

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ
И ФОРМАЛИЗАЦИЯ АРИФМЕТИКИ

Д. ГИЛЬБЕРТ
П. БЕРНАЙС



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ
И ФОРМАЛИЗАЦИЯ АРИФМЕТИКИ

Д. ГИЛЬБЕРТ
П. БЕРНАЙС

Перевод с немецкого
Н. М. НАГОРНОГО

Под редакцией
С. И. АДЯНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

D. Hilbert und P. Bernays

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK. I

Zweite Auflage

Springer-Verlag
Berlin — Heidelberg — New York
1968

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода	11
Предисловие ко второму изданию	17
Предисловие Гильберта к первому изданию	19
Предисловие к первому изданию	20
Глава I. Проблема непротиворечивости в аксиоматических исследованиях как логическая проблема разрешимости	23
§ 1. Формальная аксиоматика	23
1. Отношение формальной аксиоматики к содержательной; вопрос о непротиворечивости; арифметизация	23
2. Пример: аксиомы геометрии	26
3. Чисто логический подход к аксиоматике	29
§ 2. Проблема разрешимости	31
1. Общезначимость и выполнимость	31
2. Распознавание в случае конечных индивидуальных областей	32
3. Метод построения модели	35
§ 3. Вопрос о непротиворечивости в случае бесконечной индивидуальной области	38
1. Формулы, невыполнимые в конечном; натуральный ряд как модель	38
2. Проблематика бесконечного	39
3. Установление непротиворечивости как доказательство невозможности; метод арифметизации	42
Глава II. Элементарная арифметика. Финитный способ рассуждений и его границы	45
§ 1. Рассуждения на интуитивном уровне и их применение в элементарной арифметике	45
1. Понятие цифры; отношение порядка; сложение	45
2. Законы арифметических действий; полная индукция; умножение; делимость; простые числа	48
3. Рекурсивные определения	51
4. Одно доказательство невозможности	53
§ 2. Дальнейшие применения интуитивных рассуждений	55
1. Отношение арифметики к учению о количестве	55
2. Формальная точка зрения в алгебре	56
§ 3. Финитная точка зрения; выход за ее пределы в области арифметики	59
1. Логическая характеристика финитной точки зрения	59
2. «Tertium non datur» для целых чисел; принцип наименьшего числа	62
§ 4. Нефинитные методы в анализе	64
1. Различные определения действительного числа	64

© Перевод на русский язык,
Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1979

2. Верхняя грань числовой последовательности; верхняя грань множества чисел	67
3. Принцип выбора	68
§ 5. Исследования, направленные на непосредственное финитное построение анализа; возврат к прежней постановке проблемы; теория доказательств	71
Глава III. Формализация процесса логического вывода I: Исчисление высказываний	74
§ 1. Теория истинностных функций	74
1. Истинностные функции и их таблицы	74
2. Заменяемость; правила замены	77
3. Примеры заменяемости	80
4. Двойственность; конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы; тождественно истинные выражения; распознающая процедура	82
5. Совершенная нормальная форма; распознавание заменяемости; примеры	85
§ 2. Применение теории истинностных функций к логическому выводу; формализация умозаключений в логике высказываний с помощью тождественно истинных выражений, правила подстановки и схемы заключения	90
§ 3. Дедуктивная логика высказываний	94
1. Постановка задачи	94
2. Одна система исходных формул для дедуктивной логики высказываний; полнота этой системы	96
3. Позитивная логика; регулярные импликативные формулы; позитивно тождественные импликативные формулы; возможные упрощения	99
§ 4. Доказательства независимости, проводимые методом оценок	103
1. Логическая интерпретация как оценка; общий метод	103
2. Доказательство независимости рассматриваемой системы исходных формул; еще одно доказательство независимости	106
3. Применение метода оценок к вопросу о замене формул схемами	112
§ 5. Возврат к рассмотренному в § 2 способу формализации вывода; сокращенные правила; замечание, касающееся противоречивости системы	115
Глава IV. Формализация процесса вывода II: Исчисление предикатов	120
§ 1. Введение индивидуальных переменных; понятие формулы; правило подстановки; пример; параллель с содержательными рассуждениями	120
§ 2. Связанные переменные и правила для кванторов всеобщности и существования	128
1. Недостаточность свободных переменных	128
2. Введение связанных переменных; кванторы всеобщности и существования; правило переименования переменных; предотвращение неоднозначностей; обобщение понятия формулы и правила подстановки	130
3. Эвристическое введение правил для кванторов всеобщности и существования; содержательный смысл формул и схем	134
4. Окончательная формулировка правил исчисления предикатов; изображение форм категорических суждений; случай пустой индивидуальной области	141

§ 3. Выводимость	144
1. Некоторые производные правила	144
2. Вывод некоторых формул	147
§ 4. Вопросы систематики	156
1. Понятия $\mathcal{I}$ -тождественной формулы и формулы, тождественной в конечном; дедуктивная замкнутость совокупности $\mathcal{I}$ -тождественных формул; непротиворечивость исчисления предикатов; вопросы полноты	156
2. Экскурс в теоретико-множественную логику предикатов; предварительные замечания к вопросу о полноте; проблема разрешимости и ее уточнение с дедуктивной точки зрения	164
§ 5. Изучение формализма исчисления предикатов	172
1. Понятие переводимости; производные правила	172
2. Приведение формул к предваренному виду; примеры; описание разрешимых случаев проблемы разрешимости с помощью предваренной нормальной формы	182
3. Разложение формул одноместного исчисления предикатов в примарные формулы; пример	188
§ 6. Дедуктивное равенство и дедукционная теорема	191
1. Понятие дедуктивного равенства; два существенных случая дедуктивного равенства; переводимость и дедуктивное равенство	191
2. Дедукционная теорема	194
3. Применения дедукционной теоремы: сведение вопросов, связанных с аксиоматикой, к вопросам выводимости формул в исчислении предикатов; рассмотрение одного распространенного способа умозаключения	199
4. Дедуктивное равенство произвольной формулы подходящей сколемовской нормальной форме, а также нормальной дизъюнкции; упрощение этого перехода	202
Глава V. Исчисление предикатов с равенством. Полнота одноместного исчисления предикатов	209
§ 1. Расширенный формализм	209
1. Знак равенства; изображение высказываний о количестве; аксиомы равенства и формальные свойства равенства	209
2. Применение аксиом равенства к различным преобразованиям, в частности к преобразованиям для оценок числа элементов в индивидуальной области; количественные формулы	214
3. Разложение в примарные формулы для формул расширенного одноместного исчисления предикатов	226
4. Обобщение понятия $\mathcal{I}$ -тождественной формулы; дедуктивная замкнутость совокупности $\mathcal{I}$ -тождественных формул; однозначность равенства	232
5. Добавление функциональных знаков; понятие терма; выводимые формулы	235
§ 2. Решение проблемы разрешимости; теоремы о полноте	239
1. Распознавание выводимости таких предваренных формул исчисления предикатов, у которых все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования; разрешимость в конечном	239
2. Выводимость всякой тождественной в конечном формулы одноместного исчисления предикатов; доказательство с помощью прежней распознающей процедуры; теоретико-множественное доказательство и его финитное уточнение	243
3. Нормальная форма формулы расширенного одноместного	

исчисления предикатов на основе дедуктивного равенства	250
4. Теоремы о полноте для расширенного одноместного исчисления предикатов	257
Глава VI. Непротиворечивость существования бесконечных индивидных областей. Начала арифметики	261
§ 1. Переход от вопроса о невыводимости ряда тождественных в конечном формул исчисления предикатов к вопросу о непротиворечивости некоторой системы аксиом арифметики	261
1. Замена формульных переменных предикатными символами; одна зависимость между рассматриваемыми формулами	261
2. Привлечение аксиом равенства; дедекиндово определение бесконечности; введение штрих-символа	265
3. Переход к аксиомам без связанных переменных с усилением экзистенциальных аксиом; символ 0; цифры в новом смысле; аксиомы Пеано; получившаяся система аксиом	269
§ 2. Общелогическая часть доказательства непротиворечивости	273
1. Выбор заключительной формулы; исключение связанных переменных; разложение доказательства на нити	273
2. Возвратный перенос подстановок; исключение свободных переменных; нумерические формулы; определение истинности и ложности; истинность всякой формулы, выводимой без использования связанных переменных	279
3. Включение связанных переменных; мероприятия по сохранению схем при возвратном переносе подстановок; недостаточность прежних методов	289
§ 3. Доказательство непротиворечивости с помощью процедуры редукции	289
1. Исключение квантора всеобщности; этапы редуцирования; понятие редукции формулы	289
2. Верифицируемые формулы; теорема об однозначности; леммы	294
3. Верифицируемость выводимых формул, не содержащих формульных переменных; заменимость аксиом схемами аксиом	301
§ 4. Переход к одной (в области формул, не содержащих формульных переменных) дедуктивно завершенной системе аксиом	306
1. Выводимость ряда верифицируемых формул в рассматриваемой системе аксиом; доказательство с помощью «цифр второго рода»	306
2. Подход к пополнению этой системы аксиом; выводимость ряда эквивалентностей как достаточное условие	310
3. Дедуктивное сведение этих эквивалентностей к пяти добавляемым к этой системе аксиом формулам; система (A)	314
4. Полнота системы (A)	322
§ 5. Включение полной индукции	324
1. Формализация принципа полной индукции с помощью формулы и с помощью схемы; равносильность обеих формализаций; инвариантность запаса выводимых формул без формульных переменных относительно добавления к системе схемы индукции	324
2. Упрощение рассматриваемой системы аксиом в результате добавления аксиомы индукции; система (B)	330
§ 6. Доказательства независимости	336
1. Невыводимость аксиомы индукции из формул системы (A)	336
2. Доказательства независимости с помощью метода подстановок	340

3. Установление ряда других независимостей с помощью модификации процедуры редукции	343
§ 7. Изображение принципа наименьшего числа при помощи выражающей его формулы; равносильность этой формулы аксиоме индукции на основе прочих аксиом системы (B)	348
Глава VII. Рекурсивные определения	351
§ 1. Некоторые пояснения принципиального характера	351
1. Простейшая схема рекурсии; формализация интуитивной процедуры вычисления; сопоставление явных определений с рекурсивными	351
2. Доказательство непротиворечивости добавления рекурсивных определений в рамках элементарного исчисления со свободными переменными; привлечение схемы индукции	360
3. Невозможность вывода непротиворечивости рекурсивных определений в качестве следствия непротиворечивости систем предыдущих аксиом; заменимость арифметических аксиом явными определениями; явное определение символа $<$ при помощи соответствующей рекурсивной функции; вывод основных свойств символа $<$	366
§ 2. Рекурсивная арифметика	376
1. Вывод законов для сложения, вычитания, умножения и для символа $<$	376
2. Изображение высказываний равенствами вида $t = 0$; суммы и произведения с переменным числом членов; изображения высказываний с ограниченными кванторами; изображения максимума и минимума	381
3. Делимость; деление с остатком; наименьший отличный от 1 делитель; последовательность простых чисел; разложение числа на простые множители; нумерация конечных последовательностей чисел; нумерация числовых пар; наибольший общий делитель; наименьшее общее кратное	390
§ 3. Некоторые обобщения схем рекурсии и индукции	400
1. Рекурсии, допускающие сведение к простейшей схеме рекурсии (примитивная рекурсия); рекурсии пробега, одновременно рекурсии	400
2. Перекрестные рекурсии; несводимость перекрестных рекурсий определенного типа к примитивным рекурсиям	405
3. Обобщенная схема индукции; устранимость этой схемы	419
§ 4. Представимость рекурсивных функций; переход к удовлетворительной системе аксиом для арифметики	427
1. Возврат к полному формализму; система (C); понятие существенного расширения формализма; примеры несущественных расширений; представимость функции	427
2. Доказательство того, что сумма и разность не представимы в формализме системы (B); рекурсивные равенства для сложения как аксиомы; система (D)	434
3. Доказательство непротиворечивости и полноты системы (D) с помощью метода редукции; непредставимость умножения в формализме системы (D)	440
4. Изменение ситуации в случае добавления рекурсивных равенств для умножения; система (Z)	453
§ 5. Дополнительное рассмотрение аксиом равенства	456
1. Замена второй аксиомы равенства аксиомами более специального характера	456
2. Применение к системам (A), (B) и (Z)	459

3. Применение к проблеме разрешимости; устранимость аксиом равенства из выводов формул исчисления предикатов	462
Глава VIII. Понятие «тот, который» и его устранимость	
§ 1. ι -правило и оперирование с ним	467
1. Разъяснения неформального характера; введение ι -правила; предотвращение коллизий; изображение функций посредством ι -термов	467
2. Вложение и подчинение; символы для сокращений	472
3. Функция $\omega(A)$; формализация понятия наименьшего числа с помощью функции $\mu_x A(x)$; формулы однозначности	477
§ 2. Дедуктивное построение арифметики на основе системы аксиом (Z) с добавлением формализованного понятия наименьшего числа	486
1. Понятие «меньше»; сравнения; деление с остатком; делимость; взаимно простые числа	486
2. Наименьшее общее кратное двух чисел и конечной последовательности чисел; максимум конечной последовательности чисел	492
§ 3. Сведение примитивных рекурсий к явным определениям посредством функции $\mu_x A(x)$ на основе аксиом системы (Z)	499
1. Эвристический подход	499
2. Формальная реализация; возможность обобщения этого метода	502
4. Устранимость характеристик (ι -символов)	510
1. Обобщение ι -правила; связь с первоначальным ι -правилом; термы $\iota_x^{(d)} A(x)$	510
2. Россеровский подход и его упрощение, произведенное Хазенегером; подстановка ι -термов; аксиома $\{i\}$; свойства рассматриваемых формальных систем	515
3. Определение редукции формулы и сведение требующегося доказательства к доказательству выводимости без ι -символов для формул, построенных по определенным схемам	518
4. Доказательство	522
5. Формулировка теоремы об устранимости; переводимость всякой формулы в ее редукцию; сравнение различных методов устранения	530
5. Следствия, вытекающие из устранимости характеристик	533
1. Представимость рекурсивных функций в системе (Z)	533
2. Общий способ исключения функциональных знаков путем введения предикатных символов; исключение индивидуальных символов	538
3. Применение этой процедуры к системе (Z) ; перспективы дальнейших исследований	541
§ 6. Добавление: распространение теоремы о возможности замены аксиомы равенства (J_2) в случае добавления ι -правила	547
Алфавитный указатель	551

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Двухтомная монография Д. Гильберта и П. Бернайса занимает уникальное место в мировой математической литературе. Ее первое немецкое издание, вышедшее в тридцатых годах, подвело итог процессу становления математической логики как самостоятельной математической дисциплины со своей проблематикой и своими методами. Эта книга оказала решающее влияние на дальнейшее развитие математической логики.

Идея построения универсального языка для всей математики и формализации математических доказательств на базе такого языка выдвигалась еще Лейбницем. Однако только в середине 19 века появились первые научные работы, посвященные алгебраизации аристотелевой логики (Дж. Буль (1847) и де Морган (1858)). После того как Г. Фреге (1879) и Ч. Пирс (1885) ввели в язык алгебры логики предикаты, предметные переменные и кванторы, возникла реальная возможность применить этот язык к вопросам оснований математики.

С другой стороны, создание неевклидовой геометрии сильно поколебало уверенность математиков в абсолютной надежности геометрической интуиции, на которой была основана евклидова геометрия. Сомнениям в надежности геометрической интуиции способствовало также то, что в результате бурного развития исчисления бесконечно малых математики натолкнулись на неожиданные примеры всюду непрерывных функций без производных. Таким образом появилась потребность отделить понятие действительного числа от неясного понятия «величины», которое было основано на геометрической интуиции.

Эта задача была решена разными путями в работах Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Они показали возможность «арифметизации» анализа и теории функций, в результате чего в качестве фундамента всей классической математики стала рассматриваться арифметика целых чисел. Затем была предпринята аксиоматизация арифметики (Дедекинд (1888) и Пеано (1891)). При этом Пеано создал более удобную символику для логического языка. Позже этот язык был усовершенствован в совместном труде Рассела и Уайтхеда «Принципы математики» (1910), где была предпринята

попытка сведения всей математики к логике. Но эта попытка не увенчалась успехом, так как оказалось невозможным вывести из чисто логических аксиом существование бесконечных множеств. Хотя логицистическая программа Фреге — Рассела в основаниях математики так и не достигла своей главной цели — сведения математики к логике, в их работах был создан богатый логический аппарат, без которого оформление математической логики как полноценной математической дисциплины было бы невозможно.

На рубеже XX века были обнаружены антиномии, связанные с основными понятиями теории множеств. Наиболее сильное впечатление на современников произвела опубликованная в 1903 году антиномия Рассела. Пусть M есть множество всех таких множеств, каждое из которых не является своим собственным элементом. Легко убедиться, что M является своим элементом тогда и только тогда, когда M не является своим элементом. Конечно, можно пытаться выйти из создавшегося противоречия, сделав заключение, что такого множества M не бывает. Однако, если не может существовать множество, состоящее в точности из всех элементов, удовлетворяющих такому четко определенному условию, которое мы имеем в приведенном выше определении множества M , то где гарантия того, что в нашей повседневной работе мы не столкнемся с множествами, которые также не могут существовать? И каким вообще условиям должно удовлетворять определение множества для того, чтобы оно существовало? Ясно было одно. Нужно перестраивать канторовскую теорию множеств.

Брауэр (1908) выступил против применения правил классической логики к бесконечным множествам. В выдвинутой им интуиционистской программе предлагалось отказаться от рассмотрения актуальной бесконечности, т. е. бесконечных множеств как завершенных совокупностей. Допуская существование сколь угодно больших натуральных чисел, интуиционисты выступают против рассмотрения натурального ряда как заверщенного множества. Они считают, что в математике всякое доказательство существования того или иного объекта должно быть конструктивным, т. е. должно сопровождаться построением этого объекта. Особой критике со стороны интуиционистов подвергся закон исключенного третьего, применение которого к бесконечным множествам они считают неправомерным. Интуиционисты построили свою математику, имеющую интересные своеобразные особенности. Но она оказалась более сложной и громоздкой, чем классическая математика. Положительный вклад интуиционистов в исследование вопросов оснований математики выразился в том, что они еще раз решительным образом подчеркнули различие между конструктивным и неконструктивным в математике, провели

тщательный анализ многих трудностей, с которыми столкнулась математика в своем развитии, и тем самым способствовали преодолению этих трудностей.

Против нападков Брауэра и его требований перестройки всей математики решительно выступил Гильберт. Он наметил другой путь преодоления трудностей, возникших в основаниях математики на рубеже XX века. Этот путь, основанный на применении аксиоматического метода, рассмотрении формальных моделей содержательной математики и исследовании вопросов непротиворечивости таких моделей надежными финитными средствами, получил в математике название финитизма Гильберта.

Признавая ненадежность геометрической интуиции, Гильберт прежде всего предпринимает тщательный пересмотр евклидовой геометрии, освобождая ее от обращения к интуиции. Результатом такой переработки явились его «Основания геометрии», первое издание которых вышло в 1899 году.

«Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку? Но существует вполне удовлетворительный путь, по которому можно избежать парадоксов, не изменяя при этом нашей науке», — писал Гильберт в 1925 году.

Вопросы непротиворечивости различных теорий по существу рассматривались и до Гильберта. Так, построенная Клейном (1871) проективная модель неевклидовой геометрии Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии аналогично можно свести к непротиворечивости анализа, т. е. теории действительных чисел. Однако не видно было, какими средствами можно строить модели анализа и арифметики для доказательства их непротиворечивости. Заслуга Гильберта состоит в том, что он указал прямой путь для исследования этого вопроса. Непротиворечивость данной теории означает, что в ней не может быть получено противоречие, т. е. не может быть доказано некоторое утверждение $\mathcal{A}$ и его отрицание $\neg \mathcal{A}$. Гильберт предложил представить рассматриваемую теорию в виде формальной аксиоматической системы, в которой будут выводимы все те и только те утверждения, которые являются теоремами нашей теории. Тогда для доказательства непротиворечивости нужно установить невыводимость в рассматриваемой теории каких-то утверждений. Таким образом, математическая теория, непротиворечивость которой мы хотим доказать, стано-

вится предметом изучения некоторой математической науки, которую Гильберт назвал метаматематикой или теорией доказательств.

Гильберт считал, что парадоксы теории множеств вызваны не законом исключенного третьего. Он писал: «Эти парадоксы происходят скорее потому, что пользуются недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий, которые в моей теории доказательств исключаются сами собой». Он предлагает различать «действительные» и «идеальные» предложения классической математики. Первые имеют содержательный смысл, а вторые не обязаны иметь содержательный смысл. Предложения, соответствующие употреблению актуальной бесконечности, идеальны. Мы присоединяем идеальные предложения к действительным, чтобы простые правила логики были применимы и к рассуждениям о бесконечных множествах. Это существенно упрощает структуру всей теории, подобно тому, как при рассмотрении проективной геометрии на плоскости добавляется бесконечно удаленная прямая, пересекающая любые две параллельные прямые в некоторой точке.

Выдвинутая Гильбертом программа обоснования математики и его энтузиазм вдохновили современников к интенсивной разработке аксиоматического метода. Именно с разработкой теории доказательств на базе развитого в работах Фреге — Пеано — Рассела логического языка, предпринятой в начале XX века Гильбертом и его последователями, следует связывать становление математической логики как самостоятельной математической дисциплины.

В 1930 году Курт Гёдель доказал теорему о полноте исчисления предикатов, согласно которой множество всех чисто логических утверждений математики совпадает с множеством всех выводимых в исчислении предикатов формул, т. е. исчисление предикатов является той логической системой, на базе которой можно формализовать математику.

Теорема Гёделя о неполноте арифметики (1931) поколебала оптимистические надежды Гильберта на полное решение вопросов оснований математики на указанном им пути. Согласно этой теореме, если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то утверждение о ее непротиворечивости выразимо в этой системе, но не может быть доказано средствами, формализуемыми в ней. Это означает, что дело обстоит не так просто, как хотелось или казалось Гильберту. Но уже Гёдель заметил, что непротиворечивость арифметики можно доказывать, пользуясь достаточно надежными конструктивными средствами, хотя и выходящими за рамки средств, формализуемых в арифметике. Аналогичные доказательства непротиворечивости арифметики были получены Г. Генценом и П. С. Новиковым.

Одним из наиболее замечательных достижений математической логики явилась разработка понятия общерекурсивной функции (1934) и формулировка тезиса Чёрча (1936), утверждающего, что понятие рекурсивной функции является уточнением интуитивного понятия алгоритма. По существу вся математика связана с теми или иными алгоритмами. Но только после уточнения понятия алгоритма появилась возможность обнаружить существование неразрешимых алгоритмических проблем в математике. Неразрешимые алгоритмические проблемы были обнаружены во многих разделах математики, причем оказалось, что они могут быть связаны с очень распространенными и фундаментальными понятиями математики. Теперь при постановке новых алгоритмических проблем речь идет прежде всего о существовании искомого алгоритма, а затем уже о его поиске.

Разработка точного понятия алгоритма дала возможность уточнить понятие эффективности и развивать на базе этого конструктивное направление в математике, воплотившее в себе некоторые черты интуиционистского направления, но существенно отличающееся от последнего.

Предложенный Гильбертом и развитый его последователями метод формализации математики оказался полезным не только в исследовании логических проблем оснований математики. Аксиоматический метод оказал большое влияние на развитие многих разделов математики. Особенно значительным было проникновение этого метода в алгебру. Не обошлась без влияния аксиоматического метода и интуиционистская математика. Еще в 1930 году А. Гейтинг ввел в рассмотрение формальную систему интуиционистской логики. Можно также упомянуть формальную систему интуиционистского анализа, предложенную С. К. Клини (см. Клини С., Весли Р. Основания интуиционистской математики. — М.: Наука, 1978).

Естественно, в книге Гильберта и Бернаиса не нашли отражения многие крупные результаты, полученные в математической логике и ее приложениях в послевоенное время. Но все эти результаты достаточно полно отражены в более поздних книгах, выпущенных издательствами «Наука» и «Мир» за последние годы. Впрочем, многие из этих книг были написаны под сильным влиянием «Оснований математики» Гильберта и Бернаиса. Отличающаяся исключительной глубиной содержания и тщательностью изложения, книга Гильберта и Бернаиса до сих пор пользуется большой популярностью среди специалистов. Книга насыщена глубокими идеями, которые не потеряли своей свежести и безусловно будут полезны в будущих исследованиях логических проблем оснований математики. Для широкого круга читателей книга привлекательна тем, что в ней основополагающие идеи теории доказательств излагаются в своем первозданном виде, причем

изложение здесь более обстоятельно и менее формализовано, чем где-либо в другом месте. Этим, в частности, объясняется тот факт, что 10 лет назад издательство Шпрингера выпустило второе немецкое издание этой книги.

Вопрос о переводе монографии Гильберта и Бернайса «Основания математики» на русский язык неоднократно возникал еще задолго до выхода ее второго немецкого издания. Однако по разным причинам технического характера эта идея тогда не была реализована.

Настоящий перевод выполнен со второго немецкого издания. В русском переводе мы решили обновить обозначения для кванторов и отрицания, так как используемые авторами обозначения для них сейчас практически не применяются.

В гл. VII мы заменили обозначения некоторых простейших рекурсивных функций новыми символами, которые теперь уже стали стандартными. Также было приведено в соответствие с общепринятым в нашей литературе употреблением некоторых математических терминов. Авторский указатель содержания мы превратили в оглавление, назвав параграфы главами и внося все рубрики в текст книги. Немногочисленные описки мы исправляли без всяких оговорок. Наконец, по предложению издательства мы добавили подзаголовки для отдельных томов. К сожалению, смерть П. Бернайса, скончавшегося 18 сентября 1977 г., лишила нас возможности сотрудничать с ним при подготовке к печати этого перевода.

Нет сомнений в том, что выход книги Гильберта и Бернайса «Основания математики» на русском языке будет с удовлетворением встречен в нашей стране не только специалистами по математической логике, но также и всеми квалифицированными математиками, которые в той или иной мере интересуются вопросам оснований математики, ролью математики в современной науке глубокими проблемами, стоящими перед математикой и математиками независимо от их узкой специальности.

Москва, январь 1979 года

С. Адя

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Уже несколько лет тому назад ныне покойный Генрих Шольц и господин Ф. К. Шмидт предлагали мне предпринять второе издание «Оснований математики», а господин Г. Хазенбегер на некоторое время приезжал в Цюрих, чтобы оказать мне помощь в этой работе. И уже тогда стало ясно, что включение в книгу многих новых результатов, полученных в области теории доказательств, потребовало бы полной перестройки всей книги. В предлагаемом ныне втором издании, инициатива которого по-прежнему исходит от господина Ф. К. Шмидта, и подавно не может быть речи о том, чтобы изложить все, что было с тех пор достигнуто в теории доказательств. Потребность в этом ощущается в тем меньшей степени, что за прошедшее время появились замечательные учебники, в которых обсуждается теория доказательств и граничащая с ней проблематика.

С другой стороны, некоторые вопросы разобраны в «Основаниях математики» все-таки более обстоятельно, чем это сделано в каком-либо другом месте, что явствует, в частности, и из спроса на эту уже давно распроданную книгу. Ввиду этих обстоятельств нам показалось разумным оставить книгу по существу в ее прежнем виде и внести лишь такие изменения и дополнения, которые находятся в тесной связи с материалом, содержащимся в первом издании.

Было решено также отказаться от изменений в символике и в терминологии. В частности, что касается логической символики, то в ее употреблении все равно нет единства, а переход от одной символики к другой не представляет никаких затруднений. Вводные главы, в которых развивается постановка проблемы, в настоящее издание включены почти без изменений.

Упомянем следующие существенные изменения и дополнения (не считая некоторых исправлений и улучшений частного характера), внесенные в настоящее издание первого тома: 1) в исчислении высказываний более подробно рассмотрена дизъюнктивная нормальная форма; 2) включено изложение данного Г. Хазенбегером ответа на один оставшийся в свое время открытым вопрос, касающийся независимости аксиом системы (B); 3) включено

замечание Г. Крайзела о том, что при изложении теории отношения $<$ при помощи рекурсивной функции — не требуется привлечения операции сложения; 4) дополнен материал, касающийся рекурсивного изображения максимума; 5) приведено принадлежащее Т. Сколему формальное доказательство устранимости обобщенной схемы индукции; 6) приведенное в первом издании очень сложное доказательство устранимости λ -символов заменено более простым доказательством Г. Хазенъегера, основанным на методе Б. Россера; 7) пояснено изложение вопроса о представимости рекурсивных функций в системе (Z).

В общем плане книги не произведено никаких изменений. Подробный указатель содержания дает достаточную ориентацию в отношении содержания и основных идей книги. Мы специально обращаем внимание читателя на этот указатель.

Господин Д. Рёддинг из Мюнстера составил именной указатель и расширил предметный, а также добавил систему отсылок в виде подстрочных примечаний, облегчающих чтение книги по частям. Я выражаю ему за это мою искреннюю благодарность.

Господину Гисберту Хазенъегеру и господину Георгу Крайзелу я благодарен за вклад, внесенный ими в это новое издание. В новом доказательстве устранимости λ -символов использована работа, которую господин Хазенъегер в свое время написал для этой книги.

Я с благодарностью вспоминаю о постоянном деятельном участии Генриха Шольца в работе над этим новым изданием и том интересе, с которым господин Ф. К. Шмидт неизменно относился к этой работе.

Господина Герта Мюллера я от всего сердца благодарю за его многосторонний вклад в подготовку этого нового издания. Господин Дирка Зифкеса из Гейдельберга я сердечно благодарю за чрезвычайно ценное участие в чтении корректур, а также за внесение дополнений в предметный указатель. Господину Вальтеру Цаугу я чрезвычайно благодарен за помощь при подготовке текста и при чтении корректур.

Издательству Шпрингера я благодарен за его дружеское отношение и в особенности, с учетом прошедшего, за то, что и в те тяжелые времена оно сохраняло со мной связь.

Цюрих, август 1968 г.

—П. Бернайс

ПРЕДИСЛОВИЕ ГИЛЬБЕРТА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Основные идеи моих исследований по основаниям математики, которые я — основываясь на более ранних попытках — возобновил после 1917 г. в сотрудничестве с П. Бернайсом, обстоятельно изложены мною в различных местах.

К этим исследованиям, в которых участвует также В. Аккерман, с тех пор примкнули и другие математики.

Представленный здесь своей первой частью курс написан Бернайсом и в дальнейшем будет продолжен. Он ставит своей целью изложить эту теорию по ее сегодняшним результатам.

Состояние этих результатов одновременно указывает нам и направление дальнейших исследований в области теории доказательств, ставя в качестве конечной цели установление непротиворечивости всех без исключения применяемых в математике методов.

Имея в виду эту цель, я хотел бы подчеркнуть, что возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только то, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов.

Гёттинген, март 1934 г.

Гильберт

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Изложение теории доказательств, выросшей из гильбертовского подхода к рассмотрению логических проблем оснований математики, было обещано Гильбертом уже давно.

Но претворение этого проекта в жизнь задержалась из-за того, что на некоторой стадии, когда работа над рукописью уже была близка к завершению, в теории доказательств в результате опубликования работ Эрбрана и Гёделя возникла совершенно иная ситуация, потребовавшая учета новейших результатов. Объем книги при этом увеличился, так что оказалось целесообразным разбить ее на два тома.

Относительно содержания и основных идей предлагаемого читателю первого тома подробную информацию дает указатель содержания.

Следует особо отметить, что логический формализм развивается в гл. III—IV с самого начала. Изложение его отличается от того, которое принято в книге Гильберта и Аккермана «Основ теоретической логики» (1928), в первую очередь в части, касающейся исчисления высказываний. При дальнейшем построении формализма мы придали, в частности, более точную редакцию правилу подстановки, прежняя формулировка которого была недостаточно четкой¹⁾.

Специальные предварительные знания в области математики у читателя предполагаются в столь же малой степени, как и в области логики.

В связи с этим читатель, недостаточно знакомый с основаниями геометрии, а может быть, и с основаниями анализа, не должен пугаться ссылок на «Основания геометрии» Гильберта, а также произведенного в гл. II разбора методов анализа. Обе первые главы по существу служат лишь для того, чтобы ввести читателя

в план дальнейшей работы; в то время как систематическое изложение в собственном смысле слова начинается только с третьей главы.

Правда, для чтения гл. VII—VIII желательно известное знакомство с элементами теории чисел.

При написании гл. IV—VII большое содействие своими замечаниями и советами оказали господин Арнольд Шмидт и господин Курт Шютте. Я выражаю им за это мою сердечную благодарность. Господину Арнольду Шмидту я в высшей степени признателен за большую помощь при чтении корректур, а также за разнообразные предложения, которые он внес при этом.

Гёттинген, март 1934 г.

П. Бернайс

¹⁾ Необходимость в более четкой редакции этого правила особенно отчетливо выяснилась в результате той критики, которой это правило подверглось со стороны Г. Шольца в его «Логистике» (лекции 1932—1933 гг.). Эта критика основывается на некоторой, отклоняющейся от первоначально смысла этого правила интерпретации, обусловленной неточностью прежней формулировки.

ПРОБЛЕМА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ В АКСИОМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ КАК ЛОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ

§ 1. Формальная аксиоматика

1. Отношение формальной аксиоматики к содержательной; вопрос о непротиворечивости; арифметизация. Уровень научных исследований в области оснований математики, из которого исходит наше изложение, характеризуется результатами, полученными в ходе работы, проводившейся по следующим трем направлениям:

- 1) совершенствование аксиоматического метода — прежде всего, на базе оснований геометрии;
- 2) построение анализа по принятой ныне строгой методике, путем сведения теории величин к теории, объектом рассмотрения которой являются числа и числовые множества;
- 3) исследования, направленные на обоснование понятий числа и множества.

Точка зрения, сформировавшаяся в результате этих исследований, в сочетании с повышенными требованиями методического характера ведет к определенной программе дальнейшей работы — программе, в рамках которой речь идет о новой трактовке проблемы бесконечного. Знакомство с этой программой мы хотели бы начать с рассмотрения аксиоматического метода.

Термин «аксиоматический» употребляется иногда в более широком, а иногда и в более узком смысле слова. При самом широком понимании этого термина построение какой-либо теории мы называем аксиоматическим, если основные понятия и основные гипотезы этой теории ставятся как таковые во главу угла, а дальнейшее ее содержание логически выводится из них с помощью определений и доказательств. Аксиоматически именно в этом смысле слова были построены геометрия Евклида, механика Ньютона, термодинамика Клаузиуса.

Усиление, которое аксиоматическая точка зрения получила в «Основаниях геометрии» Гильберта *), заключается в том, что из всего материала реальных представлений, используемого для формирования основных понятий данной теории, при аксиома-

*) На русском языке имеется перевод с 7-го немецкого издания этой книги: Г и л ь б е р т Д. Основания геометрии. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — Прим. п-рев.

тическом ее построении мы принимаем в расчет лишь то, что в виде некоторого экстракта формулируется в ее аксиомах, а от всего остального содержания абстрагируемся. Когда аксиоматика начинает пониматься в таком наиболее узком смысле этого слова, в качестве очередного обстоятельства добавляется еще *экзистенциальность ее вида*. Этим *аксиоматический* способ построения какой-либо теории и отличается от *конструктивного*, или *генетического* способа ¹⁾. В то время как при конструктивном способе построения объекты рассматриваемой теории вводятся только как вещи определенного *вида* ²⁾, в аксиоматической теории нам приходится иметь дело с некоторой фиксированной системой вещей (или даже с несколькими такими системами), вводимой в качестве *области субъектов* для всех тех предикатов, из которых строятся высказывания этой теории.

В предположении, что эта «индивидуальная область» представляет собой некую единую совокупность, заключается — если отвлечься от рассмотрения тех тривиальных случаев, когда теория имеет дело лишь с конечной, четко выделенной совокупностью вещей, — определенная идеализация. Эта идеализация присоединяется к допущениям данной теории, которые формулируются в ее аксиомах.

Аксиоматику в такой усиленной форме, возникающую в результате отвлечения от конкретного предметного содержания и сформулированную в экзистенциальном виде, мы кратко будем называть *формальной аксиоматикой*. Характерной особенностью формальной аксиоматики — в отличие от содержательной — является необходимость *установления ее непротиворечивости*. Между тем содержательная аксиоматика вводит свои основные понятия со ссылкой на имеющийся у нас опыт, а свои основные положения либо считает очевидными фактами, в которых можно непосредственно убедиться, либо формулирует их как итог определенного опыта и тем самым выражает нашу уверенность в том, что нам удалось напасть на след законов природы, а заодно и наше намерение подкрепить эту уверенность успехом развиваемой теории.

Формальная аксиоматика, разумеется, также нуждается в признании очевидности за вещами определенного рода — это необходимо как для осуществления дедукции, так и для установления непротиворечивости самой аксиоматики — однако с тем существенным различием, что этот род очевидности не основывается на каком-либо особом гносеологическом отношении к рассматриваемой конкретной области науки, а остается одним и тем же

¹⁾ В связи с этим противопоставлением см. Добавление VI «О понятии числа» к «Основаниям геометрии» Гильберта (1900).

²⁾ Брауэр и его школа используют в этом значении слово «species».

в случае любой аксиоматики: мы имеем здесь в виду столь элементарный способ познания, что он вообще является предварительным условием любого точного теоретического исследования. Этот род очевидности мы еще должны будем подвергнуть более пристальному рассмотрению.

Чтобы правильно оценить соотношение между познавательным значением содержательной и формальной аксиоматик, необходимо в первую очередь принять во внимание следующие соображения.

Формальная аксиоматика по необходимости нуждается в содержательной как в своем дополнении, поскольку именно эта последняя поначалу руководит нами в процессе выбора соответствующих формализмов, а затем, когда формальная теория уже имеется в нашем распоряжении, она подсказывает нам, как эта теория должна быть применена к рассматриваемой области действительности.

С другой стороны, мы не можем ограничиться содержательной аксиоматикой по той простой причине, что в науке — если не всегда, то все же по преимуществу — мы имеем дело с такими теориями, которые отнюдь не полностью воспроизводят действительное положение вещей, а являются лишь *упрощающей идеализацией* этого положения, в чем и состоит их значение. Такого рода теория, конечно, не может быть обоснована путем ссылки на очевидность ее аксиом или на опыт. Более того, ее обоснование и может быть осуществлено только в том смысле, что будет установлена непротиворечивость произведенной в ней идеализации, т. е. той экстраполяции, в результате которой введенные в этой теории понятия и ее основные положения переступают границы наглядно очевидного или данных опыта. Прийти к выводу о непротиворечивости этой теории нам не поможет и ссылка на приближительную значимость ее основных положений. В самом деле, противоречие может наступать как раз в результате того, что мы считаем вполне определенным какое-нибудь отношение, которое имеет место только в некотором ограниченном смысле.

Таким образом, мы оказываемся вынужденными исследовать непротиворечивость теоретических систем в отрыве от рассмотрения фактических обстоятельств и уже тем самым мы становимся на точку зрения формальной аксиоматики.

Рассмотрение этой проблемы как в рамках геометрии, так и в рамках различных физических дисциплин до сих пор производилось с помощью *метода арифметизации*. Этот метод заключается в том, что основные объекты теории мы изображаем посредством чисел и числовых систем, а основные отношения между ними — посредством равенств и неравенств, причем таким образом, что в силу рассматриваемого перевода аксиомы теории переходят либо в числовые тождества и доказуемые предложения,

как это имеет место в случае геометрии, либо, как в случае физики,— в систему условий, совместная выполнимость которых может быть установлена на основе тех или иных теорем существования из области анализа. При этом способе решения рассматриваемой проблемы мы должны предполагать, что анализ, т. е. теория действительных чисел, является в определенном смысле пригодным и, таким образом, мы упираемся в вопрос о том, каков характер этой пригодности.

Однако, прежде чем заняться этим вопросом, давайте посмотрим, не существует ли какого-нибудь прямого способа атаковать проблему непротиворечивости. Кроме того, нам вообще хотелось бы поотчетливее рассмотреть структуру этой проблемы. Заодно, пользуясь представившейся возможностью, мы немного познакомимся с *логической символикой*, которая оказывается весьма полезной для наших целей и которую в дальнейшем нам еще придется рассмотреть более подробно.

2. Пример: аксиомы геометрии. В качестве примера аксиоматики мы возьмем *геометрию плоскости*. Простоты ради мы рассмотрим лишь аксиомы геометрии положения (которые в гильбертовых «Основаниях геометрии» приводятся под названием аксиом соединения и аксиом порядка) и аксиоме о параллельных. При этом для наших целей будет удобно несколько отступить от гильбертовской системы аксиом: мы будем исходить не из точек и прямых как объектов, образующих две различные системы, а *возьмем в качестве индивидов одни только точки*. Вместо отношения «точки x и y определяют прямую g » у нас появится трехместное отношение «точки x, y, z лежат на одной прямой», для которого мы будем применять обозначение $Gg(x, y, z)$. Наряду с этим отношением в качестве второго основного отношения мы возьмем отношение порядка: « x лежит между y и z », которое мы будем обозначать посредством $Zw(x, y, z)$ ¹⁾. Далее, в наших аксиомах в качестве относящегося к логике понятия будет встречаться отношение равенства x и y . Для обозначения этого отношения мы будем употреблять обычный знак равенства: $x = y$.

Для символической записи аксиом нам потребуются также логические знаки и, прежде всего, знаки для выражения всеобщности и существования: если $P(x)$ есть предикат, относящийся к индивиду x , то $\forall x P(x)$ будет означать «все x обладают свойством $P(x)$ », а $\exists x P(x)$ — «существует x , обладающее свойством $P(x)$ ». Знак $\forall x$ называется «квантором всеобщности», а $\exists x$ — «квантором существования». Кванторы всеобщности и существо-

¹⁾ Способ изложения геометрии, при котором в качестве индивидов используются одни только точки, принят за основу в аксиоматике Освальда Веблена (см. Veblen O. A system of axioms for geometry. — Trans. Amer. Math. Soc., 1904, 5, pp. 343—384). При этом Веблен все геометрические отношения определяет через отношение «между».

вания равным образом могут относиться как к переменной x , так и к каким-нибудь другим переменным y, z, u . Принадлежащая такому квантору переменная «связывается» этим квантором — подобно тому, как переменная интегрирования связывается знаком интеграла,— так что все высказывание в целом уже не зависит от какого-либо значения этой переменной.

В качестве очередных логических знаков мы добавим знак для отрицания и знаки для комбинирования высказываний. Для отрицания какого-либо высказывания мы будем использовать знак $\neg$, стоящий перед этим высказыванием. Вместо $\neg(x = y)$ мы для краткости будем писать $x \neq y$. Знак $\&$ («и»), стоящий между двумя высказываниями, будет означать, что истинны оба эти высказывания (конъюнкция). Знак $\vee$ («или» в значении «vel»^{*)}), стоящий между двумя высказываниями, будет означать, что истинно по меньшей мере одно из этих высказываний (дизъюнкция).

Знак $\rightarrow$, стоящий между двумя высказываниями, будет означать, что истинность первого из них влечет за собой истинность второго, или, другими словами, что первое из этих высказываний не может быть истинным без того, чтобы не было истинным и второе (импликация). Согласно сказанному, импликация $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ двух высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ является ложной лишь тогда, когда $\mathcal{A}$ истинно, а $\mathcal{B}$ ложно; в остальных случаях она является истинной.

Знак импликации в сочетании с квантором всеобщности изображает общеутвердительные гипотетические предложения. Так, например, формула

$$\forall x \forall y (\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \mathcal{B}(x, y)),$$

где $\mathcal{A}(x, y)$ и $\mathcal{B}(x, y)$ — некоторые отношения между x и y , изображает следующее предложение: «для всякой пары индивидов x и y такой, что истинно $\mathcal{A}(x, y)$, истинно также и $\mathcal{B}(x, y)$ »¹⁾.

При построении формул из их составных частей мы будем пользоваться обычным приемом расстановки скобок. В целях их экономии мы условимся, что знак $\rightarrow$ разделяет сильнее, чем знаки $\&$ и $\vee$, что $\&$ и $\vee$ разделяет сильнее, чем кванторы всеобщности и существования. Мы условимся также опускать скобки всюду, где это не будет вызывать недоразумений. Так, например, вместо выражения

$$\forall x (\exists y R(x, y)),$$

^{*)} Нераздельное «или» (лат.). — Прим. перев.

¹⁾ Об отношении введенных здесь дизъюнкции и импликации к традиционно понимаемым дизъюнктивным и гипотетическим сочетаниям высказываний речь пойдет далее в гл. III.

где $R(x, y)$ обозначает какое-либо отношение между x и y , мы будем писать просто $\forall x \exists y R(x, y)$, так как это выражение может быть прочитано лишь единственным образом: «для каждого x существует y , для которого справедливо отношение $R(x, y)$ ».

Теперь мы уже в состоянии записать рассматриваемую систему аксиом с помощью формул. Для простоты чтения мы на первых порах будем сопровождать аксиомы их вариантами, записанными с помощью естественного языка.

Разбиение приводимых ниже аксиом на группы не вполне соответствует разбиению, принятому в гильбертовых «Основаниях геометрии». Поэтому каждую группу аксиом мы снабдим комментарием об отношении аксиом, выраженных здесь с помощью формул, к аксиомам, приводимым Гильбертом¹⁾.

I. Аксиомы соединения (принадлежности):

$$1) \quad \forall x \forall y \text{ Gr}(x, x, y)$$

(x, x, y всегда лежат на одной прямой).

$$2) \quad \forall x \forall y \forall z (\text{Gr}(x, y, z) \rightarrow \text{Gr}(y, x, z) \& \text{Gr}(x, z, y))$$

(если точки x, y, z лежат на одной прямой, то точки y, x, z и точки x, z, y также лежат на одной прямой).

$$3) \quad \forall x \forall y \forall z \forall u (\text{Gr}(x, y, z) \& \text{Gr}(x, y, u) \& x \neq y \rightarrow \text{Gr}(x, z, u))$$

(если x и y — различные точки и если точки x, y, z и точки x, y, u лежат на одной прямой, то x, z, u также лежат на одной прямой).

$$4) \quad \exists x \exists y \exists z \neg \text{Gr}(x, y, z)$$

(существуют точки x, y, z , не лежащие на одной прямой).

Аксиомы 1) и 2) заменяют — с учетом ликвидации понятия прямой — аксиому I 1); аксиома 3) соответствует аксиоме I 2), а 4) — второй части аксиомы I 3).

II. Аксиомы порядка

$$1) \quad \forall x \forall y \forall z (\text{Zw}(x, y, z) \rightarrow \text{Gr}(x, y, z)).$$

$$2) \quad \forall x \forall y \neg \text{Zw}(x, y, y).$$

$$3) \quad \forall x \forall y \forall z (\text{Zw}(x, y, z) \rightarrow \text{Zw}(x, z, y) \& \neg \text{Zw}(y, x, z)).$$

$$4) \quad \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z \text{Zw}(x, y, z))$$

(если x и y — различные точки, то всегда существует точка z такая, что x лежит между y и z).

$$5) \quad \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v (\neg \text{Gr}(x, y, z) \& \text{Zw}(u, x, y) \& \neg \text{Gr}(v, x, y) \& \neg \text{Gr}(z, u, v) \rightarrow \exists w \{ \text{Gr}(u, v, w) \& (\text{Zw}(w, x, z) \vee \text{Zw}(w, y, z)) \}).$$

¹⁾ Эти комментарии предназначены специально для читателей, знакомых с гильбертовыми «Основаниями геометрии», и относятся к их 7-му изданию (см. прим. перев. на с. 23).

Аксиомы 1) и 2), рассматриваемые совместно, составляют первую часть гильбертовской аксиомы II 1); 3) представляет собой объединение последней части гильбертовской аксиомы II 1) с аксиомой II 3); 4) представляет собой аксиому II 2), а 5) — аксиому плоского порядка II 4).

III. Аксиома о параллельных. Так как аксиомы конгруэнтности в нашем списке аксиом не фигурируют, то аксиому о параллельных мы должны будем здесь привести в следующей расширенной формулировке: для всякой прямой и точки, лежащей вне ее, существует одна и только одна прямая, проходящая через эту точку и не пересекающая исходную прямую¹⁾.

В целях упрощения символической формулировки этой аксиомы мы введем сокращение: символ

$$\text{Par}(x, y; u, v)$$

будет обозначать выражение

$$\neg \exists w (\text{Gr}(x, y, w) \& \text{Gr}(u, v, w))$$

(не существует точки w , которая лежала бы на одной прямой с точками x и y , а также с точками u и v).

Тогда наша аксиома запишется в виде

$$\forall x \forall y \forall z (\neg \text{Gr}(x, y, z) \rightarrow \exists u \{ \text{Par}(x, y; z, u) \& \forall v (\text{Par}(x, y; z, v) \rightarrow \text{Gr}(z, u, v)) \}).$$

Если мы теперь вообразим, что все перечисленные выше аксиомы выписаны в ряд и соединены друг с другом знаком $\&$, то у нас получится одна-единственная логическая формула, которая представляет собой некоторое высказывание о предикатах Gr и Zw . Мы обозначим эту формулу посредством

$$\mathfrak{A}(\text{Gr}, \text{Zw}).$$

Аналогичным же образом мы можем представить в виде подходящей формулы

$$\mathfrak{B}(\text{Gr}, \text{Zw})$$

всякое другое предложение плоской геометрии, допускающее формулировку в терминах одних только отношений положения и порядка.

3. Чисто логический подход к аксиоматике. Однако такое изложение все еще соответствует уровню содержательной аксиоматики, в рамках которой основные отношения теории рассматриваются как нечто обнаруживаемое в опыте или в наглядных пред-

¹⁾ См. «Основания геометрии» Гильберта, с. 83 (с. 146 русского перевода — прим. перев.).

ставлениях (и тем самым содержательно определенное) и являющееся объектом утверждений, делаемых в теоремах нашей теории.

В формальной аксиоматике, напротив, основные отношения не считаются чем-то заранее содержательно определенным. Более того, именно в аксиомах теории они и находят свое н е я в н о е определение, так что во всех рассуждениях, проводимых в какой-либо аксиоматической теории, мы можем использовать лишь те сведения, касающиеся основных отношений теории, которые недвусмысленно сформулированы в ее аксиомах.

И если в рамках аксиоматической геометрии для обозначения ее основных отношений мы пользуемся именами, соответствующими геометрии наглядной, — такими, как «лежать на» и «между», — то это является всего лишь уступкой привычке и делается нами для того, чтобы облегчить привязку аксиоматической теории к фактам восприятия. На самом же деле основные отношения в формальной аксиоматике играют роль *переменных* предикатов.

При этом здесь и в дальнейшем термин *п р е д и к а т* мы всегда будем понимать в расширенном смысле, допуская к рассмотрению предикаты с двумя или несколькими субъектами. В зависимости от числа субъектов мы будем говорить об *о д н о м е с т н ы х*, *д в у м е с т н ы х*,... и т. д. предикатах.

В рассмотренном нами фрагменте аксиоматической геометрии речь идет о двух переменных трехместных предикатах

$$R(x, y, z) \text{ и } S(x, y, z).$$

Система аксиом накладывает на эти два предиката условие, выражаемое логической формулой $\mathfrak{A}(R, S)$, которая получается из $\mathfrak{A}(Gr, Zw)$ путем замены $Gr(x, y, z)$ посредством $R(x, y, z)$ и $Zw(x, y, z)$ посредством $S(x, y, z)$. В этой формуле наряду с переменными предикатами встречается также содержательно понимаемое нами отношение равенства $x = y$. То, что мы соглашаемся с его содержательной определенностью, не является прегрешением против точки зрения нашего подхода. Ведь содержательное определение равенства, вовсе и не являющегося отношением в собственном смысле этого слова, не заимствовано нами из специфического круга представлений, касающихся той области знания, которая подлежит аксиоматическому исследованию. Оно относится исключительно к возможности различения индивидов, которая должна всегда предполагаться имеющейся уже в самый момент введения индивидной области.

Таким образом, всякому предложению, имеющему вид $\mathfrak{S}(Gr, Zw)$, соответствует логическая по своему содержанию констатация того факта, что *произвольные* предикаты $R(x, y, z)$ и $S(x, y, z)$, удовлетворяющие условию $\mathfrak{A}(R, S)$, находятся также и в отношении $\mathfrak{S}(R, S)$ и что, следовательно, для любых

двух предикатов $R(x, y, z)$ и $S(x, y, z)$ формула

$$\mathfrak{A}(R, S) \rightarrow \mathfrak{S}(R, S)$$

представляет собой истинное высказывание. Так, предложение геометрии трансформировалось в предложение чистой логики предикатов.

С этой точки зрения вопрос о непротиворечивости рассматриваемой системы аксиом также можно совершенно аналогичным образом представить в виде некоторой проблемы чистой логики предикатов. Именно, речь идет о том, могут ли два трехместных предиката $R(x, y, z)$ и $S(x, y, z)$ удовлетворять условиям, налагаемым на них формулой $\mathfrak{A}(R, S)$ ¹⁾, или же, напротив, предположение о том, что формула $\mathfrak{A}(R, S)$ выполняется для пары каких-либо конкретных предикатов R и S , ведет к противоречию, так что для всякой такой пары предикатов формула $\neg \mathfrak{A}(R, S)$ будет представлять собой истинное высказывание.

§ 2. Проблема разрешимости

1. Общезначимость и выполнимость. Вопросы, подобные только что рассмотренному, относятся к кругу вопросов так называемой *проблемы разрешимости*. Под этим в современной логике понимается проблема нахождения общих методов распознавания *о б щ е з н а ч и м о с т и* или же *в ы п о л н и м о с т и* логических формул²⁾.

При этом рассматриваемые формулы образуются с помощью логических знаков из предикатных переменных и равенств. Переменные, стоящие на местах субъектов, трактуются нами как *и н д и в и д н ы е* *п е р е м е н н ы е*. Каждая из них должна быть связана квантором всеобщности или существования.

Формула такого рода называется *общезначимой*, если она представляет собой истинное высказывание при *любом* замещении переменных предикатов. Она называется *выполнимой*, если она оказывается истинным высказыванием при *подходящем* замещении переменных предикатов.

Формулы

$$\forall x F(x) \ \& \ \forall x G(x) \rightarrow \forall x (F(x) \ \& \ G(x)),$$

$$\forall x P(x, x) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y),$$

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \ \& \ y = z \rightarrow P(x, z))$$

дают нам простые примеры общезначимых формул.

¹⁾ Этот, пока еще не вполне точно сформулированный вопрос в дальнейшем будет уточнен.

²⁾ Сказанное, правда, относится только к проблеме разрешимости в узком смысле этого слова. Нам нет необходимости заниматься в этой связи рассмотрением более широкого понимания этой проблемы.

Формулы

$$\begin{aligned} \exists x F(x) \& \exists x \neg F(x), \\ \forall x \forall y (P(x, y) \& P(y, x) \rightarrow x = y), \\ \forall x \exists y P(x, y) \& \exists y \forall x \neg P(x, y) \end{aligned}$$

являются примерами выполнимых формул.

Эти последние, например, превратятся в истинные высказывания в индивидуальной области, состоящей из чисел 1 и 2, если в первую из них вместо $F(x)$ подставить предикат « x есть четное число», во вторую — вместо $P(x, y)$ предикат $x \leq y$, а в третью — вместо $P(x, y)$ предикат $x \leq y \& y \neq 1$.

Следует обратить внимание на то, что при определении предикатов должна быть также указана *индивидуальная область*, к которой относятся переменные $x, y, \dots$ В рассматриваемой логической формуле эта область в известном смысле фигурирует в качестве *скрытой* переменной. Разумеется, выполнимость какой-либо логической формулы представляет собой свойство, инвариантное относительно взаимно однозначных отображений одной индивидуальной области на другую, так как индивиды фигурируют в формулах лишь в качестве переменных субъектов. Поэтому единственной существенной характеристикой индивидуальной области является *число составляющих эту область индивидов*.

Итак, в отношении общезначимости и выполнимости мы должны различать следующие вопросы:

1. Вопрос об общезначимости в *любой* индивидуальной области, соответственно о выполнимости в *какой-либо* индивидуальной области.
2. Вопрос об общезначимости, соответственно о выполнимости при заданном числе индивидов.
3. Вопрос о том, при каком числе индивидов имеет место общезначимость, соответственно выполнимость.

2. Распознавание в случае конечных индивидуальных областей. Заметим, что случай, когда число индивидов равно нулю, разумно вообще исключить из рассмотрения, так как такие индивидуальные области, состоящие из нуля элементов, с формальной точки зрения занимают особое положение, между тем рассмотрение их является тривиальным и для приложений никакого значения не имеет¹⁾.

¹⁾ Установку на то, что всякая индивидуальная область должна содержать по меньшей мере один элемент и что, следовательно, всякое истинное общезначимое суждение должно быть справедливым хотя бы для одного объекта, не следует смешивать с господствующим в аристотелевской логике соглашением о том, что суждение вида «все S суть P » вообще считается истинным лишь при условии, что объекты со свойством S в наличии имеются. В современной логике это соглашение не применяется. Такого рода суждение символически представляется в виде $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$ и считается истин-

Затем мы замечаем, что при определении предиката во внимание принимается лишь его «пробег значений» (Wertverlauf *), т. е. лишь то, для каких значений переменных, стоящих на местах субъектов, предикат выполняется (является истинным), а для каких — нет (является ложным).

Следствием этого обстоятельства является тот факт, что в случае *заданного конечного* числа индивидов общезначимость, а также выполнимость всякой конкретной логической формулы представляет собой чисто *комбинаторный факт*, который может быть проверен элементарным перебором всех возможных случаев.

В самом деле, если n — число индивидов, а k — число субъектов («мест») какого-либо предиката, то число различных наборов значений переменных равно n^k ; и так как для каждого из этих наборов рассматриваемый предикат является истинным или ложным, то для пробега значений k -местного предиката имеется в точности 2^{n^k} различных возможных значений.

Так что если

$$R_1, \dots, R_t$$

суть различные входящие в рассматриваемую нами формулу предикатные переменные, а числа

$$k_1, \dots, k_t$$

указывают количество аргументов у этих переменных, то число возможных пробегов значений, или, как мы будем для краткости говорить, число различных возможных систем предикатов, равно

$$2^{n^{k_1} + \dots + n^{k_t}}.$$

В соответствии с этим общезначимость нашей формулы означает, что для всех

$$2^{n^{k_1} + \dots + n^{k_t}}$$

упомянутых выше систем предикатов эта формула представляет истинное высказывание, а ее выполнимость означает, что высказывание, представляемое этой формулой, оказывается истинным по меньшей мере для одной из этих систем; при этом для фиксированной системы предикатов вопрос об истинности или о ложности высказывания, представленного рассматриваемой формулой, опять-таки может быть решен за конечное число шагов, поскольку

ным, если всякий объект x , обладающий свойством $S(x)$, обладает также и свойством $P(x)$, независимо от того, имеются ли вообще в наличии объекты со свойством $S(x)$. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся при дедуктивном построении логики предикатов (см. гл. IV, с. 143—144).

*) Термин введен Готлобом Фреге. Трактую предикат как функцию, мы можем отождествить его пробег значений с графиком этого предиката. — *Прим. перев.*

связываемые кванторами всеобщности или существования переменные могут принимать лишь n значений, так что квантор всеобщности оказывается равнозначным некоторой n -членной конъюнкции, а квантор существования — n -членной дизъюнкции.

Рассмотрим в качестве примера две следующие формулы:

$$\forall x P(x, x) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y),$$

$$\forall x \forall y (P(x, y) \& P(y, x) \rightarrow x = y)$$

(первая из них фигурировала в качестве примера общезначимой, а вторая — выполнимой формулы). Мы отнесем их к двухэлементной индивидуальной области.

Эти индивиды мы можем обозначить цифрами 1 и 2. Тогда в рассматриваемом нами примере $t = 1$, $n = 2$, $k_1 = 2$. Следовательно, число различных систем предикатов будет равно

$$2^{2^2} = 2^4 = 16.$$

Вместо $\forall x P(x, x)$ мы можем подставить

$$P(1, 1) \& P(2, 2),$$

а вместо $\forall x \exists y P(x, y)$ —

$$(P(1, 1) \vee P(1, 2)) \& (P(2, 1) \vee P(2, 2)).$$

Тогда первая из рассматриваемых нами формул перейдет в $P(1, 1) \& P(2, 2) \rightarrow (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \& (P(2, 1) \vee P(2, 2))$.

Эта импликация является истинной для тех предикатов P , для которых

$$P(1, 1) \& P(2, 2)$$

является ложным, а также и для тех P , для которых

$$(P(1, 1) \vee P(1, 2)) \& (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

является истинным. Теперь можно проверить, что для каждого из 16 пробегов значений, получающихся приписыванием одного из значений «истина» или «ложь» каждой из четырех возможных пар значений переменных

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2),$$

одно из этих двух условий выполняется, так что всякий раз все высказывание в целом будет принимать значение «истина». (В рассматриваемом примере проверка облегчается тем обстоятельством, что для установления истинности высказывания достаточно рассматривать лишь значения $P(1, 1)$ и $P(2, 2)$.) Итак, общезначимость первой из наших формул с помощью рассмотренного нами способа может быть установлена путем прямой проверки.

Вторая из упомянутых формул в случае двухэлементной индивидуальной области равнозначна конъюнкции

$$(P(1, 1) \& P(1, 1) \rightarrow 1 = 1) \& (P(2, 2) \& P(2, 2) \rightarrow 2 = 2) \& (P(1, 2) \& P(2, 1) \rightarrow 1 = 2) \& (P(2, 1) \& P(1, 2) \rightarrow 2 = 1).$$

Так как высказывания $1 = 1$ и $2 = 2$ являются истинными, то два первых конъюнктивных члена являются истинными всегда; оба последних члена истинны тогда и только тогда, когда

$$P(1, 2) \& P(2, 1)$$

ложно.

Таким образом, чтобы выполнить интересующую нас формулу, мы должны взять такой предикат P , у которого хотя бы одной из пар (1, 2) или (2, 1) сопоставлено значение «ложь». При всяком таком определении P наше высказывание будет истинным. Следовательно, рассматриваемая формула действительно выполняется в двухэлементной индивидуальной области.

Эти примеры должны проиллюстрировать нам тот чисто комбинаторный характер, который проблема разрешимости носит в случае заданного конечного числа индивидов. Из комбинаторного характера этой проблемы, в частности, вытекает, что в случае конечного числа индивидов общезначимость формулы $\exists$ равносильна невыполнимости формулы $\neg \exists$, а выполнимость формулы $\neg \exists$ равносильна тому, что формула $\exists$ не является общезначимой. Действительно, $\exists$ представляет собой истинное высказывание при тех наборах предикатов, при которых $\neg \exists$ является ложным высказыванием, и наоборот.

3. Метод построения модели. Теперь вернемся к нашему вопросу о непротиворечивости какой-либо системы аксиом¹⁾. Как в рассмотренном выше примере, будем представлять себе эту систему записанной в символическом виде посредством одной единственной формулы.

Тогда вопрос о выполнимости этой формулы для заданной конечной индивидуальной области может быть решен при помощи перебора — по крайней мере в принципе. Предположим теперь, что нам удалось установить выполнимость этой формулы в какой-нибудь конечной области индивидов; тогда мы тем самым получаем и доказательство непротиворечивости этой системы аксиом, причем доказательство, сопровождаемое *построением модели*, с указанием конечной индивидуальной области вместе с набором пробегов значений предикатов, выполняющих эту формулу. Эта область в сочетании с предикатами образует модель, на которой можно конкретным образом убедиться в выполнимости рассматриваемой аксиомы.

¹⁾ См. с. 24 и далее.

Рассмотрим пример такого построения применительно к аксиоматике геометрии. Будем исходить из первоначально зафиксированной системы аксиом. Аксиому I 4), которая утверждает существование трех точек, не лежащих на одной прямой, мы заменим более слабой аксиомой

$$I\ 4')\ \exists x \exists y (x \neq y)$$

(существуют две различные точки).

Далее, мы опустим аксиому плоского порядка II 5), но зато включим в число аксиом два предложения ¹⁾, которые могут быть доказаны с помощью II 5): во-первых, расширим II 4) до

$$II\ 4')\ \forall x \forall y \{x \neq y \rightarrow \exists z Zw(z, x, y) \& \exists z Zw(x, y, z)\}$$

и, во-вторых, добавим

$$II\ 5')\ \forall x \forall y \forall z \{x \neq y \& x \neq z \& y \neq z \rightarrow$$

$$Zw(x, y, z) \vee Zw(y, z, x) \vee Zw(z, x, y)\}.$$

Аксиому о параллельных мы сохраним. Получившуюся в результате этих изменений систему аксиом — вместо первоначальной формулы $\mathfrak{A}(R, S)$ ей теперь соответствует некоторая новая формула $\mathfrak{A}'(R, S)$ — можно, как показал О. Веблен ²⁾, выполнить в индивидуальной области, состоящей из пяти элементов. Пробег значений для предикатов R и S (здесь можно снова, не опасаясь недоразумений, употребить обозначения Gx и Zw) мы построим следующим образом. Прежде всего, предикат Gx мы определим так, чтобы он был истинным для любой тройки значений x, y, z . Тогда, как легко видеть, выполнятся все аксиомы группы I, а также II 1) и III. Для того чтобы оказались выполненными аксиомы II 2), 3), 4) и 5), на предикат Zw необходимо, а также и достаточно, наложить следующие три условия:

1. Для тройки x, y, z с двумя совпадающими элементами Zw всегда принимает значение «ложь».

2. Рассмотрим какой-либо набор из трех различных индивидов, входящих в число наших пяти. Требуется, чтобы среди шести различных упорядочений этого набора на двух упорядочениях с общим первым элементом Zw принимал значение «истина», а на остальных четырех — «ложь».

3. Каждая пара различных индивидов является как началом, так и концом у одной из тех троек, для которых Zw принимает значение «истина».

¹⁾ Оба эти предложения в предыдущих изданиях гильбертовых «Оснований геометрии» фигурировали в числе аксиом. Однако оказалось, что они могут быть доказаны с помощью аксиомы плоского порядка. (См. 7-е издание, с. 5—6 (с. 59 русского перевода).)

²⁾ В уже упоминавшемся исследовании A system of axioms for geometry. — Trans. Amer. Math. Soc., 1904, 5, p. 350.

Первому требованию можно удовлетворить путем прямого задания значений Zw на соответствующих тройках индивидов. Двум остальным требованиям можно удовлетворить следующим образом. Обозначим рассматриваемые пять элементов цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Количество индивидных троек, состоящих из трех различных элементов, для которых мы еще должны будем доопределить предикат Zw , равно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Каждый набор, состоящий из трех элементов, дает нам шесть таких троек; для двух из них предикат Zw должен быть истинным, для остальных — ложным. Таким образом, из шестидесяти троек мы должны указать двадцать, для которых Zw должен оказаться истинным. Это будут те тройки, которые получаются из следующих четырех:

$$(1\ 2\ 5), (1\ 5\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)$$

в результате применения к ним циклической подстановки $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

Легко убедиться, что этим подбором мы удовлетворили всем сформулированным выше требованиям. Построенная таким образом модель доказывает непротиворечивость рассмотренной нами системы аксиом ¹⁾.

Продemonстрированный на этом примере метод построения модели находит весьма многочисленные применения в новейших аксиоматических исследованиях. Прежде всего он используется для проведения различных доказательств независимости. Утверждение о независимости какого-либо предложения $\mathfrak{C}$ от системы аксиом $\mathfrak{A}$ равносильно утверждению о непротиворечивости системы аксиом

$$\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{C},$$

которую мы получим, добавив к $\mathfrak{A}$ в качестве новой аксиомы отрицание предложения $\mathfrak{C}$. Если эта система аксиом выполнима в конечной индивидуальной области, то доказательство ее непротиворечивости может быть проведено уже упоминавшимся методом построения модели ²⁾. Тем самым во многих исследованиях принципиального характера рассматриваемый метод оказывается хорошим дополнением к методу логического вывода, поскольку путем построения вывода мы можем устанавливать доказуемость разного рода предложений при принятии тех или иных аксиом, а путем построения соответствующих моделей — их недоказуемость.

¹⁾ Из того факта, что наша модифицированная система аксиом $\mathfrak{A}'$ выполнима в 5-элементной индивидуальной области, немедленно следует, что входящие в ее состав аксиомы не могут полностью определять линейный порядок.

²⁾ Большое количество применений этого метода можно найти в работах Ханта и Гтона (E. V. Huntington) и его соавторов по линейному и циклическому порядку. Особенно рекомендуем работу A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence. — Trans. Amer. Math. Soc., 1924, 26, pp. 257—282. В ней также приводятся сведения о более ранних публикациях.

§ 3. Вопрос о непротиворечивости в случае бесконечной индивидуальной области

1. Формулы, невыполнимые в конечном; натуральный ряд как модель. Ограничивается ли применимость указанного метода случаем конечных индивидуальных областей? Наши предыдущие рассуждения не дают нам оснований сделать такой вывод. Конечно, сразу становится ясно, что всевозможные системы предикатов в случае бесконечной индивидуальной области не образуют обозримого многообразия и что о последовательном просмотре всех пробегов значений в этом случае речи быть не может. Тем не менее рассматриваемые аксиомы все же могут оказаться такими, что мы будем в состоянии доказать их выполнимость путем подбора подходящих предикатов. И действительно, такие случаи иногда имеют место. Достаточно, например, взять систему из следующих трех аксиом:

$$\forall x \neg R(x, x),$$

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)),$$

$$\forall x \exists y R(x, y).$$

Давайте попытаемся понять, в чем смысл этих аксиом. Возьмем какой-либо объект a из индивидуальной области. Согласно третьей аксиоме, должен существовать объект b такой, что $R(a, b)$ истинно. Согласно первой аксиоме, он отличен от a . Далее, для b должен существовать объект c такой, что $R(b, c)$ истинно. На основании второй аксиомы $R(a, c)$ также истинно; в соответствии с первой аксиомой c отличен от a и от b . Для c снова должен существовать объект d , для которого $R(c, d)$ истинно. Для него истинны также $R(a, d)$ и $R(b, d)$, а значит, d отличен от a , b и c . Это рассуждение никогда не оборвется, и поэтому в конечной индивидуальной области наши аксиомы выполнены быть не могут. Однако, с другой стороны, мы легко можем выполнить их в бесконечной индивидуальной области: возьмем в качестве индивидов целые числа, а в качестве $R(x, y)$ — отношение « x меньше y »; тогда все три аксиомы немедленно окажутся выполненными.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае системы аксиом, состоящей из формул

$$\exists x \forall y \neg S(y, x),$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (S(x, u) \& S(y, u) \& S(v, x) \rightarrow S(v, y)),$$

$$\forall x \exists y S(x, y).$$

Легко показать, что эти аксиомы также не могут быть выполнены в конечной индивидуальной области. С другой стороны, они выполняются в области положительных целых чисел, если в качестве $S(x, y)$ взять отношение « y непосредственно следует за x ».

