \neg\gamma=\beta,\quad \neg\delta=\alpha.$$

При этом наряду с α в качестве выделенного значения рассматривается еще и γ. В самом деле, оказывается, что при помощи схем $(S_1)-(S_6)$ и (S_8) выводятся только такие I-K-N-формулы, которые при указанной оценке всегда принимают одно из значений α или γ; с другой стороны, тождественно истинная формула

$$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$$

при $A=\gamma$ и $B=\delta$ принимает значение β.

Замечание. Примененный для установления независимости схем $(S_1)-(S_5)$ метод перехода от исходных схем формул к соответствующим им конкретным формулам с добавлением правила подстановки и сохранением в качестве схемы вывода одной только схемы заключения в случае схем $(S_1)-(S_8)$ не всегда ведет к цели, так как в этом случае формула

$$\neg(A\,\&\,B)\to(A\to\neg B),$$

соответствующая схеме (S_7), не независима от формул, соответствующих схемам $(S_1)-(S_3)$, (S_5), (S_6) и (S_8).

Впрочем, обсуждение схем в терминах оценок всегда проще, чем обсуждение соответствующих формул.

В заключение кратко упомянем некоторые другие факты, имеющие отношение к рассмотренным здесь вопросам. Что касается выводов I-K-N-формул при помощи схем $(S_1)-(S_7)$, то имеет место следующее утверждение. Произвольная формула тогда и только тогда выводима с помощью схем $(S_1)-(S_7)$, примененных к I-K-N-формулам, когда она либо является позитивно тождественной формулой, либо когда она содержит отрицание и переходит в позитивно тождественную формулу, если мы, выбрав некоторую

не входящую в нее формульную переменную $\mathfrak{B}$, заменим каждое входящее в нее выражение $\neg\mathfrak{A}$ импликацией $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ [1]).

Эта теорема получается из некоторых результатов Иоганссона, относящихся к минимальному исчислению [2]).

Алгоритм, позволяющий по любой I-K-формуле распознавать, является ли она позитивно тождественной, получен Генценом [3]) на основе его «теоремы о подформулах». Еще один алгоритм для решения этой задачи построен М. Вайсбергом [4]).

Упомянутые исследования Генцена и Вайсберга дают также алгоритм для распознавания выводимости формул в гейтинговском исчислении высказываний [5]). Исчисление Гейтинга с дедуктивной точки зрения равносильно формализму, который получится, если к совокупности формул, образованных с помощью импликации, конъюнкции, отрицания и дизъюнкции, применить схемы $(S_1)-(S_7)$ и, кроме того, схему вывода

$$\frac{\neg\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}$$

для отрицания, а также следующие схемы для дизъюнкции:

$$\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\quad \mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\quad \frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C},\quad \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}.$$

Если здесь опустить схему вывода

$$\frac{\neg\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}},$$

то получится формализм так называемого минимального исчисления.

Из результатов Генцена и Вайсберга следует, что всякая I-K-формула, выводимая в гейтинговском исчислении высказываний, является позитивно тождественной и что выводимые в гейтинговском исчислении формулы, не содержащие отрицания, выводимы без использования отрицания при помощи схем $(S_1)-(S_5)$ и трех указанных выше схем для дизъюнкции.

Если рассматривать выводы с помощью подстановок и схемы заключения, то формулы

$$\text{I } 1)\text{—}3),\quad \text{II } 1)\text{—}3),\quad \text{III } 1)\text{—}3),\quad \text{V } 1)\text{—}2)$$

из приведенной в гл. III т. I системы формул I—V [1]) образуют систему аксиом для минимального исчисления. При этом формулы I 1)—3) могут быть заменены формулами I*, а формула II 3) более простой формулой

$$(A\to B)\to(A\to A\,\&\,B);$$

кроме того, шесть формул I 1)—3), II 1)—3) могут быть заменены приведенными в § 2 равнозначными им двумя системами, состоящими из четырех и соответственно из пяти формул [2]). Кроме того, вместо двух формул V 1)—2)

$$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$$

и

$$A\to\neg\neg A$$

можно взять одну формулу

$$(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$$

или одну формулу

$$(A\to\neg B)\to(B\to\neg A).$$

Если формулы V 1)—2) заменить двумя формулами

$$(A\to\neg A)\to\neg A$$

и

$$\neg A\to(A\to B),$$

то получится система аксиом для гейтинговского исчисления высказываний.

В каждой из перечисленных систем аксиом любая из формул независима от всех остальных.

---

[1]) Эта формулировка примыкает к формулировке несколько более слабой теоремы, доказанной Вайсбергом в его работе: Wajsberg M. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. — Wiadomości Matem., 1938, 46.

[2]) Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. — Compositio. Math., 1936, 4, № 1. — Некоторое уточнение интуиционистской логики высказываний в духе минимального исчисления было получено А. Колмогоровым в его (написанной на русском языке) работе: Колмогоров А. Н. О принципе tertium non datur. — Матем. сб., 1925, 32.

[3]) В его работе: Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. — Math. Z., 1934, 39. См. сноску 1 на с. 520.

[4]) См. только что цитированную работу «Untersuchungen über den Aussagenkalkül».

[5]) См. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. — Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, II.

[1]) См. т. I, с. 96—97.

[2]) См. с. 529, 531.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ФОРМАЛИЗМЫ ДЛЯ ДЕДУКТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИЗА

§ 1. Описание одного формализма

Мы изложим здесь один формализм, пригодный для дедуктивного построения анализа. Этот формализм будет приведен нами — с точностью до несущественных деталей — в том виде, как он излагался в лекциях Гильберта по теории доказательств. Сходный формализм описан в диссертации Аккермана [1]).

Явные определения мы поначалу не будем включать в этот формализм.

У нас будут фигурировать следующие виды переменных: 1) свободные и связанные индивидные переменные, 2) свободные и связанные функциональные переменные, причем это будут исключительно переменные с одним аргументом, 3) свободные формульные переменные без аргументов и с аргументами.

Индивидные и формульные переменные будут обозначаться так же, как и до сих пор; свободные и связанные функциональные переменные будут отличаться от индивидных точкой наверху.

Замечание. Функциональные переменные будут играть роль переменных для *математических* функций. Связанные формульные переменные мы здесь не вводим.

В качестве символов у нас будут фигурировать индивидный символ 0, штрих-символ, одноместный функциональный знак δ, знак равенства, символы исчисления высказываний и ε-символ. Связанная переменная, относящаяся к ε-символу, может быть либо индивидной, либо функциональной.

Понятие *формулы* мы определим рекурсивно, совместно с понятиями *терма* и *функционала* [2]). Замысел нашего определения состоит в том, что понятие терма должно будет формализовать у нас понятие числа, понятие функционала — понятие арифметической функции, а понятие формулы — понятие высказывания.

В качестве термов мы сначала возьмем свободные индивидные переменные, символ 0 и выражения вида a' и $\delta(a)$, где a — терм, а в качестве функционалов — функциональные переменные сами по себе, т. е. без каких бы то ни было аргументов.

Кроме того, термами будут считаться любые выражения вида $a(b)$ или $(a)(b)$, где a — функционал, а b — терм. (Скобки вокруг a требуются в том случае, когда a представляет собой какое-либо составное выражение.)

Элементарными формулами мы будем считать: формульные переменные без аргументов, формульные переменные с аргументами, каждый из которых является либо термом, либо функционалом, и равенства между термами.

Формулами мы будем считать выражения, которые либо являются элементарными формулами, либо строятся из элементарных формул с помощью связок исчисления высказываний.

И, наконец, в качестве термов мы будем также допускать выражения вида $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ получается из формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$, содержащей свободную индивидную переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащей связанной переменной $\mathfrak{x}$, в результате замены $\mathfrak{c}$ посредством $\mathfrak{x}$. Аналогично в качестве функционалов мы будем допускать выражения вида $\varepsilon_{\dot{\mathfrak{x}}}\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{x}})$, где $\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{x}})$ получается из формулы $\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{c}})$, содержащей свободную функциональную переменную $\dot{\mathfrak{c}}$ и не содержащей связанной переменной $\dot{\mathfrak{x}}$, в результате замены $\dot{\mathfrak{c}}$ посредством $\dot{\mathfrak{x}}$.

В качестве исходных формул нашего формализма мы возьмем следующие формулы:

1) все тождественно истинные формулы исчисления высказываний;

2) формулы

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x)),$$
$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a',$$
$$A(\dot{a}) \to A(\varepsilon_{\dot{x}} A(\dot{x})),$$

которые мы будем называть первой, второй и третьей ε-формулами соответственно;

3) аксиомы равенства (J_1) и (J_2);

4) арифметические аксиомы

$$a' = b' \to a = b,$$
$$a' \neq 0, \quad a \neq 0 \to \delta(a)' = a.$$

Выводы мы будем строить с помощью операций подстановки вместо свободных переменных, переименования связанных переменных и повторения формул. Будет применяться также схема заключения.

Переименование связанных индивидных переменных определяется, как прежде. Аналогично, переименование связанной функ-

[1]) Ackermann W. Begründung des ‚tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. — Math. Ann., 1924, 93, № 1/2.

[2]) В первых гильбертовских публикациях по теории доказательств, а также в диссертации Аккермана термин функционал употреблялся в том смысле, в каком мы здесь говорим о термах.

циональной переменной состоит в замене выражения $\varepsilon_{\dot{\xi}}\mathfrak{A}(\dot{\xi})$ выражением $\varepsilon_{\dot{\eta}}\mathfrak{A}(\dot{\eta})$, где $\dot{\eta}$ — какая-либо отличная от $\dot{\xi}$ связанная функциональная переменная.

Подстановка вместо свободных индивидных переменных и вместо формульных переменных без аргументов определяется, как прежде.

При *подстановках вместо формульных переменных с аргументами* мы должны учитывать то обстоятельство, что различные их аргументные места могут заполняться по-своему. С этой целью мы введем следующие понятия. Две переменные — одну свободную и одну связанную — мы будем называть односортными, если они обе индивидные или обе функциональные. Выражение мы будем называть квазитермом, если оно либо является термом, либо получается из терма в результате замены одной или нескольких его свободных переменных не входящими в данный терм связанными переменными, односортными с заменяемыми переменными. Выражение мы будем называть квазифункционалом, если оно либо является функционалом, либо получается из функционала в результате замены одной или нескольких его свободных переменных не входящими в данный функционал связанными переменными, односортными с заменяемыми переменными.

Как легко убедиться, в качестве аргументов формульных переменных любой формулы могут фигурировать лишь квазитермы и квазифункционалы.

Именная форма для формульной переменной с аргументами состоит из формульной переменной, аргументами которой являются одни только попарно различные свободные индивидные или свободные функциональные переменные. Вариантом данной именной формы мы будем называть выражение, получающееся из этой именной формы в результате замены любой ее индивидной переменной каким-либо квазитермом и любой функциональной переменной — каким-либо квазифункционалом. Заменителем для данной именной формы является формула, содержащая все аргументные переменные этой именной формы.

Подстановка вместо формульной переменной с аргументами в формулу $\mathfrak{F}$ производится с помощью какой-либо именной формы, для которой указан соответствующий заменитель. Выполнение подстановки заключается в том, что вместо любого фигурирующего в $\mathfrak{F}$ варианта этой именной формы подставляется выражение, которое получается из указанного заменителя при помощи тех же самых замен, при помощи которых из этой именной формы получается рассматриваемый нами ее вариант. Если $\mathfrak{R}$ — именная форма, а $\mathfrak{S}$ — соответствующий заменитель, то мы будем говорить, что производится подстановка в формулу $\mathfrak{F}$ формулы $\mathfrak{S}$ вместо именной формы $\mathfrak{R}$.

Мы будем рассматривать *два типа подстановок вместо функциональных переменных*. Подстановка первого типа состоит в замене данной переменной всюду, где она фигурирует в рассматриваемой формуле, данным функционалом (подстановка функционала). Подстановка второго типа (подстановка функции) аналогична подстановке вместо формульной переменной с одним аргументом, являющимся квазитермом. Если $\dot{a}$ — рассматриваемая функциональная переменная, то для какой-либо ее именной формы $\dot{a}(c)$ со свободной индивидной переменной c указывается ее заменитель, т. е. соответствующий терм $t(c)$, а затем в формуле, в которой производится подстановка, каждое входящее в нее выражение $\dot{a}(r)$ заменяется соответствующим выражением $t(r)$. При этом предполагается, что функциональная переменная $\dot{a}$ в рассматриваемой формуле не фигурирует *сама по себе*, а каждый раз встречается обязательно с (одним) аргументом.

Замечание. Мы могли бы обойтись без подстановки функций, если бы вместо нее взяли схему формул

$$\exists \dot{x} \forall z (\dot{x}(z) = t(z)),$$

применяемую ко всякому такому содержащему переменную z квазитерму $t(z)$, для которого $t(c)$ является термом[1]).

С другой стороны, в принципе мы могли бы обойтись и одной подстановкой функций. Правда, при этом мы лишились бы ряда удобных изобразительных возможностей.

Допустимость подстановок и переименований, как обычно, связывается с условием недопущения коллизий между связанными переменными, так что внутри какого-либо выражения $\varepsilon_{\xi}\mathfrak{A}(\xi)$ или $\varepsilon_{\dot{\xi}}\mathfrak{A}(\dot{\xi})$ никогда не должен встречаться какой-либо другой ε-символ, относящийся к той же самой связанной переменной ξ или $\dot{\xi}$.

Во избежание коллизий между связанными переменными подстановки в любую из ε-формул всегда будут производиться одновременно с необходимыми переименованиями связанных переменных.

Описанный таким образом формализм мы будем называть формализмом H_0. По ряду соображений, связанных с дедуктивной целесообразностью, мы добавим к H_0 схему явного определения.

---

[1]) Эта схема формул предложена Дж. фон Нейманом в его работе: Neumann J. v. Zur Hilbertschen Beweistheorie. — Math. Z., 1927, 26, S. 18.

Всякое явное определение представляет собой формулу одного из следующих трех видов:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{t},$$
$$\mathfrak{f}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{C} \sim \mathfrak{T};$$

здесь $\mathfrak{t}$ — терм, $\mathfrak{g}$ — функционал, $\mathfrak{c}$ — свободная индивидная переменная, $\mathfrak{T}$ — формула, а $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{C}$ — выражения, состоящие из вновь вводимого символа и его аргументов. При этом в обеих частях соответствующего равенства или эквивалентности должны фигурировать одни и те же свободные переменные. Аргументные места формульных переменных, фигурирующих в качестве аргументов вновь вводимых символов, указываются путем заполнения связанными индивидными или соответственно функциональными переменными; аргументное место фигурирующей в качестве аргумента функциональной переменной $\dot{\mathfrak{a}}$ во вновь вводимом символе указывается только тогда, когда в правой части определения переменная $\dot{\mathfrak{a}}$ не фигурирует сама по себе, но и в этом случае это аргументное место можно не указывать. Связанные переменные, используемые для указания аргументных мест аргументов вновь вводимых символов, должны быть попарно различны; помимо соответствующих аргументных мест, они записываются и у самого этого символа — в качестве индексов или каким-нибудь другим образом.

Схема явного определения представляет собой правило, согласно которому любое явное определение может быть добавлено к формализму в качестве исходной формулы, причем выражение, состоящее из введенного символа и его аргументов, а также любое выражение, получающееся из него в результате каких-либо подстановок вместо его свободных переменных (если при этом не происходит коллизий между связанными переменными), допускается в качестве терма, или функционала, или формулы, смотря по тому, какой — первый, второй или третий — вид имеет это явное определение. Разумеется, правило переименования связанных переменных распространяется и на связанные переменные вновь введенных символов.

Присоединение этой схемы к формализму H_0 дает нам новый формализм, который мы будем называть формализмом H. При исследовании вопроса о непротиворечивости H формализм этот с помощью общего метода исключения явных определений может быть сведен к формализму H_0. В самом деле, наши соглашения, касающиеся внешнего вида явных определений, выбраны с таким расчетом, чтобы этот метод оказался применимым [1]).

[1]) Особого рассмотрения требует случай, когда вновь вводимый символ имеет одну или несколько функциональных переменных в качестве аргументов.

§ 2. Построение арифметики

А теперь мы вкратце покажем, как из формализма H могут быть получены исчисление предикатов, арифметика и анализ.

Сначала при помощи явных определений

$$\forall x A(x) \sim A(\varepsilon_x \neg A(x)),$$
$$\exists x A(x) \sim A(\varepsilon_x A(x)),$$
$$\forall \dot{x} A(\dot{x}) \sim A(\varepsilon_{\dot{x}} \neg A(\dot{x})),$$
$$\exists \dot{x} A(\dot{x}) \sim A(\varepsilon_{\dot{x}} A(\dot{x}))$$

могут быть введены кванторы. Из этих определений в сочетании с первой и третьей ε-формулами основные формулы (a) и (b) исчисления предикатов могут быть получены в качестве выводимых формул, а схемы (α) и (β) — в качестве производных правил [1]) (причем в отдельности для индивидных и для функциональных переменных).

С помощью первой и второй ε-формул, аксиомы равенства (J_2), третьей арифметической аксиомы и средств исчисления высказываний схема индукции, как мы знаем, может быть получена в качестве производной схемы [2]), а с помощью схемы индукции в сочетании с формулой (a) и аппаратом исчисления высказываний может быть выведена аксиома индукции [3]).

С помощью соответствующих явных определений могут быть введены и обычные символы для чисел.

Теперь, чтобы в нашем распоряжении оказался весь формализм арифметики, нам достаточно получить схему рекурсивного определения.

На самом деле примитивные рекурсии (как, впрочем, и более общие схемы рекурсии) в формализме H могут быть полностью сведены к явным определениям. Причем это можно сделать единым приемом, *путем указания одной универсальной для рекурсивных функций функции*, из которой отдельные рекурсивные функции получаются соответствующими подстановками.

Метод построения этой функции можно было бы оформить и несколько проще, если бы в нашем формализме имелись функциональные переменные с двумя аргументами. Но так как в H мы их не ввели, то нам придется сначала формально построить отображение числовых пар на числа. Требующиеся для этого рекурсивные функции можно получить при помощи следующих явных определений: сначала с помощью равенства

$$a + b = (\varepsilon_{\dot{x}} \{\dot{x}(0) = a \,\&\, \forall z (\dot{x}(z') = \dot{x}(z)')\})(b)$$

[1]) См. с. 33—34.
[2]) См. с. 117—119.
[3]) См. т. I, с. 327.

мы определяем сложение. Из этого равенства могут быть выведены рекурсивные равенства

$$a+0=a \quad \text{и} \quad a+b'=(a+b)'.$$

Их вывод может быть построен с помощью формулы

$$\exists \dot{x}\,\{\dot{x}\,(0)=a \,\&\, \forall z\,(\dot{x}\,(z')=\dot{x}\,(z)')\},$$

которая получается применением схемы индукции по отношению к переменной a (индукцией по a). Вывод посылок $\mathfrak{A}(0)$ и $\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a')$ данной схемы индукции производится с помощью формул

$$\exists \dot{x}\forall z\,(\dot{x}\,(z)=z) \quad \text{и} \quad \exists \dot{x}\forall z\,(\dot{x}\,(z)=\dot{c}\,(z)'),$$

получающихся с помощью выводимых формул

$$\forall z\,(z=z) \quad \text{и} \quad A\,(\dot{a})\to\exists \dot{x}A\,(\dot{x})$$

и правила подстановки функций [1]).

Из рекурсивных равенств для $a+b$, пользуясь схемой индукции, мы получаем формулы, изображающие обычные законы, которым подчиняется операция сложения.

Воспользовавшись сложением и взяв явные определения

$$a<b\sim\forall x\,(a\neq b+x) \quad \text{и} \quad a\leqslant b\sim\exists x\,(a+x=b),$$

можно ввести предикатные символы «$<$» и «$\leqslant$». Из этих определений могут быть выведены формулы

$$\neg(a<a), \quad a<b\,\&\,b<c\to a<c, \quad a\leqslant b\vee b<a,$$
$$a\leqslant b\sim a=b\vee a<b,$$
$$a<a', \quad a<b'\sim a\leqslant b.$$

Аналогично сложению, равенством

$$a\cdot b=(\varepsilon_{\dot{x}}\{\dot{x}\,(0)=0\,\&\,\forall z\,(\dot{x}\,(z')=\dot{x}\,(z)+a)\})\,(b)$$

мы определим умножение. Из этого равенства могут быть выведены рекурсивные равенства

$$a\cdot 0=0 \quad \text{и} \quad a\cdot b'=a\cdot b+a.$$

Вывод их производится с помощью формулы

$$\exists \dot{x}\,(\dot{x}\,(0)=0\,\&\,\forall z\,(\dot{x}\,(z')=\dot{x}\,(z)+a)),$$

[1]) Возможность такого введения сложения и аналогичная возможность для умножения была впервые установлена Л. Кальмаром. В этом методе, допускающем и непосредственную содержательную интерпретацию, существенно то, что индуктивное рассуждение, из которого получается разрешимость этих рекурсивных равенств при помощи некоторой двуместной функции, проводится не по той переменной, по которой производится рекурсия, а по параметру рекурсии.

которая опять-таки может быть выведена индукцией по a с использованием выводимых формул [1])

$$\exists \dot{x}\forall z\,(\dot{x}\,(z)=0)$$

и

$$\dot{c}\,(0)=0\,\&\,\forall z\,(\dot{c}\,(z')=\dot{c}\,(z)+a)\to$$
$$\dot{c}\,(0)+0=0\,\&\,\forall z\,(\dot{c}\,(z')+z'=(\dot{c}\,(z)+z)+a').$$

Из рекурсивных равенств для $a\cdot b$ можно получить формулы, выражающие обычные законы, которым подчиняется умножение, а также формулу

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

А теперь мы введем функцию

$$\xi\,(n)=\varepsilon_x\,(x+x=n\cdot n').$$

Индукцией по n легко получается формула

$$\exists x\,(x+x=n\cdot n'),$$

из которой можно сначала вывести равенство

$$\xi\,(n)+\xi\,(n)=n\cdot n',$$

а затем и формулы

$$\xi\,(0)=0 \quad \text{и} \quad \xi\,(n')=\xi\,(n)+n'.$$

Эти формулы вместе с рекурсивными равенствами для сложения составляют рекурсивное определение функции $\xi\,(n)$.

Далее, если с помощью равенства

$$\tau\,(a,\ b)=\xi\,(a+b)+a$$

определить функцию $\tau\,(a,\ b)$, то для нее можно будет вывести равенства

$$\tau\,(0,\ 0)=0,$$
$$\tau\,(0,\ a')=\tau\,(a,\ 0)',$$
$$\tau\,(a',\ b)=\tau\,(a,\ b')',$$

из которых индукцией по n получается формула

$$\exists x\exists y\,(\tau\,(x,\ y)=n).$$

Кроме того, можно будет получить формулу

$$a+b<c+d\to\tau\,(a,\ b)<\tau\,(c,\ d),$$

[1]) Вывод первой из этих формул, например, может быть получен с использованием равенства

$$\varepsilon_z\,(n=n\,\&\,z=0)=0.$$

а с ее помощью — формулу

$$\tau(a,\ b)=\tau(c,\ d)\to a=c\,\&\,b=d.$$

Если теперь с помощью явных определений

$$\tau_1(n)=\varepsilon_x\exists y\,(\tau(x,\ y)=n)$$

и

$$\tau_2(n)=\varepsilon_y\exists x\,(\tau(x,\ y)=n)$$

ввести функции

$$\tau_1(n)\quad\text{и}\quad\tau_2(n),$$

то с помощью полученных формул можно будет вывести равенства

$$\tau(\tau_1(n),\ \tau_2(n))=n,\quad \tau_1(\tau(a,\ b))=a,\quad \tau_2(\tau(a,\ b))=b.$$

Тем самым мы получаем формализацию некоторого конкретного взаимно однозначного отображения числовых пар на числа.

Теперь мы продвинулись настолько, что можем построить упоминавшуюся уже универсальную для рекурсивных функций функцию. Явное определение этой функции записывается в виде

$$\rho_x(a,\ \dot b(x),\ n)=[\varepsilon_{\dot x}\{\dot x(0)=a\,\&\,\forall z[\dot x(z')=\dot b(\tau(z,\ \dot x(z)))]\}](n).$$

Чтобы получить из него равенства, характеризующие эту функцию, мы выведем формулу

(1) $$\exists\dot x\,\{\dot x(0)=a\,\&\,\forall z[\dot x(z')=\dot b(\tau(z,\ \dot x(z)))]\}.$$

Наметим вкратце ход этого вывода[1]). Сначала явными определениями

$$\alpha(a,\ b)=\varepsilon_x((a=b\to x=0)\,\&\,(a\neq b\to x=0'))$$

и

$$\beta(a,\ b)=\varepsilon_x((a\neq b\to x=0)\,\&\,(a=b\to x=0'))$$

мы вводим функции $\alpha(a,\ b)$ и $\beta(a,\ b)$. Из этих определений легко могут быть выведены формулы

$$a=b\to\alpha(a,\ b)=0,\quad a\neq b\to\alpha(a,\ b)=0',$$
$$a\neq b\to\beta(a,\ b)=0,\quad a=b\to\beta(a,\ b)=0'.$$

Используя эти формулы, мы получим формулу

(2) $$\dot c(0)=a\,\&\,\forall z[z<n\to\dot c(z')=\dot b(\tau(z,\ \dot c(z)))]\,\&$$
$$\forall z(\dot g(z)=\dot c(z)\cdot\alpha(z,\ n')+\dot b(\tau(n,\ \dot c(n)))\cdot\beta(z,\ n'))\to$$
$$\dot g(0)=a\,\&\,\forall z[z<n'\to\dot g(z')=\dot b(\tau(z,\ \dot g(z)))],$$

[1]) Метод проведения данного вывода восходит к Дедекинду. См. его книгу: Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? — Braunschweig, 1887, § 9.

затем с помощью этой формулы и легко выводимой формулы

$$\exists\dot x\,(\dot x(0)=a)$$

индукцией по n мы получим формулу

$$\exists\dot x\,\{\dot x(0)=a\,\&\,\forall z[z<n\to\dot x(z')=\dot b(\tau(z,\ \dot x(z)))]\},$$

а из нее — формулу

(3) $$(\mathfrak e(n))(0)=a\,\&\,\forall z[z<n\to(\mathfrak e(n))(z')=\dot b(\tau(z,\ (\mathfrak e(n))(z)))],$$

где $\mathfrak e(n)$ представляет собой функционал

$$\varepsilon_{\dot x}\{\dot x(0)=a\,\&\,\forall z[z<n\to\dot x(z')=\dot b(\tau(z,\ \dot x(z)))]\}.$$

Но из (3) с использованием формулы

$$k\leqslant n\to(\mathfrak e(n'))(k)=(\mathfrak e(n))(k),$$

которая выводится индукцией по n, можно получить формулу

$$(\mathfrak e(0))(0)=a\,\&\,(\mathfrak e(n'))(n')=\dot b(\tau(n,\ (\mathfrak e(n))(n))),$$

а из нее формулу (1).

После того, как формула (1) выведена, мы из явного определения функции $\rho_x(a,\ \dot b(x),\ n)$ получаем равенства

$$\rho_x(a,\ \dot b(x),\ 0)=a,$$
$$\rho_x(a,\ \dot b(x),\ n')=\dot b(\tau(n,\ \rho_x(a,\ \dot b(x),\ n))).$$

На основании этих равенств любое определение функции при помощи примитивной рекурсии

$$\mathfrak f(a_1,\ \ldots,\ a_v,\ 0)=\mathfrak a(a_1,\ \ldots,\ a_v),$$
$$\mathfrak f(a_1,\ \ldots,\ a_v,\ n')=\mathfrak b(a_1,\ \ldots,\ a_v,\ n,\ \mathfrak f(a_1,\ \ldots,\ a_v,\ n))$$

может быть сведено к соответствующей подстановке в функцию $\rho_x(a,\ \dot b(x),\ n)$. Действительно, достаточно сформулировать явное определение

$$\mathfrak f(a_1,\ \ldots,\ a_v,\ n)=\rho_x(\mathfrak a(a_1,\ \ldots,\ a_v),\ \mathfrak b(a_1,\ \ldots,\ a_v,\ \tau_1(x),\ \tau_2(x)),\ n),$$

и тогда оба эти рекурсивных равенства окажутся выводимыми формулами.

В соответствии с этим каждая рекурсивная (т. е. определимая при помощи примитивных рекурсий) функция представима в виде некоторого выражения, в котором не фигурируют никакие другие символы, кроме символа 0, штрих-символа, функциональных знаков $\tau_1(n)$ и $\tau_2(n)$ и символа универсальной функции $\rho_x(a,\ \dot b(x),\ n)$.

Так, например, справедливы следующие представления функций:

$$a+b=\rho_x(a,\ (\tau_2(x))',\ b),$$
$$a\cdot b=\rho_x(0,\ \rho_y(\tau_2(x),\ (\tau_2(y))',\ a),\ b),$$
$$a^b=\rho_x(0',\ \rho_y(0,\ \rho_z(\tau_2(y),\ (\tau_2(z))',\ \tau_2(x)),\ a),\ b),$$
$$\delta(n)=\rho_x(0,\ \tau_1(x),\ n),$$
$$a\dot{-}b=\rho_x(a,\ \rho_y(0,\ \tau_1(y),\ \tau_2(x)),\ b),$$
$$c=\rho_x(c,\ \tau_2(x),\ n),$$
$$\overline{\operatorname{sgn}}(n)=\rho_x(0',\ \rho_y(0,\ \tau_2(y),\ x),\ n),$$
$$\xi(n)=\rho_x(0,\ \rho_y((\tau_1(x))',\ (\tau_2(y))',\ \tau_2(x)),\ n).$$

Равенство

$$\mu_x A(x)=\varepsilon_x\{(A(x)\ \&\ \forall y(A(y)\to x\leqslant y))\vee(x=0\ \&\ \forall y\neg A(y))\}$$

определяет μ-символ, и из этого определения с помощью выводимой формулы, выражающей принцип наименьшего числа, могут быть выведены формулы (μ_1), (μ_2) и (μ_3) [1]).

Таким образом, в нашем распоряжении находится весь формализм арифметики. Заодно достигнут и заметный по сравнению с формализмом (Z_μ) прогресс в отношении систематики.

§ 3. Теория положительных действительных чисел

Переходя теперь к анализу, мы поначалу ограничимся анализом *положительных* величин, так как в нем содержатся уже все методы, характерные для теории пределов.

Величины, которые мы будем рассматривать, можно описывать при помощи последовательностей неотрицательных целых чисел. Эвристически к этой мысли нас приводит изображение положительных действительных чисел при помощи бесконечных двоичных дробей. Это изображение равносильно изображению при помощи последовательности дробей

$$\frac{a_0}{2^0},\ \frac{a_1}{2^1},\ \frac{a_2}{2^2},\ \ldots,$$

а значит, и при помощи последовательности целых чисел a_0, a_1, a_2, ... такой, что $0\leqslant a_0$ и для любого n $a_{n+1}=2\cdot a_n$ либо $a_{n+1}=2\cdot a_n+1$. Это изображение станет взаимно однозначным, если дополнительно потребовать, чтобы соответствующая двоичная

[1]) См. т. I, с. 348—350 и 479—482 или же в настоящем томе Приложение I, с. 469.

дробь не состояла, начиная с некоторого места, из сплошных нулей, т. е. чтобы не оказывалось, что, начиная с некоторого места, $a_{n+1}=2\cdot a_n$. Так мы приходим к тому, чтобы характеристическое свойство числовых последовательностей, используемых в качестве средства изображения положительных действительных чисел (Maßzahlen), формально определить с помощью следующего специального предикатного символа $\Theta(\dot{a})$ [1]):

$$\Theta(\dot{a})\sim\forall x(\dot{a}(x')=2\cdot\dot{a}(x)\vee\dot{a}(x)=2\cdot\dot{a}(x)+1)\ \&$$
$$\forall x\exists y(x<y\ \&\ \dot{a}(y')=2\cdot\dot{a}(y)+1).$$

Опираясь на эту формализацию понятия положительного действительного числа, можно дать следующие определения, устанавливающие отношения равенства и порядка для таких чисел:

$$\dot{a}\doteq\dot{b}\sim\forall x(\dot{a}(x)=\dot{b}(x)),$$
$$\dot{a}\neq\dot{b}\sim\neg(\dot{a}\doteq\dot{b}),$$
$$\dot{a}\dot{\leqslant}\dot{b}\sim\forall x(\dot{a}(x)\leqslant\dot{b}(x)),$$
$$\dot{a}\dot{<}\dot{b}\sim\dot{a}\dot{\leqslant}\dot{b}\ \&\ \dot{a}\neq\dot{b}.$$

Из этих определений могут быть выведены следующие формулы:

$$\dot{a}\doteq\dot{a},\quad\dot{a}\doteq\dot{b}\to\dot{b}\doteq\dot{a},$$
$$\dot{a}\doteq\dot{b}\to(\dot{a}\doteq\dot{c}\to\dot{b}\doteq\dot{c}),$$
$$\dot{a}\doteq\dot{b}\to(\dot{a}\dot{\leqslant}\dot{c}\to\dot{b}\dot{\leqslant}\dot{c}),$$
$$\dot{a}\doteq\dot{b}\to(\dot{c}\dot{\leqslant}\dot{a}\to\dot{c}\dot{\leqslant}\dot{b}),$$

а также аналогичные формулы с символом $\dot{<}$ вместо $\dot{\leqslant}$. Затем могут быть выведены формулы

$$\dot{a}\doteq\dot{b}\to(\Theta(\dot{a})\to\Theta(\dot{b})),$$
$$\dot{a}\dot{\leqslant}\dot{b}\ \&\ \dot{b}\dot{\leqslant}\dot{c}\to\dot{a}\dot{\leqslant}\dot{c},$$
$$\dot{a}\dot{\leqslant}\dot{b}\ \&\ \dot{b}\dot{\leqslant}\dot{a}\to\dot{a}\doteq\dot{b},$$
$$\dot{a}\dot{<}\dot{b}\ \&\ \dot{b}\dot{<}\dot{c}\to\dot{a}\dot{<}\dot{c},$$
$$\Theta(\dot{a})\ \&\ \Theta(\dot{b})\to(\dot{a}\dot{<}\dot{b}\sim\neg(\dot{b}\dot{\leqslant}\dot{a})),$$
$$\Theta(\dot{a})\to\exists\dot{x}(\Theta(\dot{x})\ \&\ \dot{a}\dot{<}\dot{x})\ \&\ \exists\dot{x}(\Theta(\dot{x})\ \&\ \dot{x}\dot{<}\dot{a}),$$
$$\Theta(\dot{a})\ \&\ \Theta(\dot{b})\ \&\ \dot{a}\dot{<}\dot{b}\to\exists\dot{x}(\Theta(\dot{x})\ \&\ \dot{a}\dot{<}\dot{x}\ \&\ \dot{x}\dot{<}\dot{b}).$$

[1]) Изображение при помощи последовательности числителей следующих друг за другом конечных двоичных дробей по сравнению с изображением при помощи последовательности цифр бесконечной двоичной дроби имеет то преимущество, что при введении различных понятий оно избавляет нас от необходимости производить те или иные рекурсивные построения.

Замечание. Мы не в состоянии вывести любую формулу вида

$$\dot{a} = \dot{b} \to (\mathfrak{A}(\dot{a}) \to \mathfrak{A}(\dot{b})).$$

Так, например, формула

$$\dot{a} = \dot{b} \to (\varepsilon_x \dot{a}(x) = 0) = 0' \to \varepsilon_x (\dot{b}(x) = 0) = 0')$$

невыводима.

Для выполнения подстановок вместо функциональных переменных без аргументов (подстановки эти могут быть только подстановками функционалов) важно иметь способ, позволяющий по любому терму $t(c)$ с одной свободной переменной c строить функционал $\mathfrak{f}$, для которого выводимо равенство

$$\mathfrak{f}(c) = t(c).$$

Этот способ может быть получен следующим образом:

Обозначим через $\mathfrak{e}$ функционал $\varepsilon_{\dot{x}} \forall y (\dot{x}(y) = \dot{b}(y))$. Из третьей ε-формулы, подставляя вместо именной формы $A(\dot{c})$ ее формульной переменной формулу $\forall z (\dot{c}(z) = \dot{b}(z))$ и переименовывая внутри выражения $\varepsilon_{\dot{x}} \forall z (\dot{x}(z) = \dot{b}(z))$ переменную z в y, мы получим формулу

$$\forall z (\dot{a}(z) = \dot{b}(z)) \to \forall z (\mathfrak{e}(z) = \dot{b}(z)).$$

Если вместо именной формы $\dot{a}(c)$ в эту формулу подставить терм $\dot{b}(c)$ и воспользоваться выводимой из аксиомы (J_1) формулой

$$\forall z (\dot{b}(z) = \dot{b}(z)),$$

то получится формула

$$\forall z (\mathfrak{e}(z) = \dot{b}(z)),$$

а значит, и

$$\mathfrak{e}(c) = \dot{b}(c),$$

т. е. формула

$$\{\varepsilon_{\dot{x}} \forall y (\dot{x}(y) = \dot{b}(y))\}(c) = \dot{b}(c).$$

Пусть теперь $t(c)$ — произвольный, содержащий свободную переменную c терм, в который не входят связанные переменные $\dot{\mathfrak{x}}$ и $\dot{\mathfrak{y}}$. Тогда подстановкой функции вместо переменной $\dot{b}$ (быть может, с переименованиями) мы получим равенство

$$\{\varepsilon_{\dot{\mathfrak{x}}} \forall \mathfrak{y} (\dot{\mathfrak{x}}(\mathfrak{y}) = t(\mathfrak{y}))\}(c) = t(c).$$

Кроме того, для упрощения записи можно с помощью явного определения

$$(\lambda_x \dot{a}(x))(c) = \{\varepsilon_{\dot{x}} \forall y (\dot{x}(y) = \dot{a}(y))\}(c)$$

ввести символ [1]) $\lambda_x \dot{a}(x)$. Это определение с использованием выведенной нами формулы

$$\{\varepsilon_{\dot{x}} \forall y (\dot{x}(y) = \dot{b}(y))\}(c) = \dot{b}(c)$$

дает равенство

(4) $$(\lambda_x \dot{a}(x))(c) = \dot{a}(c).$$

С помощью этого равенства можно, например, из формулы

$$\dot{a} = \dot{b} \sim \forall x (\dot{a}(x) = \dot{b}(x))$$

вывести формулу

$$\lambda_{\mathfrak{x}} \mathfrak{s}(\mathfrak{x}) = \lambda_{\mathfrak{x}} t(\mathfrak{x}) \sim \forall \mathfrak{x} (\mathfrak{s}(\mathfrak{x}) = t(\mathfrak{x})),$$

где $\mathfrak{s}(c)$ и $t(c)$ — произвольные термы, не содержащие переменной $\mathfrak{x}$. Для этого сначала надо от формулы

$$\dot{a} = \dot{b} \sim \forall x (\dot{a}(x) = \dot{b}(x))$$

при помощи подстановки (и, может быть, переименований) перейти к формуле

$$\lambda_{\mathfrak{x}} \mathfrak{s}(\mathfrak{x}) = \lambda_{\mathfrak{x}} t(\mathfrak{x}) \sim \forall \mathfrak{y} ((\lambda_{\mathfrak{x}} \mathfrak{s}(\mathfrak{x}))(\mathfrak{y}) = (\lambda_{\mathfrak{x}} t(\mathfrak{x}))(\mathfrak{y})),$$

а затем добавить к ней два равенства

$$(\lambda_{\mathfrak{x}} \mathfrak{s}(\mathfrak{x}))(c) = \mathfrak{s}(c) \quad \text{и} \quad (\lambda_{\mathfrak{x}} t(\mathfrak{x}))(c) = t(c),$$

получающихся из равенства (4) в результате соответствующих подстановок (и, в случае надобности, переименований). Полученные три формулы с помощью аксиомы равенства (J_2) и дают требующуюся нам формулу.

Равенство (4) может быть использовано еще и для того, чтобы вывести схему, являющуюся обобщением нашей схемы определений на случай функционалов. Именно, в схеме явного определения для введения функционала

$$\mathfrak{f}(c) = \mathfrak{g}(c)$$

фигурирует условие, заключающееся в том, что $\mathfrak{g}$ должно быть функционалом. Условие это теперь может быть заменено более слабым — что $\mathfrak{g}(c)$ является термом. Действительно, если это условие выполняется, а $\mathfrak{x}$ — какая-либо связанная переменная, не входящая в $\mathfrak{g}(c)$, то $\lambda_{\mathfrak{x}} \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ представляет собой функционал. Следовательно, при помощи равенства

$$\mathfrak{f}(c) = (\lambda_{\mathfrak{x}} \mathfrak{g}(\mathfrak{x}))(c)$$

---

[1]) Букву λ мы здесь берем, следуя Чёрчу. См. введение оператора λ в его работе: Church A. A set of postulates for the foundation of logic. — Ann. Math., 1932, **33**, № 2, p. 351—356.

можно ввести символ $\mathfrak{f}$ для функционала. Но из этого равенства с помощью формулы (4) в результате применения подстановки функции вместо переменной $\dot{a}$ выводится формула

$$\mathfrak{f}(\dot{c}) = \mathfrak{g}(\dot{c}).$$

В качестве еще одной выводимой схемы для определения функционалов упомянем схему

$$\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{f}$ — вновь вводимый символ для функционала, а $\mathfrak{g}$ — функционал. В самом деле, всякая формула этого вида, если свободная индивидная переменная $\dot{c}$ в нее не входит, дедуктивно равна формуле

$$\mathfrak{f}(\dot{c}) = \mathfrak{g}(\dot{c}).$$

В дальнейшем, вводя явные определения для тех или иных интересующих нас функционалов, мы будем пользоваться обеими этими выводимыми схемами определений.

После этого замечания мы перейдем к фундаментальной теореме, утверждающей *существование точной верхней границы* у любого непустого ограниченного сверху (т. е. имеющего какую-либо верхнюю границу) множества положительных действительных чисел.

С учетом выбранного определения теорема эта в нашем формализме может быть изображена следующей формулой:

$$(5)\quad \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \Theta(\dot{x})) \,\&\, \exists \dot{x} A(\dot{x}) \,\&\, \exists y \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(0) < y) \to$$
$$\exists \dot{z}\,\{\Theta(\dot{z}) \,\&\, \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x} \dot{\leqslant} \dot{z}) \,\&\, \forall \dot{y}\,(\forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x} \dot{\leqslant} \dot{y}) \to \dot{z} \dot{\leqslant} \dot{y})\}.$$

Эта формула может быть выведена с использованием функционала $\nu_{\dot{x}} A(\dot{x})$, вводимого следующим определяющим равенством:

$$(\nu_{\dot{x}} A(\dot{x}))(n) = \mu_z \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(n) \leqslant z).$$

В самом деле, из этого определения применением формул (μ_1) и (μ_2) мы получим формулу

$$(5a)\quad \forall u \exists y \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(u) \leqslant y) \to$$
$$\forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(n) \leqslant (\nu_{\dot{z}} A(\dot{z}))(n)) \,\&$$
$$(\forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(n) \leqslant a) \to (\nu_{\dot{z}} A(\dot{z}))(n) \leqslant a),$$

откуда далее с помощью выводимой формулы

$$\Theta(\dot{a}) \,\&\, \dot{a}(0) < b \to \forall x\,(\dot{a}(x) < b \cdot 2^x)$$

и с использованием определения символа Θ получим формулу

$$(5b)\quad \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \Theta(\dot{x})) \,\&\, \exists \dot{x} A(\dot{x}) \,\&\, \exists y \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(0) < y) \to$$
$$\Theta(\nu_{\dot{z}} A(\dot{z})) \,\&\, \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x} \dot{\leqslant} \nu_{\dot{z}} A(\dot{z})) \,\&$$
$$(\forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x} \dot{\leqslant} \dot{c}) \to \nu_{\dot{z}} A(\dot{z}) \dot{\leqslant} \dot{c}),$$

из которой средствами исчисления предикатов немедленно получается требующаяся нам формула (5).

Основная идея этого вывода заключается в том, что точная верхняя граница любого непустого ограниченного сверху множества положительных действительных чисел строится как числовая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где a_n (при $n = 0, 1, 2, \ldots$) представляет собой наибольшее из чисел, являющихся n-ми членами числовых последовательностей, принадлежащих рассматриваемому множеству.

К нашему определению функционала $\nu_{\dot{x}} A(\dot{x})$ можно еще сделать следующее замечание. Если положить

$$\dot{0} \doteq \lambda x\,(0 \cdot x),$$

то с помощью формулы (5a) можно будет вывести формулу

$$\forall \dot{x} \neg A(\dot{x}) \to \nu_{\dot{x}} A(\dot{x}) \doteq \dot{0}.$$

Эта формула в сочетании с формулой (5b) и без труда выводимой формулой $\dot{0} \dot{\leqslant} \dot{a}$ даст нам формулу

$$(5c)\quad \forall x\,(A(\dot{x}) \to \Theta(\dot{x})) \,\&\, \exists y \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(0) < y) \to$$
$$(\Theta(\nu_{\dot{z}} A(\dot{z})) \vee \nu_{\dot{z}} A(\dot{z}) \doteq \dot{0}) \,\&\, \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x} \dot{\leqslant} \nu_{\dot{z}} A(\dot{z})) \,\&$$
$$\forall \dot{y}\,(\forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x} \dot{\leqslant} \dot{y} \to \nu_{\dot{z}} A(\dot{z}) \dot{\leqslant} \dot{y}).$$

Замечание. Хотя введенный функционал $\dot{0}$ и не изображает никакого числа интересующего нас типа (на самом деле легко может быть выведена формула $\neg \Theta(\dot{0})$), тем не менее введение этого функционала для нашей формализации теории положительных действительных чисел оказывается полезным.

Теперь, чтобы ввести сложение и умножение рассматриваемых нами чисел, мы сначала определим функцию $\pi(a, b)$, положив

$$\pi(a, b) = \mu_x \exists y\,(a = b \cdot x + y \,\&\, y < b).$$

Из этого равенства может быть выведена формула

$$b \neq 0 \to b \cdot \pi(a, b) \leqslant a \,\&\, a < b \cdot \pi(a, b) + b.$$

С помощью функции $\pi(a, b)$ можно следующим образом определить сумму и произведение двух чисел рассматриваемого

нами типа:

$$(\dot a \# \dot b)(n) = \mu_x \forall z (\pi(\dot a(n+z) + \dot b(n+z),\ 2^z) \leqslant x),$$
$$(\dot a \times \dot b)(n) = \mu_x \forall z (\pi(\dot a(n+z) \cdot \dot b(n+z),\ 2^{n+2\cdot z}) \leqslant x).$$

Из этих равенств сначала может быть выведена формула

$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \to \Theta(\dot a \# \dot b) \& \Theta(\dot a \times \dot b).$$

Затем могут быть получены (в виде выводимых формул) обычные законы для арифметических действий, например такие, как

$$\dot a \# \dot b = \dot b \# \dot a,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \& \Theta(\dot c) \to \dot a \times (\dot b \# \dot c) = (\dot a \times \dot b) \# (\dot a \times \dot c).$$

Мы получим также формулу

$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \to (\dot a \dot< \dot b \sim \exists \dot x (\dot a \# \dot x = \dot b).$$

Кроме того, если при помощи равенства

$$(k \circ \dot a)(n) = \mu_x \forall z (\pi(k \cdot \dot a(n+z),\ 2^z) \leqslant x)$$

определить умножение положительных действительных чисел на натуральные, то можно будет получить формулы

$$\Theta(\dot a) \& k \neq 0 \to \Theta(k \circ \dot a),$$
$$0 \circ \dot a = \dot 0,\ n' \circ \dot a = (n \circ \dot a) \# \dot a,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \to \exists x (\dot b \dot< x \circ \dot a).$$

Последняя из этих формул представляет собой формальное выражение того факта, что для рассматриваемых нами положительных действительных чисел выполняется аксиома Архимеда.

Вычитание и деление рассматриваемых чисел можно формализовать с помощью следующих определений *):

$$\dot a \dot- \dot b = \nu_{\dot x} (\Theta(\dot x) \& \dot x \# \dot b \dot\leqslant \dot a),$$
$$\frac{\dot a}{\dot b} = \nu_{\dot x} (\Theta(\dot x) \& \dot x \times \dot b \dot\leqslant \dot a),$$

из которых можно будет вывести формулы

$$\dot a \dot\leqslant \dot b \to \dot a \dot- \dot b = \dot 0,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \to (\dot a \# \dot b) \dot- \dot b = \dot a,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \& \dot b \dot< \dot a \to \Theta(\dot a \dot- \dot b) \& (\dot a \dot- \dot b) \# \dot b = \dot a,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \to \Theta\left(\frac{\dot a}{\dot b}\right) \& \frac{\dot a}{\dot b} \times \dot b = \dot a.$$

*) Функционал $\dot a \dot- \dot b$ следует отличать от введенной в т. I (с. 370) функции $a \dot- b$. — *Прим. перев.*

Если теперь положить

$$|\dot a - \dot b| = (\dot a \dot- \dot b) \# (\dot b \dot- \dot a),$$

то можно будет получить формулы

$$|\dot a \dot- \dot a| = \dot 0,\quad \Theta(\dot a) \to |\dot a \dot- \dot 0| = \dot a,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \& \dot a \neq \dot b \to \Theta(|\dot a - \dot b|),\quad |\dot a - \dot b| = |\dot b - \dot a|,$$
$$\Theta(\dot a) \& \Theta(\dot b) \& \dot b \dot< \dot a \to |\dot a - \dot b| = \dot a \dot- \dot b,$$

из которых становится ясно, что функционал $|\dot a - \dot b|$ дает формализацию понятия расстояния между двумя числами интересующего нас типа, т. е., выражаясь в обычных математических терминах, понятия абсолютной величины их разности.

Таким образом, мы определили все алгебраические операции для положительных действительных чисел.

Для анализа положительных величин требуется еще одно фундаментальное понятие — понятие *последовательности положительных действительных чисел*. Нужны также и различные связанные с такими последовательностями понятия: в частности, понятие сходимости данной последовательности к пределу.

Подобно тому как понятие положительного действительного числа формализуется с помощью предикатного символа $\Theta(\dot a)$, понятие последовательности таких чисел может быть формализовано с помощью символа $\Theta_1(\dot a)$, который вводится следующим определением:

$$\Theta_1(\dot a) \sim \forall x \Theta(\lambda_z \dot a(\tau(x, z))).$$

Замечание. Возможность представлять последовательности чисел интересующего нас типа с помощью функционалов основывается на возможности взаимно однозначного отображения последовательностей арифметических функций на сами функции. Эта возможность в свою очередь основывается на взаимно однозначной отобразимости числовых пар на числа. Мы пользуемся здесь тем отображением числовых пар на числа, которое дается нам функцией $\tau(a, b)$.

С учетом изображения с помощью функционала $\mathfrak a$ последовательности арифметических функций в виде $\lambda_z \mathfrak a(\tau(n, z))$, понятия элемента данной последовательности и ее подпоследовательности могут быть формализованы при помощи определений

$$\mathrm{El}(\dot a, \dot b) \sim \exists x (\dot a = \lambda_z \dot b(\tau(x, z)))$$

и

$$\dot a \subset \dot b \sim \forall x \exists y \forall z (\dot a(\tau(x, z)) = \dot b(\tau(y, z))).$$

Из этих определений могут быть выведены формулы

$$\dot a \subset \dot b \sim \forall \dot x (\mathrm{El}(\dot x, \dot a) \to \mathrm{El}(\dot x, \dot b))$$

и

$$\dot{a} \subset \dot{b} \,\&\, \Theta_1(\dot{b}) \to \Theta_1(\dot{a}).$$

Понятие *сходимости последовательности чисел интересующего нас типа к пределу* формализуется следующим определением:

$$\mathrm{Cv}(\dot{a},\ \dot{b}) \sim \Theta_1(\dot{a}) \,\&\, (\Theta(\dot{b}) \vee \dot{b} \doteq \dot{0}) \,\&$$
$$\forall x \exists y \forall z\,(y \leqslant z \to |\lambda_u \dot{a}(\tau(z,\ u)) - \dot{b}|(x) = 0)\ ^{1}).$$

Пусть $\mathrm{Inf}_{\dot{x}} A(\dot{x})$ — символ, вводимый определением

$$\mathrm{Inf}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \sim \forall \dot{x} \forall y \exists \dot{z}\,[A(\dot{z}) \,\&\, \forall u\,(u \leqslant y \to \dot{z} \neq \lambda_v \dot{x}(\tau(u,\ v)))].$$

Тогда понятие *бесконечного множества положительных действительных чисел* может быть формализовано определением

$$\Gamma_{\dot{x}} A(\dot{x}) \sim \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \Theta(\dot{x})) \,\&\, \mathrm{Inf}_{\dot{x}} A(\dot{x}).$$

Теорема о том, что *всякое ограниченное сверху бесконечное множество положительных действительных чисел имеет предельную точку*, с использованием определений

$$\Gamma^{*}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \sim \Gamma_{\dot{x}} A(\dot{x}) \,\&\, \exists y \forall \dot{x}\,(A(\dot{x}) \to \dot{x}(0) < y)$$

и

$$\mathrm{Cm}_{\dot{x}}(A(\dot{x},\ \dot{b})) \sim \forall u \exists \dot{x}\,(A(\dot{x}) \,\&\, \dot{x} \neq \dot{b} \,\&\, |\dot{x} - \dot{b}|(u) = 0)$$

изображается формулой

$$\Gamma^{*}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \to \exists \dot{y}\,((\Theta(\dot{y}) \vee \dot{y} \doteq \dot{0}) \,\&\, \mathrm{Cm}_{\dot{x}}(A(\dot{x}),\ \dot{y})). \tag{6}$$

Вывод этой формулы может быть построен с использованием формулы (5c) формализацией понятия *верхнего предела* (т. е. понятия наибольшей предельной точки). Эту формализацию нам дает определение

$$\tilde{\nu}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \doteq \nu_{\dot{x}} \{\Theta(\dot{x}) \,\&\, \forall \dot{y}\,(\Theta(\dot{y}) \,\&\, \dot{y} \dot{<} \dot{x} \to \mathrm{Inf}_{\dot{z}}(A(\dot{z}) \,\&\, \dot{y} \dot{<} \dot{z}))\}.$$

На основании этого определения из формулы (5c) получается формула

$$\Gamma^{*}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \to (\Theta(\tilde{\nu}_{\dot{x}} A(\dot{x})) \vee \tilde{\nu}_{\dot{x}} A(\dot{x}) = 0) \,\&$$
$$\forall \dot{y}\,(\Theta(\dot{y}) \,\&\, \dot{y} \dot{<} \tilde{\nu}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \to \mathrm{Inf}_{\dot{z}}(A(\dot{z}) \,\&\, \dot{y} \dot{<} \dot{z})) \,\&$$
$$\forall \dot{y}\,(\Theta(\dot{y}) \,\&\, \tilde{\nu}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \dot{<} \dot{y} \to \neg\, \mathrm{Inf}_{\dot{z}}(A(\dot{z}) \,\&\, \dot{y} \dot{<} \dot{z})),$$

а из нее требующаяся нам формула (6) получается с использованием определения для $\mathrm{Inf}_{\dot{x}} A(\dot{x})$, а также выводимых форму

$$\forall u \exists \dot{x}\,(\Theta(\dot{x}) \,\&\, \forall \dot{z}\,(\Theta(\dot{z}) \,\&\, \dot{z} \dot{\leqslant} \dot{x} \to \dot{z}(u) = 0))$$

[1]) Вместо $(|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|)(\mathfrak{c})$ мы для краткости пишем $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|(\mathfrak{c})$.

и

$$\Theta(\dot{a}) \to \forall u \exists \dot{x} \exists \dot{y}\,(\Theta(\dot{x}) \,\&\, \Theta(\dot{y}) \,\&\, \dot{x} \dot{<} \dot{a} \,\&\, \dot{a} \dot{<} \dot{y} \,\&$$
$$\forall \dot{z}\,(\Theta(\dot{z}) \,\&\, \dot{x} \dot{\leqslant} \dot{z} \,\&\, \dot{z} \dot{\leqslant} \dot{y} \to |\dot{z} - \dot{a}|(u) = 0)).$$

Заслуживает упоминания еще один, имеющий принципиальное значение вопрос теории положительных действительных чисел. Мы имеем в виду некоторый применяемый в этой теории *частный случай принципа выбора*. В рассматриваемом случае этот принцип утверждает, что если для любого натурального числа n существует положительное действительное число c, находящееся с n в отношении $\mathfrak{B}(n, c)$, то существует последовательность $c_0, c_1, \ldots$ чисел рассматриваемого типа, обладающая тем свойством, что для любого n выполняется отношение $\mathfrak{B}(n, c_n)$ [1]).

Перевод этого высказывания в рассматриваемый формализм приводит нас к формуле

$$\forall x \exists \dot{y}\,(\Theta(\dot{y}) \,\&\, A(x,\ \dot{y})) \to \exists \dot{y}\,[\Theta_1(\dot{y}) \,\&\, \forall x A(x,\ \lambda_z \dot{y}(\tau(x,\ z)))]. \tag{7}$$

Правда, вывести эту формулу в формализме H мы не можем, потому что здесь в нашем распоряжении нет формулы

$$\dot{a} \doteq \dot{b} \to (A(\dot{a}) \to A(\dot{b})).$$

Но эта трудность происходит только от того, что при изображении данного частного случая принципа выбора формулой (7) формализация понятия произвольного отношения между натуральным числом n и положительным действительным числом c, произведенная нами при помощи формульной переменной $A(n, \dot{a})$, приводит к тому, что становятся возможными излишне общие подстановки.

На самом деле для любой формулы $\mathfrak{A}(\dot{c})$ такой, что она формализует какое-либо математическое высказывание о числах интересующего нас типа, формула

$$\dot{a} \doteq \dot{b} \to (\mathfrak{A}(\dot{a}) \to \mathfrak{A}(\dot{b}))$$

выводима в нашем формализме H.

Это обстоятельство делает возможным применение следующего приема: с помощью эквивалентности

$$\mathrm{Ext}_{\dot{x}} A(\dot{x}) \sim \forall \dot{x} \forall \dot{y}\,(\dot{x} \doteq \dot{y} \to (A(\dot{x}) \to A(\dot{y})))$$

мы определяем символ $\mathrm{Ext}_{\dot{x}} A(\dot{x})$ и добавляем в посылку формулы (7) в качестве конъюнктивного члена формулу

$$\forall x\, \mathrm{Ext}_{\dot{y}} A(x,\ \dot{y}).$$

[1]) В связи с этим см. т. I, с. 69—70.

Возникающая таким образом формула

(7a) $\forall x \operatorname{Ext}_{\dot y} A(x, \dot y) \& \forall x \exists \dot y (\Theta(\dot y) \& A(x, \dot y)) \to$
$\exists \dot y [\Theta_1(\dot y) \& \forall x A(x, \lambda_z \dot y (\tau(x, z)))]$

достаточным образом формализует рассматриваемый частный случай принципа выбора. С другой стороны, эта формула выводима в нашем формализме.

Действительно, сначала можно получить формулу

(7b) $\forall x \operatorname{Ext}_{\dot y} A(x, \dot y) \& \forall x \exists \dot y A(x, \dot y) \to \exists \dot y \forall x A(x, \lambda_z \dot y (\tau(x, z)))$.

Это делается следующим образом. Если посредством $\mathfrak{c}$ обозначить функционал

$$\lambda_y [\{\varepsilon_{\dot z} A(\tau_1(y), \dot z)\} (\tau_2(y))],$$

то с помощью формулы $\{\lambda_x \dot a(x)\}(c) = \dot a(c)$ можно будет вывести формулы

$$(\varepsilon_{\dot z} A(a, \dot z))(b) = \{\lambda_z \mathfrak{c}(\tau(a, z))\}(b),$$

а тем самым и формулу

$$\varepsilon_{\dot z} A(a, \dot z) = \lambda_z \mathfrak{c}(\tau(a, z)).$$

Из этой формулы может быть получена импликация

$$\operatorname{Ext}_{\dot y} A(a, \dot y) \to (A(a, \varepsilon_{\dot z} A(a, \dot z)) \to A(a, \lambda_z \mathfrak{c}(\tau(a, z)))).$$

С другой стороны, с помощью третьей ε-формулы может быть получена формула

$$\exists \dot y A(a, \dot y) \to A(a, \varepsilon_{\dot z} A(a, \dot z)).$$

Эти две формулы, взятые совместно, дают формулу

$$\operatorname{Ext}_{\dot y} A(a, \dot y) \& \exists \dot y A(a, \dot y) \to A(a, \lambda_z \mathfrak{c}(\tau(a, z))),$$

а также формулу

$$\forall x \operatorname{Ext}_{\dot y} A(x, \dot y) \& \forall x \exists \dot y A(x, \dot y) \to \forall x A(x, \lambda_z \mathfrak{c}(\tau(x, z))),$$

а из этой формулы, применяя формулу

$$A(\mathfrak{c}) \to \exists \dot y A(\dot y),$$

мы получаем требующуюся нам формулу (7b).

Но подставив в (7b) вместо именной формы $A(a, \dot c)$ формулу $\Theta(\dot c) \& A(a, \dot c)$ и воспользовавшись выводимостью формул

$$\operatorname{Ext}_{\dot y} A(a, \dot y) \to \operatorname{Ext}_{\dot y} (\Theta(\dot y) \& A(a, \dot y))$$

и

$$\forall x \Theta(\lambda_z \dot b(\tau(x, z))) \to \Theta_1(\dot b),$$

мы получим формулу (7a).

С помощью формулы (7a) можно, в частности, вывести формулу

(8) $\forall \dot x (A(\dot x) \to \Theta(\dot x)) \& \operatorname{Ext}_{\dot x} A(\dot x) \& \operatorname{Cm}_{\dot x} (A(\dot x), \dot b) \to$
$\exists \dot x [\Theta_1(\dot x) \& \forall u (A(\lambda_z \dot x(\tau(u, z))) \&$
$\lambda_z \dot x(\tau(u, z)) \neq \dot b \& |\lambda_z \dot x(\tau(u, z)) - \dot b|(u) = 0)]$,

представляющую собой формализацию теоремы о том, что из любого множества чисел интересующего нас типа, которое имеет предельную точку, можно выбрать последовательность, сходящуюся к этой точке.

Формула (8), взятая вместе с формулой (6), дает формулу

(9) $\Gamma^*_{\dot x} A(\dot x) \& \operatorname{Ext}_{\dot x} A(\dot x) \to$
$\exists \dot x \exists \dot y [\Theta_1(\dot x) \& (\Theta(\dot y) \vee \dot y \doteq \dot 0) \& \forall u (A(\lambda_z \dot x(\tau(u, z))) \&$
$\lambda_z \dot x(\tau(u, z)) \neq \dot y \& |\lambda_z \dot x(\tau(u, z)) - \dot y|(u) = 0)]$,

а эту формулу, как мы покажем ниже, можно еще усилить до формулы

(10) $\Gamma^*_{\dot x} A(\dot x) \& \operatorname{Ext}_{\dot x} A(\dot x) \to$
$\exists \dot x \exists \dot y [\Theta_1(\dot x) \& (\Theta(\dot y) \vee \dot y \doteq \dot 0) \& \forall u (A(\lambda_z \dot x(\tau(u, z))) \&$
$|\lambda_z \dot x(\tau(u, z)) - \dot y|(u) = 0 \& |\lambda_z \dot x(\tau(u', z)) - \dot y| < |\lambda_z \dot x(\tau(u, z) - \dot y)|)]$,

которая выражает теорему о том, что *из каждого ограниченного сверху множества положительных действительных чисел можно выбрать последовательность, которая сходится либо к положительному действительному числу, либо «к нулю», причем приближения монотонно улучшаются.*

Переход от (9) к (10) можно произвести с помощью формулы

(11) $\Theta_1(\dot a) \& \forall u (\dot a(\tau(u, u)) = 0) \to \exists \dot x [\dot x \subset \dot a \&$
$\forall u (\dot x(\tau(u, u)) = 0 \& \lambda_z \dot x(\tau(u', z)) < \lambda_z \dot x(\tau(u, z)))]$,

которая в свою очередь получается следующим образом. Сначала из определений символов Θ и Θ_1 можно вывести формулу

$$\Theta_1(\dot a) \to \exists v (n < v \& \dot a(\tau(n, v)) \neq 0).$$

Если теперь определить $\varkappa_1(\dot a, n)$ равенством

$$\varkappa_1(\dot a, n) = \mu_v (n < v \& \dot a(\tau(n, v)) \neq 0),$$

а затем определить $\varkappa_2(\dot a, n)$ и $\varkappa_3(\dot a)$ с помощью равенств

$$\varkappa_2(\dot a, n) = \rho_x(0, \varkappa_1(\dot a, \tau_2(x)), n)$$

и

$$\varkappa_3(\dot a) = \lambda_x \dot a(\tau(\varkappa_2(\dot a, \tau_1(x)), \tau_2(x))),$$

то, пользуясь определениями символов $\mu_x A(x)$ и $\rho_x(a, \dot{b}(x), n)$, а также формулой

$$\Theta_1(\dot{a}) \& \dot{a}(\tau(n, n)) = 0 \to (c \leqslant n \to \dot{a}(\tau(n, c)) = 0),$$

мы получим формулу

$$\Theta_1(\dot{a}) \& \forall u(\dot{a}(\tau(u, u)) = 0) \to \varkappa_3(\dot{a}) \subset \dot{a} \& (\varkappa_3(\dot{a}))(\tau(n, n)) = 0 \& \lambda_z(\varkappa_3(\dot{a}))(\tau(n', z)) \dot{<} \lambda_z(\varkappa_3(\dot{a}))(\tau(n, z)),$$

из которой немедленно получается формула (11).

Замечание. В ряде рассуждений, проводимых в теории точечных множеств, требуется более сильная форма принципа выбора, чем та, которую мы только что рассмотрели. Чтобы включить в наш формализм этот более сильный вариант принципа выбора, достаточно добавить к исходным формулам системы H формулу

$$\forall \dot{x}(A(\dot{x}) \sim B(\dot{x})) \to \forall z((\varepsilon_x^{\cdot} A(\dot{x}))(z) = (\varepsilon_x^{\cdot} B(\dot{x}))(z)).$$

§ 4. Теория действительных чисел. Замечания по поводу дальнейшей формализации анализа

Теперь мы получили в свои руки существенный аппарат, позволяющий дедуктивно строить теорию *положительных* действительных чисел. А от этой теории можно различными способами перейти к общей теории действительных чисел.

Одна из возможностей заключается в том, чтобы действительные числа определить как пары положительных действительных. Такое изображение действительных чисел обладает тем преимуществом, что при введении действий над ними не требуется разбирать отдельные случаи. Но, с другой стороны, оно неудобно своей неоднозначностью, а к тому же в рамках нашего формализма его реализация оказывается несколько громоздкой. Ввиду этого мы выбираем более употребительный способ перехода к действительным числам, заключающийся в добавлении к положительным действительным числам числа 0 и отрицательных чисел. Это добавление можно произвести следующим образом. Мы полагаем по определению [1])

$$\Theta^-(\dot{a}) \sim \dot{a}(0) \neq 0 \& \Theta(\lambda_x(\dot{a}(x) \dot{-} \overline{\operatorname{sgn}}(x)))$$

и

$$\Theta^*(\dot{a}) \sim \Theta(\dot{a}) \vee \dot{a} \doteq \dot{0} \vee \Theta^-(\dot{a}).$$

Символ $\dot{0}$, который является функционалом, мы берем в качестве изображения действительного числа нуль, а символы $\Theta^-(\dot{a})$ и

[1]) По поводу определений $(a \dot{-} b)$ и $\overline{\operatorname{sgn}}(n)$ см. с. 556.

$\Theta^*(\dot{a})$ в качестве изображений высказываний «$\dot{a}$ является отрицательным действительным числом» и «$\dot{a}$ является действительным числом».

Интерпретацию определения символа $\Theta^-(\dot{a})$ легко усмотреть, приняв во внимание выводимость формулы

$$\Theta^-(\dot{a}) \sim \exists \dot{x}[\Theta(\dot{x}) \& \dot{a}(0) = (\dot{x}(0))' \& \forall z(z \neq 0 \to \dot{a}(z) = \dot{x}(z))],$$

из которой в свою очередь выводится формула

$$\Theta^-(\dot{a}) \to \dot{a} \dot{\neq} \dot{0} \& \neg \Theta(\dot{a}).$$

Преимущество такого введения понятия действительного числа заключается, во-первых, в том, что оказывается ненужным новое определение равенства, так как отношение равенства $\doteq$ для функционалов непосредственно представляет собой и отношение равенства для действительных чисел, и, во-вторых, в том, что те действительные числа, которые являются положительными, совпадают с рассмотренными нами положительными действительными числами.

Для определения арифметических действий целесообразно сначала ввести функции $|\dot{a}|$ (абсолютная величина $\dot{a}$), $-\dot{a}$ и $\operatorname{sg}(\dot{a})$ (знак $\dot{a}$). Мы полагаем

$$|\dot{a}| \doteq \varepsilon_{\dot{x}}^{\cdot}\{(\neg\Theta^-(\dot{a}) \& \dot{x} \doteq \dot{a}) \vee (\Theta^-(\dot{a}) \& \dot{x} \doteq \lambda_z(\dot{a}(z) \dot{-} \overline{\operatorname{sgn}} z))\},$$

$$-\dot{a} = \varepsilon_{\dot{x}}^{\cdot}\{(\neg\Theta(\dot{a}) \& \dot{x} = |\dot{a}|) \vee (\Theta(\dot{a}) \& \dot{x} = \lambda_z(\dot{a}(z) + \overline{\operatorname{sgn}} z))\},$$

$$\operatorname{sg}(\dot{a}) = \varepsilon_{\dot{x}}^{\cdot}\{(\neg\Theta(\dot{a}) \& \neg\Theta^-(\dot{a}) \& \dot{x} \doteq \dot{0}) \vee (\Theta(\dot{a}) \& \dot{x} \doteq \lambda_z\delta(2^z)) \vee (\Theta^-(\dot{a}) \& \dot{x} \doteq \lambda_z(\delta(2^z) + \overline{\operatorname{sgn}} z))\}.$$

Из этих определений получаются, в частности, формулы

$$|\dot{0}| \doteq \dot{0}, \quad -\dot{0} \doteq \dot{0}, \quad \operatorname{sg}(\dot{0}) \doteq \dot{0},$$

$$\Theta(a) \to |\dot{a}| \doteq \dot{a}, \quad \Theta^-(\dot{a}) \to |\dot{a}| \doteq -\dot{a}, \quad -(-\dot{a}) \doteq \dot{a}.$$

Если мы, кроме того, положим

$$\dot{1} \doteq \lambda_z\delta(2^z),$$

то получим

$$\Theta(\dot{a}) \to \operatorname{sg}(\dot{a}) \doteq \dot{1} \quad \text{и} \quad \Theta^-(\dot{a}) \to \operatorname{sg}(\dot{a}) \doteq -\dot{1}.$$

Замечание. При умножении положительных действительных чисел функционал $\dot{1}$ играет роль единицы. В самом деле, может быть выведена формула

$$\dot{a} \times \dot{1} \doteq \dot{a}.$$

Теперь мы можем следующим образом определить сложение действительных чисел:

$$\dot a \oplus \dot b \doteq \varepsilon_{\dot x}\{(\dot a \doteq \dot 0 \,\&\, \dot x \doteq \dot b) \vee (\dot b \doteq \dot 0 \,\&\, \dot x \doteq \dot a) \vee$$
$$(\Theta(\dot a) \,\&\, \Theta(\dot b) \,\&\, \dot x \doteq \dot a \# \dot b) \vee (\Theta^-(\dot a) \,\&\, \Theta^-(\dot b) \,\&\, x \doteq -(|\dot a| \# |\dot b|)) \vee$$
$$(\dot a \doteq -\dot b \,\&\, \dot x \doteq \dot 0) \vee (\mathrm{sg}(\dot a) \doteq -\mathrm{sg}(\dot b) \,\&$$
$$|\dot x| \doteq \|\dot a| - |\dot b\| \,\&\, (|\dot b| \dot< |\dot a| \to \mathrm{sg}(\dot x) = \mathrm{sg}(\dot a)) \,\&$$
$$(|\dot a| \dot< |\dot b| \to \mathrm{sg}(\dot x) = \mathrm{sg}(\dot b)))\}.$$

Вычитание получается из сложения при помощи следующего определения:

$$\dot a \ominus \dot b \doteq \dot a \oplus (-\dot b).$$

Отношение порядка для действительных чисел вводится определением:

$$\dot a \leqslant \dot b \sim \Theta(\dot b \ominus \dot a).$$

Из определения вычитания может быть выведена формула

$$\Theta(\dot a) \,\&\, \Theta(\dot b) \to |\dot a \ominus \dot b| \doteq |\dot a - \dot b|.$$

Произведение двух действительных чисел $\dot a$ и $\dot b$ может быть определено следующим образом:

$$\dot a \otimes \dot b \doteq \varepsilon_{\dot x}\{((\dot a \doteq \dot 0 \vee \dot b \doteq \dot 0) \,\&\, \dot x \doteq \dot 0) \vee (\mathrm{sg}(\dot a) \doteq \mathrm{sg}(\dot b) \,\&$$
$$\dot x \doteq |\dot a| \times |\dot b|) \vee (\mathrm{sg}(\dot a) \doteq -\mathrm{sg}(\dot b) \,\&\, \dot x \doteq -(|\dot a| \times |\dot b|))\}.$$

И, наконец, определением

$$\dot a : \dot b \doteq \varepsilon_{\dot x}(\Theta^*(\dot x) \,\&\, \dot b \otimes \dot x \doteq \dot a)$$

может быть введено деление. Из сформулированных определений может быть получена формула

$$\Theta^*(\dot a) \,\&\, \Theta^*(\dot b) \to \Theta^*(\dot a \oplus \dot b) \,\&\, \Theta^*(\dot a \ominus \dot b) \,\&\, \Theta^*(\dot a \otimes \dot b) \,\&$$
$$(\dot b \neq \dot 1 \to \Theta^*(\dot a : \dot b)).$$

Могут быть также получены и формулы, выражающие арифметические законы, которым подчиняются эти четыре операции.