Рассматривая эти примеры, мы замечаем, однако, что приведенные нами модели вовсе не дают окончательного решения вопроса о непротиворечивости рассматриваемой системы аксиом: более того, они только сводят его к вопросу о непротиворечивости арифметики. В ранее рассмотренном нами примере мы, правда, тоже пользовались целыми числами для построения конечной модели. Но там это делалось только в целях достижения большей простоты в обозначениях индивидов. Вместо чисел мы могли бы взять какие-нибудь другие индивиды — например, буквы. Используемые там свойства чисел также были такого рода, что их наличие у индивидов могло быть установлено путем конкретной проверки.

Но в рассматриваемом случае мы уже не сможем обойтись представлением об одних лишь конкретных числах; в самом деле, нам приходится существенно использовать предположение о том, что *целые числа образуют индивидуальную область*, т. е. некоторую готовую совокупность (eine fertige Gesamtheit *).

Конечно, это предположение является для нас очень привычным, поскольку в современной математике мы постоянно имеем с ним дело. Мы даже склонны считать его само собой разумеющимся. И Фреге был первым, кто очень энергично, опираясь на тонкую, остроумную критику, выдвинул тезис о том, что представление о натуральном ряде как о готовой совокупности должно быть обосновано посредством доказательства его непротиворечивости¹⁾. Такое доказательство, как полагал Фреге, могло бы быть осуществлено только при помощи некоторого построения как доказательство существования, и он рассчитывал отыскать объекты для такого построения в области логики. Предложенный им способ исходит из того, что совокупность всех чисел определяется с помощью совокупности всех вообще мыслимых одноместных предикатов, существование которой нами предполагается. Но положенное при этом в основу предположение, которое и без того кажется весьма подозрительным уже при непредвзятом рассмотрении, оказалось совершенно несостоятельным вследствие обнаруженных Расселом и Цермело знаменитых логических и теоретико-множественных парадоксов. И неудача этого предприятия показала нам — еще отчетливее, чем диалектика Фреге, — всю проблематичность допущения о том, что натуральный ряд представляет собой некоторую единую совокупность.

2. Проблематика бесконечного. Теперь, перед лицом всей этой проблематики, мы можем попытаться вместо натурального ряда использовать в целях проведения доказательств непротиво-

*) Консистентное — в терминологии Г. Кантора — множество. См. Добавление VI «О понятии числа» к «Основаниям геометрии» Гильберта (с. 320—321 русского перевода). — Прим. перев.

¹⁾ Frege G. Grundlagen der Arithmetik. — Breslau, 1884; Frege G. Grundgesetze der Arithmetik. — Jena, 1893.

речивости какую-нибудь другую бесконечную индивидуальную область, которая не была бы, подобно натуральному ряду, чистым мысленным образом, а заимствовалась бы нами из области чувственного восприятия или даже из реальной действительности. Однако при более пристальном рассмотрении ситуации мы убеждаемся, что всюду, где бы мы ни надеялись встретить бесконечные многообразия, — в области ли чувственных ощущений или в физической действительности — о прямом их обнаружении не может быть и речи, что скорее, напротив, убеждение в существовании какого-нибудь многообразия подобного рода основывается на мысленной экстраполяции, обоснование которой нуждается в специальном рассмотрении — во всяком случае, в той же мере, что и само представление о натуральном ряде как о некоторой единой совокупности.

Типичным примером, иллюстрирующим эту мысль, является бесконечность, лежащая в основе известного парадокса Зенона. Предположим, что мы проходим некоторый отрезок за конечный промежуток времени. В этом процессе содержится бесконечно много протекающих друг за другом его частей: сначала мы проходим первую половину отрезка, затем — следующую четверть, следующую восьмую часть и т. д. Если нам придется иметь дело с каким-нибудь настоящим движением, то все эти частичные акты окажутся реальными процессами, которые будут протекать друг после друга.

Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и таким образом дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только фактически, но хотя бы в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться.

В действительности, конечно, существует гораздо более радикальное решение этого парадокса. Ведь на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математическое пространственно-временное представление о движении является физически осмысленным также и в случае произвольно малых пространственных и временных интервалов. Более того, у нас имеются все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который еще доступен нашему наблюдению, подобно тому, как совершает определенную экстраполяцию механика сплошной среды, которая кладет в осно-

ву своих рассуждений представление о непрерывном заполнении пространства материей. Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение. Если мы встанем на такую точку зрения, то этот парадокс исчезнет.

Несмотря на это, математическая модель движения как *комплекс идеализированных понятий*, введенных нами с целью упрощения наших представлений, имеет непреходящее значение. Однако для достижения своей цели, кроме приближенного совпадения с действительностью, модель эта должна удовлетворять еще одному условию: произведенная в ней экстраполяция должна быть непротиворечивой в себе. При такой точке зрения наше математическое представление о движении не оказывается поколебленным парадоксом Зенона ни в малейшей степени: упомянутый нами математический контраргумент действует здесь в свою полную силу. Однако совсем другое дело вопрос о том, действительно ли мы располагаем доказательством непротиворечивости математической теории движения. Эта теория существенным образом использует математическую теорию континуума, а эта последняя в свою очередь существенно опирается на представление о множестве всех целых чисел как о готовой *) совокупности. Таким образом, круглым путем мы снова возвращаемся к той самой проблеме, которую мы пытались обойти ссылкой на факт движения.

Сходным образом дело обстоит и во всех тех случаях, когда мы полагаем, что бесконечность можно обнаружить непосредственно как данную в опыте или в интуиции — например, как бесконечный ряд тонов, идущий от октавы к октаве, или непрерывное бесконечное многообразие переходов от одного цвета к другому. Ближайшее рассмотрение показывает, что бесконечность здесь нам вообще не дана, а просто в зависимости от обстоятельств то интерполируется, то экстраполируется посредством некоторого мыслительного процесса.

В результате этих размышлений мы приходим к пониманию того факта, что вопрос о существовании какого-либо бесконечного многообразия не может быть разрешен посредством указания каких-либо нематематических объектов, а должен решаться внутри самой математики. Как, однако, такое решение может быть осуществлено? На первый взгляд кажется, что нам вообще хочется чего-то невозможного. Бесконечное количество индивидов предъявить невозможно в принципе; поэтому бесконечность

*) См. прим. перев. на с. 39.

индивидуальной области как таковой может выявиться лишь в ее структуре, т. е. в тех отношениях, которые имеются между ее элементами. Другими словами, мы должны будем показать, что рассматриваемая индивидуальная область удовлетворяет определенным формальным соотношениям. Следовательно, существование бесконечной индивидуальной области *нельзя представить себе иначе, кроме как через выполнимость определенных логических формул*; однако это будут формулы как раз того самого рода, что и формулы, в результате исследования которых мы были подведены к вопросу о том, существует ли какая-нибудь бесконечная индивидуальная область, и выполнимость которых мы как раз и должны были установить посредством указания некоторой бесконечной индивидуальной области. Таким образом, попытка применить упомянутый метод построения модели к рассматриваемым формулам приводит нас к порочному кругу.

3. Установление непротиворечивости как доказательство невозможности; метод арифметизации. До сих пор при установлении непротиворечивости систем аксиом в качестве дозволенного средства нам разрешалось использовать только построения определенного рода. К этому методу нас привело рассмотрение индивидуальных областей с конечным числом индивидов, поскольку мы уяснили себе, что для области такого рода непротиворечивость какой-либо формулы равнозначна ее выполнимости.

В случае бесконечных индивидуальных областей положение вещей оказывается гораздо более сложным. Правда, здесь все еще остается справедливым утверждение о том, что система аксиом, представленная формулой $\mathcal{A}$, противоречива тогда и только тогда, когда общезначима формула $\neg \mathcal{A}$. Однако, поскольку теперь мы уже больше не имеем дела с обозримым запасом пробегов значений для переменных предикатов, то из общезначимости $\neg \mathcal{A}$ нельзя будет заключить, что в нашем распоряжении имеется модель, на которой система аксиом $\mathcal{A}$ выполняется.

Таким образом, в случае бесконечной индивидуальной области выполнимость какой-либо системы аксиом является условием, достаточным для ее непротиворечивости, но мы не можем считать его необходимым. Поэтому нельзя рассчитывать, что доказательство непротиворечивости всегда можно будет осуществить при помощи некоторого доказательства выполнимости. С другой стороны, мы вовсе и не обязаны доказывать непротиворечивость путем установления выполнимости; более того, мы можем остановиться на первоначальном, негативном понимании непротиворечивости. Это означает, что если мы снова представим себе систему аксиом записанной в виде формулы $\mathcal{A}$, то нам нужно будет доказывать не выполнимость формулы $\mathcal{A}$, а лишь то, что допущение о выполнении $\mathcal{A}$ посредством каких-либо определенных предикатов не может привести к логическому противоречию.

Штурм рассматриваемой проблемы с этой стороны мы начнем с обзора логических следствий, которые можно извлечь из заданной системы аксиом. Подходящим для этих целей средством нам представляется метод *формализации логического вывода* в том виде, как он был развит Фреге, Шрёдером, Пеано и Расселом.

Таким образом, мы пришли к следующему плану работы:

1) строго формализовать принципы логического вывода и подготовить таким образом систему правил вывода, которая была бы полностью обозримой;

2) для заданной системы аксиом $\mathcal{A}$ (непротиворечивость которой должна быть установлена) показать, что, *исходя из нее и пользуясь средствами логического вывода, нельзя будет получить никакого противоречия*, т. е. что *никогда не смогут оказаться доказуемыми две формулы, одна из которых является отрицанием другой*.

Это доказательство нам не нужно будет проводить для каждой системы аксиом в отдельности. Вместо этого мы сможем воспользоваться уже упоминавшимся в начале этой главы методом *арифметизации*¹⁾. С нашей нынешней точки зрения его можно охарактеризовать следующим образом. Мы ищем такую систему аксиом $\mathcal{A}$, которая, с одной стороны, имела бы настолько обозримую структуру, чтобы можно было осуществить доказательство ее непротиворечивости (в смысле п. 2 из намеченного выше плана), а с другой стороны, была бы настолько богатой, чтобы, исходя из ее модели, если предположить, что она *имеется в нашем распоряжении* в виде некоторой системы $\mathcal{S}$ объектов и отношений, мы могли построить также и модели для систем аксиом различных геометрических и физических дисциплин, причем таким образом, чтобы объекты какой-либо такой системы $\mathcal{B}$ были представлены индивидами из $\mathcal{S}$ или их комплексами, а в качестве основных отношений брались такие предикаты, которые можно образовать из основных отношений системы $\mathcal{S}$ при помощи логических операций.

Тем самым непротиворечивость рассматриваемой системы $\mathcal{B}$ фактически оказалась бы установленной: в самом деле, противоречие, если бы оно получилось в качестве следствия из этой системы аксиом, представляло бы собой также противоречие, выведенное из системы аксиом $\mathcal{A}$; между тем непротиворечивость $\mathcal{A}$ уже установлена.

Нам представляется, что роль такой системы $\mathcal{A}$ мог бы сыграть (аксиоматически построенный) анализ.

Этот «метод сведения» аксиоматических теорий к анализу не требует, чтобы анализ представлял собой нечто такое, что фактически можно предъявить к рассмотрению в какой-либо

¹⁾ См. с. 25.

наглядной форме; напротив, от анализа нам не требуется ничего, кроме того, чтобы он был совокупностью идей, непротиворечивость которой мы в состоянии доказать и которая представляет в наше распоряжение такие систематические рамки для упорядочения аксиоматических систем теоретических научных дисциплин, что осуществляемые в них идеализации реальной действительности также оказываются непротиворечивыми.

Теперь коротко подведем итоги наших последних рассуждений. Проблема выполнимости какой-либо системы аксиом (соответственно какой-нибудь логической формулы), которая в случае конечной индивидуальной области может быть решена в позитивном смысле путем построения соответствующей модели, в том случае, когда для доказательства выполнимости требуется использование бесконечной индивидуальной области, не может быть разрешена указанным методом, поскольку существование бесконечной индивидуальной области само по себе не может считаться бесспорным; более того, введение таких бесконечных областей само может быть обосновано лишь посредством доказательства непротиворечивости какой-либо системы аксиом, характеризующей бесконечное.

Ввиду того, что позитивный метод решения в этой ситуации оказывается невозможным, нам остается лишь один путь, путь негативных по своему характеру доказательств непротиворечивости, т. е. путь *доказательств невозможности*, для чего оказывается необходимой формализация логического вывода.

И раз уж нам пришлось столкнуться с подобного рода задачей, требующей доказательства невозможности, мы должны отчетливо осознать, что само такое доказательство уже не может быть осуществлено с помощью методов экзистенциально-аксиоматического вывода. Более того, мы будем вправе применять лишь такие способы рассуждений, которые не содержат в себе никаких идеализированных экзистенциальных предположений.

На основе этого обсуждения у нас немедленно возникает следующая идея. Если упомянутое доказательство невозможности мы сможем осуществить без экзистенциально-аксиоматических предположений, то может быть тогда мы сможем подобным же образом непосредственно построить и весь анализ в целом, а тем самым сделать упоминавшееся доказательство невозможности вообще излишним? Рассмотрением этого вопроса мы займемся в следующей главе.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АРИФМЕТИКА. ФИНИТНЫЙ СПОСОБ РАССУЖДЕНИЙ И ЕГО ГРАНИЦЫ

§ 1. Рассуждения на интуитивном уровне и их применение в элементарной арифметике

1. Понятие цифры; отношение порядка; сложение. Поставленный в конце предыдущей главы вопрос о том, можно ли построить анализ прямым, не зависящим от аксиоматики методом и таким образом сделать излишним специальное доказательство его непротиворечивости, дает нам повод вспомнить о том, что аксиоматический метод в его уточненном виде отнюдь не является исконным методом математики. В особенности это верно в отношении экзистенциальных умозаключений, совершаемых при условии, что в основу рассмотрения кладется какая-либо фиксированным образом описанная индивидуальная область.

Геометрия, правда, с самого начала строилась аксиоматически. Однако аксиоматика Евклида представляется нам содержательной и наглядной. В ней не происходит отвлечения от наглядного смысла фигур. Аксиомы сами по себе тоже имеют неэкзистенциальную форму. Евклид не делает предположения о том, что точки и прямые представляют собой фиксированные индивидуальные области. Поэтому он и формулирует не аксиомы о существовании, а постулаты о построении.

Один из этих постулатов, например, утверждает, что всякие две точки можно соединить прямой; утверждается также, что вокруг любой точки можно описать окружность заданного радиуса.

И все-таки точка зрения этой методики может быть проведена в жизнь лишь тогда, когда постулаты рассматриваются нами как выражение каких-либо известных нам из действительности фактов, либо когда мы считаем их непосредственно очевидными. Возникающий здесь вопрос о границах применимости геометрических аксиом является, как известно, чрезвычайно деликатным и спорным. Существенное преимущество формальной аксиоматики как раз в том и состоит, что она делает построение геометрии не зависящим от решения этого вопроса.

В области анализа мы свободны от такого рода проблематики, связанной с особым характером геометрического знания, и действительно — здесь, в области элементарной арифметики и алгебры, ориентировка на прямые содержательные рассуждения,

осуществляемые без предположений аксиоматического характера, разработана в наиболее чистом виде.

Характерной особенностью этой точки зрения является то, что рассуждения здесь рассматриваются как *мысленные эксперименты* над предметами, которые предполагаются *конкретно заданными*. Так, в арифметике речь идет о числах, которые мыслятся как заданные, в алгебре речь идет о заданных буквенных выражениях с заданными числовыми коэффициентами.

Мы хотели бы более подробно рассмотреть этот способ и несколько уточнить наши исходные положения. В арифметике у нас имеются некоторый исходный объект и, кроме того, некоторая операция порождения. И то, и другое мы должны будем зафиксировать некоторым наглядным образом. Конкретный вид фиксации для нас будет несущественным. Необходимо только, чтобы выбор, осуществленный однажды, сохранялся затем на протяжении всей теории. Мы возьмем в качестве исходного объекта цифру 1, а в качестве операции порождения — приписывание 1.

Объекты, которые мы получим, отправляясь от цифры 1, в результате применения упомянутой операции порождения, такие, например, как

1, 11, 1111,

представляют собой фигуры следующего вида: они начинаются и оканчиваются цифрой 1; после каждой цифры 1, не являющейся концом данной фигуры, идет следующая за ней 1. Фигуры эти возникают в результате применения порождающей операции и, следовательно, являются результатами некоторых конкретных завершающихся *построений*; поэтому эти построения могут быть аннулированы путем последовательных применений обратного процесса *ликвидации*.

Слегка отклоняясь от привычного словоупотребления, мы будем называть эти фигуры *цифрами*.

Что касается точного внешнего вида цифр, то мы, как обычно, оставим для него известный простор. Небольшие различия в написании, касающиеся формы и размера знака 1, а также расстояния при дописывании очередной цифры, мы принимать в расчет не будем. Мы существенным образом будем использовать лишь то, что как сама цифра 1, так и результат операции приписывания этой цифры представляют собой некоторые интуитивно ясные (наглядные) объекты, которые можно опознавать однозначным образом, и что у каждой цифры мы всегда можем проанализировать те дискретные части, из которых она составлена.

Наряду с цифрами мы введем в рассмотрение еще и другие знаки, знаки «для сообщения», которые следует в принципе отличать от цифр, представляющих собой *объекты* арифметики.

Знак для сообщения, взятый сам по себе, является фигурой, про которую мы также будем предполагать, что она может быть однозначно опознана, и небольшими различиями в осуществлении которой мы также будем пренебрегать. Но такие знаки не будут являться объектами рассмотрения теории, а будут использоваться нами в качестве вспомогательного средства для кратких и отчетливых формулировок разного рода фактов, утверждений и предположений.

В арифметике мы будем пользоваться следующими знаками для сообщений:

1) строчными готическими буквами для обозначения произвольных нефиксированных цифр;

2) обычными числами для сокращенной записи конкретных цифр (например, 3 для обозначения цифры 111 и т. д.);

3) знаками для конкретных процессов построения и для арифметических операций, с помощью которых мы будем, исходя из заданных цифр, получать новые; эти знаки могут применяться как к фиксированным, так и к произвольным цифрам (например, $a + 11$);

4) знаком $=$ для сообщения о графическом равенстве двух цифр, знаком $\neq$ для сообщения о их различии, а также знаками $<$ и $>$ для обозначения отношений порядка между цифрами (эти отношения в дальнейшем еще будут определены);

5) скобками в качестве знаков для указания порядка действий, когда он без этого не ясен.

Чтобы лучше понять, каким образом будут употребляться введенные нами знаки и как при этом будут проводиться содержательные рассуждения, мы построим в общих чертах некоторый достаточно большой фрагмент арифметики.

Первое, что мы введем в связи цифрами, будет отношение порядка между ними. Пусть две цифры a и b оказались различными. Попытаемся разобраться, в результате чего это могло случиться. И a , и b начинаются цифрой 1. Построение обеих этих цифр будет протекать одинаково до тех пор, пока для одной из них оно не оборвется, в то время как для другой еще будет продолжаться. Когда этот момент наступит, одна из цифр совпадет с *частью* другой; точнее говоря, построение этой цифры совпадет с начальным отрезком построения другой.

Если цифра a совпадет с частью цифры b , мы будем говорить, что a меньше b (или также, что b больше a), и будем обозначать это следующим образом:

$$a < b \text{ или } b > a.$$

Из наших рассуждений следует, что для любых двух цифр a и b всегда должно иметь место одно из отношений

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a.$$

С другой стороны, из наглядного смысла этих отношений видно, что одно из них исключает остальные. Рассуждая аналогично, мы непосредственно получаем, что всегда, когда $a < b$ и $b < c$, имеет место и $a < c$.

В тесной связи с отношением порядка цифр находится операция сложения. Если цифра b совпадает с частью цифры a , то остаток тоже является некоторой цифрой c . Таким образом, a можно получить, присоединяя к b так, что цифра 1, которой начинается c , будет приписываться вслед за цифрой 1, которой оканчивается b , тем же самым способом, как если бы продолжалось применение операции порождения. Такой способ объединения цифр мы называем *сложен ем* и для его обозначения мы применяем знак $+$.

Из этого определения сложения мы непосредственно извлекаем, что если $b < a$, то, сравнивая b с a , мы сможем найти представление a в виде $b + c$, где c снова является цифрой. С другой стороны, если исходить из произвольных цифр b и c , то сложение их снова даст нам некоторую цифру a , так что будет выполняться равенство

$$a = b + c,$$

и тогда будем иметь

$$b < a.$$

Следовательно, всегда будет выполняться неравенство

$$b < b + c.$$

Основываясь на введенных определениях, мы теперь можем объяснить смысл *числовых* равенств и неравенств — таких, как

$$2 < 3, \quad 2 + 3 = 5.$$

Неравенство $2 < 3$ выражает тот факт, что цифра 11 совпадает с частью цифры 111; равенство $2 + 3 = 5$ говорит о том, что в результате присоединения цифры 111 к цифре 11 возникает цифра 11111.

В обоих рассмотренных нами случаях мы имели дело с верными высказываниями; равенство же

$$2 + 3 = 4$$

представляет собой пример ложного высказывания.

2. Законы арифметических действий; полная индукция; умножение; делимость; простые числа. Теперь мы покажем, что для такой наглядным образом определенной операции сложения выполняются обычные арифметические законы.

Эти законы мы будем рассматривать как утверждения о произвольных заданных цифрах и, в качестве таковых, будем устанавливать их с помощью наглядных рассуждений.

Непосредственно из определения сложения может быть извлечен закон ассоциативности, согласно которому для произвольных цифр a, b, c имеет место равенство

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Закон коммутативности, который гласит, что для любых a и b

$$a + b = b + a,$$

получается не столь прямо. Для его доказательства мы воспользуемся методом *полной индукции*. Прежде всего давайте уясним себе, как этот способ умозаключений должен пониматься с позиций нашей элементарной точки зрения. Допустим, что мы рассматриваем некоторое высказывание, относящееся к произвольной цифре и имеющее элементарно наглядное содержание. Пусть это высказывание верно для цифры 1, и пусть известно также, что всякий раз, когда оно верно для какой-либо цифры n , оно верно также и для цифры $n + 1$. Тогда отсюда мы делаем вывод, что рассматриваемое высказывание верно для любой заданной цифры a .

Действительно, a строится, начиная с цифры 1, путем ряда последовательных присоединений этой цифры. Раз мы констатировали, что рассматриваемое высказывание верно для цифры 1 и что при каждом присоединении этой цифры оно, в силу сделанного предположения, оказывается верным и для вновь полученной цифры, то в момент завершения построения a мы придем к выводу о том, что это высказывание верно также и для a .

Таким образом, мы имеем здесь дело не с каким-либо самостоятельным принципом, а лишь с некоторым следствием, извлекаемым нами из того факта, что построение цифр производится определенным конкретным способом.

С помощью этого способа умозаключений мы теперь обычным образом можем показать, что для любой цифры a

$$1 + a = a + 1,$$

и, далее, на основании этого, что всегда справедливо равенство

$$a + b = b + a.$$

Теперь рассмотрим вкратце вопрос о введении умножения, деления и непосредственно связанных с ними понятий.

Умножение может быть определено следующим образом: $a \cdot b$ означает цифру, которая получается из цифры b замещением в процессе ее построения каждой цифры 1 цифрой a , так что сначала мы изготавливаем цифру a , а затем при построении b всякий раз вместо присоединения 1 производим присоединение a .

⁴ Д. Гильберт, П. Бернайс

Из этого определения умножения непосредственно получается закон ассоциативности, а затем и дистрибутивности, согласно которому для любых a , b и c

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Второй закон дистрибутивности, согласно которому всегда имеет место равенство

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a),$$

может быть выведен из законов для сложения с помощью описанного выше метода полной индукции. С помощью этого метода может быть также установлен и закон коммутативности умножения.

Чтобы определить деление, мы должны будем осуществить некоторые предварительные рассуждения. Построение любой цифры по своему характеру таково, что при очередном навешивании 1 всегда получается некоторая новая цифра. Таким образом, построение какой-либо цифры a осуществляется нами путем построения конкретного ряда цифр, который начинается цифрой 1, оканчивается цифрой a и в котором каждая цифра получается из предыдущей приписыванием 1. Отсюда немедленно видно, что кроме самого a этот ряд содержит лишь цифры, меньшие a , и что всякая цифра, меньшая a , встречается в этом ряду. Для краткости мы будем называть эту последовательность цифр рядом цифр от 1 до a .

Пусть теперь b — отличная от 1 цифра такая, что $b < a$. Тогда b имеет вид $1 + c$ и потому

$$b \cdot a = (1 \cdot a) + (c \cdot a).$$

Следовательно,

$$a < b \cdot a.$$

Теперь умножим b последовательно на цифры из ряда от 1 до a . Тогда в полученном ряде цифр

$$b \cdot 1, b \cdot 11, \dots, b \cdot a$$

первая меньше a , а последняя больше a . Будем идти по этому ряду до тех пор, пока впервые не встретим такую цифру, которая больше a ; тогда предыдущая цифра — пусть это будет $b \cdot q$ — либо равна a , либо меньше a , в то время как

$$b \cdot (q + 1) = (b \cdot q) + b > a.$$

Тем самым либо

$$a = b \cdot q,$$

либо a представляется в виде

$$a = (b \cdot q) + r,$$

причем

$$(b \cdot q) + r < (b \cdot q) + b,$$

так что

$$r < b.$$

В первом случае a делится на b , во втором случае имеет место деление с остатком.

Вообще, мы говорим, что a делится на b , если среди цифр ряда

$$b \cdot 1, b \cdot 11, \dots, b \cdot a$$

встречается цифра a . Это определение будет годиться и для случая $b = 1$, и для случая $b = a$, и для только что рассмотренного нами случая.

Из определения делимости непосредственно следует, что если a делится на b , то установление факта делимости одновременно дает и представление a в виде

$$a = b \cdot q.$$

Верно, однако, и обратное: из равенства

$$a = b \cdot q$$

следует, что (в определенном выше смысле) a делится на b , так как цифра q содержится среди цифр от 1 до a .

Пусть $a \neq 1$, и пусть среди цифр от 1 до a не встречается ни одного делителя a , за исключением 1 и a , так что любое произведение $m \cdot n$, где m и n принадлежат ряду цифр от 2 до a , отлично от a . Тогда мы называем a *простым числом*.

Пусть n — цифра, отличная от 1. Тогда среди цифр 1 от до n обязательно найдется первая, отличная от 1 и являющаяся делителем n . Относительно этого наименьшего отличного от 1 делителя t легко показать, что он является простым числом.

Теперь мы уже можем методом Евклида доказать теорему о том, что для любой цифры a может быть указано простое число, большее a . Действительно, перемножим все цифры ряда от 1 до a , прибавим к этому 1 и возьмем у полученной таким образом цифры наименьший отличный от 1 делитель t . Он является простым числом. Легко также установить, что t не может встречаться среди чисел от 1 до a . Тем самым $t > a$.

3. Рекурсивные определения. Начиная с этого места, дальнейшее построение элементарной арифметики становится очевидным; лишь один пункт еще нуждается здесь в серьезных поясне-

ниях — это метод *рекурсивных определений*. Давайте постараемся понять, в чем заключается этот метод.

Вводится какой-нибудь новый функциональный знак (например, φ) и рассматриваемая функция определяется при помощи двух равенств, которые в простейшем случае имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= a, \\ \varphi(n+1) &= \psi(\varphi(n), n).\end{aligned}$$

Здесь a — цифра, а ψ — функция, построенная путем комбинирования уже известных функций, так что $\psi(b, c)$ может быть вычислено для любых заданных цифр b и c и принимает в качестве значения некоторую цифру.

Например, функция

$$\rho(n) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

может определяться равенствами

$$\begin{aligned}\rho(1) &= 1, \\ \rho(n+1) &= \rho(n) \cdot (n+1).\end{aligned}$$

Мы должны будем специально разъяснить, какой смысл вкладывается в такой способ определения, и тут нам прежде всего требуется уточнить понятие функции. Под *функцией* мы будем понимать наглядное предписание, на основании которого заданной цифре или паре, тройке и т. д. цифр сопоставляется некоторая новая цифра. Пару равенств указанного выше вида, называемую *рекурсией*, мы будем рассматривать как *сокращенное сообщение* о следующем предписании.

Пусть m — произвольная цифра. Если $m = 1$, то сопоставим m цифру a . В противном случае m имеет вид $b + 1$. Тогда мы прежде всего составим выражение

$$\psi(\varphi(b), b).$$

Если $b = 1$, то заменим в этом выражении $\varphi(b)$ цифрой a ; в противном случае b снова имеет вид $c + 1$ и тогда мы заменим $\varphi(b)$ выражением

$$\psi(\varphi(c), c).$$

Снова либо $c = 1$, либо c имеет вид $d + 1$. В первом случае заменим $\varphi(c)$ цифрой a , во втором — выражением

$$\psi(\varphi(d), d).$$

Выполнение этого предписания обязательно завершится, так как цифры

$$b, c, d, \dots,$$

которые мы последовательно строим друг за другом, представляют собой последовательную *ликвидацию* цифры m , а она, как и построенное m , обязательно должна завершиться. Если в процессе ликвидации m мы уже дошли до 1, то заменим $\varphi(1)$ цифрой a . В получающемся при этом выражении знак φ больше не входит, из функциональных знаков в нем теперь встречается только ψ , повторенное, быть может, несколько раз, а самыми внутренними аргументами являются цифры. Тем самым мы пришли к выражению, которое может быть вычислено, так как ψ является известной функцией. Теперь это вычисление должно быть выполнено изнутри и получающуюся при этом цифру мы сопоставим цифре m .

Характер этого предписания прежде всего позволяет нам заключить, что в принципе оно может быть выполнено для произвольной наперед заданной цифры m и что результат его выполнения определяется однозначно. Одновременно мы получаем также, что для всякой заданной цифры n будет выполняться равенство

$$\varphi(n+1) = \psi(\varphi(n), n),$$

если в нем заменить $\varphi(n)$ и $\varphi(n+1)$ цифрами, сопоставленными согласно нашему предписанию цифрам n и $n+1$ соответственно, а затем воспользоваться определением уже известной функции ψ .

В полном соответствии с этим трактуется и несколько более общий случай, когда определяемая функция φ дополнительно зависит от одной или нескольких неопределенных цифр — «параметров». В случае одного параметра t рекурсивные равенства имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi(t, 1) &= \alpha(t), \\ \varphi(t, n+1) &= \psi(\varphi(t, n), t, n),\end{aligned}$$

где α и ψ суть известные функции. Например, рекурсией

$$\begin{aligned}\varphi(t, 1) &= t, \\ \varphi(t, n+1) &= \varphi(t, n) \cdot t\end{aligned}$$

определяется функция $\varphi(t, n) = t^n$.

Здесь, в случае определения при помощи рекурсии, мы снова имеем дело не с каким-либо специальным самостоятельным дефиниционным принципом. Рекурсия в рамках элементарной арифметики имеет смысл всего лишь соглашения о некотором способе сокращенного описания определенных процессов построения, посредством которых одна или несколько заданных цифр перерабатываются в некоторую новую цифру.

4. **Одно доказательство невозможности.** В качестве примера, показывающего, что в рамках наглядной арифметики можно про-

водить и доказательства невозможности, рассмотрим следующее утверждение, выражающее иррациональность числа $\sqrt{2}$: не может существовать двух цифр m и n таких, что ¹⁾

$$m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n.$$

Доказательство этого утверждения, как известно, может быть проведено следующим способом. Сначала мы показываем, что всякая цифра либо делится на 2, либо представляется в виде $(2 \cdot f) + 1$. Отсюда следует, что $a \cdot a$ лишь тогда может делиться на 2, когда на 2 делится само a .

Пусть теперь задана пара чисел m, n таких, что выполняется приведенное выше равенство. Тогда мы можем просмотреть все числовые пары a, b такие, что

a принадлежит ряду $1, \dots, m$,

b принадлежит ряду $1, \dots, n$,

и выяснить, выполняется ли для них равенство

$$a \cdot a = 2 \cdot b \cdot b.$$

Среди пар, удовлетворяющих этому равенству, мы берем такую, у которой b имеет наименьшее значение. Такая пара может существовать только одна; пусть это будет пара m', n' . Согласно сделанному ранее замечанию, из равенства

$$m' \cdot m' = 2 \cdot n' \cdot n'$$

следует, что m' делится на 2:

$$m' = 2 \cdot f'.$$

Таким образом, мы получаем

$$2 \cdot f' \cdot 2 \cdot f' = 2 \cdot n' \cdot n',$$

$$2 \cdot f' \cdot f' = n' \cdot n'.$$

Отсюда следует, что пара чисел n', f' удовлетворяет нашему равенству и одновременно $f' < n'$. Однако это противоречит выбору n' .

Только что доказанной теореме можно, конечно, придать следующий положительный вид: если m и n — две произвольные цифры, то $m \cdot m$ отлично от $2 \cdot n \cdot n$.

¹⁾ Мы пользуемся здесь обычным бесконечным способом записи произведения нескольких сомножителей, допустимым вследствие закона ассоциативности для умножения.

§ 2. Дальнейшие применения интуитивных рассуждений

1. **Отношение арифметики к учению о количестве.** Сказанного вполне достаточно для того, чтобы охарактеризовать элементарный способ изложения арифметики. Мы построили ее как теорию цифр, т. е. фигур некоторого простого вида. Гносеологическое значение этой теории определяется той связью, которая существует между цифрами и собственно *понятием количества*. Характер этой связи таков.

Пусть нам дана какая-нибудь конкретная (и, значит, конечная) совокупность объектов. Предположим, что мы перебираем друг за другом объекты этой совокупности и приписываем им по порядку в качестве номеров цифры $1, 11, 111, \dots$. Когда все эти объекты будут исчерпаны, мы дойдем до некоторой вполне определенной цифры n . Учитывая характер ее происхождения, естественно назвать эту цифру *порядковым числом* указанной совокупности при заданном способе перечисления.

Однако легко понять, что результирующая цифра n вовсе не зависит от выбора способа перечисления. В самом деле, пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

суть объекты нашей совокупности в заданном перечислении, и пусть

$$b_1, b_2, \dots, b_f$$

суть те же объекты, перечисленные в другом порядке. Тогда мы сможем перейти от первой нумерации ко второй посредством следующих перестановок номеров. Если объект a_1 отличен от b_1 , то прежде всего поменяем местами номер r , который объект b_1 имеет в первой нумерации, с цифрой 1, т. е. припишем объекту a_r номер 1, а объекту a_1 — номер r . В так возникшей нумерации объект b_1 в качестве номера имеет цифру 1. После него под номером 2 идет либо объект b_2 , либо объект с каким-нибудь другим номером z , который во всяком случае отличен от 1. Тогда поменяем местами в нашей новой нумерации номер z с номером 2, так что возникнет нумерация, в которой объект b_1 имеет номер 1, а объект b_2 — номер 2. Далее, b_3 имеет либо номер 3, либо какой-нибудь другой номер t , во всяком случае, отличный от 1 и 2. Поменяем его местами с 3 и т. д.

Этот процесс в конце концов должен оборваться; в самом деле, при каждой новой перестановке текущая нумерация рассматриваемой совокупности совпадает с нумерацией

$$b_1, b_2, \dots, b_f$$

по крайней мере на одном новом месте, начиная слева, так что в итоге b_1 получит номер 1, b_2 — номер 2, ..., b_f — номер f и

более ни одного объекта не останется. С другой стороны, при выполнении каждой перестановки запас используемых цифр остается одним и тем же; происходит всего лишь замена номера одного объекта номером другого. Таким образом, нумерация всякий раз производится цифрами от 1 до n , а следовательно,

$$\bar{f} = n.$$

Тем самым оказывается, что цифра n приписана рассматриваемой совокупности независимо от способа ее перечисления, и в этом смысле мы можем считать n *количеством* элементов нашей совокупности¹⁾. Мы говорим тогда, что эта совокупность состоит из n объектов.

Если какие-нибудь две конкретные совокупности имеют одно и то же количество элементов, то, пронумеровав обе эти совокупности, мы можем установить взаимно однозначное соответствие между составляющими их объектами. Наоборот, если такое соответствие имеется между двумя заданными совокупностями, то они обе имеют одно и то же количество элементов, как это непосредственно следует из нашего определения количества.

Теперь, исходя из определения количества и пользуясь рассуждениями содержательного характера, мы сможем формулировать основные положения *теории количества* — например, теорему о том, что при объединении двух непересекающихся совокупностей с количеством элементов a и b соответственно получается новая совокупность, состоящая из $a + b$ элементов.

2. Формальная точка зрения в алгебре. Вслед за изложением элементарной арифметики мы хотели бы вкратце обрисовать элементарный содержательный подход к построению *алгебры*. Речь у нас пойдет об элементарной теории целых рациональных функций от одной или нескольких переменных с целочисленными коэффициентами.

В роли объектов теории у нас снова будут выступать фигуры определенного вида, *полиномы*, которые конструируются из некоторого запаса букв $x, y, z, \dots$, называемых *переменными*, и из цифр с помощью знаков $+$, $-$, $\cdot$ и скобок. Таким образом, в отличие от элементарной арифметики, знаки $+$ и $\cdot$ здесь будут рассматриваться не в качестве знаков для сообщения, а в качестве объектов теории.

Строчные готические буквы мы будем снова использовать в качестве знаков для сообщения, но не только для цифр, а и для произвольных полиномов.

¹⁾ Это рассуждение проводит Гельмгольц в своей работе *Zählen und Messen* (1887). (H e l m h o l t z, Hermann von. Schriften zur Erkenntnistheorie.— Berlin: Springer, 1921; см. с. 80—82.)

Конструирование полиномов из перечисленных выше знаков будет происходить в соответствии со следующими правилами построения:

Любая переменная, а также любая цифра считается полиномом. Исходя из двух полиномов a и b , разрешается строить полиномы

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b.$$

Исходя из полинома a , разрешается строить полином

$$(-a).$$

При этом действуют обычные правила, касающиеся расстановки скобок. В качестве знаков для сообщения дополнительно введем: числа 2, 3, $\dots$ (как в элементарной арифметике);

знак 0 (нуль) для обозначения полинома $1 - 1$;

обычное обозначение для степени: например, если z — цифра, то x^z обозначает полином, получающийся из z заменой каждой 1 переменной x и расстановкой между двумя соседними x знака $\cdot$; знак $=$ для сообщения о *взаимной заменимости* двух многочленов.

Заменимость многочленов регулируется следующими содержательно формулируемыми правилами:

1. Законы ассоциативности и коммутативности для знаков $+$ и $\cdot$.

2. Закон дистрибутивности

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

3. Правила для знака $-$:

$$a - b = a + (-b), \quad (a + b) - b = a.$$

4.

$$1 \cdot a = a.$$

5. Если два полинома m и n не содержат переменных и знака $-$ и если в *смысле элементарной арифметики* имеет место равенство $m = n$, то m заменим посредством n .

Эти правила заменимости относятся к тем полиномам, которые фигурируют в качестве *составных частей* других полиномов. Из приведенных правил могут быть выведены дальнейшие утверждения о заменимости, которые представляют собой *тождества* и теоремы элементарной алгебры. В качестве простейших доказуемых тождеств упомянем следующие:

$$a + 0 = a, \quad -(a - b) = b - a,$$

$$a - a = 0, \quad -(-a) = a,$$

$$a \cdot 0 = 0, \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

В числе теорем, которые могут быть доказаны с помощью неформальных рассуждений, отметим следующие фундаментальные утверждения:

а) Пусть a и b — два взаимозаменяемых полинома, из которых по меньшей мере один содержит переменную x . Пусть из a и b получаются полиномы a_1 и b_1 путем замены переменной x всюду, где она входит, одним и тем же полиномом c . Тогда a_1 и b_1 также взаимозаменяемы.

б) При подстановке цифр вместо переменных из верного равенства между полиномами получается верное в арифметическом смысле числовое равенство (предполагается, что правила действий с отрицательными числами включены в арифметику).

Поясним смысл этого утверждения на следующем простом примере. Равенство

$$(x + y) \cdot (x + y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

выражает тот факт, что в соответствии с установленными нами правилами полином $(x + y) \cdot (x + y)$ заменим посредством полинома $x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$. На основании утверждения б) мы можем отсюда заключить, что если m и n суть знаки для чисел, то $(m + n) \cdot (m + n)$ совпадает в арифметическом смысле с $m \cdot m + 2 \cdot m \cdot n + n \cdot n$.

в) Всякий полином заменим либо нулем, либо суммой различных произведений степеней переменных (в качестве такого произведения рассматривается и полином 1), каждое из которых имеет положительный или отрицательный числовой коэффициент.

Эта нормальная форма доставляет нам способ, позволяющий для двух данных полиномов решить вопрос о том, являются ли они взаимозаменяемыми. Именно, имеет место следующее утверждение:

г) Никакой полином, являющийся суммой различных произведений степеней с числовыми коэффициентами, не заменим нулем; два таких полинома взаимозаменяемы только тогда, когда они с точностью до порядка слагаемых и множителей совпадают друг с другом.

Вторая часть этого утверждения следует из первой, а эта последняя в свою очередь может быть доказана с помощью теоремы б) путем рассмотрения соответствующих подстановок цифр.

В качестве специального следствия из г) получается следующее утверждение:

д) Если цифра m , рассматриваемая как полином, заменима цифрой n , то m совпадает с n .

К этим теоремам надлежит сделать следующее методическое замечание. Фигурирующие в утверждениях а) и д) посылки следует понимать таким образом, что констатировать заменимость одного полинома другим мы уславливаемся в соответствии со сформулированными выше правилами. В теореме в) утверждение о заме-

нимости конкретизируется посредством указания некоторого способа, приводимого в доказательстве теоремы.

Таким образом, здесь, как и в случае элементарной арифметики, мы полностью укладываемся в рамки элементарных содержательных рассуждений. Это замечание остается справедливым и в отношении других теорем и доказательств элементарной алгебры.

§ 3. Фinitная точка зрения; выход за ее пределы в области арифметики

1. Логическая характеристика фinitной точки зрения. Осуществленное нами рассмотрение начал арифметики и алгебры было предпринято с целью продемонстрировать, как на практике применяются и используются прямые содержательные рассуждения, совершающиеся в виде мысленных экспериментов над наглядно представимыми объектами и не зависящие от предположений аксиоматического характера. Рассуждения такого рода мы для краткости будем называть *ф и н и т н ы м и*, а методическую установку, лежащую в основе этих рассуждений, мы будем называть *ф и н и т н о й* установкой или *ф и н и т н о й* точкой зрения. В том же самом смысле мы будем говорить о фinitных понятиях и утверждениях, подчеркивая всюду словом *ф и н и т н ы й*, что рассматриваемое рассуждение, утверждение или определение придерживается рамок принципиальной представимости объектов и принципиальной выполнимости операций, а тем самым происходит в рамках конкретного рассмотрения.

Чтобы охарактеризовать фinitную точку зрения, мы еще должны будем сделать несколько замечаний общего характера по поводу типов логических суждений, употребляемых в фinitном мышлении. При этом для конкретности мы ограничимся высказываниями о цифрах.

Всеобщее суждение о цифрах фinitно может быть истолковано лишь в гипотетическом смысле, т. е. как высказывание о произвольной заданной цифре. Такое суждение провозглашает некоторый закон, который должен подтверждаться в каждом конкретном случае.

Экзистенциальное утверждение о цифрах, т. е. утверждение вида «существует цифра n , обладающая свойством $\mathcal{A}(n)$ », с фinitной точки зрения рассматривается как «частичное суждение», т. е. как неполное сообщение о некотором более полном высказывании, заключающемся либо в прямом указании некоторой цифры, обладающей свойством $\mathcal{A}(n)$, либо в указании способа построения такой цифры, причем в задание способа входит и указание определенной границы для числа подлежащих выполнению действий.

Те суждения, в которых всеобщее высказывание сочетается с экзистенциальным, фinitно должны истолковываться соответ-

ственным образом. Так, например, суждение вида «для всякой цифры f , обладающей свойством $\mathcal{A}(f)$, существует цифра l , для которой имеет место $\mathcal{B}(f, l)$ » финитно должно рассматриваться как неполное сообщение о некотором способе, который для всякой цифры f , обладающей свойством $\mathcal{A}(f)$, позволяет находить цифру l , которая находится к f в отношении $\mathcal{B}(f, l)$.

Особой осмотрительности требует применение *отрицания*.

Оно не представляет проблемы в случае элементарного суждения, т. е. суждения, касающегося вопроса, который может быть разрешен путем прямой наглядной констатации («узрения»). Например, если f и l — вполне определенные цифры, то можно непосредственно установить, справедливо ли равенство

$$f + f = l,$$

т. е. совпадают ли цифры $f + f$ и l .

Отрицание такого элементарного суждения попросту означает, что результат соответствующей наглядной проверки отличается от того, что утверждается в суждении; для элементарного суждения всегда имеет место альтернатива, заключающаяся в том, что либо справедливо оно само, либо его отрицание.

Напротив, для всеобщего и для экзистенциального суждения без специальных разъяснений не ясно, что именно должно считаться его отрицанием в финитном смысле.

Рассмотрим сначала экзистенциальные высказывания. То, что не существует цифры n , обладающей свойством $\mathcal{A}(n)$, можно было бы в нестрогом смысле слова понять как констатацию того факта, что у нас нет в распоряжении цифры с этим свойством. Однако такая констатация, ввиду ее соотнесенности со случайным состоянием наших знаний, не имела бы никакого объективного смысла. Если же мы хотим, чтобы несуществование цифры n , обладающей свойством $\mathcal{A}(n)$, утверждалось независимо от состояния наших знаний, то в финитном смысле это может быть осуществлено лишь посредством некоторого утверждения о невозможности, т. е. утверждения, выражающего тот факт, что никакая цифра n не может обладать свойством $\mathcal{A}(n)$.

Так мы пришли к *усиленному* отрицанию; однако это последнее не является точной контрадикторной противоположностью экзистенциального утверждения «существует цифра n со свойством $\mathcal{A}(n)$ », которое, будучи частичным суждением, содержит в себе ссылку на некоторую определенную цифру, обладающую этим свойством, или же на способ, которым мы располагаем для построения такой цифры.

Экзистенциальное высказывание и его усиленное отрицание не являются, как это имеет место в случае элементарного высказывания и его отрицания, высказываниями о двух единственно возможных исходах *одного и того же акта проверки*, а соответ-

вуют двум оторванным друг от друга возможностям, именно — нахождению, с одной стороны, некоторой цифры с заданным свойством и установлению, с другой стороны, некоторого общего закона, касающегося цифр.

То, что одна из этих двух возможностей непременно должна осуществиться, логически абсолютно само собой не разумеется. Поэтому с финитной точки зрения мы не можем пользоваться альтернативой, утверждающей, что либо существует цифра n , для которой $\mathcal{A}(n)$ справедливо, либо что справедливость $\mathcal{A}(n)$ исключается для любой цифры n .

Подобным же образом обстоит дело и с финитным отрицанием всеобщего суждения, т. е. суждения вида «для каждой цифры n имеет место $\mathcal{A}(n)$ ». Отрицание справедливости такого суждения само по себе непосредственного финитного смысла не имеет. Если же это отрицание усилить до утверждения, что тождественная истинность $\mathcal{A}(n)$ может быть опровергнута контрпримером, то это усиленное отрицание не будет являться контрадикторной противоположностью рассматриваемого всеобщего суждения; действительно, в этом случае снова абсолютно само собой не разумеется, что либо должно иметь место всеобщее суждение, либо его усиленное отрицание, т. е. что либо $\mathcal{A}(n)$ должно иметь место для любой заданной цифры n , либо что можно указать такую цифру, для которой $\mathcal{A}(n)$ места не имеет.

Разумеется, надо заметить, что построение контрпримера не является единственной возможностью опровергнуть всеобщее суждение. Другой способ мог бы заключаться в попытке вывести из рассматриваемого всеобщего суждения какое-либо противоречие. Такой подход тоже не устранил бы упомянутой трудности — пожалуй, вследствие такого подхода осложнения скорее возросли бы. В самом деле, альтернатива, заключающаяся в том, что всеобщее суждение о цифрах должно либо иметь место, либо вести к противоречию и, значит, быть опровержимым, не является логически очевидной. Кроме того, абсолютно само собой не разумеется, что всякое такое суждение в случае опровержимости должно опровергаться при помощи контрпримера.

Сложная ситуация, с которой мы здесь столкнулись при обсуждении в рамках финитной точки зрения вопроса об отрицании суждений, соответствует тезису Брауэра о неприемлемости закона исключенного третьего в применении к бесконечным совокупностям. Действительно, в рамках финитной точки зрения эта неприемлемость имеет место постольку, поскольку для экзистенциальных и всеобщих суждений не удается найти отрицания, имеющего финитный смысл и удовлетворяющего закону исключенного третьего.

Сказанного, пожалуй, достаточно для характеристики финитной точки зрения. Если мы теперь обратимся к анализу в его традиционном изложении с целью выяснить, соответствует ли он

точке зрения такой методики, то мы заметим, что это не так, что принятые в анализе способы рассуждений и образования понятий самыми различными способами выходят за рамки финитных рассуждений.

2. «*Tertium non datur*» *) для целых чисел; принцип наименьшего числа. Выход за рамки финитной точки зрения присутствует уже в способах умозаключений, применяемых в арифметике. Действительно, высказывания о существовании целых чисел [в обычной математике вместо ψ и φ мы говорим о целых числах (точнее, положительных целых числах или, для краткости, числах)] здесь допускаются независимо от возможности фактического построения соответствующих чисел. Кроме того, относительно любого всеобщего высказывания о целых числах предполагается, что либо оно справедливо для всех чисел, либо что существует число, для которого это высказывание места не имеет.

Эта альтернатива, «*tertium non datur*» для целых чисел, неявно используется также и в принципе наименьшего числа, который гласит, что если некоторое высказывание о целых числах имеет место хотя бы для одного числа, то существует и наименьшее число, для которого это высказывание имеет место.

Принцип наименьшего числа в своих элементарных применениях носит финитный характер. Действительно, рассмотрим высказывание $\mathcal{A}(n)$ о произвольном числе n . Пусть m — некоторое конкретное число, для которого имеет место $\mathcal{A}(m)$. Просмотрим последовательно числа от 1 до m . Тогда мы должны будем найти первое такое число f , для которого $\mathcal{A}(f)$ верно, так как самое позднее таким числом является m . Это число f и является наименьшим числом со свойством $\mathcal{A}$.

Это рассуждение базируется на двух предпосылках, которые в случае неэлементарных применений принципа наименьшего числа выполняются далеко не всегда. Во-первых, мы предположили, что справедливость высказывания $\mathcal{A}$ для некоторого числа имеет место в том смысле, что нам действительно указано некоторое число m со свойством $\mathcal{A}(m)$, в то время как в неэлементарных ситуациях о существовании числа со свойством $\mathcal{A}$ зачастую можно заключить лишь при помощи «*tertium non datur*», без фактического указания такого числа. Второе предположение заключается в том, что для любого числа f из ряда чисел от 1 до m можно выяснить, имеет ли место $\mathcal{A}(f)$. В случае элементарного высказывания $\mathcal{A}(n)$

*) Закон исключенного третьего (букв.—«третьего не дано»). Этот латинский термин авторы применяют для упоминания именно того частного случая общего логического закона исключенного третьего, который упоминается в данном контексте. — *II и.м. перев.*

возможность такой проверки имеется, конечно, всегда. Однако, если $\mathcal{A}(n)$ является неэлементарным высказыванием, вопрос о том, имеет ли оно место для данного числа f , может представлять собой нерешенную проблему.

Пусть, например, $\psi(a)$ — функция, определенная рядом последовательных рекурсий и подстановок в том виде, как мы их допускаем в финитной арифметике, и пусть $\mathcal{A}(n)$ означает высказывание о том, что существует число a , для которого $\psi(a) = n$. Тогда для заданного числа f на вопрос о том, имеет ли место $\mathcal{A}(f)$, в общем случае (т. е. если функция ψ не является особенно простой) нельзя ответить путем прямого рассмотрения ситуации; такой вопрос скорее носит характер математической проблемы. В самом деле, рекурсии, встречающиеся в определении ψ , дают нам значения этой функции только для заданных значений аргумента, в то время как в вопросе о том, имеется ли число a , для которого $\psi(a)$ имеет значение f , речь идет о всем пробеге значений функции ψ .

Таким образом, во всех тех случаях, где упомянутые предпосылки финитного обоснования принципа наименьшего числа не выполняются, для обоснования этого принципа приходится привлекать «*tertium non datur*»¹⁾.

Приведем несколько примеров альтернатив из области арифметики, которые получаются при помощи «*tertium non datur*» для целых чисел, но не могут быть выяснены финитно при нынешнем состоянии наших знаний.

1. Либо всякое четное число, большее двух, представимо в виде суммы двух простых чисел, либо существует четное число, большее двух, непредставимое в виде суммы двух простых чисел.

2. Либо всякое целое число вида $2^{2^f} + 1$ при $f > 4$ разлагается на два множителя, большие 1, либо имеется простое число вида $2^{2^f} + 1$ с $f > 4$.

3. Либо всякое достаточно большое целое число представимо в виде суммы менее 8 кубов, либо для каждого целого числа n имеется большее целое число m , которое не представимо в виде суммы менее 8 кубов.

4. Либо существуют сколь угодно большие простые числа p , обладающие тем свойством, что $p + 2$ также является простым числом, либо имеется наибольшее простое число с этим свойством.

5. Либо для всякого целого числа $n > 2$ и для произвольных положительных целых чисел a, b, c равенство $a^n + b^n = c^n$ места не имеет, либо имеется такое наименьшее целое число $n > 2$, для которого уравнение $a^n + b^n = c^n$ разрешимо в положительных целых числах.

¹⁾ Принцип наименьшего числа мы позднее выведем в рамках рассматриваемого нами формализма. См. гл. VI, с. 348.

Такого рода примеры из области арифметики годятся для того, чтобы мы могли уяснить себе простейшие формы нефинитной аргументации. И все-таки в арифметике потребность в выходе за пределы финитной точки зрения на самом деле не является такой уж ощутимой; действительно, едва ли можно указать такое выполненное в рамках арифметики доказательство, в котором нельзя было бы при помощи сравнительно легких модификаций обойтись без применения нефинитных способов умозаключений.

§ 4. Нефинитные методы в анализе

1. Различные определения действительного числа. Иначе обстоит дело в анализе (исчислении бесконечно малых); здесь нефинитные способы образования понятий и нефинитные доказательства являются неотъемлемой частью методов теории.

Напомним вкратце основное понятие анализа, понятие действительного числа. Действительное число обычно определяется либо как монотонно возрастающая последовательность рациональных чисел

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots,$$

имеющая верхнюю границу (фундаментальная последовательность), либо как бесконечная десятичная или двоичная дробь, либо как разбиение рациональных чисел на два класса, при котором всякое число из первого класса меньше любого числа из второго класса (дедекиндово сечение).

При этом в основу кладется представление о том, что рациональные числа образуют некоторую фиксированную совокупность, которая может быть рассматриваема как *индивидуальная область*. Совокупность всевозможных последовательностей рациональных чисел, соответственно всевозможных разбиений всех рациональных чисел, в анализе также мыслится как индивидуальная область.

Конечно, вместо совокупности рациональных чисел в основу рассмотрения достаточно будет положить совокупность целых чисел, а вместо разбиений всех рациональных чисел говорить о разбиениях целых чисел. Действительно, всякое положительное рациональное число может быть задано парой чисел m и n , а всякое рациональное число может быть представлено в виде разности двух положительных рациональных чисел, т. е. в виде пары числовых пар $(m, n; p, q)$. Точно так же и любая двоичная дробь вида

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

где каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ равно либо 0, либо 1, может трактоваться как разбиение всех целых чисел, а именно как разбиение их на те числа k , для которых $a_k = 0$, и на те, для которых

$a_k = 1$. Всякому разбиению положительных целых чисел указанным образом взаимно однозначно соответствует двоичная дробь упомянутого вида. С другой стороны, всякое действительное число может быть представлено в виде суммы целого числа и некоторой двоичной дроби этого вида.

Вместо разбиений целых чисел мы можем рассматривать их *множества*; действительно, всякое множество целых чисел определяет разбиение их на те числа, которые принадлежат рассматриваемому множеству, и на те, которые ему не принадлежат, и, наоборот, само это множество вполне однозначно определяется упомянутым разбиением. Сказанное выше справедливо и в отношении дедекиндовых сечений, каждое из которых может быть представлено некоторым множеством рациональных чисел (например, своим нижним классом, который характеризуется следующими свойствами: 1) он содержит по крайней мере одно рациональное число и по крайней мере одно из них не содержит; 2) вместе со всяким рациональным числом он содержит все меньшие рациональные числа, а также по крайней мере одно большее).

Однако экзистенциальное допущение, которое мы вынуждены положить в основу анализа, ослабляется этими изменениями лишь в незначительной степени. По-прежнему остается потребность рассматривать и многообразие целых чисел, и многообразие множеств целых чисел как фиксированные индивидуальные области, для которых имеет место «tertium non datur». Лишь со ссылкой на эти области и становится осмысленным (в качестве частичного суждения) высказывание о существовании целого числа, соответственно множества чисел, со свойством $\mathfrak{E}$, независимо от того, является ли оно (это высказывание) понятным. Таким образом, хотя понятия бесконечно большого и бесконечно малого теорией действительных чисел в собственном смысле слова из рассмотрения и исключаются, оставаясь лишь в качестве способа выражаться, понятие бесконечного все-таки продолжает сохраняться в виде *бесконечной совокупности*. Пожалуй, даже можно сказать, что представление о бесконечных совокупностях было введено и впервые систематически применено на деле только здесь, в процессе строгого построения анализа.

Чтобы убедиться, что при построении анализа действительно по существу используется предположение, что область целых чисел, рациональных чисел, а также область множеств (разбиений) этих чисел представляют собой некие единые совокупности, достаточно будет проанализировать некоторые из фундаментальных понятий и способов рассуждений.

Если действительное число определяется нами как возрастающая последовательность рациональных чисел

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots,$$

то нефинитным оказывается уже понятие равенства действительных чисел. В самом деле, определяют ли две такие последовательности одно и то же действительное число — это зависит от того, имеется ли для каждого числа из первой последовательности большее число во второй последовательности и наоборот. Мы, однако, не располагаем общим методом для решения этого вопроса.

С другой стороны, если исходить из определения действительных чисел при помощи дедекиндовых сечений, то нужно будет доказать, что каждая ограниченная возрастающая последовательность рациональных чисел производит некоторое сечение, которое представляет собой верхнюю грань этой последовательности. Это сечение получается разбиением всех рациональных чисел на числа, которые мажорируются хотя бы одним из членов последовательности, и на те, которые этим свойством не обладают. Иначе говоря, рациональное число r причисляется к первому или ко второму классу сечения в зависимости от того, имеется среди чисел последовательности число, большее r , или же все числа последовательности не превосходят r . Различение этих случаев снова оказывается нефинитным.

Сходным образом обстоит дело и в том случае, когда действительные числа определяются при помощи бесконечных десятичных или двоичных дробей. Снова нужно будет доказать, что всякая ограниченная последовательность рациональных чисел

$$r_1 < r_2 < \dots$$

определяет десятичную (соответственно двоичную) дробь. Простоты ради предположим, что речь идет о последовательности положительных правильных дробей

$$0 < b_1 < b_2 < \dots < 1$$

и что надо определить двоичную дробь

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

так, чтобы она представляла собой верхнюю грань этой последовательности. Эта дробь определяется следующим образом:

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{если все } b_n < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$a_{m+1} = \begin{cases} 0, & \text{если все } b_n < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_m}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Во всех рассмотренных случаях приходится иметь дело с альтернативами, в которых речь идет о том, что либо все рациональ-

ные числа некоторой заданной последовательности

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

удовлетворяют определенному условию, либо что это условие не выполняется хотя бы для одного из них. Всякая такая альтернатива использует «tertium non datur» для целых чисел; в самом деле, при этом предполагается, что либо для всех целых n рациональные числа r_n удовлетворяют соответствующему неравенству, либо что имеется такое целое n , что r_n этому неравенству не удовлетворяет.

2. Верхняя грань числовой последовательности; верхняя грань множества чисел. И все-таки в анализе мы не можем обойтись одним использованием *совокупности целых чисел* в качестве индивидуальной области. Нам требуется сверх этого рассматривать в качестве индивидуальной области и *совокупность действительных чисел*. Как мы видели, эта совокупность по существу может быть отождествлена с совокупностью множеств целых чисел.

Необходимость в индивидуальной области действительных чисел ощущается уже при доказательстве теоремы о существовании верхней грани произвольного ограниченного множества действительных чисел. Для того чтобы, исходя из дедекиндова определения действительного числа, доказать существование верхней грани ограниченного множества действительных чисел, лежащего в промежутке между 0 и 1, надо рассмотреть разбиение рациональных чисел на те числа, которые мажорируются хотя бы одним действительным числом из этого множества, и на те, которые не мажорируются ни одним из них. Таким образом, рациональное число r мы относим к первому классу тогда и только тогда, когда в рассматриваемом множестве имеется действительное число a , большее r .

Теперь надо отдать себе отчет в том, что множество в анализе, вообще говоря, задается путем указания свойства, определяющего это множество, т. е. вводится как совокупность тех действительных чисел, которые удовлетворяют определенному условию $\mathfrak{B}$. Таким образом, вопрос о том, имеется ли в каком-либо рассматриваемом нами множестве действительное число a , большее r , сводится к тому, имеется ли действительное число, которое превосходит r и одновременно удовлетворяет некоторому определенному условию $\mathfrak{B}$. Если к делу подойти с такой стороны, то становится ясно, что в основу рассмотрения мы кладем в качестве индивидуальной области совокупность действительных чисел ¹⁾.

¹⁾ На обсуждаемое здесь положение вещей особенно настойчиво указывал Г. Вейль (H. Weyl) в своей работе *Das Kontinuum*.— Leipzig, 1918.

Следует еще заметить, что описанный процесс нахождения верхней грани сводится к образованию объединения множеств. В самом деле, каждое действительное число определяется некоторым сечением в области рациональных чисел (например, нижним классом сечения). Поэтому данное нам множество действительных чисел представляется в виде некоторого множества $\mathfrak{M}$ множеств рациональных чисел. Верхняя грань множества $\mathfrak{M}$ строится с помощью множества тех рациональных чисел, которые принадлежат по меньшей мере одному из множеств, входящих в $\mathfrak{M}$. Но совокупность этих рациональных чисел как раз и является объединением множеств, входящих в $\mathfrak{M}$.

Не удается также избежать привлечения индивидуальной области действительных чисел и путем замены дедекиндова определения действительных чисел определением через фундаментальные последовательности или через двоичные дроби. Напротив, здесь этот процесс становится еще более сложным вследствие добавления некоторой дополнительной рекурсии. Рассмотрим вкратце ситуацию для того случая, когда действительные числа определяются через двоичные дроби. В этом случае нам приходится иметь дело с множеством двоичных дробей

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

которые сами по себе определяются посредством некоторого определенного условия $\mathfrak{B}$. Верхняя грань представляет собой двоичную дробь

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots,$$

которая определяется следующим образом:

$b_1 = 0$, если у всех двоичных дробей, удовлетворяющих условию $\mathfrak{B}$, первый двоичный разряд равен 0, а в противном случае $b_1 = 1$;

$b_{n+1} = 0$, если у всех двоичных дробей, удовлетворяющих условию $\mathfrak{B}$ и таких, что их первые n двоичных разрядов совпадают с $b_1, b_2, \dots, b_n$, $(n+1)$ -й разряд равен 0, а в противном случае $b_{n+1} = 1$.

Здесь совокупность действительных чисел выступает в виде совокупности всех двоичных дробей, и мы пользуемся предположением о том, что для этих построенных из нулей и единиц последовательностей справедлив «tertium non datur».

3. Принцип выбора. Но и этого допущения, что совокупность всех действительных чисел, соответственно всех двоичных дробей, представляет собой индивидуальную область, тоже оказывается еще недостаточно. Это обнаруживается в следующей простой ситуации. Пусть a — верхняя грань некоторого множества действительных чисел. Мы хотим показать, что имеется последовательность дей-

ствительных чисел, принадлежащих этому множеству, сходящаяся к a . Для этого мы рассуждаем следующим образом:

Из определения верхней грани следует, что для каждого целого числа n в этом множестве имеется такое число c_n , для которого

$$a - \frac{1}{n} < c_n \leq a,$$

и, значит,

$$|a - c_n| < \frac{1}{n}.$$

Тем самым числа c_n образуют сходящуюся к a последовательность и все они принадлежат рассматриваемому множеству.

Приводя такую аргументацию, мы скрываем за словами один принципиальный момент доказательства. В самом деле, применяя обозначение c_n , мы представляем себе, что для каждого числа n среди действительных чисел c , принадлежащих рассматриваемому множеству и удовлетворяющих неравенству

$$a - \frac{1}{n} < c \leq a,$$

выделено одно определенное.

В таком представлении кроется определенное предположение. На самом деле непосредственно мы можем лишь заключить, что для каждого числа n имеется подмножество $\mathfrak{M}_n$ рассматриваемого нами множества, состоящее из чисел, удовлетворяющих приведенному выше неравенству, и что для любого n это подмножество содержит по крайней мере один элемент. Предполагается, что в каждом из этих множеств

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \dots$$

мы можем отметить по одному элементу — c_1 в $\mathfrak{M}_1$, c_2 в $\mathfrak{M}_2$, ..., c_n в $\mathfrak{M}_n$ — так что при этом получится некоторая вполне определенная бесконечная последовательность действительных чисел.

Перед нами частный случай *принципа выбора*. В общем виде он утверждает, что «если для всякого объекта x вида (Gattung) G_1 существует по меньшей мере один объект y вида G_2 , связанный с x отношением $\mathfrak{B}(x, y)$, то существует функция φ , которая всякому объекту x вида G_1 однозначно сопоставляет такой объект $\varphi(x)$ вида G_2 , который связан с x отношением $\mathfrak{B}(x, \varphi(x))$ ».

В рассматриваемом случае вид G_1 есть вид положительных целых чисел, G_2 есть вид действительных чисел, отношение $\mathfrak{B}(x, y)$ представляет собой неравенство

$$a - \frac{1}{x} < y \leq a,$$

а функция φ , существование которой извлекается из аксиомы выбора, представляет собой сопоставление действительного числа c_x его номеру x .

Применение принципа выбора, который в качестве особого допущения впервые был отмечен и сформулирован в его теоретико-множественной редакции Эрнстом Цермело, представляет собой еще один тип выхода за рамки финитной точки зрения, превосходящий по своей силе даже применение закона «tertium non datur». Рассмотрение приведенных выше примеров показывает нам, что построение исчисления бесконечно малых в том виде, как это делается после разработки строгих методов, производится не в смысле сведения к *финитному* арифметическому мышлению. Произведенная здесь *арифметизация* учения о величинах никоим образом *не может считаться совершенной*, поскольку с нею вводятся определенного рода систематические фундаментальные представления, которые не относятся к области наглядного арифметического мышления. Строгое построение анализа привело нас только к пониманию того, что этих немногих фундаментальных допущений уже вполне достаточно для построения теории величин как теории числовых множеств.

Методы анализа господствуют в таких крупных разделах математики, как теория функций, дифференциальная геометрия, топология (Analysis situs). Наиболее далеко идущее использование нефинитных гипотез происходит в общей *теории множеств*, которая в этом отношении далеко превосходит даже анализ, а методы теории множеств в свою очередь вторгаются в современную абстрактную алгебру и в топологию.

Таким образом, анализ в его обычном изложении совершенно не согласуется с финитной точкой зрения; напротив, он самым существенным образом опирается на дополнительные логические принципы. Поэтому, если мы хотим сохранить анализ в его нынешнем виде, а с другой стороны, признаём претензии финитной точки зрения, учитывающей соображения очевидности, то мы оказываемся перед необходимостью обосновать — посредством установления их непротиворечивости — те принципы, применение которых выводит нас за пределы финитной точки зрения. Если нам удастся доказать непротиворечивость способов умозаключений, обычно применяемых в анализе, то мы сможем приобрести уверенность в том, что результаты этих умозаключений никогда нельзя будет опровергнуть при помощи финитно установленного факта или финитным рассуждением. Действительно, финитные методы являются составной частью традиционного анализа, и потому финитное опровержение какого-либо предложения, доказанного традиционными средствами анализа, должно было бы означать наличие противоречия внутри самого традиционного анализа.

§ 5. Исследования, направленные на непосредственное финитное построение анализа; возврат к прежней постановке проблемы; теория доказательств

Таким образом, мы возвратились к проблеме, поставленной в гл. I. Однако еще осталось ответить на вопрос, с которого мы начали эту главу: а именно, можно ли вместо того, чтобы путем формализации логического вывода доказывать непротиворечивость анализа, построить его прямым, без дополнительных предположений способом и тем самым устранить необходимость упомянутого доказательства.

Ответ на этот вопрос оказывается отчасти утвердительным, отчасти отрицательным. Именно, что касается возможности прямого финитного построения анализа в объеме, достаточном для практических применений, то такая возможность была доказана исследованиями Кронекера и Брауэра.

Кронекер, который первым выдвинул требования финитности, исходил из того, что нефинитные способы умозаключений должны быть повсеместно изгнаны из математики. В теории алгебраических чисел и числовых полей он достиг этой цели ¹⁾. Финитную точку зрения здесь удалось провести в жизнь таким образом, что при этом не пришлось отказываться от чего-либо существенного в части теорем или методов доказательств.

В течение длительного времени план действий, намеченный Кронекером, отвергался полностью, и лишь в последнее время Брауэр принялся за задачу независимого от закона исключенного третьего построения анализа и развил в рамках этой программы значительные разделы анализа и теории множеств ²⁾. Разумеется, при этом подходе пришлось поступиться существенными результатами и получить в придачу значительные осложнения в способах образования понятий.

Методическая установка «интуиционизма», которую берет за основу Брауэр, в известном смысле представляет собой расширение финитной установки, поскольку Брауэр допускает, чтобы справедливость какого-либо вывода или доказательства принималась без учета его наглядности. Так, например, с точки зрения Брауэра допустимыми являются теоремы вида «если в предположении $\mathcal{A}$ имеет место $\mathcal{B}$, то имеет место также и $\mathcal{C}$ », а также вида «предположение, что $\mathcal{A}$ опровержимо, ведет к противоречию» или, по выражению Брауэра, «абсурдность $\mathcal{A}$ абсурдна».

¹⁾ Результаты этих исследований в систематическом виде Кронекером опубликованы не были и излагались лишь в его лекциях.

²⁾ Подробный перечень публикаций Брауэра по этому вопросу можно найти в учебнике: Френкель (A. Fraenkel). *Einleitung in die Mengenlehre*. — 3-е изд. — Berlin: Julius Springer, 1928.