А теперь — совершенно аналогично тому, как это было сделано в случае положительных действительных чисел, — определив соответствующий предикат $\Theta_1^*(\dot a)$, мы сможем формализовать понятие последовательности действительных чисел и предела такой последовательности, а также формально изобразить основные теоремы о пределах.

Для построения теории бесконечных сумм и произведений нам нужно сначала с помощью рекурсивных определений ввести

конечные суммы и конечные произведения действительных чисел, а эти рекурсивные определения могут быть сведены к соответствующим явным определениям совершенно аналогично тому, как сводились примитивные рекурсии для арифметических функций. Мы приведем здесь определение для суммы первых $n+1$ членов последовательности действительных чисел:

$$\sigma(\dot a,\ n) \doteq \varepsilon_{\dot x}\exists \dot y\,[\forall u\,(\dot y(\tau(0,\ u)) = \dot a(\tau(0,\ u))) \,\&$$
$$\forall z\,(z < n \to \lambda_u \dot y(\tau(z',\ u)) \doteq \lambda_u \dot y(\tau(z,\ u)) \oplus \lambda_u \dot a(\tau(z',\ u))) \,\&$$
$$\forall u\,(\dot x(u) = \dot y(\tau(n,\ u)))].$$

(Фигурирующий здесь параметр $\dot a$ представляет собой ту последовательность действительных чисел, члены которой последовательно суммируются.) Индукцией по n получается формула

$$\Theta_1^*(\dot a) \to \Theta^*(\sigma(\dot a,\ n)),$$

а из нее, далее, — формула

$$\Theta_1^*(\dot a) \to \Theta_1^*(\lambda_x[(\sigma(\dot a,\ \tau_1(x)))(\tau_2(x))]).$$

Что касается теории функций, то понятие непрерывной функции, определенной на отрезке $[0,\ 1]$, можно изобразить в рамках нашего формализма H, воспользовавшись тем обстоятельством, что всякая такая функция однозначно задается последовательностью ее значений для значений аргумента

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \ldots,$$

т. е. для несократимых дробей вида $m/2^n$, не превосходящих единицы. Дроби эти мы упорядочиваем по величине знаменателя, а при равных знаменателях — по величине числителя.

Каждой такой непрерывной на отрезке $[0,\ 1]$ функции, согласно сказанному, соответствует вполне определенная последовательность действительных чисел, и поэтому общее понятие такой функции изображается в H некоторой формулой

$$\Theta_1^*(\dot a) \,\&\, \Xi(\dot a),$$

где $\Xi(\dot a)$ формализует условие, говорящее о том, что в представленной функционалом $\dot a$ последовательности действительных чисел, образующей последовательность значений этой функции для аргументов вида $m/2^n$ (в указанном порядке), каждой сходящейся последовательности дробей вида $m/2^n$ соответствует сходящаяся же последовательность значений функции.

Можно построить функционал $\mathfrak{f}(\dot a,\ \dot b)$, для которого будет выводима формула

$$\Theta_1^*(\dot a) \,\&\, \Xi(\dot a) \,\&\, (\Theta(\dot b) \vee \dot b \doteq \dot 0) \,\&\, \dot b \leqslant \dot 1 \to \Theta^*(\mathfrak{f}(\dot a,\ \dot b))$$

и который будет представлять «значение определенной на отрезке [0, 1] непрерывной функции, изображенной функционалом $\dot{a}$, при значении аргумента, изображенном функционалом $\dot{b}$».

С помощью этого функционала $\mathfrak{f}(\dot{a}, \dot{b})$ можно также формализовать понятия дифференцируемости и производной.

Интегрирование может быть определено без использования функционала $\mathfrak{f}(\dot{a}, \dot{b})$. Так, в частности, интеграл от непрерывной на отрезке [0, 1] функции, взятый по этому отрезку, изображается в зависимости от функционала, представляющего эту функцию, пределом последовательности действительных чисел, n-й член которой изображается функционалом

$$(\sigma(\dot{a}, 2^{n'}) \ominus \sigma(\dot{a}, 2^n)) : (2^n \circ \dot{1}).$$

Подобно теории функций, непрерывных на [0, 1], могут быть формализованы и теории функций других типов, например теория непрерывных функций двух переменных, определенных в каком-либо прямоугольнике или круге, или теория определенных на каком-либо отрезке функций ограниченной вариации.

Для изображения общего понятия множества действительных чисел, а также множества действительнозначных функций, зависящих от одного или нескольких действительных переменных (кратко — функций действительного переменного), мы можем использовать формульные переменные. При этом множества действительных чисел можно изображать совершенно аналогично тому, как ранее изображались множества положительных действительных чисел.

Формализация понятия функции одного действительного переменного может быть произведена с использованием формульных переменных с помощью явного определения

$$\Psi_{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}}(A(\dot{x}, \dot{y}), B(\dot{z})) \sim$$
$$\forall \dot{x} \forall \dot{y} (A(\dot{x}, \dot{y}) \to \Theta^*(\dot{x}) \,\&\, \Theta^*(\dot{y}) \,\&\, B(\dot{x})) \,\&\, \forall \dot{y}\, \mathrm{Ext}_{\dot{x}}\, A(\dot{x}, \dot{y}) \,\&$$
$$\forall \dot{x} (\Theta^*(\dot{x}) \,\&\, B(\dot{x}) \to \exists \dot{y} [\Theta^*(\dot{y}) \,\&\, \forall \dot{z} (\dot{z} \doteq \dot{y} \sim A(\dot{x}, \dot{z}))]).$$

Здесь переменная $A(\dot{a}, \dot{b})$ представляет отношение между значением аргумента и значением функции, а переменная $B(\dot{c})$ представляет условие, описывающее область определения этой функции.

В частности, высказывание «предикат $A(\dot{a}, \dot{b})$ выражает отношение, имеющее место между аргументом и значением некоторой определенной на отрезке [0, 1] функции одного действительного переменного» [или же «предикат $A(\dot{a}, \dot{b})$ для некоторой определенной на отрезке [0, 1] функции действительного переменного равнозначен высказыванию о том, что $\dot{b}$ является значением этой функции при значении аргумента, равном $\dot{a}$»] изобразится после

этого формулой

$$\Psi_{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}}(A(\dot{x}, \dot{y}), \dot{0} \leqq \dot{z} \,\&\, \dot{z} \leqq \dot{1}).$$

Аналогичным образом может быть формализовано и понятие функции нескольких действительных переменных.

Понятия лебеговской меры и интеграла Лебега тоже могут быть изображены в H с помощью соответствующих явных определений. При формулировке этих определений некоторое упрощение получается за счет того, что при введении внешней меры Лебега для линейных точечных множеств можно принимать во внимание только такие интервалы покрытия, концы которых являются рациональными. Равным образом для плоских точечных множеств в качестве покрывающих многоугольников достаточно брать только такие квадраты, вершины которых имеют рациональные координаты и стороны которых параллельны осям координат.

Отправляясь от намеченных здесь основ, мы теперь можем развивать в рамках формализма H следующие разделы анализа: теорию аналитических функций, дифференциальную геометрию, теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, теорию рядов Фурье, теорию интегральных уравнений и бесконечно многих переменных, а также и ряд больших разделов топологии [1]).

§ 5. Теория вполне упорядоченных множеств целых чисел

Если воспользоваться изображением чисел *канторовского второго числового класса* с помощью полных упорядочений натурального ряда, то теорию чисел этого класса тоже можно будет изложить в рамках H. Фактическая реализация такого формального изложения этой теории может быть выполнена самыми различными способами. Ниже мы рассмотрим один из них.

Мы будем исходить из следующего вспомогательного рассуждения. Данное множество чисел, рассматриваемое вместе с отношением порядка (или, как мы вместо этого кратко говорим: упорядоченное множество чисел), определяет собой совокупность таких пар (a, b), у которых a и b суть элементы рассматриваемого множества, причем a идет в данном порядке не позже b. И обратно: данная совокупность таких пар однозначно определяет и само это множество, и его порядок. В частности, если речь идет об упорядоченном множестве неотрицательных целых чисел, то соответствующая совокупность пар может быть представлена арифметической функцией $\mathfrak{f}(n)$ такой, что $\mathfrak{f}(\tau(a, b)) = 1$ или $\mathfrak{f}(\tau(a, b)) = 0$ в зависимости от того, входит или не входит

[1]) Впрочем, см. замечание в конце § 3, с. 568.

пара (a, b) в рассматриваемую совокупность, т. е. функцией, принимающей для числа n значение 1 или 0 в зависимости от того, входит или не входит в эту совокупность пара $(\tau_1(n), \tau_2(n))$.

Если мы, наоборот, будем исходить из какой-либо арифметической функции, то для того, чтобы эта функция представляла в только что указанном смысле упорядоченное множество неотрицательных целых чисел, должны выполняться определенные условия. Формальное изображение этих условий и сведение их в единый предикатный символ может быть осуществлено при помощи следующего определения:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Od}(\dot a) \sim \forall x(\dot a(x) = 0 \vee \dot a(x) = 1) \,\&\\ &\forall x \forall y(\dot a(\tau(x,y)) = 1 \vee \dot a(\tau(y,x)) = 1 \sim \dot a(\tau(x,x)) = 1 \,\&\, \dot a(\tau(y,y)) = 1) \,\&\\ &\qquad \forall x \forall y(x \neq y \to \dot a(\tau(x,y)) = 0 \vee \dot a(\tau(y,x)) = 0) \,\&\\ &\qquad \forall x \forall y \forall z(\dot a(\tau(x,y)) = 1 \,\&\, \dot a(\tau(y,z)) = 1 \to \dot a(\tau(x,z)) = 1).\end{aligned}$$

К этому определению примыкают дальнейшие определения:

$$\begin{aligned}c \varepsilon \dot a &\sim \mathrm{Od}(\dot a) \,\&\, \dot a(\tau(c,c)) = 1,\\ \leqslant(a, b; \dot c) &\sim \mathrm{Od}(\dot c) \,\&\, \dot c(\tau(a,b)) = 1,\\ <(a, b; \dot c) &\sim a \neq b \,\&\leqslant(a, b; \dot c);\end{aligned}$$

из которых сразу получаются формулы

$$\begin{aligned}a \varepsilon \dot c \,\&\, b \varepsilon \dot c &\sim \leqslant(a, b; \dot c) \vee <(b, a; \dot c),\\ \neg &<(a, a; \dot c),\\ <(a, b; \dot d) \,\&\, <(b, c; \dot d) &\to (a, c; \dot d).\end{aligned}$$

Из относящихся к упорядоченным множествам понятий мы используем, в частности, понятия начала множества, отрезка множества и подобия двух множеств. Для упорядоченных множеств неотрицательных целых чисел понятия эти могут быть формализованы с помощью следующих определений:

$$\begin{aligned}&\mathrm{In}(\dot a, \dot b) \sim \mathrm{Od}(\dot a) \,\&\, \mathrm{Od}(\dot b) \,\&\, \forall x(x \varepsilon \dot a \to x \varepsilon \dot b) \,\&\\ &\qquad\qquad \forall x \forall y(y \varepsilon \dot a \,\&\, <(x, y; \dot b) \to <(x, y; \dot a)),\\ &\mathrm{Sc}(\dot a, \dot b, c) \sim \mathrm{In}(\dot a, \dot b) \,\&\, c \varepsilon \dot b \,\&\, \forall x(x \varepsilon \dot a \sim <(x, c; \dot b)),\\ &\dot a \simeq \dot b \sim \mathrm{Od}(\dot a) \,\&\, \mathrm{Od}(\dot b) \,\&\, (\exists z(z \varepsilon \dot a \vee z \varepsilon \dot b) \to\\ &\qquad \exists \dot x\{\forall y[y \varepsilon \dot a \to \exists z(\tau_1(\dot x(z)) = y)] \,\&\\ &\qquad\quad \forall y[y \varepsilon \dot b \to \exists z(\tau_2(\dot x(z)) = y)] \,\&\\ &\qquad\quad \forall z(\tau_1(\dot x(z)) \varepsilon \dot a \,\&\, \tau_2(\dot x(z)) \varepsilon \dot b) \,\&\\ &\qquad\quad \forall u \forall v[<(\tau_1(\dot x(u)), \tau_1(\dot x(v)); \dot a) \sim\\ &\qquad\qquad\qquad <(\tau_2(\dot x(u)), \tau_2(\dot x(v)); \dot b)]\}).\end{aligned}$$

[Формуле $\mathrm{In}(\dot a, \dot b)$ соответствует высказывание «$\dot a$ является началом упорядоченного множества $\dot b$ неотрицательных целых чисел», а формуле $\mathrm{Sc}(\dot a, \dot b, c)$ — высказывание «$\dot a$ является отрезком, образованным в упорядоченном множестве $\dot b$ неотрицательных чисел элементом c»; определение подобия, выражаемое формулой $\dot a \simeq \dot b$, говорит о том, что $\dot a$ и $\dot b$ являются упорядоченными множествами неотрицательных целых чисел и что в том случае, когда хотя бы одно из них непусто, существует последовательность числовых пар, изображающая взаимно однозначное отображение $\dot a$ на $\dot b$, сохраняющее порядок.]

Из определения символа $\simeq$ (символ подобия) могут быть выведены формулы

$$\mathrm{Od}(\dot a) \to \dot a \simeq \dot a$$

и

$$\dot a \simeq \dot b \to (\dot a \simeq \dot c \to \dot b \simeq \dot c).$$

Переход от упорядоченных множеств неотрицательных целых чисел к вполне упорядоченным мы произведем при помощи определения

$$\mathsf{N}(\dot a) \sim \mathrm{Od}(\dot a) \,\&\, \neg \exists \dot x \forall y <(\dot x(y'), \dot x(y); \dot a).$$

Из этого определения можно получить формулы

$$\mathrm{In}(\dot a, \dot b) \,\&\, \mathsf{N}(\dot b) \to \mathsf{N}(\dot a)$$

и

$$\mathsf{N}(\dot a) \,\&\, \dot a \simeq \dot b \to \mathsf{N}(\dot b).$$

Затем, используя выводимую формулу

$$\forall x(B(x) \to \exists y(B(y) \,\&\, C(x, y))) \to (B(a) \to \exists \dot x \forall z C(\dot x(z), \dot x(z'))),$$

получим формулу

$$\begin{aligned}&((1)) \quad \mathsf{N}(\dot c) \,\&\, a \varepsilon \dot c \,\&\, A(a) \to\\ &\qquad\qquad \exists x(x \varepsilon \dot c \,\&\, A(x) \,\&\, \forall y(y \varepsilon \dot c \,\&\, A(y) \to \leqslant(x, y; \dot c))).\end{aligned}$$

А с помощью этой формулы могут быть выведены формулы

$$\mathrm{In}(\dot a, \dot b) \,\&\, \mathsf{N}(\dot b) \,\&\, \dot a \neq \dot b \to \exists x \,\mathrm{Sc}(\dot a, \dot b, x)$$

и

$$\mathsf{N}(\dot a) \,\&\, \mathsf{N}(\dot b) \to \exists \dot x(\dot x \simeq \dot a \,\&\, \mathrm{In}(\dot x, \dot b)) \vee \exists \dot x(\dot x \simeq \dot b \,\&\, \mathrm{In}(\dot x, \dot a)).$$

Если теперь положить по определению

$$\preccurlyeq(\dot a, \dot b) \sim \exists \dot x(\dot x \simeq \dot a \,\&\, \mathrm{In}(\dot x, \dot b))$$

и

$$\prec(\dot a, \dot b) \sim \exists \dot x \exists y(\dot x \simeq \dot a \,\&\, \mathrm{Sc}(\dot x, \dot b, y)),$$

то можно будет получить формулы

$$((2)) \quad \begin{cases} \mathsf{N}(\dot a)\,\&\,\mathsf{N}(\dot b) \to (\preccurlyeq(\dot a,\ \dot b) \sim \dot a \simeq \dot b \vee \prec(\dot a,\ \dot b)), \\ \mathsf{N}(\dot a)\,\&\,\mathsf{N}(\dot b) \to \preccurlyeq(\dot a,\ \dot b) \vee \prec(\dot b,\ \dot a), \\ \mathsf{N}(\dot a) \to \neg \prec(\dot a,\ \dot a), \\ \prec(\dot a,\ \dot b)\,\&\prec(\dot b,\ \dot c) \to \prec(\dot a,\ \dot c), \\ \mathsf{N}(\dot c)\,\&\,\mathsf{Sc}(\dot a,\ \dot c,\ r)\,\&\,\mathsf{Sc}(\dot b,\ \dot c,\ s)\,\&<(r,\ s;\ \dot c) \to \prec(\dot a,\ \dot b). \end{cases}$$

Содержательный смысл первых четырех формул ((2)) ясен. Смысл пятой сводится к тому, что упорядочение вполне упорядоченных множеств неотрицательных целых чисел при помощи отношения $\prec$ при условии, что подобные множества (т. е. множества, находящиеся в отношении $\simeq$) не различаются, или, другими словами, упорядочение порядковых типов рассматриваемых вполне упорядоченных множеств по их величине для всех типов, меньших некоторого заданного порядкового числа $\mathfrak{c}$, дает порядок, изоморфный тому порядку, который имеется в любом множестве, вполне упорядоченном по типу $\mathfrak{c}$.

Тот факт, что упорядочение по отношению $\prec$ является полным, находит формальное выражение в следующей, выводимой с помощью формул ((1)) и ((2)) формуле:

$$((3)) \quad \mathsf{N}(\dot a)\,\&\,A(\dot a) \to \exists x\,\{\mathsf{N}(\dot x)\,\&\,A(\dot x)\,\& \\ \forall \dot y\,(\mathsf{N}(\dot y)\,\&\,A(\dot y) \to \preccurlyeq(\dot x,\ \dot y))\}.$$

Эта формула представляет собой аналог формулы для принципа наименьшего числа. Из нее может быть получена формула

$$((4)) \quad \forall \dot x\,(\mathsf{N}(\dot x)\,\&\,\forall \dot y\,(\prec(\dot y,\ \dot x) \to A(\dot y)) \to A(\dot x)) \to (\mathsf{N}(\dot a) \to A(\dot a)),$$

изображающая принцип трансфинитной индукции.

К описанной формальной характеризации отношения $\prec$ мы теперь еще добавим формализацию порождающих операций, в результате чего у нас получится аналогичное построению арифметики построение теории первого и второго канторовских числовых классов (типы вполне упорядоченных конечных множеств представляют собой элементы первого, а типы вполне упорядоченных счетных множеств — элементы второго числового класса).

Сначала можно вывести формулы

$$\mathsf{N}(\dot 0) \quad \text{и} \quad \mathsf{N}(\dot a) \to \preccurlyeq(\dot 0,\ \dot a).$$

Затем можно определить символ $\dot a^+$ так, чтобы были выводимы формулы

$$\mathsf{N}(\dot a) \to \mathsf{N}(\dot a^+),$$
$$\mathsf{N}(\dot a) \to \prec(\dot a,\ \dot a^+),$$
$$\prec(\dot a,\ \dot b) \to \preccurlyeq(\dot a^+,\ \dot b).$$

Этого можно достичь, например, при помощи следующего определения [1]):

$$\dot a^+ \doteq \lambda_x\,(\mathrm{sgn}\,(\tau_1(x)\cdot\tau_2(x))\cdot\dot a\,(\tau\,(\delta\,(\tau_1(x)),\ \delta\,(\tau_2(x))))+ \\ \mathrm{sgn}\,(\tau_1(x))\cdot\overline{\mathrm{sgn}}\,(\tau_2(x))\cdot\dot a\,(\tau\,(\delta\,(\tau_1(x)),\ \delta\,(\tau_1(x))))+\overline{\mathrm{sgn}}\,(x)].$$

Это определение выбрано с таким расчетом, чтобы в том случае, когда функционал $\dot a$ изображает какое-либо упорядоченное множество M неотрицательных целых чисел, функционал $\dot a^+$ изображал упорядоченное множество, которое получается из M путем прибавления к каждому числу из M единицы (при сохранении порядка) и присоединения числа 0 в качестве последнего элемента.

В силу выводимых для $\dot 0$ и $\dot a^+$ формул, роль этих функционалов оказывается аналогичной роли, которую в арифметическом формализме играют термы 0 и a'. Функционал $\dot 0$, изображающий пустое множество, представляет наименьший порядковый тип вполне упорядоченного множества, а символ $\dot a^+$ — переход от заданного порядкового типа к ближайшему большему. В качестве еще одной порождающей операции здесь добавляется операция предельного перехода, которая по любой возрастающей счетной последовательности порядковых типов вполне упорядоченных множеств строит ближайший больший.

Понятие возрастающей последовательности вполне упорядоченных множеств неотрицательных целых чисел формализуется определением

$$\mathsf{N}_1(\dot a) \sim \forall x\,[\mathsf{N}(\lambda_z \dot a\,(\tau\,(x,\ z)))\,\&\prec(\lambda_z \dot a\,(\tau\,(x,\ z)),\ \lambda_z \dot a\,(\tau\,(x',\ z)))],$$

и при помощи соответствующего явного определения может быть введен символ $\lim(\dot a)$, для которого будет выводима формула

$$\mathsf{N}_1(\dot a) \to \mathsf{N}(\lim(\dot a))\,\&\,\forall x \preccurlyeq(\lambda_z \dot a\,(\tau\,(x,\ z)),\ \lim(\dot a))\,\& \\ [\mathsf{N}(\dot b)\,\&\,\forall x \prec(\lambda_z \dot a\,(\tau\,(x,\ z)),\ \dot b) \to \preccurlyeq(\lim(\dot a),\ \dot b)].$$

Затем в качестве аналога арифметической формулы

$$a = 0 \vee \exists x\,(x' = a)$$

может быть выведена формула

$$((5)) \quad \mathsf{N}(\dot a) \to \dot a \simeq \dot 0 \vee \exists \dot x\,(\mathsf{N}(\dot x)\,\&\,\dot x^+ \simeq \dot a) \vee \exists \dot x\,(\mathsf{N}_1(\dot x)\,\&\,\lim(\dot x) \simeq \dot a).$$

И наконец, в рамках нашего формализма к явным определениям может быть сведен и метод трансфинитной рекурсии, который в теории первого и второго числового класса соответст-

[1]) Используемая здесь функция $\mathrm{sgn}(n)$ при помощи функции $\alpha(a,\ b)$ [определение ее см. на с. 554] может быть определена равенством

$$\mathrm{sgn}(n) = \alpha(n,\ 0).$$

вует методу примитивной рекурсии в арифметике. Сведение носит следующий характер. Если функционал $\mathfrak{a}$ не содержит переменных $\dot{a}$ и $\dot{c}$ и выводима формула $\mathsf{N}(\mathfrak{a})$ и если $\mathfrak{b}(\dot{a}, \dot{c})$ — функционал такой, что выводима формула

$$\mathsf{N}(\dot{a}) \& \mathsf{N}(\dot{c}) \to \mathsf{N}(\mathfrak{b}(\dot{a}, \dot{c})) \& \prec(\dot{c}, \mathfrak{b}(\dot{a}, \dot{c})),$$

причем $\mathfrak{b}(\dot{0}, \dot{0})$ не содержит переменных $\dot{a}$ и $\dot{c}$, то может быть указан такой функционал $\mathfrak{f}(\dot{a})$, что для него будут выводимы формулы

$$((6)) \quad \begin{cases} \mathsf{N}(\dot{a}) \to \mathsf{N}(\mathfrak{f}(\dot{a})) \& \forall \dot{x}\,(\dot{x} \simeq \dot{a} \to \mathfrak{f}(\dot{x}) \simeq \mathfrak{f}(\dot{a})), \\ \mathfrak{f}(\dot{0}) \simeq \mathfrak{a}, \\ \mathsf{N}(\dot{a}) \to (\mathfrak{f}(\dot{a}^+) \simeq \mathfrak{b}(\dot{a}, \mathfrak{f}(\dot{a})), \\ \mathsf{N}_1(\dot{c}) \to [\mathfrak{f}(\lim(\dot{c})) \simeq \lim(\lambda_x[\mathfrak{f}(\lambda_z \dot{c}(\tau(\tau_1(x), z)))(\tau_2(x))])]. \end{cases}$$

Наметим путь построения такого функционала. Сначала мы выводим формулу

$$\mathsf{N}_1(\dot{g}) \& \mathsf{N}(\dot{c}) \& \preccurlyeq(\dot{a}, \dot{c}) \to \exists \dot{x}\,[\mathsf{N}(\dot{x}) \& \exists \dot{z} \exists y\,(\dot{a} \simeq \dot{z} \& \mathrm{Sc}(\dot{z}, \dot{c}^+, y) \& \lambda_u \dot{g}(\tau(y, u)) \doteq \dot{x})].$$

Затем с помощью определения

$$\xi(\dot{g}, \dot{c}, \dot{a}) \doteq \varepsilon_{\dot{x}}[\mathsf{N}(\dot{x}) \& \exists \dot{z} \exists y\,(\dot{a} \simeq \dot{z} \& \mathrm{Sc}(\dot{z}, \dot{c}^+, y) \& \lambda_u \dot{g}(\tau(y, u)) \doteq \dot{x})]$$

вводим символ $\xi(\dot{g}, \dot{c}, \dot{a})$ и с помощью формул ((4)) и ((5)) выводим формулу

$$\begin{aligned} \mathsf{N}(\dot{c}) \to \exists \dot{v}\,\{&\mathsf{N}_1(\dot{v}) \& \xi(\dot{v}, \dot{c}, \dot{0}) \simeq \mathfrak{a} \& \\ &\forall \dot{u}\,(\mathsf{N}(\dot{u}) \& \prec(\dot{u}, \dot{c}) \to \xi(\dot{v}, \dot{c}, \dot{u}^+) \simeq \mathfrak{b}(\dot{u}, \xi(\dot{v}, \dot{c}, \dot{u}))) \& \\ &\forall \dot{u}\,[\mathsf{N}_1(\dot{u}) \& \preccurlyeq(\lim(\dot{u}), \dot{c}) \to \\ &\xi(\dot{v}, \dot{c}, \lim(\dot{u})) \simeq \lim(\lambda_x[\xi(\dot{v}, \dot{c}, \lambda_z \dot{u}(\tau(\tau_1(x), z)))(\tau_2(x))])]\}. \end{aligned}$$

Если теперь по заключению этой формулы, которое имеет вид

$$\exists \dot{v} \mathfrak{A}(\dot{v}, c);$$

построить выражение

$$\xi(\varepsilon_{\dot{v}} \mathfrak{A}(\dot{v}, \dot{a}), \dot{a}, \dot{a}),$$

то оно и окажется искомым функционалом $\mathfrak{f}(\dot{a})$, для которого можно будет вывести формулы ((6)).

Тем самым фундамент для построения теории чисел первого и второго числовых классов заложен.

Рассмотренный нами метод формального изложения этой теории соответствует канторовскому представлению о числах первого и второго числовых классов как о порядковых типах вполне упорядоченных множеств целых чисел. Теория эта может развиваться и независимым образом, в отрыве от такого представления, причем это можно делать, с одной стороны, аксиоматически, по аналогии с аксиоматической арифметикой, а с другой стороны, конструктивно, по аналогии с финитной арифметикой. При аксиоматическом построении этой теории рассмотренная нами формализация дает некоторый способ «сведения» этой теории к формализму анализа в том смысле, что если удастся доказать непротиворечивость формализма H, то будет установлена и непротиворечивость этого аксиоматического формализма.

§ 6. Модификации рассмотренного формализма. Исключение ε-символа

Формализм H основан на систематическом использовании ε-символа. Благодаря этому методу система аксиом и правил вывода формализма H оказывается относительно простой. Правда, вопрос о том, благоприятствует ли такая структура формализма H изучению его средствами теории доказательств, является достаточно спорным. Во всяком случае, с точки зрения аксиоматического подхода структура эта имеет определенные недостатки, так как она не позволяет четко отделять друг от друга различные содержащиеся в методах анализа предположения. И вообще, с точки зрения логической систематики более предпочтителен формализм, который обходится без использования ε-символа и ε-формул [1]).

Рассмотрим теперь формализм, который по своему устройству сходен с формализмом H, но более привычен с точки зрения систематики (в частности, он не содержит принципа выбора). Этот формализм, который мы будем называть формализмом K, описывается следующим образом:

Переменные в K такие же, как и в H. Первоначальными символами этого формализма являются: индивидный символ 0, штрих-символ, знак равенства, символы исчисления высказываний, кванторы с относящимися к ним (связанными) индивидными и функциональными переменными, ι-символ и λ-символ — оба с относящимися к ним (связанными) индивидными переменными.

Роль термов играют, во-первых, свободные индивидные переменные, символ 0 и любое выражение вида $\mathfrak{a}'$, где $\mathfrak{a}$ — терм. Всякая свободная функциональная переменная считается функционалом.

Термом будет считаться также всякое выражение вида $\mathfrak{a}(\mathfrak{b})$ или вида $(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})$, если $\mathfrak{a}$ — составное выражение, где $\mathfrak{a}$ — функцио-

[1]) См. рассуждение на с. 30—31.

нал, а $\mathfrak{b}$ — терм. Функционалом считается всякое выражение вида $\lambda_{\mathfrak{x}}\mathfrak{t}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{t}(\mathfrak{x})$ получается из терма $\mathfrak{t}(\mathfrak{c})$, содержащего свободную индивидную переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащего связанной индивидной переменной $\mathfrak{x}$, в результате замены $\mathfrak{c}$ посредством $\mathfrak{x}$.

Элементарными формулами считаются формульные переменные без аргументов, формульные переменные с аргументами, каждый из которых — либо терм, либо функционал, и, кроме того, равенства термов.

Формулами считаются выражения, которые либо являются элементарными формулами, либо получаются из элементарных формул при помощи связок исчисления высказываний и кванторов, причем построение формул при помощи кванторов производится следующим образом: если $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ — формула, содержащая свободную индивидную переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащая связанной индивидной переменной $\mathfrak{x}$, а $\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{c}})$ — формула, содержащая свободную функциональную переменную $\dot{\mathfrak{c}}$ и не содержащая связанной функциональной переменной $\dot{\mathfrak{x}}$, то формулами считаются также выражения

$$\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}),\ \exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}),\ \forall_{\dot{\mathfrak{x}}}\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{x}})\ \text{и}\ \exists_{\dot{\mathfrak{x}}}\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{x}}).$$

И, наконец, термами (ι-термами) мы будем считать также выражения вида $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, если выполнены условия применимости ι-правила, т. е. в случае выводимости относящихся к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ формул единственности

$$\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})\ \text{и}\ \forall_{\mathfrak{x}}\forall_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x})\,\&\,\mathfrak{A}(\mathfrak{y})\to\mathfrak{x}=\mathfrak{y})$$

(с какими-либо связанными индивидными переменными $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$).

В качестве исходных формул мы берем тождественно истинные формулы исчисления высказываний, формулы

$$\forall x A(x)\to A(a),\quad A(a)\to\exists x A(x),$$
$$\forall \dot{x} A(\dot{x})\to A(\dot{a}),\quad A(\dot{a})\to\exists \dot{x} A(\dot{x}),$$

аксиомы равенства (J_1) и (J_2), арифметические аксиомы (P_1) и (P_2) и аксиому индукции, т. е. аксиомы системы (Z), за исключением рекурсивных равенств для сложения и умножения [1]).

В качестве схем вывода мы используем схему заключения и схемы для кванторов

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}{\mathfrak{A}\to\forall_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})},\quad \frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{a}})}{\mathfrak{A}\to\forall_{\dot{\mathfrak{x}}}\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{x}})},\quad \frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{a})\to\mathfrak{A}}{\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{A}}\ \text{и}\ \frac{\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{a}})\to\mathfrak{A}}{\exists_{\dot{\mathfrak{x}}}\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{x}})\to\mathfrak{A}},$$

в которых всюду $\mathfrak{a}$ — свободная, а $\mathfrak{x}$ — связанная индивидная переменная, $\dot{\mathfrak{a}}$ — свободная, а $\dot{\mathfrak{x}}$ — связанная функциональная переменная, причем $\mathfrak{a}$ не входит ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$, $\dot{\mathfrak{a}}$ не входит ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{x}})$, $\mathfrak{x}$ не входит в $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ и $\dot{\mathfrak{x}}$ не входит в $\mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{a}})$.

[1]) См. Приложение I, с. 468.

К этим схемам мы добавляем, кроме того, схему формул

$$(\lambda_{\mathfrak{x}}\mathfrak{t}(\mathfrak{x}))(\mathfrak{c})=\mathfrak{t}(\mathfrak{c}),$$

в которой $\mathfrak{t}(\mathfrak{c})$ — терм, содержащий переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащий связанной переменной $\mathfrak{x}$, а также схему ι-правила

$$\frac{\exists_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}),\quad \forall_{\mathfrak{x}}\forall_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x})\,\&\,\mathfrak{A}(\mathfrak{y})\to\mathfrak{x}=\mathfrak{y})}{\mathfrak{A}(\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x}))},$$

в которой $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ означает выражение, отличающееся от $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ разве лишь именами связанных переменных, причем имена эти должны выбираться таким образом, чтобы выражение $\mathfrak{A}(\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x}))$ было формулой.

Правило подстановки вместо свободных индивидных и вместо формульных переменных такое же, как в формализме H. Для функциональных переменных здесь мы имеем лишь правило, разрешающее вместо свободных функциональных переменных подставлять функционалы.

Правило переименования действует применительно к связанным переменным, относящимся к кванторам, ι-символу и λ-символу. Производя подстановки и переименования мы будем следить за тем, чтобы не возникало коллизий между связанными переменными.