Такого рода расширенное понимание финитной точки зрения, которое в теоретико-познавательном плане сводится к тому, что к наглядным представлениям добавляются еще и рассуждения общелогического характера, оказывается необходимым в том случае, если мы захотим при помощи финитных рассмотрений выйти за рамки какой-либо определенной элементарной области. К необходимости этого мы придем на более поздней стадии наших рассуждений.

Хотя теперь, в результате упомянутых исследований, в математике проложен путь, двигаясь по которому, можно в значительной мере обойтись без нефинитных способов умозаключений, необходимость в установлении непротиворечивости методов традиционного анализа никоим образом не оказывается излишней. Ведь применения нефинитных методов рассуждений мы не можем избежать, полностью заменив их другими соображениями; напротив, в анализе и в примыкающих к нему областях математики сделать это удастся лишь ценой существенных потерь в отношении систематики и технических приемов в доказательствах.

От математика, однако, нельзя требовать, чтобы он согласился с такими потерями, не будучи к этому вынужденным. Методы анализа проверены в такой степени, в какой едва ли проверен какой-либо другой научный аппарат, и они оправдали себя самым блестящим образом. И если мы критикуем эти методы с позиций требования очевидности, то перед нами встает задача выявить причину их применимости, как мы это повсюду делаем в математике, где всякий плодотворный метод обычно применяется с опорой на представления, которые в отношении очевидности оставляют желать лучшего.

Таким образом, поскольку мы становимся на финитную точку зрения, перед нами встает неизбежная проблема убедительно обосновать применимость нефинитных методов, и поскольку наше доверие к этим методам нас не обманывает, то эта убедительность может быть достигнута лишь в результате приобретения уверенности в том, что эти методы традиционного анализа никогда не смогут привести к доказательству ложного результата, точнее говоря, что результаты их применения согласуются как друг с другом, так и с любым фактом, вытекающим из финитной точки зрения.

Однако эта проблема представляет собой не что иное, как проблему установления непротиворечивости нашего традиционного анализа.

В гл. I для обсуждения этой проблемы мы предполагали привлечь уже разработанный в символической логике метод формализации логического вывода¹⁾. Этот метод во всяком случае обла-

¹⁾ См. с. 43.

дает тем свойством, что благодаря ему задача искомого доказательства непротиворечивости — в той мере, в какой вообще может быть достигнута полная формализация традиционного анализа, — становится некоторой *финитной* проблемой. В самом деле, если формализовать традиционный анализ, т. е. перевести его гипотезы и способы умозаключений в исходные формулы (аксиомы) и правила вывода, то доказательство в анализе окажется наглядно обозримой последовательностью действий, каждое из которых принадлежит некоторому наперед заданному запасу допустимых актов. Таким образом, в принципиальном отношении мы здесь оказываемся в том же положении, что и в элементарной арифметике, и подобно тому, как там удается финитным образом проводить определенные доказательства невозможности (например, доказательство того, что не может существовать двух цифр m и n таких, что $m \cdot n = 2 \cdot n \cdot n$), финитной же оказывается и проблема установления того факта, что в формализованном анализе не может встретиться двух таких доказательств, что заключительная формула одного из них совпадает с отрицанием заключительной формулы другого.

Правда, мы еще очень далеки от решения этой проблемы. И все же на пути к этой цели уже получены многочисленные важные результаты. На этом пути открылось также новое поле для исследований — формализация логического вывода оформилась в систематическую *теорию доказательств*, которая в самом общем виде обсуждает вопрос о сфере действия логических способов умозаключений, вопрос, который традиционная логика ставит и решает лишь в очень специальном виде. Благодаря методам теории доказательств обнаружилась также непосредственная взаимосвязь между проблемой обоснования математики и логическими проблемами.

Эта теория доказательств, называемая также *метаматематикой*, будет развита нами в дальнейшем изложении. Мы начнем с формализации логического вывода, которую на первых порах мы изложим независимо от ее применения к теории доказательств.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА I: ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Теория истинностных функций

1. Истинностные функции и их таблицы. С логической символикой мы познакомились уже в гл. I¹⁾. Она играла там роль особого языка формул, который помог нам составить себе четкое представление о структуре математических аксиом. Теперь с помощью этого языка мы хотим осуществить формализацию способов логических умозаключений. Процесс логического вывода мы будем имитировать формальным оперированием со знаками, протекающим по вполне определенным правилам.

Шаг, который мы собираемся совершить, аналогичен переходу от содержательной аксиоматики к формальной. Подобно тому, как там мы абстрагируемся от вещественного смысла рассматриваемых предметов и отношений и принимаем в расчет одну лишь формальную структуру зависимостей, здесь мы также исключаем из рассмотрения содержательный смысл логических связей и правил умозаключений и начинаем рассматривать лишь их формальную структуру.

Прежде чем приступить к построению системы правил вывода, соответствующих этой формальной точке зрения, мы в качестве важной вспомогательной дисциплины рассмотрим *элементарную логику высказываний*, которую нам проще всего будет изложить как содержательно-комбинаторную теорию *«истинностных функций»*.

С этой целью мы рассмотрим те сочетания высказываний, для которых в гл. I мы уже ввели специальные символы: речь идет о конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицании²⁾. Мы постараемся уяснить себе, в какой мере эти логические образования носят характер истинностных функций.

Рассмотрим в качестве примера *конъюнкцию*. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — какие-либо предложения, относительно которых установлено, что они могут быть однозначно охарактеризованы как истинные или как ложные. Тогда предложение

$$\mathcal{A} \& \mathcal{B}$$

¹⁾ См. с. 26 и далее.

²⁾ См. с. 27.

также является истинным или ложным и для установления того, какой именно из этих двух случаев имеет место, нам ничего не нужно знать о содержании предложений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$: все будет зависеть только от того, истинными или же ложными являются сами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. И действительно, $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ истинно тогда и только тогда, когда истинными являются как $\mathcal{A}$, так и $\mathcal{B}$.

В соответствии с этим мы можем рассматривать конъюнкцию как функцию двух аргументов A и B , каждый из которых может принимать два значения «истина» и «ложь». Эта функция каждой системе значений своих аргументов ставит в соответствие снова одно из этих двух значений «истина» или «ложь». Таблица значений (Verlauf) этой функции может быть представлена следующим образом:

		B	
		истина	ложь
A	истина	истина	ложь
	ложь	ложь	ложь

Каждой из четырех клеток таблицы соответствует одна из четырех комбинаций истинностных значений аргументов A и B , а записанное в клетке истинностное значение представляет собой соответствующее значение рассматриваемой функции.

Подобно конъюнкции, как истинностные функции могут быть рассматриваемы также дизъюнкция, отрицание и импликация. *Отрицание* $\neg A$ представляет собой функцию одного аргумента, и функция эта может быть представлена следующей таблицей:

A	истина	ложь
	ложь	истина

Таким образом, $\neg A$ является истинным или ложным в соответствии с тем, ложно или истинно само A .

Таблица *дизъюнкции* $A \vee B$ имеет вид

		B	
		истина	ложь
A	истина	истина	истина
	ложь	истина	ложь

Таким образом, дизъюнкция $A \vee B$ оказывается истинной, если хотя бы один из ее аргументов A и B принимает значение «истина».

Импликацию $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ в гл. I мы ввели непосредственно как истинностную функцию, а именно как функцию, которая принимает значение «ложь», если A истинно и B ложно, и значение «истина» в остальных случаях. Таким образом, таблица этой истинностной функции имеет вид

		B	
		истина	ложь
A	истина	истина	ложь
	ложь	истина	истина

Выбор упомянутых четырех истинностных функций мы произвели, взяв за образец структуру нашего языка; конъюнкция, отрицание, дизъюнкция и импликация сопоставляются нами употребляемым в языке словам «и», «не», «или», «если... то...». Сопоставление это выглядит следующим образом: необходимым и достаточным условием истинности каждой из этих четырех истинностных функций является то сочетание истинности аргументов, которое выражается посредством сопоставленного этой функции слова. Таким образом, условие истинности заключается:

для конъюнкции $A \& B$ в том, что A истинно и B истинно,

для отрицания $\neg A$ в том, что A не истинно,

для дизъюнкции $A \vee B$ в том, что A истинно или B истинно,

для импликации $A \rightarrow B$ в том, что если A истинно, то B истинно.

Для упоминания истинностных функций при чтении формул мы будем пользоваться соотнесенными этим функциям словами; при этом мы должны полностью отдавать себе отчет в том, что такое употребление слов не всегда будет совпадать с их обычным употреблением в разговорном языке ¹⁾.

¹⁾ В разговорном языке обычно имеют дело с сочетаниями самих высказываний, а не их истинностных значений. Правда, в случае конъюнкции или отрицания это различие еще не ощущается, но уже в случае дизъюнктивных и гипотетических высказываний оно становится заметным. Высказывание « $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ » выражает тот факт, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются такими *возможностями*, которые вместе в определенном отношении полностью исчерпывают запас возможностей. Высказывание «если $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$ » выражает определенную *взаимосвязь*, вследствие которой истинность $\mathcal{A}$ является основанием для того, чтобы заключить об истинности $\mathcal{B}$. В обоих случаях содержание рассматриваемого высказывания не сводится к какому-либо отношению между истинностными значениями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Этим и объясняются различные несоответствия, получающиеся в том случае, когда дизъюнктивные и гипотетические связи между предложениями

Введем еще одну истинностную функцию — «эквивалентность» $A \sim B$. Она будет выражать совпадение истинностных значений двух высказываний — отношение, для которого в речевом обиходе в нашем распоряжении не имеется никакого специального слова. Таблица этой истинностной функции такова:

		B	
		истина	ложь
A	истина	истина	ложь
	ложь	ложь	истина

Таким образом, эквивалентность $A \sim B$ является истинной, если A и B оба истинны или оба ложны; в противном случае $A \sim B$ ложна.

2. Заменяемость; правила замены. В связи с введением этих пяти истинностных функций тут же возникает целый ряд вопросов. Прежде всего бросается в глаза, что эти функции не являются независимыми. При детальном рассмотрении оказывается, что каждая из них может быть выражена через отрицание и конъюнкцию или через отрицание и дизъюнкцию, а также через отрицание и импликацию.

Для краткости мы будем говорить, что два составных высказывания за *м е н и м ы* друг другом, если они представляют одну и ту же истинностную функцию. Только что сформулированные утверждения вытекают из следующих легко устанавливаемых соотношений замен мости:

$$A \sim B \text{ заменимо выражением } (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B),$$

$$\text{а также } (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A);$$

$$A \rightarrow B \text{ заменимо выражением } \neg A \vee B;$$

пытаются интерпретировать, с одной стороны, как истинностные функции, а с другой стороны — в соответствии с обычным словоупотреблением. Так, например, если из ложного предложения «снег черен» и истинного предложения «снег бел» образовать два составных предложения «снег черен или снег бел» и «если снег черен, то снег бел», то оба они как истинностные функции являются истинными: именно, первое из них есть истинная дизъюнкция, а второе — истинная импликация; тем не менее с точки зрения обычного словоупотребления они могут быть признаны истинными суждениями разве лишь с большой натяжкой.

В отношении импликации эта трудность отмечалась многими авторами; в случае дизъюнкции на аналогичное положение вещей указывал в частности П. Герц. См. его доклад: H e r t z P. Über Axiomensysteme beliebiger Satzsysteme. — Ann. d. Philos., 1928, 8, № 6, Heft 6, а также Vom Wesen des Logischen, ... — Erkenntnis, 1932, 2, № 5/6.

$A \vee B$ заменимо выражением $\neg A \rightarrow B$,
а также $\neg(\neg A \& \neg B)$;
 $A \& B$ заменимо выражением $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

Имеется и еще одна, гораздо более радикальная возможность сведения. Именно, все пять рассмотренных истинностных функций могут быть выражены через одну-единственную, шестую. В качестве такой функции можно взять

$$\neg A \vee \neg B \text{ (} A \text{ и } B \text{ исключают друг друга)}^1,$$

которая ложна, если оба аргумента A и B истинны, и истинна в противном случае, а также функцию

$$\neg A \& \neg B \text{ (ни } A, \text{ ни } B),$$

которая истинна, если A и B оба ложны, и ложна в противном случае; все ранее рассмотренные нами истинностные функции могут быть выражены через каждую из этих двух.

Факт этот доказывается очень просто. Если для истинностной функции, представленной посредством выражения $\neg A \vee \neg B$, ввести в качестве обозначения символ Шеффера $A|B$, то, как легко убедиться,

$$\neg A \text{ заменимо выражением } A|A,$$

$$A \& B \text{ заменимо выражением } (A|B)|(A|B).$$

A с помощью отрицания и конъюнкции, как мы уже знаем, можно представить и дизъюнкцию, и импликацию, и эквивалентность.

Совершенно аналогичным образом устанавливается выразимость пяти рассмотренных истинностных функций и через связку «ни A , ни B ».

От рассмотрения соотношений заменимости мы приходим к *исчислению высказываний*, сформулировав на базе этих соотношений некоторые *правила преобразования* составных высказываний. Термин *преобразование* здесь должен пониматься в смысле взаимной заменимости; это значит, что произвольное заданное выражение можно будет заменять всяким другим выражением, представляющим ту же самую истинностную функцию. При этом речь идет о таких выражениях, которые составлены из переменных $A, B, \dots$ с помощью знаков $\&, \neg, \vee, \rightarrow$ и $\sim$.

¹ Факт выразимости истинностных функций через одну-единственную был первоначально обнаружен Чарльзом Сандерсом Пирсом. Посвященная этому вопросу работа *A Boolean Algebra with one Constant* относится к 1880 г. (см. в *Collected Papers of Charles Sandres Peirce*, v. 4.—Cambridge, Mass, 1933, pp. 13—18). Однако, это открытие, по-видимому, не стало общеизвестным. Указанное обстоятельство было затем — независимо — переоткрыто Шеффером (H. M. Sheffer). См. его работу *A set of five postulates...*—*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913, 14, pp. 481—488.

Из определения заменимости мы прежде всего можем извлечь следующие, универсальные по своему характеру правила подстановки:

S1. Пусть выражение $\mathcal{U}$ заменимо выражением $\mathcal{B}$; пусть $A, \dots, K$ — переменные, фигурирующие в выражениях $\mathcal{U}$ и $\mathcal{B}$, и пусть $\mathcal{U}'$ получается из $\mathcal{U}$, а $\mathcal{B}'$ — из $\mathcal{B}$ путем подстановки выражений $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{K}$ вместо переменных $A, \dots, K$. Тогда $\mathcal{U}'$ заменимо выражением $\mathcal{B}'$.

S2. Пусть выражение $\mathcal{U}$ заменимо выражением $\mathcal{B}$, а выражение $\mathcal{C}$ содержит $\mathcal{U}$ в качестве составной части. Пусть $\mathcal{C}'$ получается из $\mathcal{C}$ подстановкой выражения $\mathcal{B}$ вместо этой составной части $\mathcal{U}$. Тогда $\mathcal{C}$ заменимо выражением $\mathcal{C}'$.

Далее, мы приведем ряд утверждений о заменимости, получающихся из определений истинностных функций в сочетании с правилом S1. Эти утверждения будут носить специальный характер, и в дальнейшем мы будем пользоваться ими в качестве правил замены (Прописные готические буквы обозначают выражения рассматриваемого нами типа.)

1. Правила для конъюнкции и дизъюнкции:

а) $\mathcal{A} \& \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ заменимы посредством $\mathcal{A}$.

б) Конъюнкция и дизъюнкция ассоциативны и коммутативны.

в) Имеет место закон взаимной дистрибутивности:

$(\mathcal{A} \& \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$ заменимо посредством $(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \& (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \& \mathcal{C}$ заменимо посредством $(\mathcal{A} \& \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \& \mathcal{C})$.

2. Правила для отрицания:

а) $\neg \neg \mathcal{A}$ заменимо посредством $\mathcal{A}$.

б) $\neg(\mathcal{A} \& \mathcal{B})$ заменимо посредством $\neg \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B}$,

$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ заменимо посредством $\neg \mathcal{A} \& \neg \mathcal{B}$.

Правила 1 и 2 выражают формальные свойства конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. К ним примыкают правила замены еще одного вида, являющиеся следствием того факта, что функции $A \vee \neg A$ и $A \vee \neg A \vee B$ тождественно принимают значение «истина», а функции $A \& \neg A$ и $A \& \neg A \& B$ — значение «ложь».

3. Правила сокращения и распространения:

а) $\mathcal{A} \& (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B})$ и

$\mathcal{A} \& (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ заменимы посредством $\mathcal{A}$.

б) $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \& \neg \mathcal{B})$ и

$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \& \neg \mathcal{B} \& \mathcal{C})$ заменимы посредством $\mathcal{A}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие, уже упоминавшиеся преобразования, с помощью которых $\rightarrow$ и $\sim$ могут быть выражены через $\&, \vee$ и $\neg$.

4. Правила устранения и введения импликации и эквивалентности:

а) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ заменимо посредством $\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

б) $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ заменимо посредством $(\mathcal{A} \& \mathcal{B}) \vee (\neg \mathcal{A} \& \neg \mathcal{B})$.

3. Примеры заменимости. Приведем несколько примеров применения этих правил.

Согласно правилу 4а), $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ заменимо посредством $\neg \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Возьмем в качестве $\mathfrak{X}$ переменную A , а в качестве $\mathfrak{Y}$ — выражение $B \rightarrow C$. Тогда получится, что

$A \rightarrow (B \rightarrow C)$ заменимо посредством $\neg A \vee (B \rightarrow C)$.

В последнем выражении можно [по правилу 4а) и S2]¹⁾ $B \rightarrow C$ заменить посредством $\neg B \vee C$, так что в результате преобразования выражения

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

мы получим

$$\neg A \vee (\neg B \vee C)$$

и, вследствие ассоциативности дизъюнкции [правило 16)],

$$\neg A \vee \neg B \vee C.$$

Мы можем здесь выделить $\neg A \vee \neg B$ и вместо него [правило 26)] подставить $\neg (A \& B)$. Тогда мы получим

$$\neg (A \& B) \vee C,$$

а вместо этого можно [правило 4а)] написать

$$(A \& B) \rightarrow C.$$

Значит, и это последнее выражение тоже заменимо посредством

$$A \rightarrow (B \rightarrow C).$$

Далее, так как $A \& B$ заменимо посредством $B \& A$ [правило 16)], то отсюда следует, что

$A \rightarrow (B \rightarrow C)$ заменимо посредством $B \rightarrow (A \rightarrow C)$.

Рассмотрим теперь выражение, получающееся в результате другой расстановки скобок:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow C;$$

если здесь исключить [по правилу 4а)] обе импликации, то получится выражение

$$\neg (\neg A \vee B) \vee C.$$

В нем $\neg (\neg A \vee B)$ можно заменить посредством $\neg \neg A \& \neg B$ [правило 26)] и, далее, посредством $A \& \neg B$ [правило 2а)], так что получится

$$(A \& \neg B) \vee C;$$

¹⁾ Применение правила подстановки S2 в дальнейшем не всегда будет оговариваться явно.

вместо этого выражения по дистрибутивному закону [правило 1в)] можно написать

$$(A \vee C) \& (\neg B \vee C),$$

и, значит, выражение $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ заменимо этим выражением. Тем же самым преобразованием мы из

$$(A \rightarrow B) \rightarrow B$$

получим выражение

$$(A \vee B) \& (\neg B \vee B)$$

и, вследствие коммутативности дизъюнкции [правило 16)], —

$$(A \vee B) \& (B \vee \neg B).$$

Здесь, по правилу сокращения 3а), можно отбросить второй конъюнктивный член, так что в результате преобразования выражения $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ получится $A \vee B$. Таким образом, мы установили, что *дизъюнкция может быть выражена через одну только импликацию*.

Рассмотрим отрицание импликации:

$$\neg (A \rightarrow B).$$

Отсюда мы сначала получаем [по правилу 4а)]

$$\neg (\neg A \vee B),$$

а затем [по правилу 26)]

$$\neg \neg A \& \neg B,$$

и так как $\neg \neg A$ заменимо посредством A [правило 2а)], то в итоге получается

$$A \& \neg B.$$

Теперь заметим, что $A \rightarrow B$ заменимо посредством $\neg \neg (A \rightarrow B)$ [правило 2а)], а следовательно, и посредством

$$\neg (A \& \neg B)$$

Это дает нам представление импликации через конъюнкцию и отрицание.

Эквивалентность $A \sim B$ мы с самого начала представили следующими двумя способами:

$$(A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$$

и

$$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A).$$

Отсюда на основании коммутативности конъюнкции [правило 16)] можно заключить о заменимости $A \sim B$ посредством $B \sim A$. Возьмем отрицание выражения $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$. Тогда [по прави-

лу 26)] у нас получится

$$\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A).$$

Как только что было установлено, здесь можно заменить

$$\neg(A \rightarrow B) \text{ посредством } A \& \neg B,$$

а

$$\neg(B \rightarrow A) \text{ посредством } B \& \neg A,$$

так что в целом получится

$$(A \& \neg B) \vee (B \& \neg A).$$

Это составное высказывание представляет собой *разделительное «или»*. В самом деле, оно истинно тогда и только тогда, когда один из аргументов A , B принимает значение «истина», а второй — «ложь». Очевидно, что эта истинностная функция, подобно конъюнкции, дизъюнкции и эквивалентности, симметрична относительно A и B .

Так как $B \& \neg A$ заменимо также посредством $\neg A \& \neg \neg B$ [вследствие коммутативности конъюнкции (правило 16)] и по правилу 2а)], то мы получаем, что разделительное «или» может быть представлено также и в виде

$$(A \& \neg B) \vee (\neg A \& \neg \neg B),$$

а это выражение в свою очередь на основании представления $(A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$ для эквивалентности можно заменить посредством

$$A \sim \neg B.$$

Тем самым мы установили, что отрицание эквивалентности заменимо посредством разделительного «или», а также посредством

$$A \sim \neg B,$$

а потому (на основании симметричности эквивалентности) оно заменимо и посредством

$$\neg A \sim B.$$

Таким образом, первое и четвертое из следующих четырех выражений:

$$A \sim B, \quad A \sim \neg B, \quad \neg A \sim B, \quad \neg A \sim \neg B$$

представляют собой эквивалентность, а второе и третье — разделительное «или».

4. Двойственность; конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы; тождественно истинные выражения; распознающая процедура. Так теория истинностных функций ведет нас к некоему исчислению высказываний. Чтобы составить себе систематическое

представление об этом исчислении, мы рассмотрим ряд общих вопросов, касающихся правил замены.

Прежде всего бросается в глаза, что в правилах 1—3 конъюнкция и дизъюнкция фигурируют совершенно симметричным образом, так что система этих правил не изменится, если $\&$ и $\vee$ всюду поменять местами. Выраженная в этом факте «двойственность» объясняется тем, что конъюнкция и дизъюнкция как истинностные функции находятся в таком отношении друг к другу, что одна из них получается из другой, если в значениях аргументов и функций «истину» и «ложь» всюду поменять местами. В этом легко убедиться, сравнив таблицы для $\&$ и $\vee$.

Для алгебры логики, которая отражает аналогию между исчислением высказываний и алгеброй, получающейся на базе правил замены 1-й группы, эта двойственность влечет за собой тот факт, что для нас оказывается безразличным вопрос о том, какую именно из связок $\&$ и $\vee$ следует рассматривать как сумму, а какую — как произведение. В самом деле, здесь, в исчислении высказываний, у нас имеются два закона дистрибутивности. Преобладающая в литературе точка зрения на конъюнкцию как на «логическое произведение», а на дизъюнкцию как на «логическую сумму» соответствует точке зрения объемной (экстенциональной) логики, в то время как с точки зрения содержательной (интенциональной) логики естественным является как раз обратное сопоставление.

Значение правил замены заключается прежде всего в том, что они дают нам в руки способ, позволяющий приводить любое построенное из рассматриваемых истинностных функций выражение к определенным *нормальным формам*¹⁾. Это делается следующим образом.

Прежде всего, правила 4-й группы позволяют нам удалить знаки $\sim$ и $\rightarrow$ ¹⁾. Затем повторным применением правил 2-й группы мы можем добиться того, чтобы знак отрицания стоял только перед отдельными переменными и чтобы более не встречалось повторяющихся отрицаний. Теперь с помощью правил 16) и 1в) мы можем убрать скобки, «выполнив умножения» в смысле того или другого из двух имеющихся у нас законов дистрибутивности. В зависимости от того, какой закон дистрибутивности мы применим — первый или второй, — получится *конъюнктивная* или *дизъюнктивная нормальная форма*.

Конъюнктивная нормальная форма состоит из конъюнктивно связанных друг с другом простых дизъюнкций, а дизъюнктивная — из дизъюнктивно связанных простых конъюнкций, причем под простыми дизъюнкцией или конъюнкцией мы понимаем такую, члены которой суть либо переменные, либо переменные с одним знаком отрицания. Следует заметить, что конъюнкция

¹⁾ Здесь снова предусматривается применение правила S2.

или дизъюнкция может оказываться состоящей всего лишь из одного члена. Полученная описанным способом нормальная форма будет представлять ту же самую истинностную функцию, что и исходное выражение.

В качестве примера мы рассмотрим приведение к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам выражения

$$(A \rightarrow \neg B) \sim C.$$

Применение правил 4-й группы дает

$$((\neg A \vee \neg B) \& C) \vee (\neg(\neg A \vee \neg B) \& \neg C).$$

Выражение

$$\neg(\neg A \vee \neg B) \& \neg C,$$

стоящее во вторых скобках, согласно правилу 2б) дает

$$(\neg\neg A \& \neg\neg B) \& \neg C$$

и, по 2а),

$$(A \& B) \& \neg C,$$

так что в целом мы получаем

$$((\neg A \vee \neg B) \& C) \vee ((A \& B) \& \neg C).$$

Отсюда, применив первый закон дистрибутивности и опустив ненужные скобки, мы получаем выражение

$$(\neg A \vee \neg B \vee A) \& (\neg A \vee \neg B \vee B) \& (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \& \\ (C \vee A) \& (C \vee B) \& (C \vee \neg C).$$

Это выражение является конъюнктивной нормальной формой. Применив к предпоследнему выражению второй закон дистрибутивности, мы получили бы дизъюнктивную нормальную форму

$$(\neg A \& C) \vee (\neg B \& C) \vee (A \& B \& \neg C).$$

Конъюнктивная нормальная форма доставляет нам удобный способ, позволяющий для любого выражения установить, принимает ли оно значение «истина» при произвольном распределении значений переменных. Выражение, обладающее этим свойством, мы будем называть *тождественно истинным*.

Если мы приведем какое-либо выражение к конъюнктивной нормальной форме, то, уже не проводя далее никаких вычислений, мы прямо по внешнему виду нормальной формы сможем выяснить, является ли представляемая ею истинностная функция тождественно истинной. Необходимое и достаточное условие этого заключается в том, что в каждой из конъюнктивно связанных простых дизъюнкций в качестве члена должна встречаться по крайней мере одна из переменных как с отрицанием, так и без него.

Достаточность этого условия легко получается из того, что выражение

$$A \vee \neg A \vee B$$

тождественно принимает значение «истина». Необходимость его усматривается следующим образом. Для того чтобы конъюнкция была тождественно истинной, должен быть тождественно истинным каждый ее член. Таким образом, у тождественно истинной конъюнктивной нормальной формы должна быть тождественно истинной и каждая из ее простых дизъюнкций. А для того, чтобы простая дизъюнкция была тождественно истинной, хотя бы одна переменная должна встречаться в ней как с отрицанием, так и без него; действительно, если бы каждая переменная фигурировала либо только со знаком отрицания, либо только без знака отрицания, то дизъюнкция получила бы значение «ложь», если бы мы всем переменным без знака отрицания приписали значение «ложь», а всем переменным со знаком отрицания — значение «истина».

У рассмотренного метода распознавания имеется двойственный аналог: совершенно аналогичным образом с помощью дизъюнктивной нормальной формы мы для произвольного выражения можем решить вопрос о том, принимает ли оно значение «ложь» при любом распределении значений переменных, т. е. является ли оно тождественно ложным.

При этом имеет место следующая взаимосвязь: выражение $\mathcal{M}$ является тождественно истинным тогда и только тогда, когда $\neg\mathcal{M}$ является тождественно ложным; далее, дизъюнкция является тождественно ложной тогда и только тогда, когда тождественно ложны каждый ее член.

Следует, однако, заметить, что дизъюнкция может оказаться тождественно истинной и в том случае, когда ни один из ее членов не является тождественно истинным. Простейшим примером такого рода является дизъюнкция

$$A \vee \neg A.$$

С помощью нашего метода распознавания мы теперь для любых двух заданных выражений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ можем выяснить, заменимо ли каждое из них посредством другого. В самом деле, $\mathcal{M}$ тогда и только тогда заменимо посредством $\mathcal{N}$, когда для всех наборов значений входящих в эти выражения переменных оно принимает то же самое значение, что и $\mathcal{N}$, т. е. когда выражение $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ является тождественно истинным. Но при помощи имеющегося у нас метода мы всегда сможем ответить на вопрос о том, имеет место данный случай или же нет.

5. Совершенная нормальная форма; распознавание заменимости; примеры. Рассмотренный способ распознавания заменимости является, конечно, не очень удобным. Но эту проверку мы

сможем осуществить еще и другим путем, подвергнув конъюнктивную и дизъюнктивную нормальные формы дальнейшей специализации. Мы и без того будем вынуждены заняться этим, так как и конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы определяются совершенно неоднозначным образом.

Например, конъюнктивная нормальная форма

$$(\neg A \vee B) \& (\neg B \vee C) \& (\neg C \vee A)$$

представляет ту же самую истинностную функцию, что и конъюнктивная нормальная форма

$$(A \vee \neg B) \& (B \vee \neg C) \& (C \vee \neg A).$$

Поэтому, налагая дополнительные ограничения, мы будем стараться придать нормальной форме некоторый стандартный вид. И действительно, некоторая нормировка такого рода может быть произведена; правда, при этом заранее должно быть указано, какие дополнительные переменные, кроме входящих в рассматриваемое выражение, должны считаться аргументами соответствующей истинностной функции. Например, для истинностной функции, представленной выражением A , мы получим различные нормальные формы в зависимости от того, будем ли мы рассматривать эту функцию как зависящую только от A или же еще и от дополнительной переменной B . Соображение, наиболее простым способом ведущее нас к нормировке желаемого вида, заключается в следующем.

Истинностная функция, зависящая от аргументов $A_1, \dots, A_n$, определяется так, что каждому набору истинностных значений аргументов вновь сопоставляется некоторое истинностное значение. Каждый набор истинностных значений аргументов может быть представлен n -членной конъюнкцией, у которой i -й ее член ($1 \leq i \leq n$) представляет собой либо A_i , либо $\neg A_i$ в зависимости от того, какое значение — «истина» или «ложь» — принимает в этом наборе аргумент A_i . Действительно, построенная таким образом конъюнкция на рассматриваемом наборе значений принимает значение «истина», а на остальных наборах — значение «ложь». Мы будем говорить, что эта конъюнкция представляет рассматриваемый набор значений аргументов.

Легко видеть, что рассматриваемая нами истинностная функция представляется дизъюнкцией конъюнкций, представляющих те наборы значений переменных, на которых наша истинностная функция принимает значение «истина».

Таким образом, для каждой истинностной функции, зависящей от аргументов $A_1, \dots, A_n$ и принимающей по крайней мере на одном наборе их значений значение «истина» (т. е. не являющейся тождественно ложной), мы получим некоторую пред-

ставляющую ее дизъюнктивную нормальную форму; и если мы установим для аргументов функции определенный порядок, который сохраним затем и в конъюнкциях, представляющих наборы их значений, то эта нормальная форма с точностью до порядка ее дизъюнктивных членов будет определена однозначно.

Например, для истинностной функции $A \sim B$, рассматриваемой как функция от аргументов A , B и C , действуя описанным образом, мы получим дизъюнктивную нормальную форму

$$(A \& B \& C) \vee (A \& B \& \neg C) \vee (\neg A \& \neg B \& C) \vee (\neg A \& \neg B \& \neg C).$$

Дизъюнктивную нормальную форму, у которой в каждом дизъюнктивном члене каждая из рассматриваемых переменных входит в качестве конъюнктивного члена в точности один раз, с отрицанием или без него, мы будем называть *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*.

Подытоживая наши рассуждения, мы констатируем, что всякая истинностная функция, зависящая от аргументов $A_1, \dots, A_n$ и не являющаяся тождественно ложной, может быть представлена некоторой совершенной дизъюнктивной нормальной формой в переменных $A_1, \dots, A_n$ и притом единственным образом, если отвлечься от порядка дизъюнктивных членов, а также от порядка членов в конъюнкциях. (В этом смысле мы можем говорить об *однозначно определенной* совершенной дизъюнктивной нормальной форме.)

Отсюда, в частности, следует, что всякая истинностная функция заданных аргументов $A, B, \dots$ может быть представлена при помощи связок $\&$, $\vee$ и $\neg$. (Разумеется, сказанное справедливо и для тождественно ложной функции, которая может быть представлена посредством выражения $A \& \neg A$.)

Число различных истинностных функций, зависящих от аргументов $A_1, \dots, A_n$, совпадает с числом различных (в указанном смысле слова) построенных из этих переменных совершенных дизъюнктивных нормальных форм, если мы согласимся считать, что нульчленная дизъюнкция представляет тождественно ложную функцию. Каждая из этих нормальных форм представляет собой некоторую поддизъюнкцию той («полной») дизъюнкции, которая содержит в качестве дизъюнктивных членов конъюнкций, представляющие все наборы значений аргументов, и которая представляет тождественно истинную функцию. Эта полная дизъюнкция состоит из 2^n членов, и число ее поддизъюнкций (включая и нульчленную) равно 2^{2^n} . Это и есть число различных истинностных функций, зависящих от аргументов $A_1, \dots, A_n$.

Следует еще отметить, что по совершенной дизъюнктивной нормальной форме можно построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму для *отрицания* рассматриваемой истинностной функции, взяв дизъюнкцию, дополнительную к исходной, т. е.

дизъюнкцию, состоящую из всех тех представляющих конъюнкций, которые в исходной дизъюнкции не встречаются.

Двойственным аналогом совершенной дизъюнктивной нормальной формы является *совершенная конъюнктивная нормальная форма*, у которой по сравнению с формой, рассмотренной выше, знаки $\&$ и $\vee$ меняются ролями.

Исходя из совершенной дизъюнктивной нормальной формы для какой-либо истинностной функции, мы можем получить совершенную конъюнктивную нормальную форму для ее отрицания, построив отрицание исходной нормальной формы и применив правила 2б) для преобразования отрицаний дизъюнкций и конъюнкций¹⁾.

Совершенную дизъюнктивную или конъюнктивную нормальную форму заданного выражения логики высказываний мы всегда можем получить, построив сначала описанным ранее способом какую-либо конъюнктивную, соответственно дизъюнктивную нормальную форму, а затем преобразовав ее с помощью правил 1а), б) и 3а), б) ¹⁾ в совершенную нормальную форму. Проиллюстрируем этот метод на следующих двух примерах.

Предположим, что нам требуется представить в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы истинностную функцию A как функцию двух переменных A и B . Заменяем, согласно правилу 3б),

$$A \text{ посредством } A \vee (B \wedge \neg B).$$

Применив закон дистрибутивности, мы получим выражение

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B),$$

которое и представляет собой искомую совершенную нормальную форму. Одновременно это выражение является совершенной конъюнктивной нормальной формой и для $A \wedge (A \vee B)$, откуда мы усматриваем, что $\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ всегда заменимо посредством $\mathfrak{A}$.

Двойственным образом мы могли бы получить для выражения A , рассматриваемого как функция от переменных A и B , совершенную дизъюнктивную нормальную форму

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

А отсюда в свою очередь получается, что $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ всегда заменимо посредством $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим теперь выражение

$$(A \rightarrow \neg B) \sim C.$$

Ранее ²⁾ мы получили для него дизъюнктивную нормальную форму

$$(\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

¹⁾ См. с. 79.

²⁾ См. с. 84.

Чтобы получить из нее совершенную дизъюнктивную нормальную форму, применим к первым двум членам дизъюнкции правило 3а); заменим $\neg A \wedge C$ посредством

$$(\neg A \wedge C) \wedge (B \vee \neg B),$$

а затем, по второму закону дистрибутивности (производя одновременно перестановку конъюнктивных членов), — посредством

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C);$$

аналогичным образом $\neg B \wedge C$ преобразуется в

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C).$$

Выполнив в нашем первоначальном выражении эти преобразования и вычеркнув по правилу 1а) повторяющийся дизъюнктивный член $\neg A \wedge \neg B \wedge C$, мы получим для рассматриваемого нами выражения следующую совершенную дизъюнктивную нормальную форму:

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C).$$

От этой совершенной дизъюнктивной нормальной формы мы можем следующим образом перейти к совершенной конъюнктивной нормальной форме. Возьмем двойное отрицание этой формы. К однократному отрицанию применим упоминавшееся выше замечание о том, что отрицание совершенной дизъюнктивной нормальной формы представляется дополнительной дизъюнкцией. Это даст нам для однократного отрицания следующее выражение:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C).$$

Затем мы возьмем отрицание этого выражения и, применив правила 2б), получим совершенную конъюнктивную нормальную форму

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C).$$

Теперь с помощью совершенных нормальных форм мы получим простой способ для выяснения вопроса о том, представляют ли два заданных выражения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одну и ту же истинностную функцию. Этот способ заключается в следующем. Сначала мы выпишем в каком-нибудь порядке все переменные, входящие в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{B}$, а затем строим для $\mathfrak{A}$ и для $\mathfrak{B}$, рассматривая их как функции всех указанных переменных, их совершенные дизъюнктивные или совершенные конъюнктивные нормальные формы. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ взаимно заменимы тогда и только тогда, когда рассматриваемая нормальная форма у $\mathfrak{A}$ является той же самой, что и у $\mathfrak{B}$.

Этим способом мы можем, например, доказать высказанное ранее утверждение о заменимости выражения

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$

посредством

$$(A \vee \neg B) \& (B \vee \neg C) \& (C \vee \neg A).$$

Действительно, если к каждому из этих двух выражений применить законы дистрибутивности в сочетании с правилами 1б) и 3б), то в обоих случаях мы получим одну и ту же совершенную дизъюнктивную нормальную форму

$$(A \& B \& C) \vee (\neg A \& \neg B \& \neg C).$$

Основывающийся на совершенных нормальных формах критерий заменимости в сочетании с тем фактом, что обе совершенные нормальные формы всегда могут быть получены применением правил замены (вместе с правилом подстановки S2), позволяет нам, кроме того, получить следующий результат:

Если выражение $\mathcal{A}$ заменимо посредством $\mathcal{B}$, то переход от $\mathcal{A}$ к $\mathcal{B}$ можно осуществить применением правил замены и правила S2; или еще короче: *всякая заменимость может быть установлена с помощью имеющихся в нашем распоряжении правил замены.*

Тем самым мы в общих чертах построили теорию истинностных функций. Теперь задача заключается в том, чтобы уяснить себе, в каком отношении к логическому выводу находится эта теория.

§ 2. Применение теории истинностных функций

к логическому выводу; формализация умозаключений в логике высказываний с помощью тождественно истинных выражений, правила подстановки и схемы заключения

Пусть

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$$

— какие-либо определенные предложения (например, математические утверждения), относительно которых мы будем предполагать, что каждое из них объективно однозначным образом является истинным или ложным, однако для каждого из этих предложений в отдельности может быть и неизвестно, какой именно из этих случаев имеет место. Между этими предложениями могут иметься определенные зависимости; пусть, например, оказалось, что когда $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ оба являются истинными, истинным должно быть также и $\mathcal{E}_3$. Тогда по определению импликации отсюда получается, что выражение

$$\mathcal{E}_1 \& \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$$

обязательно примет значение «истина».

Наоборот, если мы знаем, что выражение

$$\mathcal{E}_1 \& \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$$

при заданных истинностных значениях предложений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ принимает значение «истина», то отсюда можно заключить, что если истинны $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, то предложение $\mathcal{E}_3$ также будет истинным.

Точно так же получается, что если истинность $\mathcal{E}_1$ и одновременная с этим ложность $\mathcal{E}_2$ исключают истинность $\mathcal{E}_3$, то выражение

$$\mathcal{E}_1 \& \neg \mathcal{E}_2 \rightarrow \neg \mathcal{E}_3$$

при указанных истинностных значениях выражений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ будет иметь значение «истина»; и наоборот: если это выражение имеет значение «истина» при заданных истинностных значениях предложений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, то в случае истинности $\mathcal{E}_1$ и ложности $\mathcal{E}_2$ выражение $\mathcal{E}_3$ непременно окажется ложным.

Таким образом, всякая зависимость между истинностью и ложностью каких-либо определенных предложений

$$\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$$

представляется посредством истинности некоторой импликации.

Теперь в рамках логики высказываний ставится следующий вопрос. Допустим, что между предложениями $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ (соответственно их отрицаниями) имеются некоторые зависимости; допустим также, что про некоторые из этих предложений известно, что они являются истинными (соответственно ложными). Требуется выяснить, вытекает ли из этих допущений чисто логически, т. е. без учета структуры предложений $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, истинность или ложность какого-либо определенного предложения или какая-нибудь новая зависимость между предложениями.

Каждому из сделанных допущений соответствует некоторое выражение, построенное из $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ с помощью знаков $\&$, $\neg$, $\rightarrow$ и принимающее ввиду сделанного предположения значение «истина» всякий раз, когда мы вместо $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ подставим принимаемые ими значения «истина» или «ложь». Таким образом наши допущения будут представлены некоторыми выражениями

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n), \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n), \dots, \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n).$$

Чтобы мы имели возможность сделать отсюда вывод об истинности некоторого соотношения $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$, прежде всего должно оказаться, что при подстановке вместо $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ принимаемых ими значений «истина» или «ложь» импликация

$$(\mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) \& \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) \& \dots \& \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$$

принимает значение «истина».

Но вывод об истинности $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ должен оказаться справедливым без учета структуры предложений $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$.

Поэтому написанная выше импликация должна принимать значение «истина» и в том случае, если мы вместо предложений $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ подставим какие-нибудь другие предложения, удовлетворяющие лишь тому условию, что их истинность или ложность определяется однозначно. Это значит, что импликация

$$(\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) \& \dots \& \mathcal{R}(A_1, \dots, A_n)) \rightarrow \mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n),$$

получающаяся из написанной выше путем замены предложений $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ переменными $A_1, \dots, A_n$, должна быть тождественно истинной.

С другой стороны, если это условие выполнено, то отсюда немедленно следует, что если допущения, представленные выражениями

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n), \dots, \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n),$$

являются истинными, то истинным является и предложение $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$; таким образом, при этих предположениях можно будет сделать вывод об истинности $\mathcal{Z}$. Значит, вопрос о том, можно ли на основании допущений $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{R}$ сделать логический вывод об истинности $\mathcal{Z}$, сводится к тому, чтобы выяснить, является ли тождественно истинной формула

$$(\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) \& \dots \& \mathcal{R}(A_1, \dots, A_n)) \rightarrow \mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n),$$

а для этого мы располагаем простым методом проверки.

Отсюда становится понятным значение, которое тождественно истинные выражения имеют для процесса вывода в области логики высказываний: они доставляют в наше распоряжение схемы умозаклучений, и благодаря им принципы логического вывода оказываются представленными в виде определенных формул. Кроме того, наличие кругозора в части тождественно истинных выражений позволяет нам экономно строить те или иные логические умозаклучения, относящиеся к области логики высказываний.

Теперь для формализации процесса вывода нам осталось лишь условиться, что в случае тождественной истинности выражения

$$(\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) \& \dots \& \mathcal{R}(A_1, \dots, A_n)) \rightarrow \mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n)$$

мы будем говорить, что из посылок

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n), \dots, \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$$

по схеме

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_1) \\ \vdots \\ \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) \end{array}}{\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)}$$

может быть получено следствие $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$. Заданная этим соглашением процедура формально может быть разложена на еще более простые. Прежде всего, выражение

$$(\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) \& \dots \& \mathcal{R}(A_1, \dots, A_n)) \rightarrow \mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n)$$

мы можем заменить некоторым другим. Ранее мы установили, что $A \& B \rightarrow C$ заменимо посредством $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Отсюда далее получается, что

$$A \& B \& C \rightarrow D \text{ заменимо посредством } A \rightarrow (B \& C \rightarrow D),$$

а потому и посредством

$$A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D)).$$

Аналогичным образом мы убеждаемся, что выражение

$$A \& B \& \dots \& K \rightarrow T$$

заменяемо посредством

$$A \rightarrow (B \rightarrow (\dots \rightarrow (K \rightarrow T) \dots)).$$

Отсюда, согласно правилу S1, получается, что выражение

$$\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) \& \dots \& \mathcal{R}(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n)$$

заменяемо посредством

$$\mathcal{A}(A_1, \dots, A_n) \rightarrow (\mathcal{B}(A_1, \dots, A_n) \rightarrow (\dots \rightarrow (\mathcal{R}(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n)) \dots))$$

и, следовательно, это выражение является тождественно истинным, поскольку таковым является предыдущее. Теперь для того, чтобы, исходя из этой формулы, при помощи посылок

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n), \dots, \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$$

прийти к заключению $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$, нам требуется, во-первых, правило, которое позволяло бы производить подстановку предложений $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ вместо переменных $A_1, \dots, A_n$, чтобы получить формулу

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) \rightarrow (\mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) \rightarrow (\dots \rightarrow (\mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)) \dots)),$$

и, во-вторых, правило, в соответствии с которым мы могли бы друг за другом отбрасывать левые части импликаций, поскольку они совпадают с нашими посылками.

Поэтому формализация умозаклучений рассмотренного типа может быть осуществлена в виде некоторой последовательности ф о р м у л, относительно которой мы уславливаемся о нижеследующем:

В качестве исходной формулы может быть взято любое тождественно истинное выражение, а также любая посылка, записанная с помощью логической символики.

Вслед за данной формулой может быть написана любая другая, получающаяся из нее подстановкой вместо одной или нескольких переменных некоторого (записанного в символической форме) предложения (*правило подстановки*). Кроме того, может быть повторена формула, полученная ранее.

Вслед за двумя формулами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ в качестве формулы может быть написано $\mathcal{B}$, т. е. может быть применена *схема заключения*

$$\frac{\mathcal{U} \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}.$$

Оба элементарных акта формального вывода — подстановка и схема заключения — которые вводятся здесь нами впервые, представляют собой формальные аналоги простейших содержательных умозаключений — заключения от общего к частному (*dictum de omni*) и заключения от причины к следствию (*modus ponens* гипотетического заключения).

В рамках теории истинностных функций этим двум способам умозаключения соответствуют два правила, которые, как и ранее упоминавшиеся правила замены, констатируют некоторые элементарные по своему характеру математические факты. Эти правила гласят:

1. Если в какое-либо тождественно истинное выражение вместо одной или нескольких входящих в него переменных — всюду, где они встречаются, — подставить произвольные (построенные из переменных с помощью знаков $\&$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ и $\sim$) выражения, то полученное выражение снова будет тождественно истинным.

2. Если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ — тождественно истинные выражения, то $\mathcal{B}$ также является таковым.

Первое правило усматривается из тех соображений, что подстановка не увеличивает совокупности значений какого-либо выражения. Второе правило получается из того, что при тождественно истинном $\mathcal{U}$ импликация $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ всегда принимает то же самое значение, что и $\mathcal{B}$.

§ 3. Дедуктивная логика высказываний

1. **Постановка задачи.** Принятое соглашение наводит нас на мысль о том, нельзя ли все тождественно истинные выражения получить из небольшого их числа на основе двух этих правил, т. е. применением подстановки и схемы заключения; иначе говоря, мы

интересуемся вопросом о том, нельзя ли систему тождественно истинных выражений построить дедуктивно. То, что вообще можно обойтись конечным числом выражений, взятых в качестве исходных формул, совсем не самоочевидно уже потому, что при неограниченном числе переменных число тождественно истинных выражений также оказывается бесконечным. Однако в действительности конечного числа исходных формул все же хватает для вывода всей совокупности тождественно истинных выражений¹⁾. Можно

¹⁾ Для выражений, построенных только с помощью импликации и отрицания (все истинностные функции среди них, конечно, уже содержатся), полную систему исходных формул впервые построил Фреге в своей книге *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. — Halle, 1879.

Эта система, состоящая из следующих шести формул:

$$\begin{aligned} & A \rightarrow (B \rightarrow A), \\ & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)), \\ & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)), \\ & (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A), \\ & A \rightarrow \neg \neg A, \\ & \neg \neg A \rightarrow A, \end{aligned}$$

долгое время оставалась незамеченной. В то же самое время широкую известность получила система «примитивных высказываний», предложенная Уайтхедом и Расселом в *Principia mathematica*, v. I. — 1-е изд. — Cambridge, 1910. При нашем способе записи эти высказывания имеют вид

$$\begin{aligned} & A \vee A \rightarrow A, \\ & A \rightarrow B \vee A, \\ & A \vee B \rightarrow B \vee A, \\ & (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A \vee C). \end{aligned}$$

Система эта, правда, не вполне согласуется с рассматриваемым здесь подходом, поскольку импликация в ней не фигурирует среди основных связей, а определяется через дизъюнкцию и отрицание, что с формальной точки зрения равносильно применению нашего правила замены 4а). Конъюнкция и эквивалентность в «Principia mathematica» вводятся таким же образом, с помощью определений, которые формально равносильны нашим правилам замены 2б) и 4б). Каждое такое определение может быть представлено двумя исходными формулами, и полная система исходных формул для всего нашего исчисления высказываний получается, если к упомянутым четырем формулам добавить еще следующие шесть:

$$\begin{aligned} & (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B), \\ & (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B), \\ & (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg (A \& B), \\ & \neg (A \& B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B), \\ & ((A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \sim B), \\ & (A \sim B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)). \end{aligned}$$

даже, как показал А. Тарский, обойтись одной-единственной исходной формулой ¹⁾).

Теперь, по совершенной аналогии с дедуктивным построением элементарной геометрии, перед нами возникает задача выбора по возможности более простой и естественной системы исходных формул такой, чтобы максимально отчетливо была видна та роль, которая в процессе логического вывода отводится каждому из рассматриваемых способов сочетания предложений. При этом импликация занимает особое положение, поскольку, например, упоминание о ней содержится уже в схеме заключения.

2. Одна система исходных формул для дедуктивной логики высказываний; полнота этой системы. Ниже приводится система исходных формул, выбранная нами с учетом сформулированных требований. По аналогии с тем, как это сделано в «Основаниях геометрии» Гильберта, исходные формулы разбиты в ней на отдельные группы.

I. Формулы для импликации:

- 1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
- 2) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$,
- 3) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

II. Формулы для конъюнкции:

- 1) $A \& B \rightarrow A$,

¹⁾ Этот результат (относящийся к 1925 г.) изложен в работе: Л е с н е в с к и й (Lesniewski S.). Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. — Fundamenta Math., 1929, 14. Взяв в качестве основной связи символ Шеффера $A | B$ («A и B исключают друг друга»), Нико (в работе: Nicod J. A reduction in the number of the primitive propositions of logic. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1917, 19), впервые привел пример одной-единственной исходной формулы, которой достаточно для того, чтобы с помощью правила подстановки и следующей схемы заключения:

$$\frac{A \quad A | (B | C)}{B \quad C}$$

получить все построенные с помощью штриха Шеффера тождественно истинные выражения. Правда, применяемая здесь схема заключения является более сильным средством, чем обычная схема

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

так как она позволяет за один прием исключить два выражения сразу.

Я. Лукасевич и Собочинский предложили целый ряд формул таких, что каждой из них хватает в качестве единственной исходной формулы (при применении обычной схемы заключения) для системы выражений, построенных с помощью импликации и отрицания. См. обзорный доклад Лукасевича и Тарского: Łukasiewicz J., Tarski A. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. — C.R. Soc. Sci. Varsovie. 23, Klasse III, Warschau, 1930.

$$2) A \& B \rightarrow B,$$

$$3) (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C)).$$

III. Формулы для дизъюнкции:

$$1) A \rightarrow A \vee B,$$

$$2) B \rightarrow A \vee B,$$

$$3) (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)).$$

IV. Формулы для эквивалентности:

$$1) (A \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B),$$

$$2) (A \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$3) (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \sim B)).$$

V. Формулы для отрицания:

$$1) (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A),$$

$$2) A \rightarrow \neg \neg A,$$

$$3) \neg \neg A \rightarrow A.$$

Как легко показать, все формулы этой системы являются тождественно истинными выражениями, и потому из них могут быть выведены только тождественно истинные выражения. Но с другой стороны, эта система является еще и *полной* — в том смысле, что любое (построенное из переменных с помощью символов $\&$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\sim$) тождественно истинное выражение может быть выведено из формул I — V при помощи сформулированных выше двух правил.

Кратко наметим доказательство этого утверждения. Во-первых, мы показываем, что из нашей системы может быть выведена любая тождественно истинная конъюнктивная нормальная форма. Затем устанавливаем, что если выражение $\mathcal{A}$ заменимо — в соответствии с каким-либо из правил замены 1—4 (быть может, в сочетании с правилом S2) — выражением $\mathcal{B}$, то из формул нашей системы может быть выведена формула $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

После этого наше утверждение может быть получено следующим образом. Пусть $\mathcal{A}$ — тождественно истинное выражение. Как было показано ранее, $\mathcal{A}$ в соответствии с правилами замены может быть преобразовано в некоторую конъюнктивную нормальную форму $\mathcal{K}$. Это преобразование может быть произведено в виде ряда замен, причем сначала будет заменено $\mathcal{A}$ посредством $\mathcal{A}_1$, затем $\mathcal{A}_1$ — посредством $\mathcal{A}_2$, ... и, наконец, $\mathcal{A}_k$ — посредством $\mathcal{K}$. Каждая из этих замен производится в соответствии с правилами 1—4 и S2, и всякий раз заменимость является двусторонней. Просматривая этот ряд замен в обратном направлении, мы в соответствии с ранее доказанным убеждаемся, что из нашей системы выводимы импликации

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}_k, \quad \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k-1}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}.$$

Далее, $\mathcal{K}$ выводимо, так как оно представляет собой конъюнктивную нормальную форму, тождественно истинную по той причине,

что она представляет ту же самую истинностную функцию, что и выражение $\mathcal{A}$, которое предполагается тождественно истинным. А теперь для того, чтобы из $\mathcal{B}$, а также из упомянутых выше выводимых импликаций получить $\mathcal{A}$, нам остается лишь несколько раз применить схему заключения.

Из проведенного рассуждения мы можем извлечь и еще одну теорему о полноте, в которой понятие тождественно истинного выражения вообще не фигурирует.

Именно, рассмотрим какое-нибудь выражение $\mathcal{B}$, которое не выводимо из нашей системы. Согласно ранее доказанному, оно не является тождественно истинным. Рядом последовательных замен выражение $\mathcal{B}$ может быть преобразовано в конъюнктивную нормальную форму $\mathcal{R}$, которая в свою очередь не является тождественно истинной. Пусть этот ряд ведет от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}_1$, от $\mathcal{B}_1$ к $\mathcal{B}_2$, ... и, наконец, от $\mathcal{B}_l$ к $\mathcal{R}$. Тогда из нашей системы будут выводимы импликации

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2, \quad \dots, \quad \mathcal{B}_l \rightarrow \mathcal{R}.$$

Поэтому, если к нашей системе формул I — V мы присоединим формулу $\mathcal{B}$, то, применив несколько раз схему заключения, мы сможем получить формулу $\mathcal{R}$, а затем, пользуясь формулами II, мы сможем получить и каждый в отдельности член этой конъюнкции. Но так как $\mathcal{R}$ не является тождественно истинной, то среди ее конъюнктивных членов (которые со своей стороны являются простыми дизъюнкциями) найдется по меньшей мере один такой, у которого каждая из числа входящих в него переменных встречается либо только со знаком отрицания, либо только без него. Если мы теперь вместо переменных без знака отрицания подставим A , а вместо переменных со знаком отрицания подставим $\neg A$, то получим дизъюнкцию, у которой каждый ее член есть либо A , либо $\neg A$, а из нее, пользуясь формулами I, III и V 3), можно будет вывести выражение, представляющее собой одну-единственную переменную A . А из переменной A подстановкой можно будет получить любое выражение.

Тем самым мы получили следующий результат: система формул I — V полна в том смысле, что для каждого выражения $\mathcal{B}$, построенного из переменных с помощью рассматриваемых пяти связок $\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\sim$ и $\neg$, имеет место следующая альтернатива: либо $\mathcal{B}$ выводимо из системы указанных формул с помощью подстановок и применений схемы заключения, либо в результате присоединения к этой системе формулы $\mathcal{B}$ в качестве исходной становится выводимым *любое наперед заданное выражение*.

Эта теорема была бы малосодержательной, если бы любое выражение могло быть выведено уже из самой системы формул I — V. Но, как мы знаем, из этой системы выводимы только тождественно истинные выражения.

3. Позитивная логика; регулярные импликативные формулы; позитивно тождественные импликативные формулы; возможные упрощения. Характеризуя эту систему формул I — V, заметим, что она устроена таким образом, что в формулах первой группы из логических связок встречается только импликация, а в последующих группах — только импликация и связка, вводимая этой группой.

В выборе этих формул существенную роль играет то, что посредством формул групп I — IV из области общей логики высказываний вычленяется так называемая *позитивная логика*, представляющая собой формализацию тех способов логических умозаключений, которые не зависят от предположения о том, что для всякого высказывания имеется ему противоположное.

Этому вычленению позитивной логики способствует то обстоятельство, что группа формул I содержит лишь такие формулы, которые соответствуют правилам гипотетических умозаключений. Способ, которым формулы группы I выделены нами из числа остальных, может быть уточнен вполне математически¹⁾.

С этой целью мы введем понятие *регулярной импликативной формулы*. Выражение, построенное из переменных с помощью одной только импликации, мы будем называть *импликативной формулой*. Импликативную формулу вида

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\dots \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}) \dots)),$$

построенную из выражений $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, у которых посылка каждой импликации состоит из одной лишь переменной, мы будем называть *регулярной импликативной формулой*, если $\mathcal{R}$ либо само встречается среди выражений $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{C}$, либо может быть выведено из них путем применения схемы заключения (но без подстановок).

Так, например, все три формулы группы I являются регулярными импликативными формулами. В случае формулы

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

этот факт очевиден непосредственно. Формула

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

¹⁾ Это выделение существенно отличается от того, которое предпринял Льюис, введя свое понятие *строгой импликации* (strict implication): Lewis C. I. A survey of symbolic logic. — Berkeley, 1918. Теория строгой импликации нацелена на то, чтобы выявить при аксиоматическом построении математической логики различие между чисто материальным и необходимым.

имеет вид $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$, где в качестве $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ фигурируют выражения

$$A \rightarrow (A \rightarrow B), A \text{ и } B;$$

но B может быть получено из $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ и A двукратным применением схемы заключения. Формула

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

имеет вид $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))$, где в качестве $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ фигурируют выражения

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \text{ и } C;$$

C может быть выведено из

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C$$

двукратным применением схемы заключения ¹⁾.

Импликативная формула будет называться **п о з и т и в н о т о ж д е с т в е н н о й**, если она либо является регулярной, либо получается из регулярной формулы путем подстановки, либо получается из уже полученных таким образом формул с помощью схемы заключения.

Например, по этому определению, формула

$$((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$$

является позитивно тождественной импликативной формулой; действительно, она получается с помощью схемы заключения из формул

$$A \rightarrow A, \\ (A \rightarrow A) \rightarrow (((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B),$$

первая из которых является регулярной импликативной формулой, а вторая получается из регулярной импликативной формулы

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

с помощью подстановки.

¹⁾ Регулярными импликативными формулами могут быть представлены все те обобщенные цепные заключения, которые П. Герц рассматривает в своей теории систем предложений: *Herz P. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme.* — *Math., Ann.*, 1923, 89, № 1/2; 1929, 101, № 4. Именно, каждое из рассматриваемых в этой теории предложений имеет вид

$$a_1 \dots a_r \rightarrow b;$$

заменяем это предложение соответствующим ему выражением

$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (A_r \rightarrow B) \dots));$$

тогда каждому допустимому по правилам Герца заключению с посылками $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$ и заключительным предложением $\mathcal{C}$ будет соответствовать регулярная импликативная формула

$$\mathcal{P}_1 \rightarrow (\mathcal{P}_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{C}) \dots)).$$

Таким образом, понятие позитивно тождественной импликативной формулы определяется без привлечения каких-либо специальных исходных формул, с учетом одних только правил вывода. Можно показать, что совокупность позитивно тождественных импликативных формул совпадает с совокупностью тех тождественно истинных выражений, которые могут быть выведены из формул группы I с помощью подстановок и схем заключения.

Однако эта совокупность не содержит в себе все тождественно истинные импликативные формулы. Наоборот, среди тождественно истинных импликативных формул имеются и такие, которые не являются позитивно тождественными, например,

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A.$$

Относительно этой формулы можно показать ¹⁾, что она не выводится из формул группы I с помощью указанных двух правил. Однако, если эту формулу взять в качестве исходной вместе с формулами I 1) и I 3), то этого уже будет достаточно для того, чтобы с помощью подстановок и схем заключения можно было получить все тождественно истинные импликативные формулы ²⁾.

Что касается совокупности позитивно тождественных импликативных формул, то для них в качестве исходных формул достаточно взять следующие регулярные импликативные формулы:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A), \\ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Вторая из них может быть выведена из следующих трех формул:

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)), \\ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)), \\ (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Таким образом, мы пришли к системе исходных формул, которая состоит из следующих четырех: I 1), I 2), а также

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

¹⁾ См. с. 111.

²⁾ Систему исходных формул, достаточную для вывода всех тождественно истинных импликативных формул, впервые указал М. Шейнфинкель. А. Тарский показал, что в качестве исходных формул для этой совокупности достаточно взять уже следующие три формулы: I 1), I 3) и

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C).$$

Здесь третью формулу можно заменить упомянутой выше, которая является более простой. М. Вайсберг и Я. Лукасевич нашли целый ряд формул таких, что каждая из них может быть взята в качестве единственной исходной формулы для вывода всех тождественно истинных импликативных формул. В этой связи см. уже упоминавшийся ранее доклад Лукасевича и Тарского: *Łukasiewicz J., Tarski A. Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* — *C.R. Soc. Sci. Varsovie*, 23, Warschau, 1930.

и

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

В этой системе, как показал Я. Лукасевич, обе последние формулы могут быть заменены одной формулой I 3), что и приводит нас к системе I 1) — I 3).

Наша система формул I — V устроена таким образом, что если исключить из нее формулу V 3), т. е. формулу

$$\neg \neg A \rightarrow A,$$

то выводимыми окажутся лишь такие импликативные формулы, которые являются позитивно тождественными¹⁾.

Далее, наша система формул обладает тем свойством, что каждая из ее формул независима от всех остальных, т. е. из всех остальных не выводится.

Однако даже небольшие изменения этой системы могут способствовать возникновению различных зависимостей. Например, если мы заменим третью из формул для конъюнкции II 3) следующей, более простой формулой:

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B)),$$

то формула I 1) окажется выводимой из формул I 2), 3) и формул для конъюнкции²⁾. Если вместо формулы V 2):

$$A \rightarrow \neg \neg A$$

взять формулу

$$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A,$$

то формула I 2) окажется выводимой из формул I 1), 3) и формул для отрицания.

Вообще, в направлении уменьшения числа формул наша система может быть усовершенствована самыми различными способами.

¹⁾ Системе наших формул I, II равнозначна система, которую А. Гейтинг приводит в качестве общей для импликации и для конъюнкции в его формализации интуиционистской логики (Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. — Sitzungsber. preuß. Akad. Wiss., Math.-Phys. Klasse, 1930. 2) Для дизъюнкции Гейтинг тоже берет формулы III.

²⁾ Напротив, если мы вместо формулы II 3) возьмем формулу

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \& B),$$

посредством которой формула II 3) может быть заменена в системе формул I и II, то никаких новых зависимостей не возникнет.

Что касается вопроса о возможности замены формулы III 3) формулой

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B),$$

то такая возможность существует в системе формул I, III, V, а значит, и подавно во всей системе I—V; если же мы опустим формулу V 3), то эта возможность исчезнет.

ми. Так, например, вместо системы, состоящей из наших шести формул I и V, достаточно взять систему из трех формул:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)),$$

$$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A,$$

а также систему

$$A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Обе эти системы были предложены Лукасевичем, причем им было установлено, что обе они достаточны для того, чтобы можно было вывести все тождественно истинные выражения, построенные с помощью импликации и отрицания.

Следует также отметить, что формулы V 1), 2), 3) фигурируют в уже упоминавшейся системе Фреге в качестве исходных формул рассмотренного им дедуктивного исчисления высказываний¹⁾.

§ 4. Доказательства независимости, проводимые методом оценок

1. Логическая интерпретация как оценка; общий метод. Доказательства различных сформулированных здесь утверждений о выводимости тех или иных формул мы можем опустить, так как в дальнейшем мы не будем пользоваться дедуктивной структурой логики высказываний. Однако мы приведем здесь *доказательство* того, что каждая из формул I — V *независима* от всех остальных. С этой целью мы разберем некоторый общий метод, который будет применяться в этом доказательстве. К этому методу нас приводит рассмотрение того отношения, в котором находятся друг к другу дедуктивная логика высказываний и теория истинностных функций.

Если мы будем трактовать связки $\rightarrow, \&, \vee, \sim, \neg$ как истинностные функции, то для системы дедуктивной логики высказываний в том виде, как она охарактеризована формулами I — V, мы тем самым получим определенного рода *интерпретацию*.

При рассмотрении этой интерпретации мы можем отвлечься от той в собственном смысле слова логической точки зрения,

¹⁾ См. сноску на с. 95. Впрочем, в системе Фреге формула

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

является излишней. Это может быть легко установлено с помощью упомянутых систем Лукасевича.

в результате которой формулы логики высказываний приобретают характер правил умозаключений. Здесь будет не важно, что значениями истинностных функций и их аргументов являются именно «истина» и «ложь». Важно будет лишь то, что мы будем иметь дело с вполне определенными функциями, которые, как и их аргументы, способны принимать лишь одни и те же два значения — например α и β . Определение этих функций дается нашими прежними таблицами, в которых мы заменим «истину» посредством α , а «ложь» — посредством β . Мы можем также дать эти определения в виде некоторых равенств, а именно:

определение функции $\rightarrow$ с помощью равенств будет иметь вид

$$\begin{aligned}\alpha \rightarrow \alpha &= \alpha, \\ \beta \rightarrow \beta &= \alpha, \\ \beta \rightarrow \alpha &= \alpha, \\ \alpha \rightarrow \beta &= \beta;\end{aligned}$$

определение функции $\neg$ с помощью равенств будет иметь вид:

$$\neg \alpha = \beta, \quad \neg \beta = \alpha;$$

определения $\&$ и $\vee$ с помощью равенств будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\alpha \& \alpha &= \alpha \vee \alpha = \alpha, & \beta \& \beta &= \beta \vee \beta = \beta, \\ \alpha \& \beta &= \beta \& \alpha = \beta, & \alpha \vee \beta &= \beta \vee \alpha = \alpha;\end{aligned}$$

определение $\sim$ с помощью равенств будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\alpha \sim \alpha &= \beta \sim \beta = \alpha, \\ \alpha \sim \beta &= \beta \sim \alpha = \beta.\end{aligned}$$

В соответствии со сказанным, тождественная истинность какого-либо выражения означает, что на основании приведенных определений его значение будет тождественно равно α . А рассуждение, которое убеждает нас в том, что система формул I — V доставляет одни лишь тождественно истинные формулы, в новой абстрактной системе обозначений выглядит следующим образом.

Сначала мы убеждаемся, что выражения I — V в силу определения $\rightarrow$ и других логических знаков тождественно принимают значение α . Затем остается лишь показать, что применение правил вывода к формулам, тождественно принимающим значение α , снова приводит только к таким формулам, которые обладают этим свойством.

Для правила подстановки этот факт является непосредственно очевидным, так как в результате подстановки запас значений какого-либо выражения увеличиться не может. Что же касается схемы заключения, то мы теперь должны показать, что если выражения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ тождественно принимают значение α , то $\mathfrak{B}$ также тождественно принимает это же самое значение. В самом

деле, если $\mathfrak{A}$ в качестве значения принимает α , то $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ принимает то же самое значение, что и $\alpha \rightarrow \mathfrak{B}$; но согласно определению функции $\rightarrow$, выражение $\alpha \rightarrow \mathfrak{B}$ всегда принимает то же самое значение, что и $\mathfrak{B}$. Таким образом, поскольку $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ принимает в качестве значения α , это же самое значение принимает также и $\mathfrak{B}$.

Из приведенного рассуждения, в частности, получается, что из формул I — V никогда не могут быть одновременно выведены два выражения $\mathfrak{A}$ и $\neg \mathfrak{A}$, второе из которых является отрицанием первого. В самом деле, если $\mathfrak{A}$ тождественно принимает значение α , то $\neg \mathfrak{A}$ будет тождественно принимать значение $\neg \alpha = \beta$.

Требующаяся при таком подходе проверка того, что выражения I — V тождественно принимают значение α , на первый взгляд кажется утомительной. Однако соответствующим разбором случаев она может быть сделана более короткой и обозримой. Продемонстрируем это на примере формулы I 3):

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Пусть уже установлено, что выражения

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \text{ и } A \rightarrow A$$

тождественно принимают значение α . Тогда далее можно рассудить следующим образом. Среди значений, которые будут подставлены вместо A , B и C , по крайней мере два должны будут совпасть. Если совпадут значения B и C , то $A \rightarrow C$ примет то же самое значение, что и $A \rightarrow B$, и тогда значение рассматриваемого нами выражения I 3) окажется одним из значений выражения

$$A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

т. е. α . Если же совпадут значения A и C , то $A \rightarrow C$ примет значение α , и так как

$$\alpha \rightarrow \alpha = \beta \rightarrow \alpha = \alpha$$

(а потому и всякое выражение вида $\mathfrak{A} \rightarrow \alpha$ в качестве значения примет α), то получится, что

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) &= \\ (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow \alpha) &= \\ (A \rightarrow B) \rightarrow \alpha &= \alpha.\end{aligned}$$

Наконец, если совпадут значения A и B , то совпадут также и значения $B \rightarrow C$ и $A \rightarrow C$. Значит,

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

примет в качестве значения α , а отсюда следует, что

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) = (A \rightarrow B) \rightarrow \alpha = \alpha.$$

2. Доказательство независимости рассматриваемой системы исходных формул; еще одно доказательство независимости. Изложенный способ доказательства мы теперь обобщим таким образом, чтобы его можно было использовать для проведения доказательств независимости. Обобщение это будет заключаться в том, что вместо определений для

$$\rightarrow, \&, \vee, \sim, \neg,$$

позаимствованных нами из таблиц, задающих соответствующие истинностные функции, мы рассмотрим некоторые другие определения, беря за основу ту или иную конечную область значений. Из этой области значений мы выделим определенную подобласть — подобласть так называемых выделенных значений — и отведем ей ту роль, которую в рассмотренном выше случае играло α .

Такого рода определение символов $\rightarrow, \&, \vee, \sim, \neg$ как функций в соответствующей конечной области, в сочетании с указанием выделенных значений, мы будем для краткости называть оценкой. Ту оценку, которая соответствует заданию истинностных функций, мы будем называть нормальной оценкой.

Чтобы показать, что данная формула $\mathcal{U}$ не может быть выведена из формул

$$\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k,$$

будет достаточно указать оценку со следующими свойствами. Выражения

$$\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$$

принимают одни только выделенные значения. Если, далее, выражения $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ принимают только выделенные значения, то тем же свойством обладает и $\mathcal{Z}$. Выражение $\mathcal{U}$, напротив, принимает также и невыделенные значения.

Если эти условия окажутся выполненными, то тем самым фактически будет установлена невыводимость $\mathcal{U}$; действительно, перечисленные выше свойства оценки гарантируют нам, что, исходя из формул $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$, принимающих одни только выделенные значения, и применяя правило подстановки и схему заключения, мы снова будем получать лишь формулы с выделенными значениями и, следовательно, никогда не сможем получить формулу $\mathcal{U}$.

Теперь, пользуясь этим методом, мы для каждой из формул I — V докажем ее невыводимость из остальных формул системы.

Для формул из групп II — V с этой целью можно будет воспользоваться такими оценками, которые отличаются от нормальной только в определении логического символа, вводимого рассматриваемой группой формул. Поэтому для формул II — V доказательства независимости мы можем свести в одну таблицу, в которой для каждой формулы $\mathcal{F}$, входящей в одну из упомянутых

групп, мы приведем определение для вводимого этой группой символа, задающее ту отличающуюся от нормальной оценку, при помощи которой доказывается независимость формулы $\mathcal{F}$ от остальных формул I — V. Это определение всякий раз можно будет выразить посредством одного-единственного определяющего равенства, которое должно выполняться при любом распределении значений α и β для фигурирующих в этом равенстве переменных. Независимость этой формулы $\mathcal{F}$ будет вытекать из того, что при сопоставленной этой формуле оценке формула $\mathcal{F}$ для определенного набора значений переменных (который также указывается в таблице) примет значение β , в то время как любая другая из формул I — V при этой оценке будет принимать значение α .

Проверку этого обстоятельства нужно проводить лишь для формул той группы, к которой принадлежит сама $\mathcal{F}$, так как отличие оценки, сопоставленной формуле $\mathcal{F}$, от нормальной проявляется лишь в отношении этих формул.

Следует обратить внимание на тот факт, что во всех этих доказательствах независимости определение символа $\rightarrow$ остается прежним, так что каждая приведенная в таблице оценка обладает тем свойством, что если две формулы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ тождественно принимают значение α , то и $\mathcal{Z}$ также обладает этим свойством.

Таблицу доказательств независимости для формул II — V мы зададим следующим образом:

Формула $\mathcal{F}$, независимость которой должна быть доказана	Определяющее равенство, отличающееся от нормальной оценки	Система значений переменных, доставляющая формуле $\mathcal{F}$ значение β
II 1) $A \& B \rightarrow A$ 2) $A \& B \rightarrow B$ 3) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C))$	$A \& B = B$ $A \& B = A$ $A \& B = \beta$	$A = \beta, B = \alpha$ $A = \alpha, B = \beta$ $A = B = C = \alpha$
III 1) $A \rightarrow A \vee B$ 2) $B \rightarrow A \vee B$ 3) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$	$A \vee B = B$ $A \vee B = A$ $A \vee B = \alpha$	$A = \alpha, B = \beta$ $A = \beta, B = \alpha$ $A = B = C = \beta$
IV 1) $(A \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 2) $(A \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 3) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \sim B))$	$A \sim B = B \rightarrow A$ $A \sim B = A \rightarrow B$ $A \sim B = \beta$	$A = \alpha, B = \beta$ $A = \beta, B = \alpha$ $A = B = \alpha$
V 1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 2) $A \rightarrow \neg \neg A$ 3) $\neg \neg A \rightarrow A$	$\neg A = A$ $\neg A = \beta$ $\neg A = \alpha$	$A = \beta, B = \alpha$ $A = \alpha$ $A = \beta$

Из приведенных в этой таблице оценок можно также извлечь и некоторые дополнительные следствия. Например, оценка, доказывающая независимость формулы II 3), вместе с тем показывает также, что в системе формул I — V эту формулу нельзя заместить формулой

$$(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C);$$

действительно, при этой оценке, которая задается определяющим равенством

$$A \& B = \beta,$$

рассматриваемая формула, равно как и формулы I, II 1), 2), III — V, всякий раз принимает значение α , в то время как для формулы II 3) это неверно.

Далее, используемая для доказательства независимости формулы V 3) оценка, задаваемая определяющим равенством

$$\neg A = \alpha,$$

показывает, что формула V 3) не может быть выведена из формул I — IV, V 1), 2) и формулы

$$A \vee \neg A$$

и что, стало быть, в системе формул I — V формулу V 3) нельзя заместить формулой $A \vee \neg A$. Действительно, при упомянутой оценке все формулы I — IV, V 1), 2), а также формула $A \vee \neg A$ тождественно принимают значение α , в то время как для V 3) это места не имеет.

Теперь осталось провести доказательства независимости для формул группы I. Здесь дело обстоит не так просто, как в предыдущих случаях, ввиду того, что символ $\rightarrow$ встречается в формулах всех пяти групп.

Независимость формул I 1), 2), 3) мы докажем с помощью трех существенно отличающихся друг от друга оценок.

Общим у этих оценок будет то, что всякий раз в качестве единственного выделенного значения мы будем брать α . Условие, состоящее в том, что если $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z}$ тождественно принимают значение α , то и $\mathfrak{Z}$ тождественно принимает это значение, будет выполняться вследствие того, что во всех трех оценках выражение $\alpha \rightarrow A$ для $A \neq \alpha$ будет принимать значение, отличное от α . Далее, эти оценки будут обладать следующим, общим для них свойством:

Для любых значений A и B имеют место равенства

$$A \& B = B \& A, \quad A \vee B = B \vee A, \quad A \sim B = B \sim A,$$

$$A \rightarrow A = \alpha, \quad A \& A = A, \quad A \vee A = A, \quad A \sim A = \alpha,$$

$$A \rightarrow \alpha = \alpha, \quad \beta \rightarrow A = \alpha,$$

$$A \& \alpha = A, \quad A \vee \alpha = \alpha, \quad A \& \beta = \beta, \quad A \vee \beta = A,$$

а также

$$\neg \alpha = \beta, \quad \neg \beta = \alpha.$$

Эти условия, как легко убедиться, совместимы друг с другом. Получающиеся из них определяющие равенства мы будем называть основными равенствами. К ним всякий раз будут добавляться те или иные дополнительные определяющие равенства.

Для доказательства независимости формулы I 1) мы возьмем оценку с четырьмя значениями $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Для нее дополнительными определяющими равенствами будут

$$\alpha \rightarrow \beta = \beta, \quad \alpha \rightarrow \gamma = \beta, \quad \alpha \rightarrow \delta = \beta,$$

$$\gamma \rightarrow \beta = \beta, \quad \delta \rightarrow \beta = \beta,$$

$$\gamma \rightarrow \delta = \beta, \quad \delta \rightarrow \gamma = \alpha,$$

$$\gamma \& \delta = \delta, \quad \gamma \vee \delta = \gamma,$$

$$\neg \gamma = \delta, \quad \neg \delta = \gamma,$$

$$A \sim B = \beta \quad \text{для} \quad A \neq B.$$

Для так определенной оценки значение каждой из формул I 2), 3), II—V тождественно равняется α .

В целях облегчения проверки следует заметить, что: $A \rightarrow B$ всегда принимает одно из значений α или β ; $A \& B$ и $A \vee B$ всегда принимают одно из значений A, B . Следует также отметить еще и ту особенность нашей оценки, что для выражений, построенных из α и β с помощью наших пяти логических символов, она согласуется с нормальной оценкой.

То, что формула I 1)

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

не всегда принимает значение α , можно обнаружить при помощи различных систем значений переменных: например, при $A = \delta$ и $B = \alpha$ рассматриваемая формула принимает значение β .

Для указанных значений A и B значение β принимает также и формула

$$A \rightarrow (B \rightarrow A \& B).$$

Отсюда следует, что она не может быть выведена из формул I 2), 3), II—V.

Тем же самым способом можно убедиться, что формулы

$$A \vee \neg A, \quad \neg(A \& \neg A), \quad (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A, \quad A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$$

также не выводятся из формул I 2), 3), II—V.

Далее, из того обстоятельства, что при рассматриваемой оценке формулы $A \rightarrow A$ и $B \rightarrow (A \rightarrow A)$ тождественно принимают значение α , следует, что в системе формул I—V формулу I 1)

нельзя заместить формулами $A \rightarrow A$ и $B \rightarrow (A \rightarrow A)$. Формула I 1) будет невыводимой и в том случае, если к формулам I 2), 3), II — V добавить не только формулы $A \rightarrow A$ и $B \rightarrow (A \rightarrow A)$, но, кроме того, еще и формулы $A \vee \neg A$, $\neg(A \& \neg A)$, а также схему $\frac{A \rightarrow \neg A}{\neg A}$. Действительно, в этом случае выводимыми оказались бы лишь такие формулы, которые при рассматриваемой оценке принимают только значения α и γ .

Независимость формулы I 2) устанавливается с помощью оценки с тремя значениями α , β и γ , впервые рассмотренной Лукасевичем. Для этой оценки дополнительные равенства имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow \beta &= \beta, & \alpha \rightarrow \gamma &= \gamma, & \gamma \rightarrow \beta &= \gamma, \\ \alpha \sim \beta &= \beta, & \alpha \sim \gamma &= \gamma, & \beta \sim \gamma &= \gamma, & \neg \gamma &= \gamma \end{aligned}$$

($A \& B$ и $A \vee B$ вполне определяются уже при помощи основных равенств).

То, что эта оценка доставляет каждой из формул I 1), 3), II — V значение α , легко усматривается из следующей арифметической интерпретации: α , β и γ суть соответственно числа 0, 1 и $\frac{1}{2}$; $A \rightarrow B$ при $A \leq B$ представляет собой арифметическую разность $B - A$, а в противном случае $A \rightarrow B$ равно 0; $A \& B$ представляет собой наибольшее, а $A \vee B$ — наименьшее из значений A и B ; $A \sim B$ есть абсолютная величина $A - B$; $\neg A$ равно $1 - A$.

Формула I 2):

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

принимает при этой оценке значение γ , если положить $A = \gamma$ и $B = \beta$.

Точно так же устанавливается, что ни одна из формул

$$\begin{aligned} (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \& A \rightarrow B), \\ A \vee \neg A, \quad \neg(A \& \neg A), \quad (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A \end{aligned}$$

не является тождественно равной α . Таким образом, эти формулы не выводимы из формул I 1), 3), II — V.

И наконец, чтобы доказать независимость формулы I 3), возьмем оценку с четырьмя значениями α , β , γ , δ и со следующими дополнительными определяющими равенствами:

$$\begin{aligned} \neg \gamma &= \delta, & \neg \delta &= \gamma, \\ \gamma \& \delta &= \beta, & \gamma \vee \delta &= \alpha, & \alpha \rightarrow \beta &= \gamma, \\ \gamma \rightarrow \beta &= \delta, & \delta \rightarrow \beta &= \gamma; \end{aligned}$$

далее, для $A, B \neq \beta, A \neq B$

$$A \rightarrow B = B;$$

наконец, для любых значений A и B

$$A \sim B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A).$$

Легко убедиться, что эти равенства совместимы друг с другом, а также и с основными равенствами, и что рассматриваемая оценка вполне ими определяется.

Теперь можно проверить, что при этой оценке формулы I 1), 2), II — V тождественно принимают значение α . Между тем формула I 3):

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

при $A = \alpha, B = \beta$ и $C = \delta$ принимает значение δ .

При этой оценке формула

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

при $A = \alpha$ и $B = \beta$ принимает значение δ . Следовательно, эта формула не может быть выведена из системы формул I — V без использования формулы I 3).

Тем самым независимость всех формул I — V доказана. В дополнение к сказанному, воспользовавшись еще одной оценкой, мы покажем, что формула

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A,$$

которую мы приводили выше ¹⁾ в качестве примера тождественно истинной, но не позитивно тождественной импликативной формулы, не может быть выведена из системы формул I — V без использования формулы V 3).

Для этого мы возьмем оценку с тремя значениями α , β и γ . Для нее, как и в предыдущих случаях, должны будут выполняться основные равенства и, кроме того, мы добавим к ним следующие дополнительные:

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow \beta &= \beta, & \alpha \rightarrow \gamma &= \gamma, & \gamma \rightarrow \beta &= \beta, \\ \alpha \sim \beta &= \beta, & \alpha \sim \gamma &= \gamma, & \beta \sim \gamma &= \beta, & \neg \gamma &= \beta. \end{aligned}$$

При так определенной оценке все формулы I — IV, V 1), 2) тождественно принимают значение α , а формула

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

при $A = \gamma$ и $B = \beta$ принимает значение γ . Значит, эта формула действительно не выводима из формул I — IV, V 1), 2). То же самое верно и в отношении тождественно истинной формулы

$$A \vee (A \rightarrow B),$$

которая в рассматриваемой оценке при $A = \gamma$ и $B = \beta$ также принимает значение γ .

¹⁾ См. с. 101.

3. Применение метода оценок к вопросу о замене формул схемами. Наш метод введения функций, подходящим образом заданных на конечных областях, может быть без изменений использован также и в таких доказательствах независимости, в которых речь идет об изменении не только системы формул, но и набора применяемых правил.

Так, например, оценка, которую мы построили для доказательства независимости формулы I 1), показывает, что формулу I 1) нельзя заместить схемой

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}}.$$

Действительно, от любой формулы, тождественно принимающей при упомянутой оценке значение α , эта схема снова ведет к формуле с тем же свойством, так как при этой оценке значение $A \rightarrow \alpha$ тождественно равно α . Таким образом, и при добавлении упомянутой схемы выводимыми из формул I 2), 3), II — V окажутся лишь такие формулы, которые в рассматриваемой оценке тождественно принимают значение α , в то время как формула I 1) этим свойством не обладает.

Таким же способом можно доказать и то, что формула II 3):

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C))$$

не может быть замещена схемой

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\ (\mathfrak{z}) \quad \frac{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}}{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C}}, \end{array}$$

если мы ограничимся формулами групп I — III. Таким образом, даже если мы добавим схему (з) в качестве формального правила вывода, то формула II 3) будет не выводима из формул I, II 1), 2), III.

Для доказательства мы рассмотрим оценку, состоящую из четырех элементов α, β, γ и δ . Среди них выделенным снова будет только α . По-прежнему будем считать, что имеют место основные равенства, а в качестве дополнительных равенств возьмем

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B = B \quad \text{для} \quad A \neq B, \quad A \neq \beta; \\ \gamma \& \delta = \beta, \quad \gamma \vee \delta = \alpha. \end{array}$$

Прежде всего, в силу этих определяющих равенств значение каждой из формул I, II 1), 2), III тождественно равно α . Затем, если значения выражений $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Z}$ тождественно равны α , то тогда и $\mathfrak{Z}$ обладает этим свойством; таким образом, применяя

схему заключения

$$\frac{\mathcal{C} \quad \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}}$$

к формулам, которые тождественно принимают значение α , мы снова получаем формулу с этим свойством.

Но то же самое справедливо и в отношении присоединяемой схемы (з):

$$\frac{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}}{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C}};$$

именно, если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — выражения такие, что $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ тождественно принимают значение α , то и выражение $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C}$ всегда будет принимать это значение. Действительно, рассмотрим какую-нибудь фиксированную подстановку значений вместо входящих в $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ переменных. Тогда для значения $\mathcal{A}$ возможны следующие случаи:

1. $\mathcal{A}$ принимает значение β ; тогда в любом случае $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C}$ принимает значение α .

2. $\mathcal{A}$ принимает значение α . Так как $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ по нашему предположению принимают значение α , то

$$\alpha \rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B} = \alpha, \quad \alpha \rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C} = \alpha,$$

и следовательно,

$$\alpha \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C} = \alpha \rightarrow \alpha \& \alpha = \alpha.$$

3. $\mathcal{A}$ принимает одно из значений γ, δ . Так как $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ принимают значение α , то $\mathcal{B}$ должно принимать либо то же самое значение, что и $\mathcal{A}$, либо значение α . То же самое справедливо и в отношении $\mathcal{C}$. Так как теперь

$$\begin{array}{l} \gamma \& \gamma = \alpha \& \gamma = \gamma \& \alpha = \gamma, \\ \delta \& \delta = \alpha \& \delta = \delta \& \alpha = \delta, \\ \alpha \& \alpha = \alpha, \end{array}$$

то $\mathcal{B} \& \mathcal{C}$ также принимает либо то же самое значение, что и $\mathcal{A}$, либо значение α , так что

$$\begin{array}{l} \text{либо} \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C} = \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} = \alpha, \\ \text{либо} \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C} = \mathcal{A} \rightarrow \alpha = \alpha. \end{array}$$

Тем самым мы установили, что если схему (з) взять в качестве дополнительного правила вывода, то все формулы, выводимые из формул I, II 1), 2), III, будут тождественно принимать значение α . Между тем в отношении формулы II 3) это утверждение места не имеет. Действительно, если мы подставим в нее вместо A , B и C значения γ , γ и δ , то получим

$$\begin{aligned}(\gamma \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \gamma \& \delta)) &= \\ \alpha \rightarrow (\delta \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)) &= \\ \delta \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta) &= \delta \rightarrow \beta = \beta.\end{aligned}$$

В связи с проведенным доказательством независимости сделаем следующие замечания:

1. Если к рассматриваемым нами формулам I, II 1), 2), III добавить формулы группы V, то с помощью наших правил вывода и схемы (з) можно будет вывести формулу II 3).

2. Если мы вместо схемы (з) введем модифицированную схему

$$\begin{aligned}(\text{з}') \quad & \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}) \\ & \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \\ \hline & \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U} \& \mathcal{B}),\end{aligned}$$

то с ее помощью формула II 3) может быть выведена из одних только формул группы I.

Действительно, схема (з') может быть использована следующим образом:

$$\begin{aligned}A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ A \rightarrow (B \rightarrow B) \\ \hline A \rightarrow (B \rightarrow A \& B),\end{aligned}$$

Здесь на первом месте стоит формула I 1), а вторая формула может быть выведена из формул группы I. Таким образом, мы приходим к формуле

$$A \rightarrow (B \rightarrow A \& B),$$

а из нее с помощью формул группы I может быть выведена и формула II 3).

Таким образом, формулу II 3) в нашей неявной характеристизации конъюнкции можно заменить схемой (з').

В случае дизъюнкции ситуация является не такой сложной, как в случае конъюнкции. Более того, здесь формула

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

может быть заменена схемой

$$\begin{aligned}(t) \quad & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C} \\ & \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \\ \hline & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C},\end{aligned}$$

аналогичной схеме (з). Действительно, с помощью этой схемы формула III 3) может быть выведена из формул группы I. Для этого достаточно следующим образом применить схему (з):

$$\begin{aligned}A \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)] \\ B \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)] \\ \hline A \vee B \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)]\end{aligned}$$

Здесь обе первые формулы выводимы из формул группы I, а формула III 3) получается из заключительной формулы с помощью перестановки посылок импликации, чего можно добиться с помощью формул группы I.

§ 5. Возврат к рассмотренному в § 2 способу формализации вывода; сокращенные правила; замечание, касающееся противоречивости системы

На этом мы хотели бы закончить рассмотрение дедуктивной (аксиоматической) логики высказываний. Наше изложение этого предмета никоим образом не претендует на полноту. Оно преследует всего лишь скромную цель — дать некоторое представление о том, как много стимулирующих проблем и систематических идей кроется в дедуктивной логике высказываний.

В наших целях формализации процесса вывода мы воспользуемся логикой высказываний не в аксиоматическом виде, а в виде теории истинностных функций, построенной нами в начале этой главы ¹⁾. Это будет сделано описанным ранее образом: в качестве исходных формул мы будем брать, с одной стороны, тождественно истинные выражения, а с другой — определенные, записанные в виде формул гипотезы; дальнейшие же формулы мы будем затем выводить с помощью подстановок и схем заключения.

Некоторые часто встречающиеся переходы будет полезно зафиксировать в виде специальных правил. Получающееся таким образом исчисление, которое мы снова будем называть *исчислением высказываний*, содержит в себе то исчисление высказываний, т. е. применение правил замены 1 — 4, которое было построено нами ранее ²⁾.

¹⁾ Логiku высказываний в дедуктивном виде мы привлечем лишь для эвристической мотивации правил, связанных с кванторами всеобщности и существования.

²⁾ См. с. 79.

Действительно, если какое-либо выражение $\mathcal{A}$ заменимо в соответствии с этими правилами выражением $\mathcal{B}$, то обе импликации $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ являются тождественно истинными; а тогда каждую из них можно будет взять в качестве исходной формулы и тем самым мы получим возможность производить — с помощью схемы заключения — переходы от $\mathcal{A}$ к $\mathcal{B}$ и соответственно от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$.

Поэтому над любой встретившейся в процессе формального вывода формулой мы можем производить любые преобразования, разрешенные правилами замены.

Ниже мы особо отметим некоторые важные преобразования, полученные таким образом. Как мы установили, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ заменимо посредством $B \rightarrow (A \rightarrow C)$, а также $A \& B \rightarrow C$. Поэтому в любой импликации вида

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$$

мы можем поменять местами посылки, так что получится

$$\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}).$$

Далее, обе эти посылки мы можем соединить конъюнкцией в одну, так что получится

$$\mathcal{A} \& \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}.$$

И обратно, от формулы

$$\mathcal{A} \& \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$$

с конъюнкцией в посылке мы можем перейти к формуле

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$$

с последовательными посылками $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в импликации.

Переход от $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ к $\mathcal{A} \& \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ называется *правилом соединения посылок*, а обратный переход — *правилом разъединения посылок*.

Операции перестановки, соединения и разъединения посылок могут быть распространены и на многочленные импликации, а также и на многочленные конъюнкции в посылке.

Так, мы можем перейти от выражения

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}))$$

к

$$\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R})),$$

а также к

$$\mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R})),$$

и к

$$\mathcal{A} \& \mathcal{B} \& \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}.$$

Разумеется, эти переходы могут быть выполнены и в обратном направлении.

Очень часто употребляется взаимная заменимость выражений

$$A \rightarrow B \quad \text{и} \quad \neg B \rightarrow \neg A,$$

$$A \rightarrow \neg B \quad \text{и} \quad B \rightarrow \neg A,$$

а также

$$\neg A \rightarrow B \quad \text{и} \quad \neg B \rightarrow A.$$

Поэтому мы можем переходить от

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{к} \quad \neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}$$

и обратно; далее, от

$$\mathcal{A} \rightarrow \neg \mathcal{B} \quad \text{к} \quad \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}$$

и от

$$\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{к} \quad \neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Эти переходы — по аналогии с соответствующими способами содержательных умозаключений — мы назовем *контрапозициями*.

Далее отметим, что в силу заменимости выражений

$$A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{и} \quad A \rightarrow B$$

дважды повторяющаяся посылка импликации может быть один раз опущена.

Для эквивалентности имеют место следующие заменимости: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ посредством $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$; $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ посредством $\neg \mathcal{A} \sim \neg \mathcal{B}$; $\mathcal{A} \sim \neg \mathcal{B}$ посредством $\neg \mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Кроме указанных преобразований, которые основываются на (двусторонней) заменимости одного выражения другим, логика высказываний доставляет в наше распоряжение и такие переходы, которые не являются обратимыми.

Примером может служить добавление произвольной посылки в импликацию: если у нас уже имеется формула $\mathcal{A}$ и если $\mathcal{B}$ есть произвольное выражение, то мы можем получить

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A},$$

подставив в тождественно истинное выражение

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$\mathcal{A}$ вместо A и $\mathcal{B}$ вместо B и применив к полученной таким образом формуле

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

и к формуле $\mathcal{A}$ схему заключения.

Добавление посылки в импликацию равносильно применению ранее уже упоминавшейся схемы

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}}.$$

Аналогично тому, как из рассмотрения тождественно истинного выражения

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

мы извлекли некоторое правило формального умозаключения, такого же рода правила мы можем извлечь и из других тождественно истинных выражений.

Особенно важным правилом этого рода является правило *силлогизма*: если у нас имеются две формулы

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ и } \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C},$$

то мы можем вывести из них

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Действительно, для этого требуется подставить в тождественно истинное выражение

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$\mathcal{A}$ вместо A , $\mathcal{B}$ вместо B , $\mathcal{C}$ вместо C , а затем дважды воспользоваться схемой заключения

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\ (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})) \\ \hline (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \\ \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \\ \hline \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}. \end{array}$$

Тождественно истинные выражения

$$\begin{aligned} (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C)), \\ (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)) \end{aligned}$$

доставляют нам следующие правила, касающиеся конъюнкции и дизъюнкции:

из двух формул $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ можно получить $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C}$,
из двух формул $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ можно получить $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.
Эти два правила равносильны ранее рассмотренным схемам (з) и (t).

Что касается эквивалентности, то здесь имеется правило, согласно которому две импликации

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ и } \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

можно объединить в эквивалентность $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$; иначе говоря, эту эквивалентность можно вывести из упомянутых двух импликаций; с другой стороны, из нее можно вывести обе эти импликации. Это вытекает из заменимости

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \text{ посредством } (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \& (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}).$$

Объединяя это правило с правилом силлогизма, мы получаем правило *транзитивности* эквивалентности:

$$\text{из } \mathcal{A} \sim \mathcal{B} \text{ и } \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \text{ можно извлечь формулу } \mathcal{A} \sim \mathcal{C};$$

равным образом, на основании симметрии и транзитивности эквивалентности

$$\text{из } \mathcal{A} \sim \mathcal{C} \text{ и } \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \text{ можно извлечь формулу } \mathcal{A} \sim \mathcal{B}.$$

Эти два перехода мы назовем *схемой эквивалентности*.

В связи с проведенным рассмотрением этого формализма выводов, строящегося на базе теории истинностных функций, следует сделать еще одно важное в принципиальном отношении замечание. Если в качестве исходных формул мы будем использовать только тождественно истинные выражения, то можно быть вполне уверенным, что в числе выводимых формул не окажется никакого выражения $\mathcal{A}$ вместе со своим отрицанием $\neg \mathcal{A}$. Однако это вполне может произойти, если в качестве исходных формул кроме тождественно истинных выражений мы будем брать еще и какие-нибудь формализованные *посылки*. Если в результате добавления таких посылок какая-либо формула $\mathcal{A}$ окажется выводимой вместе со своим отрицанием $\neg \mathcal{A}$, то мы будем говорить, что эти посылки ведут к противоречию. Если такой случай действительно будет иметь место, то тогда окажется *выводимой* вообще *любая формула*, которая может быть подставлена вместо переменных $A, B, \dots$.

В самом деле, пусть $\mathcal{F}$ — формула такого рода. Возьмем тождественно истинное выражение $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. Подставим в него вместо A формулу $\mathcal{A}$, а вместо B формулу $\mathcal{F}$. Тогда получится

$$\mathcal{A} \rightarrow (\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}).$$

Так как $\mathcal{A}$ и $\neg \mathcal{A}$ по нашему предположению выводимы, то двукратным применением схемы заключения мы сможем из этой формулы получить формулу $\mathcal{F}$.

Поэтому, если о какой-нибудь системе посылок мы знаем, что с их использованием не может быть выведена некоторая формула $\mathcal{F}$, которая может быть значением переменных $A, B, \dots$, то тем самым мы можем быть уверены, что рассматриваемые посылки вообще не могут привести ни к какому противоречию.

Это замечание мы впоследствии используем в ряде доказательств непротиворечивости.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ВЫВОДА II: ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Введение индивидуальных переменных; понятие формулы; правило подстановки; пример; параллель с содержательными рассуждениями

Материал предыдущей главы подготовил нас к формализации процесса логического вывода.

Мы построили особую вспомогательную дисциплину — теорию истинностных функций — и на ее основе разработали способ формализации умозаключений определенного рода. Этот способ состоит в том, что мы исходим из определенного типа формул, представляющих собой либо тождественно истинные выражения, либо символические записи некоторых посылок (аксиом), а дальнейшие формулы выводим из них, пользуясь правилом подстановки и схемой заключения.

Этот способ совершенно обходит стороной один очень существенный логический момент, а именно — отношение сказуемого к подлежащему, т.е. связь между *субъектом* и *предикатом*.

Эту связь и основывающиеся на ней способы умозаключений мы и должны теперь будем отразить в нашем формализме.

Первым шагом в этом направлении будет введение *индивидуальных* переменных. Для начала мы хотели бы связать их с теорией истинностных функций. Чтобы лучше понять суть дела, будет полезно рассмотреть одну математическую аналогию.

Если мы возьмем какое-либо формальное алгебраическое тождество, например

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2,$$

то справедливость его не нарушится и в том случае, если мы будем считать, что входящие в него переменные дополнительно зависят от одного или нескольких параметров, т.е. если мы, например, заменим в упомянутой формуле x и y посредством

$$x(t) \text{ и } y(t),$$

так что получится равенство

$$(x(t) + y(t)) \cdot (x(t) - y(t)) = (x(t))^2 - (y(t))^2.$$

Это равенство будет выполняться тождественно как относительно x и y , так и относительно t (здесь переменная t принимает значения в определенной числовой области, а x и y являются переменными для *функций*, которые всякому числу из области изменения t ставят в соответствие некоторые значения из области изменения первоначальных переменных x и y). Разумеется, совершенно аналогичным образом мы можем смотреть и на тождества логики высказываний, т.е. на тождественно истинные выражения. Переменные

$$A, B, \dots,$$

способные принимать лишь два значения «истина» и «ложь», мы можем считать дополнительно зависящими от параметров, которые в свою очередь пробегают некоторую область значений, будь то область объектов какого-либо определенного вида или же какая-либо фиксированная индивидуальная область.

Эти параметры мы будем называть *индивидуальными* и будем обозначать их строчными буквами латинского алфавита $a, b, \dots$, в отличие от переменных исчисления высказываний, обозначаемых буквами

$$A, B, \dots$$

Выражения типа

$$A(a), A(a, b)$$

будут изображать величины, принимающие два значения; задание A осуществляется посредством некоторой функции, которая каждому допустимому значению a , соответственно a и b , сопоставляет одно из значений «истина» или «ложь». Всякая такая функция как раз и представляет собой то, что мы в гл. I называли *пробегом значений* предиката¹⁾. Итак, введением индивидуальных переменных мы от логики высказываний приходим к *логике предикатов*.

Произведенное таким образом расширение символики немедленно позволяет нам получить из тождественно истинных выражений логики высказываний тождества некоторого нового типа. Так, например, из тождественно истинного выражения

$$A \vee \neg A$$

мы можем получить выражения

$$A(a) \vee \neg A(a),$$

$$A(a, b) \vee \neg A(a, b),$$

которые являются тождествами в том смысле, что они тождественно принимают значение «истина» независимо от того, как специа-

¹⁾ См. с. 33. Название восходит к Фреге.

лизированы, с одной стороны, переменная A посредством какого-нибудь предиката и, с другой стороны, индивидуальные переменные посредством каких-либо индивидов. Действительно, при произвольной фиксации a и b

$$A(a), \text{ соответственно } A(a, b),$$

принимают одно из двух значений, «истина» или «ложь», так что все выражение в целом принимает одно из значений выражения

$$A \vee \neg A,$$

а стало быть, значение «истина», поскольку это выражение является тождественно истинным.

Теперь, в свете этих соображений, мы дадим некоторую расширенную версию правила подстановки¹⁾.

Прежде всего мы введем понятие *формулы*. Формулой мы будем считать символическое изображение какого-либо переменного или постоянного высказывания, соответственно какого-либо переменного или постоянного предиката.

Это определение нуждается в уточнении путем *описания формальной структуры* тех выражений, которые мы будем допускать в качестве формул. Такая формальная характеристика оказывается возможной вследствие того факта, что формализацию вывода мы будем рассматривать лишь в рамках *аксиоматических теорий*.

В любой аксиоматической теории вводятся объекты заранее определенных типов, а также некоторые основные отношения между этими объектами. Каждое из этих отношений изображается предикатным символом с тем или иным числом аргументов, зависящим от числа фигурирующих в этом отношении субъектов, причем каждый из аргументов пробегает вполне определенную предметную область. Для объектов каждого из этих типов вводятся соответствующие индивидуальные переменные.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда будет иметься всего лишь *один сорт объектов*, так что у нас не будет надобности вводить индивидуальные переменные различных типов.

Элементарной формулой мы будем называть выражение, которое представляет собой либо одну из переменных $A, B, C, \dots$, либо переменную этого рода с одной или несколькими индивидуальными переменными, приданными ей в качестве аргументов, либо предикатный символ *) с относящимися к нему аргументами, либо выражение, которое получается из какого-либо

¹⁾ См. с. 94.

*) Символы авторами противопоставляются *переменным*. Так, предикатный символ — это термин некоторого *постоянного* предиката, а индивидуальный символ — имя некоторого *постоянного* индивида. — *Прим. перев.*

выражения перечисленных выше типов путем замены индивидуальной переменной именем какого-либо объекта — **и н д и в и д н ы м с и м в о л о м**.

Формулой мы будем называть выражение, которое либо является элементарной формулой, либо получается из элементарных формул с помощью логических знаков

$$\rightarrow, \&, \vee, \sim, \neg$$

исчисления высказываний.

Сразу же заметим, что понятие формулы в дальнейшем будет определенным образом обобщено. Однако мы хотели бы, начиная уже с этого места, использовать слово **ф о р м у л а** в качестве вполне определенного термина¹⁾ и в связи с этим мы будем называть переменные

$$A, B, C, \dots$$

ф о р м у л ь н ы м и п е р е м е н н ы м и.

Формульные переменные с присоединенными к ним индивидуальными переменными мы будем называть формульными переменными с а р г у м е н т а м и. Такие переменные будут играть роль предикатных переменных.

Внутри какой-либо формулы одна и та же формульная переменная может встречаться с различными аргументами: она будет считаться «одной и той же» в случае совпадения соответствующих заглавных латинских букв и числа аргументов. Вследствие этого соглашения формульные переменные с различным числом аргументов всегда будут рассматриваться как *различные переменные*.

Чтобы иметь возможность упоминать какую-либо формульную переменную с аргументами в отрыве от конкретных замещений ее аргументов, с которыми она встречается внутри тех или иных формул, мы введем понятие *именной формы переменной*. У именной формы в качестве аргументов будут фигурировать индивидуальные переменные, отличающиеся друг от друга (если их несколько) и от остальных переменных, входящих в рассматриваемые нами формулы.

Теперь мы можем сформулировать обобщенное *правило подстановки*. Операция подстановки, вообще говоря, будет заключаться в переходе от одной формулы к некоторой другой, отличающейся от исходной тем, что вместо определенной переменной всюду, где она встречается в исходной формуле, подставляется одно и то же выражение. Более точное определение этой операции для различных типов переменных может быть сформулировано следующим образом:

¹⁾ Наряду с этим мы будем без строгого определения употреблять термин **в ы р а ж е н и е** для обозначения произвольных знаковых комплексов нашей символики.

Вместо индивидуальной переменной может быть вновь подставлена либо индивидуальная переменная, либо индивидуальный символ.

Вместо формульной переменной без аргументов может быть подставлена любая формула.

Подстановка вместо формульной переменной с одним или несколькими аргументами производится таким образом, что сначала для именной формы этой переменной указывается некоторая формула $\mathfrak{A}$ с теми индивидуальными переменными, которые фигурируют в качестве аргументов в именной форме нашей переменной, а затем на каждом месте (в рассматриваемой формуле), где эта формульная переменная встречается с теми или иными аргументами, вместо нее подставляется та формула, которая получается из $\mathfrak{A}$, если вместо индивидуальных переменных именной формы подставить соответствующие аргументы этой формульной переменной.

Рассмотрим пример, поясняющий применение этого правила в случае формульной переменной с аргументами.

Пусть $\Theta(a, b)$ и $\Phi(a, b, c)$ — предикатные символы, и пусть нам дана формула

$$\mathfrak{A}(a, b) \& \Theta(a, c) \rightarrow A(c, b).$$

Из этой формулы формула

$$\Phi(a, a, b) \& \Theta(a, c) \rightarrow \Phi(a, c, b)$$

может быть получена в результате следующей подстановки. Для формульной переменной A с двумя аргументами берем именную форму $A(m, n)$ и будем подставлять вместо $A(m, n)$ формулу $\Phi(a, m, n)$. Тогда вместо $A(a, b)$ должно быть подставлено $\Phi(a, a, b)$, а вместо $A(c, b)$ — $\Phi(a, c, b)$, что и дает в результате искомую формулу.

К этим правилам подстановки мы добавляем наше старое правило, позволяющее брать в качестве исходной формулы любое тождественно истинное выражение логики высказываний (для краткости мы будем говорить тождественная формула), а также схему заключения

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Формальное исчисление, порождаемое этими правилами, мы проиллюстрируем с помощью ряда замечаний и примеров.

В качестве непосредственного следствия нашего обобщенного правила подстановки получается, что рассуждение по правилу силлогизма мы теперь можем распространить на формулы, содержащие индивидуальные переменные.

Так, из двух формул

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a),$$

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(a)$$

мы можем вывести формулу

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(a),$$

а из формул

$$\mathfrak{A}(a, b) \rightarrow \mathfrak{B}(a, b) \text{ и } \mathfrak{B}(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(a, b)$$

— формулу

$$\mathfrak{A}(a, b) \rightarrow \mathfrak{C}(a, b).$$

Тем же самым способом мы можем применить к выражениям с индивидуальными переменными и другие преобразования, порождаемые соответствующими правилами замены.

Рассмотрим следующий пример, в котором, в частности, применяется и правило подстановки вместо индивидуальных переменных.

Для числового предиката $<(a, b)$, « a меньше b », выполняются следующие две аксиомы¹⁾:

$$\sqsubset <(a, a),$$

$$<(a, b) \& <(b, c) \rightarrow <(a, c).$$

Из них требуется вывести, что

$$<(a, b) \rightarrow \sqsubset <(b, a).$$

По нашим правилам этот вывод может быть осуществлен следующим образом.

Подставим во вторую аксиому вместо c переменную a :

$$<(a, b) \& <(b, a) \rightarrow <(a, a).$$

С помощью правила разъединения посылок преобразуем эту формулу в

$$<(a, b) \rightarrow (<(b, a) \rightarrow <(a, a)).$$

Теперь возьмем тождественную формулу

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

и подставим

$$<(b, a)$$

вместо A и

$$<(a, a)$$

¹⁾ Здесь и далее, где это не будет вызывать недоразумений, а к с и о м а м и мы будем называть формулы, изображающие аксиомы.

вместо B . Это даст нам

$$(<(b, a) \rightarrow <(a, a)) \rightarrow (\neg <(a, a) \rightarrow \neg <(b, a)).$$

Эта формула вместе с полученной ранее по правилу силлогизма дает

$$<(a, b) \rightarrow (\neg <(a, a) \rightarrow \neg <(b, a)).$$

Затем по правилу перестановки посылок получается

$$\neg <(a, a) \rightarrow (<(a, b) \rightarrow \neg <(b, a)),$$

а эта формула вместе с аксиомой

$$\neg <(a, a)$$

по схеме заключения дает искомую формулу

$$<(a, b) \rightarrow \neg <(b, a).$$

Теперь ее можно применить к конкретным числам. Пусть, например, доказано, что

$$<(\sqrt{2}, \frac{3}{2}).$$

Тогда отсюда мы можем вывести формулу

$$\neg <(\frac{3}{2}, \sqrt{2}),$$

подставив сначала в полученную выше формулу $\sqrt{2}$ вместо a и $\frac{3}{2}$ вместо b , что даст нам формулу

$$<(\sqrt{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow \neg <(\frac{3}{2}, \sqrt{2}),$$

а затем применив к ней и к формуле

$$<(\sqrt{2}, \frac{3}{2})$$

схему заключения, что в итоге даст

$$\neg <(\frac{3}{2}, \sqrt{2}).$$

В рассмотренном нами примере формального вывода проступают некоторые черты отличия нашего формального метода от обычных содержательных рассуждений. Черты эти заключаются в следующем. Вместо всеобщих суждений о числах, которые справедливы для каждого отдельного числа, мы имеем здесь формулы с индивидуальными переменными; соответствующие формулы для конкретных чисел получаются из них в результате операции подстановки (в соответствии с правилом подстановки). Кроме

того, мы отклоняемся здесь от обычной формы гипотетических суждений. В самом деле, пусть, например,

$$\mathfrak{B}(a) \text{ и } \mathfrak{C}(a)$$

— два предиката, и пусть α обозначает предмет, могущий служить субъектом (аргументом) этих предикатов. Тогда, если имеется предложение

$$\text{«если } \mathfrak{B}(a), \text{ то } \mathfrak{C}(a)\text{»}$$

и если, кроме того, известно, что $\mathfrak{B}(\alpha)$ имеет место, по правилам содержательной логики мы можем отсюда непосредственно заключить об истинности $\mathfrak{C}(\alpha)$.

По нашему же методу мы сначала из формулы

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(a)$$

с помощью подстановки выводим

$$\mathfrak{B}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{C}(\alpha),$$

и только эта формула, взятая совместно с формулой $\mathfrak{B}(\alpha)$, позволяет нам получить по схеме заключения формулу $\mathfrak{C}(\alpha)$. Таким образом, этот шаг вывода следствия мы разлагаем на два: на подстановку и на применение нашей схемы заключения.

Это отклонение нашего метода от привычных способов рассуждений связано со смысловым различием между импликацией и гипотетическим суждением. Именно, формула

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(a),$$

которую мы используем для формализации гипотетического суждения

$$\text{«если } \mathfrak{B}(a), \text{ то } \mathfrak{C}(a)\text{»},$$

соответствует не непосредственно этому гипотетическому суждению, а утверждению о том, что при всяком значении a импликация $\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(a)$ является истинной. Хотя оба эти высказывания равнозначны в том смысле, что всякий раз, когда имеет место одно из них, имеет место и другое, все-таки содержание их не одинаково: в то время как гипотетическое суждение в случае истинности $\mathfrak{B}(a)$ для какого-либо объекта a выражает истинность $\mathfrak{C}(a)$ и потому от констатации $\mathfrak{B}(a)$ ведет непосредственно к $\mathfrak{C}(a)$, второе из этих утверждений доставляет нам некоторое высказывание о любом объекте a (из индивидуальной области) независимо от того, истинно ли $\mathfrak{B}(a)$, и это высказывание, будучи применено к α , позволяет сделать вывод об истинности $\mathfrak{C}(\alpha)$ лишь в соединении с высказыванием $\mathfrak{B}(\alpha)$.

Сказанное позволяет содержательно объяснить то разложение гипотетических умозаключений на два шага, которое происходит

в рамках нашего формального метода. С формальной стороны это разложение мотивируется тем, что при переходе от формулы

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(a)$$

к $\mathfrak{C}(a)$, совершающемся в силу сделанного допущения $\mathfrak{B}(a)$, происходят два преобразования: вместо переменной a появляется имя предмета α , а затем у импликации берется лишь ее второй член.

Оба эти формальным образом осуществляемые действия в нашем формализме выполняются последовательно, друг за другом. Благодаря этому правила формального вывода приобретают известную простоту и прозрачность.

§ 2. Связанные переменные и правила для кванторов всеобщности и существования

1. Недостаточность свободных переменных. Введение индивидуальных переменных и связанное с ним обобщение правил подстановки представляют собой лишь начало формализации логики предикатов. Для полной формализации нам потребуются, кроме того, специальные символы и правила, с помощью которых можно будет изобразить логические формы всеобщего и частного суждений, а также основанные на этих формах способы умозаключений.

Правда, для всеобщих суждений одно такое представление мы уже имеем. В самом деле, формула, зависящая от одной или нескольких индивидуальных переменных, соответствует некоторому всеобщему предложению, которое выразит ту мысль, что рассматриваемый нами предикат является истинным для каждого предмета (или для каждой пары, тройки, . . . предметов) из области значений рассматриваемых переменных.

Однако это представление оказывается недостаточным; действительно, выражение

$$\mathfrak{A}(a) \text{ или } \mathfrak{A}(a, b)$$

соответствует, в духе содержательного истолкования, всеобщему суждению лишь тогда, когда оно фигурирует в качестве отдельной формулы, и дело обстоит совсем иначе, если оно выступает как составная часть какой-либо другой формулы. Так, например, формуле

$$\neg \mathfrak{A}(a)$$

соответствует вовсе не отрицание всеобщего суждения, представленного формулой

$$\mathfrak{A}(a),$$

а утверждение о том, что отрицание $\mathfrak{A}$ имеет место для всякого предмета из области значений переменной a .

Действительно, с помощью подстановки мы можем из

$$\neg \mathfrak{A}(a)$$

получить

$$\neg \mathfrak{A}(a)$$

для любого значения a переменной a . Эту мысль можно пояснить еще и следующим образом. Суждение, соответствующее формуле $\neg \mathfrak{A}(a)$, вследствие наличия в нем переменной a должно быть всеобщим суждением и вследствие наличия отрицания оно должно быть общеотрицательным. Однако отрицание общеутвердительно-го суждения представляет собой не общеотрицательное суждение, а частноотрицательное.

Таким образом, мы пока еще не в состоянии выразить в нашем формализме отрицание всеобщего суждения.

Более того, у нас пока нет никакого способа выразить даже общеутвердительное суждение, стоящее в посылке гипотетического предложения.

Так, например, суждение

«если $\mathfrak{A}(a)$ справедливо для всех значений переменной a , то имеет место и $\mathfrak{B}$ »

мы не можем формально выразить посредством импликации

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}.$$

В самом деле, из этой импликации мы могли бы для любого значения a переменной a получить формулу

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B},$$

так что уже из произвольной формулы

$$\mathfrak{A}(a)$$

формула $\mathfrak{B}$ получалась бы по схеме заключения.

Это показывает, что формула

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}$$

соответствует вовсе не высказыванию о том, что $\mathfrak{B}$ имеет место в случае истинности $\mathfrak{A}$ для *всех* значений a . Напротив, она соответствует высказыванию о том, что $\mathfrak{B}$ имеет место в случае истинности $\mathfrak{A}$ для *какого-нибудь произвольного* значения переменной a .

Таким образом, наши нынешние формальные выразительные средства не дают возможности ни образовывать отрицания всеобщих суждений, ни вводить суждения этого типа в посылки импликаций.

С другой стороны, рассмотренный материал показывает, что представление частноутвердительного (экзистенциального) суждения в рамках имеющегося на данный момент формализма воз-

можно и в тех сочетаниях, в которых всеобщее суждение оказывается непредставимым. Действительно, отрицание частноутвердительного суждения «для некоторых значений a имеет место $\mathfrak{A}(a)$ » или, в более точной экзистенциальной формулировке, «существует значение переменной a , для которого имеет место $\mathfrak{A}(a)$ » равнозначно общеотрицательному суждению, соответствующему формуле $\neg \mathfrak{A}(a)$; а суждению с экзистенциальной посылкой «если существует значение a , для которого имеет место $\mathfrak{A}(a)$ » или, короче, «если $\mathfrak{A}(a)$ имеет место для некоторого значения a » соответствует формула $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}$.

Тем не менее для экзистенциального суждения как такового мы пока никакой формализации не имеем.

2. Введение связанных переменных; кванторы всеобщности и существования; правило переименования переменных; предотвращение неоднозначностей; обобщение понятия формулы и правила подстановки. Все сказанное приводит нас к необходимости ввести специальные символы для всеобщности и существования. В этом вопросе мы будем придерживаться (с незначительными отклонениями) символики, принятой в *Principia Mathematica* (уже в гл. I для изображения всеобщих и частных суждений мы пользовались знаками

$\forall x$ — квантор всеобщности,

$\exists x$ — квантор существования)¹⁾.

Относительно этой символики следует заметить, что и квантор всеобщности, и квантор существования всегда относятся к вполне определенному выражению, которому они предшествуют:

$\forall x \mathfrak{A}(x)$ (для всех x имеет место $\mathfrak{A}(x)$),

$\exists x \mathfrak{A}(x)$ (существует x , для которого имеет место $\mathfrak{A}(x)$).

Переменная, фигурирующая в таком кванторе и в прилегающем к нему выражении, аналогична переменной интегрирования или же индексу суммирования. Выражение

$\forall x \mathfrak{A}(x)$ или $\exists x \mathfrak{A}(x)$

от переменной x не зависит; эта переменная служит всего лишь для указания тех вхождений субъектов, к которым относится это «для всех x » или «существует x ».

Переменные, фигурирующие в кванторах всеобщности и существования, мы будем называть связанными и индивидуальными переменными. Они будут в корне отличаться от тех переменных, которые мы употребляли до сих пор и которые, в отличие от связанных, мы будем называть свободными переменными.

¹⁾ См. с. 26.

Чтобы различие между свободными и связанными переменными можно было проводить по их внешнему виду, мы для свободных индивидуальных переменных будем использовать буквы из начала и середины алфавита

$a, b, c, m, n, r, s,$

а для связанных переменных — последние буквы алфавита

$u, v, w, x, y, z.$

Правило подстановки мы будем применять только по отношению к свободным переменным¹⁾. Кроме того, мы запретим подставлять связанные переменные вместо свободных.

Теперь мы должны сформулировать правила, по которым мы будем обращаться со связанными переменными. Сначала в духе общего расширения нашей символики мы распространим имеющееся у нас понятие *формулы*. Это будет сделано таким образом, что к операциям, с помощью которых из элементарных формул строятся дальнейшие формулы — до сих пор в качестве таковых мы допускали лишь построения, использующие логические знаки исчисления высказываний²⁾, — мы дополнительно присоединим операции перехода от формулы

$\mathfrak{A}(a)$

к формулам

$\forall x \mathfrak{A}(x)$ и $\exists x \mathfrak{A}(x),$

так что если $\mathfrak{A}(a)$ есть формула, то

$\forall x \mathfrak{A}(x)$ и $\exists x \mathfrak{A}(x)$

мы также будем считать формулами. Вместо x здесь может фигурировать и какая-нибудь другая связанная переменная, например y . Заметим, что в соответствии с принятой процедурой перед выражением с несколькими свободными переменными можно в любом порядке поставить несколько следующих друг за другом кванторов всеобщности и существования. Так, например, исходя из формулы

$\mathfrak{A}(a, b, c),$

мы можем по очереди строить следующие формулы:

$\forall z \mathfrak{A}(a, b, z),$

$\exists y \forall z \mathfrak{A}(y, b, z),$

$\forall x \exists y \forall z \mathfrak{A}(y, x, z).$

¹⁾ См. с. 123—124.

²⁾ См. с. 123.

От этого многообразия комбинаций кванторов всеобщности и существования в первую очередь и зависит известная усложненность структуры исчисления предикатов. Эта усложненность, правда, начинает проявляться в полной мере лишь тогда, когда в рассмотрение вовлекаются предикаты с несколькими субъектами.

Следует также отметить еще одно ограничение, которое должно соблюдаться в процессе расстановки кванторов всеобщности и существования: строя из $\mathfrak{A}(a)$ выражение $\forall x \mathfrak{A}(x)$ или $\exists x \mathfrak{A}(x)$, мы получаем формулу лишь в том случае, когда связанная переменная x в формуле $\mathfrak{A}(a)$ еще не фигурирует.

Необходимость этого ограничения легко будет понять, если учесть аналогию, имеющуюся между связанными переменными и индексами суммирования. Пусть, например, нам дано арифметическое выражение вида

$$\sum_{n=1}^k \varphi(n, a),$$

где n — индекс суммирования, а a — свободная переменная. Если бы мы теперь захотели сумму

$$\sum_n \varphi(n, 1) + \sum_n \varphi(n, 2) + \dots + \sum_n \varphi(n, k)$$

снова записать с помощью знака суммирования, то для внешней суммы мы уже не смогли бы использовать переменную n в качестве индекса суммирования, так как иначе запись

$$\sum_{n=1}^k \sum_{n=1}^k \varphi(n, n)$$

допускала бы различные прочтения.

Так, например,

$$\sum_n \sum_n (n + 2n)^n,$$

с одной стороны, можно было бы толковать как

$$\sum_m \sum_n (m + 2n)^n,$$

но с равным успехом эту запись можно было бы истолковать и как

$$\sum_m \sum_n (n + 2m)^n.$$

Совершенно аналогичные двусмысленности возникли бы и в том случае, если бы мы в логической символике допустили выражения вроде

$$\forall x (\mathfrak{A}(x) \& \forall x \mathfrak{B}(x, x))$$

или

$$\forall x \exists x \mathfrak{A}(x, x).$$

Поэтому мы должны условиться, что выражение

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \text{ или } \exists x \mathfrak{A}(x)$$

мы будем считать формулой лишь тогда, когда в самой формуле $\mathfrak{A}(a)$, из которой это выражение получается навешиванием квантора всеобщности или соответственно существования, связанная переменная x не встречалась. Вместо всего этого можно было бы кратко сказать, что при построении формул не следует допускать «коллизий между связанными переменными».

Расширение понятия формулы автоматически приводит нас к некоторому расширению правила подстановки в том смысле, что мы теперь к числу тех формул, которые можно будет подставлять вместо формульных переменных, добавим и формулы, построенные с помощью кванторов всеобщности и существования, включив их тем самым в сферу действия исчисления высказываний.

Кроме того, правило подстановки вместо формульных переменных с аргументами мы теперь распространим и на тот случай, когда в рассматриваемой формуле на месте аргументов какой-либо формульной переменной (всех или некоторых из них) стоят связанные переменные.

Так, например, если вместо именной формы $A(r, s)$ мы будем производить подстановку формулы $\mathfrak{A}(r, s)$, то из формул

$$\forall x A(x, b) \rightarrow A(a, b)$$

получится формула

$$\forall x \mathfrak{A}(x, b) \rightarrow \mathfrak{A}(a, b).$$

Однако эта подстановка будет допустимой лишь тогда, когда $\forall x \mathfrak{A}(x, b)$ оказывается формулой, т. е. если x не фигурирует в $\mathfrak{A}(r, s)$.

Вообще, ограничение на подстановку, возникающее вследствие появления связанных переменных, исходит из требования о том, что в результате подстановки формула всегда должна переходить в формулу, т. е. из требования избегать коллизий между связанными переменными. Так, например, в формуле вида

$$\forall x (\mathfrak{A}(x) \& B \rightarrow \mathfrak{B}(x))$$

вместо переменной B нельзя подставить формулу $\forall x \mathfrak{A}(x)$, так как возникающее в результате такой подстановки выражение формулой уже не является.

Неудобства, возникающие вследствие этого ограничения, могут быть устранены с помощью специального правила переименования связанных переменных, которое мы все равно должны будем

выражения

$$A(a), A(b), \dots, A(f).$$

Тогда мы получим

$$\begin{aligned} & A(a) \& A(b) \& \dots \& A(f) \rightarrow A(a), \\ & \dots \dots \dots \\ & A(a) \& A(b) \& \dots \& A(f) \rightarrow A(f). \end{aligned}$$

Если мы теперь начнем толковать $\forall x A(x)$ как конъюнкцию, распространенную на все значения переменной x , то в соответствии с только что упомянутыми формулами мы для каждого значения c переменной a должны будем иметь

$$\forall x A(x) \rightarrow A(c).$$

Систему (вообще говоря, бесконечную), состоящую из этих формул, мы можем с учетом правила подстановки свести в одну формулу

$$(a) \quad \forall x A(x) \rightarrow A(a).$$

Таким образом, эту формулу для квантора всеобщности мы вводим в качестве аналога формул II 1), 2) для конъюнкции.

Совершенно тем же рассуждением мы получаем в качестве аналога формул III 1), 2) для дизъюнкции формулу

$$(b) \quad A(a) \rightarrow \exists x A(x).$$

Теперь осталось найти аналоги для формул II 3) и III 3). Сначала мы рассмотрим формулу II 3):

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C)).$$

Обобщением ее для случая конечного числа членов конъюнкции является формула

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \dots \rightarrow ((A \rightarrow K) \rightarrow (A \rightarrow B \& C \& \dots \& K)) \dots).$$

Подставим вместо

$$B, C, \dots, K$$

выражения

$$B(a), B(b), \dots, B(f),$$

где

$$a, b, \dots, f$$

суть значения переменной a . Тогда получится

$$\begin{aligned} (A \rightarrow B(a)) \rightarrow ((A \rightarrow B(b)) \rightarrow \dots \rightarrow ((A \rightarrow B(f)) \rightarrow \\ (A \rightarrow B(a) \& B(b) \& \dots \& B(f))) \dots). \end{aligned}$$

Эту многочленную импликацию, зависящую от указанных значений

$$a, b, \dots, f$$

переменной a , мы, вообще говоря, не можем распространить на всю область ее значений, так как у нас в распоряжении нет никакого формального выражения, изображающего «бесконечную импликацию»¹⁾.

Тем не менее мы сможем осуществить переход ко всей индивидуальной области, взяв вместо формулы II 3) соответственным образом выбранное правило, а именно уже упоминавшуюся ранее схему (§):

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C} \\ \hline \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \& \mathcal{C} \end{array}.$$

Если мы здесь вместо двучленной конъюнкции снова рассмотрим многочленную, распространенную на значения

$$a, b, \dots, f$$

переменной a , то получим схему

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(a) \\ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(b) \\ \dots \dots \dots \\ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(f) \\ \hline \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(a) \& \mathcal{B}(b) \& \dots \& \mathcal{B}(f) \end{array}.$$

Теперь в этой схеме уже можно будет произвести переход ко всей области значений переменной a . Именно, во-первых, в формуле

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(a) \& \mathcal{B}(b) \& \dots \& \mathcal{B}(f)$$

¹⁾ Можно было бы думать, что эту трудность удастся устранить посредством объединения всех посылок этой многочленной импликации в одну конъюнкцию. Это удалось бы в том случае, если бы вместо формулы II 3) мы отправлялись от формулы

$$(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C).$$

Этой формулы, однако, недостаточно для того, чтобы вместе с формулами II 1) и 2) неявным образом охарактеризовать конъюнкцию, как это видно из приведенного в предыдущей главе (на с. 108) доказательства независимости. Равным образом, для неявной характеристики распространенной на всю индивидуальную область конъюнкции было бы недостаточно взять для квантора всеобщности формулу

$$\forall x (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x)).$$

вместо имеющейся в ней конечной конъюнкции можно написать формулу

$$\forall x \mathfrak{B}(x).$$

(Конечно, для того чтобы $\forall x \mathfrak{B}(x)$ оказалось формулой, в $\mathfrak{B}(a)$ не должна входить переменная x , но этого всегда можно добиться путем предварительных переименований связанных переменных.) Систему посылок этого правила мы тоже сможем распространить на всю область значений переменной a , взяв вместо конечного списка формул

$$\begin{cases} \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a), \\ \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(b), \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(f) \end{cases}$$

формулу

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a),$$

которая для произвольного значения c переменной a позволяет вывести

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(c).$$

При этом, конечно, должно выполняться одно существенное условие: переменная a не должна встречаться в формуле $\mathfrak{A}$, потому что в противном случае выражение $\mathfrak{A}$ при подстановке вместо переменной a могло бы претерпевать какие-нибудь изменения. По тем же самым причинам и в $\mathfrak{B}(a)$ переменная a может фигурировать только на том месте или на тех местах, которые соответствуют выделенному аргументу; это условие выполняется отнюдь не всегда. Например, если равенство

$$a = b$$

мы записали сокращенно, обозначив его посредством $\mathfrak{B}(b)$, то в $\mathfrak{B}(a)$ зависимость от a будет касаться лишь правой части этого равенства, хотя переменная a фигурирует и в левой части его.

В соответствии со сказанным мы приходим к следующей схеме:

$$(\alpha) \quad \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x)}.$$

Однако схема эта может быть применена лишь в том случае, если формула

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)$$

содержит переменную a только на месте, соответствующем выделенному аргументу (мы для краткости говорим о «месте аргумента» и

тогда, когда в качестве аргумента указано несколько таких мест), а также если связанная переменная x не входит в $\mathfrak{B}(a)$.

Эта схема соответствует, конечно, не формуле II 3) для конъюнкции, а схеме (з), которая, как мы установили ранее ¹⁾, при аксиоматическом введении конъюнкции не может быть полноценным заменителем формулы II 3). Скорее, роль такой замены могла бы играть схема (з'):

$$\frac{\begin{array}{l} \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \\ \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}) \end{array}}{\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C} \& \mathfrak{D})}.$$

Если мы снова в этой схеме перейдем от двучленной конъюнкции к конъюнкции, распространенной на всю область значений переменной a , то для знака всеобщности у нас получится следующая схема:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(a))}{\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \forall x \mathfrak{C}(x))},$$

причем снова должно выполняться предварительное условие, состоящее в том, что переменная a в формуле

$$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(a))$$

должна встречаться только на местах, указанных в качестве аргумента, и что связанная переменная x не должна входить в формулу $\mathfrak{C}(a)$.

Однако можно показать, что эта схема может быть получена из приведенной выше схемы (α) в качестве *производного правила* ²⁾: это означает, что с помощью схемы (α) и применяемых нами правил исчисления высказываний мы можем в случае выполнения упомянутых выше условий из формулы

$$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(a))$$

получить формулу

$$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \forall x \mathfrak{C}(x)).$$

Для этого нам достаточно заменить по правилу соединения посылок ³⁾ исходную формулу формулой

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(a).$$

¹⁾ См. гл. III, с. 112.

²⁾ Более полно о роли, которую играют производные правила, см. на с. 144.

³⁾ См. с. 116.

Теперь схема (α) даст нам, ввиду сделанных предположений о характере вхождений переменных a и x , формулу

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \rightarrow \forall x \mathfrak{C}(x),$$

а эту последнюю можно будет по правилу разъединения посылок снова преобразовать в

$$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \forall x \mathfrak{C}(x)).$$

Ввиду того, что в основу наших рассуждений мы уже положили исчисление высказываний (в виде теории истинностных функций), нам нужно дать неявное описание не самой конъюнкции, а ее аналога — «конъюнкции, распространенной на индивидуальную область».

В связи с этим мы обойдемся схемой (α) и не будем вводить вместо нее в качестве исходного правила более сложную схему с двумя посылками в импликации.

По аналогии со схемой (α) для квантора всеобщности, для квантора существования мы сформулируем следующую схему:

$$(\beta) \quad \frac{\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{A}}{\exists x \mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}};$$

применение ее снова будет ограничено требованием относительно того, что переменная a должна встречаться в формуле $\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{A}$ только на местах, указанных в качестве аргумента, и что x не должно входить в $\mathfrak{B}(a)$.

Эта схема соответствует следующей схеме для дизъюнкции:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C} \end{array}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}},$$

которая, как мы установили ранее ¹⁾, в аксиоматической логике высказываний может играть роль полного заместителя формулы III 3).

Относительно формул (а), (b) и схем (α), (β), к которым мы пришли с помощью эвристических аналогий, можно и непосредственно констатировать, что в смысле перевода нашего формализма в содержательный план они соответствуют таким способам умозаключений, которые получаются на основе нашего понимания общеутвердительных и частноутвердительных суждений.

Формуле (а) содержательно соответствует заключение от общего к частному («dictum de omni»): «Если a — некоторый объект и для всех объектов x истинно $\mathfrak{A}(x)$, то истинно и $\mathfrak{A}(a)$ ».

¹⁾ См. с. 114—115.

Формуле (b) соответствует заключение от наличия некоторого свойства у определенного объекта к существованию объекта с этим свойством: «Если a — некоторый объект и истинно $\mathfrak{A}(a)$, то существует объект x , для которого истинно $\mathfrak{A}(x)$ ».

Не так уж непосредственно, но все же легко, из смысла слов «все» и «существует» извлекаются следующие способы умозаключений, содержательно соответствующие схемам (α) и (β):

«Если для всякого объекта a в случае истинности $\mathfrak{A}$ истинно $\mathfrak{B}(a)$, то в случае истинности $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}(x)$ будет истинным для всех объектов x ».

«Если для любого объекта a $\mathfrak{A}$ истинно, когда истинно $\mathfrak{B}(a)$, то $\mathfrak{A}$ истинно, если существует x , для которого истинно $\mathfrak{B}(x)$ ».

Под объектами здесь всякий раз понимаются объекты из участвующей в данном рассмотрении индивидуальной области.

Точности ради отметим, что формализация упомянутых четырех способов умозаключений с помощью указанных двух формул и двух схем становится действительной лишь в сочетании с правилом подстановки.

4. Окончательная формулировка правил исчисления предикатов; изображение форм категорических суждений; случай пустой индивидуальной области. Теперь мы получили наконец систему правил, с помощью которой, как будет показано, может быть произведена формализация всех обычных способов умозаключений, касающихся взаимосвязи между всеобщим и частным, а также соотношений между всеобщими и частными суждениями. Описанное таким образом исчисление может быть названо *исчислением предикатов* — причем мы допускаем, как это уже делалось и раньше, предикаты и с несколькими субъектами. Формулами исчисления предикатов мы будем называть только такие формулы, — в смысле определенного нами понятия формулы, — которые строятся лишь из переменных и логических знаков. Зато мы будем говорить о выводах средствами исчисления предикатов и в том случае, если в формулах вывода будут встречаться предикатные, а может быть, и индивидуальные символы. В выводе средствами исчисления предикатов, кроме тех формул, которые в исчислении предикатов вообще допускаются в качестве исходных, в этом качестве могут браться еще и некоторые другие формулы (аксиомы). Про заключительную формулу вывода мы будем тогда говорить, что она выведена из этих аксиом средствами исчисления предикатов.

Теперь еще раз коротко суммируем правила исчисления предикатов.

Прежде всего, у нас имеется *правило подстановки вместо формульных переменных*, содержание которого приобрело точный характер в результате точной формулировки понятия *форм* у-

лы; далее, у нас имеются *правило подстановки вместо свободных индивидуальных переменных* и *правило переименования связанных переменных*¹⁾.

В качестве *исходных формул* разрешается брать *тождественные формулы исчисления высказываний*. К ним мы добавляем основные формулы:

$$(a) \quad \forall x A(x) \rightarrow A(a)$$

и

$$(b) \quad A(a) \rightarrow \exists x A(x).$$

В качестве *схем*, позволяющих получать новые формулы из ранее полученных, у нас имеется, во-первых, наша первоначальная схема заключения

$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}},$$

а кроме того, две новые схемы:

$$(\alpha) \quad \frac{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(a)}{\mathcal{A} \rightarrow \forall x \mathcal{B}(x)}$$

и

$$(\beta) \quad \frac{\mathcal{B}(a) \rightarrow \mathcal{A}}{\exists x \mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A}}.$$

Обе они могут применяться лишь тогда, когда в первой формуле схемы переменная a встречается лишь на местах, указанных в качестве аргумента, а x не входит в $\mathcal{B}(a)$.

Заметим, что особое положение, которое в формулах (a), (b) и схемах (α), (β) переменная x занимает по отношению к другим связанным переменным, может быть компенсировано с помощью правила переименования связанных переменных.

Теперь постараемся понять, как с помощью применения перечисленных правил можно получить обычно применяемые способы умозаключений. А именно, как и в исчислении высказываний, мы при помощи *выводимых формул* изобразим логические законы, выражающие правила, по которым ведутся рассуждения.

Однако прежде мы вкратце покажем, как с помощью кванторов всеобщности и существования могут быть изображены формулы категорических суждений

«все $\mathcal{A}$ суть $\mathcal{B}$ », «некоторое $\mathcal{A}$ есть $\mathcal{B}$ »,

«ни одно $\mathcal{A}$ не есть $\mathcal{B}$ », «некоторое $\mathcal{A}$ не есть $\mathcal{B}$ ».

¹⁾ См. с. 123—124 и 130—133.

Здесь $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ суть предикаты с одним аргументом, и упомянутые четыре суждения в нашей символической формулируются следующим образом:

$\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x))$ («всякий объект, обладающий свойством $\mathcal{A}$, обладает также и свойством $\mathcal{B}$ »);

$\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \neg \mathcal{B}(x))$ («никакой объект, обладающий свойством $\mathcal{A}$, не может обладать свойством $\mathcal{B}$ »);

$\exists x (\mathcal{A}(x) \& \mathcal{B}(x))$ («существует объект, который одновременно обладает и свойством $\mathcal{A}$ и свойством $\mathcal{B}$ »);

$\exists x (\mathcal{A}(x) \& \neg \mathcal{B}(x))$ («существует объект, который обладает свойством $\mathcal{A}$, но не обладает свойством $\mathcal{B}$ »).

Относительно всеобщего суждения «все $\mathcal{A}$ суть $\mathcal{B}$ » мы заметим, что то, как оно представлено в нашем формализме, соответствует точке зрения, согласно которой такое суждение является истинным и тогда, когда ни один объект из индивидуальной области не обладает свойством $\mathcal{A}$. В самом деле, формула

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x))$$

выражает содержательное высказывание о том, что для всякого объекта a из этой индивидуальной области

$$\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{B}(a)$$

истинно, и так как импликация $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ в случае ложности $\mathcal{E}$ принимает значение «истина», то это высказывание выполняется и в том случае, если для всякого объекта a из индивидуальной области

$$\mathcal{A}(a)$$

ложно. Это отклонение от аристотелевского толкования всеобщего суждения, которое само по себе возражений не вызывает, делается нами из соображений простоты.

И хотя вследствие сказанного в качестве субъекта всеобщего суждения можно допускать и такие понятия, под которые не попадает ни один объект из индивидуальной области, все же оказывается целесообразным *пустую индивидуальную область из рассмотрения исключить*¹⁾.

¹⁾ Относительно допустимости пустых индивидуальных областей см. работу: Я с к о в с к и й (S. Jaśkowski). On the rules of supposition in formal logic. — *Studia logica* (Warszawa), 1934, N 1, p. 1—32, а также более поздние работы: К у а й н (W. V. Quine). Quantification and the empty domain. — *J. Symbolic Logic*, 1954, 19, p. 177 и след.; Ш н а й д е р (H. H. Schneider). Semantics of the Predicate Calculus with Identity and the Validity in the Empty Individual-Domain. — *Portug. Math.*, 1958, 17, № 3, p. 85—96. См. также библиографию в упомянутом сочинении Куайна.

Это связано, в частности, с тем, что из формул (а) и (b):

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a),$$

$$A(a) \rightarrow \exists x A(x)$$

с помощью правила силлогизма может быть выведена формула

$$\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x).$$

Однако на самом деле эта формула не согласуется с трактовкой $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ как конъюнкции и дизъюнкции, распространенных на всю индивидуальную область. Действительно, нульчленная конъюнкция в духе исчисления высказываний должна была бы считаться истинной, а нульчленная дизъюнкция — ложной¹⁾. Поэтому для случая пустой индивидуальной области формула

$$\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

была бы импликацией с истинной посылкой и ложным заключением и, следовательно, ложной.