Правило введения новых символов при помощи явных определений отличается от соответствующего правила в формализме H только тем, что функциональные переменные, входящие в состав вновь вводимого символа в качестве его аргументов, должны фигурировать в нем сами по себе, т. е. без каких бы то ни было аргументов.

Тем самым формализм K описан. Сравнивая его с формализмом H с точки зрения возможности воспроизведения в нем дедуктивных построений, выполнимых в H, отметим следующие дедуктивные средства, имеющиеся в H и отсутствующие в K: ε-символы вместе с тремя ε-формулами для них; подстановку функций вместо свободных функциональных переменных и в явных определениях разрешение наличия аргументов у функциональных переменных, фигурирующих в качестве аргументов вновь вводимых символов (разумеется, при условии, что функциональная переменная, о которой идет речь, нигде в правой части определения не фигурирует сама по себе).

Что касается последних двух имеющихся в H возможностей, то они компенсируются наличием в K схемы для λ-символа. Действительно, вместо того чтобы перейти от формулы $\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}_1),\ldots$

$\ldots, \dot{c}(a_r))$ к формуле $\mathfrak{A}(t(a_1), \ldots, t(a_r))$ путем подстановки вместо именной формы $\dot{c}(a)$ соответствующей функции $t(a)$, мы можем в K подставить вместо $\dot{c}$ функционал $\lambda_{\dot{x}} t(\dot{x})$ и из формулы

$$\mathfrak{A}((\lambda_{\dot{x}} t(\dot{x}))(a_1), \ldots, (\lambda_{\dot{x}} t(\dot{x}))(a_r))$$

с помощью схемы для λ-символа и аксиомы равенства (J_2) получить формулу $\mathfrak{A}(t(a_1), \ldots, t(a_r))$. А упоминавшаяся выше свобода в явных определениях формализма H проявляется, как мы знаем, только при подстановках функций.

Пусть, далее, $\mathfrak{A}(\dot{c})$ — любая формула, для которой в K выводима формула

$$\exists \dot{x} \forall \dot{y} (\forall \delta (\dot{x}(\delta) = \dot{y}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{y})).$$

Тогда образование термов вида $\varepsilon_{\dot{x}} \mathfrak{A}(\dot{x})$ и использование третьей ε-формулы с помощью подстановки формулы $\mathfrak{A}(\dot{c})$ вместо формульной переменной $A(\dot{c})$ в формализме K может быть заменено введением получающегося по ι-правилу терма

$$\iota_u \exists \dot{x} (\mathfrak{A}(\dot{x}) \& \dot{x}(a) = u)$$

(с какой-либо не входящей в $\mathfrak{A}(c)$ свободной индивидной переменной a) и применением схемы ι-правила и схемы для λ-символа.

Действительно, если выражение $\exists \dot{x} (\mathfrak{A}(\dot{x}) \& \dot{x}(a) = u)$ сокращенно обозначить через $\mathfrak{B}(u, a)$, то с помощью формулы, выводимость которой предполагается, могут быть выведены формулы единственности

$$\exists u \mathfrak{B}(u, a) \quad \text{и} \quad \forall u \forall v (\mathfrak{B}(u, a) \& \mathfrak{B}(v, a) \to u = v)$$

(с подходящей связанной переменной v). Поэтому выражение $\iota_u \mathfrak{B}(u, a)$ может быть введено в качестве терма, и по схеме ι-правила мы получим некоторую формулу $\mathfrak{B}(e(a), a)$, в которой $e(a)$ представляет собой терм, отличающийся от $\iota_u \mathfrak{B}(u, a)$ разве лишь обозначениями связанных переменных. Эта формула $\mathfrak{B}(e(a), a)$ имеет вид

$$\exists \dot{x} (\mathfrak{A}(\dot{x}) \& \dot{x}(a) = e(a)).$$

Пусть теперь v — какая-либо связанная переменная, не входящая в $e(a)$, и пусть $\dot{b}$ и $\dot{c}$ — свободные функциональные переменные, не входящие в $\mathfrak{A}(\dot{x})$. Тогда может быть выведено равенство

$$(\lambda_v e(v))(a) = e(a),$$

а потому и формула

$$\exists \dot{x} (\mathfrak{A}(\dot{x}) \& \dot{x}(a) = (\lambda_v e(v))(a)).$$

Из этой формулы, взятой в сочетании с без труда выводимой в K формулой

$$\forall \dot{y} (\forall \delta (\dot{c}(\delta) = \dot{y}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{y})) \& \mathfrak{A}(\dot{b}) \& \dot{b}(a) = (\lambda_v e(v))(a) \to \dot{c}(a) = (\lambda_v e(a))(a),$$

мы получаем формулу

$$\forall \dot{y} (\forall \delta (\dot{c}(\delta) = \dot{y}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{y})) \to \dot{c}(a) = (\lambda_v e(v))(a),$$

а затем

$$\forall \dot{y} (\forall \delta (\dot{c}(\delta) = \dot{y}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{y})) \to \forall \delta (\dot{c}(\delta) = (\lambda_v e(v))(\delta)),$$

а также формулу

$$\forall \dot{y} (\forall \delta (\dot{c}(\delta) = \dot{y}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{y})) \to \mathfrak{A}(\lambda_v e(v)).$$

Но эта формула вместе с формулой, выводимость которой предполагается, дает нам формулу

$$\mathfrak{A}(\lambda_v e(v)).$$

Таким образом, роль, которую в формализме H по отношению к рассматриваемой формуле $\mathfrak{A}(\dot{c})$ играет функционал $\varepsilon_{\dot{x}} \mathfrak{A}(\dot{x})$, в формализме K играет функционал $\lambda_v e(v)$.

Этим методом использованное в H явное определение для $a+b$ в формализме K может быть заменено определением

$$a+b = \iota_u \exists \dot{x} \{\dot{x}(0) = a \& \forall z (\dot{x}(z') = (\dot{x}(z))') \& (\dot{x}(b) = u)\}$$

с предварительным введением по ι-правилу ι-терма, стоящего в правой части определяющего равенства. При этом мы должны воспользоваться аксиомой индукции, аксиомами равенства и схемой для λ-символа. В частности, первая формула единственности получается индукцией по a, а вторая — индукцией по b.

Аналогично, умножение может быть явно определено с помощью равенства

$$a \cdot b = \iota_u \exists \dot{x} \{\dot{x}(0) = 0 \& \forall z (\dot{x}(z') = \dot{x}(z) + a) \& \dot{x}(b) = u\},$$

причем формула

$$\exists \dot{x} \forall z (\dot{x}(z) = 0),$$

которая используется для получения первой из двух необходимых для применения ι-правила формул, может быть выведена с помощью формулы

$$\iota_z (n = n \& z = 0) = 0.$$

Вслед за определением $a+b$ мы можем, как и в H, ввести определение для $\leqslant$, и тогда можно будет сформулировать явное определение для μ-символа, из которого получатся формулы (μ_1),

(μ_2) и (μ_3)[1]. Теперь μ-символ может играть роль, которую в формализме H играет ε-символ, так как при замене ε-символа μ-символом формулы, оказывающиеся на месте первых двух ε-формул, могут быть выведены из формул (μ_1) и (μ_2).

Теперь, аналогично тому, как это делается в H, могут быть введены функции $\tau(a, b)$, $\tau_1(n)$ и $\tau_2(n)$, а определение функции, универсальной для рекурсивных функций, может быть дано следующим образом[2]):

$$\rho(a, \dot{b}, n) = \iota_u \exists \dot{x} \{\dot{x}(0) = a \,\&\, \forall z [z < n \to \dot{x}(z') = \dot{b}(\tau(z, \dot{x}(z)))] \,\&\, \dot{x}(n) = u\}.$$

Из этого определения выводятся равенства

$$\rho(a, \dot{b}, 0) = a \quad \text{и} \quad \rho(a, \dot{b}, n') = \dot{b}(\tau(n, \rho(a, \dot{b}, n))).$$

Изображение рекурсивных функций при помощи этой универсальной функции производится с использованием λ-символа. Например, функция $\delta(n)$ изображается в виде

$$\delta(n) = \rho(0, \lambda_x \tau_1(x), n),$$

а функция $\binom{n}{2}$ в виде

$$\binom{n}{2} = \rho(0, \lambda_x \rho(\tau_1(x), \lambda_z(\tau_2(z))', \tau_2(x)), n).$$

Метод замены функционала $\varepsilon_{\dot{\xi}} \mathfrak{A}(\dot{\xi})$ соответствующим ему функционалом

$$\lambda_v \iota_u \exists \dot{\xi} (\mathfrak{A}(\dot{\xi}) \,\&\, \dot{\xi}(v) = u),$$

применимый, как мы знаем, в случае выводимости формулы

$$\exists \dot{\xi} \forall \dot{\eta} (\forall_\delta (\dot{\xi}(\delta) = \dot{\eta}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{\eta})),$$

может быть распространен и на некоторые более общие случаи, часто встречающиеся в дедуктивной практике. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ — свободные индивидные или функциональные переменные, и пусть формула

$$\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_r) \to \exists \dot{\xi} \forall \dot{\eta} (\forall_\delta (\dot{\xi}(\delta) = \dot{\eta}(\delta)) \sim \mathfrak{A}(\dot{\eta}, a_1, \ldots, a_r))$$

выводима. Если мы обозначим посредством $\mathfrak{A}^*(\dot{c}, a_1, \ldots, a_r)$ формулу

$$(\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_r) \,\&\, \mathfrak{A}(\dot{c}, a_1, \ldots, a_r)) \vee (\neg \mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_r) \,\&\, \forall_\delta (\dot{c}(\delta) = 0))$$

[1]) См. Приложение I, с. 469.

[2]) Обращаем внимание на то, что ввиду соглашений, принятых нами относительно явных определений в формализме K, запись $\rho_x(a, \dot{b}(x), n)$ недопустима.

(где $\dot{c}$ представляет собой какую-либо не входящую в $\mathfrak{A}(\dot{\eta}, a_1, \ldots, a_r)$ свободную функциональную переменную), то будут выводимы формулы

$$\exists \dot{\xi} \forall \dot{\eta} (\forall_\delta (\dot{\xi}(\delta) = \dot{\eta}(\delta)) \sim \mathfrak{A}^*(\dot{\eta}, a_1, \ldots, a_r))$$

и

$$\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_r) \to (\mathfrak{A}^*(\dot{c}, a_1, \ldots, a_r) \sim \mathfrak{A}(\dot{c}, a_1, \ldots, a_r)).$$

Если теперь свободная индивидная переменная a и связанная индивидная переменная u не входят в $\mathfrak{A}(\dot{\eta}, a_1, \ldots, a_r)$, то выражение

$$\iota_u \exists \dot{\eta} (\mathfrak{A}^*(\dot{\eta}, a_1, \ldots, a_r) \,\&\, \dot{\eta}(a) = u)$$

может быть взято в качестве терма. Пусть $\mathfrak{e}(a)$ — этот терм или получающийся из него в результате переименования каких-либо связанных переменных терм, не содержащий связанных переменных, входящих в $\mathfrak{A}^*(\dot{c}, a_1, \ldots, a_r)$, и пусть v — какая-либо связанная переменная, не встречающаяся ни в этом терме, ни в $\mathfrak{A}^*(\dot{\eta}, a_1, \ldots, a_r)$. Тогда указанным ранее методом можно будет вывести формулу

$$\mathfrak{A}^*(\lambda_v \mathfrak{e}(v), a_1, \ldots, a_r),$$

а потому и формулу

$$\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_r) \to \mathfrak{A}(\lambda_v \mathfrak{e}(v), a_1, \ldots, a_r).$$

Этим способом можно, например, заменить в формализме K определение функционала $\dot{a} : \dot{b}$, которое в H записывается в виде[1])

$$\dot{a} : \dot{b} \doteq \varepsilon_{\dot{x}} (\Theta^*(\dot{x}) \,\&\, \dot{b} \otimes \dot{x} \doteq \dot{a}),$$

— после предварительного введения символов $\doteq$, $\dot{\neq}$, $\dot{0}$, Θ^* и $\otimes$ — определением

$$\dot{a} : \dot{b} \doteq \lambda_z \iota_x \exists \dot{y} \{[(\Theta^*(\dot{a}) \,\&\, \Theta^*(\dot{b}) \,\&\, \dot{b} \dot{\neq} \dot{0} \,\&\, \dot{b} \otimes \dot{y} \doteq \dot{a}) \vee ((\neg \Theta^*(\dot{a}) \vee \neg \Theta^*(\dot{b}) \vee \dot{b} \doteq \dot{0}) \,\&\, \dot{y} \doteq \dot{0})] \,\&\, \dot{y}(z) = x\},$$

на основе которого может быть выведена формула

$$\Theta^*(\dot{a}) \,\&\, \Theta^*(\dot{b}) \,\&\, \dot{b} \dot{\neq} \dot{0} \to \Theta^*(\dot{a} : \dot{b}) \,\&\, \dot{b} \otimes (\dot{a} : \dot{b}) \doteq \dot{a}.$$

С помощью этого метода может быть заменено соответствующим определением в K и явное определение функционала $\xi(\dot{g}, \dot{c}, \dot{a})$,

[1]) См. с. 570.

использованное [1]) при формализации в H трансфинитной рекурсии. Но этого уже не удается сделать для следующего за ним определения функционала $\varepsilon_{\dot v}\mathfrak{A}(\dot v, \dot a)$, с помощью которого строится функционал $\mathfrak{f}(\dot a)$.

И все же при формализации в K теории первого и второго числовых классов можно воспользоваться тем обстоятельством, что функции, определенные трансфинитной рекурсией, представимы в K аналогично тому, как рекурсивные функции арифметики были представимы в формализме (Z): вместо функционала $\mathfrak{f}(\dot a)$, для которого выводимы формулы ((6)), в K можно построить формулу $\mathfrak{S}(\dot a, \dot c)$, которая формализует отношение, изображаемое в H формулой $\mathfrak{f}(\dot a) \simeq \dot c$.

Наконец, если внимательно посмотреть, в какой степени указанные методы позволяют повторить в K выполненное средствами формализма H дедуктивное построение анализа и теории полных упорядочений натурального ряда, то оказывается, что все это удается проделать почти в полном объеме, за исключением только тех, представляющих собой применение принципа выбора способов умозаключения, которые формализуются формулой (7a) или (7b).

Взяв формализм K за основу, мы можем изобразить и этот способ умозаключения, если добавим в качестве аксиомы формулу

$$\forall x \exists \dot y\, A(x, \dot y) \to \exists \dot y \forall x A(x, \lambda_z \dot y(\tau(x, z))),$$

при этом, чтобы в данной аксиоме не нужно было ссылаться на определение функции $\tau(a, b)$, надо будет взять функциональные знаки τ, τ_1 и τ_2 в качестве основных знаков, а формулы

$$\tau(\tau_1(n), \tau_2(n)) = n, \quad \tau_1(\tau(a, b)) = a, \quad \tau_2(\tau(a, b)) = b$$

в качестве аксиом.

Исследование непротиворечивости естественно начать с самого формализма K. При этом могут быть также произведены следующие редукции: может быть опущено правило введения явных определений, так как любой введенный явным определением символ в K, равно как и в H, устраним из вывода любой формулы, не содержащей этого символа, а значит, и из вывода любой нумерической формулы.

Затем, как и в ранее рассмотренных формализмах, в формализме K, ввиду осуществимости возвратного переноса подстановок в исходные формулы, имеется *возможность исключить* с помощью схем формул *формульные переменные* и сделать ненужными правила подстановки. Тогда, в частности, на месте исходных формул

[1]) См. с. 576.

для кванторов появятся схемы формул

$$\forall \mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t}), \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to \exists \mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}),$$
$$\forall \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{x}}) \to \mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{f}}), \quad \mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{f}}) \to \exists \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\dot{\mathfrak{x}}),$$

причем в первых двух схемах вместо $\mathfrak{x}$ надо будет брать какую-нибудь связанную индивидную переменную, а вместо $\mathfrak{t}$ — какой-нибудь терм, а в следующих двух схемах вместо $\dot{\mathfrak{x}}$ — какую-нибудь связанную функциональную переменную, а вместо $\dot{\mathfrak{f}}$ — какой-нибудь функционал. При этом теряется исключительный характер переменных a и x и $\dot a$ и $\dot x$ в схемах для кванторов.

Правила подстановки вместо свободных индивидных и функциональных переменных, равно как и правило переименования связанных переменных, становятся производными правилами.

Кроме этой, возможной редукции формализма K, могут быть произведены и другие его модификации. Так, например, можно устранить связанное с ι-правилом усложнение понятия терма, условившись, что любое выражение вида $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ считается термом всякий раз, когда $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ — формула, содержащая свободную индивидную переменную $\mathfrak{c}$ и не содержащая связанной индивидной переменной $\mathfrak{x}$, и, кроме того, взяв в качестве аксиомы формулу [1])

$$\exists x A(x) \,\&\, \forall x \forall y (A(x) \,\&\, A(y) \to x = y) \to A(\iota_x A(x)).$$

Схема ι-правила в этом случае оказывается производной.

Разумеется, в этом случае не всегда можно будет интерпретировать ι-символ как формализацию понятия «тот, который». Но во всяком случае в результате этой модификации формализма K никакая формула, не содержащая вхождений ι-символа, не станет выводимой, если она раньше не была выводима в K. В самом деле, это следует из того, что — как нетрудно сообразить — любая выводимая в модифицированном формализме формула после замены каждого выражения вида $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ соответствующим выражением $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ переходит в формулу, выводимую в формализме K.

Что касается возможности устранения ι-символов, то, вероятно, в формализме K она отсутствует. Действительно, в K с помощью выводимых формул

$$\forall x \exists y A(x, y) \to \forall x A(x, \mu_y A(x, y))$$

и

$$\forall x A(x, \mu_y A(x, y)) \to \forall x A(x, \{\lambda_z \mu_y A(z, y)\}(x))$$

[1]) Чтобы иметь возможность применять эту формулу, как и в случае ε-формул, нужно условиться, что в целях избежания коллизий между связанными переменными подстановка вместо формульной переменной производится в сочетании с необходимыми переименованиями связанных переменных.

можно вывести формулу

$$\forall x \exists y A(x, y) \to \exists \dot{y} \forall x A(x, \dot{y}(x)).$$

При этом используется μ-символ, который, как мы знаем, вводится с помощью ι-правила. Весьма правдоподобно, что если отказаться от ι-правила, то только что упомянутая формула станет невыводимой. Может быть поставлен вопрос о том, не становится ли устранимым ι-правило, если добавить эту формулу к числу исходных формул формализма K, т. е. не является ли оно излишним при выводе таких формул, которые не содержат ни одного символа, введенного с помощью ι-правила.

§ 7. Использование связанных формульных переменных

Мы разберем здесь еще один вариант модификации нашего формализма: выясняется, что если ввести связанные формульные переменные и относящиеся к ним кванторы, то функциональные переменные и понятие функционала оказываются ненужными. При этом можно обойтись и без использования ι-символа и λ-символа, если не требовать, чтобы сами объекты рассмотрения арифметики и анализа (числа и функции) были непосредственно представлены в формализме, а удовлетвориться лишь каким-либо изображением высказываний этих теорий.

На основе этих соображений устроен, например, следующий формализм L:

В L имеются следующие сорта переменных: свободные и связанные индивидные переменные и свободные и связанные формульные переменные, причем *формульные переменные имеются с одним, двумя или тремя аргументами*. Формульные переменные, как и раньше, считаются различными, если они различны как буквы или отличаются друг от друга числом аргументных мест. У формульных переменных свободные и связанные переменные различаются так же, как у индивидных; так, например, буквы U, V, W, X, Y, Z используются только для связанных формульных переменных. У квантора, относящегося к формульной переменной, число аргументов этой переменной будет указываться в виде верхнего индекса, заключенного в скобки.

Первоначальными символами нашего формализма являются: индивидный символ 0, штрих-символ, знак равенства, символы исчисления высказываний и кванторы с относящимися к ним индивидными или формульными переменными.

Термами считаются свободные индивидные переменные, символ 0 и любое выражение вида $\mathfrak{a}'$, где $\mathfrak{a}$ — терм.

Элементарными формулами считаются формульные переменные с термами в качестве аргументов и равенства между термами.

Формулами считаются выражения, либо являющиеся элементарными формулами, либо построенные из них при помощи связок исчисления высказываний и кванторов.

Построение формул с помощью связывания формульных переменных кванторами происходит аналогично построению формул с помощью связывания индивидных переменных. Пусть, например, $\mathfrak{C}_{x,y}(A(x, y))$ — формула, содержащая свободную двуместную формульную переменную A и не содержащая связанной двуместной формульной переменной Z. Тогда выражения

$$\forall Z^{(2)} \mathfrak{C}(Z(x, y)) \quad \text{и} \quad \exists Z^{(2)} \mathfrak{C}(Z(x, y))$$

будут считаться формулами.

Замечание. В записи $\mathfrak{C}_{x,y}(A(x, y))$ переменные x и y служат только для выделения аргументных мест формульной переменной A. Вовсе не имеется в виду, что переменная A в рассматриваемой формуле $\mathfrak{C}_{x,y}(A(x, y))$ всегда, или даже хотя бы однажды, встречается прямо с аргументами x и y. Чтобы подчеркнуть такой способ использования переменных x и y, мы и выписываем их в качестве индексов у буквы $\mathfrak{C}$.

Теперь запас термов и формул можно еще расширить путем добавления явных определений.

В качестве исходных формул мы имеем:

1) все формулы, получающиеся из тождественно истинных формул исчисления высказываний в результате замены каждой входящей в нее формульной переменной (всюду, где она встречается) одной и той же формулой;

2) формулы

$$\forall x A(x) \to A(a) \quad \text{и} \quad A(a) \to \exists x A(x),$$

а также формулы, построенные по любой из схем

$$\forall X^{(1)} \mathfrak{A}_z(X(z)) \to \mathfrak{A}_z(A(z)) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_z(A(z)) \to \exists X^{(1)} \mathfrak{A}_z(A(z))$$

и по любой из аналогичных схем для двуместных и трехместных формульных переменных;

3) определение равенства по Расселу и Уайтхеду:

$$a = b \sim \forall X^{(1)}(X(a) \to X(b));$$

4) аксиомы Пеано:

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \to a = b,$$
$$A(0) \,\&\, \forall x (A(x) \to A(x')) \to A(a).$$

В качестве схем мы имеем схему заключения и схемы для кванторов, структура которых не будет зависеть от типов переменных, связываемых этими кванторами. Так, например, кванторные схемы для одноместных формульных переменных будут

иметь вид

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_z(A(z))}{\mathfrak{A}\to\forall X^{(1)}\mathfrak{B}_z(X(z))} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{B}_z(A(z))\to\mathfrak{A}}{\exists X^{(1)}\mathfrak{B}(X(z))\to\mathfrak{A}},$$

причем одноместная формульная переменная A здесь не должна входить ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{B}_z(X(z))$, а одноместная формульная переменная X не должна входить в $\mathfrak{B}_z(A(z))$.

Правило подстановки вместо свободных переменных здесь совершенно такое же, как в формализме (Z). Для связанных переменных действует правило переименования, причем, естественно, формульная переменная всегда переименовывается в формульную же переменную с тем же самым числом аргументов.

При подстановках и переименованиях всякий раз надо следить за тем, чтобы не возникало коллизий между связанными переменными.

Правило добавления явных определений аналогично соответствующему правилу в формализме H, с тем, однако, упрощением, что в данном случае отпадают все соглашения, относящиеся к функционалам и функциональным переменным.

Дадим ряд кратких указаний относительно применения этого формализма для формализации математических теорий.

Из аксиомы-определения для формулы $a=b$ могут быть выведены формулы

$$a=a \quad \text{и} \quad a=b\to(A(a)\to A(b)).$$

Схема индукции получается из аксиомы индукции в качестве производного правила. Формулы

$$a\neq 0\to\exists x(x'=a) \quad \text{и} \quad a'\neq a$$

получаются индукцией по a.

Применяя схему для квантора существования $\exists X^{(1)}$, мы, в частности, получим формулу

$$\forall z(A(z)\sim\mathfrak{A}(z))\to\exists X^{(1)}\forall z(X(z)\sim\mathfrak{A}(z)).$$

Если в нее подставить вместо именной формы $A(c)$ формулу $\mathfrak{A}(c)$, то посылка перейдет в выводимую формулу

$$\forall z(\mathfrak{A}(z)\sim\mathfrak{A}(z)),$$

в то время как заключение не изменится. Тогда по схеме заключения мы получим формулу

$$\exists X^{(1)}\forall z(X(z)\sim\mathfrak{A}(z)).$$

В большинстве формальных систем, в которых имеются связанные предикатные переменные, но нет нашего правила подстановки,

эта схема формул берется в качестве схемы аксиом (аксиома свертывания).

Для двуместных предикатов тем же самым способом получается аналогичная схема.

Символы $\leqslant$ и $<$ могут быть введены определениями

$$a\leqslant b\sim\forall X^{(1)}(X(a)\,\&\,\forall z(X(z)\to X(z'))\to X(b))$$

и

$$a<b\sim a'\leqslant b.$$

Сначала из них могут быть получены формулы

$$a\leqslant a,\quad a\leqslant a',\quad a\leqslant b\,\&\,b\leqslant c\to a\leqslant c,$$
$$a<a',\quad a<b\,\&\,b<c\to a<c.$$

Непосредственное применение аксиомы индукции дает

$$0\leqslant a.$$

Затем можно получить формулы

$$a\leqslant b\to a'\leqslant b',\quad a'\leqslant b'\to a\leqslant b,\quad \neg(0'\leqslant 0)$$

и затем с помощью схемы индукции

$$\neg(a'\leqslant a),$$

а значит, и формулы

$$\neg(a<a),\quad a\leqslant b\to\neg(b<a).$$

Далее, пользуясь определением символа $\leqslant$, мы получаем формулу

$$a\leqslant b\to a'\leqslant b\vee a=b.$$

Отсюда, с одной стороны, с помощью формулы

$$a'\leqslant b'\to a\leqslant b$$

получается формула

$$a\leqslant b'\to a\leqslant b\vee a=b',$$

а с другой стороны, индукцией по a получается формула

$$a\leqslant b\vee b<a,$$

а значит, и формула

$$\neg(b<a)\to a\leqslant b.$$

Рекурсивное определение может быть формализовано в L с помощью некоторого универсального предиката, соответствующего универсальной функции для рекурсивных функций в формализмах H и K. Пусть функции $\mathfrak{f}(n)$, которая определяется

схемой примитивной рекурсии [1])

$$\mathfrak{f}(0) = a, \quad \mathfrak{f}(n') = \mathfrak{b}(n, \mathfrak{f}(n)),$$

соответствует (в смысле представимости функций предикатами [2])) некоторый двуместный предикат $C(n, k)$, а функции $\mathfrak{b}(n, m)$ — некоторый трехместный предикат $B(n, m, l)$. При помощи этих предикатов условия рекурсии выражаются формулой

$$C(0, a) \& \forall u \forall v \forall w (C(u, v) \& B(u, v, w) \to C(u', w)),$$

которую мы сокращенно обозначим через $\mathfrak{P}(C, a, B)$.

Чтобы предикат $B(n, m, l)$ соответствовал функциональному отношению $\mathfrak{b}(n, m) = l$, должны выполняться формулы единственности [3]) по третьему аргументу, т. е. должны иметь место формулы

$$\forall x \forall y \exists z B(x, y, z)$$

и

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (B(x, y, u) \& B(x, y, v) \to u = v),$$

или, вместо последней из них, равносильная ей формула

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (B(x, y, u) \to u = z).$$

Явное определение предиката

$$\mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), n, k),$$

универсального для рекурсивных предикатов, теперь запишется в виде

$$\mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), n, k) \sim \forall Z^{(2)} \{Z(0, a) \& \forall u \forall v \forall w (Z(u, v) \& B(u, v, w) \to Z(u', w)) \to Z(n, k)\},$$

или, сокращенно

$$\mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), n, k) \sim \forall Z^{(2)} (\mathfrak{P}(Z, a, B) \to Z(n, k)).$$

Из этого определения мы сначала получим формулы

$$[1] \quad \begin{cases} \mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), 0, a), \\ \mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), n, k) \& B(n, k, l) \to \mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), n', l), \end{cases}$$

а из них индукцией по n формулу

$$[2] \quad \forall x \forall y \exists z B(x, y, z) \to \exists u \, \mathrm{Rc}_{xyz}(a, B(x, y, z), n, u).$$

[1]) См. т. I, с. 500.
[2]) См. т. I, с. 538—541.
[3]) См. Приложение I, с. 464, а также т. I, с. 467.

Затем индукцией по n мы получим формулу [1])

$$\forall x \forall y \exists z (B(x, y, u) \to u = z) \to \exists Z^{(2)} (\mathfrak{P}(Z, a, B) \& \exists x \forall v (Z(n, v) \to v = x)).$$

Действительно, положив по определению

$$Z_0(m, l) \sim (m = 0 \to l = a),$$

мы получим

$$\mathfrak{P}(Z_0, a, B) \& \forall v (Z_0(0, v) \to v = a),$$

и, значит, если заключение формулы, которую мы выводим, записать в виде

$$\exists Z^{(2)} \mathfrak{Q}_{uv}(Z(u, v), a, B, n),$$

то мы сначала получим формулу

$$\mathfrak{Q}_{uv}(Z_0(u, v, B, 0).$$

Затем, если через $\mathfrak{S}(A, m, l, n)$ обозначить формулу

$$A(m, l) \& (m = n' \to \forall z \forall w (A(n, z) \& B(n, z, w) \to l = w)),$$

то у нас получится формула

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (B(x, y, u) \to u = z) \to [\mathfrak{Q}_{uv}(A(u, v), a, B, n) \to \mathfrak{Q}_{uv}(\mathfrak{S}(A, u, v, n), a, B, n')].$$

Из полученных таким образом формул

$$\mathfrak{Q}_{uv}(Z_0(u, v), a, B, 0)$$

и

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (B(x, y, u) \to u = z) \to [\exists Z^{(2)} \mathfrak{Q}_{uv}(Z, a, B, n) \to \exists Z^{(2)} \mathfrak{Q}_{uv}(Z, a, B, n')]$$

при помощи полной индукции мы получим требующуюся нам

[1]) В первом издании нашей книги вместо последнего члена заключения $\exists x \forall v (Z(n, v) \to v = x)$ этой формулы стояло выражение

$$\forall u (u \leqslant n \to \exists x \forall v (Z(u, v) \to v = x)).$$

Тем самым этот вывод — подобно дедекиндову доказательству выполнимости рекурсивных равенств (см. т. I, с. 500) — оказывался связанным с порядковым отношением $\leqslant$. То, что здесь можно обойтись без привлечения этого отношения, было показано П. Лоренценом в его работе: Lorenzen P. Die Definition durch vollständige Induktion. — Monatsh. Math. Phys., 1938/39, 47, S. 356—358. Приведенный выше вывод в точности соответствует рассуждению Лоренцена. — Другое, тоже не использующее отношения порядка доказательство выполнимости рекурсивных равенств было дано Л. Кальмаром. См. его работу: Kalmár L. On the possibility of definition by recursion. — Acta litt. scient. Reg. Univ. Hungaricae..., Sectio scient. math., 1940, 9, № 4, p. 227—232.

формулу

$$\forall x\forall y\exists z\forall u\,(B\,(x,\ y,\ u)\to u=z)\to\exists Z^{(2)}\Omega_{uv}\,(Z,\ a,\ B,\ n).$$

Из нее мы без труда получим формулу

[3] $\forall x\forall y\forall u\forall v\,(B\,(x,\ y,\ u)\,\&$

$$B\,(x,\ y,\ v)\to u=v)\to \mathrm{Rc}_{xyz}\,(a,\ B\,(x,\ y,\ z),\ n,\ k)\,\&$$

$$\mathrm{Rc}_{xyz}\,(a,\ B\,(x,\ y,\ z),\ n,\ l)\to k=l).$$

Формулы [2] и [3] изображают тот факт, что определенный нами предикат Rc, универсальный для рекурсивных предикатов, каждому числу n однозначным образом сопоставляет некоторое число k — в предположении, что в качестве $B\,(l,\ m,\ r)$ взята формула, удовлетворяющая формулам единственности по третьему аргументу, — а формулы [1] выражают тот факт, что при этом выполняются условия рекурсии, определенные аргументами a и B.

С помощью символа $\mathrm{Rc}_{xyz}\,(a,\ B\,(x,\ y,\ z),\ n,\ k)$, производя соответствующие подстановки, мы получим формулы для представления рекурсивных функций; именно, для любой r-местной рекурсивной функции $\mathfrak{f}\,(n_1,\ \ldots,\ n_\mathfrak{r})$ у нас получится некоторая формула, представляющая равенство $\mathfrak{f}\,(n_1,\ \ldots,\ n_\mathfrak{r})=k$.

Так, например, для функции $a+b$ представляющую ее формулу $\mathrm{Ad}\,(a,\ b,\ c)$ можно получить при помощи определения

$$\mathrm{Ad}\,(a,\ b,\ c)\sim \mathrm{Rc}_{xyz}\,(a,\ x=x\,\&\,y'=z,\ b,\ c),$$

из которого получаются формулы

$$\mathrm{Ad}\,(a,\ 0,\ a),\quad \mathrm{Ad}\,(a,\ b,\ c)\to\mathrm{Ad}\,(a,\ b',\ c'),$$

$$\mathrm{Ad}\,(a,\ b,\ k)\,\&\,\mathrm{Ad}\,(a,\ b,\ l)\to k=l.$$

Для умножения $a\cdot b$ представляющая формула $\mathrm{Mp}\,(a,\ b,\ c)$ получается при помощи определения

$$\mathrm{Mp}\,(a,\ b,\ c)\sim \mathrm{Rc}_{xyz}\,(0,\ x=x\,\&\,\mathrm{Ad}\,(y,\ a,\ z),\ b,\ c).$$

Формула, представляющая функцию $\binom{n}{2}$, дается выражением

$$\mathrm{Rc}_{xyz}\,(0,\ \mathrm{Ad}\,(x,\ y,\ z),\ n,\ k).$$

Поэтому для функции[1]) $\tau\,(a,\ b)$ представляющая ее формула $\mathsf{T}\,(a,\ b,\ c)$ получается при помощи определения

$$\mathsf{T}\,(a,\ b,\ c)\sim\exists u\exists v\,(\mathrm{Ad}\,(a,\ b,\ u)\,\&$$

$$\mathrm{Rc}_{xyz}\,(0,\ \mathrm{Ad}\,(x,\ y,\ z),\ u',\ v)\,\&\,\mathrm{Ad}\,(v,\ a,\ c)).$$

[1]) $\tau\,(a,\ b)=\binom{a+b+1}{2}+a$. См. с. 553, а также т. I, с. 397.