§ 3. Выводимость

1. Некоторые производные правила. Переходя теперь к исследованию формальных выводов, мы начнем с составления специального списка производных правил. Установление производных правил служит для целей краткого и обозримого представления формальных выводов. Во всяком таком правиле формулируется итог какого-нибудь часто повторяющегося процесса, состоящего из ряда применений ранее упоминавшихся правил (*основных правил*), и вывод этого правила есть не что иное, как указание соответствующего процесса.

Несколько правил подобного рода для *исчисления высказываний* мы уже приводили в конце предыдущей главы. Правила эти получаются путем ряда применений правила, позволяющего взять в качестве исходной формулы любую тождественную формулу, схемы заключения и правила подстановки вместо формульных переменных. Применение этих правил может быть распространено на формулы в нашем расширенном смысле. Еще раз коротко перечислим эти правила:

1. Наши первоначальные правила замены 1 — 4²⁾.
2. Правила соединения, разъединения и перестановки посылок³⁾.
3. Правило контрапозиции.
4. Правила замены для эквивалентности.

¹⁾ См. с. 87.

²⁾ См. с. 79.

³⁾ Относительно пп. 2—6 см. с. 116 и далее.

5. Правила сокращения кратной посылки в импликации и присоединения произвольной посылки.

6. Правило силлогизма.

7. Схемы (з) и (т) для конъюнкции и дизъюнкции¹⁾.

8. Правило объединения двух взаимно обратных импликаций в эквивалентность²⁾.

9. Схема эквивалентности.

Что касается способа записи формул, то мы введем здесь дополнительное соглашение о том, что знаки $\sim$ и $\rightarrow$ разделяют сильнее, чем $\&$, $\vee$ и кванторы.

Приводимые ниже правила касаются действий с кванторами всеобщности и существования, а именно, в них будет идти речь о переходе от свободных переменных к связанным. При рассмотрении этих правил мы всякий раз в качестве свободной переменной будем брать a , а в качестве связанной — x . Особая роль этих переменных не вызывает никаких ограничений в дальнейших применениях. Действительно, в случае свободных переменных мы всегда можем произвести необходимое переименование применением правила подстановки, а для связанных переменных нами было специально введено правило их переименования. С помощью приводимых далее выводов мы сможем более отчетливо разобраться в существующем здесь положении вещей.

Общая оговорка для всех этих правил, как и для схем (α) и (β), заключается в том, что переменная a в исходной формуле не встречается нигде, кроме мест, указанных в качестве аргумента, и что те формулы, перед которыми будет проставляться квантор $\forall x$ или $\exists x$ — с заменой свободных переменных связанными, — переменной x не содержат. Это предварительное условие применимости упомянутых правил *не всегда будет оговариваться специально*.

Первое правило из числа тех, которые мы должны здесь упомянуть, мы уже встречали при разборе схемы (α). Оно формулируется следующим образом.

П р а в и л о (γ): От формулы

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}(a))$$

можно перейти к формуле

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \forall x \mathcal{C}(x)).$$

Это правило допускает, как легко видеть, обобщение на случай импликаций с более чем двумя посылками.

Тем самым схема (α) обобщается на случай импликации с двумя или более посылками. С другой стороны, любое выражение

¹⁾ См. с. 112, 115.

²⁾ Относительно пп. 8 и 9 см. с. 118, 119.

со свободными переменными может быть связано квантором всеобщности и в том случае, если перед этим выражением не стоит вообще ни одной посылки, т. е. имеет место следующее

П р а в и л о (γ'): От

$$\mathfrak{A}(a)$$

можно перейти к

$$\forall x \mathfrak{A}(x).$$

Это делается таким образом, что мы сначала присоединяем к формуле $\mathfrak{A}(a)$ посылку $(C \rightarrow C)$, затем к получившейся формуле

$$(C \rightarrow C) \rightarrow \mathfrak{A}(a)$$

мы применяем схему (α) и получаем

$$(C \rightarrow C) \rightarrow \forall x \mathfrak{A}(x);$$

эта формула вместе с тождественной формулой $(C \rightarrow C)$ по схеме заключения дает нам формулу $\forall x \mathfrak{A}(x)$.

Если мы захотим, наоборот, перейти от формулы $\forall x \mathfrak{A}(x)$ к $\mathfrak{A}(a)$, то для этого будет достаточно взять какую-нибудь не входящую в $\forall x \mathfrak{A}(x)$ свободную переменную c , подставить в формулу (а) вместо именной формы $A(c)$ этой формульной переменной формулу $\mathfrak{A}(c)$ ¹⁾, так что получится

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a),$$

и затем применить схему заключения.

П р а в и л о (δ): Из формулы

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a)$$

можно получить формулы

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x)$$

и

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \exists x \mathfrak{B}(x).$$

Первый переход осуществляется следующим образом.

Из формулы (а) подстановкой $\mathfrak{A}(c)$ вместо $A(c)$ мы получаем формулу

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a);$$

вместе с исходной формулой по правилу силлогизма она дает нам

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(a),$$

¹⁾ В дальнейшем подстановка вместо именной формы $A(c)$ будет для краткости называться подстановкой «вместо $A(c)$ ».

а отсюда по схеме (α) получается формула

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x).$$

Совершенно аналогичным образом мы можем получить и формулу

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \exists x \mathfrak{B}(x);$$

мы только должны будем вместо формулы (а) применить формулу (b), в которой теперь вместо $A(c)$ должно быть подставлено $\mathfrak{B}(c)$, а вместо схемы (α) мы должны будем применить схему (β).

Из правила (δ) мы можем легко получить еще одно правило:

П р а в и л о (δ'): Из формулы

$$\mathfrak{A}(a) \sim \mathfrak{B}(a)$$

можно получить формулы

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \sim \forall x \mathfrak{B}(x)$$

и

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \sim \exists x \mathfrak{B}(x).$$

С этой целью достаточно разложить заданную эквивалентность и обе искомые на импликации и применить к ним правило (δ).

2. Вывод некоторых формул. Теперь перейдем к выводу некоторых формул исчисления предикатов.

Прежде всего отметим, что ранее нами уже была выведена Формула (1):

$$\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x).$$

Формула (2):

$$\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x).$$

Расцепим эту эквивалентность на две импликации:

$$(2a) \quad \neg \forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x),$$

$$(2b) \quad \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x);$$

достаточно будет вывести обе эти формулы.

(2a) мы получим следующим образом. В формулу (b)

$$A(a) \rightarrow \exists x A(x)$$

мы подставим $\neg A(c)$ вместо $A(c)$; тогда получится

$$\neg A(a) \rightarrow \exists x \neg A(x),$$

а отсюда по правилу контрапозиции —

$$\neg \exists x \neg A(x) \rightarrow A(a).$$

Теперь схема (α) позволяет получить

$$\neg \exists x \neg A(x) \rightarrow \forall x A(x),$$

откуда, еще раз применяя контрапозицию, получаем формулу (2а).

Еще проще получается вывод формулы (2b). Из формулы (а)

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a)$$

контрапозицией мы получаем

$$\neg A(a) \rightarrow \neg \forall x A(x),$$

и схема β непосредственно дает нам искомую формулу (2b).

Из формулы (2) переходом от $\neg \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ к $\neg \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ по правилам замены для эквивалентности мы получим следующую формулу: *Формула (2')*:

$$\neg \exists x \neg A(x) \sim \forall x A(x).$$

Формула (3):

$$\neg \forall x \neg A(x) \sim \exists x A(x).$$

Эту формулу мы получим с использованием формулы (2). Подставим сначала в тождественную формулу

$$\neg \neg A \sim A$$

$A(a)$ вместо A , в результате чего получится

$$\neg \neg A(a) \sim A(a);$$

отсюда по правилу (δ') получится

$$\exists x \neg \neg A(x) \sim \exists x A(x).$$

С другой стороны, из формулы (2) подстановкой $\neg A(a)$ вместо $A(a)$ мы получим

$$\neg \forall x \neg A(x) \sim \exists x \neg \neg A(x).$$

Из этих двух формул по схеме для эквивалентности получается

$$\neg \forall x \neg A(x) \sim \exists x A(x),$$

т. е. формула (3).

Из (3) переходом от $\neg \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ к $\neg \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ получается *Формула (3')*:

$$\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x).$$

Формула (4):

$$\forall x (A \rightarrow B(x)) \sim (A \rightarrow \forall x B(x)).$$

Снова, разложим эту эквивалентность на две импликации:

$$(4a) \quad \forall x (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$$

и

$$(4b) \quad (A \rightarrow \forall x B(x)) \rightarrow \forall x (A \rightarrow B(x)).$$

Чтобы вывести (4а), подставим в формулу (а) вместо A (с) формулу $A \rightarrow B$ (с):

$$\forall x (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow B(a)).$$

Отсюда по правилу (γ) мы непосредственно получим (4а).

Чтобы получить (4b), мы будем исходить из формулы

$$\forall x B(x) \rightarrow B(a),$$

получающейся из формулы (а) в результате подстановки. Подставив в тождественную формулу

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$\forall x B(x)$ вместо B и $B(a)$ вместо C и применив затем схему заключения, мы получаем

$$(A \rightarrow \forall x B(x)) \rightarrow (A \rightarrow B(a)),$$

а отсюда по схеме (α) получается формула (4b).

Формула (5):

$$\forall x (A \vee B(x)) \sim (A \vee \forall x B(x)).$$

Эту формулу мы получим с помощью формулы (4) следующим образом. Из тождественной формулы

$$(A \vee B) \sim (\neg A \rightarrow B)$$

мы получим, с одной стороны, подставив $\forall x B(x)$ вместо B , формулу

$$(A \vee \forall x B(x)) \sim (\neg A \rightarrow \forall x B(x)),$$

а с другой стороны, подставив $B(a)$ вместо B и применив правило (δ'), формулу

$$\forall x (A \vee B(x)) \sim \forall x (\neg A \rightarrow B(x)).$$

Далее, подставив $\neg A$ вместо A в формулу (4), мы получим

$$\forall x (\neg A \rightarrow B(x)) \sim (\neg A \rightarrow \forall x B(x)).$$

Три полученные формулы по схеме эквивалентности дают (5).

Формула (6):

$$\forall x (A \& B(x)) \sim A \& \forall x B(x).$$

Снова, эта эквивалентность распадается на две импликации:

$$(6a) \quad \forall x (A \& B(x)) \rightarrow A \& \forall x B(x)$$

и

$$(6b) \quad A \& \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A \& B(x)).$$

Чтобы вывести формулу (6а), мы будем исходить из формулы

$$\forall x (A \& B(x)) \rightarrow A \& B(a),$$

которая получается подстановкой из формулы (а). Далее, подставим в тождественную формулу

$$A \& B \rightarrow A$$

$B(a)$ вместо B . Полученная формула вместе с предыдущей по правилу силлогизма дает

$$\forall x (A \& B(x)) \rightarrow A.$$

С другой стороны, применяя правило (δ) к формуле

$$A \& B(a) \rightarrow B(a),$$

получающейся подстановкой из тождественной формулы

$$A \& B \rightarrow B,$$

мы получим формулу

$$\forall x (A \& B(x)) \rightarrow \forall x B(x).$$

Теперь формула (6а) получается из этих двух формул по схеме (з) для конъюнкции.

Чтобы получить (6b), мы будем исходить из формулы

$$\forall x B(x) \rightarrow B(a),$$

возникающей из формулы (а) в результате подстановки. Воспользовавшись тождественной формулой

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow A \& C),$$

мы с помощью схемы заключения получим

$$A \& \forall x B(x) \rightarrow A \& B(a),$$

а теперь искомая формула (6b) может быть получена по схеме (α).

Формула (7):

$$\forall x (A(x) \& B(x)) \sim \forall x A(x) \& \forall x B(x).$$

Разложим эту эквивалентность на две импликации:

$$(7a) \quad \forall x (A(x) \& B(x)) \rightarrow \forall x A(x) \& \forall x B(x)$$

и

$$(7b) \quad \forall x A(x) \& \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \& B(x)).$$

(7a) получается следующим образом: из тождественной формулы

$$A \& B \rightarrow A,$$

подставив $A(a)$ и $B(a)$ вместо A и B соответственно и применив правило (δ), мы получим формулу

$$\forall x (A(x) \& B(x)) \rightarrow \forall x A(x);$$

используя тождественную формулу

$$A \& B \rightarrow B,$$

мы аналогичным образом получим формулу

$$\forall x (A(x) \& B(x)) \rightarrow \forall x B(x).$$

Эти две формулы по схеме (з) для конъюнкции дают нам формулу (7а).

Для вывода формулы (7b) подставим в формулу

$$A \& B \rightarrow A$$

$\forall x A(x)$ вместо A и $\forall x B(x)$ вместо B . Тогда получится

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \rightarrow \forall x A(x).$$

Эта формула вместе с формулой (а) по правилу силлогизма дает

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \rightarrow A(a).$$

Совершенно аналогично получается

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \rightarrow B(a).$$

Эти две формулы по схеме (з) для конъюнкции дают нам формулу

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \rightarrow A(a) \& B(a),$$

откуда по схеме (α) получается формула (7b).

У каждой из формул (5), (6), (7) для квантора всеобщности имеется ее двойник в виде некоторой формулы для квантора существования. Этот двойник получается из исходной формулы на основе некоторого обобщения *двойственности*, обнаружившейся ранее в исчислении высказываний.

Составим следующую таблицу двойственности:

$\&$	$\vee$
$\forall x$	$\exists x$
$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$	$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$

Эквивалентность является двойственной по отношению к самой себе.

Эта таблица дает нам следующее соответствие двойственности между формулами и схемами:

$A \& B \rightarrow A$	$A \rightarrow A \vee B$
$A \& B \rightarrow B$	$B \rightarrow A \vee B$
схема (з) для конъюнкции	схема (t) для дизъюнкции
формула (а)	формула (b)
схема (α)	схема (β)

Двойственны по отношению к самим себе: правило силлогизма, разложение эквивалентности на две импликации, а также правила (δ) и (δ').

При выводе формул (6) и (7), кроме только что перечисленных формул и правил, используется лишь переход от

$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C} \quad \text{к} \quad \mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \& \mathfrak{C}.$$

У этого перехода также имеется двойственный аналог, а именно переход от

$$\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B} \quad \text{к} \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}.$$

Тем самым, осуществив двойственный перевод выводов формул (6) и (7), мы получим следующие, двойственные им формулы: *Формула (8):*

$$\exists x (A \vee B(x)) \sim (A \vee \exists x B(x))$$

и
Формула (9):

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \sim (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)).$$

Двойственной по отношению к формуле (5) является *Формула (10):*

$$\exists x (A \& B(x)) \sim (A \& \exists x B(x))$$

Правда, вывод этой формулы мы не можем получить двойственным переводом вывода формулы (5), так как в нем используется правило (γ), для которого у нас нет никакого двойственного аналога. Тем не менее формулу (10) мы можем получить из формулы (5) следующим образом.

Беря отрицание обеих частей формулы (5), мы получаем формулу

$$\neg \forall x (A \vee B(x)) \sim \neg (A \vee \forall x B(x)).$$

Подставим в нее $\neg A$ вместо A , $\neg B(a)$ вместо $B(a)$ и преобразуем правую часть по правилу замены для отрицания; таким образом мы получим формулу

$$(10a) \quad \neg \forall x (\neg A \vee \neg B(x)) \sim (A \& \neg \forall x \neg B(x)).$$

Из формулы (2) подстановкой мы получим

$$\neg \forall x (\neg A \vee \neg B(x)) \sim \exists x \neg (\neg A \vee \neg B(x)),$$

а из тождественной формулы

$$\neg (\neg A \vee \neg B) \sim A \& B,$$

подставив $B(a)$ вместо B и применив правило (δ'), получим

$$\exists x \neg (\neg A \vee \neg B(x)) \sim \exists x (A \& B(x));$$

объединив обе полученные импликации, мы получим

$$(10b) \quad \neg \forall x (\neg A \vee \neg B(x)) \sim \exists x (A \& B(x)).$$

Далее, из формулы (3) подстановкой $B(a)$ вместо $A(a)$ мы получим формулу

$$\neg \forall x \neg B(x) \sim \exists x B(x),$$

а отсюда, используя тождественную формулу

$$(B \sim C) \rightarrow (A \& B \sim A \& C),$$

получим

$$(10c) \quad (A \& \neg \forall x \neg B(x)) \sim (A \& \exists x B(x)).$$

Объединив эквивалентности (10a), (10b) и (10c), мы по схеме для эквивалентности получим искомую формулу (10).

Формула (11):

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)).$$

При выводе этой формулы мы будем исходить из формулы

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(a) \rightarrow B(a)),$$

которая получается подстановкой в формулу (a). Перестановка посылок дает формулу

$$A(a) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow B(a)),$$

а эта формула вместе с формулой (a) по правилу силлогизма дает

$$\forall x A(x) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow B(a)).$$

Теперь применим правило (γ) и еще раз переставим посылки; в результате мы получим формулу (11).

Формула (12):

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)).$$

Этот вывод мы снова начнем с формулы

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(a) \rightarrow B(a)),$$

из которой по правилу объединения посылок получается

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \& A(a) \rightarrow B(a).$$

Эта формула вместе с формулой

$$B(a) \rightarrow \exists x B(x),$$

получающейся подстановкой из формулы (b), дает нам по правилу силлогизма

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \& A(a) \rightarrow \exists x B(x),$$

откуда по правилам разъединения и перестановки посылок получается

$$A(a) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \exists x B(x)).$$

Теперь применим схему (β); переставив еще раз посылки, получим искомую формулу (12).

В формулах, которые мы выводили до сих пор, формульные переменные встречались всегда *не более чем с одним аргументом*, а фигурировавшие в них кванторы всеобщности и существования всегда стояли отдельно друг от друга. Формулы, следующие далее, будут касаться того случая, когда упомянутые кванторы появляются в паре.

Формула (13):

$$\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y).$$

Из обеих импликаций, на которые распадается эта эквивалентность, нужно вывести только одну:

$$(13a) \quad \forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \forall x A(x, y),$$

так как вторая получается из нее переименованием связанных переменных и подстановкой $A(b, a)$ вместо $A(a, b)$. Для того чтобы получить (13a), мы будем исходить из формулы

$$\forall y A(a, y) \rightarrow A(a, b),$$

которая получится из формулы (а), если в ней вместо именной формы $A(c)$ подставить формулу $A(d, c)$, что даст

$$\forall x A(d, x) \rightarrow A(d, a);$$

а затем здесь надо подставить b вместо a , далее, a вместо d и, наконец, переименовать переменную x в y .

Применение правила (δ) даст нам

$$\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x A(x, b).$$

Теперь снова подставим a вместо b и переименуем в правой части переменную x в z ; тогда получится

$$\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall z A(z, a);$$

применив схему (α), мы получим формулу

$$\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x \forall z A(z, x).$$

Теперь, чтобы получить (13a), достаточно переименовать переменные в правой части, а именно: сначала x в y , а затем z в x .

Формула (14):

$$\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x A(x, x).$$

Как и при выводе формулы (13a), сначала получим формулу

$$\forall y A(a, y) \rightarrow A(a, b).$$

Затем подставим в нее a вместо b :

$$\forall y A(a, y) \rightarrow A(a, a).$$

Теперь, применив правило (δ), получим формулу (14).

Можно построить двойственные переводы выводов формул (13) и (14), и это даст нам следующие две формулы:

(Формула 13'):

$$\exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y)$$

и

(Формула 14'):

$$\exists x A(x, x) \rightarrow \exists x \exists y A(x, y).$$

(Формула 15a):

$$\forall x \forall y (A(x) \& B(y)) \sim (\forall x A(x) \& \forall y B(y)).$$

Эту формулу мы получим, воспользовавшись формулой (6); сначала мы переименуем в ее обеих частях x в y :

$$\forall y (A \& B(y)) \sim A \& \forall y B(y).$$

Теперь подставим $A(a)$ вместо A и переставим в правой части члены конъюнкции; это даст нам

$$\forall y (A(a) \& B(y)) \sim \forall y B(y) \& A(a),$$

а затем, применив правило (δ'), получим

$$\forall x \forall y (A(x) \& B(y)) \sim \forall x (\forall y B(y) \& A(x)).$$

С другой стороны, из формулы (6), подставляя сначала C вместо A , затем $A(a)$ вместо $B(a)$ и, наконец, $\forall y B(y)$ вместо C , мы получим

$$\forall x (\forall y B(y) \& A(x)) \sim \forall y B(y) \& \forall x A(x),$$

откуда, переставив в правой части члены конъюнкции, получим формулу (15a).

Совершенно тем же способом, каким мы вывели формулу (15a), можно вывести формулы, получающиеся из (15a) путем замены кванторов $\forall x, \forall y$ одним из наборов $\exists x, \exists y$, или $\forall x, \exists y$, или $\exists x, \forall y$, а также и те четыре формулы, которые получаются из них, если конъюнкцию заменить дизъюнкцией. Для вывода, наряду с формулой (6), необходимо привлечь формулы (10), (5) и (8) и воспользоваться правилом (δ') с квантором всеобщности или же с квантором существования, в зависимости от обстоятельств. Все эти восемь формул мы будем называть «формулами (15)».

Перечислим — без указания вывода — еще ряд формул:

$$(16a) \quad \forall x (A(x) \rightarrow B) \sim (\exists x A(x) \rightarrow B),$$

$$(16b) \quad \exists x (A(x) \rightarrow B) \sim (\forall x A(x) \rightarrow B),$$

$$(17a) \quad \forall x (A(x) \sim B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \sim \forall x B(x)),$$

$$(17b) \quad \forall x (A(x) \sim B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \sim \exists x B(x)),$$

$$(18) \quad \exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y).$$

Наметим также вкратце выводы двух формул, представляющих собой известные аристотелевские фигуры силлогизмов *barbara* и *darii*.

Формула (19):

$$\forall x (B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow C(x))).$$

Формула (20):

$$\forall x (B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow (\exists x (A(x) \& B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \& C(x))).$$

Для вывода формулы (19) мы будем исходить из тождественной формулы

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Подставим в нее $A(a)$ вместо A , $B(a)$ вместо B , $C(a)$ вместо C ; затем, применив правило (δ), получим

$$\forall x (B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow \forall x ((A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(x) \rightarrow C(x))).$$

С другой стороны, из формулы (11) подстановкой получается

$$\forall x ((A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(x) \rightarrow C(x))) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow C(x)));$$

полученные формулы в сочетании друг с другом дают по правилу силлогизма искомую формулу (19). Совершенно аналогично протекает и вывод формулы (20); единственно лишь вместо использованной выше тождественной формулы нам нужно будет взять другую формулу:

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow A \& C),$$

а вместо формулы (11) использовать формулу (12).

§ 4. Вопросы систематики

1. Понятия Γ -тождественной формулы и формулы, тождественной в конечном; дедуктивная замкнутость совокупности Γ -тождественных формул; непротиворечивость исчисления предикатов; вопросы полноты. Обилие представленных здесь формул не требует для своего запоминания никаких особых усилий со сто-

роны памяти, поскольку эти формулы выражают всего лишь ту мысль, что с обобщенными конъюнкциями и дизъюнкциями, которые изображаются кванторами всеобщности и существования, можно обращаться в точности так же, как и с обычными конъюнкциями и дизъюнкциями.

Эту мысль можно сделать особенно отчетливой, если отнести формулы (1) — (20) к индивидуальной области, состоящей только из двух индивидов (мы обозначим их символами 1 и 2).

Будем вместо $A(1)$, $A(2)$, $B(1)$, $B(2)$ и т. д. писать

$$A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$$

а вместо $A(1,1)$, $A(1,2)$, ...

$$A_{11}, A_{12}, \dots$$

Тогда формулы (1) — (20) перейдут, как легко убедиться, в тождественные формулы исчисления высказываний, в которых $A_1, A_2, B_1, B_2, A_{11}, A_{12}, \dots$ будут играть роль независимых формульных переменных. Например, формула (2) перейдет в формулу

$$\neg (A_1 \& A_2) \sim \neg A_1 \vee \neg A_2$$

которая соответствует правилу замены для отрицания; формула (5) перейдет в

$$(A \vee B_1) \& (A \vee B_2) \sim A \vee (B_1 \& B_2),$$

которая является одной из формул закона дистрибутивности; формула (7) перейдет в

$$(A_1 \& B_1) \& (A_2 \& B_2) \sim (A_1 \& A_2) \& (B_1 \& B_2);$$

формула (11) в

$$(A_1 \rightarrow B_1) \& (A_2 \rightarrow B_2) \rightarrow (A_1 \& A_2 \rightarrow B_1 \& B_2),$$

а формула (14) в

$$(A_{11} \& A_{12}) \& (A_{21} \& A_{22}) \rightarrow (A_{11} \& A_{22}).$$

Этот факт не должен нас удивлять. Ведь формулируя нашу систему основных правил, мы выбрали формулы и схемы для кванторов всеобщности и существования как раз таким образом, чтобы они получались из формул и правил для конъюнкции и дизъюнкции путем перехода от конечного числа членов к некоторому продолжению на произвольную, конечную или бесконечную, индивидуальную область. Поэтому, если мы применим формулы исчисления предикатов к индивидуальной области с заданным конечным числом индивидов, то эффект произведенного предельного перехода ликвидируется и мы снова вернемся к формулам исчисления высказываний.

Это рассуждение, вместе с его итогом, мы хотели бы сформулировать более точно. С этой целью мы введем понятие *f-тождественной формулы* для конечного, отличного от нуля числа *f*.

Формулу исчисления предикатов мы будем называть *f-тождественной*, если она, будучи естественным образом проинтерпретирована в индивидуальной области, состоящей из *f* объектов, при любой подстановке вместо входящих в нее свободных индивидуальных переменных (если таковые имеются) переходит в тождественную формулу исчисления высказываний.

Эта интерпретация предикатных формул осуществляется следующим образом. Рассмотрим *f*-элементную индивидуальную область, элементы которой обозначены цифрами

$$1, 2, \dots, f.$$

Выражение $\forall x \mathcal{A}(x)$ будем понимать как конъюнкцию

$$\mathcal{A}(1) \& \mathcal{A}(2) \& \dots \& \mathcal{A}(f).$$

а $\exists x \mathcal{A}(x)$ — как дизъюнкцию

$$\mathcal{A}(1) \vee \mathcal{A}(2) \vee \dots \vee \mathcal{A}(f).$$

Результирующая формула должна быть тождественной в том смысле, что всевозможные элементарные формулы, встречающиеся в ней, такие, например, как

$$A, A(1), A(1, 2), B(2, 3), \dots,$$

должны рассматриваться как независимые формульные переменные. При подстановке вместо свободных индивидуальных переменных в качестве их допустимых значений должны рассматриваться только индивиды

$$1, 2, \dots, f;$$

в случае, если формула содержит только связанные индивидуальные переменные, никакой подстановки производить не требуется.

Рассмотрим в качестве примера формулу

$$\forall x A(x) \vee \neg A(a).$$

Она является 1-тождественной, но не 2-тождественной. Действительно, если рассмотреть эту формулу в одноэлементной индивидуальной области, то получится формула

$$A(1) \vee \neg A(1),$$

которая является тождественно истинной, в то время как в двухэлементной индивидуальной области получаются две формулы:

$$(A(1) \& A(2)) \vee \neg A(1)$$

и

$$(A(1) \& A(2)) \vee \neg A(2),$$

которые обе не являются тождественно истинными. Точно таким же образом мы убеждаемся, что формула

$$\forall x A(x) \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x)) \vee \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x))$$

является 1-тождественной и 2-тождественной, но не 3-тождественной, и что формула

$$\forall x A(x) \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x)) \vee \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee C(x)) \vee \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg C(x))$$

является 1-, 2- и 3-тождественной, но не 4-тождественной.

Следуя закону построения этих формул, можно для всякого числа *f* указать такую формулу, которая будет *f*-тождественной для всякого числа *l* от 1 до *f* включительно, но (*f* + 1)-тождественной не будет.

Таким образом, мы видим, что для каждого числа *f* имеются такие формулы, которые являются *f*-тождественными, но не (*f* + 1)-тождественными. Но с другой стороны, мы легко можем убедиться, что всякая (*f* + 1)-тождественная формула является и *f*-тождественной. Действительно, формула $\mathcal{A}'$, которая получается при интерпретации некоторой формулы $\mathcal{A}$ в индивидуальной области

$$1, 2, \dots, f,$$

может быть построена на основе формулы $\mathcal{A}$, получающейся при интерпретации $\mathcal{A}$ в индивидуальной области

$$1, 2, \dots, f + 1,$$

следующим образом: мы всюду вместо аргумента *f* + 1 проставляем 1, а затем повторяющиеся конъюнктивные и дизъюнктивные члены сокращаем до одного. Если $\mathcal{A}$ является (*f* + 1)-тождественной формулой, то $\mathcal{A}'$ будет тождественно принимать значение «истина», когда все входящие в нее элементарные формулы мы будем рассматривать как независимые формульные переменные. Замена аргумента *f* + 1 аргументом 1 (например, замена $A(f + 1)$ посредством $A(1)$, $B(2, f + 1)$ посредством $B(2, 1)$ и т. д.) равнозначна ряду подстановок вместо формульных переменных. В результате этих подстановок из тождественной формулы $\mathcal{A}$ снова получится некоторая тождественная формула; вычеркивание повторяющихся членов также представляет собой допустимое преобразование. Поэтому формула $\mathcal{A}'$ тоже является тождественно истинной, а значит, $\mathcal{A}$ является *f*-тождественной формулой.

Таким образом, $(f + 1)$ -тождественные формулы представляют собой собственную часть совокупности f -тождественных формул.

Если какая-либо формула является f -тождественной для любого числа f , то мы будем говорить, что она является *тождественной в конечном*.

Следует обратить внимание на то, что понятие формулы, тождественной в конечном, не дает нам в руки никакого критерия, с помощью которого мы могли бы для произвольной заданной формулы исчисления предикатов выяснить, является она тождественной в конечном или же нет.

Имеют место следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. *Всякая формула исчисления предикатов, выводимая в соответствии с нашими основными правилами, является тождественной в конечном.*

Т е о р е м а 2. *Совокупность f -тождественных формул является дедуктивно замкнутой в том смысле, что при добавлении к исходным формулам исчисления предикатов новых f -тождественных формул снова оказываются выводимыми только f -тождественные формулы¹⁾.*

Доказательство этих утверждений получается из рассмотрения системы наших основных правил путем установления следующих фактов:

а) Тождественные формулы исчисления высказываний, а также формулы (а) и (б) — т. е. все исходные формулы исчисления предикатов — являются тождественными в конечном.

б) Путем подстановки, в которой не участвуют предикатные и индивидуальные символы, из f -тождественной формулы получается снова f -тождественная.

в) Применение схем (α) и (β) к f -тождественным формулам снова дает формулы с тем же самым свойством.

г) Если обе формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ являются f -тождественными, то $\mathcal{A}$ также является f -тождественной.

Следует обратить внимание на то, что утверждения б), в) и г), поскольку они верны для произвольного числа f , останутся верными и в том случае, если мы в них вместо f -тождественности будем говорить о тождественности в конечном.

В качестве специального следствия из теорем 1 и 2 вытекает, что с помощью наших основных правил невозможно вывести никакие две формулы $\mathcal{A}$ и $\neg \mathcal{A}$, из которых одна является отрицанием

¹⁾ Эта теорема недавно получила существенное дополнение. Вайсберг (W a j s b e r g M. Untersuchungen über den Funktionenkalkül für endliche Individuenbereiche. — Math. Ann., 1933, 108, № 2) показал, что при добавлении к исходным формулам исчисления предикатов любой f -тождественной, но не $(f + 1)$ -тождественной формулы выводимыми оказываются уже все f -тождественные формулы.

другой. Это верно даже в следующей усиленной форме: пусть f — фиксированное конечное число; добавляя к исходным формулам произвольные f -тождественные формулы, мы не сможем добиться того, чтобы выводимыми оказались две формулы $\mathcal{A}$ и $\neg \mathcal{A}$. Действительно, иначе $\mathcal{A}$ и $\neg \mathcal{A}$ одновременно оказались бы f -тождественными. Но отрицание любой f -тождественной формулы в случае f -элементной индивидуальной области тождественно принимает значение «ложь» и, следовательно, не может быть f -тождественным.

Другое следствие касается тех формул исчисления предикатов, которые не содержат связанных переменных, т. е. формул, построенных с помощью связок исчисления высказываний из формульных переменных без аргументов или со свободными индивидуальными переменными в качестве аргументов.

Различные (т. е. различные по внешнему виду) элементарные формулы, из которых построена формула такого рода, мы будем называть *компонентами* этой формулы.

Если формула этого типа выводима в исчислении предикатов, то она должна быть f -тождественной для любого числа f . Возьмем в качестве f число различных входящих в $\mathcal{A}$ индивидуальных переменных и заменим в какой-либо последовательности эти индивидуальные переменные цифрами 1, 2, ..., f , а затем возникшие в результате этой замены различные элементарные формулы заменим различными формульными переменными. Тогда в результате этих действий формула $\mathcal{A}$ перейдет в тождественную формулу.

Но этот процесс сводится к тому, что каждая из компонент формулы $\mathcal{A}$ замещается некоторой формульной переменной (без аргументов). Значит, при этой замене $\mathcal{A}$ должна перейти в тождественную формулу. С другой стороны, это условие является и достаточным для выводимости $\mathcal{A}$; в самом деле, оно выражает тот факт, что $\mathcal{A}$ получается в результате подстановки в тождественную формулу исчисления высказываний.

Таким образом, мы установили, что формула исчисления предикатов, не содержащая кванторов, выводима в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда она может быть получена подстановкой из какой-либо тождественной формулы, а это в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда эта формула при замене ее компонент различными формульными переменными без аргументов переходит в тождественную формулу.

Формулы рассмотренного типа, обладающие указанным свойством, мы также будем называть *тождественно истинными формулами*.

Из теоремы 2 мы можем, кроме того, заключить, что совокупность всех формул, тождественных в конечном, является дедуктивно замкнутой. Можно было бы думать, что эта совокупность совпадает с совокупностью выводимых формул, т. е. что не только

каждая выводимая формула тождественна в конечном, но что каждая тождественная в конечном формула является также и выводимой.

Однако это справедливо лишь в отношении некоторой части исчисления предикатов, именно в отношении тех формул, у которых все элементарные подформулы имеют не более одного аргумента. Для этой части исчисления, которую мы будем называть «*одноместным*» исчислением предикатов, мы действительно докажем, что каждая тождественная в конечном формула является и выводимой ¹⁾.

Однако для всего исчисления предикатов в целом такая теорема места не имеет. Это обнаруживается при рассмотрении формул, выражающих определенные условия конечности, накладываемые на индивидуальную область. К одной из формул такого рода нас приводят уже обсуждавшиеся в гл. I формулы ²⁾

$$\forall x \neg R(x, x),$$

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)),$$

$$\forall x \exists y R(x, y).$$

Относительно этих формул мы установили, что в конечной индивидуальной области их невозможно одновременно выполнить посредством подстановки какого-либо конкретного двуместного предиката вместо переменной R . Этот результат свидетельствует о том, что следующая формула $\mathfrak{F}$:

$$\forall x \neg R(x, x) \& \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \& \forall x \exists y R(x, y),$$

которая представляет собой конъюнкцию трех указанных формул, будучи рассмотрена в конечной индивидуальной области, при любой подстановке какого-либо конкретного предиката вместо переменной R принимает значение «ложь», или, другими словами, что ее отрицание $\neg \mathfrak{F}$ является формулой, тождественной в конечном.

Если бы всякая тождественная в конечном формула была выводимой, то, в частности, выводимой была бы и формула $\neg \mathfrak{F}$.

Однако в дальнейшем мы покажем, что формула $\neg \mathfrak{F}$ не может быть выведена с помощью наших основных правил. В этом будет состоять результат одного из наших первых доказательств непротиворечивости ³⁾. В точности так же, как с формулой $\neg \mathfrak{F}$, дело обстоит и с формулой $\neg \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ представляет собой конъюнкцию

¹⁾ См. с. 243 и далее.

²⁾ См. с. 38.

³⁾ См. с. 262 и далее.

трех формул, входящих в систему

$$\exists x \forall y \neg S(y, x),$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (S(x, u) \& S(y, u) \& S(v, x) \rightarrow S(v, y)),$$

$$\forall x \exists y S(x, y),$$

также ранее упоминавшуюся в гл. I. Формула $\mathfrak{G}$ также не может быть выполнена ни в какой конечной индивидуальной области путем подстановки какого-нибудь предиката вместо переменной S ; другими словами, формула $\neg \mathfrak{G}$ является тождественной в конечном. И все-таки в дальнейшем мы покажем, что выводимой эта формула $\neg \mathfrak{G}$ не является ¹⁾.

Еще один пример формулы, обладающей рассмотренным свойством, дает следующая формула $\mathfrak{H}$ ²⁾:

$$\forall x \neg A(x, x) \& \forall x \exists y \forall z (A(x, y) \& (A(z, x) \rightarrow A(z, y)));$$

относительно нее тоже можно показать, что она не может быть выполнена ни в какой конечной индивидуальной области подстановкой вместо переменной A какого-либо предиката, так что ее отрицание $\neg \mathfrak{H}$ является тождественным в конечном. С другой стороны, формула $\neg \mathfrak{H}$ не выводима в исчислении предикатов, а именно — ее невыводимость может быть установлена на основе невыводимости формулы $\neg \mathfrak{F}$. Действительно, формула $\neg \mathfrak{F}$, как мы покажем позже ³⁾, может быть выведена из формулы $\neg \mathfrak{H}$, и тем самым из невыводимости $\neg \mathfrak{F}$ следует невыводимость $\neg \mathfrak{H}$.

Однако мы можем здесь сделать и более сильное утверждение: как показал М. Вайсберг ⁴⁾, можно задать бесконечную последовательность формул исчисления предикатов таких, что все они тождественны в конечном, однако ни одна из них не выводима из остальных средствами исчисления предикатов.

Результаты, показывающие необратимость теоремы 1, играют особенно важную роль в связи с вопросом о полноте исчисления предикатов.

Для одноместного исчисления предикатов вопрос о его полноте решается в утвердительном смысле теоремой о том, что всякая

¹⁾ Вопрос о том, являются ли формулы $\neg \mathfrak{F}$ и $\neg \mathfrak{G}$ независимыми друг от друга внутри исчисления предикатов, был решен Гисбертом Хазенъегером, который доказал, что ни $\neg \mathfrak{F}$ из $\neg \mathfrak{G}$, ни $\neg \mathfrak{G}$ из $\neg \mathfrak{F}$ по нашим основным правилам не выводимы. См. его работу: H a s e n j a e g e r G. Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. — J. Symbolic Logic, 1950, 15, p. 273 и далее.

²⁾ На это свойство формулы $\mathfrak{H}$ обратил внимание Курт Шютте.

³⁾ То, что формула $\neg \mathfrak{G}$ может быть выведена из $\neg \mathfrak{F}$ путем подстановки вместо формульной переменной A , было показано в уже упоминавшейся выше работе Хазенъегера.

⁴⁾ См. W a j s b e r g M. Beitrag zur Metamathematik. — Math. Ann., 1933, 109, S. 200—229.

формула, тождественная в конечном, одновременно является и выводимой.

Эта теорема, которую мы в дальнейшем еще должны будем доказать, представляет собой аналог теоремы о полноте дедуктивного исчисления высказываний, согласно которой всякая тождественная формула исчисления высказываний выводима из системы формул I—V¹⁾.

Правда, мы здесь не имеем аналога теоремы о том, что при добавлении какой-либо невыводимой формулы к числу исходных выводимой становится уже любая формула²⁾. В самом деле, если мы к исходным формулам одноместного исчисления предикатов добавим, например, какую-либо 1-тождественную формулу, то в результате опять окажутся выводимыми только 1-тождественные — и, значит, не произвольные — формулы.

2. Экскурс в теоретико-множественную логику предикатов; предварительные замечания к вопросу о полноте; проблема разрешимости и ее уточнение с дедуктивной точки зрения. Если мы теперь начнем рассматривать исчисление предикатов в его полном объеме, то увидим, что после всего установленного нами понятие формулы, тождественной в конечном, оказывается неподходящим для старта в направлении проблемы полноты, так как мы заранее знаем, что совокупность выводимых формул является более узкой, чем совокупность формул, тождественных в конечном.

Теперь, как ввиду универсального характера логических законов, подлежащих формализации посредством нашего исчисления, так и вследствие аналогии с исчислением высказываний, напрашивается мысль о том, чтобы ликвидировать ту исключительную роль конечного, которая находит свое отражение в понятии формулы, тождественной в конечном, и распространить понятие тождественной формулы с исчисления высказываний на исчисление предикатов.

Требуемое в связи с этим обобщение понятия тождественной формулы на случай исчисления предикатов представляет собой не что иное, как уже введенное в гл. I понятие о б щ е з н а ч и м о й формулы³⁾. Однако мы уже там указывали на принципиальные трудности, которые вызывает применение этого понятия в случае бесконечной индивидуальной области. Эти трудности, связанные с понятием бесконечного, как раз и были причиной того, что при уточнении нашей программы мы остановились не на положительной трактовке непротиворечивости математических систем, а на отрицательной — в смысле невозможности получить какое-либо противоречие путем дедукции.

См. с. 96 и далее.

См. с. 98.

См. с. 31.

В исчислении предикатов мы избежали проблематики, связанной с бесконечным, тем, что построили это исчисление как дедуктивную систему, а не по аналогии с теорией истинностных функций.

Однако в любом случае желательно познакомиться с таким изложением логики предикатов, которое примыкает к теории истинностных функций логики высказываний. Этот способ изложения логики предикатов, который из-за его тесной связи с теорией множеств мы будем называть т е о р е т и к о - м н о ж е с т в е н - н ы м, безраздельно господствовал в течение длительного времени. Правда, он не удовлетворяет требованиям нашей финитной точки зрения, так как использует принцип «tertium non datur» в применении не только к элементам индивидуальной области (в отношении которых он может рассматриваться как условие применимости исчисления предикатов), но и к целым числам и предикатам; кроме того, он требует использования принципа выбора. И все же различные рассуждения, проводимые в этой теории, мы можем использовать при изучении исчисления предикатов в эвристических целях как путеводное средство, позволяющее находить теоремы и доказательства, поскольку результаты этих рассуждений чаще всего допускают уточнения финитного характера.

Поэтому мы вкратце изложим здесь основные идеи теоретико-множественной логики предикатов. Как уже говорилось, речь будет идти об определенном обобщении теории истинностных функций. Подобно тому, как в этой теории мы приписывали формульным переменным

$A, B, \dots$

значения «истина» или «ложь», здесь значения какой-либо переменной

$A(a)$

с одним аргументом a будут задаваться посредством подходящей *логической функции*, т. е. такой функции, которая любому элементу индивидуальной области, к которой относится рассматриваемый аргумент, сопоставляет одно из значений, «истина» или «ложь».

Аналогичным образом, значение формульной переменной с несколькими аргументами задается логической функцией с тем же числом аргументов, пробегающих рассматриваемую индивидуальную область.

Логические функции находятся в теснейшей связи с множествами. Любой логической функции, зависящей от одного аргумента, соответствует множество тех элементов из индивидуальной области, на которых эта логическая функция принимает значение «истина»; любой логической функции, зависящей от двух аргументов, соответствует множество тех упорядоченных пар элементов из рас-

смаатриваемой индивидуной области, для которых эта функция принимает значение «истина»; аналогично, функции трех аргументов соответствует множество упорядоченных троек элементов и т. д.

Применяя истинностные функции логики высказываний, мы из заданных логических функций получим новые функции этого рода, которым снова будут сопоставлены некоторые множества.

Пусть, например, $\Phi(a)$ представляет собой логическую функцию одного аргумента. Тогда $\neg \Phi(a)$ будет представлять такую функцию, которая значение «истина», соответственно «ложь», принимает на тех элементах индивидуной области, на которых $\Phi(a)$ принимает значение «ложь», соответственно «истина». Множество, соответствующее функции $\neg \Phi(a)$, является *дополнением* к множеству, соответствующему функции Φ .

Если $\Phi(a)$ и $\Psi(a)$ — две логические функции, то $\Phi(a) \& \Psi(a)$ представляет собой такую функцию, которая принимает значение «истина» на тех и только тех элементах, на которых обе функции Φ и Ψ принимают значение «истина». Соответствующее множество является *пересечением* множеств, соответствующих функциям Φ и Ψ , т. е. множеством элементов, принадлежащих обоим этим множествам одновременно. Точно так же функции $\Phi(a) \vee \Psi(a)$ соответствует *объединение* множеств, соответствующих функциям Φ и Ψ .

Операции, соответствующие кванторам всеобщности и существования, понимаются как конъюнкция и дизъюнкция, распространенные на всю индивидуную область. Поэтому для произвольной логической функции $\Phi(a)$ выражение

$$\forall x \Phi(x)$$

принимает значение «истина» или «ложь» в зависимости от того, совпадает или не совпадает множество, соответствующее функции Φ , со всей индивидуной областью, а

$$\exists x \Phi(x)$$

принимает значение «ложь» или «истина» в зависимости от того, пусто или непусто множество, соответствующее Φ .

Если теперь в какой-либо формуле исчисления предикатов мы подставим вместо формульных переменных логические функции с тем же самым числом аргументов и при этом все индивидуальные переменные окажутся связанными, то в силу указанной интерпретации эта формула получит одно из значений «истина» или «ложь». Если же в этой формуле имеются свободные индивидуальные переменные, то при всякой подстановке логических функций вместо формульных переменных рассматриваемая формула будет принимать в качестве значения некоторую новую логическую функцию.

В соответствии со сказанным, формула без свободных переменных представляет собой некоторое высказывание о логических функциях, могущих быть подставленными вместо формульных переменных, или же о множествах, сопоставленных этим функциям; это высказывание является истинным или ложным в зависимости от того, какое значение — «истина» или «ложь» — доставляют рассматриваемой формуле подставляемые логические функции или соответствующие им множества.

Рассмотрим, например, формулу

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)).$$

Для всякой пары логических функций $\Phi(a)$, $\Psi(a)$ с соответствующими им множествами ϕ и ψ она принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда для всякого элемента α индивидуной области импликация $\Phi(\alpha) \rightarrow \Psi(\alpha)$ принимает значение «истина», т. е. если для всякого элемента, для которого Φ принимает значение «истина», Ψ также принимает значение «истина», или, выражаясь в терминах множеств, если всякий элемент множества ϕ принадлежит множеству ψ . Таким образом, формула

$$\forall x (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x))$$

равнозначна высказыванию о том, что ϕ является *подмножеством* множества ψ . Аналогично, формула

$$\forall x (\Phi(x) \sim \Psi(x))$$

выражает тот факт, что множества ϕ и ψ совпадают, а формула

$$\exists x (\Phi(x) \& \Psi(x))$$

говорит о том, что множества ϕ и ψ имеют *непустое пересечение*.

Пример другого рода представляет собой формула

$$\exists y R(a, y).$$

Если вместо формульной переменной R в эту формулу подставить логическую функцию Φ с двумя аргументами и обозначить соответствующее ей множество пар посредством ϕ , то получающееся при этом выражение

$$\exists y \Phi(a, y)$$

изображает такую логическую функцию от переменной a , которая принимает значение «истина» на тех и только тех элементах, которые встречаются в качестве первого члена по крайней мере у одной пары из ϕ .

Теперь мы уже можем ввести для формул понятия *общезначимости* и *выполнимости*, которые мы определим так, как это делалось

в гл. I ¹⁾, но в несколько более общем виде, включая в рассмотрение и формулы со свободными индивидуальными переменными. Формула исчисления предикатов называется общезначимой, если при любой подстановке логических функций вместо формульных переменных и элементов индивидуальной области вместо свободных индивидуальных переменных (если эти последние в формуле имеются) она принимает значение «истина»; формула называется выполнимой, если она принимает значение «истина» при подходящем выборе подстановок.

Общезначимость и выполнимость двойственны по отношению друг к другу; именно формула общезначима тогда и только тогда, когда ее отрицание невыполнимо; отсюда в предположении, что для предикатов верен «tertium non datur», получается, что формула выполнима тогда и только тогда, когда ее отрицание не общезначимо.

Далее, можно доказать, что всякая формула, выводимая в исчислении предикатов, общезначима. Именно, нетрудно убедиться, что исходные формулы исчисления предикатов общезначимы и что в результате применения правила подстановки и схем исчисления предикатов из общезначимых формул всегда получаются снова общезначимые.

А теперь возникает вопрос о том, верно ли обращение этой теоремы, т. е. является ли выводимой всякая общезначимая формула исчисления предикатов. Тем самым мы возвращаемся к прежней теме, которая и привела нас к рассмотрению теоретико-множественной логики предикатов. Вопрос этот получил свое решение благодаря следующей доказанной К. Гёделем теореме о полноте ²⁾. Назовем формулу о п р о в е р ж и м о й, если выводимо ее отрицание; тогда имеет место следующая альтернатива: всякая формула исчисления предикатов либо опровержима, либо выполнима, и притом в индивидуальной области целых чисел ³⁾.

¹⁾ См. с. 31.

²⁾ Доказательство этой теоремы составляет главное содержание работы: Gödel K. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. — Monatsh. Math. Phys., 1930, 37, № 2.

³⁾ Та часть этого результата Гёделя, которая относится к выполнимости в области целых чисел, была уже ранее получена Лёвенгеймом, который в своей работе: Löwenheim L. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. — Math. Ann., 1915, 76 — в числе прочих значительных теорем доказал, что произвольная формула исчисления предикатов, выполнимая в какой-либо вообще области, всегда будет выполнима и в индивидуальной области целых чисел. Доказательство Лёвенгейма было затем упрощено Сколемом, который позднее показал также, что здесь можно обойтись без применения принципа выбора, существенно использовавшегося в первых доказательствах. По данному вопросу имеются следующие работы Сколема: Skolem T. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen. — Vid.-Selsk. Skr. Kris-

Отсюда в качестве следствия получается, что каждая общезначимая формула выводима. Действительно, если $\mathcal{A}$ — общезначимая формула, то ее отрицание $\neg \mathcal{A}$ во всяком случае является невыполнимым; поэтому на основании упомянутой альтернативы формула $\neg \mathcal{A}$ опровержима и, следовательно, $\neg \neg \mathcal{A}$ выводима; а из $\neg \neg \mathcal{A}$ может быть выведена и сама формула $\mathcal{A}$.

Конечно, гёделевская теорема о полноте в рассмотренном нами виде не может быть перенесена в финитную теорию доказательств, поскольку она существенным образом опирается пусть не на самые сильные нефинитные вспомогательные средства, но все же, например, на «tertium non datur» в применении к целым числам. Однако из гёделевского доказательства можно извлечь некоторую финитную теорему о полноте, которая выражает тот факт, что для любой неопровержимой формулы в рамках формализованной (с включением принципа «tertium non datur») арифметики всегда имеется некоторая формальная модель, а также (на что здесь мы пока только напомним) некий тип аппроксимативных моделей, состоящих из сколь угодно далеко продолжаемых конечных последовательностей систем предикатов, которые определены в конечных индивидуальных областях и каждая из которых представляет собой продолжение предыдущей. И обратно, согласно одной теореме, доказанной Эрбраном ¹⁾, из существования такой аппроксимативной модели для данной формулы будет вытекать ее неопровержимость. Далее, тот факт, что формула, выполнимая в рамках формализованной арифметики является неопровержимой, следует из непротиворечивости арифметики, которая еще должна быть доказана.

Весь этот пока лишь эскизно набросанный комплекс результатов мы подробно изложим в дальнейшей части нашего сочинения. Здесь же мы только ограничимся констатацией того факта, что аналогия между исчислением высказываний и исчислением предикатов, которую мы предчувствовали в вопросе о полноте, оказалась действительно существующей, хотя и с известными ограничениями, вызванными финитной точкой зрения.

Напротив, попытка проследить другую, лежащую в сходном направлении аналогию, а именно аналогию с проблемой разрешимости, к цели не привела. Эта проблема, о которой мы уже говорили в гл. I ²⁾, заключается в том, чтобы попытаться распростра-

tiania I, Mat.-Nat. Kl., 1920, № 4; Skolem T. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. — Math. Kongr. i. Helsingfors, 1922; Skolem T. Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. — Skr. norske Vid.-Akad. Oslo, I Mat.-Nat. Kl., 1929, № 4.

¹⁾ Об этой теореме идет речь в пятой главе его докторской диссертации: Herbrand J. Recherches sur la théorie de la démonstration. — Paris, 1930. Во втором томе мы подробно остановимся на этом результате.

²⁾ См. с. 31.

нить на исчисление предикатов разрешающую процедуру исчисления высказываний, которая для любой формулы этого последнего позволяла выяснить вопрос о том, является эта формула тождественно истинной или же при некоторых значениях переменных она оказывается ложной.

При рассмотрении проблемы разрешимости мы должны отличать друг от друга различные постановки вопроса. В теоретико-множественной логике предикатов эта проблема может быть представлена в виде двух по существу равносильных, а по форме двойственных друг другу проблем: проблемы распознавания общезначимости и проблемы распознавания выполнимости формул. Вследствие уже упоминавшихся ранее соотношений, существующих между общезначимостью и выполнимостью, выяснение общезначимости какой-либо формулы $\mathcal{A}$ равносильно выяснению выполнимости формулы $\neg \mathcal{A}$. Поэтому, если для некоторой совокупности формул B имеется метод для распознавания общезначимости этих формул, то он одновременно представляет собой и метод для распознавания выполнимости формул той совокупности, которую образуют отрицания формул из B , и наоборот. В части нахождения и описания разрешающих процедур более наглядные результаты получаются при рассмотрении выполнимости формул.

С точки зрения теории доказательств место проблемы распознавания общезначимости формул занимает проблема распознавания их выводимости. Как общезначимости формул соответствует их выводимость, так выполнимости формул соответствует их неопровержимость.

Исследование вопроса о неопровержимости формул теснейшим образом связано с проблемой непротиворечивости систем аксиом. Именно, имеет место следующая

Т е о р е м а. Пусть задана некоторая система аксиом, которые с помощью наших логических символов, связанных индивидуальных переменных и вполне определенных предикатных и индивидуальных символов представлены в виде формул $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_f$ без свободных переменных; допустим, что основные предикаты, представленные предикатными символами, охарактеризованы только посредством этих аксиом. Тогда непротиворечивость рассматриваемой системы аксиом (постольку, поскольку рассматриваются лишь обычные способы умозаключений, допускающие формализацию в рамках исчисления предикатов) совпадает с неопровержимостью той формулы, которая получается из

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_f,$$

если вместо каждого из предикатных символов подставить некоторую новую формульную переменную с тем же самым числом аргументов, а на место индивидуальных символов подставить различные свободные индивидуальные переменные.

В этой теореме, которую мы получим ниже в качестве следствия из другого более общего утверждения ¹⁾, находит выражение тот факт, что методическая перестройка, которую мы осуществили в гл. I, представляет собой не что иное, как переход от проблемы выполнимости к проблеме неопровержимости. В то же самое время в связи с материалом, рассмотренным в гл. I, мы должны обратить внимание на то, что предположение о том, что неявное описание всех фигурирующих в системе аксиом основных предикатов является полным, в наиболее употребительных системах аксиом выполняется не всегда, поскольку в них чаще всего фигурирует равенство в качестве содержательно-логически определенного отношения.

Учитывая эти обстоятельства, мы имеем далее две возможности. С одной стороны, если система аксиом имеет рассматриваемый тип, то существует возможность ликвидировать выделенное положение равенства, охарактеризовав его добавлением специальных аксиом; с другой стороны, понимание равенства как логически определенного отношения мы можем реализовать в виде специального расширения логики предикатов (зависящего от того, на какой точке зрения мы стоим — содержательной или формальной) и в соответствии с этим обсуждать проблему разрешимости для этой расширенной путем присоединения равенства логики предикатов. Оба метода в дальнейшем будут нами изложены.

Наряду с распознаванием неопровержимости формул в теории доказательств важную роль играет также исследование их выполнимости. При этом принимаются в расчет три типа выполнимости: выполнимость в конечной индивидуальной области (коротко — «в конечном»), выполнимость в какой-либо модели финитной арифметики и выполнимость в рамках какого-либо охватывающего исчисления предикатов непротиворечивого формализма в смысле возможности указания для формульных переменных рассматриваемой формулы таких подстановок, после выполнения которых формула оказывается выводимой внутри этого формализма. При каждом из этих трех подходов выполнимость какой-либо формулы влечет за собой ее неопровержимость. Действительно, формула $\mathcal{A}$, выполняемая в конечном, не может быть опровержимой, потому что в противном случае формула $\neg \mathcal{A}$ (как выводимая формула) была бы тождественной в конечном. Далее, неопровержимость любой формулы, выполнимой при помощи какой-либо модели финитной арифметики хотя и не усматривается непосредственно — как можно было бы думать, — но все же вытекает из уже упоминавшейся ранее теоремы Эрбрана. А в случае выполнимости в рамках какого-либо формализма опровержимость формулы оказалась бы несовместимой с непротиворечивостью этого формализма.

¹⁾ См. с. 200.

Мы подробно поговорили о подходе к проблеме разрешимости и о ее значении. Теперь, что касается полученных результатов, то к настоящему времени удалось найти распознающие процедуры только для одноместного исчисления предикатов, а также для нескольких других частных случаев, которые в дальнейшем еще будут указаны более подробно ¹⁾. Эти случаи изучались главным образом с позиций распознавания общезначимости или соответственно выполнимости формул. Разработанные здесь распознающие процедуры затем удавалось оформить — частью прямым способом, частью с помощью упомянутой теоремы Эрбрана ²⁾ — как методы распознавания выводимости формул или соответственно их опровержимости. Эти решения частных случаев проблемы разрешимости носят, однако, весьма специальный характер; предлагаемые в них методы распознавания существенным образом связаны с особым характером рассматриваемых случаев.

§ 5. Изучение формализма исчисления предикатов

1. Понятие переводимости; производные правила. Таким образом, мы далеки от общего решения проблемы разрешимости ³⁾. Следовательно, в этом отношении в исчислении предикатов мы имеем существенно иное положение, чем в исчислении высказываний. Здесь мы не можем, как в исчислении высказываний, заменить вывод формул применением какой-либо распознающей процедуры; напротив, мы в принципе оказываемся вынужденными остановиться на дедуктивном методе.

Несмотря на это, мы проведем определенную параллель между методами исчисления предикатов и методами исчисления высказываний, отметив целый ряд специальных *производных* правил.

Мы здесь обсудим ряд таких правил, играющих особо важную роль в деле сокращения формальных выводов. Эти правила будут главным образом касаться *преобразования* выражений, и с помощью этих преобразований мы будем, в частности, строить для формул исчисления предикатов определенные *нормальные формы*. Прежде всего мы должны будем уяснить себе, что в данном контексте будет пониматься под преобразованием.

В исчислении высказываний преобразования производятся путем применения определенных правил замены. При таком пре-

¹⁾ См. с. 186.

²⁾ Эрбран в своей работе: H e r b r a n d J. Sur la problème fondamental de la logique mathématique. — C.R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, 1931, 24 — указал многообразные применения его теоремы.

³⁾ То, что такое общее решение на самом деле невозможно, было впоследствии показано Алонзо Чёрчем в работе: C h u r c h A. A note on the Entscheidungsproblem. — J. Symbolic Logic, 1936, 1, pp. 40—41, 101—102. См. об этом во втором томе Приложение II (указание 1 после оглавления т. II).

образовании выражение $\mathcal{A}$ заменяется выражением $\mathcal{B}$, представляющим ту же самую истинностную функцию. Тем самым заменимость $\mathcal{A}$ посредством $\mathcal{B}$ равнозначна тому, что эквивалентность

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$$

является *тождественно истинной*.

В дедуктивной логике высказываний роль *тождественной эквивалентности* начинает играть *выводимая эквивалентность*, которая, собственно говоря, совпадает с тождественной эквивалентностью.

Чтобы иметь возможность проводить четкое различие между этими понятиями, мы будем называть формулу $\mathcal{A}$ *п е р е в о д и м о й* в $\mathcal{B}$, если эквивалентность

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$$

является *выводимой*.

В исчислении предикатов, рассматриваемом в том виде, как оно получается из наших основных правил, в нашем распоряжении имеется только понятие выводимой эквивалентности, и поэтому речь здесь может идти только о преобразованиях в смысле *переводимости*.

Основание называть переход от $\mathcal{A}$ к $\mathcal{B}$ преобразованием в случае переводимости $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ нам дают следующие факты:

1. Если $\mathcal{A}$ переводима в $\mathcal{B}$, то и $\mathcal{B}$ переводима в $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ переводима в $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ — в $\mathcal{C}$, то $\mathcal{A}$ переводима в $\mathcal{C}$.

2. Если $\mathcal{A}$ переводима в $\mathcal{B}$, то $\mathcal{B}$ выводима из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ выводима из $\mathcal{B}$ с помощью наших основных правил.

3. Пусть $\mathcal{A}$ является подформулой формулы $\mathcal{E}$ в смысле правил построения формул исчисления высказываний, а $\mathcal{Z}$ получается из $\mathcal{E}$ в результате подстановки $\mathcal{B}$ вместо указанного вхождения $\mathcal{A}$. Тогда если $\mathcal{A}$ переводима в $\mathcal{B}$, то $\mathcal{E}$ переводима в $\mathcal{Z}$.

Утверждения 1 и 2 очевидны; утверждение 3 является следствием того, что из эквивалентности $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ можно, во-первых, вывести

$$\neg \mathcal{A} \sim \neg \mathcal{B},$$

а кроме того, для любого выражения $\mathcal{C}$ можно вывести

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \& \mathcal{A} \sim \mathcal{C} \& \mathcal{B}, & \mathcal{A} \& \mathcal{C} \sim \mathcal{B} \& \mathcal{C}, \\ \mathcal{C} \vee \mathcal{A} \sim \mathcal{C} \vee \mathcal{B}, & \mathcal{A} \vee \mathcal{C} \sim \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \\ (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}) \sim (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}), & (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \sim (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}), \\ (\mathcal{C} \sim \mathcal{A}) \sim (\mathcal{C} \sim \mathcal{B}), & (\mathcal{A} \sim \mathcal{C}) \sim (\mathcal{B} \sim \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Заметим также, что любые две выводимые формулы переводимы друг в друга.

Действительно, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обе выводимы, то выводимы также $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$, а вместе с ними и $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ и, значит, $\mathfrak{A}$ переименовываема в $\mathfrak{B}$.

Мы приступаем теперь к перечислению этих правил. Так как речь здесь пойдет о простом применении ранее выведенных формул и правил, то пояснение и обоснование достаточно будет давать с помощью примеров, из которых можно будет извлечь и общий метод.

П р а в и л о (ε): Пусть нам дана некоторая формула (в качестве исходной или выведенной), содержащая одну или несколько свободных переменных. Тогда мы можем каждую из них связать при помощи какого-либо написанного перед этой формулой квантора всеобщности или существования, причем последовательность кванторов может быть выбрана произвольным образом.

(Разумеется, вместо свободных переменных можно будет брать лишь такие связанные переменные, которые раньше в этой исходной формуле не встречались.)

Так, например, от формулы

$$\mathfrak{A}(a, b, c)$$

если она не содержит ни x , ни y , ни z , мы можем перейти к

$$\forall x \exists y \forall z \mathfrak{A}(x, z, y)$$

следующим образом.

Сначала подставим вместо a какую-нибудь не входящую в $\mathfrak{A}(a, b, c)$ свободную переменную, например d , а затем подставим a вместо b ; так мы получим

$$\mathfrak{A}(d, a, c).$$

Применив правило (γ')¹⁾, мы получим

$$\forall x \mathfrak{A}(d, x, c),$$

а отсюда, переименовав переменную x в z и подставив a вместо c , получим

$$\forall z \mathfrak{A}(d, z, a).$$

Эта формула вместе с формулой

$$\forall z \mathfrak{A}(d, z, a) \rightarrow \exists x \forall z \mathfrak{A}(d, z, x),$$

получающейся из формулы (b), по схеме заключения дает

$$\exists x \forall z \mathfrak{A}(d, z, x).$$

¹⁾ См. с. 146.

Переименовав x в y и подставив a вместо d , получаем

$$\exists y \forall z \mathfrak{A}(a, z, y),$$

а отсюда по правилу (γ') получаем

$$\forall x \exists y \forall z \mathfrak{A}(x, z, y).$$

В частности, этим методом из тождественных формул исчисления высказываний мы получим, производя подстановки формульных переменных с аргументами и последующее связывание свободных переменных, ряд дальнейших формул. Так, например, из

$$A \vee \neg A$$

можно получить такие формулы, как

$$\forall x (A(x) \vee \neg A(x)),$$

$$\forall x \forall y (A(x, y) \vee \neg A(x, y)),$$

$$\exists x \forall y (A(x, y) \vee \neg A(x, y));$$

из

$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

можно получить

$$\exists x \forall y \exists z (A(x, y) \rightarrow (\neg A(x, y) \rightarrow B(y, z))).$$

П р а в и л о (ε'): Пусть нам дана формула с кванторной приставкой, состоящей из одного или нескольких действующих на всю эту формулу кванторов всеобщности. Тогда мы можем эти кванторы опустить, а связываемые ими переменные заменить произвольными свободными переменными.

(Это правило является частичным обращением предыдущего.)

Допустим, что у нас имеется формула

$$\forall y \forall z \mathfrak{A}(y, z)$$

и пусть мы хотим получить из нее

$$\mathfrak{A}(a, b).$$

С этой целью мы сначала подставим вместо переменной a , если она входит в $\mathfrak{A}(y, z)$, какую-нибудь новую свободную переменную, например c ; если переменная x входит в $\mathfrak{A}(y, z)$, переименуем ее в какую-нибудь еще не встречавшуюся связанную переменную, например в u . В результате из

$$\forall y \forall z \mathfrak{A}(y, z)$$

получится некоторая формула

$$\forall y \forall z \mathfrak{A}'(y, z).$$

Теперь переименуем y в x . Получившаяся формула

$$\forall x \forall z \mathfrak{A}'(x, z)$$

вместе с формулой

$$\forall x \forall z \mathfrak{A}'(x, z) \rightarrow \forall z \mathfrak{A}'(a, z),$$

получающейся подстановкой из формулы (а), по схеме заключения дает

$$\forall z \mathfrak{A}'(a, z),$$

Подставим теперь вместо a какую-нибудь новую переменную, например d , и переименуем z в x . Из получившейся формулы

$$\forall x \mathfrak{A}'(d, x),$$

воспользовавшись еще раз формулой (а) и применив схему заключения, мы получим

$$\mathfrak{A}'(d, a)$$

и, подставив b вместо a , —

$$\mathfrak{A}'(d, b).$$

Теперь нам остается только вновь переименовать u в x и подставить a вместо c , а также a вместо d ; тогда мы получим искомую формулу

$$\mathfrak{A}(a, b).$$

П р а в и л о (ζ): Пусть в обеих частях данной импликации или эквивалентности встречаются какие-либо свободные переменные. Тогда каждую из этих переменных мы можем в обеих частях связать одним и тем же квантором всеобщности или существования; необходимо только, чтобы порядок кванторов в обеих частях был один и тот же.

Так, от импликации

$$\mathfrak{A}(b, c) \rightarrow \mathfrak{B}(b, c),$$

если переменные x и y в нее не входят, мы можем перейти к

$$\forall x \forall y \mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \forall x \forall y \mathfrak{B}(x, y)$$

или же к

$$\forall x \exists y \mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \mathfrak{B}(x, y).$$

Точно так же от эквивалентности

$$\mathfrak{A}(a, b, c) \sim \mathfrak{B}(a, b, c),$$

в которую не входят ни x , ни y , ни z , мы можем перейти к

$$\exists x \exists y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \sim \exists x \exists y \forall z \mathfrak{B}(x, y, z).$$

Процедуру перехода мы рассмотрим на примере формулы

$$\mathfrak{A}(b, c) \rightarrow \mathfrak{B}(b, c),$$

не содержащей переменных x и y . Выведем из нее формулу

$$\forall x \exists y \mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \mathfrak{B}(x, y).$$

Сначала, если в исходной формуле встречается переменная a , мы подставим вместо нее какую-нибудь новую переменную, например d ; затем вместо c подставим a . Из получившейся формулы

$$\mathfrak{A}'(b, a) \rightarrow \mathfrak{B}'(b, a)$$

мы по правилу (δ)¹⁾ получим

$$\exists x \mathfrak{A}'(b, x) \rightarrow \exists x \mathfrak{B}'(b, x).$$

Переименовав x в y и подставив a вместо b , мы получим

$$\exists y \mathfrak{A}'(a, y) \rightarrow \exists y \mathfrak{B}'(a, y).$$

Применив еще раз правило (δ), мы получим

$$\forall x \exists y \mathfrak{A}'(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \mathfrak{B}'(x, y).$$

Если мы теперь снова подставим a вместо d , то придем к искомой формуле.

В случае, когда исходная формула является не импликацией, а эквивалентностью, вместо правила (δ) следует применять правило (δ').

Применив правило (ζ) к эквивалентностям, мы, в частности, получим

П р а в и л о (η): Пусть дана формула с кванторной приставкой, состоящей из одного или нескольких кванторов. Тогда в выражении, стоящем за этими кванторами, можно выполнять все те преобразования, которые оказываются допустимыми, когда вместо связываемых этими кванторами переменных стоят свободные переменные (и, значит, в частности, все преобразования исчисления высказываний).

Если, например, у нас имеется формула

$$\exists x \forall y (\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\mathfrak{B}(x, y) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y))),$$

то в выражении

$$\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\mathfrak{B}(x, y) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y))$$

можно произвести перестановку посылок, в результате чего мы придем к

$$\exists x \forall y (\mathfrak{B}(x, y) \rightarrow (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y))).$$

¹⁾ См. с. 146.

В самом деле из тождественной формулы

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \sim (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

подстановкой мы получим

$$(\mathfrak{A}(c) \rightarrow (\mathfrak{B}(c, d) \rightarrow \mathfrak{C}(c, d))) \sim (\mathfrak{B}(c, d) \rightarrow (\mathfrak{A}(c) \rightarrow \mathfrak{C}(c, d))).$$

Пусть при этом переменные c и d выбраны так, что они не входят в $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x, y)$ и $\mathfrak{C}(x, y)$.

Тогда правило (ξ) даст нам формулу

$$\exists x \forall y (\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\mathfrak{B}(x, y) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y))) \sim$$

$$\exists x \forall y (\mathfrak{B}(x, y) \rightarrow (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y))).$$

Значит, исходная формула действительно переводима в формулу

$$\exists x \forall y (\mathfrak{B}(x, y) \rightarrow (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y))).$$

П р а в и л о (θ): Пусть какая-либо формула представляет собой конъюнкцию с кванторной приставкой, состоящей из одного или нескольких кванторов всеобщности. Пусть каждый член данной конъюнкции содержит все связываемые этими кванторами переменные. Тогда мы можем написать эту кванторную приставку перед каждым из членов конъюнкции в отдельности. То же самое справедливо в отношении дизъюнкции с приставкой из кванторов существования. Указанная операция может быть произведена и в обратном направлении и, следовательно, имеет характер преобразования.

В том случае, когда приставка состоит только из одного квантора всеобщности или существования, это правило получается непосредственным применением формул (7) и (9)¹⁾ в сочетании с правилом переименования связанных переменных.

Распространение на случай нескольких кванторов всеобщности или нескольких кванторов существования мы проиллюстрируем на примере формулы вида

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(x, y) \& \mathfrak{B}(x, y)).$$

Наше правило утверждает, что эта формула переводима в формулу

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(x, y) \& \forall x \forall y \mathfrak{B}(x, y)).$$

Для доказательства возьмем какую-нибудь свободную переменную, не входящую в $\mathfrak{A}(x, y)$ и $\mathfrak{B}(x, y)$, например z . Так как мы уже умеем применять наше правило для случая одного квантора всеобщности, то мы получим, что

$$\forall y (\mathfrak{A}(c, y) \& \mathfrak{B}(c, y))$$

¹⁾ См. с. 150 и далее.

можно преобразовать в

$$\forall y \mathfrak{A}(c, y) \& \forall y \mathfrak{B}(c, y).$$

Отсюда по правилу (η) следует, что

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(x, y) \& \mathfrak{B}(x, y))$$

может быть преобразована в

$$\forall x (\forall y \mathfrak{A}(x, y) \& \forall y \mathfrak{B}(x, y)),$$

а эта формула по уже один раз примененному правилу для единичного квантора всеобщности переводима в

$$\forall x \forall y \mathfrak{A}(x, y) \& \forall x \forall y \mathfrak{B}(x, y).$$

Поэтому формула

$$\forall x \forall y (\mathfrak{A}(x, y) \& \mathfrak{B}(x, y))$$

также переводима в эту формулу.

Следует обратить внимание на то, что в правиле (θ) проявляется сходство между квантором всеобщности и конъюнкцией, а также между квантором существования и дизъюнкцией. В случае комбинации квантора существования с конъюнкцией или квантора всеобщности с дизъюнкцией эти дистрибутивные преобразования допустимыми не являются.

Так, например, выводимая формула

$$\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$$

не переводима в

$$\forall x A(x) \vee \forall x \neg A(x),$$

что усматривается хотя бы из того, что эта последняя формула не является даже 2-тождественной.

П р а в и л о (ι): Пусть какой-либо конъюнкции или дизъюнкции предшествует кванторная приставка, состоящая из одного или нескольких кванторов всеобщности или существования, взятых в произвольном порядке. Пусть относящиеся к этим кванторам переменные так распределены между членами этой конъюнкции или дизъюнкции, что ни одна из них одновременно не встречается в двух различных членах. Тогда эту приставку можно так распределить между отдельными членами рассматриваемой формулы, что перед каждым членом будут стоять только те кванторы, для которых соответствующие им переменные входят в рассматриваемый член. Порядок кванторов при этом сохраняется. Такая операция носит характер преобразования и, следовательно, допустима в обратном направлении.

В качестве примера рассмотрим формулу вида

$$\exists x \forall y \exists z (\mathfrak{A}(x, y) \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}(z)),$$

где $\mathfrak{A}(x, y)$ не содержит переменной z , $\mathfrak{B}$ не содержит ни x , ни y , ни z , а $\mathfrak{C}(z)$ не содержит переменных x и y . Правило (1) утверждает, что эта формула переводима в

$$\exists x \forall y \mathfrak{A}(x, y) \vee \mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z).$$

Соответствующее преобразование производится следующим образом.

Возьмем сначала какие-нибудь две свободные переменные, не входящие в исходную формулу, например b и c . Из формулы (8)¹⁾ подстановкой и переименованием x в z мы получаем

$$\exists z ((\mathfrak{A}(b, c) \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}(z)) \sim (\mathfrak{A}(b, c) \vee \mathfrak{B}) \vee \exists z \mathfrak{C}(z).$$

По правилам (ξ) и (η) отсюда получается²⁾

$$\exists x \forall y \exists z (\mathfrak{A}(x, y) \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}(z)) \sim \exists x \forall y (\mathfrak{A}(x, y) \vee \mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z)).$$

Таким образом, наша исходная формула переводима в

$$\exists x \forall y (\mathfrak{A}(x, y) \vee \mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z)).$$

В этой формуле мы прежде всего можем по правилу (η) поменять местами члены дизъюнкции, так что получится

$$\exists x \forall y (\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \mathfrak{A}(x, y)).$$

Теперь применим формулу (5)³⁾; из нее подстановкой и переименованием x в y получается

$$\forall y ((\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z)) \vee \mathfrak{A}(b, y)) \sim ((\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z)) \vee \forall y \mathfrak{A}(b, y)),$$

а отсюда, по правилам (ξ) и (η), —

$$\exists x \forall y (\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \mathfrak{A}(x, y)) \sim \exists x (\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \forall y \mathfrak{A}(x, y)).$$

Возьмем, кроме того, формулу, получающуюся из формулы (8) подстановкой [и применением правила (η)]:

$$\exists x (\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \forall y \mathfrak{A}(x, y)) \sim (\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \exists x \forall y \mathfrak{A}(x, y)).$$

Из обеих этих эквивалентностей получается, что формула

$$\exists x \forall y (\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \mathfrak{A}(x, y)),$$

а тем самым и исходная формула, переводима в формулу

$$\mathfrak{B} \vee \exists z \mathfrak{C}(z) \vee \exists x \forall y \mathfrak{A}(x, y),$$

из которой нужная нам формула получается перестановкой членов дизъюнкции.

¹⁾ См. с. 152.

²⁾ Правило (η) здесь используется для устранения скобок.

³⁾ См. с. 149.

П р а в и л о (κ): Идущие друг за другом кванторы всеобщности, а также идущие друг за другом кванторы существования, относящиеся к одному и тому же выражению, можно в произвольном порядке поменять местами.

Это правило получается применением формул (13) и (13')¹⁾. Так, например, любая формула

$$\forall x \forall y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z)$$

переводима в

$$\forall z \forall y \forall x \mathfrak{A}(x, y, z).$$

Действительно, произведя подстановку в формулу (13) и переименовав переменные x и y в y и z в обеих частях эквивалентности, мы получим

$$\forall y \forall z \mathfrak{A}(a, y, z) \sim \forall z \forall y \mathfrak{A}(a, y, z),$$

а отсюда, по правилу (δ'), —

$$\forall x \forall y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \sim \forall x \forall z \forall y \mathfrak{A}(x, y, z).$$

С другой стороны, формула (13) переименованием y в z и подстановкой $\forall y \mathfrak{A}(a, y, c)$ вместо именной формы $\mathfrak{A}(a, c)$ дает формулу

$$\forall x \forall z \forall y \mathfrak{A}(x, y, z) \sim \forall z \forall x \forall y \mathfrak{A}(x, y, z),$$

а из предыдущей эквивалентности путем подстановки $\mathfrak{A}(b, c, a)$ вместо именной формы $\mathfrak{A}(a, b, c)$ и последующего переименования x, y и z в z, x и y получается

$$\forall z \forall x \forall y \mathfrak{A}(x, y, z) \sim \forall z \forall y \forall x \mathfrak{A}(x, y, z).$$

Три полученные эквивалентности совместно друг с другом дают формулу

$$\forall x \forall y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \sim \forall z \forall y \forall x \mathfrak{A}(x, y, z),$$

из которой и получается нужная нам переводимость.

Следует заметить, что, согласно правилу (η), перестановка следующих друг за другом кванторов всеобщности допустима и в том случае, когда им предшествует квантор существования, так что, например, формула

$$\forall u \exists x \forall y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z, u)$$

переводима в

$$\forall u \exists x \forall z \forall y \mathfrak{A}(x, y, z, u).$$

П р а в и л о (λ): Отрицание формулы с кванторной приставкой может быть получено заменой каждого из кванторов всеобщно-

¹⁾ См. с. 154 и далее.

сти квантором существования, каждого квантора существования — квантором всеобщности, а следующего за ними выражения — его отрицанием.

Так, формула

$$\neg \forall x \exists y \mathcal{A}(x, y)$$

может быть преобразована в

$$\exists x \forall y \neg \mathcal{A}(x, y).$$

Действительно, из формулы (2)¹⁾ подстановкой мы получаем

$$\neg \forall x \exists y \mathcal{A}(x, y) \sim \exists x \neg \exists y \mathcal{A}(x, y),$$

затем из формулы (3) переименованием x в y и подстановкой получаем

$$\neg \exists y \mathcal{A}(a, y) \sim \forall y \neg \mathcal{A}(a, y).$$

Теперь по правилу (δ') получается

$$\exists x \neg \exists y \mathcal{A}(x, y) \sim \exists x \forall y \neg \mathcal{A}(x, y).$$

Объединив эту формулу с ранее полученной, мы получаем

$$\neg \forall x \exists y \mathcal{A}(x, y) \sim \exists x \forall y \neg \mathcal{A}(x, y),$$

откуда и вытекает искомая переводимость.

2. Приведение формул к предваренному виду; примеры; описание разрешимых случаев проблемы разрешимости с помощью предваренной нормальной формы. Перечисленные выше правила преобразования мы теперь применим для получения *нормальных форм* некоторого специального типа. Именно, мы покажем, что всякую формулу исчисления предикатов можно перевести в такую формулу, у которой все кванторы стоят снаружи, так что она получается из некоторого выражения исчисления высказываний, если его формульные переменные снабдить аргументами и связать свободные переменные кванторами всеобщности и существования, поставленными перед всей формулой в целом.

Всякую формулу, имеющую такой вид, мы будем называть *предваренной* формулой.

Процедуру перевода любой формулы в предваренную мы изложим на примере формулы

$$\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x (B(x) \rightarrow \exists y C(x, y)).$$

Прежде всего, пользуясь правилом (η), мы при помощи исчисления высказываний устраним обе импликации; так мы получим формулу

$$\neg \forall x \forall y A(x, y) \vee \forall x (\neg B(x) \vee \exists y C(x, y)).$$

¹⁾ См. с. 147.

Согласно правилу (λ),

$$\neg \forall x \forall y A(x, y)$$

мы можем перевести в

$$\exists x \exists y \neg A(x, y);$$

далее, по правилу (ι),

$$\neg B(a) \vee \exists y C(a, y)$$

мы можем преобразовать в

$$\exists y (\neg B(a) \vee C(a, y));$$

следовательно, по правилу (η),

$$\forall x (\neg B(x) \vee \exists y C(x, y))$$

может быть преобразовано в

$$\forall x \exists y (\neg B(x) \vee C(x, y)),$$

так что в целом мы получим

$$\exists x \exists y \neg A(x, y) \vee \forall x \exists y (\neg B(x) \vee C(x, y)).$$

Теперь применим к члену

$$\forall x \exists y (\neg B(x) \vee C(x, y))$$

этой дизъюнкции правило переименования, переименовав x и y в u и v ; так мы получим формулу

$$\exists x \exists y \neg A(x, y) \vee \forall u \exists v (\neg B(u) \vee C(u, v)),$$

а ее по правилу (ι) можно перевести в предваренную формулу

$$\exists x \exists y \forall u \exists v (\neg A(x, y) \vee \neg B(u) \vee C(u, v)).$$

Следует обратить внимание на то, что при применении правила (ι) порядок кванторов в кванторной приставке может быть здесь установлен различными способами. Например, последовательно

$$\exists x \forall u \exists y \exists v$$

и

$$\forall u \exists v \exists x \exists y$$

тоже являются допустимыми. Если же еще учесть и правило (κ) о перестановочности двух соседних кванторов существования, то становится ясным, что единственное условие, налагаемое в этом примере на порядок кванторов, состоит в том, что квантор $\forall u$ должен предшествовать квантору $\exists v$.

Однако в значительной мере произвольным является не только порядок кванторов; при преобразованиях может также изменяться и их число. Например, во многих случаях число кванторов можно уменьшить применением правила (θ). В рассмотренном примере это может быть сделано следующим образом. В формуле

$$\exists x \exists y \neg A(x, y) \vee \forall x \exists y (\neg B(x) \vee C(x, y))$$

мы во втором члене дизъюнкции переименовываем только переменную x ; при этом получается

$$\exists x \exists y \neg A(x, y) \vee \forall u \exists y (\neg B(u) \vee C(u, y)).$$

Применение правила (ι) сначала приведет нас к формуле

$$\forall u \exists x (\exists y \neg A(x, y) \vee \exists y (\neg B(u) \vee C(u, y))),$$

которая пока еще не является предваренной. Теперь выражение, стоящее после $\forall u \exists x$, мы можем преобразовать по правилам (θ) и (η). В итоге мы приходим к формуле

$$\forall u \exists x \exists y (\neg A(x, y) \vee \neg B(u) \vee C(u, y)),$$

которая является предваренной и у которой кванторная приставка состоит только из трех кванторов.

Метод приведения произвольной формулы к предваренному виду мы хотели бы применить еще и к упоминавшейся ранее ¹⁾ формуле $\mathfrak{F}$, которая получается в результате конъюнктивного связывания следующих трех формул:

$$\forall x \neg R(x, x),$$

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)),$$

$$\forall x \exists y R(x, y).$$

Если здесь в третьем члене конъюнкции предварительно переименовать y в u , то получится

$$\forall x \neg R(x, x) \& \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \&$$

$$\forall x \exists u R(x, u).$$

По правилу (θ) перед этими тремя членами конъюнкции мы можем поставить общий квантор всеобщности, так что получится

$$\forall x (\neg R(x, x) \& \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \& \exists u R(x, u)).$$

Если мы теперь по правилу (ι) преобразуем выражение, стоящее после квантора $\forall x$, то приходим к предваренной формуле

$$\forall x \forall y \forall z \exists u (\neg R(x, x) \& (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \& R(x, u)).$$

¹⁾ См. с. 162.

Кроме того, выражение, стоящее после кванторов, можно, преобразовав второй член конъюнкции [по правилу (η)], перевести в конъюнктивную нормальную форму; таким образом, мы получим

$$\forall x \forall y \forall z \exists u (\neg R(x, x) \& (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \& R(x, u)).$$

Способ, которым мы провели это последнее преобразование, носит совершенно общий характер. В самом деле, правило (η) в случае предваренной формулы позволяет нам в выражении, стоящем после кванторов, производить преобразования исчисления высказываний; значит, в частности, мы можем преобразовать это выражение в конъюнктивную или дизъюнктивную нормальную форму.

Приведем, кроме того, результат преобразования в предваренную форму с конъюнктивной нормальной формой после кванторов для формулы $\mathfrak{F}$, которую мы упоминали ¹⁾ в связи с формулой $\mathfrak{F}$; применив правила (θ), (ι) и (η), мы получим здесь формулу

$$\forall x \exists y \forall z (\neg A(x, x) \& A(x, y) \& (\neg A(z, x) \vee A(z, y))).$$

Для таких предваренных формул с конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной формой после кванторной приставки особенно просто может быть построено их отрицание: нужно сначала заменить по правилу (λ) каждый квантор всеобщности соответствующим квантором существования, каждый квантор существования — соответствующим квантором всеобщности, а затем взять отрицание выражения, стоящего после кванторной приставки. Но отрицание конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной формы по правилам исчисления высказываний заменимо выражением, которое получается взаимной заменой знаков $\&$ и $\vee$, а также элементарных формул и их отрицаний. При этом из конъюнктивной нормальной формы получается дизъюнктивная, и наоборот.

Применяя этот способ образования отрицания, мы из формулы, в которую была переведена формула $\mathfrak{F}$, немедленно получим следующее выражение для формулы $\neg \mathfrak{F}$:

$$\exists x \exists y \exists z \forall u (R(x, x) \vee (R(x, y) \& \neg R(y, z) \& \neg R(x, z)) \vee \neg R(x, u)).$$

Приведение формул к предваренному виду играет важную роль при рассмотрении проблемы разрешимости. Так как это преобразование может быть осуществлено для любой формулы исчисления предикатов, то проблему разрешимости достаточно будет решать

¹⁾ См. с. 163.

только для предваренных формул. С помощью *предваренной нормальной формы* производится также и выявление тех случаев, для которых (*помимо одноместного исчисления предикатов*) удастся получить решение проблемы разрешимости.

В каждом из этих случаев фигурирует, с одной стороны, совокупность тех предваренных формул, для которых с помощью соответствующей распознающей процедуры решается вопрос об общезначимости или же о выводимости (коротко: *класс разрешимой проблемой выводимости*), а с другой стороны, двойственная ей совокупность тех предваренных формул, для которых при помощи этой процедуры решается вопрос об опровержимости или же о выполнимости (коротко: *класс разрешимой проблемой выполнимости*). Вторая из этих совокупностей состоит из построенных по правилу (λ) отрицаний формул первой совокупности.

Специальные разрешимые случаи проблемы разрешимости, которые мы хотели бы здесь упомянуть, допускают классификацию по соответствующим классам (с одной стороны, относительно выводимости, а с другой стороны, относительно выполнимости). Классы с разрешимой проблемой выводимости характеризуются следующими свойствами принадлежащих им формул:

1. Кванторы, входящие в приставку, суть либо только кванторы всеобщности, либо только кванторы существования; либо же все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования.

2. Среди кванторов приставки имеется не более двух кванторов существования, причем в этом случае они должны следовать непосредственно друг за другом.

3. Выражение, идущее вслед за кванторами, либо имеет вид конъюнктивной нормальной формы, состоящей только из одного члена, либо получается из такой формы в результате преобразований исчисления высказываний.

Из этих условий, определяющих классы с разрешимой проблемой выводимости, получаются условия для соответствующих классов с разрешимой проблемой выполнимости, если в первых двух случаях поменять местами кванторы всеобщности с кванторами существования, а в третьем случае вместо конъюнктивной нормальной формы говорить о дизъюнктивной.

Специальный характер этих частных случаев решения проблемы разрешимости проявляется в том, что здесь проверку всякий раз можно осуществить с помощью подходящей *конечной* индивидуальной области. Именно, во всех этих трех случаях для любой формулы из класса с разрешимой проблемой выводимости удастся найти такое число f , что эта формула выводима, если она f -тождественна, а для всякой формулы из класса с разрешимой проблемой выполнимости — такое число f , что эта формула либо f -выполнима,

либо опровержима¹⁾. Поэтому тем более получается, что в трех рассмотренных случаях всякая формула из класса с разрешимой проблемой выводимости, тождественная в конечном, является также и выводимой и что всякая формула из класса с разрешимой проблемой выполнимости либо выполнима в конечном, либо опровержима.

В свете сказанного альтернатива между выполнимостью в конечном и опровержимостью имеет место, в частности (согласно второму случаю), для всякой такой предваренной формулы, у которой имеется не более двух кванторов всеобщности, притом непосредственно следующих друг за другом. В случае, когда среди кванторов, входящих в приставку, имеется более двух кванторов всеобщности или когда имеется два квантора всеобщности, разделенных квантором существования, упомянутая альтернатива не обязана выполняться. Это показывают примеры формул

$$\forall x \forall y \forall z \exists u (\neg R(x, x) \& (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \& R(x, u))$$

и

$$\forall x \exists y \forall z (\neg A(x, x) \& A(x, y) \& (\neg A(z, x) \vee A(z, y))),$$

которые мы ранее получили путем преобразований из формул $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$. Действительно, с одной стороны, как мы уже установили²⁾, формулы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ не выполнимы в конечном, а с другой стороны, как мы покажем в гл. VI, они не опровержимы, а потому и приведенные формулы, полученные преобразованием формул $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, не выполнимы в конечном и не опровержимы.

Теперь, что касается решения упомянутых трех случаев проблемы разрешимости, то первый из них может быть разрешен относительно легко; мы будем говорить о нем в гл. V. Для второго случая проблема разрешимости была, независимо друг от друга, решена Гёделем, Кальмаром и Шютте³⁾. Все они рассмотрели соот-

¹⁾ Тем не менее см. т. II (указание 2 к оглавлению т. II). — Прим. ко 2-му изданию.

²⁾ См. с. 38, 162 и далее.

³⁾ См. краткую заметку Гёделя в Erg. math. Kolloq., 1932, № 2, а также его работу: G ö d e l K. Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionen-kalküls. — Monatsh. Math. Phys., 1933, 40, S. 433—443; далее, работу: K a l m a r L. Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen erhalten. — Math. Ann., 1933, 108, № 3, а также работы: S c h ü t t e K. Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. — Math. Ann., 1934, 109, S. 572—603; S c h ü t t e K. Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. — Math. Ann., 1934, 110, S. 161—194. Простейший среди подпадающих под п. 2 и неохватываемых п. 1 случаев проблемы разрешимости рассмотрены в работе: B e r n a y s P., S c h ö n f i n k e l M. Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. — Math. Ann., 1928, 99, № 3. Аккерман и Сколем, независимо друг от друга, решили проблему выполнимости и установили

ветствующий класс с разрешимой проблемой выполнимости и нашли для формул этого класса условие, необходимое для их неопровержимости. Для тех формул, которые удовлетворяют этому условию, Гёдель и Кальмар доказали, что они выполнимы при помощи некоторой модели в финитной арифметике; Шютте доказал, кроме того, их выполнимость в некоторой конечной индивидной области (с числом индивидов, оцениваемым при помощи рассматриваемой формулы). Разрешающую процедуру для третьего случая нашел Эрбран непосредственным применением своей уже упоминавшейся¹⁾ общей теоремы.

3. Разложение формул одноместного исчисления предикатов в примарные формулы; пример. Операции, с помощью которых заданную формулу мы переводим в некоторую предваренную, могут быть выполнены и в обратном направлении; тогда мы приходим к таким преобразованиям, при которых кванторы проносятся насколько можно дальше внутрь, т. е. приближаются по возможности вплотную к элементарным формулам.

Какой-нибудь просто характеризуемой нормальной формы таким путем мы, конечно, не получим. Это можно будет сделать только в случае одноместного исчисления предикатов. Здесь, пронося кванторы внутрь, мы в конце концов приходим к таким формулам, которые получаются применением связок исчисления высказываний к «*примарным формулам*», т. е. к таким формулам, которые либо являются элементарными, либо имеют один из следующих двух видов:

$$\forall x (\mathfrak{P}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(x)),$$

$$\exists x (\mathfrak{P}_1(x) \& \dots \& \mathfrak{P}_f(x)),$$

где

$$\mathfrak{P}_1(a), \dots, \mathfrak{P}_f(a)$$

означают либо элементарные формулы с аргументом a , либо отрицания таких элементарных формул. (Число членов f от случая к случаю может меняться.)

Тот факт, что каждая формула одноместного исчисления предикатов может быть переведена в такую формулу, состоящую из примарных формул, или, как мы будем для краткости говорить, может быть разложена в примарные формулы,

альтернативу, имеющую место между опровержимостью и выполнимостью в конечном, для тех предваренных формул, у которых среди кванторов приставки имеется только один квантор всеобщности. См. Ackermann W. Über die Erfüllbarkeit gewisser Zähl ausdrücke.— Math. Ann., 1928, 100, №№ 4—5; Skolem T. Über die mathematische Logik.— Norsk mat. Tidsskr., 1928, 10.

¹⁾ См. с. 169.

был сделан Г. Беманом отправной точкой его исследования, посвященного одноместному исчислению предикатов; об этом исследовании впоследствии мы будем говорить более подробно¹⁾.

В возможности разложения всякой формулы одноместного исчисления предикатов в примарные формулы можно убедиться следующим образом.

Представим себе, что рассматриваемая нами формула преобразована в предваренную, и рассмотрим последний (самый правый) квантор приставки. Проводя, если потребуется, соответствующее переименование переменных, мы можем добиться того, чтобы связанная переменная была переменной x . Тогда рассматриваемый квантор будет представлять собой $\forall x$ или $\exists x$.

В первом случае мы преобразуем выражение, следующее за $\forall x$, в конъюнктивную нормальную форму, и затем по правилам (θ), (ι) и (η)²⁾ этот квантор всеобщности может быть разнесен по всем членам конъюнкции с учетом наличия в них переменной x ; при этом члены конъюнкции, не содержащие x , окажутся без этого квантора всеобщности.

Каждый из конъюнктивных членов, перед которым стоит квантор $\forall x$, в свою очередь является простой дизъюнкцией, члены которой суть либо элементарные формулы, либо отрицания элементарных формул, либо получаются из формул такого типа заменой свободных переменных связанными.

Теперь те члены дизъюнкции, которые не содержат x , по правилам (ι) и (η) можно вынести за квантор всеобщности. В результате получается, что выражения, перед которыми стоит квантор $\forall x$, будут иметь вид

$$\mathfrak{P}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(x);$$

таким образом, переменная x будет фигурировать только в примарных формулах. Так как кроме переменной x эти формулы никаких переменных больше не содержат, то при дальнейших преобразованиях с ними можно будет обращаться как с нерасчленимым целым, чем-то вроде элементарной формулы без аргументов.

Совершенно аналогичного эффекта мы можем достичь и в случае квантора существования $\exists x$. Мы только должны будем вместо конъюнктивной нормальной формы взять дизъюнктивную.

Если разложение в примарные формулы на этом шаге еще не закончилось, то во всяком случае уменьшилось на единицу количество кванторов, стоящих перед формулой. Тогда описанную

¹⁾ См. с. 250 и далее. В своей работе (Behmann H. Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem.— Math. Ann., 1922, 86, №№ 3—4). Беман, впрочем, не пользовался выражением «примарная формула»; в связи с рассматриваемым методом он говорит о «внесении операторов (кванторов)» (см. §§ 9—10 цитируемого сочинения).

²⁾ См. с. 177 и далее.

процедуру мы можем повторить для того квантора, который теперь окажется на последнем месте. Если фигурирующая в нем переменная отлична от y , то она может быть переименована в y . Полученные к этому времени примарные формулы при этом никаких изменений не претерпят, потому что, как мы уже заметили, с ними можно обращаться как с элементарными формулами без аргументов.

Теперь появятся новые примарные формулы вида

$$\forall y (\mathfrak{P}_1(y) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(y))$$

или

$$\exists y (\mathfrak{P}_1(y) \& \dots \& \mathfrak{P}_f(y)).$$

В этих формулах переменная y может быть переименована в x .

Теперь либо мы уже у цели, либо количество кванторов в приставке снова уменьшилось на единицу, а в прочих отношениях структура формулы осталась прежней — разве лишь добавились новые примарные формулы.

Таким образом можно продолжать до тех пор, пока в приставке вообще не останется ни одного квантора. Тогда результирующая формула будет состоять из одних только примарных.

Описанный способ, вообще говоря, упрощается благодаря тому, что при преобразованиях по правилам исчисления высказываний те составные части формул, которые уже оказались разложенными в примарные формулы, мы можем оставлять без изменений.

В качестве примера на применение нашего метода мы разложим в примарные формулы формулу

$$\exists x \forall y \{ (B(x) \& \neg C \rightarrow A(y)) \& (C \rightarrow \neg B(x) \& (A(y) \rightarrow B(y))) \}.$$

Переименуем сначала x и y в y и x и приведем выражение, идущее за $\exists y \forall x$, к конъюнктивной нормальной форме. У нас получится

$$\exists y \forall x \{ (\neg B(y) \vee C \vee A(x)) \& (\neg C \vee \neg B(y)) \& (\neg C \vee \neg A(x) \vee B(x)) \}.$$

Теперь разнесем квантор всеобщности $\forall x$ по членам конъюнкции, принимая при этом во внимание, что переменную x содержат лишь первый и третий члены.

У нас получится выражение

$$\exists y \{ \forall x (\neg B(y) \vee C \vee A(x)) \& (\neg C \vee \neg B(y)) \& \forall x (\neg C \vee \neg A(x) \vee B(x)) \}.$$

Теперь, вынося в дизъюнкции с предшествующим $\forall x$ из-под квантора всеобщности члены, не зависящие от x , мы получим

$$\exists y \{ (\neg B(y) \vee C \vee \forall x A(x)) \& (\neg C \vee \neg B(y)) \& (\neg C \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x))) \}.$$

В выражении, стоящем после $\exists y$, последний член

$$\neg C \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x)),$$

который уже разложен в примарные формулы, мы можем оставить без изменений.

Выражение

$$(\neg B(y) \vee C \vee \forall x A(x)) \& (\neg C \vee \neg B(y))$$

мы можем сначала преобразовать в

$$\neg B(y) \vee ((C \vee \forall x A(x)) \& \neg C),$$

а это последнее опять привести к дизъюнктивной нормальной форме

$$\neg B(y) \vee (\forall x A(x) \& \neg C).$$

Так мы приходим к формуле

$$\exists y \{ (\neg B(y) \vee (\forall x A(x) \& \neg C)) \& (\neg C \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x))) \}.$$

Теперь мы можем [по правилу (1)] вынести из-под квантора существования $\exists y$ сначала не содержащий y конъюнктивный член

$$\neg C \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x)),$$

а затем и не содержащий y дизъюнктивный член

$$\forall x A(x) \& \neg C,$$

так что у нас получится

$$(\exists y \neg B(y) \vee (\forall x A(x) \& \neg C)) \& (\neg C \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x))).$$

Теперь y может быть переименован в x .

Тем самым мы разложили исходную формулу в примарные. Применяя правила исчисления высказываний и пользуясь формулой (2) исчисления предикатов, мы можем преобразовать полученное разложение в следующую более обобщимую формулу:

$$(\forall x B(x) \rightarrow \forall x A(x)) \& (C \rightarrow \exists x \neg B(x) \& \forall x (A(x) \rightarrow B(x))).$$

§ 6. Дедуктивное равенство и дедукционная теорема

1. Понятие дедуктивного равенства; два существенных случая дедуктивного равенства; переводимость и дедуктивное равенство. Обе рассмотренные нами нормальные формы, предваренная нормальная форма и разложение в примарные формулы (последняя введена специально для одноместного исчисления предикатов), уже дали нам определенное представление о формализме исчисления предикатов. Еще более полное представление нам дадут некоторые теоремы общего характера, к изложению которых мы сейчас перейдем. Теоремы эти связаны с понятием *дедуктивного равенства*.

Мы будем говорить, что формула $\mathcal{A}$ дедуктивно равна формуле $\mathcal{B}$, если $\mathcal{A}$ выводима из $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ выводима из $\mathcal{A}$ по правилам исчисления предикатов. На первый взгляд кажется, что это понятие по существу совпадает с понятием переводимости. Тем не менее требование переводимости $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, т. е. выводимости эквивалентности

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B},$$

является более сильным, чем требование дедуктивного равенства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Дедуктивное равенство вытекает из переводимости; действительно, с помощью формулы

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}$ может быть выведено из $\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}$ — из $\mathcal{B}$. Однако обратное утверждение места не имеет: переводимость из дедуктивного равенства не вытекает.

Поясним это на следующих двух типичных примерах:

1. Формула

$$A$$

(A как отдельно взятая формульная переменная) дедуктивно равна формуле $\neg A$. Действительно, $\neg A$ получается из A путем подстановки; с другой стороны, из $\neg A$ мы можем подстановкой получить $\neg \neg A$, а затем, воспользовавшись тождественной формулой

$$\neg \neg A \rightarrow A,$$

получить и A .

Однако переводимость A в $\neg A$ места не имеет; действительно, если бы формула

$$A \sim \neg A$$

была выводима в исчислении предикатов, то в нем была бы выводима вообще любая формула, что, как мы видели, места не имеет.

2. Формула

$$A(a)$$

дедуктивно равна формуле

$$\forall x A(x).$$

Вторую из этих формул можно получить из первой по правилу ($\forall'$)¹⁾, а первую из второй, пользуясь формулой (a). Тем не менее эти формулы друг в друга не переводимы. Действительно, если бы формула

$$A(a) \sim \forall x A(x)$$

¹⁾ См. с. 146.

была выводима, то выводима была бы и

$$A(a) \rightarrow \forall x A(x).$$

Однако это не так, потому что формула эта не является даже 2-тождественной.

Каждый из этих двух рассмотренных нами примеров представляет собой некий класс случаев, когда между формулами имеется дедуктивное равенство, но переводимость, вообще говоря, места не имеет.

Именно, первый пример является частным случаем следующей теоремы: *любые две формулы исчисления высказываний, не являющиеся тождественно истинными, дедуктивно равны*. Эта теорема может быть получена на основании установленного ранее факта¹⁾, состоящего в том, что если к исходным формулам исчисления высказываний присоединить формулу, не являющуюся тождественно истинной, то с помощью подстановок и схемы заключения можно будет вывести любую формулу.

Второй пример может быть обобщен до следующей теоремы: *любая формула $\mathcal{A}$, содержащая одну или несколько свободных индивидуальных переменных, дедуктивно равна той формуле, которая получится из $\mathcal{A}$, если все эти переменные или же некоторые из них связать кванторами всеобщности, поставленными перед формулой*. Эта теорема извлекается из правил (ϵ) и (ϵ'). Из нее, в частности, следует, что при формальном изображении каких-либо утверждений мы всегда можем обойтись без свободных индивидуальных переменных.

Различие между переводимостью и дедуктивным равенством коротко может быть охарактеризовано следующим образом: из дедуктивного равенства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ следует, что формула $\mathcal{A}$ в любом выводе всегда может быть заменена формулой $\mathcal{B}$; но из переводимости следует помимо того, что $\mathcal{A}$ может быть заменена посредством $\mathcal{B}$ не только как целая формула, но и в том случае, когда она является составной частью какой-нибудь другой формулы.

Причина этого различия заключается в той роли, которую свободные переменные играют в правиле подстановки и в использовании схем (α) и (β). Эти правила обращения со свободными переменными на самом деле таковы, что в случае выводимости формулы $\mathcal{B}$ из формулы $\mathcal{A}$ выводимость формулы $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ мы все же гарантировать не можем. Именно, заключить о выводимости формулы $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ из того, что формула $\mathcal{B}$ выводима из формулы $\mathcal{A}$, вообще говоря, невозможно уже в том случае, если при выводе $\mathcal{B}$ из $\mathcal{A}$ только что упомянутые правила оперирования со свободными переменными применялись хотя бы к одной свободной переменной, входящей в формулу $\mathcal{A}$.

¹⁾ См. гл. III, с. 98.

2. Дедукционная теорема. Тем не менее имеет место следующая теорема. Если формула $\mathfrak{B}$ выводима из формулы $\mathfrak{A}$ таким образом, что фигурирующие в формуле $\mathfrak{A}$ свободные переменные остаются в выводе (в качестве параметров) незатронутыми, то формула

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

оказывается выводимой без использования формулы $\mathfrak{A}$.

Утверждение этой теоремы справедливо не только для формул чистой логики предикатов, но и для таких формул, в которых встречаются предикатные (а возможно, также и индивидуальные) символы; кроме того, утверждение теоремы можно понимать в финитном смысле. Это значит, что нами будет указан способ, позволяющий по заданному выводу формулы $\mathfrak{B}$, использующему формулу $\mathfrak{A}$ в качестве исходной, получить при соблюдении упомянутого условия вывод формулы

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Относительно заданного вывода мы сначала сделаем некоторое более сильное предположение; именно, мы будем считать, что в формулу $\mathfrak{A}$ не входят ни [выделенная в схемах (α) и (β)] переменная a , ни какая-либо другая переменная, в применении к которой в выводе $\mathfrak{B}$ производится какая-нибудь подстановка.

Наше рассуждение будет заключаться в том, что ко всякой формуле, входящей в вывод формулы $\mathfrak{B}$, мы имплицитно добавим посылку $\mathfrak{A}$. В результате вместо заключительной формулы $\mathfrak{B}$ мы получим интересующую нас формулу $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, а место исходной формулы $\mathfrak{A}$ займет формула $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, которая получается при помощи подстановки из тождественно истинной формулы

$$A \rightarrow A.$$

В итоге мы оказались бы у цели, если бы полученная последовательность формул носила характер вывода. Разумеется, вообще говоря, это будет не так, потому что в результате повсеместного добавления посылки $\mathfrak{A}$ характеристические свойства вывода могут нарушиться. Тем не менее вставкой соответствующих формул эти свойства могут быть полностью восстановлены.

Именно это мы сейчас и покажем, рассмотрев различные составные части вывода: исходные формулы (формулы, вводимые непосредственно, вне связи с предшествующими формулами), подстановки, переименования связанных переменных и применения соответствующих схем.

Разберем случай, когда рассматриваемая формула является исходной. Итак, пусть $\mathfrak{C}$ — некоторая исходная формула нашего первоначального вывода; вместо нее у нас теперь должна оказаться

формула

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}.$$

Эта формула, вообще говоря, не является исходной. Тем не менее ее можно вывести из формулы $\mathfrak{C}$ с помощью тождественной формулы

$$A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Если мы каждую из модифицированных исходных формул дополним таким выводом, то в части, касающейся исходных формул, — за исключением формулы $\mathfrak{A}$, которая теперь уже не числится среди исходных, — первоначальная структура будет вывода восстановлена.

Добавление в формулах посылки $\mathfrak{A}$ не разрушает подстановок, так как по сделанному нами предположению переменные, вместо которых производятся какие-либо подстановки, в $\mathfrak{A}$ не входят. Переименование связанных переменных также не затрагивается добавлением посылок $\mathfrak{A}$.

Любая схема заключения

$$\frac{\mathfrak{C} \quad \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{E}}{\mathfrak{E}}$$

переходит в последовательность, состоящую из формул

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \quad \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{E})}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{E}}.$$

Вместо этой последовательности мы всякий раз можем вставить вывод формулы

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{E}$$

из формул

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{E}),$$

который можно получить, воспользовавшись тождественно истинной формулой

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Столь же просто решается вопрос и в случае схем (α) и (β) : вместо перехода от

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)$$

к

$$\mathfrak{A} \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x),$$

производимого по схеме (α), мы получаем последовательность

$$\mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}(a)),$$

$$\cdot \quad \mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{U} \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x)).$$

Но в данном случае переход от первой формулы ко второй может быть осуществлен по правилу (γ) с учетом сделанного нами предположения о том, что $\mathfrak{U}$ не содержит переменной a . Что же касается перехода по схеме (β):

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{U},$$

$$\exists x \mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{U},$$

то вместо него мы получаем последовательность

$$\mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{U}),$$

$$\mathfrak{U} \rightarrow (\exists x \mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{U});$$

мы можем дополнить ее такой последовательностью формул, которая окажется согласованной с нашими правилами. Именно, сначала по правилам исчисления высказываний мы переставим в формуле

$$\mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{U})$$

посылки, затем к полученной формуле

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow (\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U})$$

применим схему (β), что возможно в силу предположения, сделанного нами относительно $\mathfrak{U}$, и наконец, в формуле

$$\exists x \mathfrak{B}(x) \rightarrow (\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U})$$

мы снова переставим посылки.

Итак, мы действительно можем построить вывод формулы $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$, в котором формула $\mathfrak{U}$ в качестве исходной не используется.

Таким образом, мы доказали нашу теорему при более сильном предположении, что формула $\mathfrak{U}$ не содержит ни одной из тех переменных, вместо которых производилась какая-либо подстановка, а также не содержит переменной a . Но теперь мы хотели бы, в полном соответствии с формулировкой нашей теоремы, предполагать только лишь то, что при выводе $\mathfrak{B}$ остаются незатронутыми свободные переменные формулы $\mathfrak{U}$. Мы не исключаем того, что будет производиться подстановка вместо какой-нибудь переменной, совпадающей с одной из переменных формулы $\mathfrak{U}$, или того, что переменная a , с одной стороны, будет выступать в качестве переменной в схеме (α) или (β), а с другой стороны, будет входить в $\mathfrak{U}$. Однако в таком случае вхождение переменной, используемое в подстановке или в применении соответствующей схемы, при обратном

прослеживании данного вывода не должно соответствовать вхождению этой переменной в исходную формулу $\mathfrak{U}$.

Например, если формула $A(a)$ выводится из формулы $\forall x (A(x) \& B(x))$ при помощи ряда формул

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a),$$

$$\forall x (A(x) \& B(x)) \rightarrow A(a) \& B(a),$$

$$\forall x (A(x) \& B(x))$$

$$\frac{A(a) \& B(a)}{A(a) \& B(a)},$$

$$A \& B \rightarrow A,$$

$$A(a) \& B(a) \rightarrow A(a),$$

$$A(a) \& B(a)$$

$$\frac{A(a)}{A(a)}$$

то, хотя в самом начале этого вывода производится подстановка вместо формульной переменной A с одним аргументом, все же совпадающая с ней формульная переменная в третьей формуле вывода $\forall x (A(x) \& B(x))$ оказывается незатронутой, так как эта формула вводится в качестве исходной уже после того, как была произведена указанная подстановка.

Мы теперь можем, не разрушая структуры вывода, поступить следующим образом: каждую переменную формулы $\mathfrak{U}$, с которой имеет место такая ситуация, заменить какой-нибудь новой, ранее не встречавшейся переменной (того же типа) и произвести эту замену всюду, где рассматриваемая переменная, в результате подстановки или повторения, прямо или косвенно *происходит* из формулы $\mathfrak{U}$.

В рассмотренном выше примере применение этой процедуры свелось бы к тому, что во всех формулах, за исключением первой формулы $\forall x A(x) \rightarrow A(a)$, формульная переменная A с одним аргументом была бы заменена какой-нибудь не встречавшейся ранее в выводе формульной переменной (например, C) с одним аргументом. (Формульная переменная A без аргументов этой заменой не была бы затронута.) Мы видим, что эта подстановка не нарушила бы структуры доказательства.

Эффект произведенной замены состоит в том, что мы приходим к ранее рассмотренному случаю (соответствующие предположения оказываются выполненными). При этом вместо формул $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ в результате выполненных замен получатся некоторые формулы $\mathfrak{U}^*$ и $\mathfrak{B}^*$. Из приведенных нами выше рассуждений вытекает выводимость формулы

$$\mathfrak{U}^* \rightarrow \mathfrak{B}^*.$$

Но в этой выводимой формуле произведенные замены мы можем с помощью *подстановок* переделать в обратном порядке, и тогда

мы вернемся к формуле

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B};$$

в силу сказанного, эта последняя также окажется выводимой.

Доказанную таким образом теорему мы можем дополнить еще одним замечанием, относящимся к тому случаю, когда в формуле

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

имеются предикатные или индивидные символы *): Если формула, в которой встречаются предикатные или индивидные символы, выводима средствами исчисления предикатов без дополнительных исходных формул, то она может быть получена подстановкой из некоторой выводимой формулы исчисления предикатов ¹⁾.

В самом деле, предикатные и индивидные символы могут появиться в выводе рассматриваемой формулы только в результате подстановки. Если мы теперь заменим каждый введенный посредством подстановки предикатный символ какой-нибудь до сих пор не встречавшейся в выводе формульной переменной и соответственно каждый введенный индивидный символ — какой-нибудь до сих пор не встречавшейся свободной переменной, то структура вывода не нарушится, а вместо заключительной формулы вывода мы получим некоторую новую формулу, отличающуюся от нее только тем, что каждый предикатный символ заменен некоторой формульной переменной, а каждый индивидный символ — некоторой свободной индивидной переменной, причем использованные для этой замены переменные отличны друг от друга и от переменных, входящих в первоначальную заключительную формулу. Поэтому новая заключительная формула оказывается выводимой формулой исчисления предикатов и первоначальную заключительную формулу мы теперь можем получить из нее при помощи подстановки.

На основе этих дополнительных соображений мы приходим теперь к следующей формулировке нашей теоремы, которую мы в этой ее редакции будем называть *дедукционной теоремой*.

Если формула $\mathcal{B}$ выводима из формулы $\mathcal{A}$ таким образом, что встречающиеся в $\mathcal{A}$ свободные переменные остаются внутри вывода незатронутыми, то формула

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

либо сама является выводимой формулой исчисления предикатов, либо может быть получена из выводимой формулы в результате подстановки.

*) См. прим. перев. на с. 122.

¹⁾ Относительно проводимого здесь различия между «формулами, выводимыми средствами исчисления предикатов» и «выводимыми формулами исчисления предикатов» см. с. 141.

Заметим, что предположение, сделанное относительно вывода формулы $\mathcal{B}$, выполняется всякий раз, когда формула $\mathcal{A}$ не содержит никаких свободных переменных.

3. Применения дедукционной теоремы: сведение вопросов, связанных с аксиоматикой, к вопросам выводимости формул в исчислении предикатов; рассмотрение одного распространенного способа умозаключения. Наша теорема находит одно очень важное применение при логическом исследовании различных систем аксиом. Рассмотрим какую-нибудь систему аксиом «первой степени», т. е. систему таких аксиом, которые в рамках логической символики изображаются формулами, не содержащими формульных переменных. Тогда эти аксиомы мы сможем записать таким образом, чтобы никакие свободные переменные в них не встречались вообще; этого можно добиться, связывая в каждой изображающей аксиому формуле все входящие в нее свободные индивидные переменные соответствующими кванторами всеобщности. При этой каждая формула перейдет в некоторую дедуктивно ей равную формулу. Пусть теперь нам дано такого рода представление рассматриваемой системы аксиом посредством формул

$$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_f$$

без свободных переменных, и пусть $\mathcal{S}$ — формула, изображающая какую-нибудь теорему, выводимую из этих аксиом. Пусть доказательство этой теоремы получается в результате применения одних только элементарных логических умозаключений, допускающих формализацию в рамках исчисления предикатов (причем к символам исчисления предикатов добавляются предикатные символы, обозначающие основные предикаты этой системы аксиом, а также быть может, и какие-нибудь индивидные символы). Эта формализация заключается тогда в некотором выводе формулы $\mathcal{S}$ из формул $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_f$ средствами исчисления предикатов. Из этого вывода мы немедленно получим некоторый вывод $\mathcal{S}$ из формулы $\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_f$. Так как формула $\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_f$, вследствие предположений, сделанных относительно $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_f$, содержит только связанные переменные, то мы можем применить дедукционную теорему, из которой вытекает, что формула

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_f \rightarrow \mathcal{S}$$

может быть получена из некоторой выводимой формулы исчисления предикатов с помощью подстановок.

Применим этот результат к случаю, когда рассматриваемая система аксиом является противоречивой. Тогда из формул $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_f$ оказывается выводимой некоторая формула $\mathcal{B}$ вместе с ее отрицанием. Вместе с ними оказывается выводимой и формула $\mathcal{B} \& \neg \mathcal{B}$. Если мы возьмем эту формулу в качестве $\mathcal{S}$, то

окажется, что формула

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{B} \& \neg \mathcal{B}$$

может быть соответствующими подстановками получена из некоторой выводимой формулы исчисления предикатов. Но указанная формула средствами исчисления высказываний может быть преобразована в отрицание формулы

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_r.$$

Таким образом, если аксиомы $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ приводят к противоречию, то каждая формула, которая получается из формулы $\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_r$ в результате замены предикатных символов формульными переменными с тем же самым числом аргументов, а индивидуальных символов — свободными индивидуальными переменными, должна быть опровержимой в исчислении предикатов. Отсюда и вытекает справедливость той теоремы, которую мы приводили при разъяснении взаимосвязи между непротиворечивостью систем аксиом и неопровержимостью логических формул¹⁾.

Вернемся теперь к нашей дедукционной теореме и извлечем из нее еще одно следствие. Пусть снова формула $\mathcal{B}$ выводима из некоторой формулы $\mathcal{A}$. Однако относительно этого вывода мы сейчас не будем предполагать, что все свободные переменные формулы $\mathcal{A}$ остаются незатронутыми. Будем лишь предполагать, что в $\mathcal{A}$ остаются незатронутыми *формульные переменные*. Тогда можно будет утверждать, что если формула $\mathcal{A}'$ получается из формулы $\mathcal{A}$ в результате связывания свободных индивидуальных переменных в $\mathcal{A}$ кванторами всеобщности, написанными в начале этой формулы, то формула $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}$ будет выводимой (без использования формулы $\mathcal{A}$).

Действительно, согласно правилу (ε')²⁾, формула $\mathcal{A}$ выводима из $\mathcal{A}'$ и в этом выводе *формульные переменные, входящие в $\mathcal{A}'$, остаются незатронутыми*. Но, по предположению, формула $\mathcal{B}$ выводима из $\mathcal{A}$ при незатронутых формульных переменных. Тем самым мы получаем некоторый вывод $\mathcal{B}$ из формулы $\mathcal{A}'$, при котором формульные переменные в $\mathcal{A}'$ остаются незатронутыми. $\mathcal{A}'$ не содержит никаких свободных переменных, кроме формульных. Следовательно, дедукционная теорема применима, и отсюда получается, что формула

$$\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}$$

является выводимой.

В частности, этот результат мы можем применять для того, чтобы избавляться от необходимости выводить те или иные форму-

¹⁾ См. с. 170.

²⁾ См. с. 175.

лы. Например, мы установили¹⁾ [правило (ξ)], что из

$$A(a, b) \rightarrow B(a, b)$$

может быть выведена формула

$$\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x \forall y B(x, y),$$

причем этот вывод протекает при незатронутых формульных переменных A и B (каждая из них с двумя аргументами). Отсюда по только что доказанной теореме немедленно следует выводимость формулы

$$\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow (\forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x \forall y B(x, y)).$$

Совершенно тем же самым способом мы убеждаемся в выводимости следующих, аналогично построенных, но еще более сложных формул:

$$\forall x \forall y' (A(x, y) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow (\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \forall x \exists y B(x, y)),$$

$$\forall x \forall y \forall z (A(x, y, z) \rightarrow B(x, y, z)) \rightarrow$$

$$(\exists x \forall y \exists z A(x, y, z) \rightarrow \exists x \forall y \exists z B(x, y, z)),$$

$$\forall x \forall y \forall z (A(x, y, z) \rightarrow B(x, y, z)) \rightarrow$$

$$\forall x \exists y \forall z A(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y \forall z B(x, y, z)).$$

Кроме того, с помощью дедукционной теоремы можно весьма просто разобраться с одним очень употребительным в содержательном мышлении способом умозаключения, состоящим в том, что на основании какой-либо доказанной нами теоремы существования вида «существует объект, обладающий свойством $\mathcal{A}$ » выводится некоторый новый индивидуальный символ (например, α), а затем проводится следующее рассуждение: «пусть α обладает свойством $\mathcal{A}$; ...». Мы намерены показать, что этот способ умозаключения дает только то, что мы и так получаем с помощью исчисления предикатов, в предположении, что (кроме этого способа умозаключения) мы применяем только такие рассуждения, которые могут быть формализованы в исчислении предикатов, а также что в расчет принимаются только такие рассуждения, в которых введенный нами символ α не содержится.

С этой целью мы сначала представим имеющееся у нас доказательство в формальном виде. Тогда у нас прежде всего будет иметься некоторый вывод формулы вида

$$\exists x \mathcal{A}(x)$$

не содержащей никаких свободных переменных. Вслед за этим мы вводим символ α и формула $\mathcal{A}(\alpha)$ берется в качестве новой исход-

¹⁾ См. с. 176.

ной формулы. Затем с использованием формулы $\mathfrak{A}(\alpha)$ выводится некоторая формула $\mathfrak{B}$, в которой символ α не встречается и относительно которой мы без ограничения общности можем считать, что она не содержит никаких свободных индивидуальных переменных.

Мы теперь покажем, что формула $\mathfrak{B}$ может быть выведена и прямо из формулы $\exists x \mathfrak{A}(x)$. Действительно, из вывода $\mathfrak{B}$ с помощью формулы $\mathfrak{A}(\alpha)$, согласно дедукционной теореме, мы получаем (так как $\mathfrak{A}(\alpha)$ не содержит никаких свободных переменных) вывод формулы

$$\mathfrak{A}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{B},$$

который осуществляется средствами исчисления предикатов без использования формулы $\mathfrak{A}(\alpha)$. В этом выводе, не нарушая его дедуктивной структуры, вместо символа α можно всюду подставить какую-нибудь ранее не встречающуюся свободную индивидуальную переменную (например, c), и тогда мы получим вывод формулы

$$\mathfrak{A}(c) \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Так как переменная a в ней не встречается ($\mathfrak{A}(\alpha)$ и $\mathfrak{B}$ по предположению не содержат свободных индивидуальных переменных), то, подставив a вместо c , мы получим формулу

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B},$$

а из нее по схеме (β) получим

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Итак, эта последняя формула выводима в исчислении предикатов и, значит, в сочетании с формулой $\exists x \mathfrak{A}(x)$ она дает нам формулу $\mathfrak{B}$.

Возникает вопрос о том, нельзя ли распространить проведенное здесь рассуждение и на тот случай, когда нам дается теорема существования вида «для произвольных $a, b, \dots, k$ существует l такое, что $\mathfrak{A}(a, b, \dots, k, l)$ » и когда вводится специальный символ уже не для индивида, а для функции. Действительно, такое распространение может быть осуществлено, но приводить доказательство этого факта нам сейчас не хотелось бы; позднее оно будет получено из одной весьма общей теоремы ¹⁾.

4. Дедуктивное равенство произвольной формулы подходящей сколемовской нормальной форме, а также нормальной дизъюнкции; упрощение этого перехода. Теперь мы перейдем к другой общей теореме исчисления предикатов, касающейся предваренной нормальной формы. Как мы уже знаем, каждая формула исчисления предикатов может быть переведена в некоторую предваренную форму. Здесь имеется в виду преобразование типа переводимости.

¹⁾ См. указание 3 после оглавления т. II.

Если же мы будем интересоваться лишь дедуктивным равенством, то можно будет дополнительно предъявить особые требования к порядку следования предваряющих формулу кванторов всеобщности и существования. К этому кругу вопросов относится одна теорема, которую мы хотели бы назвать *теоремой Сколема*, поскольку она получается из одного доказанного Сколемом в связи с проблемой распознавания выполнимости формул утверждения ¹⁾, если перейти от вопроса о выполнимости формул к вопросу о их выводимости. Эта теорема утверждает, что всякая формула исчисления предикатов дедуктивно равна такой предваренной нормальной форме, у которой все кванторы существования предшествуют всем кванторам всеобщности («сколемовская нормальная форма»).

Мы проведем доказательство таким образом, чтобы заодно получить и некоторый более сильный результат. Именно, мы покажем, что всякая формула исчисления предикатов дедуктивно равна некоторой дизъюнкции, членами которой являются такие предваренные формулы, в кванторной приставке которых имеется не более одного квантора всеобщности, и в случае, когда такой квантор имеется, он является последним квантором приставки.

Из этого утверждения теорема Сколема может быть получена совсем просто. Действительно, дизъюнкция, члены которой суть предваренные формулы с нужным нам свойством (такие формулы мы будем называть «*нормальными дизъюнкциями*»), всегда переводима в сколемовскую нормальную форму. Пусть, например, у нас имеется нормальная дизъюнкция

$$\exists x \exists y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \vee \exists y \exists u \mathfrak{B}(y, u) \vee \exists z \forall x \mathfrak{C}(x, z),$$

где $\mathfrak{A}(x, y, z)$, $\mathfrak{B}(y, u)$ и $\mathfrak{C}(x, z)$ кванторов не содержат; тогда с помощью переименований переменных мы можем сначала перевести ее в формулу

$$\exists x \exists y \forall z \mathfrak{A}(x, y, z) \vee \exists x \exists y \mathfrak{B}(x, u) \vee \exists x \forall u \mathfrak{C}(u, x),$$

¹⁾ См. уже упоминавшуюся работу: Skolem T. Logisch-kombinatorische Untersuchungen... — Vidensk. Skrifter, I Mat.-nat. Kl., 1920, № 4. В этой работе Сколем показал, что с точки зрения выполнимости любая формула исчисления предикатов равнозначна такой предваренной формуле, у которой все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования. Это рассуждение позволяет произвести переход от проблемы выполнимости к проблеме выводимости, причем в окончательном результате кванторы всеобщности и существования меняются ролями. Это позволяет совершить переход к сформулированной в тексте теореме и к ее доказательству. Уклон в сторону теории доказательств можно найти уже в работе Гёделя: Gödel K. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. — Monatsh. Math. Phys., 1930, 37, № 2, теорема IV. Доказательство первоначальной теоремы Сколема о выполнимости читатель может найти в т. II (указание 4 после оглавления т. II). Для сравнения можно рекомендовать познакомиться с ним уже сейчас.

а эту формулу, применяя правила (θ) и (ι), можно будет перевести в

$$\exists x \exists y \forall z \forall u (\mathfrak{X}(x, y, z) \vee \mathfrak{B}(x, y) \vee \mathfrak{C}(u, x)),$$

что и даст нам искомую сколемовскую нормальную формулу.

Изложенный на этом примере метод применим и в общем случае. Поэтому для доказательства теоремы Сколема достаточно будет показать, что всякая формула исчисления предикатов дедуктивно равна некоторой нормальной дизъюнкции. Мы рассмотрим это доказательство на примере, причем можно считать, что рассматриваемая формула с самого начала дана в предваренной нормальной форме. Пусть она имеет вид

$$((1)) \quad \forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u),$$

и при этом $\mathfrak{X}(x, y, z, u)$ уже не содержит кванторов всеобщности и существования. Для этой формулы мы следующим образом построим некоторую дедуктивно равную ей формулу. Возьмем три не встречающиеся в данной формуле формульные переменные — B с тремя аргументами, C с двумя аргументами и D с одним аргументом — и будем исходить из формул

$$\forall x \forall y \forall z (A(x, y, z) \rightarrow B(x, y, z)) \rightarrow (\forall x \exists y \forall z A(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y \forall z B(x, y, z))$$

и

$$\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow C(x, y)) \rightarrow (\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \forall x \exists y C(x, y)),$$

выводимость которых мы установили на с. 201, а также из формулы (11)¹⁾

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)).$$

Подставив в первой формуле $\exists u \mathfrak{X}(a, b, c, u)$ вместо именной формы $A(a, b, c)$, во второй $\forall z B(a, b, z)$ вместо $A(a, b)$ и в третьей $\exists y C(a, y)$ вместо $A(a)$ и $D(a)$ вместо $B(a)$, мы получим следующие три формулы:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z (\exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z)) \rightarrow \\ (\forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow \forall x \exists y \forall z B(x, y, z)), \\ \forall x \forall y (\forall z B(x, y, z) \rightarrow C(x, y)) \rightarrow (\forall x \exists y \forall z B(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y C(x, y)), \\ \forall x (\exists y C(x, y) \rightarrow D(x)) \rightarrow (\forall x \exists y C(x, y) \rightarrow \forall x D(x)). \end{aligned}$$

Если теперь мы присоединим к ним нашу формулу

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u),$$

то с помощью исчисления высказываний мы можем в первой из трех упомянутых выше формул устроить вторую посылку (пере-

¹⁾ См. с. 153.

становкой посылок и применением схемы заключения), так что получится

$$\forall x \forall y \forall z (\exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z)) \rightarrow \forall x \exists y \forall z B(x, y, z).$$

Эта формула вместе со второй и третьей из указанных выше формул по схеме заключения с применением тождественной истинной формулы

$$(A \rightarrow U) \rightarrow \{(B \rightarrow (U \rightarrow V)) \rightarrow ((C \rightarrow (V \rightarrow W)) \rightarrow (A \& B \& C \rightarrow W))\}$$

дает формулу

$$((2)) \quad \forall x \forall y \forall z (\exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z)) \& \forall x \forall y (\forall z B(x, y, z) \rightarrow C(x, y)) \& \forall x (\exists y C(x, y) \rightarrow D(x)) \rightarrow \forall x D(x).$$

Тем самым формула ((2)) оказывается выводимой из заданной нам формулы

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u).$$

Имеет место и обратная выводимость. Действительно, если в предыдущей формуле вместо $B(a, b, c)$, $C(a, b)$ и $D(a)$ подставить соответственно формулы $\exists u \mathfrak{X}(a, b, c, u)$, $\forall z \exists u \mathfrak{X}(a, b, z, u)$ и $\exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(a, y, z, u)$, то получится — поскольку по нашему предположению переменные B , C и D в $\mathfrak{X}(x, y, z, u)$ не входят — формула

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z (\exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u)) \& \\ \forall x \forall y (\forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u)) \& \\ \forall x (\exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u) \rightarrow \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u)) \rightarrow \\ \forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u). \end{aligned}$$

В ее посылке стоит конъюнкция, члены которой являются выводимыми формулами. Поэтому сама эта конъюнкция также выводима и по схеме заключения мы получаем

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{X}(x, y, z, u),$$

т. е. формулу ((1)). Тем самым (при сделанных предположениях относительно формульных переменных) мы установили, что заданная нам формула ((1)) дедуктивно равна формуле ((2)).

Это дедуктивное равенство можно объяснить, сравнив эти формулы с точки зрения их содержательной интерпретации. В самом деле, легко убедиться, что общезначимость формулы ((1)) равнозначна общезначимости формулы ((2)). Доказательство дедуктивного равенства формул ((1)) и ((2)) как раз и дает нам усиление этого факта в духе теории доказательств.

Теперь формула ((2)) может быть переведена в нормальную дизъюнкцию. Именно, сначала по правилам исчисления высказыва-

ний ее можно будет преобразовать в формулу

$$\neg \forall x \forall y \forall z (\exists u \mathcal{A}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z)) \vee \neg \forall x \forall y (\forall z B(x, y, z) \rightarrow C(x, y)) \vee \neg \forall x (\exists y C(x, y) \rightarrow D(x)) \vee \forall x D(x);$$

далее, по правилу (λ)¹⁾ формулу

$$\neg \forall x \forall y \forall z (\exists u \mathcal{A}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z))$$

можно будет преобразовать в

$$\exists x \exists y \exists z \neg (\exists u \mathcal{A}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z)),$$

затем, по правилам исчисления высказываний и по правилу (η)²⁾, в

$$\exists x \exists y \exists z (\exists u \mathcal{A}(x, y, z, u) \& \neg B(x, y, z))$$

и, по правилам (ι) и (η), в

$$\exists x \exists y \exists z \exists u (\mathcal{A}(x, y, z, u) \& \neg B(x, y, z));$$

совершенно аналогичным образом формулу

$$\neg \forall x \forall y (\forall z B(x, y, z) \rightarrow C(x, y))$$

можно преобразовать в

$$\exists x \exists y \forall z (B(x, y, z) \& \neg C(x, y))$$

и формулу

$$\neg \forall x (\exists y C(x, y) \rightarrow D(x))$$

в

$$\exists x \exists y (C(x, y) \& \neg D(x)),$$

так что в целом мы получим формулу

$$\exists x \exists y \exists z \exists u (\mathcal{A}(x, y, z, u) \& \neg B(x, y, z)) \vee \exists x \exists y \forall z (B(x, y, z) \& \neg C(x, y)) \vee \exists x \exists y (C(x, y) \& \neg D(x)) \vee \forall x D(x).$$

Эта формула имеет искомый вид нормальной дизъюнкции и при этом она дедуктивно равна заданной формуле

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathcal{A}(x, y, z, u),$$

так как мы получили ее путем соответствующего преобразования из формулы, дедуктивно ей равной. Из рассмотрения этого примера можно без труда извлечь и общий метод, применяя который можно для любой заданной формулы построить дедуктивно равную ей нормальную дизъюнцию. Тем самым мы заодно получили и доказательство теоремы Сколема.

Д о п о л н е н и е 1. Рассмотрение приведенного нами доказательства непосредственно показывает, что теорема Сколема, а также и более сильная теорема о нормальной дизъюнкции, оста-

¹⁾ См. с. 181.

²⁾ См. с. 177.

ется справедливой и в том случае, если мы будем рассматривать такие формулы, в которых кроме логических знаков и переменных фигурируют также предикатные, а быть может, и индивидуальные символы.

Д о п о л н е н и е 2. Процедуру перехода от заданной предваренной формулы к нормальной дизъюнкции мы выбрали с таким расчетом, чтобы запоминание ее было возможно более легким; именно, каждому в отдельности квантору всеобщности или существования, входящему в приставку предваренной формулы, не считая первого из них и следуя в обратном порядке, мы поставили в соответствие некоторую формульную переменную.

В рассматриваемом нами примере формулы

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathcal{A}(x, y, z, u)$$

квантору существования $\exists u$ ставится в соответствие формульная переменная B с тремя аргументами, квантору всеобщности $\forall z$ — переменная C с двумя аргументами и квантору существования $\exists y$ — переменная D с одним аргументом.

Однако обычно хватает меньшего числа формульных переменных; действительно, не изменяя нашей процедуры в остальном, можно объединить в одно целое последовательность кванторов существования с одним квантором всеобщности, следующим за ними, и такой группе кванторов достаточно будет поставить в соответствие всего лишь одну формульную переменную.

Так, при рассмотрении формулы

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathcal{A}(x, y, z, u)$$

можно сэкономить одну формульную переменную, сопоставив последовательности $\exists y \forall z$ только одну переменную. Это значит, что в качестве формулы, дедуктивно равной нашей исходной, мы можем взять формулу

$$\forall x \forall y \forall z (\exists u \mathcal{A}(x, y, z, u) \rightarrow B(x, y, z)) \&$$

$$\forall x (\exists y \forall z B(x, y, z) \rightarrow C(x)) \rightarrow \forall x C(x),$$

преобразование которой дает нормальную дизъюнцию

$$\exists x \exists y \exists z \exists u (\mathcal{A}(x, y, z, u) \& \neg B(x, y, z)) \vee$$

$$\exists x \exists y \forall z (B(x, y, z) \& \neg C(x)) \vee \forall x C(x).$$

Подобным же образом для формулы

$$\exists x \forall y \exists z \forall u \forall v \mathcal{A}(x, y, z, u, v),$$

в которой не встречаются формульные переменные B и C (с аргументами), мы получим дедуктивно равную ей формулу

$$\forall x \forall y \forall z \forall u (\forall v \mathcal{A}(x, y, z, u, v) \rightarrow B(x, y, z, u)) \&$$

$$\forall x \forall y (\exists z \forall u B(x, y, z, u) \rightarrow C(x, y)) \rightarrow \exists x \forall y C(x, y),$$

которая может быть переведена в нормальную дизъюнкцию

$$\exists x \exists y \exists z \exists u \forall v (\mathcal{A}(x, y, z, u, v) \& \neg B(x, y, z, u)) \vee \\ \exists x \exists y \exists z \forall u (B(x, y, z, u) \& \neg C(x, y)) \vee \exists x \forall y C(x, y).$$

Если же стремиться получить не нормальную дизъюнкцию, а сколемовскую нормальную форму, то можно добиться и более существенных сокращений; в этом случае можно оставить нерасчлененной любую последовательность кванторов существования с несколькими следующими за ней кванторами всеобщности.

Так, например, в только что рассмотренном случае формулы

$$\exists x \forall y \exists z \forall u \forall v \mathcal{A}(x, y, z, u, v)$$

мы можем оставить нерасчлененной последовательность $\exists z \forall u \forall v$, т. е. ей достаточно будет поставить в соответствие всего лишь одну формульную переменную. В самом деле, указанная формула дедуктивно равна формуле

$$\forall x \forall y (\exists z \forall u \forall v \mathcal{A}(x, y, z, u, v) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow \exists x \forall y B(x, y),$$

а получающаяся из последней преобразованием формула

$$\exists x \exists y \exists z \forall u \forall v (\mathcal{A}(x, y, z, u, v) \& \neg B(x, y)) \vee \exists x \forall y B(x, y)$$

хотя и не является нормальной дизъюнкцией (из-за наличия двух кванторов всеобщности в первом члене дизъюнкции), но все же ее можно перевести в сколемовскую нормальную форму, а именно в формулу

$$\exists x \exists y \exists z \forall u \forall v \forall w ((\mathcal{A}(x, y, z, u, v) \& \neg B(x, y)) \vee B(x, w)).$$

Из методических соображений следует подчеркнуть, что использование *формульных переменных* лежит в самом существе теории Сколема.

На этом мы пока что закончим формальное рассмотрение исчисления предикатов. За нами остается долг — два обещанных в дальнейшем доказательства: во-первых, доказательство того, что всякая формула одноместного исчисления предикатов, тождественная в конечном, является выводимой, и, во-вторых, доказательство того, что формулы $\neg \exists$, $\neg \forall$ и $\neg \exists^1$, относительно которых мы установили, что они тождественны в конечном, не являются выводимыми. В связи с упомянутой теоремой об одноместном исчислении предикатов мы обсудим вопрос и о проблеме разрешимости для этого исчисления.

Однако прежде полезно будет дополнить формализацию процесса вывода в двух направлениях, а именно — в отношении понятия равенства и в отношении использования наряду с предикатными символами знаков для математических функций ²⁾.

¹⁾ См. с. 162 и далее.

²⁾ См. с. 235.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ С РАВЕНСТВОМ. ПОЛНОТА ОДНОМЕСТНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Расширенный формализм

1. Знак равенства; изображение высказываний о количестве; аксиомы равенства и формальные свойства равенства. *Равенство*, которое мы в речевом обиходе выражаем фразами типа «*a* представляет собой тот же самый объект, что и *b*», при внешнем рассмотрении имеет вид предиката с двумя субъектами.

Но по содержанию оно соответствует чему-то такому, что в известном смысле предшествует определению какого бы то ни было предиката, а именно — возможности различения элементов индивидуальной области. Во всяком случае, так это выглядит с той точки зрения, которой мы придерживаемся в аксиоматических теориях, а также в теоретико-множественной логике предикатов.

В любой аксиоматической теории основные грамматические конструкции связываются с одной или несколькими *системами объектов*, внутри которых различение индивидов предполагается имеющимся с самого начала. Такому воззрению соответствует и тот факт, что в этих теориях равенство, как и его антипод — различие, обычно не фигурирует среди основных отношений, подлежащих неявной характеристике при помощи аксиом (речь идет о таких, например, отношениях, как отношения принадлежности, порядка и конгруэнтности в геометрии), а используется как некоторое понятие содержательной логики.

Теперь, чтобы учесть, с одной стороны, лингвистическую форму высказываний о равенстве, а с другой стороны, их особый содержательный характер, мы рассмотрим равенство как некоторый выделенный по отношению к логике основной предикат.

Определенная формализация равенства в нашем распоряжении имеется уже благодаря возможности *идентификации переменных*. Так, например, формула

$$\neg < (a, a)$$

выражает тот факт, что отношение $<$ не имеет места между объектом *a* и им же самим. Однако этого нам не хватит уже, например, в том случае, если мы захотим воспроизвести предложение «если *a* не меньше *b*, а *b* не меньше *a*, то *a* представляет собой тот же самый объект, что и *b*».

Мы введем для равенства специальный предикат. В качестве этого символа мы возьмем — поскольку у нас нет возможности отличать данное равенство от «равенства» арифметики — обычный знак равенства

$$a = b \quad (a \text{ равно } b).$$

Прежде всего, к этому символу будет применимо правило замены, т. е. выражение

$$a = b$$

мы сможем подставлять вместо любой формулы с аргументами a и b . В прочих отношениях роль знака равенства в нашем формализме будет определяться следующими аксиомами равенства:

$$(J_1) \quad a = a,$$

$$(J_2) \quad a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$$

которые в процессе вывода можно будет использовать в исходных формулах.

Отрицание равенства есть различие. В дальнейшем будем пользоваться обычным знаком различия, причем, однако, лишь как *сокращение* для отрицания равенства. В таком образе, мы соглашаемся, что вместо

$$\neg (a = b)$$

всегда можно будет писать

$$a \neq b$$

и наоборот.