Из этого определения выводятся формулы

$$\exists x\mathsf{T}\,(a,\ b,\ x),\ \exists x\exists y\mathsf{T}\,(x,\ y,\ c),$$

$$\mathsf{T}\,(a,\ b,\ c)\,\&\,\mathsf{T}\,(a,\ b,\ d)\to c=d,$$

$$\mathsf{T}\,(a,\ b,\ k)\,\&\,\mathsf{T}\,(c,\ d,\ k)\to a=c\,\&\,b=d.$$

Теперь мы перейдем к *теории положительных действительных чисел*. Для изображения положительных действительных чисел целесообразно воспользоваться сечениями. Такое изображение может быть формализовано с помощью определения

$$\Theta_{xy}\,(A\,(x,\ y))\sim\forall x\forall y\,(A\,(x,\ y)\to x\neq 0\,\&\,y\neq 0)\,\&$$

$$\exists x\exists y A\,(x,\ y)\,\&\,\exists x\exists y\,(x\neq 0\,\&\,y=0\,\&\,\neg A\,(x,\ y))\,\&$$

$$\forall x\forall y\forall u\forall v\,(x\neq 0\,\&\,\forall z\forall w\,(\mathrm{Mp}\,(x,\ v,\ z)\,\&$$

$$\mathrm{Mp}\,(y,\ u,\ w)\to z\leqslant w\,\&\,A\,(u,\ v)\to A\,(x,\ y))\,\&$$

$$\forall x\forall y\,(A\,(x,\ y)\to\exists u\exists v\exists z\exists w\,(\mathrm{Mp}\,(x,\ v,\ z)\,\&$$

$$\mathrm{Mp}\,(y,\ u,\ w)\,\&\,z<w\,\&\,A\,(u,\ v))),$$

которое здесь играет роль определения символа $\Theta\,(\dot{a})$ в формализмах H и K. Отношение порядка для таких чисел в данном случае формализуется при помощи определения

$$\leqslant_{xyuv}\,(A\,(x,\ y),\ B\,(u,\ v))\sim\forall x\forall y\,(A\,(x,\ y)\to B\,(x,\ y)).$$

Арифметические действия над положительными действительными числами могут быть изображены предикатными символами вида

$$\mathfrak{P}_{xyuv}\,(A\,(x,\ y),\ B\,(u,\ v),\ a,\ b),$$

причем на основе определения соответствующего символа может быть выведена формула

$$\Theta_{xy}\,(A\,(x,\ y))\,\&\,\Theta_{xy}\,(B\,(x,\ y))\to$$

$$\Theta_{xy}\,(\mathfrak{P}_{uvwz}\,(A\,(u,\ v),\ B\,(w,\ z),\ x,\ y).$$

Так, например, изображение операции умножения двух положительных действительных чисел дается следующим определением предикатного символа $\times_{xyuv}\,(A\,(x,\ y),\ B\,(u,\ v),\ a,\ b)$:

$$\times_{xyuv}\,(A\,(x,\ y),\ B\,(u,\ v),a,\ b)\sim$$

$$\exists t\exists u\exists v\exists w\,[A\,(t,\ u)\,\&\,B\,(v,\ w)\,\&$$

$$\exists x\exists y\exists z\,(\mathrm{Mp}\,(t,\ v,\ x)\,\&\,\mathrm{Mp}\,(u,\ w,\ y)\,\&$$

$$\mathrm{Mp}(x,\ b,\ z)\&\mathrm{Mp}(y,\ a,\ z))].$$

Число 0 и отрицательные числа могут быть изображены при помощи следующих определений:

$$0_{xy}(A(x,\ y)) \sim \forall x \forall y (A(x,\ y) \sim x = 0 \,\&\, y \neq 0),$$

$$\Theta^{-}_{xy}(A(x,\ y)) \sim \exists U^{(2)} \exists V^{(2)} \{\Theta_{xy}(U(x,\ y)) \,\&\, 0_{xy}(V(x,\ y)) \,\&\, \forall x \forall y (A(x,\ y) \sim U(x,\ y) \vee V(x,\ y))\}.$$

После этого понятие действительного числа формализуется посредством определения

$$\Theta^{*}_{xy}(A(x,\ y)) \sim \Theta_{xy}(A(x,\ y)) \vee 0_{xy}(A(x,\ y)) \vee \Theta^{-}_{xy}(A(x,\ y)),$$

с которым связывается следующее определение равенства:

$$=_{xyuv}(A(x,\ y),\ B(u,\ v)) \sim \forall x \forall y (A(x,\ y) \sim B(x,\ y)).$$

Арифметические действия над действительными числами изображаются аналогично случаю положительных действительных чисел.

Понятие последовательности действительных чисел формализуется посредством определения

$$\Theta^{*1}_{xyz}(A(x,\ y,\ z)) \sim \forall x \Theta^{*}_{yz}(A(x,\ y,\ z)).$$

Формализацию понятия упорядоченного числового множества дает нам определение

$$\mathrm{Od}_{xy}(A(x,\ y)) \sim \forall x \forall y (A(x,\ y) \vee A(y,\ x) \sim A(x,\ x) \,\&\, A(y,\ y)) \,\&\, \forall x \forall y (A(x,\ y) \,\&\, A(y,\ x) \to x = y) \,\&\, \forall x \forall y \forall z (A(x,\ y) \,\&\, A(y,\ z) \to A(x,\ z)).$$

С помощью этого определения можно получить формализацию понятия вполне упорядоченного числового множества. Она дается определением

$$\mathsf{N}_{xy}(A(x,\ y)) \sim \mathrm{Od}_{xy}(A(x,\ y)) \,\&\, \forall X^{(1)} \{\exists z X(z) \to \exists y (X(y) \,\&\, \forall z (X(z) \,\&\, A(z,\ z) \to A(y,\ z)))\}.$$

Общие теоремы о множествах действительных чисел такие, например, как теорема о точной верхней границе, не могут быть формализованы в L формулами, но их можно формализовать *схемами формул*.

Если бы мы захотели включить в формализм L обсуждавшийся нами частный случай принципа выбора, то это можно

было бы сделать добавлением соответствующей схемы формул. Простейшей подходящей для этого схемой является следующая схема:

$$\forall x \exists Y^{(1)} \mathfrak{A}_z(x,\ Y(z)) \to \exists Y^{(2)} \forall x \mathfrak{A}_z(x,\ Y(x,\ z)).$$

Из нее применением формул для предиката $\mathsf{T}(a,\ b,\ c)$ может быть установлена выводимость следующей схемы формул:

$$\forall x \exists Y^{(2)} \mathfrak{A}_{uv}(x,\ Y(u,\ v)) \to \exists Y^{(3)} \forall x \mathfrak{A}_{uv}(x,\ Y(x,\ u,\ v)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

§ 1. Доказательство Кальмара[1])

В качестве арифметического формализма, непротиворечивость которого будет здесь доказываться, мы возьмем систему (Z). Установив непротиворечивость (Z), мы докажем тем самым и непротиворечивость (Z_μ). Это вытекает из соотношения, существующего между двумя данными формальными системами ввиду определимости μ-символа через ι-символ и теоремы об устранимости характеристик[2]).

В системе (Z_μ), как мы помним, могут быть явно определены примитивно рекурсивные, а в некотором более общем смысле и квазирекурсивные функции[3]). С другой стороны, в планируемом доказательстве не возникнет никаких осложнений и в том случае, если формализм (Z) расширить с самого начала, разрешив введение специальных символов для вычислимых функций одного или нескольких натуральных аргументов, т. е. для таких арифметических функций, значения которых при любых значениях их аргументов могут быть найдены при помощи надлежащей вычислительной процедуры.

С понятием вычислимости естественным образом связываются понятия *истинной* и *ложной* формулы, а также понятие *верифицируемой* формулы. Формулы или термы мы будем называть нумерическими, если они не содержат никаких переменных[4]). Нумерическое равенство будет называться истинным, если в результате вычисления всех входящих в него функций обе его части принимают одно и то же значение. В противном случае равенство будет называться ложным. Истинному равенству приписывается значение «истина», а ложному — значение «ложь».

Так как в формализме (Z) после добавления к нему вычислимых функций все элементарные формулы будут по-прежнему являться равенствами[1]), то мы должны будем рассмотреть только такие нумерические формулы, которые строятся из нумерических равенств с помощью связок исчисления высказываний. Для такого рода формул их истинностные значения однозначно получаются из истинностных значений составляющих их элементарных формул на основе понимания связок исчисления высказываний как истинностных функций. Подобно тому, как это делалось раньше[2]), формулу без связанных индивидных и без формульных переменных мы будем называть верифицируемой, если она при любой подстановке цифр вместо всех входящих в нее свободных индивидных переменных переходит в *истинную* нумерическую формулу.

Все собственные аксиомы системы (Z) (т. е. формулы

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \to a = b$$

и рекурсивные равенства для сложения и умножения) являются верифицируемыми — и в данном доказательстве непротиворечивости мы будем пользоваться только этим их свойством. Это позволит нам с самого начала наряду с указанными собственными аксиомами допускать и другие верифицируемые собственные аксиомы: в частности, рекурсивные равенства для примитивно рекурсивных функций, а также равенства, позволяющие вычислять какие-либо квазирекурсивные функции. Идя еще дальше, мы можем в целях сокращения выводов допустить также использование в качестве исходных формул равенств вида $t = \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{k} = t$, где t — какой-либо нумерический терм, а $\mathfrak{k}$ — цифра, являющаяся его значением. Такие равенства мы будем называть термальными. В соответствии с нашим определением все они являются истинными, а следовательно, и верифицируемыми формулами.

Формализм, который у нас таким образом возникает, получается из исчисления предикатов в результате присоединения к нему знака равенства, индивидного символа 0 и штрих-символа, а также аксиомы равенства (J_2) и аксиомы индукции, а кроме того, введения символов для вычислимых функций и

---

[1]) Изложенное ниже доказательство, принадлежащее Ласло Кальмару, ранее не публиковалось. Оно было представлено в сентябре 1938 г. в виде подробной рукописи.

[2]) См. с. 401 данного тома (последний абзац). Система (Z) была введена в т. I на с. 454, символ $\mu_x A(x)$ в т. I на с. 481, а система (Z_μ) в т. II на с. 366. Теорема об устранимости характеристик доказана в гл. VIII. т. I.

[3]) См. т. I, с. 499—509 и т. II, Приложение II, с. 483—485.

[4]) Такое употребление термина «нумерический» представляет собой некоторое расширение нашего прежнего определения, сформулированного в т. I на с. 283 и в т. II на с. 56, согласно которому формула без переменных называется нумерической лишь в том случае, если все входящие в нее термы являются цифрами.

[1]) Мы могли бы, как это делает Кальмар, допустить в качестве исходных и разрешимые предикаты, но с математической точки зрения этот случай не был бы более общим ввиду того, что всякий разрешимый предикат может быть изображен равенством вида $t = 0$, где t — некоторый терм, построенный из вычислимых функций.

[2]) См. т. I, с. 294, 360, 363; т. II, с. 58—59.

правила, разрешающего брать верифицируемые формулы в качестве исходных.

Если мы сумеем показать, что всякая нумерическая формула, выводимая средствами этого дедуктивного формализма, является истинной, то тем самым будет установлена его непротиворечивость.

Мы начнем с ряда подготовительных рассуждений, которые в свое время мы уже проводили. Они будут касаться возможности упрощения данного формализма без изменения запаса выводимых нумерических формул:

1. Аксиома индукции, как мы знаем, может быть заменена схемой индукции [1]).

2. Квантор всеобщности, а также основная формула (a) и схема (α) могут быть устранены путем замены каждого выражения $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ соответствующим ему выражением $\neg \exists \mathfrak{x} \neg \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ [2]).

3. При помощи *разложения выводов на нити* может быть произведен возвратный перенос всех подстановок с последующим *исключением формульных переменных* [3]).

4. Правило переименования связанных переменных может быть исключено, если мы откажемся от выделенной роли переменной x в основной формуле (b) и в схеме (β) [4]).

Произведя в нашем формализме указанные модификации, мы придем к следующим правилам построения выводов:

Формулы строятся, исходя из элементарных, при помощи связок исчисления высказываний и квантора существования. Элементарные формулы представляют собой равенства термов. Термы суть либо основные термы, т. е. 0 и свободные индивидные переменные, либо термы, построенные из основных при помощи штрих-символа и символов для вычислимых функций.

В качестве исходных формул у нас фигурируют:

а) Формулы, истинные в логике высказываний, т. е. получающиеся в результате подстановок из тождественно истинных формул исчисления высказываний.

б) Формулы, построенные по схеме

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}),$$

где $\mathfrak{t}$ — какой-либо терм; мы будем называть их аксиомами для квантора существования.

в) Формулы, построенные по схеме

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s})),$$

где $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ — какие-либо термы; мы будем называть их формулами равенства,

[1]) См. т. I, с. 325—330.
[2]) См. т. I, с. 289—290.
[3]) См. т. I, с. 275—283 и 286—288, а также с. 327—328.
[4]) См. т. II, Приложение I с. 475—476.

г) Верифицируемые формулы.

Схемами вывода являются:

а) Взятая из исчисления высказываний схема заключения

$$\frac{\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}.$$

б) Схема для квантора существования

$$\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}}{\exists \mathfrak{x} \mathfrak{B}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}}$$

со свободной переменной $\mathfrak{c}$, не входящей ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$.

в) Схема индукции *)

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

со свободной переменной $\mathfrak{c}$, не входящей в $\mathfrak{A}(0)$, и с произвольным термом $\mathfrak{t}$.

Результирующую формулу какой-либо схемы вывода мы будем называть нижней формулой этой схемы, а остальные формулы схемы — верхними ее формулами. Относительно двух формул, являющихся верхними формулами какой-либо схемы вывода, мы будем говорить, что они расположены рядом друг с другом. Обозначенную буквой $\mathfrak{c}$ переменную, фигурирующую в какой-либо схеме для квантора существования или же в схеме индукции, мы будем называть собственной переменной этой схемы.

Так как в рассматриваемых схемах ни одной из переменных исключительной роли не отводится, то можно заранее позаботиться о том, чтобы свободные индивидные переменные в выводе обозначались одинаково лишь тогда, когда это диктуется структурой вывода. После такого разделения свободных переменных каждую из них, не являющуюся собственной переменной какой-либо схемы вывода ни в одной из формул, где она встречается, можно будет всюду заменить цифрой 0. Действительно, в результате такой замены одинаковость формул не будет нарушаться, а в остальном для любой из этих переменных в выводе используется лишь ее свойство быть термом.) Эту операцию мы будем называть исключением излишних свободных переменных. В выводе любой нумерической формулы после

*) Схемой индукции авторы ранее (см., например, т. I, с. 325) называли схему, отличающуюся от данной тем, что в результирующей формуле вместо терма $\mathfrak{t}$ там стояла свободная переменная. Очевидно, что эти две схемы равносильны. — *Прим. перев.*

разделения свободных переменных и исключения тех из них, которые являются излишними, каждая свободная переменная будет фигурировать лишь в роли собственной переменной некоторой схемы вывода, после чего уже больше встречаться не будет.

Рассмотрим теперь произвольный вывод, построенный в соответствии с нашими правилами и разложенный после этого на нити. Применим к нему операцию разделения переменных, а затем исключим излишние свободные переменные. Возьмем заключительную формулу этого вывода, и, двигаясь по нему в обратном направлении, проследим каждую его нить до того места, где она упирается в какую-либо исходную формулу или же в нижнюю формулу какой-либо схемы для квантора существования или схемы индукции. Ту часть фигуры вывода, которая при этом получается (включая и формулы, до которых мы дошли в нашем движении), мы будем называть концевым фрагментом данного вывода, а остальную часть — его начальным фрагментом. Ввиду того, что излишние свободные переменные были нами исключены, в концевом фрагменте вывода свободных переменных не будет вообще. Кроме схем заключения, в концевом фрагменте не будет также никаких схем вывода.

В том частном случае, когда в исходном выводе нет кванторов существования, можно с помощью рассуждения, аналогичного тому, которое было проведено при рассмотрении рекурсивной арифметики [1]), показать, что заключительная формула данного вывода является верифицируемой, а поскольку она является нумерической, — то и истинной. Таким образом, в рассматриваемом частном случае доказательство закончено.

Рассуждения, использованные в этом частном случае, могут быть применены и при рассмотрении общего случая.

Сначала мы убедимся, что любая примыкающая к концевому фрагменту схема индукции, т. е. схема

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')}{\mathfrak{A}(t)},$$

нижняя формула которой $\mathfrak{A}(t)$ является для концевого фрагмента исходной, может быть устранена. Действительно, как мы знаем, здесь терм t должен быть нумерическим. Пусть $\mathfrak{z}$ — цифра, являющаяся его значением. Тогда $\mathfrak{z}$ является либо нулем, либо цифрой, следующей за некоторой цифрой n. В первом случае равенство $0 = t$ является истинным, и мы можем взять его в качестве исходной формулы. Из этого равенства, взятого вместе с формулой $\mathfrak{A}(0)$ и формулой равенства

$$0 = t \to (\mathfrak{A}(0) \to \mathfrak{A}(t)),$$

[1]) См. т. I, с. 360—365.

дважды применив схему заключения, мы получим $\mathfrak{A}(t)$. При этом верхняя формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ вообще не будет использоваться, и потому она вместе со своим выводом может быть опущена..

В противном случае, т. е. в случае, когда $\mathfrak{z}$ представляет собой некоторую цифру n′, мы по выводу формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ построим $\mathfrak{z}$ различных выводов, каждый из которых получается из вывода этой формулы в результате повсеместной замены переменной $\mathfrak{c}$ цифрой $\mathfrak{m}$, которая по очереди пробегает все значения от 0 до n включительно. Заключительными формулами этих выводов будут формулы

$$\mathfrak{A}(0) \to \mathfrak{A}(0'),\quad \mathfrak{A}(0') \to \mathfrak{A}(0''),\ \ldots,\ \mathfrak{A}(n) \to \mathfrak{A}(n').$$

Взяв эти формулы вместе с формулой $\mathfrak{A}(0)$ и применив надлежащее число раз схему заключения, мы получим формулу $\mathfrak{A}(n')$, т. е. $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$. А эта формула вместе с истинной формулой $t = t$ и формулой равенства

$$\mathfrak{z} = t \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{A}(t))$$

двукратным применением схемы заключения даст нам формулу $\mathfrak{A}(t)$.

Эту операцию исключения схемы индукции мы будем называть операцией устранения индукции. То, что она действительно всякий раз приводит к некоторому упрощению, наперед не очевидно и должно быть показано. На будущее мы условимся, что если к концевому фрагменту примыкает несколько применений схемы индукции, то всякий раз будет исключаться то из них, которое в рассматриваемой нами разложенной на нити фигуре вывода расположено левее остальных. Благодаря этому процедура устранения индукции становится однозначной. Заметим, что в результате применения этой операции концевой фрагмент рассматриваемого вывода расширяется.

А для случая, когда к рассматриваемому концевому фрагменту не примыкает ни одно применение схемы индукции, мы определим некоторую другую операцию — операцию устранения квантора существования. Она будет применяться при соблюдении некоторых дополнительных условий, которые еще должны быть сформулированы. Для этого мы введем ряд необходимых понятий и терминов.

Формулу вида $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ мы будем называть экзистенциальной, и относительно аксиомы $\mathfrak{A}(t) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, равно как и относительно схемы вывода с нижней формулой $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{C}$, мы будем говорить, что они относятся к экзистенциальной формуле $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

Максимальное число различных, напластовывающихся друг на друга кванторов существования в какой-либо формуле мы будем называть степенью этой формулы. Иными словами, мы будем считать, что: формула без кванторов существования имеет

степень, равную нулю; отрицание формулы имеет ту же самую степень, что и сама эта формула; конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность формул $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ имеют степень, равную наибольшей из степеней формул $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$; формула $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ имеет степень, на единицу бо́льшую степени формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ (с произвольным термом $\mathfrak{t}$)[1]). Затем высоту какой-либо формулы $\mathfrak{F}$ из нашего вывода мы определим как максимальную из степеней формул той совокупности, которая получается в результате последовательного, начинающегося с формулы $\mathfrak{F}$ процесса присоединения к каждой формуле всех формул, стоящих рядом с ней и непосредственно под ней. Заключительная формула вывода, являющаяся нумерической, имеет степень и высоту, равную нулю.

Любая формула рассматриваемого нами вывода является либо равенством, либо экзистенциальной формулой, либо формулой, построенной из равенств и экзистенциальных формул при помощи связок исчисления высказываний. В последнем случае составные части формулы, из которых она построена при помощи указанных связок, по предложению Кальмара мы будем называть молекулами этой формулы. Заметим, что экзистенциальная формула, фигурирующая в качестве составной части какой-либо другой формулы, только тогда является молекулой этой формулы, когда она не является частью никакой объемлющей ее экзистенциальной формулы.

А теперь нам потребуется еще одна подготовительная операция — вычисление значений термов в концевом фрагменте. Как мы знаем, все термы концевого фрагмента являются нумерическими. Данная операция будет заключаться в том, что в каждой формуле концевого фрагмента каждый максимальный терм, т. е. каждый терм, не являющийся частью какого-либо другого терма[2]), будет заменяться его значением. Посмотрим, как отражается эта операция на характере нашего вывода.

Истинные в логике высказываний и истинные нумерические исходные формулы сохранят свои свойства. То же самое может быть сказано и относительно схем заключения. Всякая формула равенства

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))$$

перейдет в некоторую формулу вида

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}),$$

[1]) Это понятие степени не аналогично понятию степени ε-термов (см. с. 45), поскольку здесь мы не делаем различия между вложением и подчинением кванторов существования.

[2]) Такой терм, тем не менее, может быть составной частью какого-либо функционального выражения — такого, например, как $2 \cdot 2 + x$.

где $\mathfrak{B}$ получается в результате применения нашей операции к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$, а $\mathfrak{C}$ — в результате применения ее к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$. Если цифры $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ совпадают, то совпадут также и формулы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$; в этом случае полученная формула будет истинной в логике высказываний. Если же цифры $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ различны, то формула $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ будет истинной, а из нее и из формулы

$$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n} \to (\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})),$$

которая является истинной в логике высказываний, применением схемы заключения может быть получена формула

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}).$$

В обоих случаях использование рассмотренной формулы равенства в качестве исходной оказывается излишним.

Однако нам придется пользоваться формулами равенства в качестве исходных для того, чтобы иметь возможность дедуктивно переходить от тех или иных формул нашего вывода к соответствующим формулам с вычисленными нумерическими термами. Всякая такая замена нумерического терма $\mathfrak{r}$ в формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ цифрой $\mathfrak{n}$, являющейся его значением, может быть оформлена в виде вывода

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{r} = \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{n} \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}))}{\mathfrak{F}(\mathfrak{r}), \quad (\mathfrak{F}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}))}}{\mathfrak{F}(\mathfrak{n})},$$

где, кроме $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$, в качестве исходных формул используются термальное равенство $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}$ и соответствующая формула равенства. Используя ряд таких вставок, мы сможем перейти от любой формулы $\mathfrak{B}$ к соответствующей ей формуле $\mathfrak{B}^*$ с вычисленными нумерическими термами. Эту операцию мы будем кратко называть формализованным вычислением. Мы должны будем применять ее к примыкающим к концевому фрагменту вывода схемам для квантора существования и к аксиомам для этого квантора, являющимся исходными формулами нашего концевого фрагмента.

При замене нумерических термов их значениями любая схема для квантора существования сохранится в качестве таковой. Но верхняя формула любой такой схемы, примыкающей к концевому фрагменту, сама еще относится к начальному фрагменту вывода, и, чтобы сохранить ее связь по выводимости с остальными формулами начального фрагмента, мы должны будем перейти от первоначальной верхней формулы к новой, что делается путем формализованного вычисления фигурировавших в первоначальной верхней формуле нумерических термов. Правда, эта операция

будет производиться уже не в концевом, а в начальном фрагменте рассматриваемого вывода.

Несколько иначе дело обстоит в случае аксиом для квантора существования. Во всякой такой формуле $\mathfrak{A}(t) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, фигурирующей в концевом фрагменте в качестве исходной, терм t является нумерическим. Пусть цифра $\mathfrak{z}$ представляет собой его значение. В результате вычисления значений формула эта перейдет в некоторую формулу $\mathfrak{P} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$, причем посылка этой формулы получится из формулы $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$ в результате вычисления тех (возможно, имеющихся) термов, в которых $\mathfrak{z}$ фигурирует в качестве аргумента какой-либо функции. Таким образом, $\mathfrak{P}$ либо совпадает с $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$, либо получается из этой формулы в результате замены одного или нескольких нумерических термов их значениями. Мы поступим здесь следующим образом: вместо аксиомы $\mathfrak{A}(t) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ в качестве исходной формулы мы возьмем формулу $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$, которая со своей стороны тоже является аксиомой для квантора существования; затем от этой формулы формализованным вычислением еще оставшихся в $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$ нумерических термов мы перейдем к, так сказать, «вполне вычисленной» формуле $\mathfrak{P} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$.

В этом формализованном вычислении все формулы равенства будут иметь ту же самую степень, что и экзистенциальная формула $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$, а нумерические равенства, как мы знаем, имеют степень, равную нулю. Отсюда получается, что в преобразованном выводе аксиома $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ имеет ту же самую высоту, что и результат ее «полного вычисления».

Нижние формулы схем индукции нам рассматривать не нужно, так как операцию вычисления значений термов мы применяем только к таким выводам, в которых нет применений схемы индукции, примыкающих к концевому фрагменту.

В целом в результате вычисления значений нумерических термов получается следующее: рассматриваемый вывод переходит в вывод, снова укладывающийся в рамки установленного нами формализма. Концевой фрагмент первоначального вывода переходит в концевой фрагмент преобразованного. Кроме того, все встречающиеся в этом фрагменте нумерические термы являются цифрами, за исключением, быть может, тех термов, которые фигурируют в переходах от аксиом для квантора существования к результатам их полного вычисления. У любой аксиомы вида $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, входящей в концевой фрагмент, терм $\mathfrak{z}$ представляет собой цифру, а экзистенциальная формула, стоящая в ее заключении, кроме цифр не содержит никаких других нумерических термов. Окончательное вычисление, которое всегда примыкает к этой аксиоме, относится только к ее посылке $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$. Формализация этого вычисления производится с использованием формул равенства, но за пределами этих вычислений никаких

других формул равенства, играющих роль исходных формул, в концевом фрагменте больше уже не будет. Результат полного вычисления любой аксиомы для квантора существования имеет ту же самую высоту, что и сама эта аксиома.

И, наконец, вслед за вычислением значений нумерических термов мы осуществим еще одно мероприятие, очень сходное с операцией разделения свободных переменных: речь идет о *разделении связанных переменных*. Мы будем избегать таких совпадений экзистенциальных формул, которые не используются в данном выводе. Проще всего это достигается тем, что у любых двух экзистенциальных формул, не связанных в данном выводе друг с другом (т. е. таких, что их совпадения в данном выводе не требуется), их кванторы существования оснащаются *различными* связанными переменными. Эту операцию мы будем кратко называть разделением связанных переменных. Заметим, что эффект этой операции противоположен эффекту операции вычисления значений нумерических термов: в то время как в результате этой последней может произойти слияние формул, внешне выглядящих по-разному, разделение связанных переменных приводит к тому, что первоначально совпадающие формулы могут затем оказаться различными.

Теперь мы уже продвинулись настолько, что можем сформулировать условие, при соблюдении которого будет производиться операция устранения квантора существования. Во-первых, мы будем рассматривать выводы, в которых нет примыкающих к их концевым фрагментам применений схемы индукции и в которых уже произведено вычисление значений нумерических термов и разделение связанных переменных. К такому выводу операцию устранения квантора существования мы будем применять при условии, что в концевом фрагменте рассматриваемого вывода некоторая экзистенциальная формула $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ такая, что к ней относится какая-либо аксиома для квантора существования, совпадает с экзистенциальной формулой, к которой относится одна из схем вывода для этого квантора. Ввиду того, что связанные переменные нами разделены, это может иметь место только тогда, когда в данном выводе эти два вхождения данной экзистенциальной формулы связаны друг с другом. В этом случае должно иметь место некоторое ветвление (в указанном ниже смысле слова): нить вывода, выходящая из этой аксиомы для квантора существования (в направлении к заключительной формуле), и нить, ведущая от нижней формулы рассматриваемой схемы вывода для квантора существования к заключительной формуле, должны сходиться к посылкам некоторой схемы заключения. В верхних формулах этой схемы упомянутая экзистенциальная формула должна фигурировать в качестве молекулы, а в нижнюю формулу она может и не входить. Но в любом слу-

чае она должна исключиться в нити, ведущей от нижней формулы этой схемы заключения к заключительной формуле вывода, и так как заключительная формула имеет высоту, равную нулю, то в этой нити найдется первая формула $\mathfrak{K}$, высота которой меньше степени g формулы $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, так как $g \geqslant 1$. Формула $\mathfrak{K}$ является нижней формулой некоторой схемы заключения

$$\frac{\mathfrak{C},\quad \mathfrak{C}\to\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}},$$

верхние формулы которой имеют высоту, равную по крайней мере g.

Рассмотрим этот случай ветвления. Пусть относящаяся к формуле $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ аксиома для квантора существования записывается в виде $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, а относящаяся к этой формуле схема вывода имеет вид

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a})\to\mathfrak{G}}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{G}}.$$

В этом случае операция устранения квантора существования заключается в том, что данный вывод формулы $\mathfrak{K}$ заменяется некоторым другим, который строится из двух «подвыводов» таких, что один из них дает формулу $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$, а второй — формулу $\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$, и вывода формулы $\mathfrak{K}$ из этих двух формул с помощью двукратного применения схемы заключения к формуле

$$(\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K})\to((\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K})\to\mathfrak{K}),$$

истинной в логике высказываний.

Первый из искомых подвыводов получается следующим образом. В выводе верхней формулы нашей схемы для квантора существования мы повсюду заменяем переменную $\mathfrak{a}$ цифрой $\mathfrak{z}$. В результате этого получается некоторый вывод формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{G}$, из которого мы по правилам исчисления высказываний получаем формулу

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to(\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{G}),$$

которая в этом случае оказывается на месте прежней формулы $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{G}$. Тем самым здесь удается сэкономить одно применение схемы для квантора существования. Добавление посылки $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ к формуле $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{G}$, которая в фигуре нашего вывода является исходной формулой его концевого фрагмента, может быть пронесено сквозь схемы заключений. Действительно, из любой схемы

$$\frac{\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S}\to\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}},$$

если в каждой из ее верхних формул, а также и в нижней формуле импликативно добавить одну и ту же посылку $\mathfrak{B}$, получаются две схемы вывода

$$\frac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S}\to\mathfrak{T}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{T}} \quad\text{и}\quad \frac{\mathfrak{S},\quad \mathfrak{B}\to(\mathfrak{S}\to\mathfrak{T})}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{T}},$$

которые с помощью формул

$$(\mathfrak{B}\to\mathfrak{S})\to((\mathfrak{S}\to\mathfrak{T})\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{T}))$$

и

$$(\mathfrak{B}\to(\mathfrak{S}\to\mathfrak{T}))\to(\mathfrak{S}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{T})),$$

истинных в логике высказываний, сводятся к применению схемы заключения [1]). Все это дает нам некоторый вывод интересующей нас формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$.

Второй подвывод мы получаем из имеющегося вывода формулы $\mathfrak{K}$, импликативно добавляя к аксиоме $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ посылку $\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$. Так как получающаяся в результате этого формула является истинной в логике высказываний, то тем самым экономится одно использование аксиомы для квантора существования в качестве исходной формулы. Добавленная посылка $\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ и в этот раз проносится сквозь схемы заключения и таким образом мы получаем некоторый вывод формулы $\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$. Что же касается формулы $\mathfrak{K}$, то она получается, как уже было сказано, из выведенных нами формул $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$ и $\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$ и из соответствующей формулы, истинной в логике высказываний. На этом описание операции устранения квантора существования заканчивается.

Применением этой операции устраняется одно ветвление: в первом подвыводе исключается относящаяся к формуле $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ схема вывода для квантора существования, а во втором — относящаяся к $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ аксиома для этого квантора (в ее роли исходной формулы) [2]), причем в дальнейшем, в процессе использования заключительных формул обоих этих подвыводов данная экзистенциальная формула $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ больше уже не участвует. Действительно, степень формулы $\mathfrak{K}$, а тем самым и степени обеих этих заключительных формул, как мы знаем, меньше степени g формулы $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

---

[1]) Это рассуждение соответствует той части доказательства дедукционной теоремы, которая относится к исчислению высказываний; см. т. I, с. 194, 195. Однако от этого доказательства оно несколько отличается тем, что дополнительная посылка добавляется здесь не всюду, а только в определенной, ведущей к выводимой нами формуле нити вывода.

[2]) Точнее говоря, исключается одно применение рассматриваемой схемы, или соответственно рассматриваемой аксиомы для квантора существования.

Как и в случае устранения индукции, при устранении квантора существования тоже непосредственно не очевидно, а лишь должно быть специально доказано, что происходит действительное упрощение вывода. Во всяком случае, фигура вывода в результате применения операции устранения квантора существования усложняется. Граница концевого фрагмента вывода после выполнения этой операции тоже должна быть установлена заново.

Подобно случаю устранения индукции, при устранении квантора существования тоже может быть введено соглашение, устанавливающее, какое из ветвлений должно устраняться в том случае, когда их имеется более одного. С каждым ветвлением связывается, как мы знаем, схема заключения, в которой сходятся две нити вывода — одна, ведущая от аксиомы, а другая от нижней формулы схемы вывода для квантора существования. В этом случае от нижней формулы схемы к заключительной формуле всего вывода в целом будет идти некоторая однозначно определенная нить этого вывода. Мы можем теперь условиться, что всякий раз будет производиться устранение того ветвления, у которого указанная нить, ведущая от нижней формулы схемы к заключительной формуле вывода, в рассматриваемом в данный момент концевом фрагменте расположена левее остальных. И если на одной и той же нити лежат несколько ветвлений, то мы будем брать то из них, у которого нижняя формула схемы отстоит от заключительной формулы вывода больше остальных.

А теперь, прежде чем приступить к доказательству того, что операции устранения квантора существования и индукции в определенном смысле дают действительные упрощения, мы должны еще рассмотреть случай, когда к концевому фрагменту вывода не примыкает ни одна схема индукции, а также не выполнено и предварительное условие проведения операции устранения квантора существования. В этом случае у нас имеется фигура вывода, в которой к концевому фрагменту не примыкает ни одна схема индукции, а в самом этом фрагменте после вычисления нумерических термов и разделения связанных переменных любая экзистенциальная формула, к которой относится какая-либо аксиома для квантора существования, отлична от всех экзистенциальных формул, к которым относятся какие-либо (граничащие с концевым фрагментом) схемы для квантора существования. Заметим также, что в соответствии с нашими соглашениями, касающимися разделения связанных переменных, эта операция делает различными только такие формулы, которые нигде внутри рассматриваемого нами концевого фрагмента (где имеются лишь формулы, истинные в логике высказываний, и схемы заключения) не играют роли одной общей молекулы. Это дает нам возможность с помощью следующих соглашений однозначно придать всем молекулам формул, входящих в концевой фрагмент, значения «истина» и «ложь»:

Истинностные значения нумерических равенств будут прежними. Экзистенциальная формула, к которой относится какая-либо аксиома для квантора существования, объявляется истинной, а экзистенциальная формула, к которой относится схема вывода, примыкающая к концевому фрагменту, объявляется ложной. Для остальных экзистенциальных формул их истинностные значения устанавливаются произвольным образом: например, можно всем им приписать значение «истина». Понимание связок исчисления высказываний как истинностных функций сохраняется. На основании этих соглашений получается, что: 1) нумерические формулы имеют прежние оценки; 2) формулы, истинные в логике высказываний, являются истинными формулами и в смысле нового определения; 3) любая аксиома для квантора существования, фигурирующая в концевом фрагменте, является истинной; то же самое верно и относительно результата ее полного вычисления; 4) нижняя формула любой граничащей с концевым фрагментом схемы вывода для квантора существования является истинной; 5) любая схема заключения с истинными верхними формулами имеет истинную нижнюю формулу.

Если теперь сократить концевой фрагмент, взяв в качестве исходных формул не сами аксиомы для квантора существования, а результаты их полного вычисления (и, значит, опустив стоящие над ними формулы), то получится фигура вывода, все исходные формулы которой будут истинными (формул равенства здесь в качестве исходных формул не будет!), и с помощью схем заключения мы в дальнейшем будем получать только истинные формулы. Следовательно, заключительная формула нашего вывода должна быть истинной в смысле нового определения. Но так как она является нумерической, то она будет истинной и в прежнем смысле. Таким образом, в данном случае поставленная цель оказывается достигнутой.

Заметим, что при новом определении истинности значений молекул, которым мы здесь воспользовались, новые истинностные значения устанавливались лишь для таких молекул, которые являются экзистенциальными формулами, а в остальных случаях брались прежние истинностные значения.

Теперь рассмотрим общий случай и покажем, что, отправляясь от любого, построенного в соответствии с нашими правилами вывода, после конечного числа применений операций устранения индукции и квантора существования мы придем к такому выводу, в котором ни одна схема индукции не будет примыкать к концевому фрагменту, а в самом этом фрагменте — после вычисления нумерических термов и разделения связанных переменных — будут отсутствовать ветвления. Для любого такого вывода — мы будем называть его редуцированным — при помощи проведенного нами рассуждения, путем надлежащей оценки тех входящих

в концевой фрагмент молекул, которые являются экзистенциальными формулами, можно будет убедиться, что заключительная формула нашего вывода в силу ее нумеричности является истинной. Тем самым будет показано, что заключительная формула первоначального вывода тоже является истинной, так как при производимых нами операциях устранения индукции и квантора существования заключительная формула не меняется вообще, а при вычислении нумерических термов в концевом фрагменте хотя эта формула сама и может измениться, но ее истинностное значение останется без изменений.

Таким образом, непротиворечивость системы (Z) будет установлена, если мы сможем показать, что последовательность применений операций устранения индукции и квантора существования, производимых в соответствии с принятыми соглашениями над любым построенным по правилам нашего формализма выводом, после конечного числа шагов должна оборваться, т. е. привести к редуцированному выводу.

С этой целью мы воспользуемся введенными в гл. V 0-ω-фигурами [1]) и некоторым сопоставлением фигур этого рода формулам наших выводов. Мы напомним определение этих фигур и отношения порядка между ними, причем заодно мы произведем и некоторую разбивку этих фигур на ярусы.

В роли фигуры нулевого яруса у нас будет выступать один только символ 0; фигурами первого яруса будут суммы вида $\omega^0+\omega^0+\ldots+\omega^0$, состоящие по крайней мере из одного члена; мы будем считать, что 0 предшествует любой фигуре первого яруса и что порядок между фигурами этого яруса устанавливается по числу членов в них. Вместо ω^0 мы для краткости будем также писать 1. Пусть теперь 0-ω-фигуры вместе с отношением порядка для них введены до яруса с номером k включительно, причем так, что фигуры каждого из этих ярусов превосходят фигуры предшествующих ярусов. В качестве фигур $(k+1)$-го яруса мы возьмем выражения вида

$$\omega^{a_1}+\omega^{a_2}+\ldots+\omega^{a_r} \qquad (r\neq 0),$$

у которых формальные показатели степени $a_1, a_2, \ldots, a_r$ являются 0-ω-фигурами ярусов не выше k-го, причем a_1 принадлежит в точности k-му ярусу, а кроме того (в обычных обозначениях), $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r$. Порядок для фигур $(k+1)$-го яруса устанавливается таким образом, что из двух различных фигур $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$

[1]) См. с. 451—452. Этот способ введения канторовских порядковых чисел, меньших первого канторовского ε-числа, восходит к Г. Генцену. См. его работу: Gentzen G. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. — Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften Neue Folge. 1938. № 4, S. 38, 39.

фигура $\mathfrak{a}$ считается большей, если у первого слева различающегося члена этих фигур показатель степени у $\mathfrak{a}$ больше, чем у $\mathfrak{b}$, или если $\mathfrak{a}$ получается из $\mathfrak{b}$ добавлением одного или нескольких членов. Кроме того, все фигуры $(k+1)$-го яруса считаются бóльшими, чем все фигуры предшествующих ярусов.

После того как таким способом рекурсивно определены 0-ω-фигуры и отношение порядка между ними, получается, как легко видеть, что определение сравнения двух фигур одного и того же яруса может быть применено и к фигурам различных ярусов, так как у любой фигуры $(k+1)$-го яруса первый член имеет больший показатель степени, чем у любой фигуры более низкого (ненулевого) яруса. Фигура 0 меньше всех остальных 0-ω-фигур.

Без труда можно убедиться, что определенное нами отношение порядка для 0-ω-фигур является транзитивным. Затем можно доказать, что если $\mathfrak{a}$ — 0-ω-фигура, то $\omega^{\mathfrak{a}}$ — тоже 0-ω-фигура, и что если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две 0-ω-фигуры такие, что $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, то имеет место и неравенство $\omega^{\mathfrak{a}}<\omega^{\mathfrak{b}}$. Таким образом, соответствие, сопоставляющее фигуре $\mathfrak{a}$ фигуру $\omega^{\mathfrak{a}}$ («показательная функция»), является (в обычном смысле) строго монотонным. Кроме того, $\omega^{\mathfrak{a}}$ всегда больше $\mathfrak{a}$. При итерациях показательной функции скобками можно и не пользоваться: например, выражение $\omega^{\omega^{\omega^{\mathfrak{c}}}}$ может пониматься только так, что $\omega^{\omega^{\mathfrak{c}}}$ является в нем показателем степени, а у $\omega^{\omega^{\mathfrak{c}}}$ показателем степени является $\omega^{\mathfrak{c}}$.

Натуральную сумму $\mathfrak{a}\#\mathfrak{b}$ мы определим как функцию двух аргументов, значениями которых являются 0-ω-фигуры. Мы положим (по определению) $\mathfrak{a}\#0=\mathfrak{a}$, $0\#\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$. Если же $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ отличны от 0, то $\mathfrak{a}\#\mathfrak{b}$ мы определим как 0-ω-фигуру, которая получается, если взять все слагаемые фигур $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ с учетом их кратности и упорядочить их так, чтобы ни одно слагаемое с меньшим показателем степени не предшествовало ни одному слагаемому с бóльшим показателем [1]).

Из этого определения без труда получается, что для любых 0-ω-фигур $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ имеют место равенства $\mathfrak{a}\#\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\#\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}\#(\mathfrak{b}\#\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\#\mathfrak{b})\#\mathfrak{c}$. Поэтому можно рассматривать многочленные натуральные суммы (без скобок), не принимая при этом во внимание порядок расположения слагаемых. Можно показать, что если в натуральной сумме увеличить одно или несколько входящих в нее слагаемых, то увеличится и значение суммы.

[1]) Данное определение натуральной суммы представляет собой частный случай принадлежащего Герхарду Гессенбергу более общего определения натуральной суммы для произвольных порядковых чисел. См. его работу: Hessenberg G. Grundbegriffe der Mengenlehre. — Abh. d. Friesschen Schule, Neue Folge, Bd I, Göttingen, 1906, S. 479—706.

Таким образом, натуральная сумма, подобно показательной функции, является строго монотонной.

А теперь формулам рассматриваемого нами вывода мы сопоставим в качестве их порядковых чисел некоторые 0-ω-фигуры. При этом мы будем придерживаться следующих соглашений. Всем исходным формулам, за исключением аксиом для квантора существования, сопоставляется порядковое число 0; аксиомам для квантора существования сопоставляется порядковое число 1. Если верхней формуле некоторой схемы вывода для квантора существования сопоставлено порядковое число $\mathfrak{a}$, то нижней формуле этой схемы сопоставляется число $\mathfrak{a} \# 1$. Нижней формуле схемы заключения, верхним формулам которой сопоставлены порядковые числа $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, сопоставляется число $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}$, если высота верхних формул равна высоте нижней формулы; если же высота верхних формул на k превосходит высоту нижней, то порядковым числом нижней формулы мы будем считать порядковое число, полученное из $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}$ в результате k-кратного применения показательной функции:

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\mathfrak{a}\#\mathfrak{b}}}}}}}.$$

Пусть верхние формулы схемы индукции имеют порядковые числа $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Если $\mathfrak{b}$ равно 0, то порядковое число ее нижней формулы будет равняться $\mathfrak{a} \# 1$; если же $\mathfrak{b}$ отлично от 0 и первый его член (может быть, единственный) равен $\omega^{\mathfrak{c}}$, то нижняя формула в качестве порядкового числа будет иметь $\mathfrak{a} \# \omega^{\mathfrak{c}\#1}$. Таким образом, в любом случае порядковое число нижней формулы нашей схемы индукции будет больше любой из натуральных сумм

$$\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} \# \mathfrak{b} \# \ldots \# \mathfrak{b},$$

содержащих одно слагаемое $\mathfrak{a}$ и любое конечное число слагаемых $\mathfrak{b}$; в частности, оно больше $\mathfrak{a}$.

Этим определением каждой формуле любого вывода, произведенного по правилам рассмотренного нами формализма, однозначно сопоставляется некоторое порядковое число. Порядковое число заключительной формулы вывода объявляется порядковым числом самого этого вывода.

Следует заметить, что при нахождении порядковых чисел, соотносимых формулам данного вывода, должны учитываться высоты этих формул, поскольку порядковое число нижней формулы схемы заключения зависит от разности высот ее верхних формул и нижней формулы. Эта разность может быть отлична от нуля только тогда, когда верхние формулы схемы заключения имеют степень, более высокую, чем ее нижняя формула. В то

время как высоты формул вычисляются снизу вверх, начиная с заключительной формулы, порядковые числа формул растут сверху вниз, начиная с исходных формул.

Отметим также, что при формальном переходе от формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$, производимом двукратным применением схемы заключения с использованием истинной нумерической формулы $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ и соответствующей формулы равенства

$$\frac{\mathfrak{r} = \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))}{\dfrac{\mathfrak{A}(\mathfrak{r}), \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{s})}},$$

все формулы, кроме, быть может, равенства $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ (которое, как мы знаем, имеет степень 0), имеют одну и ту же степень. Следовательно, для этих схем заключения разность соответствующих высот равна нулю. Формулы $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ и $\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))$ имеют порядковые числа, равные 0. Поэтому порядковое число формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ также равно 0 и, следовательно, $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ имеет то же самое порядковое число, что и $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$. Таким образом, в результате этого перехода порядковое число формулы не изменяется. Значит, то же самое будет верно и при нескольких таких переходах — в частности при формализованном вычислении нумерических термов данной формулы.

Теперь мы перейдем к доказательству того, что при производстве обеих рассматриваемых нами операций устранения порядковое число вывода уменьшается.

При устранении индукции мы имеем дело с некоторой примыкающей к концевому фрагменту схемой индукции

$$\frac{\mathfrak{A}(0), \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')}{\mathfrak{A}(t)},$$

в которой $\mathfrak{c}$ — какая-либо свободная переменная, а t — нумерический терм. Все три формулы этой схемы имеют одну и ту же степень, а потому и одну и ту же высоту. Пусть порядковые числа верхних формул равны $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ соответственно. Если значение t равно 0, то эта схема заменяется формальным переходом от $\mathfrak{A}(0)$ к $\mathfrak{A}(t)$ при помощи термального равенства $0 = t$. При этом, как только что было показано, порядковое число формулы не изменяется, и, значит, $\mathfrak{A}(t)$, как и $\mathfrak{A}(0)$, будет иметь порядковое число $\mathfrak{a}$, в то время как в первоначальной схеме индукции порядковое число нижней формулы $\mathfrak{A}(t)$ было больше $\mathfrak{a}$.

Если же t имеет отличное от 0 значение в виде некоторой цифры $\mathfrak{z}'$, то, устраняя данное применение схемы индукции, мы будем заменять вывод формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ соответствующими

ему выводами формул

$$\mathfrak{A}(0) \to \mathfrak{A}(0'), \quad \mathfrak{A}(0') \to \mathfrak{A}(0''), \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{k}'),$$

получающимися в результате повсеместной подстановки вместо переменной $\mathfrak{c}$ цифр $0, 0', \ldots, \mathfrak{k}$. В этом случае из заключительных формул этих $\mathfrak{k}'$ подвыводов и из формулы $\mathfrak{A}(0)$ в результате надлежащего числа применений схемы заключения получается формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}')$, от которой с помощью термального равенства $\mathfrak{k}' = \mathfrak{t}$ можно перейти к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$.

При таком получении формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ из формул $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ $(\mathfrak{n} = 0, 0', \ldots, \mathfrak{k})$ и равенства $\mathfrak{k}' = \mathfrak{t}$ (с использованием одной формулы равенства и одной схемы заключения) все формулы, за исключением, может быть, равенства $\mathfrak{k}' = \mathfrak{t}$, имеют одну и ту же степень. Поэтому в преобразованном выводе все формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ будут иметь ту же самую высоту, что и формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$, а тем самым и ту высоту, которую формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ и $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ имеют в первоначальном выводе.

Отсюда, во-первых, вытекает, что при замене вывода формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ выводами формул $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ $(\mathfrak{n} = 0, 0', \ldots, \mathfrak{k})$ эти формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ получают то же самое порядковое число $\mathfrak{b}$, которое первоначально получала формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$, а кроме того, отсюда следует, что в схемах заключения

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{n}), \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{n}')} \qquad (\mathfrak{n} = 0, 0', \ldots, \mathfrak{k})$$

порядковое число нижней формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ всякий раз равно натуральной сумме $\mathfrak{b}$ и порядкового числа формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, так что формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}')$, получающейся в конце этих $\mathfrak{k}'$ следующих друг за другом схем заключения, сопоставляется порядковое число $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} \# \mathfrak{b} \# \ldots \# \mathfrak{b}$, имеющее $\mathfrak{k}'$ слагаемых $\mathfrak{b}$, причем это порядковое число не изменится и при формальном переходе от $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}')$ к $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$. Таким образом, и формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ тоже будет сопоставлено порядковое число $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} \# \ldots \# \mathfrak{b}$, а оно, как установлено ранее, меньше порядкового числа, соотнесенного нижней формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ нашей первоначальной схемы индукции. Таким образом, в результате устранения рассматриваемой схемы индукции порядковое число формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$, которая является одной из исходных формул концевого фрагмента вывода, уменьшится, и это уменьшение распространится по нити вывода, ведущей от формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$, лежащей в концевом фрагменте, к заключительной формуле всего нашего вывода сквозь следующие друг за другом заключения (других схем в концевом фрагменте нет!) вплоть до заключительной формулы. В самом деле, порядковое число нижней формулы любой схемы заключения получается, как мы помним, из порядковых чисел верхних формул при помощи натурального суммирования и, быть может, применения показательной функции, а обе эти функции, как мы в свое время установили, строго монотонны. Итак, в целом в результате применения операции устранения индукции порядковое число заключительной формулы (а значит, и всего вывода) уменьшается.

А теперь, прежде чем перейти к операции устранения квантора существования, мы напомним, что, как было отмечено выше, проводимая нами подготовительная операция вычисления значений нумерических термов не меняет порядковых чисел формул вывода.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет устранение квантора существования на порядковое число вывода, к которому предварительно были применены подготовительные операции разделения свободных переменных, исключения излишних свободных переменных, вычисления значений нумерических термов в концевом фрагменте и разделения связанных переменных и в котором затем оказались выполненными условия применимости операции устранения квантора существования: т. е. к концевому фрагменту этого вывода не примыкает ни одна схема индукции, а кроме того, в нем имеется ветвление. Пусть среди имеющихся ветвлений выделено то, которое на данном этапе должно устраняться в соответствии с нашими соглашениями. Пусть у этого ветвления $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ представляет собой ту самую формулу, к которой относится как нижняя формула некоторой (граничащей с концевым фрагментом) схемы

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{G}}{\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}},$$

так и некоторая (фигурирующая в качестве исходной формулы этого фрагмента) аксиома для квантора существования

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{k}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$$

(с некоторой цифрой $\mathfrak{k}$), выходя из которых, нити вывода, ведущие к заключительной формуле, сливаются в некоторой схеме заключения

$$\frac{\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}},$$

причем эта экзистенциальная формула $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ фигурирует в верхних формулах $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ в качестве молекулы. Пусть в нити вывода, ведущей от нижней формулы $\mathfrak{T}$ данной схемы к заключительной формуле всего нашего вывода в целом, формула $\mathfrak{K}$ первая (считая по направлению к заключительной формуле) такая, что высота ее h меньше степени g формулы $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Так как

в концевом фрагменте нет схем вывода, отличных от схем заключения, то формула $\mathfrak{K}$ является нижней формулой некоторой схемы заключения

$$\frac{\mathfrak{L},\quad \mathfrak{L}\to\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}.$$

В частности, она может совпадать со схемой

$$\frac{\mathfrak{C},\quad \mathfrak{C}\to\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}.$$

Согласно выбору $\mathfrak{K}$ высота формул $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ должна равняться по меньшей мере g, и значит, быть больше h. Следовательно, эта высота должна совпадать со степенью l формулы $\mathfrak{L}$. Поэтому разность высот у схемы

$$\frac{\mathfrak{L},\quad \mathfrak{L}\to\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$$

равняется $l-h$. Пусть порядковые числа верхних формул этой схемы суть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$. Тогда порядковое число формулы $\mathfrak{K}$ будет получаться из натуральной суммы $\mathfrak{p}\#\mathfrak{q}$ в результате $(l-h)$-кратного применения показательной функции.

Пусть результат k-кратного применения показательной функции к 0-ω-фигуре $\mathfrak{c}$ обозначается через $\exp_k(\mathfrak{c})$, так что

$$\exp_0(\mathfrak{c})=\mathfrak{c}\quad\text{и}\quad\exp_{k+1}(\mathfrak{c})=\omega^{\exp_k(\mathfrak{c})}.$$

Тогда порядковое число формулы $\mathfrak{K}$ в рассматриваемом выводе изобразится посредством $\exp_{l-h}(\mathfrak{p}\#\mathfrak{q})$.

Операция устранения квантора существования, как известно, заключается в том, что сначала строятся два подвывода, которые дают формулы

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}\quad\text{и}\quad\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K},$$

а затем из них по правилам логики высказываний выводится формула $\mathfrak{K}$, начиная с которой вывод протекает так же, как и раньше. Посмотрим сначала, каковы высоты формул $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$ и $\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}$ в модифицированном выводе. Все формулы, участвующие в получении $\mathfrak{K}$ из двух указанных выше формул (схема заключения применяется дважды), быть может, вплоть до самой формулы $\mathfrak{K}$, имеют высоту $g-1$, которая, как мы знаем, является степенью формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$. (Высота h формулы $\mathfrak{K}$ не превосходит $g-1$.) Поэтому разность высот может быть отлична от нуля только во второй схеме заключения, где она равна $d=g-1-h$ $(d\geqslant 0)$.

А теперь посмотрим, какие порядковые числа получают заключительные формулы этих двух подвыводов. Для этого мы должны будем исследовать высоты формул нашего вывода.

В первом подвыводе мы сначала получаем формулу $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{G}$, заменяя в первоначальном выводе формул $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})\to\mathfrak{G}$ переменную $\mathfrak{a}$ всюду, где она входит, цифрой $\mathfrak{z}$. Затем от формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{G}$ мы по правилам исчисления высказываний переходим к формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to(\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{G})$. Так к формуле $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{G}$ первоначального вывода импликативно добавляется посылка $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$, и эта посылка распространяется дальше по нити, идущей от этой формулы к формуле $\mathfrak{K}$, что, как мы указывали, совершается при помощи надлежащей модификации схем заключения. При этом каждая схема заключения заменяется двумя, идущими друг за другом, с привлечением формул, истинных в логике высказываний. В частности, так на месте схемы

$$\frac{\mathfrak{L},\quad \mathfrak{L}\to\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$$

первоначального вывода в зависимости от того, через какую формулу идет рассматриваемая нить вывода, через $\mathfrak{L}$ или через $\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ получаются либо схемы

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{y})\to\mathfrak{L},\quad(\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{L})\to((\mathfrak{L}\to\mathfrak{K})\to(\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}))}{\mathfrak{L}\to\mathfrak{K},\quad(\mathfrak{L}\to\mathfrak{K})\to(\mathfrak{F}(\mathfrak{y})\to\mathfrak{K})}}{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}},$$

либо схемы

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to(\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}),\quad(\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to(\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}))\to(\mathfrak{L}\to(\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}))}{\mathfrak{L},\quad\mathfrak{L}\to(\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K})}}{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{K}}.$$

Здесь в обоих случаях нижняя формула имеет высоту $g-l$, тогда как остальные формулы в качестве высоты имеют степень l формулы $\mathfrak{L}$, которая не меньше g. Это справедливо, в частности, и в отношении формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{y})\to\mathfrak{L}$ или соответственно формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to(\mathfrak{L}\to\mathfrak{K})$. Следовательно, в переработанном выводе эта формула будет иметь ту же самую высоту, что и соответствующая ей формула $\mathfrak{L}$ (соответственно $\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$) первоначального вывода. Отсюда, далее, получается, что при возвращении от этой формулы к формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to(\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{K})$ соответствующие друг другу формулы модифицированного и первоначального выводов имеют одну и ту же высоту. А кроме того, при получении формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})\to\mathfrak{G}$ формулы модифицированного вывода имеют ту же самую

высоту, что и соответствующие им формулы первоначального вывода формулы $\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{G}$.

Таким образом, формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ в модифицированном выводе получает то же самое порядковое число, которое первоначально получала формула $\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{G}$. При переходе от формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ к формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ при помощи схемы заключения, который происходит без изменения высоты, эта формула получает то же самое порядковое число, что и формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$, т. е. число, которое первоначально получала формула $\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{G}$, в то время как нижняя формула схемы для квантора существования $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}$ получает порядковое число, бóльшее на единицу. Таким образом, здесь в модифицированном выводе происходит уменьшение порядкового числа по сравнению с первоначальным. Это уменьшение сохраняется или даже усиливается при замене первоначальной, идущей от формулы $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}$ к формуле $\mathfrak{K}$ нити вывода соответствующей ей нитью, идущей от формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ к формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$. Это следует, с одной стороны, из монотонности натуральной суммы и показательной функции, а с другой стороны — из того, что при переходах по правилам исчисления высказываний, которые появляются на местах первоначальных схем заключения из-за добавляющейся (в одной или в обеих верхних формулах) посылки $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$, разности высот могут, самое большее, уменьшаться. Рассматриваемая нами первоначальная нить вывода идет через одну из формул $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$. В соответствующей формуле первого подвывода к этой формуле импликативно добавляется посылка $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$; затем ее порядковое число уменьшается. Поэтому, если $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$ — порядковые числа формул, появляющихся здесь на месте формул $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}$. На месте схемы

$$\frac{\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$$

здесь возникают две схемы заключения, которые (в зависимости от того, какой случай имеет место) имеют один из двух ранее указанных видов. В обоих случаях в первой схеме заключения разность высот равна нулю, а нижняя формула этой схемы имеет то же самое порядковое число, что и левая верхняя формула. Во второй схеме заключения разность высот представляет собой положительное число $j = l - g + 1$, а порядковые числа обеих верхних формул суть (отвлекаясь от порядка) $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$. Таким образом, заключительная формула этого подвывода имеет порядковое число $\exp_j(\mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}')$.

Теперь обратимся ко второму подвыводу. Здесь путем импликативного добавления к аксиоме $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ посылки $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ получается формула $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$. В результате этого вместо указанной аксиомы, имеющей порядковое число 1, получается истинная в логике высказываний формула с порядковым числом 0. Это понижение порядкового числа снова сохранится при замене первоначальной нити вывода, идущей от этой аксиомы для квантора существования к формуле $\mathfrak{K}$, соответствующей ей нитью, ведущей к формуле $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$. Одна из прежних формул $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ получит посылку $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ и ее порядковое число уменьшится. Таким образом, если $\mathfrak{p}''$ и $\mathfrak{q}''$ — порядковые числа указанных двух соответствующих формул, то будет иметь место неравенство $\mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}$. И теперь, совершенно аналогично тому, как это было в первом подвыводе, получается, что заключительная формула второго подвывода $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$ будет иметь порядковое число $\exp_j(\mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'')$.

При переходе от заключительных формул обоих этих подвыводов к формуле $\mathfrak{K}$, происходящем с помощью двух схем заключения, прирост высоты может иметь место, как уже было установлено, только во второй схеме; этот прирост равен $d = g - 1 - h$. После этого, в силу нашего определения порядковых чисел для заключительных формул обоих этих подвыводов, получается, что в переработанном выводе порядковое число формулы $\mathfrak{K}$ будет равняться

$$\exp_d(\exp_j(\mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}') \# \exp_j(\mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'')).$$

В первоначальном выводе формула $\mathfrak{K}$ имела порядковое число $\exp_{l-h}(\mathfrak{p} \# \mathfrak{q})$. Но

$$l - h = (l - g + 1) + (g - 1 - h) = j + d$$

и

$$j > 0, \quad d \geqslant 0, \quad \mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q},$$

а в силу определения отношения порядка для 0-ω-фигур и монотонности показательной функции для $\mathfrak{c}' < \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'' < \mathfrak{c}$, $j > 0$ и $d \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\exp_d(\exp_j(\mathfrak{c}') \# \exp_j(\mathfrak{c}'')) < \exp_{d+j}(\mathfrak{c}).$$

Таким образом, в результате применения операции устранения квантора существования порядковое число формулы $\mathfrak{K}$ уменьшится, и это уменьшение продолжится вплоть до заключительной формулы всего нашего вывода. Следовательно, в результате этой операции уменьшится и порядковое число нашего вывода в целом.

Итак, мы можем констатировать, что операции устранения индукции и квантора существования, будучи применены к какому-либо выводу, уменьшают его порядковое число. С помощью этого факта искомое доказательство того, что любая последовательность применений операций устранения индукции и квантора существования должна оборваться, сводится к установлению того, что любая убывающая последовательность 0-ω-фигур после конечного

числа шагов обрывается, т. е. ведет к фигуре 0. Этот факт мы еще должны установить [1]).

Для 0-ω-фигур нулевого и первого ярусов справедливость этого утверждения усматривается элементарно. Теперь мы покажем, как из справедливости этого утверждения для 0-ω-фигур ярусов до k-го включительно вытекает справедливость его и для ярусов до $(k+1)$-го включительно. Данную 0-ω-фигуру мы будем для краткости называть фигурой конечного спуска, если можно убедиться, что любой спуск (т. е. любая убывающая последовательность 0-ω-фигур), начинающийся с этой фигуры, обрывается после конечного числа шагов [2]). После этого наша задача формулируется следующим образом. Пусть нам удалось показать, что любая 0-ω-фигура яруса не выше k-го ($k \geqslant 1$) является фигурой конечного спуска. Требуется показать, что и любая 0-ω-фигура $(k+1)$-го яруса тоже является фигурой конечного спуска.

Сначала заметим, что достаточно провести доказательство для фигуры ω^a. Действительно, если рассматривать фигуры с [$(k+1)$-го яруса] вида $\omega^{a_1}+\ldots+\omega^{a_r}$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_r$, то, как известно, фигура ω^{a_1+1} больше любой из них и тоже является фигурой $(k+1)$-го яруса, причем каждому спуску, начинающемуся с c, соответствует спуск с ω^{a_1+1}, который состоит в том, что мы сначала с ω^{a_1+1} спускаемся на c, а затем повторяем рассматриваемый спуск, начинающийся с c.

Сделаем еще одно вспомогательное замечание. Если нам удастся установить, что степень ω^a является фигурой конечного спуска, то отсюда будет вытекать, что и каждая сумма $\omega^a+\omega^a+\ldots+\omega^a$ тоже является фигурой конечного спуска. Действительно, если, пользуясь обычными обозначениями, записать такую сумму, состоящую из $m+1$ члена, в виде $\omega^a \cdot (m+1)$, то при любом спуске с $\omega^a \cdot (m+1)$ первые m слагаемых будут оставаться без изменений, пока мы не дойдем до фигуры, которая меньше $\omega^a \cdot m$. Если мы отвлечемся от этих m совпадающих слагаемых, то получится начинающаяся с ω^a последовательность спуска, а она, по нашему предположению, должна после конечного числа шагов оборваться. Таким образом, за конечное число шагов мы приходим от $\omega^a \cdot (m+1)$ к $\omega^a \cdot m$ или к меньшей фигуре. Мы можем даже считать, что мы доходим до $\omega^a \cdot m$, так как в любом случае эту фигуру можно включить в наш спуск, от чего он только удлинится. Но в точности так же, как мы за конечное число шагов доходим от $\omega^a \cdot (m+1)$ до $\omega^a \cdot m$, мы дойдем от $\omega^a \cdot m$ до $\omega^a \cdot (m-1)$ и т. д., так что в целом спуск с $\omega^a \cdot (m+1)$ за конечное число шагов приведет нас к 0.

А теперь рассмотрим спуск, идущий от степени ω^a. Первый шаг спуска ведет нас к фигуре вида $\omega^{a_1}+\ldots+\omega^{a_r}$ $(a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_r)$, где $a > a_1$. Самое большее эта фигура равна $\omega^{a_1} \cdot r$. Таким образом наш спуск разве лишь удлинится, если мы (в случае неравенства) вставим между ω^a и упомянутой фигурой еще и $\omega^{a_1} \cdot r$. Следовательно, вопрос о том, является ли ω^a фигурой конечного спуска, сводится к аналогичному вопросу относительно фигуры $\omega^{a_1} \cdot r$ и, ввиду проведенного нами вспомогательного рассуждения, к аналогичному вопросу относительно ω^{a_1}. Для ω^{a_1} повторяется то же самое, т. е. вопрос о том, является ли эта фигура фигурой конечного спуска, в результате первого шага спуска сводится (в разъясненном выше смысле) к аналогичному вопросу для некоторой степени ω^{a_2}, где a_2 меньше a_1.

Повторяя эти рассуждения, мы получим убывающую последовательность показателей $a > a_1 > a_2 > \ldots$ Но так как a является фигурой не выше k-го яруса, то последовательность эта должна оборваться в конечное число шагов; тогда при показателе, равном 0, у нас получится фигура ω^0 конечного спуска. Следовательно, в конечное число шагов оборвется и весь наш спуск в целом.

Замечание. Заметим, что здесь не утверждается какая-то *теорема* о том, что «если ω^{a_1} является фигурой конечного спуска, то ω^a тоже обладает этим свойством». Сведение утверждения о конечности спуска фигуры ω^a к утверждению этого же свойства для ω^{a_1} производится не с помощью такого рода теоремы, а на основе особого характера *первого шага спуска*, начинающегося с ω^a [1]).

[1]) Кальмар использует для этого рассуждение, с помощью которого Генцен в его работе: Gentzen G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. — Math. Ann., 1930, **112**, S. 555 и далее — доказывает законность трансфинитной индукции для порядковых чисел, не превосходящих первого канторовского ε-числа. Сам Генцен тоже ссылается на это рассуждение в своем более позднем доказательстве непротиворечивости, однако здесь он говорит об этом способе обоснования как о предварительном, с намерением когда-нибудь вернуться к рассмотрению этого вопроса. (См. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. — Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, 1938, № 4, S. 44.) Мы в дальнейшем воспользуемся рассуждением, которое — в отличие от упомянутого рассуждения Генцена, а также от приведенного в гл. V, § 3, п. в) доказательства для частной трансфинитной индукции — относится непосредственно к 0-ω-фигурам и в котором не используются никакие представления о трансфинитной индукции.

[2]) Выражение «конечный спуск» не должно наводить нас на мысль о том, что в данном случае речь идет о каком-либо свойстве 0-ω-фигур, распознаваемом элементарными средствами. В самом деле, у любой фигуры не ниже второго яруса возможных спусков бесконечно много и они не могут быть перепробованы все.

[1]) Мы имеем здесь что-то вроде цугцванга в шахматах.

§ 2. Доказательство Аккермана

Приводимое здесь доказательство непротиворечивости относится к формализму, который получается из арифметического формализма (Z) в результате присоединения к нему ε-формулы

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x)).$$

Оно связано с первоначальным гильбертовским подходом к исключению ε-символов и с дальнейшим развитием этого подхода, осуществленным Аккерманом, о чем подробно говорилось в § 4 гл. II. Правда, в самом общем случае этот метод не привел нас к желаемому результату.

Однако когда Генцен показал, что с помощью некоторого обобщения методов теории доказательств — а именно, при использовании обобщенной индукции до первого ε-числа — может быть доказана непротиворечивость арифметического формализма, Аккерман обнаружил, что связанный с гильбертовским подходом метод при соответствующем расширении этого метода также может дать полное доказательство непротиворечивости.

Для того чтобы изложить данное доказательство, нам не нужно еще раз подробно повторять все подготовительные мероприятия, подвергнутые детальному обсуждению в гл. II [1]). Мы перечислим только ряд необходимых нам фактов:

1. Рассматриваемая нами формальная система заметно упрощается в результате замены аксиомы индукции формулой

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

и элементарной аксиомой

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

и добавления одноместной функции δ к числу исходных (исходными являются штрих-функция, сложение и умножение).

2. Как известно, для доказательства непротиворечивости нашего формализма достаточно показать, что любая выводимая в нем формула без переменных при естественном определении истинностных и арифметических функций и при обычном понимании равенств между цифрами является истинной.

К этому следует заметить, что в рассматриваемом далее арифметическом формализме *допустимые арифметические функции мы ограничиваем лишь требованием, чтобы для любой из них имелся в наличии способ для эффективного вычисления* ее значений при любых значениях ее аргументов. Для такого рода функций могут быть сформулированы аксиомы, от которых требуется лишь, чтобы они, во-первых, не содержали ни связанных индивидных,

[1]) См. с. 116—119 и 121—150.

ни формульных переменных (точнее говоря, чтобы они были либо равенствами, либо формулами, построенными из равенств при помощи связок исчисления высказываний) и, во-вторых, чтобы при любой замене свободных переменных цифрами они давали истинные формулы, т. е. чтобы они были верифицируемыми формулами [1]).

Верифицируемой формулой является и аксиома

$$a \neq 0 \to \delta(a)' = a$$

(здесь функция δ вычисляется на основе рекурсивных равенств $\delta(0) = 0$, $\delta(n') = n$).

Наряду с равенствами мы могли бы допустить и другие арифметические элементарные формулы, однако такого рода обобщение было бы несущественным, так как элементарные арифметические отношения такие, например, как «a меньше b», «a является делителем b» и т. п., как известно, могут быть выражены соответствующими равенствами при помощи вычислимых, и даже примитивно рекурсивных, функций.

3. К выводу любой формулы без переменных может быть применена операция исключения кванторов при помощи ε-формулы [2]), а вслед за тем — операция возвратного переноса подстановок в исходные формулы и операция исключения свободных переменных. После выполнения этих операций из правил вывода останутся только схемы заключения и переименования связанных переменных, а для каждой из исходных формул будет иметь место следующая альтернатива: либо эта формула получается в результате подстановки из какой-либо тождественно истинной формулы исчисления высказываний или из верифицируемой формулы, либо она получается по схеме равенства

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

или по одной из схем

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{f}',$$

где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{f}$ — термы, не содержащие переменных. Исходные формулы двух последних типов мы называем критическими формулами первого и соответственно второго рода и говорим, что они связаны с ε-термом $\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$. Фигуру доказательства с перечисленными свойствами мы называем нормированным доказательством.

4. Пусть нам дано нормированное доказательство какой-либо формулы без переменных. Если всем входящим в эту формулу ε-термам мы сможем сопоставить в качестве их значений некото-

[1]) См. с. 58.
[2]) См. с. 33—34.

рые цифры таким образом, что одинаковые ε-термы получат одинаковые значения, и при этом с учетом обычной процедуры вычисления арифметических функций и обычного понимания нумерических равенств и истинностных функций каждая из исходных формул получит значение «истина», то и заключительная формула получит значение «истина», так как применение схемы заключения от истинных формул ведет к истинным. Вследствие этого для искомого доказательства непротиворечивости достаточно показать, что для всякого нормированного доказательства можно подобрать такие значения фигурирующих в нем ε-термов, при которых будут выполнены указанные условия для исходных формул. Те из исходных формул, которые получаются в результате подстановок из тождественно истинных или из верифицируемых формул, получают значение «истина» при любых значениях входящих в них ε-термов. Поэтому мы должны специально позаботиться об исходных формулах, построенных по схеме равенства, и о критических формулах первого и второго рода.

5. При выборе значений ε-термов мы должны учитывать те типы комбинирования ε-термов, с которыми связываются понятия вложения и подчинения ε-термов или соответственно ε-выражений, а также понятия степени ε-терма и ранга ε-выражения [1]). Мы используем также понятие основного типа: при этом мы говорим об основных типах таких-то ε-термов или же просто об основных типах. Среди прочих ε-термов основные типы характеризуются тем, что каждый фигурирующий в них в качестве собственной части терм является свободной индивидной переменной и что ни одна из этих переменных не повторяется дважды. С каждым ε-термом однозначно (отвлекаясь от обозначений упомянутых свободных переменных) связывается некоторый основной тип, из которого он получается в результате подстановки термов вместо свободных переменных (быть может, он просто совпадает с ним). Там, где это не будет вызывать недоразумений, мы будем называть этот основной тип просто основным типом данного ε-терма. Для всякого основного типа в нашем распоряжении остается выбор обозначений его свободных переменных (аргументных переменных).