В тесной связи с понятиями равенства и различия, укладывающиеся в элементарные рамки *представления*, и в результате введения знака равенства мы получим возможность для формального изображения этих представлений. С помощью знака равенства мы сможем формулировать высказывания, выражающие количество элементов в той индивидуальной области, к которой относятся связанные индивидуальные переменные. Например, формула

$$\forall x \forall y (x = y)$$

выражает высказывание о том, что в индивидуальной области рассуждения есть только один элемент. Точно так же формула

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \vee x = z \vee y = z)$$

¹⁾ С этим соглашением мы уже встречались в гл. I; см. с. 10.

Приведенные примеры иллюстрируют разнообразие изобразительных возможностей, открывающихся перед нами в результате введения знака равенства. Рассмотрим теперь аксиомы равенства и способы их использования в процессе дедукции.

Относительно этих аксиом в первую очередь необходимо заметить, что от формул (J_1) и (J_2) можно легко перейти к соответствующим им формулам со связанными переменными. В самом деле, формулы (J_1) и (J_2) дедуктивно равны формулам

$$\forall x (x = x)$$

и

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))),$$

что является непосредственным следствием одной из первых наших теорем о дедуктивном равенстве.

С точки зрения содержания формула (J_1) может рассматриваться как формализация «закона тождества», а формула (J_2) соответствует принципу замены равного равным.

Теперь мы перейдем к выводу из аксиом равенства ряда специальных формул. При этом мы начнем с тех из них, которые выражают общеизвестные формальные свойства равенства. Эти формулы мы получим следующим образом. Прежде всего, мы подставим в формулу (J_2) равенство $d = c$ вместо $A(d)$. Тогда у нас получится формула

$$1)) \quad a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c).$$

В полученную формулу подставим a вместо c , а затем поменяем местами посылки. Тогда получится

$$a = a \rightarrow (a = b \rightarrow b = a),$$

а эта формула вместе с (J_1) по схеме заключения дает

$$2)) \quad a = b \rightarrow b = a.$$

Формулу эту можно получить и без применения (J_1) . Действительно, подставим в (J_2) вместо $A(d)$ формулу $a = d \rightarrow d = a$. Тогда получится

$$a = b \rightarrow ((a = a \rightarrow a = a) \rightarrow (a = b \rightarrow b = a)).$$

Здесь опять можно поменять местами посылки, и так как $a = a \rightarrow a = a$ получается подстановкой из тождественной формулы $C \rightarrow C$, то по схеме заключения мы получаем

$$a = b \rightarrow (a = b \rightarrow b = a),$$

а отсюда — средствами исчисления высказываний — формулу 2)). Из этой формулы с помощью контрапозиции и подстановки можно, кроме того, получить

$$2a)) \quad a \neq b \rightarrow b \neq a.$$

Далее, из 1)) при помощи подстановок мы получаем

$$b = a \rightarrow (b = c \rightarrow a = c),$$

а эта формула совместно с 2)) по правилу силлогизма дает

$$3)) \quad a = b \rightarrow (b = c \rightarrow a = c).$$

Формула 2)) выражает свойство симметрии равенства, а формула 3)) — свойство транзитивности; (J_1) выражает свойство рефлексивности.

Вообще, о предикате $\mathfrak{R}(a, b)$ мы говорим, что он рефлексивен, если имеет место

$$\mathfrak{R}(a, a),$$

что он симметричен, если имеет место

$$\mathfrak{R}(a, b) \rightarrow \mathfrak{R}(b, a),$$

и что он транзитивен, если имеет место

$$\mathfrak{R}(a, b) \rightarrow (\mathfrak{R}(b, c) \rightarrow \mathfrak{R}(a, c)).$$

Эти три свойства — рефлексивность, симметрия и транзитивность — часто вместе называются характеристическими свойствами отношения равенства. Но при этом речь обычно идет не о равенстве в смысле тождественности, а скорее только о *некотором роде совпадения*¹⁾.

В самом деле, любое отношение между двумя объектами, имеющее характер какого-либо совпадения, — такое, как подобие фигур, параллельность прямых, равенство длин отрезков или топологическое равенство многообразий, — обладает указанными тремя свойствами.

Среди всех такого рода отношений равенство выделяется тем, что оно означает не какое-нибудь одностороннее совпадение, а *совпадение вообще* — по меньшей мере постольку, поскольку в расчет принимаются признаки, могущие быть выраженными посредством основных предикатов рассматриваемой теории. Эта полнота совпадения и находит свое выражение во второй аксиоме равенства.

Приведенные выше выводы формул 2)) и 3)) из формул 1)) и (J_1) показывают, что для установления указанных трех свойств у какого-либо отношения $\mathfrak{R}(a, b)$ всегда будет достаточно вывести две формулы:

$$\mathfrak{R}(a, a)$$

и

$$\mathfrak{R}(a, b) \rightarrow (\mathfrak{R}(a, c) \rightarrow \mathfrak{R}(b, c)).$$

¹⁾ В настоящее время употребительным является термин «отношение эквивалентности».

Обратно, вторая из этих формул может быть получена из формул для симметрии и транзитивности с помощью правила силлогизма, так что система из трех формул для рефлексивности, симметрии и транзитивности равнозначна системе, состоящей из двух последних формул.

Из формул 2)) и 3)) мы можем также вывести формулу

$$4)) \quad a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b),$$

соответствующую утверждению о том, что два объекта, порознь равные третьему, равны между собой.

Из формулы 4)) по правилу контрапозиции мы получаем

$$a = c \rightarrow (a \neq b \rightarrow b \neq c),$$

а отсюда, переставляя посылки и применяя правило замены для импликации, получаем формулу

$$5)) \quad a \neq b \rightarrow a \neq c \vee b \neq c.$$

Из формулы (J₂) подстановкой вместо формульной переменной $A(c)$ получаем

$$a = b \rightarrow (\neg A(a) \rightarrow \neg A(b)),$$

а отсюда, применяя контрапозицию,

$$a = b \rightarrow (A(b) \rightarrow A(a)).$$

2. Применение аксиом равенства к различным преобразованиям, в частности к преобразованиям для оценок числа элементов в индивидной области; количественные формулы. Еще одно применение формул (J₁) и (J₂) заключается в том, что с их помощью могут быть произведены преобразования, которым с содержательной точки зрения соответствует трактовка единичного суждения как частного случая всеобщего суждения, с одной стороны, и экзистенциального суждения — с другой.

Эквивалентности, на которых основываются эти преобразования, записываются в виде формул

$$6a)) \quad A(a) \sim \forall x (x = a \rightarrow A(x)),$$

$$6b)) \quad A(a) \sim \exists x (x = a \& A(x)).$$

Вывод формулы 6a)), согласно схеме эквивалентности, сводится к выводу двух импликаций:

$$A(a) \rightarrow \forall x (x = a \rightarrow A(x)),$$

$$\forall x (x = a \rightarrow A(x)) \rightarrow A(a).$$

Первую из них можно получить, отправляясь от [ранее выведенной из (J₂)] формулы

$$a = b \rightarrow (A(b) \rightarrow A(a)),$$

из которой перестановкой посылок можно получить

$$A(b) \rightarrow (a = b \rightarrow A(a));$$

затем надо применить правило (α) и подставить a вместо b . Обратная импликация

$$\forall x (x = a \rightarrow A(x)) \rightarrow A(a)$$

получается следующим образом. Сначала из формулы (a) подстановкой получаем

$$\forall x (x = a \rightarrow A(x)) \rightarrow (a = a \rightarrow A(a)).$$

Затем, в результате перестановки посылок и применения схемы заключения эта формула с учетом (J₁) дает нам желаемую формулу.

Перейти от 6a)) к 6b)) проще всего следующим образом: взять от обеих частей эквивалентности отрицание, затем подставить $\neg A(c)$ вместо $A(c)$ и снять двойные отрицания.

Если в правых частях формул 6a)) и 6b)) равенство $x = a$ заменить его отрицанием $x \neq a$, то получающиеся выражения

$$\forall x (x \neq a \rightarrow A(x)),$$

$$\exists x (x \neq a \& A(x))$$

не будут больше допускать такого простого преобразования, исключаящего из них равенство и связанные переменные; но все же они могут быть переведены в выражения, построенные с помощью связок исчисления высказываний из элементарной формулы $A(a)$ и из таких формул, в которых переменная a не встречается и которые соответствуют некоторым утверждениям о нижней оценке для числа индивидов со свойством A или о верхней оценке для числа индивидов со свойством $\neg A$.

Действительно, имеют место эквивалентности

$$7a)) \quad \forall x (x \neq a \rightarrow A(x)) \sim$$

$$\{\forall x A(x) \vee (\neg A(a) \& \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)))\}$$

и

$$7b)) \quad \exists x (x \neq a \& A(x)) \sim$$

$$\{\exists x A(x) \& (A(a) \rightarrow \exists x \exists y (x \neq y \& A(x) \& A(y)))\},$$

и их правые части на самом деле обладают указанным свойством. Формулы

$$\forall x A(x), \quad \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)),$$

$$\exists x A(x), \quad \exists x \exists y (x \neq y \& A(x) \& A(y))$$

соответствуют высказываниям:

«Не существует ни одного индивида, обладающего свойством $\neg A$ ».

«Существует не более одного индивида, обладающего свойством $\neg A$ ».

«Существует не менее одного индивида, обладающего свойством A ».

«Существует не менее двух индивидов, обладающих свойством A ».

Что касается вывода этих формул, то 7b)) получается из 7a)) способом, аналогичным тому, каким 6b)) была получена из 6a)), — путем взятия отрицания у обеих частей и последующей подстановкой $\neg A(c)$ вместо $A(c)$. Таким образом, нам будет достаточно вывести одну только формулу 7a)). Вывод ее оказывается довольно длинным, и мы наметим его только в основных чертах.

Формула 7a)) имеет вид

$$\mathfrak{A} \sim \{\mathfrak{B} \vee (\neg \mathfrak{C} \& \mathfrak{D})\}.$$

Если мы расщепим эту эквивалентность на две импликации, а затем применим схемы конъюнкции и дизъюнкции и закон дистрибутивности, то убедимся, что нам достаточно вывести следующие четыре формулы:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{B} \vee \neg \mathfrak{C}, \\ \mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{B} \vee \mathfrak{D}, \\ \mathfrak{B} &\rightarrow \mathfrak{A}, \\ \neg \mathfrak{C} \& \mathfrak{D} &\rightarrow \mathfrak{A}\end{aligned}$$

Первая из них может быть преобразована в

$$\mathfrak{C} \& \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B},$$

вторая выводится из

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D},$$

а четвертая может быть преобразована в

$$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}.$$

Таким образом, наша задача сводится к выводу следующих четырех формул:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} \& \mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{D}, \\ \mathfrak{B} &\rightarrow \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{D} &\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{C},\end{aligned}$$

т. е., в подробной записи, к выводу формул

$$\begin{aligned}A(a) \& \forall x (x \neq a \rightarrow A(x)) &\rightarrow \forall x A(x), \\ \forall x (x \neq a \rightarrow A(x)) &\rightarrow \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)), \\ \forall x A(x) &\rightarrow \forall x (x \neq a \rightarrow A(x)), \\ \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)) &\rightarrow \forall x (x \neq a \rightarrow A(x)) \vee A(a).\end{aligned}$$

Из этих формул две последние легко могут быть получены средствами исчисления предикатов. Действительно, третья формула получается в результате подстановки из следующей, легко выводимой формулы:

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x (B(x) \rightarrow A(x)),$$

а четвертая применением правила (1)¹⁾ и тождественной формулы

$$(A \rightarrow B) \vee C \sim (A \rightarrow B \vee C)$$

[в сочетании с правилом (η)²⁾] может быть преобразована в формулу

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)) \rightarrow \forall x (x \neq a \rightarrow A(x) \vee A(a)),$$

которая получается подстановкой из выводимой формулы

$$\forall x \forall y B(x, y) \rightarrow \forall x B(x, a).$$

Что касается вывода первых двух формул, то он протекает с существенным использованием формул для равенства.

Первая из них с помощью формулы 6a)) переводится в формулу

$$\forall x (x = a \rightarrow A(x)) \& \forall x (x \neq a \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x A(x),$$

которая получается в результате подстановки из выводимой в исчислении предикатов формулы

$$\forall x (B(x) \rightarrow A(x)) \& \forall x (\neg B(x) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x A(x).$$

Вторая формула

$$\forall x (x \neq a \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y))$$

может быть выведена по правилам исчисления предикатов из формулы

$$(b \neq a \rightarrow A(b)) \& (c \neq a \rightarrow A(c)) \rightarrow (b \neq c \rightarrow A(b) \vee A(c)),$$

а вывод этой формулы можно средствами исчисления высказываний свести к выводу формулы

$$b \neq c \rightarrow b \neq a \vee c \neq a.$$

Но эта последняя получается подстановкой из формулы 5)).

Из формул 7a)) и 7b)) мы можем получить еще две замечательные формулы.

Если в формуле 7a)) переименовать переменную y в z , а x в y и затем применить правило (δ') для квантора существования

¹⁾ См. с. 179.

²⁾ См. с. 177.

в сочетании с правилом (ι), то получится формула

$$\exists x \forall y (y \neq x \rightarrow A(y)) \sim \{\forall y A(y) \vee (\exists x \neg A(x) \& \forall y \forall z (y \neq z \rightarrow A(y) \vee A(z)))\}.$$

В правой части этой эквивалентности мы можем снова переименовать y в x и z в y ; кроме того, $\exists x \neg A(x)$ мы можем преобразовать в $\neg \forall x A(x)$. Полученную таким образом формулу мы можем, применяя уже использованные ранее обозначения $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$, представить в виде

$$\exists x \forall y (y \neq x \rightarrow A(y)) \sim (\mathfrak{B} \vee (\neg \mathfrak{B} \& \mathfrak{D})).$$

По правилам исчисления высказываний,

$$\mathfrak{B} \vee (\neg \mathfrak{B} \& \mathfrak{D})$$

можно заменить формулой

$$\mathfrak{B} \vee \mathfrak{D}.$$

Далее, мы установили, что формулы

$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \text{ и } \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D}$$

являются выводимыми формулами. Следовательно, выводима и формула $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}$, а потому $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{D}$ переводима в $\mathfrak{D}$. Тем самым мы получаем формулу

$$\exists x \forall y (y \neq x \rightarrow A(y)) \sim \mathfrak{D},$$

т. е.

$$8a)) \quad \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow A(y)) \sim \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow A(x) \vee A(y)).$$

Тем же самым способом, каким мы перешли от 7a)) к 7b)), мы, исходя из 8a)), получим формулу

$$8b)) \quad \forall x \exists y (y \neq x \& A(y)) \sim \exists x \exists y (x \neq y \& A(x) \& A(y)).$$

Значение этих формул заключается в том, что с их помощью могут быть переведены друг в друга различные представления условий, налагаемых на количество элементов в индивидуальной области. В самом деле, обе части эквивалентности 8a)) соответствуют высказыванию о том, что имеется не более одного индивида со свойством $\neg A$, а обе части 8b)) — высказыванию о том, что имеется не менее двух индивидов со свойством A .

Совершенно аналогичные преобразования могут быть произведены и для большего числа индивидов. Схема формул, представляющих собой обобщения формул 8a)) и 8b)) на случай боль-

шего числа индивидов, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 9a)) \quad & \exists x \exists y \dots \exists v \forall w (w \neq x \& w \neq y \dots \& w \neq v \rightarrow A(w)) \sim \\ & \forall x \forall y \dots \forall v \forall w (x \neq y \& x \neq z \& \dots \& v \neq w \rightarrow \\ & \quad A(x) \vee A(y) \vee \dots \vee A(w)), \\ 9b)) \quad & \forall x \forall y \dots \forall v \exists w (w \neq x \& w \neq y \& \dots \& w \neq v \& A(w)) \sim \\ & \exists x \exists y \dots \exists v \exists w (x \neq y \& x \neq z \& \dots \& v \neq w \& \\ & \quad A(x) \& A(y) \& \dots \& A(w)). \end{aligned}$$

Здесь в левых частях эквивалентностей вместо одной фигурирующей в формулах 8a)) и 8b)) переменной x , которая в 8a)) связывалась квантором существования, а в 8b)) — квантором всеобщности, появились переменные

$$x, y, \dots, v,$$

которые в 9a)) связаны кванторами существования, а в 9b)) — кванторами всеобщности и на которые распространяется конъюнкция

$$w \neq x \& \dots \& w \neq v.$$

В правых частях этих эквивалентностей вместо двух фигурирующих в формулах 8a)) и 8b)) переменных x и y стоят переменные

$$x, y, \dots, v, w,$$

связанные в 9a)) кванторами всеобщности, а в 9b)) — кванторами существования; на эти переменные в 9a)) распространяется дизъюнкция

$$A(x) \vee A(y) \vee \dots \vee A(v) \vee A(w),$$

в 9b)) — конъюнкция

$$A(x) \& A(y) \& \dots \& A(v) \& A(w),$$

и в 9a)) и 9b)) конъюнкция

$$x \neq y \& x \neq z \& \dots \& v \neq w$$

распространяется на пары, состоящие из двух различных между собой переменных $x, y, \dots, v, w$. Кроме того, в формулах 9a)) импликации можно превратить в дизъюнкции; тогда мы получим формулы

$$\begin{aligned} \exists x \exists y \dots \exists v \forall w (w = x \vee w = y \vee \dots \vee w = v \vee A(w)) \sim \\ \forall x \forall y \dots \forall v \forall w (x = y \vee x = z \vee \dots \vee v = w \vee \\ A(x) \vee A(y) \vee \dots \vee A(w)), \end{aligned}$$

которые двойственны соответствующим формулам 9b)).

Для правых частей этих эквивалентностей мы введем сокращенное обозначение. Пусть m — число переменных, образующих набор

$$x, y, \dots, w.$$

Посредством

$$\exists_m x \mathcal{A}(x)$$

мы будем обозначать выражение

$$\exists x \dots \exists w (x \neq y \& x \neq z \& \dots \& v \neq w \& \mathcal{A}(x) \& \mathcal{A}'(y) \& \dots \& \mathcal{A}(w)),$$

а посредством

$$\forall_m x \mathcal{A}(x)$$

— выражение

$$\forall x \dots \forall w (x = y \vee x = z \vee \dots \vee v = w \vee \mathcal{A}(x) \vee \dots \vee \mathcal{A}(w)).$$

Эти обозначения имеют смысл для

$$m = 2, 3, \dots$$

Содержательно формула

$$\exists_m x \mathcal{A}(x)$$

выражает тот факт, что имеется по меньшей мере m различных индивидов, для которых выполняется $\mathcal{A}(x)$, а

$$\forall_m x \mathcal{A}(x)$$

говорит о том, что $\mathcal{A}(x)$ не выполняется самое большее для $m - 1$ индивида, т. е. $\mathcal{A}(x)$ выполняется для всех индивидов, за исключением не более чем $m - 1$ из них.

Пользуясь правилом (λ) для образования отрицания¹⁾, можно получить следующие эквивалентности:

$$\neg \forall_m x \mathcal{A}(x) \sim \exists_m x \neg \mathcal{A}(x),$$

$$\neg \exists_m x \mathcal{A}(x) \sim \forall_m x \neg \mathcal{A}(x)$$

$$(m = 2, 3, \dots).$$

Далее, для любого конкретного числа m легко вывести формулы

$$\forall_m x \mathcal{A}(x) \rightarrow \forall_{m+1} x \mathcal{A}(x),$$

$$\exists_{m+1} x \mathcal{A}(x) \rightarrow \exists_m x \mathcal{A}(x),$$

а также формулы

$$\forall x \mathcal{A}x \rightarrow \forall_2 x \mathcal{A}(x),$$

$$\exists_2 x \mathcal{A}(x) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x).$$

¹⁾ См. с. 181.

Справедливость всех этих формул легко также усмотреть с точки зрения их содержательного смысла.

С помощью введенных сокращений формулы 9a)) и 9b)) записываются следующим образом:

$$\exists x \exists y \dots \exists v \forall w (w = x \vee \dots \vee w = v \vee \mathcal{A}(w)) \sim \forall_{f+1} x \mathcal{A}(x),$$

$$\forall x \forall y \dots \forall v \exists w (w \neq x \& \dots \& w \neq v \& \mathcal{A}(w)) \sim \exists_{f+1} x \mathcal{A}(x),$$

где f представляет собой число переменных $x, y, \dots, v$.

Мы не будем заниматься здесь выводом формул 9a)) и 9b)), так как это было бы кропотливым делом, не дающим ничего принципиально нового.

Способом, подобным тому, которым формулы 8a)) и 8b)) были обобщены до формул 9a)) и 9b)), могут быть обобщены и формулы 7a)) и 7b)). Эквивалентности, представляющие собой это обобщение, дадут нам некоторое преобразование формул вида

$$\forall x (x \neq a \& x \neq b \& \dots \& x \neq r \rightarrow \mathcal{A}(x)),$$

и

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& \dots \& x \neq r \& \mathcal{A}(x))$$

(здесь вместо выражения $x \neq a$, фигурирующего в формулах 7a)) и 7b)), появляется конъюнкция, состоящая из нескольких выражений такого рода, а вместо одной свободной переменной a появляется несколько таких переменных $a, b, \dots, r$).

Мы приведем соответствующие формулы для случая трех свободных переменных a, b и c . После введенных сокращений формула, аналогичная формуле 7a)), будет иметь вид

$$\forall x (x \neq a \& x \neq b \& x \neq c \rightarrow \mathcal{A}(x)) \sim$$

$$\{\forall x \mathcal{A}(x) \vee [(\neg \mathcal{A}(a) \vee \neg \mathcal{A}(b) \vee \neg \mathcal{A}(c)) \& \forall_2 x \mathcal{A}(x)] \vee$$

$$[((\neg \mathcal{A}(a) \& \neg \mathcal{A}(b) \& a \neq b) \vee$$

$$(\neg \mathcal{A}(a) \& \neg \mathcal{A}(c) \& a \neq c) \vee (\neg \mathcal{A}(b) \& \neg \mathcal{A}(c) \& b \neq c)) \& \forall_3 x \mathcal{A}(x)] \vee$$

$$[\neg \mathcal{A}(a) \& \neg \mathcal{A}(b) \& \neg \mathcal{A}(c) \& a \neq b \& a \neq c \& b \neq c \& \forall_4 x \mathcal{A}(x)]\},$$

а формула, аналогичная формуле 7b)), запишется в виде

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& x \neq c \& \mathcal{A}(x)) \sim$$

$$\{\exists x \mathcal{A}(x) \& [(\mathcal{A}(a) \vee \mathcal{A}(b) \vee \mathcal{A}(c) \rightarrow \exists_2 x \mathcal{A}(x)) \&$$

$$[(\mathcal{A}(a) \& \mathcal{A}(b) \& a \neq b) \vee (\mathcal{A}(a) \& \mathcal{A}(c) \& a \neq c) \vee$$

$$(\mathcal{A}(b) \& \mathcal{A}(c) \& b \neq c) \rightarrow \exists_3 x \mathcal{A}(x)] \&$$

$$[\mathcal{A}(a) \& \mathcal{A}(b) \& \mathcal{A}(c) \& a \neq b \& a \neq c \& b \neq c \rightarrow \exists_4 x \mathcal{A}(x)]\}.$$

Если импликация, встречающиеся в этих формулах, выразить через конъюнкцию и отрицание, а затем применить правило

взятия отрицания, то получатся следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \forall x (x = a \vee x = b \vee x = c \vee A(x)) \sim \\ \{ \forall x A(x) \vee [(\neg A(a) \vee \neg A(b) \vee \neg A(c)) \& \forall_2 x A(x)] \vee \\ [(\neg A(a) \& \neg A(b) \& a \neq b) \vee (\neg A(a) \& \neg A(c) \& a \neq c) \vee \\ (\neg A(b) \& \neg A(c) \& b \neq c)] \& \forall_3 x A(x)] \vee \\ [\neg A(a) \& \neg A(b) \& \neg A(c) \& a \neq b \& a \neq c \& b \neq c \& \forall_4 x A(x)] \}, \\ \exists x (x \neq a \& x \neq b \& x \neq c \& A(x)) \sim \\ \{ \exists x A(x) \& [(\neg A(a) \& \neg A(b) \& \neg A(c)) \vee \exists_2 x A(x)] \& \\ [(\neg A(a) \vee \neg A(b) \vee a = b) \& (\neg A(a) \vee \neg A(c) \vee a = c) \& \\ (\neg A(b) \vee \neg A(c) \vee b = c)] \vee \exists_3 x A(x)] \& \\ [\neg A(a) \vee \neg A(b) \vee \neg A(c) \vee a = b \vee a = c \vee b = c \vee \exists_4 x A(x)] \}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что обе эти формулы двойственны друг другу.

По виду этих формул можно без труда сообразить, какой вид будут иметь соответствующие эквивалентности для любой фигурирующей вместо переменных a, b и c последовательности переменных, например для

$$a, b, \dots, r.$$

Этим эквивалентностям мы дадим номера 10a) и 10b)). Применим к ним следующие специальные преобразования. Возьмем какую-нибудь из формул 10a) и подставим в нее вместо именной формы $A(s)$ формулу

$$A(s) \& \neg A(s).$$

Возникшая таким образом формула теперь может быть существенно упрощена.

Мы рассмотрим этот вопрос на имеющемся у нас частном случае формулы 10a)). В левой части этой формулы (после выполнения подстановки) в качестве дизъюнктивного члена будет стоять

$$A(x) \& \neg A(x).$$

Однако по правилам исчисления высказываний [в сочетании с правилом (η)¹⁾] этот дизъюнктивный член может быть опущен. В правой части вместо $\forall x A(x)$ мы получаем выражение

$$\forall x (A(x) \& \neg A(x)),$$

которое может быть преобразовано в отрицание выводимой формулы

$$\exists x (\neg A(x) \vee A(x)),$$

¹⁾ См. с. 177.

и потому этот член дизъюнкции можно будет убрать с помощью схемы заключения.

Вместо

$$\neg A(a), \neg A(b), \neg A(c)$$

в результате подстановки появятся выводимые формулы

$$\neg A(a) \vee A(a), \neg A(b) \vee A(b), \neg A(c) \vee A(c),$$

которые также могут быть опущены в конъюнкциях.

Далее, в выражениях

$$\forall_2 x A(x), \forall_3 x A(x), \forall_4 x A(x)$$

дизъюнктивные члены, содержащие формульную переменную A , в результате подстановки также перейдут в такие члены, которые можно будет удалить, применяя правила исчисления высказываний и правило (η); поэтому на месте указанных выражений останутся только формулы

$$\begin{aligned} \forall x \forall y (x = y), \quad \forall x \forall y \forall z (x = y \vee x = z \vee y = z), \\ \forall x \forall y \forall z \forall u (x = y \vee x = z \vee x = u \vee y = z \vee y = u \vee z = u). \end{aligned}$$

Для формул этого типа мы также введем специальные сокращенные обозначения.

Пусть

$$\forall x_f y (x = y) \quad (\text{для } f = 2, 3, \dots)$$

означает формулу с приставкой из f кванторов всеобщности, за которой следует дизъюнкция, состоящая из равенств между всевозможными парами различных переменных, связываемых этими кванторами (таких пар будет $\frac{f(f-1)}{2}$).

Указанная формула вполне этим определяется, если отвлечься от обозначений связанных переменных. Будучи истолкована содержательно, она говорит о том, что в индивидуальной области имеется не более $f - 1$ индивидов.

После выполнения подстановки и указанных преобразований рассматриваемая нами эквивалентность с использованием нового обозначения приобретает следующий простой вид:

$$\begin{aligned} \forall x (x = a \vee x = b \vee x = c) \sim \\ \{ \forall x_2 y (x = y) \vee ((a \neq b \vee a \neq c \vee b \neq c) \& \forall x_3 y (x = y)) \vee \\ (a \neq b \& a \neq c \& b \neq c \& \forall x_4 y (x = y)) \}. \end{aligned}$$

Введем теперь обозначение

$$\exists x_f y (x \neq y)$$

для той формулы, которая получится из

$$\forall x_1 y (x = y),$$

если мы возьмем [по правилу (λ)] ее отрицание. Тогда формула, двойственная по отношению к только что написанной, будет иметь вид

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& x \neq c) \sim$$

$$\{\exists x_2 y (x \neq y) \& ((a = b \& a = c \& b = c) \vee \exists x_3 y (x \neq y)) \& \\ (a = b \vee a = c \vee b = c \vee \exists x_4 y (x \neq y))\}.$$

Если использовать формулы

$$\forall x_1 y (x = y) \rightarrow \forall x_{f+1} y (x = y),$$

которые легко могут быть выведены для любого заданного числа f , то обе полученные нами формулы с помощью преобразований исчисления высказываний могут быть переведены в следующий, более подходящий для содержательного осмысливания вид:

$$\forall x (x = a \vee x = b \vee x = c) \sim$$

$$\{\forall x_1 y (x = y) \& (a = b \vee a = c \vee b = c \rightarrow \forall x_3 y (x = y)) \& \\ (a = b \& a = c \& b = c \rightarrow \forall x_2 y (x = y))\},$$

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& x \neq c) \sim$$

$$\{\exists x_2 y (x \neq y) \& (a \neq b \vee a \neq c \vee b \neq c \rightarrow \exists x_3 y (x \neq y)) \& \\ (a \neq b \& a \neq c \& b \neq c \rightarrow \exists x_4 y (x \neq y))\}.$$

С формальной стороны, в этих эквивалентностях достойна внимания выраженная ими переводимость формулы

$$\forall x (x = a \vee x = b \vee x = c)$$

(или формулы

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& x \neq c))$$

в такую формулу, которая получается с помощью связей исчисления высказываний из равенств

$$a = b, \quad a = c, \quad b = c$$

и формул

$$\forall x_2 y (x = y), \quad \forall x_3 y (x = y), \quad \forall x_4 y (x = y)$$

(соответственно формул

$$\exists x_2 y (x \neq y), \quad \exists x_3 y (x \neq y), \quad \exists x_4 y (x \neq y)).$$

Заметим, что в последних из названных здесь формул свободные переменные a, b, c больше уже не встречаются.

И вообще, этот способ показывает, каким образом из формул 10a)) и 10b)) путем подстановки $A(s)$ & $\neg A(s)$ вместо именной формы $A(s)$ и упрощающих преобразований, выполняемых в рамках исчисления предикатов и направленных на исключение формульной переменной A , получается переводимость формулы

$$\forall x (x = a \vee x = b \vee \dots \vee x = r)$$

(соответственно формулы

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& \dots \& x \neq r))$$

в такую формулу, которая при помощи связей исчисления высказываний строится из равенств между парами свободных переменных и формул

$$\forall x_2 y (x = y), \quad \forall x_3 y (x = y), \quad \dots, \quad \forall x_{f+1} y (x = y)$$

(соответственно формул

$$\exists x_2 y (x \neq y), \quad \exists x_3 y (x \neq y), \quad \dots, \quad \exists x_{f+1} y (x \neq y));$$

здесь f означает число переменных $a, b, \dots, r$.

Заметим также, что формула

$$\exists x_1 y (x \neq y)$$

с точки зрения содержательного ее истолкования говорит о том, что в индивидуальной области содержится не менее f индивидов. Таким образом, если формула $\forall x_1 y (x = y)$, будучи истолкована содержательно, указывает *максимальное число* индивидов в рассматриваемой индивидуальной области, то формула $\exists x_1 y (x \neq y)$ указывает *минимальное их число*.

Формулы вида

$$\forall x_1 y (x = y) \quad \text{и} \quad \exists x_1 y (x \neq y)$$

мы будем называть общим именем *количественных формул*.

Рассматриваемые преобразования мы вывели из эквивалентностей 10a)) и 10b)) в результате специально подобранной подстановки вместо формульной переменной. Если же мы рассмотрим подстановку какой-нибудь произвольной формулы $\mathcal{A}(s)$ вместо $A(s)$, то из эквивалентностей 10a)) и 10b)) непосредственно получится переводимость формулы

$$\forall x (x = a \vee x = b \vee \dots \vee x = r \vee \mathcal{A}(x))$$

(соответственно формулы

$$\exists x (x \neq a \& x \neq b \& \dots \& x \neq r \& \mathcal{A}(x)))$$

в некоторую формулу, получающуюся с помощью связей исчисления высказываний, во-первых, из формул

$$\mathcal{A}(a), \quad \mathcal{A}(b), \quad \dots, \quad \mathcal{A}(r),$$

во-вторых, из $\frac{f(t-1)}{2}$ равенств между всевозможными парами свободных переменных $a, b, \dots, r$ и, в-третьих, из формул

$$\forall x \mathcal{A}(x), \quad \forall_2 x \mathcal{A}(x), \quad \dots, \quad \forall_{t+1} x \mathcal{A}(x)$$

(соответственно формул

$$\exists x \mathcal{A}(x), \quad \exists_2 x \mathcal{A}(x), \quad \dots, \quad \exists_{t+1} x \mathcal{A}(x)).$$

Эффект этого преобразования в случае формулы $\mathcal{A}(s)$, не содержащей ни одной из переменных $a, b, \dots, r$, состоит в том, что в результате перевода эти свободные переменные в области действия какого-либо квантора всеобщности или существования больше уже не встречаются. В частности, если $\mathcal{A}(s)$ вообще не содержит никаких свободных индивидуальных переменных, кроме s , то в выражениях

$$\forall x \mathcal{A}(x), \quad \dots, \quad \forall_{t+1} x \mathcal{A}(x), \quad \exists x \mathcal{A}(x), \quad \dots, \quad \exists_{t+1} x \mathcal{A}(x)$$

не будет никаких свободных переменных.

3. Разложение в примарные формулы для формул расширенного одноместного исчисления предикатов. Наличие таких преобразований приводит нас к возможности построения некоторой нормальной формы для формул *расширенного одноместного исчисления предикатов*, т. е. того формализма, который получается из одноместного исчисления предикатов в результате дополнительного присоединения знака равенства и связанных с ним аксиом. Основываясь на правилах этого исчисления, всякую его формулу можно будет разложить, подобно формулам одноместного исчисления предикатов, в «примарные формулы» (теперь уже в некотором обобщенном смысле); при этом под *разложением в примарные формулы* мы будем понимать перевод данной формулы в такую, которая строится с помощью связок исчисления высказываний из составных частей следующего типа:

1. Формульные переменные без аргументов.
2. Формульные переменные с одной свободной индивидуальной переменной в качестве аргумента.
3. Равенства между свободными индивидуальными переменными.
4. Формулы вида

$$\forall x \mathcal{D}(x) \quad \text{или} \quad \exists x \mathcal{K}(x),$$

где $\mathcal{D}(x)$ обозначает некоторую дизъюнкцию, а $\mathcal{K}(x)$ — конъюнкцию, члены которых являются или формульными переменными с аргументом x , или их отрицаниями.

5. Формулы вида

$$\forall_m x \mathcal{D}(x) \quad \text{или} \quad \exists_m x \mathcal{K}(x),$$

где $\mathcal{D}(x)$ и $\mathcal{K}(x)$ обладают свойствами, указанными в п. 4.

6. Количественные формулы, т. е. формулы вида

$$\forall_m y (x = y) \quad \text{или} \quad \exists_m y (x \neq y).$$

Отличие от обыкновенного одноместного исчисления предикатов проявляется в том, что здесь добавляются пп. 3, 5 и 6, связанные с равенством.

Процедура разложения произвольной заданной формулы расширенного одноместного исчисления предикатов в примарные формулы аналогична процедуре, применяемой в обычном одноместном исчислении предикатов. Если исходная формула никаких связанных переменных не содержит, то она уже имеет необходимый вид. Таким образом, остается рассмотреть только случай, когда в формуле имеются связанные переменные. В этом случае мы сначала переведем исходную формулу в какую-либо предваренную. С помощью переименования связанных переменных мы всегда сможем добиться того, чтобы последний из кванторов, стоящих перед формулой, связывал переменную x и, значит, был квантором $\forall x$ или $\exists x$. Остальные кванторы, если они имеются, пусть относятся к переменным

$$y, z, \dots, u.$$

Выражение, стоящее за квантором $\forall x$ или $\exists x$, кроме связанных переменных $y, z, \dots, u$ может, вообще говоря, содержать еще и свободные переменные.

Согласно правилу (η)¹⁾, к этому выражению можно применять преобразования исчисления высказываний. В зависимости от того, какой из кванторов, $\forall x$ или $\exists x$, предшествует рассматриваемому выражению, мы преобразуем его либо в конъюнктивную, либо в дизъюнктивную нормальную форму, а затем по правилу (θ)²⁾ распределим квантор всеобщности $\forall x$, соответственно квантор существования $\exists x$, на все члены конъюнкции, соответственно дизъюнкции, в отдельности.

Тогда после каждого квантора всеобщности $\forall x$ (т. е. в области его действия) будет стоять некоторая дизъюнкция (соответственно после каждого квантора существования $\exists x$ будет стоять некоторая конъюнкция) и по правилу (ι)³⁾ каждый не зависящий от x член дизъюнкции или конъюнкции мы сможем вынести из-под рассматриваемого квантора $\exists x$, соответственно $\forall x$.

В результате вся формула в целом приобретет следующий вид. Перед формулой будут стоять кванторы всеобщности и существования, связывающие переменные

$$y, z, \dots, u;$$

¹⁾ См. с. 177.

²⁾ См. с. 178.

³⁾ См. с. 179.

за ними будет идти выражение, которое образовано с помощью связок исчисления высказываний из составных частей следующего типа:

- 1) формульные переменные без аргументов [т. е. формулы типа 1];
- 2) формульные переменные с отличной от x переменной в качестве аргумента;
- 3) равенства между двумя отличными от x переменными;
- 4) выражения вида

$$\forall x (\mathfrak{P}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(x))$$

или

$$\exists x (\mathfrak{P}_1(x) \& \dots \& \mathfrak{P}_f(x)),$$

где каждый из членов

$$\mathfrak{P}_1(x), \dots, \mathfrak{P}_f(x)$$

представляет собой либо равенство, содержащее переменную x , либо отрицание такого равенства, либо формульную переменную с аргументом x , либо отрицание формулы такого типа.

В том случае, когда кроме x никаких связанных переменных больше не имеется, результирующая формула оказывается построенной с помощью связок исчисления высказываний из составных частей типов 1) — 4), причем никаких кванторов всеобщности или существования перед нею больше не будет.

Теперь займемся преобразованием формул типа 4). Прежде всего, мы можем исключить члены вида

$$x = x \text{ или } x \neq x,$$

применяя формулы

$$\forall x (x = x) \sim A \vee \neg A,$$

$$\forall x (x \neq x) \sim A \& \neg A,$$

$$\exists x (x = x) \sim A \vee \neg A,$$

$$\exists x (x \neq x) \sim A \& \neg A,$$

$$\forall x (x = x \vee A(x)) \sim A \vee \neg A,$$

$$\forall x (x \neq x \vee A(x)) \sim \forall x A(x),$$

$$\exists x (x = x \& A(x)) \sim \exists x A(x),$$

$$\exists x (x \neq x \& A(x)) \sim A \& \neg A$$

(все они могут быть выведены с помощью формулы (J_1)). Далее, мы можем добиться того, чтобы в каждом равенстве, содержащем переменную x , или в отрицании такого равенства переменная эта

стояла в левой части; этого можно достичь, применив формулу 2)):

$$a = b \rightarrow b = a.$$

Наконец, мы можем добиться того, чтобы в составных частях

$$\forall x (\mathfrak{P}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(x))$$

ни один из членов дизъюнкции не был отрицанием равенства и чтобы в составных частях

$$\exists x (\mathfrak{P}_1(x) \& \dots \& \mathfrak{P}_f(x))$$

ни один из членов конъюнкции не был равенством.

Действительно, пусть, например, в

$$\forall x (\mathfrak{P}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(x))$$

член $\mathfrak{P}_1(x)$ представляет собой отрицание равенства $x = c$. Тогда это выражение, которое имеет вид

$$\forall x (x \neq c \vee \mathfrak{A}(x)),$$

можно сначала преобразовать в

$$\forall x (x = c \rightarrow \mathfrak{A}(x)),$$

а затем, с применением формулы 6a)), в

$$\mathfrak{A}(c),$$

т. е. в выражение, построенное с помощью связок исчисления высказываний из составных частей типа 2) и 3).

В такого же рода выражение с помощью формулы 6b)) ¹⁾ может быть преобразовано и выражение

$$\exists x (\mathfrak{P}_1(x) \& \dots \& \mathfrak{P}_f(x)),$$

в котором один из членов конъюнкции представляет собой равенство типа $x = c$.

Правда, процедуру эту нельзя будет применить, если дизъюнкция

$$\mathfrak{P}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{P}_f(x)$$

(соответственно конъюнкция

$$\mathfrak{P}_1(x) \& \dots \& \mathfrak{P}_f(x))$$

окажется одночленной. Но в этом случае мы можем использовать эквивалентности

$$\forall x (x \neq a) \sim A \& \neg A,$$

$$\exists x (x = a) \sim A \vee \neg A,$$

которые могут быть выведены из формулы (J_1) .

¹⁾ См. с. 214.

Теперь из составных частей типа 4) остаются только такие, которые — если отвлечься от переименования переменных и, может быть, от замены свободных переменных связанными — имеют один из следующих шести видов:

$$\begin{aligned} & \forall x (x = a \vee x = b \vee \dots \vee x = r), \\ & \exists x (x \neq a \& x \neq b \& \dots \& x \neq r), \\ & \forall x \mathfrak{D}(x), \quad \exists x \mathfrak{R}(x), \\ & \forall x (x = a \vee x = b \vee \dots \vee x = r \vee \mathfrak{D}(x)), \\ & \exists x (x \neq a \& x = b \& \dots \& x \neq r \& \mathfrak{R}(x)), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{D}(x)$ обозначает дизъюнкцию, а $\mathfrak{R}(x)$ — конъюнкцию, у которой каждый член представляет собой либо формульную переменную с аргументом x , либо отрицание формулы этого типа.

Среди выражений этих шести видов выражения

$$\forall x \mathfrak{D}(x) \quad \text{и} \quad \exists x \mathfrak{R}(x)$$

представляют собой то, что в доказываемой нами теореме мы называли формулами типа 4. А формулы остальных типов, применяя 10a)) и 10b))¹⁾, можно перевести в такие выражения, которые с помощью связок исчисления высказываний могут быть построены из составных частей типов 2) и 3) и из формул типов 5 и 6.

Таким образом, результирующее выражение, стоящее за кванторной приставкой, относящейся к переменным

$$y, z, \dots, u,$$

теперь состоит из составных частей типов 1, 4, 5, 6, 2) и 3).

В том случае, когда перед формулой больше нет ни одного квантора всеобщности или существования, составные части типов 2) и 3) могут содержать только свободные индивидуальные переменные; следовательно, они являются формулами типов 2 и 3. В этом случае вся формула в целом оказывается составленной из формул типов 1, 2, 3, 4, 5, 6 с помощью связок исчисления высказываний, и тем самым мы достигаем поставленной цели.

Если же связанные переменные

$$y, z, \dots, u$$

и относящиеся к ним кванторы приставки все еще будут иметься, то предыдущую процедуру можно будет повторить. Правда, ситуация по сравнению с исходной теперь изменится вследствие того, что в области действия кванторов, входящих в приставку, появились составные части типов 4, 5 и 6, содержащие связанные

переменные, отличные от

$$y, z, \dots, u,$$

но это обстоятельство не меняет ничего существенного в протекании нашего процесса. Действительно, так как составные части типов 4, 5 и 6 не содержат ни одной из переменных $y, z, \dots, u$, то мы можем обращаться с ними в точности так же, как с формульными переменными без аргумента, т. е. выражение, стоящее после кванторной приставки, сначала можно будет перевести в конъюнктивную, соответственно дизъюнктивную нормальную форму, причем все составные части типов 4, 5 и 6 можно будет рассматривать как нерасчленимое целое (подобно элементарным формулам). Если мы теперь применим — как мы это делали раньше — к последнему из кванторов, входящих в приставку, правила (θ) и (ι), то составные части типов 4, 5 и 6 выйдут из области действия этого квантора. Получившуюся теперь формулу можно охарактеризовать аналогично формуле, полученной нами на соответствующем месте первого шага нашей процедуры. Единственное различие заключается в том, что при перечислении возможностей 1), 2), 3), 4) мы к составным частям категории 1) должны будем, кроме формульных переменных без аргументов, причислить еще и формулы типов 4, 5 и 6. Дальнейшее течение процедуры, где речь идет только о преобразовании формул типа 4), будет таким же, как и в предыдущем случае.

После этого мы либо достигнем поставленной цели (если все кванторы, стоящие перед формулой будут исчерпаны, т. е. если все связанные переменные будут вовлечены в составные части типов 4, 5 и 6), либо сможем применить нашу процедуру еще раз. При каждом применении этой процедуры количество кванторов, стоящих перед формулой, будет уменьшаться на единицу. Таким образом, если число кванторов у исходной предваренной нормальной формы равно n , то n -кратное применение нашей процедуры приведет нас к формуле, обладающей заданным свойством, т. е. к такой формуле, которая образована из составных частей типов 1, 2, 3, 4, 5 и 6 с помощью связок исчисления высказываний. Тем самым исходная формула окажется разложенной в примарные формулы.

Заметим также, что рассмотренный способ разложения в примарные формулы не приводит к появлению каких-либо новых свободных индивидуальных переменных. Таким образом, если исходная формула с самого начала не содержала свободных индивидуальных переменных, то и после произведенного разложения в примарные формулы в результирующей формуле их также не будет. Тем самым не смогут появиться никакие составные части типов 2 и 3, так что все примарные формулы обязательно будут формулами типов 1, 4, 5 и 6.

¹⁾ См. с. 222 и далее.

Укажем также на то, что при разложении в примарные формулы можно заранее позаботиться о том, чтобы в составных частях видов

$$\forall x \mathcal{D}(x), \quad \forall_m x \mathcal{D}(x), \quad \exists x \mathcal{R}(x), \quad \exists_m x \mathcal{R}(x)$$

дизъюнкция $\mathcal{D}(x)$, соответственно конъюнкция $\mathcal{R}(x)$, содержала каждую входящую в нее формульную переменную *только один раз*. Действительно, повторяющиеся члены любой дизъюнкции или конъюнкции могут быть опущены. Может также случиться, что одна и та же формульная переменная входит в какую-нибудь дизъюнкцию или конъюнкцию в качестве члена один раз с отрицанием и один раз без него. Но тогда можно будет применить следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \forall x (A(x) \vee \neg A(x)) &\sim A \vee \neg A, \\ \forall x (A(x) \vee \neg A(x) \vee B(x)) &\sim A \vee \neg A, \\ \exists x (A(x) \& \neg A(x)) &\sim A \& \neg A, \\ \exists x (A(x) \& \neg A(x) \& B(x)) &\sim A \& \neg A. \end{aligned}$$

4. **Обобщение понятия $\mathfrak{f}$ -тождественной формулы; дедуктивная замкнутость совокупности $\mathfrak{f}$ -тождественных формул; однозначность равенства.** Теперь, после того как в результате проведенных нами формальных рассуждений мы познакомились с методикой использования аксиом (J_1) и (J_2) , мы снова вернемся к вопросу о непротиворечивости. Нам нужно показать, что в результате добавления к исчислению предикатов знака равенства и связанных с ним аксиом равенства не возникает никакого противоречия, т. е. что при этом никакие две формулы $\mathcal{A}$ и $\neg \mathcal{A}$ не оказываются выводимыми одновременно.

Это доказательство мы сможем провести уже применявшимся в гл. IV способом¹⁾, распространив понятие $\mathfrak{f}$ -тождественной формулы исчисления предикатов и на формулы со знаком равенства. Формулу такого рода мы назовем $\mathfrak{f}$ -тождественной ($\mathfrak{f}$ здесь означает произвольное, отличное от нуля конечное число), если она, будучи проинтерпретирована в $\mathfrak{f}$ -элементарной индивидуальной области, принимает значение «истина» при любой подстановке логических функций²⁾ вместо формульных переменных и индивидов вместо входящих в нее свободных индивидуальных переменных (при этом каждому фигурирующему в роли элементарной формулы равенству

$$\mathfrak{z} = t$$

в соответствии с его содержательным значением мы придаем значение «истина» или «ложь» в зависимости от того, совпадает $\mathfrak{z}$ с t или же нет).

¹⁾ См. гл. IV, с. 160—161.

²⁾ См. гл. IV, с. 165.

Кроме того, понятию $\mathfrak{f}$ -тождественной формулы мы сопоставим двойственное ему понятие $\mathfrak{f}$ -выполнимой формулы. Формула рассматриваемого нами формализма будет называться $\mathfrak{f}$ -выполнимой, если она, будучи проинтерпретирована в $\mathfrak{f}$ -элементарной индивидуальной области, принимает значение «истина» при подходящей подстановке логических функций вместо формульных переменных и индивидов вместо свободных индивидуальных переменных и при условии, что входящим в нее равенствам мы приписываем истинностные значения, соответствующие их содержательному смыслу.

Если отвлечься от того обстоятельства, что здесь в рассмотрение вовлекаются свободные индивидуальные переменные, то определения этих понятий совпадут с приводившимися в гл. I определениями общезначимости и выполнимости для $\mathfrak{f}$ -элементарной индивидуальной области¹⁾.

Для любой заданной формулы соответствующей проверкой мы всегда сможем выяснить, является ли она $\mathfrak{f}$ -тождественной, соответственно $\mathfrak{f}$ -выполнимой²⁾. При этом всякая формула $\mathfrak{f}$ -тождественна тогда и только тогда, когда ее отрицание $\mathfrak{f}$ -выполнимым не является.

Формулу, которая является $\mathfrak{f}$ -тождественной для любого $\mathfrak{f}$, мы, как и раньше, назовем *тождественной в конечном*, а формулу, которая является $\mathfrak{f}$ -выполнимой для некоторых определенных $\mathfrak{f}$, мы назовем *выполнимой в конечном*.

Мы утверждаем, что обе формулы (J_1) и (J_2) тождественны в конечном. Для формулы (J_1) это ясно непосредственно. Что же касается (J_2) , то, интерпретируя эту формулу в какой-либо $\mathfrak{f}$ -элементарной индивидуальной области и производя подстановку вместо формульной переменной и индивидуальных переменных, мы придем к формуле

$$\mathfrak{z} = t \rightarrow (\mathcal{A}(\mathfrak{z}) \rightarrow \mathcal{A}(t)).$$

Теперь, если $\mathfrak{z}$ совпадает с t , то $\mathcal{A}(\mathfrak{z})$ тоже совпадает с $\mathcal{A}(t)$ и поэтому выражение

$$\mathcal{A}(\mathfrak{z}) \rightarrow \mathcal{A}(t),$$

а тем самым и вся формула в целом, получает значение «истина»; если же $\mathfrak{z}$ отлично от t , то [

$$\mathfrak{z} = t$$

принимает значение «ложь», а вся формула в целом снова принимает значение «истина».

¹⁾ См. гл. I, с. 31.

²⁾ См. рассуждения на с. 35 и далее.

С учетом приведенных в гл. IV ¹⁾ соображений отсюда можно заключить, что все формулы, выводимые в исчислении предикатов с участием аксиом равенства, являются тождественными в конечном. Отсюда, далее, вытекает, что если мы помимо аксиом равенства добавим какие-нибудь новые f -тождественные формулы (для произвольного фиксированного f), то все выводимые в результате этого формулы снова будут f -тождественными. Таким образом, при добавлении одной или нескольких тождественных в конечном формул все выводимые формулы тоже будут тождественными в конечном.

В связи со сказанным следует особенно отметить, что при добавлении к исчислению предикатов равенства и связанных с ним аксиом мы опять не получаем полноты (в том, например, смысле, что всякая формула либо оказывается выводимой, либо, будучи добавлена в качестве исходной формулы, ведет к появлению противоречия).

Действительно, мы знаем ²⁾, что уже среди формул простого исчисления предикатов для любого числа f имеются такие, которые являются f -тождественными, но не $(f + 1)$ -тождественными. Всякая такая формула, по только что доказанному, не может оказаться выводимой и в том случае, если мы дополнительно присоединим знак равенства и формулы (J_1) , (J_2) [так как она не является $(f + 1)$ -тождественной]. С другой стороны, если формулу такого рода присоединить к числу исходных, то снова не получится никакого противоречия; более того, и в этом случае выводимыми окажутся только такие формулы, которые являются f -тождественными.

Многообразие тех формул, которые являются f -, но не $(f + 1)$ -тождественными, в результате добавления знака равенства становится значительно более широким. Вследствие этого формула является в то же самое время и f -тождественной, или — иными словами — что всякая f -выполнимая формула заодно является и $(f + 1)$ -выполнимой. В самом деле, используя знак равенства, мы для любого конечного числа f сможем при помощи соответствующей формулы выразить тот факт, что рассматриваемая индивидуальная область состоит в точности из f индивидов.

И хотя в указанном смысле слова исчисление предикатов с добавленным знаком равенства и с аксиомами равенства оказывается неполным, тем не менее характеристика равенства посредством формул (J_1) и (J_2) оказывается однозначной в следующем смысле. Если кроме знака равенства ввести еще один предикат-

¹⁾ См. гл. IV, с. 160.

²⁾ См. с. 159.

ный символ

$$a \equiv b$$

и ввести для него в качестве аксиом формулы

$$\begin{aligned} a &\equiv a, \\ a &\equiv b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \end{aligned}$$

соответствующие формулам (J_1) и (J_2) , то можно будет вывести формулу

$$a = b \sim a \equiv b.$$

Чтобы убедиться в этом, в силу соображений симметрии достаточно указать вывод формулы

$$a = b \rightarrow a \equiv b.$$

В формуле (J_2) вместо именной формы $A(c)$ подставим выражение $a \equiv c$. Это даст нам

$$a = b \rightarrow (a \equiv a \rightarrow a \equiv b).$$

Переставив посылки, получим

$$a \equiv a \rightarrow (a = b \rightarrow a \equiv b),$$

а эта формула совместно с формулой

$$a \equiv a$$

по 'схеме заключения даст нам требуемую формулу.

Подчеркнем, что вывод этот существенно опирается на то, что оба предиката

$$a = b \quad \text{и} \quad a \equiv b$$

совмещаются в рамках одного и того же формализма.

5. Добавление функциональных знаков; понятие терма; выводимые формулы. На этом мы пока что закончим рассмотрение равенства и связанных с ним аксиом и обсудим расширение еще одного типа. Оно будет состоять в допущении *символов для математических функций*.

До сих пор кроме переменных и логических знаков мы допускали в нашем формализме только предикатные и индивидуальные символы. Предикатный символ мы разрешали подставлять вместо формульной переменной с тем же числом аргументов, а индивидуальный символ — вместо свободной индивидуальной переменной.

Теперь в качестве символов нового типа мы введем знаки для математических функций — мы будем называть их *функциональными знаками*. В качестве функциональных знаков мы, как правило (т. е. если не будет применяться какой-нибудь специальный общепотребительный символ), будем использовать строчные

буквы греческого алфавита. Функциональные знаки в формализме будут отличаться от предикатных символов в том отношении, что предикатный символ с приданными ему аргументами представляет собой некоторую *формулу* (элементарную формулу), в то время как функциональный знак с приданными ему аргументами будет представлять собой некоторый *терм*. Слово «терм», начиная с этого места, мы будем использовать в качестве общего наименования для таких выражений, которые могут быть подставляемы вместо свободных индивидуальных переменных.

Таким образом, правило подстановки вместо свободных индивидуальных переменных¹⁾ теперь должно быть нами расширено. В качестве термов, т. е. в качестве объектов, подставляемых вместо свободных индивидуальных переменных, мы допускаем:

1. Свободные индивидуальные переменные.
2. Индивидуальные символы.
3. Функциональные символы, у которых каждый аргумент представляет собой или свободную индивидуальную переменную, или какой-либо индивидуальный символ.
4. Выражения, которые можно получить, исходя из какого-либо выражения типа 3 (по крайней мере с одной встречающейся в нем свободной переменной), в результате однократного или многократного выполнения операции замены какой-нибудь свободной индивидуальной переменной выражением типа 3.

Так, например, если мы вводим φ как функциональный знак с одним аргументом, ψ — как функциональный знак с двумя аргументами, а 1 — как индивидуальный символ, то выражения

$$\varphi(\psi(a, 1))$$

и

$$\psi(\varphi(a), \psi(b, \varphi(1)))$$

будут термами.

Напротив, выражения типа $\varphi(x)$ или $\psi(x, a)$, в которых встречаются связанные переменные, термами не являются, хотя такие выражения могут, конечно, быть составными частями формул; например,

$$\exists x (\varphi(x) = \varphi(a)).$$

является формулой, так как по-прежнему будет действовать правило, заключающееся в том, что если в какой-либо формуле заменить встречающуюся в ней свободную переменную связанной, а затем связать всю формулу в целом одноименным квантором всеобщности или существования, то в результате снова получится некоторая формула.

¹⁾ См. с. 123, 131.

Эффект, проистекающий от обобщения нашего правила подстановки, мы поясним на примере вывода нескольких формул. Мы снова возьмем здесь φ в качестве функционального знака с одним, а ψ — в качестве знака с двумя аргументами.

Будем исходить из основной формулы (а)

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a)$$

исчисления предикатов и подставим в нее вместо a терм $\varphi(a)$; тогда у нас получится

$$\forall x A(x) \rightarrow A(\varphi(a)).$$

К полученной формуле мы теперь можем применить схему (α) и получить, таким образом,

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x A(\varphi(x)).$$

Если же в исходную формулу (а) мы подставим не $\varphi(a)$, а $\psi(a, b)$, а потом опять применим схему (α), то получим формулу

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x A(\psi(b, x)).$$

В правой части этой импликации мы можем переименовать переменную x в y и подставить a вместо b ; тогда у нас получится

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall y A(\psi(a, y)).$$

Применив схему (α) еще раз, мы получим формулу

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x \forall y A(\psi(x, y)).$$

Эти выводы существенно используют то обстоятельство, что в формуле (а) имеется формульная переменная с аргументом. Аналогичные выводы можно построить, основываясь на формуле (b) и схеме (β).

Еще одной исходной формулой, содержащей формульную переменную с аргументом, является вторая аксиома равенства

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)).$$

Если мы подставим в нее вместо именной формы $A(c)$ формулу

$$\varphi(a) = \varphi(c),$$

то получится формула

$$a = b \rightarrow (\varphi(a) = \varphi(a) \rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)),$$

а из этой последней — перестановкой посылок —

$$\varphi(a) = \varphi(a) \rightarrow (a = b \rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)).$$

Если мы теперь учтем формулу

$$\varphi(a) = \varphi(a),$$

которая получается из формулы (J_1) в результате подстановки, то, применив схему заключения, получим формулу

$$a = b \rightarrow \varphi(a) = \varphi(b).$$

Совершенно аналогичным образом можно вывести следующие две формулы:

$$a = b \rightarrow \psi(a, c) = \psi(b, c),$$

$$a = b \rightarrow \psi(c, a) = \psi(c, b);$$

производя подстановки во второй из них, мы получим

$$c = d \rightarrow \psi(b, c) = \psi(b, d),$$

а из формулы

$$a = b \rightarrow (b = c \rightarrow a = c)$$

в результате подстановок получается

$$\psi(a, c) = \psi(b, c) \rightarrow \{\psi(b, c) = \psi(b, d) \rightarrow \psi(a, c) = \psi(b, d)\}.$$

Эта формула вместе с двумя предшествующими

$$a = b \rightarrow \psi(a, c) = \psi(b, c),$$

$$c = d \rightarrow \psi(b, c) = \psi(b, d)$$

по правилам исчисления высказываний дает нам формулу

$$a = b \& c = d \rightarrow \psi(a, c) = \psi(b, d).$$

Вообще, тем же самым способом, что и формулу $a = b \rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$, можно вывести любую формулу

$$a = b \rightarrow t(a) = t(b),$$

где $t(a)$ и $t(b)$ получаются из терма $t(c)$, содержащего переменную c , в результате замены этой переменной переменными a и b соответственно. Во всякой такого рода формуле $a = b \rightarrow t(a) = t(b)$ вместо a и b могут быть подставлены произвольные термы; тем самым из данного вывода равенства $a = b$ мы всегда сможем получить и некоторый вывод равенства $t(a) = t(b)$.

Другое замечание общего характера, относящееся к термам, заключается в том, что из формулы $t = a$, где t — произвольный терм, с помощью второй аксиомы равенства (J_2) может быть выведена формула $a = a$. В самом деле, как уже ранее упоминалось¹⁾, применив (J_2) , можно получить формулу

$$a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c),$$

а отсюда подстановками получим

$$t = a \rightarrow (t = a \rightarrow a = a),$$

¹⁾ См. с. 212.

так что формулу $a = a$ можно будет получить с помощью формулы $t = a$ двукратным применением схемы заключения. Поэтому, если в какой-нибудь формальной теории имеется аксиома вида $t = a$ (или же $t = b$ с произвольной переменной b) и аксиома равенства (J_2) , то аксиома равенства (J_1) оказывается излишней.

На этом мы закончим рассмотрение формального аспекта введения функциональных знаков. Что же касается содержательного истолкования, то надо сказать, что с этой точки зрения функциональным знакам будут соответствовать *математические функции*. Эти функции отличаются от логических функций, т. е. от предикатов, тем, что значения их *снова являются элементами индивидуальной области*, в то время как значение любой логической функции всегда представляет собой одно из двух истинностных значений — «истина» или «ложь».

§ 2. Решение проблемы разрешимости; теоремы о полноте

1. Распознавание выводимости таких предваренных формул исчисления предикатов, у которых все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования; разрешимость в конечном. После этих дополнений к нашему формализму мы вновь вернемся к основному ходу наших мыслей. Мы поставили перед собой задачу доказать, что каждая формула одноместного исчисления предикатов, тождественная в конечном, выводима средствами исчисления предикатов. Кроме того, еще должна быть решена проблема разрешимости для одноместного исчисления предикатов.

Имея в виду эту цель, мы сведем рассмотрение формул одноместного исчисления предикатов к рассмотрению формул специального вида

$$\forall y \forall z \dots \forall u \exists x \mathcal{A}(x, y, z, \dots, u),$$

где $\mathcal{A}(x, y, z, \dots, u)$ обозначает выражение без кванторов, а $\exists x$ представляет собой единственный квантор существования.

Сначала мы обсудим вопрос о выводимости формул этого вида. Эта дискуссия будет интересна и сама по себе, тем более что она будет относиться не только к одноместному исчислению предикатов, но и ко всему исчислению предикатов в целом.

Прежде всего мы докажем следующую теорему:

Если формула вида

$$\exists x \mathcal{A}(x),$$

не содержащая, кроме квантора $\exists x$, никаких других кванторов и такая, что в ней встречается не более k свободных индивидуальных переменных, является k -тождественной, то она является также и выводимой.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{A}(x)$ не содержит ни одной свободной индивидуальной переменной. В этом случае наша теорема утверждает, что если формула $\exists x \mathfrak{A}(x)$ 1-тождественна, то она выводима. Это действительно так. В самом деле, если рассматриваемая формула 1-тождественна, то формула $\mathfrak{A}(1)$ должна получаться подстановкой из некоторой тождественной формулы исчисления высказываний. Если цифру 1 всюду, где она встречается в этой подстановке в качестве аргумента формульной переменной, мы заменим переменной a , то у нас получится подстановка, дающая формулу $\mathfrak{A}(a)$. Таким образом, формула $\mathfrak{A}(a)$ тоже получается подстановкой из некоторой тождественной формулы и, значит, она выводима. Но формула $\exists x \mathfrak{A}(x)$ может быть получена из нее применением схемы (β) .

Теперь допустим, что в $\mathfrak{A}(x)$ имеются свободные индивидуальные переменные; пусть $a, b, \dots, r$ — полный список этих переменных и пусть число их равно n . По предположению, $n \leq l$, и так как формула $\exists x \mathfrak{A}(x)$ l -тождественна, то она и n -тождественна. Интерпретация формулы $\exists x \mathfrak{A}(x)$ на индивидуальной области, состоящей из цифр $1, \dots, n$, дает дизъюнкцию

$$\mathfrak{A}(1) \vee \mathfrak{A}(2) \vee \dots \vee \mathfrak{A}(n),$$

и если вместо переменных

$$a, b, \dots, r$$

мы подставим соответственно цифры

$$1, 2, \dots, n$$

[вследствие чего $\mathfrak{A}(x)$ перейдет в некоторое выражение $\mathfrak{A}^*(x)$], то в результате получится

$$\mathfrak{A}^*(1) \vee \mathfrak{A}^*(2) \vee \dots \vee \mathfrak{A}^*(n).$$

Значит, эта формула (по определению n -тождественной формулы) должна получаться подстановкой из тождественной формулы исчисления высказываний. Если мы теперь внесем изменения в подстановку, заменив цифру 1 всюду, где она встречается в качестве аргумента в подставляемой элементарной формуле, переменной a , цифру 2 — переменной $b, \dots$, цифру n — переменной r , то в результате этой модификации подстановки получится формула

$$\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b) \vee \dots \vee \mathfrak{A}(r).$$

Таким образом, эта формула получается подстановкой из некоторой тождественной формулы исчисления высказываний и, следовательно, является выводимой. Но от нее с помощью выводимой формулы

$$A(a) \vee A(b) \vee \dots \vee A(r) \rightarrow \exists x A(x)$$

можно будет перейти к формуле

$$\exists x \mathfrak{A}(x).$$

Доказанная теорема немедленно может быть обобщена следующим образом: Если формула вида

$$\forall y \forall z \dots \forall u \exists x \mathfrak{A}(x),$$

не содержащая никаких кванторов, кроме указанных, l -тождественна ($l \geq 1$) и если сумма числа кванторов всеобщности в этой формуле и числа встречающихся в ней свободных индивидуальных переменных (каждое из этих чисел может быть равно нулю) не превосходит l , то эта формула выводима.

Действительно, пусть

$$b, c, \dots, s$$

— свободные переменные, не встречающиеся в этой формуле, и пусть число их равно числу связанных переменных

$$y, z, \dots, u.$$

Тогда из рассматриваемой l -тождественной формулы по правилу (ϵ') выводима формула

$$\exists x \mathfrak{A}(x, b, c, \dots, s).$$

Значит, эта формула тоже l -тождественна, так как совокупность l -тождественных формул, как было показано в гл. IV, дедуктивно замкнута. Кроме того, число свободных индивидуальных переменных в этой формуле не превосходит l .

Отсюда, по только что доказанной теореме, получается, что формула

$$\exists x \mathfrak{A}(x, b, c, \dots, s)$$

выводима средствами исчисления предикатов без использования формулы

$$\forall y \dots \forall u \exists x \mathfrak{A}(x, y, \dots, u).$$

Но от формулы

$$\exists x \mathfrak{A}(x, b, c, \dots, s)$$

мы по правилу (ϵ) снова придем к формуле

$$\forall y \dots \forall u \exists x \mathfrak{A}(x, y, \dots, u).$$

Тем самым оказывается, что эта формула тоже выводима средствами исчисления предикатов.

Впрочем, предположение о том, что в рассматриваемой формуле встречается в точности один квантор существования, для доказанной теоремы является несущественным; теорема остается

в силе и в том случае, если кванторов существования нет вообще или если вместо одного квантора существования имеется несколько идущих подряд кванторов существования, т. е. в случае предваренной формулы вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_r \exists y_1 \dots \exists y_s \mathcal{M}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s),$$

где все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования.

Доказательство опять можно свести к случаю, когда кванторы всеобщности отсутствуют вообще. Требуемое здесь рассуждение может быть проведено совершенно тем же самым способом, что и в случае формулы с одним квантором существования.

Для примера рассмотрим случай, когда формула имеет вид

$$\exists x \exists y \mathcal{M}(x, y),$$

причем $\mathcal{M}(x, y)$ не содержит кванторов, а a и b являются единственными встречающимися в ней свободными индивидуальными переменными. Для всякой такой формулы наша теорема утверждает, что в случае 2-тождественности она является выводимой. По аналогии с ранее проведенным доказательством это может быть показано следующим образом. Из предположения о том, что эта формула является 2-тождественной, мы получаем, что формула

$$\mathcal{M}(a, a) \vee \mathcal{M}(a, b) \vee \mathcal{M}(b, a) \vee \mathcal{M}(b, b)$$

может быть получена подстановкой из некоторой тождественной формулы, а потому является выводимой. Но от этой формулы мы можем перейти к формуле

$$\exists x \exists y \mathcal{M}(x, y),$$

воспользовавшись выводимостью формулы

$$A(a, a) \vee A(a, b) \vee A(b, a) \vee A(b, b) \rightarrow \exists x \exists y A(x, y).$$

С помощью доказанной теоремы может быть разработан способ, позволяющий распознавать выводимость таких предваренных формул, у которых все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования. Действительно, по этой теореме для любой формулы указанного вида мы найдем число f , обладающее тем свойством, что если данная формула f -тождественна, то она и выводима. С другой стороны, если формула выводима, то она должна быть также и f -тождественной. Таким образом, для решения вопроса о выводимости данной формулы нам достаточно будет выяснить вопрос о том, является ли она f -тождественной. Но ответ на этот вопрос может быть получен путем соответствующего перебора.

Перед нами частный случай положительного решения проблемы разрешимости, причем это первый из тех упомянутых ¹⁾ в гл. IV трех частных случаев, когда это решение удается найти.

В качестве непосредственного следствия из доказанной нами теоремы далее получается, что всякая тождественная в конечном предваренная формула, у которой все кванторы всеобщности предшествуют всем кванторам существования, является выводимой.

2. Выводимость всякой тождественной в конечном формулы одноместного исчисления предикатов; доказательство с помощью прежней распознающей процедуры; теоретико-множественное доказательство и его финитное уточнение. Если мы теперь вернемся к одноместному исчислению предикатов, то без труда сможем доказать, что всякая тождественная в конечном формула этого исчисления является выводимой.

Мы сначала покажем, что любая формула $\mathcal{B}$ одноместного исчисления предикатов может быть переведена в некоторую конъюнкцию, состоящую из членов вида

$$\forall y \forall z \dots \forall u \exists x \mathcal{M}(x, y, z, \dots, u),$$

где $\mathcal{M}(x, y, z, \dots, u)$ кванторов не содержит.

Такое преобразование может быть получено на следующем пути. Сперва мы применим к формуле $\mathcal{B}$ описанную в гл. IV ²⁾ процедуру разложения в примарные формулы. В результате применения этой процедуры формула $\mathcal{B}$ будет преобразована в такую формулу $\mathcal{B}^*$, которая построена с помощью связок исчисления высказываний из составных частей следующих типов:

1. Элементарные формулы (формульные переменные с аргументом или без него).

2. Формулы вида $\forall x \mathcal{M}(x)$.

3. Формулы вида $\exists x \mathcal{M}(x)$.

При этом выражения $\mathcal{M}(x)$ не содержат, кроме x , никаких связанных переменных. (Более точное знание структуры выражений $\mathcal{M}(x)$ нам здесь совершенно не понадобится.)