Об основном типе ε-терма, с которым связана данная критическая формула, мы тоже будем говорить, что эта критическая формула связана с рассматриваемым основным типом.

Замечание. Что касается связанных переменных, входящих в ε-термы, то они особой роли играть не будут, и при выборе значений для ε-термов, отличающихся друг от друга лишь обозначениями этих переменных, мы будем рассматривать такие термы как одинаковые, не оговаривая этого каждый раз особо [2]).

[1]) См. с. 43—46.

[2]) См. аналогичное замечание на с. 32.

Основной тип данного ε-терма мы будем заодно считать и основным типом любого ε-выражения, получающегося из рассматриваемого ε-терма в результате замены некоторых его свободных переменных связанными.

6. Выбор значений для ε-термов целесообразно производить с использованием основных типов. Нормированные доказательства устроены так, что встречающиеся в них ε-термы свободных переменных не содержат. Любой такой ε-терм либо совпадает со своим основным типом, и тогда этот основной тип не имеет аргументных переменных и в качестве его значения может быть взята какая-либо цифра; либо же этот ε-терм получается из своего основного типа

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$$

с аргументами переменными $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ в результате замены этих переменных некоторыми термами $t_1, \ldots, t_n$. В качестве значения такого основного типа берется какая-нибудь функция, зависящая от переменных $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$, аргументами и значениями которой являются цифры, причем такая, что ее значение отлично от нуля только для конечного числа наборов значений аргументов. Пусть $\varphi(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ — функция, которая оказывается на месте основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$. Тогда выбор значения ε-терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, t_1, \ldots, t_n)$ сводится к нахождению значения $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$, а тем самым — к нахождению значений термов $t_1, \ldots, t_n$. Каждый из этих термов либо является цифрой, либо строится из цифр и вычислимых функций, так что его значение получается в результате соответствующего вычисления, либо же он снова является ε-термом или содержит один или несколько ε-термов в качестве составных частей. Тогда для этих ε-термов в свою очередь должны быть выбраны их значения. Однако этот процесс в конце концов завершается, так как любой ε-терм, фигурирующий в ε-терме $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, t_1 \ldots, t_n)$ в качестве его составной части, имеет меньший ранг. При таком вычислении ε-термов вложенным друг в друга ε-термам соответствуют вложенные друг в друга арифметические функции, сопоставленные основным типам соответствующих ε-термов. Только тем ε-термам, которые не содержат в качестве составных частей никаких других термов, соответствует не функция, а число.

Такой способ приписывать значения ε-термам, основанный на использовании их основных типов, нацелен прежде всего на то, чтобы избежать циклов, которые могли бы появиться в том случае, если бы мы стали приписывать значения непосредственно самим ε-термам. Действительно, в таком случае могло бы оказаться, что совокупность термов, которым должны приписываться значения, в свою очередь зависит от этих значений. Это обнару-

живается, например, в случае, когда мы имеем дело с критической формулой первого рода, связанной с термом вида

$$\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, \varepsilon_y \mathfrak{B}(x, y)).$$

Если данный ε-терм для краткости обозначить посредством $\mathfrak{e}$, то всякая связанная с ним критическая формула первого рода будет иметь вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}, \varepsilon_y \mathfrak{B}(\mathfrak{f}, y)) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{e}, \varepsilon_y \mathfrak{B}(\mathfrak{e}, y)).$$

Чтобы найти истинностное значение заключения этой импликации, нам потребуется знать значение терма $\varepsilon_y \mathfrak{B}(\mathfrak{e}, y)$, и в зависимости от того, какое значение $\mathfrak{z}$ будет придано терму $\mathfrak{e}$, нам придется вычислять тот или иной ε-терм $\varepsilon_y \mathfrak{B}(\mathfrak{z}, y)$.

При вычислениях значений с помощью основных типов такого рода осложнений возникать не будет. Действительно, в этом случае совокупность основных типов, которым должны быть сопоставлены арифметические функции, наперед определяется совокупностью ε-термов, фигурирующих в рассматриваемом нормированном доказательстве.

Кроме того, описываемый способ обладает тем преимуществом, что при нем формулы, построенные по схеме равенства, всегда, т. е. без дополнительных предосторожностей, принимают значение «истина». В самом деле, всякая такая формула имеет вид

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{b})).$$

Если термы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ получат различные значения $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, то посылка внешней импликации примет значение «ложь», а значит, вся формула в целом — значение «истина». Если же оба эти терма получат одно и то же значение, то в соответствии с нашей процедурой формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ во всех случаях будет отнесено то же самое истинностное значение, что и формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$, так как каждому терму, входящему в $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ и содержащему $\mathfrak{a}$ в качестве составной части, в $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$ соответствует терм, тем же самым способом устроенный с помощью терма $\mathfrak{b}$, а потому и в этом случае вся формула в целом снова получит значение «истина».

Таким образом, задача установления непротиворечивости нашего формализма сводится к тому, чтобы путем придания ε-термам соответствующих значений сделать истинными те критические формулы первого и второго рода, которые могут фигурировать в качестве исходных формул в каких-либо нормированных доказательствах.

С этой целью мы сначала выпишем в некоторой последовательности основные типы всех ε-термов, встречающихся в этих критических формулах. Последовательность эту мы выберем таким образом, чтобы основные типы более низких рангов предшествовали основным типам с более высокими рангами.

Какое-либо сопоставление этим основным типам арифметических функций мы будем называть **общей заменой**[1]. Любая общая замена однозначно определяет значения ε-термов, входящих в критические формулы, а также и всех тех ε-термов, которые получаются из этих термов в результате замены в них одного или нескольких подтермов какими-нибудь цифрами.

О терме, который в результате какой-либо общей замены получает в качестве значения цифру $\mathfrak{z}$, мы будем также говорить, что он при этой общей замене **редуцируется в цифру** $\mathfrak{z}$. В аналогичном смысле о заданной формуле мы будем говорить, что при рассматриваемой общей замене она редуцируется в значение «истина» или в значение «ложь». Мы будем также говорить, что формула $\mathfrak{F}$ при общей замене $\mathfrak{S}$ редуцируется в формулу $\mathfrak{F}_1$, если $\mathfrak{F}_1$ получается из $\mathfrak{F}$ в результате замены фигурирующих в $\mathfrak{F}$ термов теми цифрами, в которые они редуцируются при общей замене $\mathfrak{S}$.

Замысел первоначального гильбертовского подхода к устранению ε-символов[2] заключается в том, чтобы построить некоторую последовательность общих замен, а затем доказать, что уже на некотором конечном шаге она приводит к такой замене, при которой все критические формулы принимают значение «истина».

Основная идея этого подхода такова: по критической формуле первого рода

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})),$$

принимающей при какой-либо общей замене $\mathfrak{S}$ значение «ложь», мы сначала находим такую цифру $\mathfrak{z}$, что формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ при данной общей замене принимает значение «истина». А именно, если при замене $\mathfrak{S}$ терм $\mathfrak{f}$ редуцируется в цифру $\mathfrak{z}$, то посылка $\mathfrak{A}(\mathfrak{f})$, а значит и $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$, при замене $\mathfrak{S}$ должна принимать значение «истина», так как по условию наша критическая формула при этой замене должна быть ложной. Затем от этой цифры $\mathfrak{z}$ можно перейти к наименьшей из цифр $\mathfrak{n}$, входящих в список $0, 0', \ldots, \mathfrak{z}$ и таких, что при данной замене $\mathfrak{S}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ редуцируется в значение «истина». Обозначим эту цифру через $\mathfrak{z}_0$. Тогда всякая критическая формула (первого или второго рода) в результате общей замены $\mathfrak{S}$ при замене в ней терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ цифрой $\mathfrak{z}_0$ будет редуцироваться в значение «истина». Для критических формул второго рода

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{l}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{l}'$$

---

[1] Такое употребление термина «общая замена» было введено в гл. II на с. 138. Еще раньше этот термин использовался в несколько ином смысле (см. с. 128).

[2] См. с. 124 и следующие.

это верно потому, что для цифры $\mathfrak{m}$, в которую при общей замене $\mathfrak{S}$ редуцируется терм $\mathfrak{l}$, либо верна формула $\mathfrak{d}_0 \neq \mathfrak{m}'$, либо — в противном случае — из того, что $\mathfrak{m}$ меньше $\mathfrak{d}_0$, следует, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$, а значит, и $\mathfrak{A}(\mathfrak{l})$ редуцируется в значение «ложь».

И все же попытка воспользоваться этим обстоятельством для построения очередной общей замены наталкивается на трудности из-за большого разнообразия возможных вложений и подчинений ε-термов, и потому требуются дополнительные соображения, которые могли бы обеспечить некоторый прогресс при построении очередных общих замен. Такое соображение, выдвинутое В. Аккерманом, заключается в том, что процесс построения замен должен быть организован таким образом, чтобы каждая общая замена $\mathfrak{S}$ удовлетворяла следующему дополнительному *условию*: если $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, c_1, \ldots, c_r)$ — какой-либо основной тип из нашего списка основных типов, а $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$ — *произвольные* цифры, и если $\mathfrak{d}$ — цифра, в которую при общей замене $\mathfrak{S}$ редуцируется терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$, то либо $\mathfrak{d}$ представляет собой цифру 0, либо формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$ редуцируется при этой замене в значение «истина», в то время как для любой меньшей цифры $\mathfrak{p}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$ при рассматриваемой замене редуцируется в значение «ложь».

Общую замену, удовлетворяющую этому условию, мы будем называть допустимой.

Примером допустимой общей замены может служить 0-замена, при которой каждому основному типу без аргументов сопоставляется цифра 0, а каждому основному типу с аргументами — функция с тем же самым числом аргументов, тождественно равная 0.

В последовательности производимых нами общих замен 0-замена всегда будет играть роль исходной.

Заметим, далее, что при любой допустимой общей замене $\mathfrak{S}$ всякая критическая формула второго рода редуцируется в значение «истина». Действительно, любая такая критическая формула, связанная с основным типом

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r),$$

имеет, как мы знаем, вид

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}, a_1, \ldots, a_r) \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r) \neq \mathfrak{f}',$$

и если при общей замене $\mathfrak{S}$ термы $\mathfrak{f}, a_1, \ldots, a_r$ редуцируются в цифры $\mathfrak{n}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$, а терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$ в цифру $\mathfrak{d}$, то эта критическая формула редуцируется в формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r) \rightarrow \mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}'.$$

Либо заключение этой формулы является истинным, либо цифры $\mathfrak{n}'$ и $\mathfrak{d}$ совпадают, а тогда $\mathfrak{n}$ меньше $\mathfrak{d}$, и потому при общей замене $\mathfrak{S}$, являющейся по условию допустимой, посылка этой формулы редуцируется в значение «ложь».

Таким образом, если мы в дальнейшем будем иметь дело с только допустимыми общими заменами, то критическими формулами второго рода можно будет больше не интересоваться.

Далее, из определения допустимой общей замены вытекает, что при любой такой замене $\mathfrak{S}$ всякий раз, когда какой-либо ε-терм, с которым связана динная критическая формула первого рода, редуцируется в цифру, отличную от 0, эта критическая формула редуцируется в значение «истина». Действительно, всякая такая формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r), a_1, \ldots, a_r)$$

при общей замене $\mathfrak{S}$ редуцируется, как мы знаем, в формулу

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r),$$

где $\mathfrak{n}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$ суть цифры, в которые при $\mathfrak{S}$ редуцируются термы $\mathfrak{f}, a_1, \ldots, a_r$, а $\mathfrak{d}$ — значение, принимаемое сопоставленной при этой замене основному типу

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$$

функцией при аргументах $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$. Если $\mathfrak{d}$ отлично от 0, то формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$, а потому и рассматриваемая критическая формула, при допустимой общей замене $\mathfrak{S}$ редуцируется в значение «истина».

Кроме того, мы укажем некоторую процедуру, позволяющую по любой допустимой общей замене $\mathfrak{S}$ такой, что хотя бы одна критическая формула первого рода редуцируется этой заменой в значение «ложь», получить новую допустимую общую замену. Процедура эта состоит в следующем: мы рассматриваем те ε-термы, с которыми связаны критические формулы, редуцирующиеся при замене $\mathfrak{S}$ в значение «ложь». Среди основных типов этих ε-термов мы берем тот, который в установленной нами последовательности основных типов идет первым. Пусть $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ — этот основной тип, и пусть $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ — критические формулы, связанные с какими-либо ε-термами данного основного типа и редуцирующиеся при замене $\mathfrak{S}$ в значение «ложь». Терм, с которым связана какая-либо такого рода формула, имеет вид $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$. При общей замене $\mathfrak{S}$ термы $a_1, \ldots, a_r$ редуцируются в некоторые конкретные цифры $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$, а терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$ ввиду того, что данная замена является допустимой, редуцируется в цифру 0, так как с термом $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ свя-

зана некоторая критическая формула, редуцирующаяся в значение «ложь». Среди r-членных наборов цифр, выступающих в такой роли, мы берем тот, который в нумерации этих наборов имеет наименьший номер. (Мы считаем, что нумерация наборов производится по максимальной цифре, а при равных максимальных цифрах — в лексикографическом порядке [1]).) Пусть $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ — этот набор. Те из формул $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, у которых термы-аргументы связанного с ними ε-терма редуцируются в цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$, представляют собой импликации с посылками вида $\mathfrak{A}(\mathfrak{f}, a_1, \ldots, a_r)$. Каждая из этих посылок при замене $\mathfrak{G}$ должна редуцироваться в значение «истина», в то время как термы $a_1, \ldots, a_r$ редуцируются в цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$, а $\mathfrak{f}$ редуцируется в некоторую цифру. Пусть $\mathfrak{d}_0$ — наименьшая из цифр, в которые редуцируются эти термы $\mathfrak{f}$. Пусть, далее, $\mathfrak{d}^*$ — наименьшая из тех цифр $\mathfrak{n}$ из списка $0', 0'', \ldots, \mathfrak{d}_0$, для которых формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ редуцируется в значение «истина». (Цифру 0 мы исключаем из рассмотрения, поскольку формула $\mathfrak{A}(0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$, как мы знаем, редуцируется в значение «ложь».) Затем сопоставленная при замене $\mathfrak{G}$ основному типу $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ функция видоизменяется таким образом, что для набора аргументов $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ ее значение полагается равным $\mathfrak{d}^*$, в то время как при остальных значениях аргументов ее прежние значения сохраняются. Для тех основных типов, которые в нашей последовательности предшествуют основному типу $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$, сопоставленные им функции мы оставляем без изменений, а у следующих за ним основных типов мы возвращаемся к 0-замене.

Мы теперь покажем, что полученная таким образом, исходя из $\mathfrak{G}$, общая замена $\mathfrak{G}'$ тоже является *допустимой*.

Для этого требуется убедиться, что для каждого основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ из нашего списка основных типов выполняется следующее условие: для любого n-членного набора цифр $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ такого, что терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ при замене $\mathfrak{G}'$ редуцируется в отличную от 0 цифру $\mathfrak{d}$, формула $\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ редуцируется в значение «истина», в то время как для любой цифры $\mathfrak{p}$, меньшей $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ принимает значение «ложь». При этом мы должны считаться с тем обстоятельством, что в том случае, когда основному типу $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ подчинены какие-либо другие ε-выражения, в формуле $\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ или соответственно в $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ в качестве составных частей будут фигурировать соответствующие ε-термы.

Например, если основной тип $\varepsilon_x\mathfrak{C}(x, c)$ в подробной записи имеет вид

$$\varepsilon_x\mathfrak{B}(x, c, \varepsilon_y\mathfrak{H}(x, y, c)),$$

[1]) Такую нумерацию мы уже использовали ранее, см. с. 214.

то соответствующая формула $\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1)$ будет записываться в виде

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \varepsilon_y\mathfrak{H}(\mathfrak{d}, y, \mathfrak{d}_1))$$

и, соответственно, $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_1)$ будет иметь вид

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_1, \varepsilon_y\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, y, \mathfrak{d}_1)).$$

Фигурирующие таким образом в формулах $\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ и $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n)$ ε-термы всегда имеют ранг, меньший ранга ε-терма (основного типа) $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$. Если теперь основной тип $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ в последовательности наших основных типов предшествует играющему в построении общей замены $\mathfrak{G}'$ главную роль основному типу $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$, который мы для краткости обозначим через $\mathfrak{e}$, то основной тип любого ε-терма более низкого ранга и подавно будет предшествовать основному типу $\mathfrak{e}$, а потому при замене $\mathfrak{G}'$ ему будет сопоставлена та же самая функция, что и при замене $\mathfrak{G}$. Таким образом, основные типы, предшествующие в нашей последовательности основному типу $\mathfrak{e}$, при замене $\mathfrak{G}'$, как и при замене $\mathfrak{G}$, удовлетворяют условию, сформулированному в определении допустимой общей замены. С другой стороны, для основных типов, следующих за $\mathfrak{e}$, это условие при замене $\mathfrak{G}'$ выполнено тривиальным образом, так как этим основным типам сопоставлена 0-замена. Следовательно, остается рассмотреть основной тип $\mathfrak{e}$, т. е. $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$. Замену $\mathfrak{G}'$ мы выбрали так, что для любого r-членного набора цифр $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$, отличного от набора $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$, терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$ при замене $\mathfrak{G}'$ редуцируется так же, как и при $\mathfrak{G}$; кроме того, для любой цифры $\mathfrak{d}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r)$ (которая, как мы знаем, может содержать только ε-термы ранга меньшего, чем ранг $\mathfrak{e}$) при $\mathfrak{G}'$ редуцируется так же, как и при $\mathfrak{G}$. Что же касается набора $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$, то терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ при $\mathfrak{G}'$ редуцируется в цифру $\mathfrak{d}^*$, а формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{d}^*, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ редуцируется при $\mathfrak{G}$, а потому и при $\mathfrak{G}'$, в значение «истина», в то время как $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ при любой цифре $\mathfrak{p}$, меньшей $\mathfrak{d}^*$, и при $\mathfrak{G}$ и при $\mathfrak{G}'$ редуцируется в значение «ложь».

Таким образом, мы теперь в состоянии построить, исходя из 0-замены, некоторую последовательность допустимых общих замен, обладающую тем свойством, что за каждой общей заменой, в результате которой не все критические формулы — здесь речь идет только о критических формулах первого рода — редуцируются в значение «истина», следует новая общая замена, отличающаяся от предшествующей одним значением функции, сопоставленной одному из основных типов (или, в простейшем случае, — сопоставленным этому основному типу числом).

Теперь мы покажем, что в этой последовательности допустимых общих замен после конечного числа шагов наступает обрыв.

Чтобы установить этот факт, мы, следуя Аккерману, введем ряд понятий, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Приписывание какого-либо отличного от 0 значения функции для одного из основных типов в одной из точек (соответственно приписывание какого-либо отличного от 0 значения для основного типа без аргументов) мы будем называть заменой примером[1]). Для каждой общей замены, за исключением начальной 0-замены, среди основных типов имеется первый, такой, что приписанная ему функция (соответственно число) отличается от функции (числа), приписанной ему в предшествующей общей замене. Номер этого основного типа в списке рассматриваемых основных типов мы будем называть характеристическим номером данной общей замены, а количество всех таких основных типов, начиная с данного, мы будем называть характеристическим числом этой общей замены.

Рассматриваемые общие замены мы будем обозначать в порядке их образования посредством $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, ... Общую замену $\mathfrak{G}_k$ мы будем называть прогрессивной по отношению к предшествующей ей общей замене $\mathfrak{G}_i$, если все замены примерами из $\mathfrak{G}_i$ сохраняются и в $\mathfrak{G}_k$.

При $i<k$ общая замена $\mathfrak{G}_k$ всегда содержит некоторую замену примером, которая в $\mathfrak{G}_i$ отсутствует. Действительно, пусть $\mathfrak{G}_j$ — замена из списка $\mathfrak{G}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{G}_k$, с минимальным характеристическим номером. Тогда заменой $\mathfrak{G}_j$ вводится некоторая замена примером, не фигурирующая в $\mathfrak{G}_i$, и эта замена сохраняется и в возможных дальнейших общих заменах, образуемых в соответствии с нашей процедурой построения общих замен.

Пусть a_0, a_1, ..., a_h — список ε-термов, каждый из которых имеет основной тип, входящий в наш список основных типов, и пусть вместе с каждым встречающимся в нем ε-термом t в него входит и каждый ε-терм, вложенный в t, причем на более раннем месте. Чтобы удовлетворить последнему из этих условий, относящемуся к порядку следования ε-термов в конечной их совокупности, достаточно нумерацию этих ε-термов ввести таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: различные ε-термы получают различные номера и ε-терм, являющийся собственной составной частью некоторого другого ε-терма, имеет номер, меньший

[1]) Этим названием отмечается то обстоятельство, что данное, отличное от 0 значение функции, вновь соотносимое общей заменой основному типу $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ в точке $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$, представляет собой пример цифры $\mathfrak{z}$, при которой формула $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ этой общей заменой редуцируется в значение «истина».

номера этого последнего[1]). Очередность для ε-термов какой-либо совокупности при этом устанавливается так, чтобы эти термы располагались в порядке возрастания сопоставленных им номеров. Мы зафиксируем какой-либо такой порядок ε-термов, и будем называть список, удовлетворяющий указанному условию, нормальным списком ε-термов.

Под редукционным числом общей замены $\mathfrak{G}$ относительно нормального списка ε-термов a_0, a_1, ..., a_h мы будем понимать значение, принимаемое выражением

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \ldots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h,$$

где n_j $(j=0, \ldots, h)$ принимает значение 1 или 0 в зависимости от того, в какую цифру — равную нулю или отличную от него — редуцируется терм a_j при общей замене $\mathfrak{G}$.

Нас будут особенно интересовать редукционные числа общих замен $\mathfrak{G}_i$ относительно двух специальных нормальных списков ε-термов: во первых, относительно (упорядоченного в установленной очередности) списка всех ε-термов, входящих в рассматриваемые критические формулы первого рода, и, во-вторых, относительно (снова упорядоченного в указанной очередности) списка тех входящих в формулы

$$\mathfrak{A}(0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r), \mathfrak{A}(0', \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$$

ε-термов, с помощью которых при замене $\mathfrak{G}_i$ находится цифра $\mathfrak{z}^*$ для следующей общей замены. Редукционное число замены $\mathfrak{G}_i$ относительно первого из упомянутых списков ε-термов мы будем сокращенно называть первым редукционным числом этой замены, а редукционное число относительно второго списка — вторым редукционным числом $\mathfrak{G}_i$.

Нам потребуются некоторые факты, относящиеся к этим редукционным числам.

Лемма 1. *Первые редукционные числа общих замен $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_{i+1}$ различны.*

Действительно, при переходе от $\mathfrak{G}_i$ к $\mathfrak{G}_{i+1}$, как мы помним, в точности один основной тип $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ получает дополнительную замену примером для некоторого набора $(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ его аргументов. При этом цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ получаются из некоторого ε-терма $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$, с которым связана одна из наших критических формул, редуцирующаяся при замене $\mathfrak{G}_i$ в значение «ложь». Термы $a_1, \ldots, a_r$ при замене $\mathfrak{G}_i$ редуцируются

[1]) Для этого годится, например, нумерация, которая получается из введенной в гл. V на с. 367—370 нумерации для формализма (Z_μ) в результате сопоставления каждому ε-терму $\mathfrak{e}$ номера, получаемого в указанной нумерации термом t, представляющим собой результат замены каждого входящего в $\mathfrak{e}$ ε-символа соответствующим ему μ-символом.

в цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$, а терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ в цифру 0. Может оказаться, что ε-термы, фигурирующие в термах $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$, при замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ редуцируются точно так же, как и при $\mathfrak{S}_i$. В этом случае упомянутые термы при замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ редуцируются тоже в цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$. Но терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ при замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ редуцируется в цифру, отличную от 0, и, значит, терм $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ при замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ редуцируется иначе, чем при $\mathfrak{S}_i$. (Это верно, конечно, и в том случае, когда число r аргументов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ равно нулю.) В противном случае по крайней мере один из ε-термов, фигурирующих в термах $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$, при замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ редуцируется иначе, чем при $\mathfrak{S}_i$, и один из таких термов входит и в список ε-термов, встречающихся в наших критических формулах первого рода. Итак, в любом случае в этом списке имеется по крайней мере один терм, который при замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ редуцируется иначе, чем при замене $\mathfrak{S}_i$. Но это различие может заключаться только в том, что при одной из этих двух общих замен данный ε-терм редуцируется в 0, а при другой — в цифру, отличную от 0. В самом деле, изменение значений основных типов при переходе от замены $\mathfrak{S}_i$ к замене $\mathfrak{S}_{i+1}$ состоит лишь в том, что, с одной стороны, вместо некоторого значения функции, равного 0, появляется новое ее значение, отличное от 0, а с другой стороны, для некоторых основных типов происходит возврат к 0-замене. Следовательно, в выражении

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \ldots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h,$$

определяющем первое редукционное число, при переходе от $\mathfrak{S}_i$ к $\mathfrak{S}_{i+1}$ изменяется по крайней мере одно из чисел $n_0, n_1, \ldots, n_h$. Но тем самым изменяется и значение этого выражения, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если общая замена $\mathfrak{S}_k$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$, то, каков бы ни был нормальный список ε-термов, либо ε-термы этого списка одинаково редуцируются при заменах $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_k$, либо редукционное число относительно этого списка у замены $\mathfrak{S}_k$ меньше, чем у замены $\mathfrak{S}_i$.*

Действительно, возьмем произвольный нормальный список ε-термов и предположим, что первый случай альтернативы места не имеет. Пусть $\mathfrak{a}_j$ — первый из тех ε-термов этого списка, которые при $\mathfrak{S}_k$ редуцируются иначе, чем при $\mathfrak{S}_i$. Пусть этот терм получается из своего основного типа $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, c_1, \ldots, c_r)$ в результате замены аргументных переменных $c_1, \ldots, c_r$ термами $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_r$. Тогда каждый ε-терм, встречающийся в термах $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_r$, входит в рассматриваемый нормальный список, причем располагается в нем перед $\mathfrak{a}_j$. Значит, такой терм при замене $\mathfrak{S}_k$ редуцируется так же, как и при $\mathfrak{S}_i$. Тем самым термы $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_r$ при $\mathfrak{S}_k$ редуцируются так же, как и при $\mathfrak{S}_i$. Пусть $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$ —

цифры, в которые эти термы редуцируются при обеих рассматриваемых нами общих заменах. Тогда основной тип $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, c_1, \ldots, c_r)$ при замене $\mathfrak{S}_k$ получает в точке $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_r$ замену, отличную от той, которую он получает при $\mathfrak{S}_i$. Так как замена $\mathfrak{S}_k$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$, то это изменение должно заключаться в переходе от 0-замены к некоторой замене примером. Поэтому в выражении

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \ldots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h,$$

определяющем редукционные числа этих общих замен относительно рассматриваемого нормального списка ε-термов, значения $n_0, \ldots, n_{j-1}$ у замен $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_k$ совпадают, n_j у $\mathfrak{S}_i$ имеет значение 1, а у $\mathfrak{S}_k$ — значение 0, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если общая замена $\mathfrak{S}_k$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$, то либо первое редукционное число у $\mathfrak{S}_k$ меньше, чем у $\mathfrak{S}_i$, либо эти числа равны и второе редукционное число у $\mathfrak{S}_k$ меньше, чем у $\mathfrak{S}_i$, либо же оба эти редукционные числа у замен $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_k$ равны, и в этом случае за $\mathfrak{S}_k$ следует общая замена $\mathfrak{S}_{k+1}$, прогрессивная по отношению к $\mathfrak{S}_{i+1}$ и имеющая то же самое характеристическое число, что и $\mathfrak{S}_{i+1}$; в последнем случае, кроме того, новая замена примером при переходе от $\mathfrak{S}_k$ к $\mathfrak{S}_{k+1}$ оказывается той же самой, что и при переходе от $\mathfrak{S}_i$ к $\mathfrak{S}_{i+1}$.*

В самом деле, применив лемму 2 к списку ε-термов, определяющему первое редукционное число, мы сможем заключить, что либо это число у замены $\mathfrak{S}_k$ меньше, чем у $\mathfrak{S}_i$, либо все ε-термы, входящие в рассматриваемые критические формулы первого рода, при обеих этих заменах редуцируются одинаково. Нахождение новой замены примером для $\mathfrak{S}_i$ и для $\mathfrak{S}_k$ в этом случае будет связано с одной и той же формулой. К замене $\mathfrak{S}_k$, так же как и к $\mathfrak{S}_i$, примыкает следующая за ней общая замена $\mathfrak{S}_{k+1}$, и характеристический номер l замены $\mathfrak{S}_{k+1}$ будет тем же самым, что и у замены $\mathfrak{S}_{i+1}$. Кроме того, вторые редукционные числа у $\mathfrak{S}_i$ и у $\mathfrak{S}_k$ относятся к одной и той же совокупности ε-термов. Отсюда по лемме 2 получается, что либо второе редукционное число у замены $\mathfrak{S}_k$ меньше, чем у $\mathfrak{S}_i$, либо все ε-термы этой совокупности при замене $\mathfrak{S}_k$ редуцируются так же, как при $\mathfrak{S}_i$. Но отсюда следует, что добавляющаяся в $\mathfrak{S}_{k+1}$ замена примером будет той же самой, что и в $\mathfrak{S}_{i+1}$. Кроме того, можно утверждать, что все замены примером, имеющиеся в $\mathfrak{S}_{i+1}$, будут присутствовать также и в $\mathfrak{S}_{k+1}$. Действительно, замены примером, входящие в $\mathfrak{S}_{i+1}$, состоят, как мы помним, из замен, входящих в $\mathfrak{S}_i$ и касающихся определения значений основных типов с номерами, не превосходящими l, а кроме того, из замены примером, добавляющейся в $\mathfrak{S}_{i+1}$. Но все такие замены, входящие в $\mathfrak{S}_i$, присутствуют и в $\mathfrak{S}_k$, так как $\mathfrak{S}_k$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$, и

поскольку эти замены относятся к основным типам с номерами, не превосходящими l, то они сохраняются при переходе от $\mathfrak{S}_k$ к $\mathfrak{S}_{k+1}$. Кроме того, при этом переходе добавляется та же самая замена примером, которая добавляется при переходе от $\mathfrak{S}_i$ к $\mathfrak{S}_{i+1}$. Таким образом, общая замена $\mathfrak{S}_{k+1}$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_{i+1}$, что и требовалось доказать.

Теперь мы введем понятия $\mathfrak{m}$-списка общих замен и индекса $\mathfrak{m}$-списка. Последовательность идущих друг за другом общих замен $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{S}_{i+p}$ мы будем называть 1-списком, если $p=0$, т. е. если эта последовательность состоит в точности из одной общей замены. При $\mathfrak{m}>1$ последовательность $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{S}_{i+p}$ будет называться $\mathfrak{m}$-списком, если характеристические числа всех замен $\mathfrak{S}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{S}_{i+p}$ меньше $\mathfrak{m}$, а $\mathfrak{S}_i$ либо совпадает с 0-заменой $\mathfrak{S}_0$, либо имеет характеристическое число, большее или равное $\mathfrak{m}$, и если, кроме того, в случае, когда $\mathfrak{S}_{i+p}$ не является последней общей заменой, $\mathfrak{S}_{i+p+1}$ имеет характеристическое число, большее или равное $\mathfrak{m}$. Таким образом, у $\mathfrak{m}$-списка $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{S}_{i+p}$ последовательность $\mathfrak{S}_{i+1}$, ..., $\mathfrak{S}_{i+p}$ представляет собой непродолжимую в обе стороны последовательность общих замен с характеристическими числами, меньшими $\mathfrak{m}$. Согласно этому определению $(\mathfrak{m}+1)$-список может одновременно быть и $\mathfrak{m}$-списком, но, вообще говоря, он состоит из нескольких $\mathfrak{m}$-списков, у которых, начиная со второго подсписка, начальный член имеет характеристическое число, равное $\mathfrak{m}$.

Очевидно, что у общих замен любого $(\mathfrak{m}+1)$-списка значения всех основных типов, за исключением последних $\mathfrak{m}$, определены одинаково.

Индексом любого 1-списка, состоящего, как мы помним, из единственной общей замены $\mathfrak{S}$, мы будем называть 0-ω-фигуру $\omega^1\cdot r+\omega^0\cdot s$, или, короче, $\omega\cdot r+s$, в которой r — первое, а s — второе редукционное число замены $\mathfrak{S}$. Индексом $(\mathfrak{m}+1)$-списка, у которого следующие друг за другом $\mathfrak{m}$-списки, из которых он состоит, имеют индексы α_1, ..., α_h, мы будем называть фигуру

$$\omega^{\alpha_1}+\ldots+\omega^{\alpha_h}.$$

То, что определенные таким образом индексы $\mathfrak{m}$-списков при $\mathfrak{m}>1$ тоже являются 0-ω-фигурами, мы докажем путем перехода от $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{m}+1$, показав, что индексы следующих друг за другом $\mathfrak{m}$-списков, составляющих данный $(\mathfrak{m}+1)$-список, всегда образуют убывающую последовательность 0-ω-фигур.

Доказав это, мы одновременно достигнем и нашей конечной цели, т. е. покажем, что последовательность идущих друг за другом общих замен всегда ведет к обрыву, т. е. приводит к такой общей замене, в результате которой все критические формулы редуцируются в значение «истина».

В самом деле, любая убывающая последовательность 0-ω-фигур после конечного числа шагов, как мы помним, обрывается. Поэтому если индексы идущих друг за другом $\mathfrak{m}$-списков в каком-либо $(\mathfrak{m}+1)$-списке образуют убывающую последовательность 0-ω-фигур, то в каждом $(\mathfrak{m}+1)$-списке друг за другом может идти только конечное число $\mathfrak{m}$-списков. В соответствии с этим мы сначала получим, что в любом 2-списке может содержаться только конечное число 1-списков, т. е. конечное число общих замен, а затем, путем перехода от $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{m}+1$, что в любом $\mathfrak{m}$-списке может содержаться только конечное число общих замен.

Но если g — число основных типов в нашем списке основных типов, то наша последовательность общих замен каждый раз представляет собой начальный отрезок некоторого $(g+1)$-списка, так как характеристическое число любой общей замены не может быть больше g, и, значит, в этой последовательности после конечного числа шагов должен будет наступить обрыв. Таким образом, фактически остается показать, что индексы идущих друг за другом $\mathfrak{m}$-списков любого $(\mathfrak{m}+1)$-списка образует убывающую последовательность.

С этой целью из нашей леммы 3 мы выведем следствие, которое гласит, что

Если какая-либо общая замена $\mathfrak{S}_k$ прогрессивна по отношению к другой общей замене $\mathfrak{S}_l$, то либо индекс $\mathfrak{S}_k$ меньше индекса $\mathfrak{S}_l$, либо обе эти замены имеют один и тот же индекс и за заменой $\mathfrak{S}_k$ идет общая замена $\mathfrak{S}_{k+1}$, прогрессивная по отношению к $\mathfrak{S}_{l+1}$ и имеющая то же самое характеристическое число и ту же самую новую замену примером, что и $\mathfrak{S}_{l+1}$.

Первый случай имеет место тогда, когда выполняется одна из первых двух альтернатив в заключении леммы 3. Это следует из того, что и в том случае, когда уменьшается первое редукционное число r какой-либо общей замены, и в том случае, когда оно остается неизменным, но уменьшается второе ее редукционное число s, уменьшается и индекс $\omega\cdot r+s$ этой замены. Второй случай имеет место, когда выполняется третья альтернатива в заключении леммы 3.

Добавив к этому лемму 1, мы получаем также, что если общая замена $\mathfrak{S}_{i+1}$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$, то ее индекс меньше индекса $\mathfrak{S}_i$.

Отсюда немедленно следует, что общие замены, образующие какой-либо 2-ряд, имеют убывающие индексы. Действительно, все эти замены, не считая первой, имеют характеристическое число 1 и, значит, характеристический номер g. Следовательно, у каждой из этих общих замен все замены примером сохраняются. Это означает, что каждая из этих замен (снова не считая первой) прогрессивна по отношению к предыдущей, и потому может быть применено только что сформулированное следствие из

леммы 1. Из того, что индексы общих замен в 2-списке убывают, следует, во-первых, что всякий такой 2-список после конечного числа шагов обрывается и, далее, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ суть индексы последовательных общих замен, то фигура $\omega^{\alpha_1}+\ldots+\omega^{\alpha_n}$, которую мы в свое время объявили индексом этого 2-списка, представляет собой 0-ω-фигуру.

Заодно мы получаем, что если у двух 2-списков (не обязательно идущих друг за другом) индекс первой общей замены первого списка больше индекса первой общей замены второго списка, то и индекс первого списка больше индекса второго списка. Кроме того, верно также, что если у двух 2-списков

$$\mathfrak{S}_i, \ \mathfrak{S}_{i+1}, \ \ldots$$

и

$$\mathfrak{S}_{i+p}, \ \mathfrak{S}_{i+p+1}, \ \ldots$$

(не обязательно идущих непосредственно друг за другом) индексы общих замен совпадают вплоть до замен $\mathfrak{S}_{i+r-1}$ и $\mathfrak{S}_{i+p+r-1}$ *включительно*, а замена $\mathfrak{S}_{i+r}$ имеет больший индекс, чем $\mathfrak{S}_{i+p+r}$, то индекс первого из этих двух 2-списков тоже больше индекса второго.

Теперь утверждения, доказанные здесь для 2-списков, надлежит доказать для произвольных m-списков при $m \geqslant 2$. Соответствующие утверждения гласят:

(1) Для каждого входящего в рассмотрение числа m фигуры, представляющие собой индексы $(m-1)$-списков, являются 0-ω-фигурами.

(2) Индексы $(m-1)$-списков, идущих друг за другом в каком-либо m-списке, убывают.

(3) Если нам даны два m-списка, начинающиеся общими заменами $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_{i+p}$ (эти списки не обязаны идти непосредственно друг за другом), и если индекс $\mathfrak{S}_i$ больше индекса $\mathfrak{S}_{i+p}$, то индекс первого из этих двух m-списков больше индекса второго. Аналогичное утверждение имеет место в том случае, когда оба эти m-списка начинаются соответственно общими заменами

$$\mathfrak{S}_i, \ \mathfrak{S}_{i+1}, \ \ldots, \ \mathfrak{S}_{i+r}$$

и

$$\mathfrak{S}_{i+p}, \ \mathfrak{S}_{i+p+1}, \ \ldots, \ \mathfrak{S}_{i+p+r},$$

причем индекс $\mathfrak{S}_{i+r}$ больше индекса $\mathfrak{S}_{i+p+r}$, а при $0 \leqslant j < r$ индексы замен $\mathfrak{S}_{i+j}$ и $\mathfrak{S}_{i+p+j}$ равны и при $1 \leqslant j \leqslant r$ равны характеристические числа замен $\mathfrak{S}_{i+j}$ и $\mathfrak{S}_{i+p+j}$.

Эти утверждения мы докажем путем перехода от m к $m+1$; т. е., допустив, что они уже доказаны для чисел до m включительно, мы докажем их для $m+1$.

Для этого мы прежде всего заметим, что из высказываний (1) и (2) об $(m-1)$-списках, составляющих какой-либо m-список, немедленно вытекает утверждение (1) для этого m-списка. Это обстоятельство будет явно использовано в утверждении (3), когда мы будем говорить о «большем» из индексов двух m-списков.

Нам нужно также доказать утверждение (2) для m-списков, следующих в каком-либо $(m+1)$-списке друг за другом. При этом мы воспользуемся справедливостью утверждения (3) для m-списков.

Итак, рассмотрим два m-списка, следующих в каком-либо $(m+1)$-списке друг за другом. Пусть первый из них записывается в виде

$$\mathfrak{S}_i, \ \mathfrak{S}_{i+1}, \ \ldots, \ \mathfrak{S}_{i+p-1} \qquad (p \geqslant 1).$$

Тогда второй начинается заменой $\mathfrak{S}_{i+p}$. Либо замена $\mathfrak{S}_i$ представляет собой $\mathfrak{S}_0$, либо ее характеристическое число $\geqslant m$. Характеристическое число замены $\mathfrak{S}_{i+p}$ равно m, а $\mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{i+p-1}$ имеют меньшие характеристические числа. Отсюда следует, что ни одна из имеющихся в $\mathfrak{S}_i$ замен примером не ликвидируется ни в одной из общих замен $\mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{i+p}$. Таким образом, замена $\mathfrak{S}_{i+p}$ прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$. Поэтому по лемме 3 либо индекс $\mathfrak{S}_{i+p}$ меньше индекса $\mathfrak{S}_i$, либо эти две замены имеют одинаковые индексы и за $\mathfrak{S}_{i+p}$ следует общая замена $\mathfrak{S}_{i+p+1}$, прогрессивная по отношению к $\mathfrak{S}_{i+1}$ и имеющая то же самое характеристическое число, что и $\mathfrak{S}_{i+1}$. (Заметим, что во втором из этих двух случаев p не может быть равно 1, так как иначе замена $\mathfrak{S}_{i+p}$ была бы непосредственно следующей за $\mathfrak{S}_i$, и так как она прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_i$, то она должна была бы иметь индекс, меньший индекса $\mathfrak{S}_i$.) В этом случае $\mathfrak{S}_{i+p+1}$ принадлежит m-списку, начинающемуся общей заменой $\mathfrak{S}_{i+p}$.

Проследим этот второй случай дальше. Общая замена $\mathfrak{S}_{i+p+1}$, являющаяся, как мы знаем, прогрессивной по отношению к $\mathfrak{S}_{i+1}$, либо имеет меньший индекс чем $\mathfrak{S}_{i+1}$, либо обе они имеют одинаковые индексы и вслед за заменой $\mathfrak{S}_{i+p+1}$ идет общая замена $\mathfrak{S}_{i+p+2}$, которая прогрессивна по отношению к $\mathfrak{S}_{i+2}$ и имеет то же самое характеристическое число, а также ту же самую новую замену примером, что и $\mathfrak{S}_{i+2}$. При этом $\mathfrak{S}_{i+2}$ не может быть заменой $\mathfrak{S}_{i+p}$. Действительно, если бы это было так, то новая замена примером из $\mathfrak{S}_{i+p+2}$ была бы той же самой, что и в $\mathfrak{S}_{i+p}$. Но эта замена, как мы знаем, не была ликвидирована заменой $\mathfrak{S}_{i+p+1}$ (потому что эта замена имеет не большее, — собственно говоря, даже меньшее — характеристическое число чем $\mathfrak{S}_{i+p}$); следовательно, она не может фигурировать в $\mathfrak{S}_{i+p+2}$ в качестве новой замены примером. Таким образом, $p > 2$ и $\mathfrak{S}_{i+2}$ пока еще принадлежит первому m-списку, а $\mathfrak{S}_{i+p+2}$ — второму m-списку. Так как в последнем случае общая замена $\mathfrak{S}_{i+p+2}$ прогрессивна

по отношению к $\mathfrak{S}_{i+2}$, то мы можем тем же самым способом продолжить этот процесс дальше. Таким образом, в обоих $\mathfrak{m}$-списках

$$\mathfrak{S}_i,\ \mathfrak{S}_{i+1},\ \ldots$$

и

$$\mathfrak{S}_{i+p},\ \mathfrak{S}_{i+p+1},\ \ldots$$

совпадение индексов и характеристических чисел замен $\mathfrak{S}_{i+j}$ и $\mathfrak{S}_{i+p+j}$, а также найденных на основе этих общих замен новых замен примером будет продолжаться до тех пор, пока мы не дойдем до такой общей замены $\mathfrak{S}_{i+r}$, которой во втором списке соответствует общая замена $\mathfrak{S}_{i+p+r}$ с меньшим индексом. Это должно случиться не позже того момента, когда мы дойдем до замены $\mathfrak{S}_{i+p-1}$, т. е. $\mathfrak{S}_{i+r}$ не может быть заменой $\mathfrak{S}_{i+p}$. В самом деле, этой замене не может соответствовать такая замена $\mathfrak{S}_{i+2\cdot p}$, в которой новая замена примером, ведущая от $\mathfrak{S}_{i+p-1}$ к $\mathfrak{S}_{i+p}$, снова вводилась бы в качестве новой, так как эта замена во втором $\mathfrak{m}$-списке удерживается постоянно. Таким образом, получается следующая альтернатива: либо $\mathfrak{S}_i$ имеет больший индекс, чем $\mathfrak{S}_{i+p}$, либо следующие друг за другом два $\mathfrak{m}$-списка начинаются соответственно заменами

$$\mathfrak{S}_i,\ \mathfrak{S}_{i+1},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{i+r}$$

и

$$\mathfrak{S}_{i+p},\ \mathfrak{S}_{i+p+1},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{i+p+r},$$

причем $\mathfrak{S}_{i+r}$ имеет больший индекс, чем $\mathfrak{S}_{i+p+r}$, и $r<p$, в то время как для $0\leqslant j<r$ индекс $\mathfrak{S}_{i+j}$ совпадает с индексом $\mathfrak{S}_{i+p+j}$, а кроме того, для $1\leqslant j\leqslant r$ совпадают характеристические числа замен $\mathfrak{S}_{i+j}$ и $\mathfrak{S}_{i+p+j}$.

Таким образом, ввиду справедливости утверждения (3) для числа $\mathfrak{m}$, в обоих случаях первый из рассматриваемых двух $\mathfrak{m}$-списков имеет больший индекс, чем второй, и тем самым справедливость утверждения (2) для $\mathfrak{m}+1$ нами установлена. Отсюда также следует, что фигуры, представляющие собой индексы $(\mathfrak{m}+1)$-списков, являются 0-ω-фигурами.

Остается еще доказать, что для $\mathfrak{m}+1$ имеет место утверждение (3). Для этого достаточно рассмотреть разложение обоих $(\mathfrak{m}+1)$-списков на $\mathfrak{m}$-списки. Действительно, в том случае, когда $\mathfrak{S}_i$ имеет больший индекс[1]), чем $\mathfrak{S}_{i+p}$, из справедливости (3) для $\mathfrak{m}$ вытекает, что первый из $\mathfrak{m}$-списков, получающихся при разложении первого $(\mathfrak{m}+1)$-списка, имеет больший индекс, чем первый $\mathfrak{m}$-список при разложении второго $(\mathfrak{m}+1)$-списка. В противном случае из совпадения характеристических чисел замен $\mathfrak{S}_{i+j}$

[1]) Мы пользуемся здесь обозначениями, фигурирующими в формулировке утверждения (3), в применении к $(\mathfrak{m}+1)$-спискам.

и $\mathfrak{S}_{i+p+j}$ (при $1\leqslant j\leqslant r$) вытекает, что разложения этих двух $(\mathfrak{m}+1)$-списков на $\mathfrak{m}$-списки соответствуют друг другу вплоть до $\mathfrak{S}_{i+r}$, соответственно вплоть до $\mathfrak{S}_{i+p+r}$. Кроме того, из предположений относительно индексов общих замен в силу справедливости утверждения (3) для $\mathfrak{m}$-списков вытекает, что тот $\mathfrak{m}$-список в первом $(\mathfrak{m}+1)$-списке, который содержит замену $\mathfrak{S}_{i+r}$, имеет больший индекс, чем $\mathfrak{m}$-список во втором $(\mathfrak{m}+1)$-списке, содержащий $\mathfrak{S}_{i+p+r}$. А из способа построения индексов получается, что предшествующие $\mathfrak{m}$-списки в этих двух $(\mathfrak{m}+1)$-списках имеют соответственно одинаковые индексы. Но отсюда следует, что индекс первого $\mathfrak{m}$-списка больше индекса второго.

Таким образом, утверждения (1), (2) и (3) установлены для всех входящих в рассмотрение $\mathfrak{m}$, и, в частности, получается, что в каждом $(\mathfrak{m}+1)$-списке индексы следующих друг за другом $\mathfrak{m}$-списков образуют убывающую последовательность 0-ω-фигур и что тем самым каждый $(\mathfrak{m}+1)$-список может содержать только конечное число $\mathfrak{m}$-списков.

Поэтому процесс последовательного построения общих замен, как мы отметили выше, после конечного числа шагов должен оборваться, т. е. привести к такой общей замене, при которой все критические формулы будут редуцироваться в значение «истина».

Замечание. Аккерман усилил изложенное здесь доказательство непротиворечивости; а именно, он указал некоторую верхнюю оценку для числа требующихся здесь общих замен. Оценка эта зависит от трех параметров: числа g основных типов, числа e различных ε-термов, фигурирующих в критических формулах, и максимальной степени $\mathfrak{m}$ встречающихся термов, причем степень терма определяется рекурсивно таким образом, что цифра 0 и ε-термы имеют степень, равную нулю, $\mathfrak{a}'$ и $\delta(\mathfrak{a})$ имеют степень, бо́льшую степени $\mathfrak{a}$ на единицу, а степень $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ и степень $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ на единицу больше максимальной степени термов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Функция, выражающая эту оценку, строится из примитивно рекурсивных функций и квазирекурсивных функций некоторого типа, причем рекурсия этого более общего типа (ординальная рекурсия) заключается в том, что при возврате к меньшим значениям аргумента используется не обычный порядок натуральных чисел, а некоторый зависящий от значения $\mathfrak{p}$ некоторого аргумента этой функции специальный порядок[1]), в соответствии с которым натуральные числа могут быть отображены с сохранением порядка на 0-ω-фигуры, не превосходящие некоторой конкретной 0-ω-фигуры, не зависящей от $\mathfrak{p}$. Из второй теоремы

[1]) В определении этого порядка используется не разложение натуральных чисел на простые множители, как это было в определении порядков $\prec_{\mathfrak{n}}$ (см. с. 440 и далее), а их двоичное разложение.

Гёделя следует, что при построении этой оценки нельзя обойтись одними примитивно рекурсивными функциями. Действительно, в противном случае изложенное доказательство непротиворечивости системы (Z) можно было бы формализовать в рамках рекурсивной арифметики, а тем самым и в рамках самой системы (Z).

Следует также отметить, что в случае добавления к основным функциям системы (Z) каких-либо дополнительных вычислимых функций вместе с верифицируемыми аксиомами для них, аккермановская оценка будет нуждаться в соответствующей корректировке. По поводу таких расширений нашей формальной системы в начале изложенного доказательства [1]) специально отмечалось, что они не составляют препятствий для применимости этого доказательства. Приспособление упомянутой оценки к такого рода расширениям тоже не представляет принципиальных трудностей, но вновь добавляемые основные функции (или по крайней мере наиболее быстро растущие из них) будут участвовать в рекурсивном описании этой оценки, и определение максимальной степени терма должно быть соответственным образом изменено.

Что касается результата, даваемого аккермановским доказательством для рассматриваемого формализма, то следует особо подчеркнуть, что здесь верны все следствия, которые мы в гл. II вывели для арифметики из обобщенной ε-теоремы (заметим, что там мы рассматривали формализм с ограничениями на применение схемы индукции) [2]).

Мы перечислим здесь еще раз соответствующие предложения вместе с кратким изложением рассуждений, с помощью которых они вытекают из аккермановского доказательства.

Это доказательство непосредственно дает следующий результат:

1) С учетом определений, данных нами для вычисления значений арифметических функций, а также истинностных значений равенств между цифрами и значений истинностных функций, всякая выводимая формула без переменных является истинной.

Отсюда также получаются следующие предложения:

2) Всякая выводимая формула без связанных индивидных и без формульных переменных, но со свободными индивидными переменными является верифицируемой.

Действительно, всякая формула, получающаяся из формулы такого рода в результате замены индивидных переменных цифрами, является выводимой, а следовательно, в силу предложения 1), и истинной формулой.

3) Для любой выводимой формулы вида

$$\exists \mathfrak{x}_1 \ldots \exists \mathfrak{x}_r \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r),$$

[1]) См. с. 624—625.
[2]) См. с. 79—81.

в которой нет отличных от $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ переменных, можно так подобрать цифры $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$, что формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ будет истинной.

Действительно, рассматриваемая формула с использованием ε-формулы может быть переведена [1]) в формулу $\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_r)$, где $t_1, \ldots, t_r$ — некоторые ε-термы. Значит, для этой формулы тоже может быть получен вывод в рамках рассматриваемого формализма, а из этого вывода, с помощью подготовительных операций аккермановского доказательства, — и некоторое нормированное доказательство. Если к нему применить метод построения общих замен, то при каждой общей замене на месте термов $t_1, \ldots, t_r$ появятся некоторые цифры $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$. При окончательной общей замене эти термы могут быть заменены указанными цифрами. Так как при этой замене все критические формулы перейдут в истинные, то мы получим некоторый вывод формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ из истинных формул с помощью схемы заключения. Поэтому формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ тоже будет истинной.

4) Если выводима формула

$$\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_r \exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s),$$

в которой нет отличных от $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ переменных, то для любых цифр $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ (которые подставляются вместо переменных $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$) могут быть найдены такие цифры $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$, для которых формула

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s)$$

будет истинной.

Это получается из предложения 3), так как из вывода рассматриваемой формулы мы для любого r-членного набора цифр $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ можем получить вывод формулы

$$\exists \mathfrak{y}_1 \ldots \exists \mathfrak{y}_s \mathfrak{A}(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s).$$

Таким образом, перечисленные в предложениях 3) и 4) выводимые теоремы существования истинны в эффективном смысле.

Все эти утверждения справедливы для формализма (Z) с добавленной к нему ε-аксиомой, а потому и для (Z) с добавленным к нему ι-правилом, а также для формализма (Z_μ) и для (Z) с добавлением рекурсивных определений, причем всякий раз без использования теоремы об устранимости характеристик [2]). Эти утверждения остаются справедливыми и при добавлении каких-

[1]) См. с. 44—45.
[2]) См. т. I, с. 510—511.

либо верифицируемых формул в качестве исходных (возможно, в сочетании с введением новых вычислимых функций).

Заслуживает специального упоминания также следующее использование предложения 3): если $\mathfrak{A}(m)$ — рекурсивная формула с единственной входящей в нее переменной m и если для каждой цифры $\mathfrak{k}$ формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$ выводима, то формула $\exists x \neg \mathfrak{A}(x)$, а потому и формула $\neg \forall x \mathfrak{A}(x)$, не может оказаться выводимой.

Действительно, в противном случае в силу предложения 3) можно было бы указать такую цифру $\mathfrak{k}_1$, что формула $\neg \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ была бы истинной, а тогда $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ была бы ложной, в то время как, согласно предложению 1), формула $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ должна быть истинной.

Таким образом, рассматриваемые нами формализмы ω-непротиворечивы — по крайней мере относительно рекурсивных формул. Значит, построив для любого из этих формализмов соответствующую формулу $\neg \mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})$ из первой теоремы Гёделя [1]) [которая, как мы знаем, является рекурсивной формулой] такую, что сама она не выводима в этом формализме, но для каждой цифры $\mathfrak{k}$ выводима формула $\neg \mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{q})$, мы получим, что ни формула $\forall x \neg \mathfrak{B}(x, \mathfrak{q})$, ни ее отрицание не выводимы в этом формализме. Таким образом, в каждом из этих рассматриваемых нами формализмов имеются формально неразрешимые формулы.

[1]) См. с. 340 и след.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсурдность 438
Аккерман (Ackermann W.) 11—13, 15, 51, 93, 124, 157, 250, 260—262, 338, 454, 546, 624, 630, 634, 643
Аксиома для квантора существования 600
— индукции 468
— свертывания 591
Аксиомы геометрические 67
— конгруэнтности 62
— Пеано 468, 589
— равенства 464
Антецедент 454
Антиномия лжеца 321
Аргумент выделенный 104
Аргументная переменная 460, 626
Арифметизация 265, 276
— понятия терма 278
— — формулы 276, 281
— явных определений 368
Арифметическая модель системы аксиом 320
Арифметическое функциональное выражение, сопоставленное формуле 385

Бернайс (Bernays P.) 9—12, 14, 16, 418, 439
Бет (Beth E. W.) 203
Брауэр (Brouwer L. E. J.) 216, 438
Бюхи (Büchi J. R.) 262

Вайсберг (Wajsberg M.) 544
Ван Хао (Wang Hao) 262
Вариант именной формы 291, 460, 548
Верифицируемость 58, 599
Верхняя формула схемы 601
Ветвление 607
Вложение 43, 626
Возвратный перенос подстановок 473
Вторая теорема Гёделя о неполноте 357
Вывод в исчислении предикатов 459—464
— — обобщенном смысле 39, 91
— — формализмах аксиоматических теорий 462—464
— при дедуктивных ограничениях в исчислении высказываний 512
— равенства из системы равенств при вычислении квазирекурсивных функций 490
— редуцированный 611
—, рекурсивное изображение 295, 296, 379, 380
— средствами исчисления высказываний 462
Выделенное распределение значений для равенства 112
Выполнимость 231
— эффективная 245
Высота формулы 604
Вычисление значений термов в концевом фрагменте вывода 604
— формализованное 605
Вычислимость 478
— регулярная 479

Гейтинг (Heyting A.) 428, 436, 544, 545
Генкин (Henkin L.) 238
Генцен (Gentzen G.) 11, 13, 203, 212, 437, 439, 450, 454, 455, 544, 612, 622, 624
Геометрические аксиомы в разрешенном виде 67
Геометрия аналитическая 68
— элементарная 61
Гермес (Hermes H.) 266, 534
Герц (Hertz P.) 454, 455, 520, а также т. I, с. 77, 100
Гессенберг (Hessenberg G.) 613
Гёдель (Gödel K.) 9, 12, 16, 78, 238, 260, 261, 264—266, 320, 321, 400—402, 417, 418, 421, 437, 491, 507

Гильберт (Hilbert D.) 9—14, 16, 17, 36, 40, 62, 63, 70, 124, 266, 454, 505, 546, 624, 629
Гливенко В. И. 437

Дедекинд (Dedekind R.) 468, 554, 593
Дедуктивное равенство 471
Дедукционная теорема 472
Дентон (Denton J.) 212
Дизъюнктивное расщепление 53, 95
Дизъюнктивные члены первого и второго рода 197
Дизъюнкция 457
Доррo (Dorroh J. L.) 63
Дребен (Dreben B.) 203, 212

Замена минимальная 127
— общая 128, 138, 629
— примером 634
— свободных переменных связанными 471
— связанных переменных свободными 472
— функциональная 134
— функциональных знаков предикатными символами 183
— цифрами 123
— экземплярная 126
— эффективная 126
Заменимость 19
— рекурсивных функций в (Z) 470
— экзистенциальных аксиом 19
Заменитель именной формы 291, 460, 548
Зифкес (Siefkes D.) 16

Именная переменная 480
— форма формульной переменной 290, 460, 548
Импликативная формула 512
— —, непосредственно тождественная 516—517
— —, позитивно тождественная 512
Импликация 457
— в формализме (З) 437—439
Индекс замены 144, 152
— m-списка 638
Индивидные переменные 457
Индивидный символ 463
Индукция трансфинитная 440, 576
Исключение излишних свободных переменных 600
Истинностные функции 459
Истинные формулы 598
Исходные формулы 600
Исчисление высказываний, связки 457
— —, формулы 457
— предикатов 457
— K_2 Шютте 211

Йогансон (Johansson I.) 428, 544

Кальмар (Kalmár L.) 13, 15, 16, 259—261, 454, 552, 593, 598, 599, 604, 622
Кангер (Kanger St.) 203
Кантор (Cantor G.) 332, 439, 450—452, 503, 573, 576, 578
Канторовское ε-число первое 452, 612
Кар (Kahr A. S.) 262
Карнап (Carnap R.) 322, 336, 369, 420
Карри (Curry H. B.) 203, 335
Квазипредваренная формула 206
Квазирекурсивная функция 490
Квазитерм 280, 548
Квазиформула 368, 408—409
Квазифункционал 548
Кванторы 457—458
—, изображение с помощью ε-символа 331
—, исключение 38
— одноименные 458
Кёниг (König J.) 331
Клейн (Klein F.) 71
Клини (Kleene S. C.) 78, 203, 335, 346, 421, 422, 481, 489, 491, 503
Коллизии между связанными переменными 27, 31, 460, 483
Колмогоров А. Н. 437, 438
Контрапозиция 539
— двойная 435
Концевой фрагмент вывода 602
Конъюнктивно нормированная формула 534
Конъюнкция 457
Крайзел (Kreisel G.) 16, 358, 400
Кратность 193, 237
Критерии опровержимости 223
— — обобщенные 228
Куайн (Quine W. V.) 338

Лёвенгейм (Löwenheim L.) 235
Линденбаум (Lindenbaum A.) 261
Липпс (Lipps H.) 322

Логика предикатов теоретико-множественная 231
Ложные формулы 598
Лоренцен (Lorentzen P.) 16, 593
Лукасевич (Lukasiewicz J.) 520, 534

Модель арифметическая 320
Модельное равенство формул 235
Молекула формулы 604
Мостовский (Mostowski A.) 508
Мур Р. Л. (Moore R. L.) 62, 63
Мур Э. Ф. (Moore E. F.) 262
Мюллер (Müller G. H.) 16

Натуральная сумма порядковых чисел 613
Начальный фрагмент вывода 602
Независимость схем (S_1) — (S_5) 528
Нейман, фон (von Neumann J.) 12, 75, 84, 124, 157, 158, 165, 365, 549
Неопровержимость средствами исчисления высказываний 222
— формул 224
Непосредственно тождественная формула 516—517
Непротиворечивость 320, 471, 598, 624
— внешняя 351
— неевклидовой геометрии 70
— нумерическая 482
Нижняя формула схемы 601
Нить доказательства 473
Номинальные определения 465
Нормальная форма Аккермана 260
— — Гёделя 260
— — Кальмара 260
— — Кара, Мура и Вана Хао 262
— — Пепиша 260
— — Шураньи 262
Нормальный рекурсивный терм 391
— список термов 635
Нормированное доказательство 40, 93, 122, 625
— квазирекурсивное определение 494
Нп-теорема 59
— усиленная 111
Нумерационные условия 194
Нумерация исчисления предикатов 267
— рекурсивной арифметики 419
— формализмов вычисления квазирекурсивных функций 493
— (Z) 401
— (Z_{00}) 501
— (Z_μ) 367
Нумерические термы и функции 56, 598

Область действия квантора 458
Общая замена 128, 138, 629
— — допустимая 630
— —, индекс 144
Общезначимость 232
Общерекурсивная функция 490
Общие замены, эффективное равенство и эффективное различие 154
Одноименные кванторы 458
Односортные переменные 548
Ондеро (Aanderaa St.) 203
Определение в H 550
— — K 581
— — L 590
— истинности 336
— — для (Z) 407
— квазирекурсивное 491
— нормированное квазирекурсивное 494
— рекурсивное 466
— явное 465, 549, 581, 590
Опровержимость 220
—, критерии 223, 228
— средствами исчисления высказываний 222
Основной тип 84, 92, 137, 626
Основные равенства 530
— схемы вывода 514
— — формул 514
— формулы (a) и (b) 461
Отношения порядка $\widehat{\text{II}}$ 440
Отрицание 430, 457

Парадокс Ришара 331
Параметр 30
Пеано (Peano G.) 74, 338, 468, 589
Пепиш (Pepis J.) 248, 250, 260, 261
Первая теорема Гёделя о неполноте 341
— — — — —, усиленный вариант 347
Переводимость 471
Переименование связанных переменных 459, 581
— — —, рекурсивное изображение 289
Переменные 457
Петер (Péter R.) 75
Подобие упорядоченных множеств 574
Подстановка в исчислении предикатов 459
— — формализме H 548—549
— — — K 581
—, рекурсивное изображение 288—294
— функции 549
— функционала 549

Подтерм прямой 84
Подчинение 44, 626
Позитивная логика 429, 512
Позитивно тождественная формула 512
— — I-K-формула 523
Положительные действительные числа 556
Понятие терма, рекурсивное изображение 278, 372
— формулы, рекурсивное изображение для исчисления высказываний 276
— —, — — — — предикатов 281
— —, — — — (Z_μ) 312
Порядок полный 442
Пост (Post E. L.) 421
Постоянные термы и формулы 58
Правила подстановки и переименования 462
— (μ) и (ν) 173
— (μ^*) и (ν^*) 209
Правило замены 35
— подстановки в K 581
— — — L 590
Предваренные формулы 471
— —, рекурсивное изображение для (Z) 408
Предикатный символ 463
— — в расширенном смысле слова 448
Представимость 326, 404
— рекурсивных функций в (Z) 404
— функций в K 586
Примарное выражение 534
Пример формулы 192
Примитивная рекурсия 466
Принцип выбора 23, 236, 565, 596
— индукции, обобщенный 443, 453
— наименьшего числа 469
— — —, обобщенный 442
Проблема разрешимости для исчисления предикатов 505
Прогрессивность общей замены 634

Разделение свободных переменных 601
— связанных переменных 607
Разделяющая система функций 217
Разложение вывода на нити 473
Разрешающая функция 506
Ранг списка формул 146
— ε-выражения 46, 626
Расёва (Rasiowa H.) 203
Распределение истинностных значений постоянных элементарных формул 58
Рассел (Russell B.) 17, 589
Регулярная импликативная формула 512
Редукционное число 635
— — первое и второе 635
Резольвента 128
Рекурсивная формула 272
— функция 271, 467
Рекурсивное определение 466, 591
Рекурсивный предикат 271
— терм 271, 479
— — нормальный 391
Рекурсия примитивная 466
— пробега 275
— трансфинитная 577
Рёддинг (Rödding D.) 16
Ришар (Richard J.) 16, 321, 331, 335, 349, 363
Робинсон (Robinson R.) 508
Россер (Rosser J. B.) 335, 342, 345, 507

Сабо (Szabo M.) 439
Свободно становящаяся последовательность 216
Связанность по выполнимости 235
Секвенция 454
Семантические антиномии 321
— парадоксы 321
Сикорский (Sikorski R.) 203
Символьное решение 23, 35
Система, см. Формализм
— аксиом в разрешенном виде 25
— — геометрии 25, 61—64, 67
— — первой ступени 320, 463
Скобки 458
Сколем (Skolem Th.) 235, 243, 260, 418
Сколемовская нормальная форма 176, 233, 472
Сложение положительных действительных чисел 561—562
Собственная переменная схемы 601
Список формул, ранг 146
Стениус (Stenius E.) 15, 37, 191, 203, 322
Степень формулы 603
— ε-терма 45, 626
Столбец замен 154
Строка замен 154
Сукцедент 454
Схема двукратного устранения 525
— для квантора существования 601
— заключения 461, 601
— замены 480
— индукции 75, 468, 601
— перестановки 490
— разъединения посылок 525
— силлогизма 525
— соединения посылок 525
— явного определения 550
Схемы (α) и (β) 460—461

Тарский (Tarski A.) 266, 328, 336, 406, 508
Теорема Гёделя о полноте 238
— — — —, финитное усиление 264, 319
— Лёвенгейма 235
— о посылках 514
— об элементарном выводе 37
— Тарского 328
— Эрбрана 202, 206, 212—215, 219
Теоремы Гёделя о неполноте 341, 347, 357
Теоретико-доказательственная сколемовская нормальная форма 233
Теоретико-модельная нормальная форма 259
— сколемовская нормальная форма 233
Терм 463, 490, 546, 579, 588
— в H 546
— — K 579
— — L 588
— постоянный 58
Термальные равенства 599
Тождественно истинная формула исчисления высказываний 459
Трансформация I-K-формулы 522
Тьюринг (Turing A. M.) 421, 506

Уайтхед (Whitehead A. N.) 589
Умножение положительных действительных чисел 561
Универсальная рекурсивная функция 551
Условие а) 322
— a_1) 339
— a_2) 354
— б) 322
— $б_1$) 339
— $б^*_1$) 347
— $б_2$) 354
— в) 322
— в*) 333
— $в_1$) 329
— г) 323
— $г_1$) 329
Условия на выводимость 355
— рекурсивности 479
Устранение индукции 603
— квантора существования 603

Фигура разложения вывода 473
Финитность 427
Финслер (Finsler P.) 322, 349, 350
Формализм H 546—550
— H_0 546—550
— K 579—581
— L 588
— (Z) 17, 468
— ($\mathfrak{Z}$) 429—433
— (Z′) 75—76
— (Z^0) 479
— (Z_{00}) 501
— (Z^1) 482
— (Z_1) 425
— (Z_μ) 366
Формализмы арифметические 351
Формально неразрешимое предложение 341
Формула 458, 547
— истинная в логике высказываний 213, 462
— исчисления предикатов 458
— критическая 40
— непосредственно тождественная 516—517
— постоянная 58—59
— формализма K 580
— — L 589
— (i) 86
— ε-равенства 92
— (ε_0) 29
Формулы единственности 464
— критические первого рода и второго рода 120, 123, 625
— равенства 600
— — специальные 78, 472
— (a) и (b) 461
— (i_F) 90
— (J_1) и (J_2) 55
— (P_1) и (P_2) 56
— (θ) 501
— (μ_1), (μ_2) и (μ_3) 75, 469
— (μ'_1), (μ'_2) и (μ'_3) 164, 366, 482
Формульная переменная 457
— — в L 588
Фреге (Frege G.) 17
Функционал 546
— в L 579
Функциональная переменная 546
Функциональный знак 463
Функция арифметическая 477

Хазенъегер (Hasenjaeger G.) 238
Характеристический номер общей замены 634
Характеристическое число общей замены 634

Цифры 466

Частичные доказательства 48, 97
Чёрч (Church A.) 9, 14, 335, 421, 481, 505, 506, 559
Числа второго числового класса 451
— действительные 68, 596
— комплексные 68

Шмидт (Schmidt A.) 11, 71
Шольц (Scholz H.) 11, 235, 534
Шураньи (Suranyi J.) 261, 262
Шютте (Schütte K.) 203, 206, 211, 212

Эквивалентность 457
Экзистенциальная аксиома, заменимость 19
— формула, символьное решение 23
Элементарная формула исчисления предикатов 458
— — постоянная 58
— — собственная, несобственная 283, 300
— — формализма аксиоматической теории 463
— — — H 547
— — — K 580
— — — L 588
Элементарное исчисление со свободными переменными 462
Эндрюс (Andrews P.) 203
Эрбран (Herbrand J.) 9, 12, 14—16, 78, 202, 203, 206, 207, 211, 212, 248, 259, 265, 421, 491

Ярусы 0-ω-фигур 612
Яськовский (Jaśkowski St.) 520
I-K-формула 521
— позитивно тождественная 523
I-K-N-формула 533
K-N-формула 535
m-список общих замен 638
r-кратно однородные строки замен 155
ε-выражение 43
— подчиненное 44
— ранг 46
ε-правило 27
ε-равенство, формула 92
ε-символ 27
ε-теоремы, обобщение первой 54
— первая и вторая 36—37
—, усиленная версия второй 179—182
—, — — первой 109—111
ι-правило 464
—, обобщенная версия 465
ι-терм 464
— в K 580
λ-символ 559
μ-символ 468
ω-непротиворечивость 342
0-замена 126
0-ω-фигура 451, 612
— конечного спуска 622
∀-переменная 201
∃-переменная 201

Давид Гильберт
Пауль Бернайс
ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
Теория доказательств

(Серия: «Математическая логика и основания математики»)

Редактор *В. В. Донченко.*
Технический редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ 11404

Сдано в набор 30.09.81. Подписано к печати 14.05.82. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 41. Уч.-изд. л. 42,23 Тираж 18 000 экз. Заказ № 140. Цена 3 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано с матриц в тип. № 2 изд-ва «Наука». **Заказ № 1805.** Москва, Шубинский пер., 10