Приведем формулу $\mathcal{B}^*$ к конъюнктивной нормальной форме относительно заданных составных частей; одновременно преобразуем по правилу (λ) отрицания выражений $\forall x \mathcal{M}(x)$ и $\exists x \mathcal{M}(x)$, в результате чего выражение, начинающееся квантором всеобщности, перейдет в выражение, начинающееся квантором существования, и наоборот.

Рассмотрим теперь какой-нибудь из членов полученной таким образом конъюнктивной нормальной формы. Он имеет вид

$$\forall x \mathcal{M}_1(x) \vee \dots \vee \forall x \mathcal{M}_m(x) \vee \exists x \mathcal{C}_1(x) \vee \dots \vee \exists x \mathcal{C}_n(x) \vee \mathcal{D},$$

¹⁾ См. гл. IV, с. 186.

²⁾ См. с. 188.

где никаких кванторов, кроме указанных, больше нет, так что $\mathfrak{D}$, в частности, вообще не содержит связанных переменных. (Может случиться, что не окажется ни одного дизъюнктивного члена вида $\exists x \mathfrak{C}_r(x)$; но тогда можно будет специально ввести такой член, добавив дизъюнктивно

$$\exists x (A(x) \& \neg A(x)),$$

что представляет собой допустимое преобразование.) Формула указанного вида, согласно правилу (θ) ¹⁾, может быть переведена в формулу

$$\forall x \mathfrak{A}_1(x) \vee \dots \vee \forall x \mathfrak{A}_m(x) \vee \exists x (\mathfrak{C}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{C}_n(x)) \vee \mathfrak{D},$$

а затем переименованием связанных переменных и применением правила (ι) ²⁾ — в формулу

$$\forall y \forall z \dots \forall u \exists x (\mathfrak{A}_1(y) \vee \mathfrak{A}_2(z) \vee \dots \vee \mathfrak{A}_m(u) \vee \mathfrak{C}_1(x) \vee \dots \vee \mathfrak{C}_n(x) \vee \mathfrak{D})$$

и, значит, в формулу вида

$$\forall y \forall z \dots \forall u \exists x \mathfrak{A}(x, y, z, \dots, u),$$

где нет никаких кванторов, кроме указанных. Тем самым требуемое преобразование выполнено.

Теперь доказываемая теорема может быть получена без труда. Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ — тождественная в конечном формула одноместного исчисления предикатов, а $\mathfrak{K}$ — конъюнкция, получаемая из $\mathfrak{B}$ в результате указанного преобразования; тогда — поскольку совокупность формул, тождественных в конечном, дедуктивно замкнута — формула $\mathfrak{K}$ также будет тождественной в конечном; то же самое можно сказать и о каждом члене этой конъюнкции, как это непосредственно видно из определения тождественных в конечном формул. Но каждый конъюнктивный член $\mathfrak{K}$ имеет вид

$$\forall y \dots \forall u \exists x \mathfrak{A}(x, y, \dots, u),$$

где $\mathfrak{A}(x, y, \dots, u)$ кванторов не содержит. А для всякой такой формулы мы доказали, что если она тождественна в конечном, то она выводима. Таким образом, $\mathfrak{K}$ есть конъюнкция выводимых формул и, значит, является выводимой формулой; и так как $\mathfrak{K}$ получается преобразованием $\mathfrak{B}$, то выводима и сама $\mathfrak{B}$. Таким образом, всякая тождественная в конечном формула одноместного исчисления предикатов действительно оказывается выводимой.

¹⁾ См. с. 178.

²⁾ См. с. 179.

Примененный в этом доказательстве метод преобразования в то же самое время дает нам и способ, позволяющий для произвольной данной формулы одноместного исчисления предикатов выяснить, является она выводимой или нет. В самом деле, это преобразование ведет нас к конъюнкции, состоящей из таких членов, выводимость которых (в силу ранее изложенного) может быть проверена; а всякая конъюнкция выводима тогда и только тогда, когда выводим каждый из ее членов.

К способу проверки выводимости формул одноместного исчисления предикатов и к только что доказанной об этом исчислении теореме мы можем прийти и другим путем, на который нас приводит рассмотрение теоретико-множественной логики предикатов.

С точки зрения теоретико-множественной логики предикатов возможность распознавания общезначимости формул одноместного исчисления предикатов проще всего получается из следующей теоремы; 2^f -тождественная формула одноместного исчисления предикатов, содержащая не более f различных формульных переменных с аргументом, является общезначимой; или, что сводится к тому же самому: если формула одноместного исчисления предикатов, содержащая не более f различных формульных переменных с аргументом, выполнима, то она выполнима и в 2^f -элементной индивидуальной области.

Во второй ее формулировке эта теорема доказывается следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}$ — рассматриваемая выполнимая формула. Она принимает значение «истина» при некоторой оценке для свободных переменных, складывающейся из

1. Вполне определенных истинностных значений («истина» или «ложь»), приписываемых формульным переменным без аргументов.
2. Вполне определенных логических функций от одного аргумента

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_f,$$

подставляемых вместо формульных переменных с аргументом (эти функции относятся к вполне определенной индивидуальной области J , и мы можем считать, что их имеется в точности f).

3. Собственных имен индивидов из J , которые подставляются вместо свободных индивидуальных переменных.

Индивиды из J мы можем затем разбить на классы таким образом, чтобы два индивида — например, α и β — причислялись к одному классу тогда и только тогда, когда последовательность, состоящая из f значений

$$\Phi_1(\alpha), \dots, \Phi_f(\alpha),$$

совпадает с последовательностью значений

$$\Phi_1(\beta), \dots, \Phi_f(\beta).$$

Так как значениями функций $\Phi_1, \dots, \Phi_f$ могут быть только два значения «истина» и «ложь», то в смысле определенного нами разбиения может быть самое большее 2^f различных классов. Пусть n — число этих классов, а J^* — индивидная область, образованная этими классами.

Каждой из функций Φ_v однозначным образом соотносится некоторая функция Φ_v^* , определенная на индивидной области J^* и принимающая на каждом из этих n классов то однозначно определенное значение, которое Φ_v принимает на индивидах из этого класса.

Теперь легко рассудить — с помощью предваренной нормальной формы или с помощью разложения на элементарные формулы, — что формула $\mathfrak{A}$ будет принимать значение «истина» и в том случае, если рассматриваемая нами подстановка будет модифицирована таким образом, что:

1. Вместо индивидной области J мы возьмем n -элементную область J^* .

2. Вместо функций

$$\Phi_1, \dots, \Phi_f$$

возьмем функции

$$\Phi_1^*, \dots, \Phi_f^*.$$

3. Вместо собственного имени для индивида из J — некоторый знак для целого класса индивидов.

Но это означает, что формула $\mathfrak{A}$ выполнима в некоторой n -элементной индивидной области и что, следовательно, формула $\neg \mathfrak{A}$ не является n -тождественной. Но $n \leq 2^f$, а ранее мы показали, что всякая $(n+1)$ -тождественная формула является также и n -тождественной. Поскольку формула $\neg \mathfrak{A}$ не является n -тождественной, то отсюда следует, что она не может быть также и 2^f -тождественной. Следовательно, формула $\mathfrak{A}$ выполнима в некоторой 2^f -элементной индивидной области.

Конечно, это рассмотрение не удовлетворяет требованиям принятой нами методики. Но мы можем уточнить его до финитного рассуждения, выдержанного в духе теории доказательств.

В самом деле, теорема, которую мы только что сформулировали и доказали нефинитным образом, допускает следующую, более сильную формулировку: *Если формула одноместного исчисления предикатов содержит не более f формульных переменных с аргументом и является 2^f -тождественной, то она выводима.*

Правда, доказательство этой теоремы, получающееся переосмысливанием предыдущего рассмотрения в духе теории доказательств, оказывается довольно трудным, и поэтому мы проведем его здесь только для простейшего случая $f = 1$.

Не умаляя общности, мы можем ограничиться в этом доказательстве рассмотрением только таких формул, которые не содержат свободных индивидных переменных. Действительно, любая формула со свободными индивидными переменными дедуктивно равна формуле, получающейся из нее связыванием по правилу (ϵ)¹⁾ всех свободных индивидных переменных путем простановки перед формулой соответствующих кванторов всеобщности.

Положив $f = 1$, мы будем иметь дело с 2^1 -тождественной, т. е. с 2-тождественной формулой одноместного исчисления предикатов, в которую входит только одна формульная переменная с аргументом. Если обозначить эту формульную переменную символом P , то рассматриваемая формула после разложения ее в примарные формулы и после исключения тех примарных формул, в которые переменная P входит более одного раза²⁾, окажется построенной из примарных формул

$$\forall x P(x), \quad \forall x \neg P(x), \quad \exists x P(x), \quad \exists x \neg P(x),$$

а также из формульных переменных без аргументов.

Обозначим эту формулу символом $\mathfrak{A}(P)$. Пусть $\mathfrak{A}^*(P, a)$ означает формулу, которая получится из $\mathfrak{A}(P)$, если

$$\forall x P(x) \text{ и } \exists x P(x) \text{ заменить посредством } P(a),$$

а

$$\forall x \neg P(x) \text{ и } \exists x \neg P(x) \text{ — посредством } \neg P(a);$$

пусть, кроме того, $\mathfrak{A}^{**}(P, a, b)$ означает формулу, которая получится из $\mathfrak{A}(P)$, если

$$\forall x P(x) \text{ заменить посредством } P(a) \& P(b),$$

$$\forall x \neg P(x) \text{ — посредством } \neg P(a) \& \neg P(b),$$

$$\exists x P(x) \text{ — посредством } P(a) \vee P(b),$$

$$\exists x \neg P(x) \text{ — посредством } \neg P(a) \vee \neg P(b).$$

Наше предположение, что формула $\mathfrak{A}(P)$ является 2-тождественной, а тем самым и 1-тождественной, означает, что формулы

$$\mathfrak{A}^*(P, a) \text{ и } \mathfrak{A}^{**}(P, a, b)$$

получаются в результате подстановки из некоторых тождественных формул исчисления высказываний. Нам требуется доказать, что при этом предположении формула $\mathfrak{A}(P)$ оказывается выводимой.

Таким образом, речь идет о том, чтобы вывести формулу $\mathfrak{A}(P)$ из $\mathfrak{A}^*(P, a)$ и $\mathfrak{A}^{**}(P, a, b)$. Это может быть проделано следующим образом.

¹⁾ См. с. 174.

²⁾ См. с. 232.

Как легко убедиться, обе формулы

$$\forall x (P(x) \sim P(a)) \rightarrow (\mathfrak{A}(P) \sim \mathfrak{A}^*(P, a)),$$

$$\forall x \{(P(x) \sim P(a)) \vee (P(x) \sim P(b))\} \rightarrow (\mathfrak{A}(P) \sim \mathfrak{A}^{**}(P, a, b))$$

выводимы. Первая из них в сочетании с $\mathfrak{A}^*(P, a)$ дает

$$\forall x (P(x) \rightarrow P(a)) \rightarrow \mathfrak{A}(P);$$

из второй в сочетании с $\mathfrak{A}^{**}(P, a, b)$ мы получаем

$$\forall x \{(P(x) \sim P(a)) \vee (P(x) \sim P(b))\} \rightarrow \mathfrak{A}(P).$$

Используя выводимые формулы

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall x (P(x) \sim P(a))$$

и

$$\forall x \neg P(x) \rightarrow \forall x (P(x) \sim P(a)),$$

мы из формулы

$$\forall x (P(x) \sim P(a)) \rightarrow \mathfrak{A}(P)$$

по правилу силлогизма получим формулы

$$\forall x P(x) \rightarrow \mathfrak{A}(P)$$

и

$$\forall x \neg P(x) \rightarrow \mathfrak{A}(P).$$

Далее, из формулы

$$\forall x \{(P(x) \sim F(a)) \vee (P(x) \sim P(b))\} \rightarrow \mathfrak{A}(P)$$

мы с помощью выводимой формулы

$$P(a) \& \neg P(b) \rightarrow \forall x \{(P(x) \sim P(a)) \vee (P(x) \sim P(b))\}$$

получим формулу

$$P(a) \& \neg P(b) \rightarrow \mathfrak{A}(P);$$

из нее, выполнив соответствующие преобразования, получим

$$P(a) \rightarrow (\neg P(b) \rightarrow \mathfrak{A}(P)),$$

а отсюда двукратным применением схемы (β) и путем элементарных преобразований получим

$$\exists x P(x) \& \exists x \neg P(x) \rightarrow \mathfrak{A}(P).$$

Но тем самым мы оказываемся у поставленной цели; действительно, последняя формула вместе с двумя ранее полученными

$$\forall x P(x) \rightarrow \mathfrak{A}(P)$$

и

$$\forall x \neg P(x) \rightarrow \mathfrak{A}(P)$$

дает

$$\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x) \vee (\exists x P(x) \& \exists x \neg P(x)) \rightarrow \mathfrak{A}(P);$$

посылка этой импликации является выводимой формулой, так что с помощью схемы заключения мы получим

$$\mathfrak{A}(P).$$

В этом выводе идея предыдущего содержательного доказательства находит свое отражение в применении формулы

$$P(a) \& \neg P(b) \rightarrow \forall x \{(P(x) \sim P(a)) \vee (P(x) \sim P(b))\}.$$

Действительно, при содержательном истолковании эта формула выражает ту мысль, что если мы рассматриваем всего лишь одну-единственную логическую функцию, то в смысле упомянутого выше разбиения на классы таких классов окажется самое большее два.

При $f = 2$ вместо этой формулы будет фигурировать формула

$$P(a) \& Q(a) \& P(b) \& \neg Q(b) \& \neg P(c) \& Q(c) \& \neg P(d) \& \neg Q(d) \rightarrow$$

$$\forall x \{((P(x) \sim P(a)) \& (Q(x) \sim Q(a))) \vee ((P(x) \sim P(b)) \vee$$

$$(Q(x) \sim Q(b))) \vee ((P(x) \sim P(c)) \& (Q(x) \sim Q(c))) \vee$$

$$((P(x) \sim P(d)) \& (Q(x) \sim Q(d)))\}.$$

Здесь вместо двух переменных a и b у нас будут четыре переменные a, b, c и d . Аналогично, в общем случае приходится ввести 2^f свободных индивидуальных переменных.

Получающаяся таким образом теорема о том, что 2^f -тождественная формула одноместного исчисления предикатов, содержащая не более f формульных переменных с аргументом, является выводимой, также дает нам способ для распознавания выводимости произвольной заданной формулы одноместного исчисления предикатов. В качестве непосредственного следствия из этой теоремы вытекает, что каждая формула одноместного исчисления предикатов, тождественная в конечном, является также и выводимой.

Мы докажем также теорему о том, что *всякая формула одноместного исчисления предикатов либо выполнима в конечном, либо опровержима*. Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная формула одноместного исчисления предикатов, и пусть f — число различных встречающихся в ней формульных переменных; тогда либо $\mathfrak{A}$ 2^f -выполнима, либо $\neg \mathfrak{A}$ 2^f -тождественна. В первом случае $\mathfrak{A}$ выполнима в конечном, во втором случае формула $\neg \mathfrak{A}$ выводима и, значит, $\mathfrak{A}$ оказывается опровержимой.

3. Нормальная форма формулы расширенного одноместного исчисления предикатов на основе дедуктивного равенства. Теоремы о полноте, только что установленные нами для одноместного исчисления предикатов, могут быть распространены и на *расширенное одноместное исчисление предикатов*. Для формул этого исчисления также справедливо утверждение о том, что всякая формула, тождественная в конечном, может быть выведена по правилам этого формализма и что всякая формула либо выполнима в конечном, либо опровержима. Проблема разрешимости для этого формализма также полностью решается. Эти результаты вытекают из следующей теоремы:

Всякая формула расширенного одноместного исчисления предикатов дедуктивно равна некоторой другой формуле, которая либо сама является количественной формулой, либо оказывается составленной из количественных формул с помощью связок исчисления высказываний.

Эта теорема, сводящая теорию расширенного одноместного исчисления предикатов к всецело элементарным рассмотрениям, первоначально была найдена Лёвенгеймом, а затем более простым способом была доказана Сколемом. Независимо от исследований Лёвенгейма и Сколема к тому же самому результату пришел Беман ¹⁾.

Доказательство следует методу, предложенному Беманом ²⁾.

Мы будем существенным образом опираться на доказанную ранее теорему о разложении формулы расширенного одноместного исчисления предикатов в примарные формулы. Далее, мы будем пользоваться теоремой из гл. IV, которая говорит о том, что формула переходит в дедуктивно равную, если одну или несколько входящих в эту формулу свободных индивидуальных переменных заменить связанными переменными и поставить перед формулой соответствующие кванторы всеобщности, или если, наоборот, отбросить один или несколько стоящих перед этой формулой кванторов всеобщности, а соответствующие им переменные заменить ранее не встречавшимися свободными индивидуальными переменными ³⁾.

Эту операцию перехода от свободных переменных к связанным и обратно мы будем кратко называть «заменой» (Austausch) свободных переменных связанными и соответственно связанных переменных свободными.

¹⁾ Löwenheim L. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. — Math. Ann., 1915, 76; Skolem T. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktions- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. — Videnskapsselskapets Skrifter I, Math.-Nat. Kl., 1919, № 3, § 4; Behn H. Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. — Math. Ann., 1922, 86, № 3/4.

²⁾ См. §§ 20 и 21 только что цитированного сочинения Бемана.

³⁾ См. гл. IV, с. 193.

Пусть теперь дана формула расширенного одноместного исчисления предикатов. Как было показано выше ¹⁾, рядом преобразований ее можно перевести в некоторую формулу, составленную с помощью связок исчисления высказываний из формул следующих шести типов:

1. Формульные переменные без аргументов.
2. Формульные переменные с одной свободной переменной в качестве аргумента.
3. Равенства между свободными переменными.
4. Формулы вида

$$\forall x \mathfrak{D}(x) \text{ и } \exists x \mathfrak{K}(x),$$

где $\mathfrak{D}(x)$ обозначает дизъюнкцию, а $\mathfrak{K}(x)$ — конъюнкцию, члены которой суть формульные переменные с аргументом x или отрицания таких формул, причем каждая встречающаяся формульная переменная встречается только в одном из членов.

5. Формулы вида

$$\forall_m x \mathfrak{D}(x) \text{ и } \exists_m x \mathfrak{K}(x),$$

где выражения $\mathfrak{D}(x)$ и $\mathfrak{K}(x)$ имеют структуру, указанную в п. 4.

6. Количественные формулы, т. е. формулы вида

$$\forall_m y (x = y) \text{ и } \exists_m y (x \neq y).$$

Кроме того, полученную нами формулу, построенную из составных частей типов 1—6, мы можем, пользуясь правилами исчисления высказываний, перевести в формулу, являющуюся конъюнктивной нормальной формой относительно этих составных частей.

До сих пор все преобразования были преобразованиями в смысле *переводимости*. Теперь мы будем стремиться к тому, чтобы *постепенно, шаг за шагом, исключить все формульные переменные с аргументом*. Для достижения этой цели мы будем пользоваться преобразованиями в смысле *дедуктивного равенства*. Мы будем при этом использовать тот факт, что конъюнкция при замене ее членов дедуктивно равными формулами переходит в дедуктивно равную ей конъюнкцию. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть формулы

$$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$$

дедуктивно равны формулам

$$\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n.$$

Тогда из формулы

$$\mathfrak{A}_1 \& \dots \& \mathfrak{A}_n,$$

¹⁾ См. с. 226.

из которой, как мы знаем, выводимы формулы

$$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n,$$

могут быть также выведены и формулы

$$\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n,$$

а тем самым и формула

$$\mathcal{B}_1 \& \dots \& \mathcal{B}_n;$$

кроме того, из последней формулы в точности тем же способом может быть выведена формула

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_n.$$

Из этого замечания вытекает, что в полученной нами конъюнктивной нормальной форме каждый конъюнктивный член может рассматриваться сам по себе. Каждый такой член имеет вид дизъюнкции, члены которой суть формулы типов 1—6 или же отрицания таких формул. Здесь прежде всего можно перевести отрицания формул типов 4 и 5 в формулы тех же самых типов, но уже не являющиеся отрицаниями других формул. В самом деле, отрицания формул вида

$$\forall x \mathcal{D}(x), \exists x \mathcal{R}(x), \forall_m x \mathcal{D}(x), \exists_m x \mathcal{R}(x),$$

как мы знаем, переводимы в формулы вида

$$\exists x \mathcal{R}(x), \forall x \mathcal{D}(x), \exists_m x \mathcal{R}(x), \forall_m x \mathcal{D}(x)$$

Теперь представим себе, что встречающиеся формульные переменные с аргументом расположены с целью их исключения в определенном порядке. Пусть B — первая в этой последовательности переменная с аргументом. В качестве именной формы для нее возьмем $B(s)$.

Переменная B может встречаться только в составных частях типов 2, 4 и 5. В случае, когда $B(s)$ содержится в составных частях вида

$$\forall x \mathcal{D}(x) \text{ или } \forall_m x \mathcal{D}(x),$$

вынесем фигурирующие в начале этих формул кванторы всеобщности по правилу (1) ¹⁾ (после выполнения соответствующих переименований, которые, возможно, при этом потребуются) в начало всей нашей дизъюнкции и затем заменим связываемые ими переменные свободными.

К содержащим формульную переменную $B(s)$ составным частям

$$\exists_m x \mathcal{R}(x)$$

¹⁾ См. с. 179.

мы применим эквивалентности 9b)) ¹⁾, согласно которым всякая формула

$$\exists_m x \mathcal{R}(x) \quad (m = 2, 3, \dots)$$

переводима в формулу

$$\forall x \forall y \dots \forall v \exists w (w \neq x \& \dots \& w \neq v \& \mathcal{R}(w)),$$

где число кванторов всеобщности $\forall x, \dots, \forall v$ на единицу меньше m . Кванторы всеобщности, стоящие в начале такой формулы, после выполнения соответствующих переименований, если они окажутся необходимыми, мы снова можем, пользуясь правилом (1) ²⁾, вынести в начало всей нашей дизъюнкции, а затем заменить связываемые ими переменные свободными. Кроме того, переименуем связываемую квантором существования переменную w в x . Так вместо составной части $\exists_m x \mathcal{R}(x)$ мы получим формулу вида

$$\neg \exists x (x \neq a \& \dots \& x \neq r \& \mathcal{R}(x))$$

(в которой, конечно, вместо $a, \dots, r$ могут стоять и какие-нибудь другие свободные переменные).

После выполнения всех этих операций формульная переменная $B(s)$ будет встречаться только в таких дизъюнктивных членах, которые либо являются формулами типа 2, либо отрицаниями таких формул, либо имеют один из видов

$$\begin{aligned} \exists x B(x), \quad \exists x (B(x) \& \mathcal{C}), \\ \exists x \neg B(x), \quad \exists x (\neg B(x) \& \mathcal{C}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}$ — выражение, не содержащее формульной переменной $B(s)$.

Теперь все такие члены нашей дизъюнкции мы можем перевести в члены вида

$$\exists x (B(x) \& \mathcal{C}) \text{ или } \exists x (\neg B(x) \& \mathcal{C}).$$

Действительно, для формул типа 2 и их отрицаний мы в своем распоряжении имеем эквивалентности

$$\begin{aligned} B(a) \sim \exists x (x = a \& B(x)), \\ \neg B(a) \sim \exists x (x = a \& \neg B(x)), \end{aligned}$$

которые с помощью подстановки получаются из формулы 6b)) ³⁾; а формулы

$$\exists x B(x) \text{ и } \exists x \neg B(x)$$

¹⁾ См. с. 219.

²⁾ См. с. 179.

³⁾ См. с. 214.

могут быть переведены в формулы

$$\exists x (B(x) \& x = x) \text{ и } \exists x (\neg B(x) \& x = x).$$

После того как эти преобразования будут выполнены, вся наша дизъюнкция (после подходящей перестановки членов) приобретет вид

$$\mathfrak{A} \vee \exists x (B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(1)}(x)) \vee \dots \vee \exists x (B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(1)}(x)) \\ \vee \exists x (\neg B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(2)}(x)) \vee \dots \vee \exists x (\neg B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(2)}(x)),$$

где выражения $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}_1^{(1)}(x)$, ..., $\mathfrak{G}_1^{(1)}(x)$, $\mathfrak{G}_1^{(2)}(x)$, ..., $\mathfrak{G}_1^{(2)}(x)$ уже не содержат формульной переменной $B(s)$.

Эту формулу можно сначала перевести по правилу (θ) ¹⁾ в

$$\mathfrak{A} \vee \exists x \{ (B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(1)}(x)) \vee \dots \vee (B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(1)}(x)) \\ \vee (\neg B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(2)}(x)) \vee \dots \vee (\neg B(x) \& \mathfrak{G}_1^{(2)}(x)) \},$$

а затем с использованием закона дистрибутивности и правила (η) ²⁾ — в формулу

$$\mathfrak{A} \vee \exists x \{ (B(x) \& (\mathfrak{G}_1^{(1)}(x) \vee \dots \vee \mathfrak{G}_1^{(1)}(x))) \vee \\ (\neg B(x) \& (\mathfrak{G}_1^{(2)}(x) \vee \dots \vee \mathfrak{G}_1^{(2)}(x))) \},$$

т.е. в формулу вида

$$\mathfrak{A} \vee \exists x \{ (B(x) \& \mathfrak{G}^{(1)}(x)) \vee (\neg B(x) \& \mathfrak{G}^{(2)}(x)) \},$$

где снова выражения $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}^{(1)}(x)$ и $\mathfrak{G}^{(2)}(x)$ не содержат формульной переменной $B(s)$ ³⁾.

Эта формула *дедуктивно равна* формуле

$$\mathfrak{A} \vee \exists x (\mathfrak{G}^{(2)}(x) \& \mathfrak{G}^{(1)}(x)).$$

Действительно, если в предыдущей формуле вместо переменной $B(s)$ подставить формулу $\mathfrak{G}^{(2)}(s)$, то получится

$$\mathfrak{A} \vee \exists x ((\mathfrak{G}^{(2)}(x) \& \mathfrak{G}^{(1)}(x)) \vee (\neg \mathfrak{G}^{(2)}(x) \& \mathfrak{G}^{(2)}(x)));$$

а так как дизъюнктивный член

$$\neg \mathfrak{G}^{(2)}(x) \& \mathfrak{G}^{(2)}(x)$$

¹⁾ См. с. 178.

²⁾ См. с. 177.

³⁾ В том случае, когда одно из чисел i , l равно нулю, немедленно получается (с помощью соответствующей подстановки вместо $B(s)$), что эта формула дедуктивно равна формуле $\mathfrak{A}$.

может быть опущен, то отсюда получается и только что упомянутая формула

$$\mathfrak{A} \vee \exists x (\mathfrak{G}^{(2)}(x) \& \mathfrak{G}^{(1)}(x));$$

с другой стороны, исходя из этой формулы и применяя тождественную формулу

$$C \& D \rightarrow (A \& D) \vee (\neg A \& C),$$

из которой в результате подстановки получается

$$\mathfrak{G}^{(2)}(a) \& \mathfrak{G}^{(1)}(a) \rightarrow (B(a) \& \mathfrak{G}^{(1)}(a)) \vee (\neg B(a) \& \mathfrak{G}^{(2)}(a))^{-1},$$

мы с использованием правила (δ) ²⁾ и тождественной формулы

$$(C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C \rightarrow A \vee D)$$

возвращаемся к формуле

$$\mathfrak{A} \vee \exists x \{ (B(x) \& \mathfrak{G}^{(1)}(x)) \vee (\neg B(x) \& \mathfrak{G}^{(2)}(x)) \}.$$

Дедуктивное равенство доказано. Теперь исключение формульной переменной $B(s)$ завершается переходом к формуле

$$\mathfrak{A} \vee \exists x (\mathfrak{G}^{(2)}(x) \& \mathfrak{G}^{(1)}(x)).$$

Правда, относительно полученной формулы мы не можем утверждать, что она составлена из примарных; но разложение в примарные формулы можно будет произвести дополнительно и получившуюся таким образом формулу мы затем сможем преобразовать в конъюнктивную нормальную форму, конъюнктивные члены которой снова можно будет рассматривать по отдельности. Существенно, что при этой процедуре *новых формульных переменных с аргументом не появляется*, так что в целом количество подлежащих исключению формульных переменных с аргументом уменьшается.

Продолжая таким образом и далее, мы в конце концов добьемся того, что все формульные переменные с аргументом будут полностью исключены.

Когда этот процесс будет закончен, мы, во-первых, соберем вместе все те конъюнктивные члены, на которые шаг за шагом была расщеплена наша исходная формула; действительно, при исключении очередной формульной переменной с аргументом происходит дальнейшее расщепление на конъюнктивные члены и для каждого члена исключение должно проводиться в отдельности.

¹⁾ Если переменная a входит в $\mathfrak{G}^{(1)}(x)$ или в $\mathfrak{G}^{(2)}(x)$, то вместо a в указанной формуле нужно будет взять какую-нибудь другую свободную индивидуальную переменную.

²⁾ См. с. 146.

Далее, мы заменим все встречающиеся свободные индивидуальные переменные связанными. Затем мы применим процедуру разложения в примарные формулы. Так как теперь уже больше не будет свободных индивидуальных переменных и формульных переменных с аргументом, то составные части, из которых (после произведенного разложения в примарные формулы) оказывается построенной наша формула, могут быть только формулами типов 1 и 6, т. е. только формульными переменными без аргументов и количественными формулами. Мы снова придадим этой формуле вид конъюнктивной нормальной формы.

Теперь мы можем исключить здесь и формульные переменные без аргумента. Действительно, во-первых, мы можем опустить повторяющиеся дизъюнктивные члены. Далее, если в каком-нибудь члене конъюнктивной нормальной формы формульная переменная встречается в качестве дизъюнктивного члена вместе со своим отрицанием, то по правилам исчисления высказываний весь этот член конъюнкции может быть опущен. Если это будет иметь место в *каждом* конъюнктивном члене этой нормальной формы, то *вся формула в целом будет выводимой*. Тогда ее можно будет перевести и в такую формулу, которая состоит из одних количественных формул, например, в формулу

$$\forall x_2 y (x = y) \vee \neg \forall x_2 y (x = y).$$

Теперь осталось рассмотреть только такой случай, когда каждая из встречающихся в формуле формульных переменных фигурирует внутри каждого члена конъюнкции не более одного раза (с отрицанием или без него). В этом случае исключение формульных переменных снова будет происходить таким образом, что будет преобразовываться (в смысле дедуктивного равенства) каждый в отдельности член этой конъюнкции. Пусть, например, C — переменная, которая должна быть исключена первой. Содержащий эту переменную член конъюнкции будет иметь (может быть, после перестановки дизъюнктивных членов) один из двух видов

$$\mathcal{A} \vee C, \mathcal{A} \vee \neg C,$$

где переменная C в $\mathcal{A}$ не входит.

Но формула $\mathcal{A} \vee C$ дедуктивно равна $\mathcal{A}$. Действительно, $\mathcal{A}$ получается из $\mathcal{A} \vee C$ подстановкой вместо C формулы $C \& \neg C$, которая может быть опущена в качестве члена дизъюнкции; формулу $\mathcal{A} \vee C$ тоже можно получить из $\mathcal{A}$ по правилам исчисления высказываний. Равным образом, формула $\mathcal{A} \vee \neg C$ дедуктивно равна $\mathcal{A}$, так как, подставляя $C \vee \neg C$ вместо C и применяя правило отрицания, мы вместо $\neg C$ получим дизъюнктивный член $C \& \neg C$, который опять-таки может быть опущен.

Таким образом, можно одну за другой исключить все формульные переменные, и тогда мы придем к формуле, которая будет иметь вид конъюнктивной нормальной формы, построенной из *количественных формул*, и которая будет дедуктивно равна нашей первоначальной формуле.

Тем самым доказана провозглашенная нами теорема о том, что *всякая формула расширенного одноместного исчисления предикатов дедуктивно равна некоторой формуле, построенной из одних только количественных формул*; при этом доказательство, в полном соответствии с финитной точкой зрения, протекает таким образом, что одновременно оно дает и способ, позволяющий для любой заданной формулы расширенного одноместного исчисления предикатов построить дедуктивно равную ей формулу, состоящую из количественных формул. Указанный способ применим не только в принципе, но и оказывается приспособленным для практического использования, причем, конечно, отдельные его детали могут быть упрощены и далее.

4. Теоремы о полноте для расширенного одноместного исчисления предикатов. С помощью доказанной теоремы мы теперь без труда получим доказательство сформулированных выше теорем о полноте, а также и решение проблемы разрешимости для расширенного одноместного исчисления предикатов¹⁾.

Мы сначала покажем, что всякая тождественная в конечном формула расширенного одноместного исчисления предикатов всегда будет выводимой. В самом деле, пусть $\mathcal{A}$ — тождественная в конечном формула этого исчисления. Указанным методом мы построим формулу $\mathcal{B}$, дедуктивно равную формуле $\mathcal{A}$ и составленную из количественных формул. Эта формула, согласно доказанному ранее, также должна быть тождественной в конечном. Мы можем считать, что $\mathcal{B}$ имеет вид конъюнктивной нормальной формы, и тогда каждый ее конъюнктивный член в отдельности также должен быть тождественным в конечном. Каждый такой член имеет вид дизъюнкции количественных формул

$$\forall x_m y (x = y), \exists x_m y (x \neq y)$$

и их отрицаний. Сначала, пользуясь эквивалентностью

$$\neg \forall x_m y (x = y) \sim \exists x_m y (x \neq y),$$

здесь можно будет устранить отрицания. Далее мы сможем перевести эти дизъюнкции в дизъюнкции, состоящие самое большее из двух членов; действительно, из выводимых формул

$$\forall x_m y (x = y) \rightarrow \forall x_{m+1} y (x = y)$$

¹⁾ См. с. 250.

и

$$\exists x_{m+1}y (x \neq y) \rightarrow \exists x_my (x \neq y)$$

для любых двух чисел m и n таких, что $m \geq n$, могут быть получены эквивалентности

$$\forall x_my (x = y) \sim \forall x_my (x = y) \vee \forall x_ny (x = y)$$

и

$$\exists x_ny (x \neq y) \sim \exists x_my (x \neq y) \vee \exists x_ny (x \neq y),$$

а с помощью этих эквивалентностей мы можем шаг за шагом уменьшать количество дизъюнктивных членов вида $\forall x_fy (x = y)$ и $\exists x_fy (x \neq y)$ до тех пор, пока членов каждого из этих типов станет не больше одного. Тогда получится либо формула

$$\forall x_fy (x = y),$$

либо формула

$$\exists x_fy (x \neq y)$$

либо формула

$$\forall x_fy (x = y) \vee \exists x_fy (x \neq y);$$

при этом f и l будут по меньшей мере равны 2.

Эта формула — как результат преобразования конъюнктивного члена формулы $\mathfrak{B}$ — должна быть тождественной в конечном. Но легко убедиться, что формула

$$\forall x_fy (x = y)$$

не является f -тождественной, а формула

$$\exists x_fy (x \neq y)$$

не является $(l - 1)$ -тождественной.

Таким образом, следует принимать во внимание лишь случай формулы

$$\forall x_fy (x = y) \vee \exists x_fy (x \neq y).$$

Для того чтобы эта формула была тождественной в конечном, она должна быть, в частности, f -тождественной. Но, как легко видеть, это имеет место только тогда, когда $f \geq l$.

Таким образом, это условие должно выполняться. Но в этом случае выводимость рассматриваемой нами формулы немедленно вытекает из выводимости следующих двух формул:

$$\forall x_fy (x = y) \sim \neg \exists x_fy (x \neq y),$$

$$\exists x_fy (x \neq y) \rightarrow \exists x_fy (x \neq y).$$

Отсюда следует, что каждый конъюнктивный член конъюнктивной нормальной формы $\mathfrak{B}$ является выводимой формулой, а значит, и сама $\mathfrak{B}$ также будет выводимой. Но $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ дедуктивно равны, и, значит, $\mathfrak{A}$ также является выводимой формулой, что и требовалось доказать.

Метод, которым мы провели только что рассмотренное доказательство, заодно дает нам и способ, позволяющий распознавать выводимость любой формулы расширенного одноместного исчисления предикатов. В самом деле, исходя из произвольной формулы этого исчисления и применяя наш общий метод (алгоритм), мы сначала получим для исходной формулы дедуктивно равную ей конъюнктивную нормальную форму, построенную из количественных формул. В этой нормальной форме мы затем сможем провести упрощения, которые только что были выполнены в применении к формуле $\mathfrak{B}$. Так мы получим некоторую формулу $\mathfrak{C}$, представляющую собой конъюнкцию членов следующих трех видов:

$$\forall x_fy (x = y), \quad \exists x_fy (x \neq y),$$

$$\forall x_fy (x = y) \vee \exists x_fy (x \neq y).$$

По этой формуле $\mathfrak{C}$ можно будет немедленно выяснить, при каких условиях наша исходная формула является тождественной в конечном, а значит, и выводимой. Условия эти заключаются в том, что в формуле $\mathfrak{C}$ должны встречаться конъюнктивные члены только третьего вида, и притом только такие, у которых число l не превосходит числа f .

Проблема разрешимости здесь может быть решена даже в некотором расширенном смысле, а именно, как задача о том, можно ли для любой конкретной формулы выяснить, при каких конечных (отличных от нуля) числах m эта формула является m -тождественной и при каких — m -выполнимой.

Обе эти двойственные по отношению друг к другу задачи сводятся одна к другой, так как всякая формула m -выполнима тогда и только тогда, когда ее отрицание не является m -тождественным. Несколько более отчетливый характер рассмотрение носит в случае вопроса о выполнимости.

Пусть $\mathfrak{A}$ — рассматриваемая нами формула. Для ее отрицания $\neg \mathfrak{A}$ мы можем построить дедуктивно равную, построенную из количественных формул конъюнктивную нормальную форму $\mathfrak{C}^*$, у которой каждый ее член имеет один из трех видов

$$\left. \begin{aligned} &\forall x_fy (x = y), \quad \exists x_fy (x \neq y), \\ &\forall x_fy (x = y) \vee \exists x_fy (x \neq y) \end{aligned} \right\} (f, l > 1).$$

Эта формула $\mathfrak{C}^*$ m -общезначима тогда и только тогда, когда m -общезначима формула $\neg \mathfrak{A}$. Соответственно, формула $\mathfrak{A}$ m -выполнима тогда и только тогда, когда m -выполнимо отрицание

формулы $\mathfrak{E}^*$. Это отрицание может быть преобразовано в дизъюнкцию $\mathfrak{D}$, построенную из членов следующих видов:

$$\left. \begin{array}{l} \exists x \forall y (x \neq y), \quad \forall x \forall y (x = y), \\ \exists x \forall y (x \neq y) \& \forall x \forall y (x = y) \end{array} \right\} (f, l > 1).$$

Для того чтобы дизъюнкция $\mathfrak{D}$ была m -выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы m -выполнимым был каждый из ее членов.

Итак, необходимое и достаточное условие m -выполнимости

для члена $\exists x \forall y (x \neq y)$ состоит в том, что $f \leq m$,

для члена $\forall x \forall y (x = y)$ состоит в том, что $m < l$,

для члена $\exists x \forall y (x \neq y) \& \forall x \forall y (x = y)$ состоит в том, что $f \leq m < l$; при этом условие $m < l$ понимается нами как $1 \leq m < l$.

Обратим внимание также на следующее обстоятельство: если формула $\mathfrak{A}$ не является m -выполнимой ни для какого числа m , то $\neg \mathfrak{A}$ тождественна в конечном и, следовательно, выводима; значит, в этом случае формула $\mathfrak{A}$ является опровержимой.

Таким образом, имеются только следующие три возможности:

1. Формула $\mathfrak{A}$ не является m -выполнимой ни для какого числа m и тогда она опровержима.

2. Формула $\mathfrak{A}$ m -выполнима для любого числа m .

3. Формула $\mathfrak{A}$ m -выполнима для тех (и только тех) чисел m , которые принадлежат фиксированному конечному числу интервалов

$$\begin{array}{ll} f \leq m < l & (f < l), \\ f \leq m & (f > 1). \end{array}$$

Какой из этих трех случаев имеет место на самом деле, мы можем выяснить по виду формулы $\mathfrak{D}$, а в третьем случае мы можем найти по ней и те интервалы, в которых лежат числа m , для которых $\mathfrak{A}$ m -выполнима.

В этом результате содержится также и теорема о том, что всякая формула расширенного одноместного исчисления предикатов либо выполнима в конечном, либо опровержима.

Простая и обозримая ситуация, с которой мы сталкиваемся в этом случае, существенным образом связана со своеобразием *одноместного* исчисления предикатов. Как мы уже упоминали, для *многоместного* исчисления предикатов теорема о том, что всякая тождественная в конечном формула выводима, места не имеет, а значит, и подавно не имеет места альтернатива, заключающаяся в том, что всякая формула либо выполнима в конечном, либо опровержима. Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы дать доказательство этого факта. Необходимую для этого подготовку мы в свое время уже произвели¹⁾.

¹⁾ См. с. 162 и далее.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ. НАЧАЛА АРИФМЕТИКИ

§ 1. Переход от вопроса о невыводимости ряда тождественных в конечном формул исчисления предикатов к вопросу о непротиворечивости некоторой системы аксиом арифметики

1. Замена формульных переменных предикатными символами; одна зависимость между рассматриваемыми формулами. В гл. IV мы построили три формулы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ со следующими свойствами. Во-первых, ни одна из них не выполнима в конечном. Таким образом, их отрицания

$$\neg \mathfrak{F}, \neg \mathfrak{G}, \neg \mathfrak{H}$$

тождественны в конечном. С другой стороны, формулы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ оказываются выполнимыми в арифметике, так что следует ожидать невыводимости их отрицаний. Мы сейчас вкратце напомним, каким образом строятся арифметические модели формул $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$.

Формула $\mathfrak{F}$ представляет собой конъюнкцию формул

$$(\mathfrak{F}) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \neg R(x, x), \\ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)), \\ \forall x \exists y R(x, y), \end{array} \right.$$

формула $\mathfrak{G}$ — конъюнкцию формул

$$(\mathfrak{G}) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \exists y S(x, y), \\ \exists x \forall y \neg S(y, x), \\ \forall x \forall y \forall u \forall v (S(x, u) \& S(y, u) \& S(v, x) \rightarrow S(v, y)), \end{array} \right.$$

а $\mathfrak{H}$ — конъюнкцию формул

$$(\mathfrak{H}) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \neg A(x, x), \\ \forall x \exists y \forall z \{A(x, y) \& (A(z, x) \rightarrow A(z, y))\}. \end{array} \right.$$

Если индивидуальные переменные в системах этих формул мы будем интерпретировать как цифры, то формулы $(\mathfrak{F})$ и формулы $(\mathfrak{H})$ окажутся выполненными, если мы вместо $R(a, b)$ и вместо $A(a, b)$ подставим предикат $a < b$ (a меньше b)¹⁾. Формулы $(\mathfrak{G})$

¹⁾ Начиная с этого момента, вместо ранее употреблявшегося нами символом $< (a, b)$ мы будем пользоваться общеупотребительным в математике символом $a < b$.

окажутся выполненными, если мы вместо $S(a, b)$ подставим отношение непосредственного предшествования чисел (a непосредственно предшествует b). При этом рассматриваемая модель окажется моделью в смысле финитной арифметики. Действительно, кванторы всеобщности и существования мы можем здесь интерпретировать финитно, т. е. таким образом, что $\forall x \mathcal{A}(x)$ будет выражать справедливость $\mathcal{A}(z)$ для любой предъявленной цифры z , а $\exists x \mathcal{A}(x)$ — справедливость $\mathcal{A}(z)$ для некоторой цифры z , которая может быть указана.

Так, например, вторая из формул (Э) выполнима потому, что имеется некоторая цифра — а именно цифра 1 — такая, что как бы ни взять цифру y , она не будет непосредственным предшественником цифры 1. А выполнимость второй из формул (Э) следует из того, что для любой заданной цифры r имеется такая новая цифра (а именно, цифра $r + 1$), что как бы мы ни взяли цифру z , во-первых, будет $r < r + 1$, а во-вторых, если окажется, что $z < r$, то будет также верно и неравенство $z < r + 1$.

Так как формулы $\mathcal{F}$, Э и Э представляют собой конъюнкции формул, входящих в системы (F), (Э) и (Э) соответственно, то такого рода модель этих систем даст нам некоторую финитную арифметическую модель и для формул $\mathcal{F}$, Э и Э.

Конечно, из существования этой модели неопровержимость рассматриваемых формул, т. е. невыводимость их отрицаний, непосредственно еще не вытекает. Мы, правда, знаем, что всякая формула, выполняемая в конечном, неопровержима, так как ее отрицание не тождественно в конечном. Но из до сих пор полученных нами результатов никак не вытекает, что формула, имеющая финитную арифметическую модель, тоже является неопровержимой. Позднее мы увидим, что такой факт действительно имеет место ¹⁾. Но здесь мы дадим прямое доказательство неопровержимости формул $\mathcal{F}$, Э и Э.

Неопровержимость каждой из этих формул равнозначна непротиворечивости определенной системы аксиом. Проиллюстрируем эту мысль на примере формулы $\mathcal{F}$. Обозначим посредством $\mathcal{F}_0$ формулу, которая получится из $\mathcal{F}$, если мы вместо формульной переменной с именной формой $R(a, b)$ подставим в нее формулу $a < b$. Прделаав ту же самую подстановку и в системе (F), мы получим систему формул

$$(\mathcal{F}_0) \begin{cases} \forall x \neg (x < x), \\ \forall x \forall y \forall z (x < y \& y < z \rightarrow x < z), \\ \forall x \exists y (x < y). \end{cases}$$

Формулы ($\mathcal{F}_0$) являются изображением определенной системы аксиом, причем система эта не выполняется ни в какой конечной

¹⁾ Более раннее упоминание об этом см. в гл. IV, с. 171.

индивидуальной области. Если удастся показать, что в результате присоединения к исчислению предикатов формул ($\mathcal{F}_0$) (в качестве исходных) выводимыми не смогут оказаться никакие две формулы такие, что одна из них является отрицанием другой, то тем самым будет доказана *непротиворечивость существования бесконечной индивидуальной области* (при условии, что мы соглашаемся допускать к рассмотрению лишь такие рассуждения, которые формализуются в рамках исчисления предикатов).

Непротиворечивость системы ($\mathcal{F}_0$) совпадает с неопровержимостью формулы $\mathcal{F}$. Действительно ¹⁾, допустим, что система ($\mathcal{F}_0$) может привести нас к какому-нибудь противоречию; тогда то же самое будет верно и в отношении формулы $\mathcal{F}_0$; но тогда средствами исчисления предикатов из $\mathcal{F}_0$ можно будет вывести любую формулу, построенную из переменных и символов исчисления предикатов, а также символа $<$, а значит, в частности, и формулу $\neg \mathcal{F}_0$. Но $\mathcal{F}_0$ не содержит свободных переменных. Поэтому, согласно дедукционной теореме, средствами исчисления предикатов выводима формула

$$\mathcal{F}_0 \rightarrow \neg \mathcal{F}_0,$$

из которой средствами исчисления высказываний можно вывести $\neg \mathcal{F}_0$. Тем самым мы получаем вывод $\neg \mathcal{F}_0$ средствами исчисления предикатов. Но в этом выводе, не нарушая его дедуктивной структуры, мы можем заменить предикатный символ $<$ с его аргументами формульной переменной R с теми же самыми аргументами. В результате мы получим вывод формулы $\neg \mathcal{F}$, и, значит, формула $\mathcal{F}$ оказывается опровержимой.

С другой стороны, если мы допустим, что $\mathcal{F}$ опровержима и что, следовательно, имеется вывод формулы $\neg \mathcal{F}$, то, подставив в $\neg \mathcal{F}$ вместо формульной переменной с именной формой $R(a, b)$ формулу $a < b$, мы получим вывод формулы $\neg \mathcal{F}_0$ средствами исчисления предикатов. Поэтому при добавлении к исчислению предикатов формул ($\mathcal{F}_0$) окажутся выводимыми обе формулы $\mathcal{F}_0$ и $\neg \mathcal{F}_0$, а это означает, что из формул ($\mathcal{F}_0$) средствами исчисления предикатов может быть получено противоречие.

Таким образом, задача установления неопровержимости формулы $\mathcal{F}$ действительно равносильна задаче установления непротиворечивости системы ($\mathcal{F}_0$).

Совершенно аналогичным образом дело обстоит и в случае формул Э и Э: установление невыводимости их отрицаний $\neg \mathcal{E}$ и $\neg \mathcal{E}$ тоже оказывается равносильным установлению непротиворечивости систем ($\mathcal{E}_0$) и ($\mathcal{E}_0$).

¹⁾ Мы воспроизводим здесь еще раз (с несущественными изменениями) то рассуждение, которое в гл. IV было приведено в качестве примера использования дедукционной теоремы (см. с. 199).

Впрочем, невыводимость формулы $\neg \mathfrak{H}$, как это уже было отмечено в гл. IV ¹⁾, непосредственно следует из невыводимости $\neg \mathfrak{F}$, так как формула $\neg \mathfrak{F}$ выводима из $\neg \mathfrak{H}$. Чтобы установить эту выводимость, достаточно из формулы $\mathfrak{F}^*$, которая получится из $\mathfrak{F}$, если вместо формульной переменной R с двумя аргументами мы подставим переменную A с теми же самыми аргументами, вывести формулу $\mathfrak{H}$ таким образом, чтобы формульная переменная A формулы $\mathfrak{F}^*$ оставалась незатронутой. Действительно, из такого вывода $\mathfrak{H}$ из формулы $\mathfrak{F}^*$ по дедукционной теореме можно средствами исчисления предикатов получить вывод формулы

$$\mathfrak{F}^* \rightarrow \mathfrak{H}.$$

Но из этой формулы контрапозицией может быть получена формула

$$\neg \mathfrak{H} \rightarrow \neg \mathfrak{F}^*,$$

а тем самым и вывод $\neg \mathfrak{F}^*$ из $\neg \mathfrak{H}$. А из формулы $\neg \mathfrak{F}^*$ подстановкой можно будет получить $\neg \mathfrak{F}$.

Если теперь обратить внимание на то, что для построения искомого вывода $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}^*$ достаточно так вывести формулы ($\mathfrak{H}$) из формул ($\mathfrak{F}^*$), представляющих собой конъюнктивные члены формулы $\mathfrak{F}^*$, чтобы входящая в формулы ($\mathfrak{F}^*$) формульная переменная A оставалась незатронутой, и если заметить, что первая из формул ($\mathfrak{H}$) совпадает с первой из формул ($\mathfrak{F}^*$), то мы увидим, что все дело сводится к тому, чтобы из формул

$$\forall x \forall y \forall z (A(x, y) \& A(y, z) \rightarrow A(x, z)), \\ \forall x \exists y A(x, y)$$

вывести формулу

$$\forall x \exists y \forall z \{A(x, y) \& (A(z, x) \rightarrow A(z, y))\},$$

не затрагивая фигурирующую в ней формульную переменную.

Это может быть проделано следующим образом.

Из формулы

$$\forall x \forall y \forall z (A(x, y) \& A(y, z) \rightarrow A(x, z))$$

мы по правилу (ϵ') ²⁾ получим

$$A(a, b) \& A(b, c) \rightarrow A(a, c),$$

а отсюда по правилам исчисления высказываний получим

$$A(b, c) \rightarrow (A(a, b) \rightarrow A(a, c)).$$

Применив схему (α) и переименовав x в z , мы получим

$$A(b, c) \rightarrow \forall z (A(z, b) \rightarrow A(z, c)),$$

¹⁾ См. с. 163.

²⁾ См. с. 175.

а отсюда, используя тождественную формулу

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow B \& C),$$

получим формулу

$$A(b, c) \rightarrow A(b, c) \& \forall z (A(z, b) \rightarrow A(z, c)),$$

которая по правилу (ι) ¹⁾ может быть преобразована в формулу

$$A(b, c) \rightarrow \forall z \{A(b, c) \& (A(z, b) \rightarrow A(z, c))\}.$$

Теперь применение правила (ζ) ²⁾ даст нам формулу

$$\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \forall z \{A(x, y) \& (A(z, x) \rightarrow A(z, y))\},$$

которая вместе с формулой

$$\forall x \exists y A(x, y),$$

имеющейся в нашем распоряжении в качестве исходной формулы, по схеме заключения дает искомую формулу

$$\forall x \exists y \forall z \{A(x, y) \& (A(z, x) \rightarrow A(z, y))\}.$$

2. Привлечение аксиом равенства; дедекиндово определение бесконечности; введение штрих-символа. Доказательство непротиворечивости системы формул ($\mathfrak{F}_0$), а также системы ($\mathfrak{G}_0$), соответствующей формуле $\mathfrak{G}$, целесообразно провести так, чтобы в рассмотрение вошло и равенство с аксиомами (J_1) и (J_2) и чтобы указанная непротиворечивость была таким образом доказана не только для того случая, когда мы за основу берем исчисление предикатов, но и для расширенного исчисления, получающегося в результате присоединения аксиом равенства. Благодаря этому мы наряду с характеристикой бесконечности индивидуальной области через выполнение одной из формул $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ получим возможность рассматривать то определение бесконечности, которое в свое время было сформулировано Дедекиндом ³⁾.

По Дедекинду, система каких-либо объектов — а мы говорим: индивидуальная область — называется бесконечной, если она допускает взаимно однозначное отображение на какую-либо собственную (т. е. содержащую не все элементы этой системы) подсистему.

Это условие в свою очередь равнозначно требованию выполнимости определенной системы формул. Действительно, всякому отображению соответствует некоторый предикат с двумя аргументами: « b является образом a »; с другой стороны, для того чтобы предикат $P(a, b)$ соответствовал в этом смысле взаимно однозначному отображению индивидуальной области на свою собственную подобласть,

¹⁾ См. с. 179.

²⁾ См. с. 176.

³⁾ Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? — Braunschweig, 1887.

необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям, описываемым следующими четырьмя формулами:

$$(\mathfrak{D}) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \exists y P(x, y), \\ \exists x \forall y \neg P(y, x), \\ \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \& P(x, z) \rightarrow y = z), \\ \forall x \forall y \forall z (P(x, z) \& P(y, z) \rightarrow x = y). \end{array} \right.$$

Первая из этих формул $(\mathfrak{D})$ утверждает, что для всякого элемента индивидуальной области имеется образ, вторая — что по крайней мере один элемент не является образом, третья утверждает, что отображение однозначно, а четвертая — что однозначно обратное отображение. Таким образом, существование взаимно однозначного отображения индивидуальной области на собственную подобласть равнозначно существованию некоторого предиката P , удовлетворяющего четырем формулам $(\mathfrak{D})$.

Связывая эти четыре формулы знаком конъюнкции, мы получим некоторую формулу $\mathfrak{D}$. Выполнимость этой формулы и есть то, в чем, по Дедекинду, состоит бесконечность какой-либо индивидуальной области.

Эта выполнимость может быть констатирована в финитном арифметическом смысле, если мы вместо $P(a, b)$ подставим отношение непосредственного следования (b непосредственно следует за a). Однако с точки зрения теории доказательств здесь, как и в случае формул $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, еще требуется показать, что отрицание $\neg \mathfrak{D}$ формулы $\mathfrak{D}$ не выводимо.

Здесь открывается возможность некоторого упрощения, основывающаяся на том, что, доказав невыводимость формулы $\neg \mathfrak{D}$, мы заодно получим и невыводимость $\neg \mathfrak{G}$. Это может быть установлено путем рассуждений, аналогичных тем, которые мы ранее провели для формул $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ (только теперь всюду, где речь идет о выводимости, следует принимать во внимание и наличие аксиом равенства), если мы сможем утверждать, что из формул $(\mathfrak{D})$ без того, чтобы затрагивать входящую в них формульную переменную, выводятся те формулы $(\mathfrak{G}^*)$, которые получаются из формул $(\mathfrak{G})$ в результате замены формульной переменной S с двумя аргументами переменной P с теми же самыми аргументами.

А это действительно так. При этом формулы $(\mathfrak{G}^*)$ оказываются выводимыми уже только из трех формул, входящих в состав $(\mathfrak{D})$. Именно, первые две формулы систем $(\mathfrak{D})$ и $(\mathfrak{G}^*)$ совпадают, а из четвертой формулы, входящей в $(\mathfrak{D})$, т. е. из

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, z) \& P(y, z) \rightarrow x = y),$$

третья из формул $(\mathfrak{G}^*)$, т. е. формула

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (P(x, u) \& P(y, u) \& P(v, x) \rightarrow P(v, y)),$$

может быть получена следующим образом. Сначала из

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, z) \& P(y, z) \rightarrow x = y)$$

по правилу (ε') получаем формулу

$$P(a, c) \& P(b, c) \rightarrow a = b;$$

затем из второй аксиомы равенства подстановкой получаем

$$a = b \rightarrow (P(d, a) \rightarrow P(d, b)).$$

Полученные формулы по правилу силлогизма дают

$$P(a, c) \& P(b, c) \rightarrow (P(d, a) \rightarrow P(d, b)).$$

Отсюда путем элементарных преобразований (применение правила соединения посылок и опускание лишних скобок) получается формула

$$P(a, c) \& P(b, c) \& P(d, a) \rightarrow P(d, b),$$

а из нее применением правила (ε) получается искомая формула

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (P(x, u) \& P(y, u) \& P(v, x) \rightarrow P(v, y)).$$

Тем самым, подобно формуле $\mathfrak{F}$, мы можем исключить из нашего рассмотрения формулу $\mathfrak{G}$, и тогда наша задача сведется к установлению невыводимости формул $\neg \mathfrak{F}$ и $\neg \mathfrak{D}$, причем эту невыводимость нужно будет устанавливать по отношению к *расширенному исчислению предикатов*, т. е. по отношению к исчислению предикатов с присоединением аксиом равенства. Это расширение теперь становится неизбежным, так как в формуле $\mathfrak{D}$ фигурирует знак равенства.

Точно так же, как для установления невыводимости формулы $\neg \mathfrak{F}$ достаточно было показать непротиворечивость формул $(\mathfrak{F}_0)$, теперь для установления невыводимости формулы $\neg \mathfrak{D}$ достаточно будет убедиться в непротиворечивости системы формул, которая получится из формул $(\mathfrak{D})$, если формульную переменную $P(a, b)$ заменить каким-либо предикатным символом. Однако здесь целесообразно произвести еще одну модификацию, которая подсказывается содержательной арифметической моделью формул $(\mathfrak{D})$. Действительно, при этой интерпретации на месте формульной переменной $P(a, b)$ будет стоять отношение « b непосредственно следует за a ». Вместо того чтобы формализовать это отношение посредством какого-либо предикатного символа с двумя аргументами, мы можем при помощи функционального знака с одним аргументом формализовать ту математическую функцию, которая любому числу a сопоставляет число, непосредственно следующее за ним.

С этой целью мы возьмем *символ*, который будем называть *штрихом*. В отличие от прочих функциональных знаков, которые обычно пишутся слева, штрих будет писаться справа сверху от

аргумента. Используя знак равенства, мы теперь можем отношение « b непосредственно следует за a » формализовать посредством равенства

$$a' = b.$$

Подставив это равенство вместо формульной переменной $P(a, b)$ в формулы $(\mathfrak{D})$, мы получим следующие четыре формулы:

$$(\mathfrak{D}_0) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \exists y (x' = y), \\ \exists x \forall y (y' \neq x), \\ \forall x \forall y \forall z (x' = y \ \& \ x' = z \rightarrow y = z), \\ \forall x \forall y \forall z (x' = z \ \& \ y' = z \rightarrow x = y). \end{array} \right.$$

Снова оказывается, что, установив непротиворечивость этих формул (в рамках расширенного исчисления предикатов), мы докажем и невыводимость (в расширенном исчислении предикатов) формулы $\neg \mathfrak{D}$.

Упрощение, получающееся в результате применения этого приема, проявляется в том, что первая и третья формулы этой системы оказываются выводимыми из аксиом равенства.

Действительно, из формулы

$$a = a$$

подстановкой получаем

$$a' = a';$$

из нее, применив основную формулу (b) и схему заключения, получаем

$$\exists x (a' = x),$$

а отсюда, переименовав x в y и применив правило $(\gamma')^1$, получаем формулу

$$\forall x \exists y (x' = y),$$

т. е. первую из формул $(\mathfrak{D}_0)$.

Далее, из второй аксиомы равенства подстановкой получаем формулу

$$a' = b \rightarrow (a' = c \rightarrow b = c);$$

из нее по правилу соединения посылок получаем

$$a' = b \ \& \ a' = c \rightarrow b = c,$$

а отсюда по правилу $(\epsilon)^2$ получаем третью из формулы $(\mathfrak{D}_0)$

$$\forall x \forall y \forall z (x' = y \ \& \ x' = z \rightarrow y = z).$$

¹⁾ См. с. 146.

²⁾ См. с. 174.

Таким образом, нам нужно рассмотреть только вторую и четвертую из формул $(\mathfrak{D}_0)$, так что в целом мы должны будем в рамках расширенного исчисления предикатов доказать непротиворечивость системы, состоящей только из следующих пяти формул:

$$\begin{aligned} & \forall x \neg (x < x), \\ & \forall x \forall y \forall z (x < y \ \& \ y < z \rightarrow x < z), \\ & \forall x \exists y (x < y), \\ & \exists x \forall y (y' \neq x), \\ & \forall x \forall y \forall z (x' = z \ \& \ y' = z \rightarrow x = y). \end{aligned}$$

Однако на этой системе формул мы не остановимся и сведем ее к другой, не содержащей связанных переменных.

3. Переход к аксиомам без связанных переменных с усилением экзистенциальных аксиом; символ 0; цифры в новом смысле; аксиомы Пеано; получившаяся система аксиом. Прежде всего, в формулах, начинающихся кванторами всеобщности, относящиеся к этим кванторам связанные переменные x, y и z мы можем заменить свободными переменными a, b и c ; в результате рассматриваемые пять формул перейдут в следующие, дедуктивно равные им формулы:

$$\begin{aligned} & \neg (a < a), \\ & a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c, \\ & \exists y (a < y), \\ & \exists x \forall y (y' \neq x), \\ & a' = c \ \& \ b' = c \rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Кроме того, немного упростим последнюю формулу. Из этой формулы в результате подстановки b' вместо c , перестановки членов конъюнкции и применения правила разъединения посылок мы получим

$$b' = b' \rightarrow (a' = b' \rightarrow a = b),$$

а отсюда — поскольку $b' = b'$ получается подстановкой из (J_1) — мы получим

$$a' = b' \rightarrow a = b.$$

С другой стороны, из этой формулы можно снова получить последнюю формулу нашей системы; действительно, из аксиом равенства, как было показано ранее ¹⁾, выводима формула 4)):

$$a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b),$$

¹⁾ См. с. 214.

из которой соединением посылок и подстановкой можно получить формулу

$$a' = c \ \& \ b' = c \rightarrow a' = b',$$

которая вместе с формулой

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

по правилу силлогизма дает формулу

$$a' = c \ \& \ b' = c \rightarrow a = b.$$

Таким образом, в силу аксиом равенства эта формула оказывается равнозначной формуле

$$a' = b' \rightarrow a = b.$$

Теперь связанные переменные остаются только в двух формулах:

$$\exists y (a < y),$$

$$\exists x \forall y (y' \neq x).$$

При содержательной трактовке этим формулам соответствуют *экзистенциальные высказывания*. Чтобы избавиться от экзистенциального вида этих высказываний, мы их усилим путем явного указания тех объектов, существование которых утверждается; именно, в случае первой формулы речь пойдет об указании некоторой функции от аргумента a , а в случае второй — об указании некоторого индивидуального объекта.

Формально уточнение формулы

$$\exists y (a < y)$$

мы осуществим, взяв вместо нее формулу

$$a < a',$$

из которой исходная выводится применением основной формулы (b). Для того чтобы получить соответствующее уточнение для формулы

$$\exists x \forall y (y' \neq x),$$

мы введем *индивидуальный символ* 0. Теперь вместо формулы $\exists x \forall y (y' \neq x)$ мы сначала возьмем формулу

$$\forall y (y' \neq 0),$$

из которой она может быть получена применением основной формулы (b). Но формула

$$\forall y (y' \neq 0)$$

дедуктивно равна формуле

$$a' \neq 0.$$

Итак, теперь вместо двух рассматриваемых формул

$$\exists y (a < y) \quad \text{и} \quad \exists x \forall y (y' \neq x)$$

у нас будут иметься формулы

$$a < a' \quad \text{и} \quad a' \neq 0,$$

из которых мы снова можем вывести первоначальные формулы.

Итак, все связанные переменные теперь удалены, и мы пришли к системе, состоящей из следующих пяти формул:

$$\neg (a < a),$$

$$a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c,$$

$$a < a',$$

$$a' \neq 0,$$

$$a' = b' \rightarrow a = b.$$

Теперь речь пойдет о том, чтобы в рамках расширенного исчисления предикатов доказать непротиворечивость этой системы, т. е. о том, чтобы в рамках исчисления предикатов установить непротиворечивость системы, состоящей из этих пяти формул и двух аксиом равенства.

Прежде всего, рассмотрим этот формализм более детально. В качестве его внелогических символов мы ввели: предикатные символы $=$ и $<$, индивидуальный символ 0 и символ штриха в качестве функционального знака. Применение штриха может быть итерировано, и тогда, исходя из какой-либо переменной — например a , — мы получим выражения типа

$$a'', a''', a''''',$$

а исходя из символа 0, — выражения такие, как

$$0', 0'', 0''''.$$

В соответствии с нашими соглашениями ¹⁾ все эти выражения являются *термами*, т. е. мы будем допускать подстановку их вместо свободных индивидуальных переменных.

Выражения, получающиеся из символа 0 в результате однократного или повторного навешивания штриха, мы будем — несколько видоизменяя употреблявшуюся нами в гл. II терминологию ²⁾ — называть *ц и ф р а м и*. Введение этих фигур вместо ранее называвшихся цифрами фигур

$$1, 11, 111$$

¹⁾ См. гл. V, с. 236.

²⁾ См. с. 46.

имеет то преимущество, что порождающая операция, которая изображается прибавлением единицы, теперь будет более четко отличаться от исходного объекта ¹⁾.

Конечно, это преимущество было бы достигнуто и в том случае, если бы мы стали использовать знаки

$$1, 1', 1'',$$

и все же, учитывая дальнейшее построение формализма, целесообразно — если мы хотим получить формулы привычного вида — начать не с 1, а с 0. Особо заметим, что с нулем не следует связывать каких-либо представлений о «Ничто»; символ 0 будет всего лишь формальным представителем некоторого определенного исходного объекта. На этом мы и закончим комментарий к нашей символике.

Относительно же введенных нами аксиом заметим следующее. Три аксиомы для символа $<$ (мы будем обозначать их посредством $(<_1)$, $(<_2)$ и $(<_3)$) характеризуют отношение $a < b$ как *отношение порядка*, которое, в частности, имеет место между a и a' .

Две последние формулы

$$a' \neq 0$$

и

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

соответствуют двум аксиомам из числа тех пяти, с помощью которых Пеано дал свою характеристику натурального ряда ²⁾. Свои аксиомы Пеано изобразил с помощью логической символики; одна из них является формулировкой принципа полной индукции, который мы обсудим впоследствии ³⁾. Остальные выглядят следующим образом:

Ноль есть число.

Если a — число, то a' также является числом.

Из $a' = b'$ следует $a = b$.

Для всякого a $a' \neq 0$.

Заметим, что в этой системе аксиом понятие *числа* совпадает с понятием *элемента индивидуальной области*, так

¹⁾ Эту порождающую операцию в математике обычно обозначают посредством «+1». Этот способ обозначений имеет тот недостаток, что в нем не находит должного отражения различие в понятиях между « $a + 1$ », с одной стороны, как числом, следующим за a , и, с другой стороны, как суммой a и 1.

²⁾ Пеано G. Formulario Mathematico. — Ed. V. — Torino, 1908, II, § 1, p. 27. В первой редакции этой системы аксиом, опубликованной в статье: Пеано G. Arithmetices principia nova methodo exposita. — Torino, 1908, аксиомы равенства в их арифметической специализации включаются в систему аксиом. Это оказалось возможным ввиду того, что в арифметике аксиомы равенства (J_1) и (J_2) могут быть заменены более специализированными аксиомами. Позднее (в гл. VII) мы установим, что эта возможность является следствием одной теоремы общего характера о возможности замены аксиом равенства аксиомами более специального типа.

³⁾ См. с. 324.

что нам не нужно вводить особый основной предикат *быть числом*; наоборот, формализация двух аксиом

Ноль есть число

и

Если a — число, то a' также является числом

достигается уже в результате введения символов 0 и штриха в сочетании с правилом подстановки вместо индивидуальных переменных. Две остальные аксиомы формализуются посредством наших формул

$$a' \neq 0$$

и

$$a' = b' \rightarrow a = b,$$

которые мы будем называть аксиомами Пеано (P_1) и (P_2) .

Из формулы (P_2) контрапозицией получается формула

$$a \neq b \rightarrow a' \neq b'.$$

Импликация

$$a = b \rightarrow a' = b',$$

обратная к (P_2) , получается в соответствии с общей процедурой применения аксиомы равенства к функциональным знакам (ее мы излагали в связи с общими разъяснениями по поводу функциональных знаков ¹⁾).

Подытожим еще раз систему наших аксиом:

- | | |
|---------|--|
| (J_1) | $a = a,$ |
| (J_2) | $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$ |
| $(<_1)$ | $\neg (a < a),$ |
| $(<_2)$ | $a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c,$ |
| $(<_3)$ | $a < a',$ |
| (P_1) | $a' \neq 0,$ |
| (P_2) | $a' = b' \rightarrow a = b.$ |

§ 2. Общелогическая часть доказательства непротиворечивости

1. Выбор заключительной формулы; исключение связанных переменных; разложение доказательства на нити. Нам нужно будет установить непротиворечивость этой системы. Для того чтобы сузить нашу задачу, мы вспомним замечание, сделанное в конце гл. III. Мы выяснили там, что для установления

¹⁾ См. с. 238.

непротиворечивости какого-либо формализма достаточно обнаружить невыводимость в нем какой-нибудь определенной формулы. С другой стороны, ясно, что если формализм непротиворечив, то отрицание любой выводимой в нем формулы должно быть невыводимым. Так, в частности, формула

$$0 \neq 0,$$

являющаяся отрицанием выводимой из (J_1) формулы

$$0 = 0,$$

должна быть невыводимой. Таким образом, задача установления непротиворечивости нашего формализма сводится к тому, чтобы доказать невыводимость в нем формулы

$$0 \neq 0.$$

Если вывод какой-либо формулы из определенных аксиом (с помощью логического исчисления) назвать ее доказательством, то наша задача будет состоять в том, чтобы установить невозможность какого-либо доказательства формулы

$$0 \neq 0$$

в рассматриваемой системе аксиом.

Мы разобьем это рассуждение на две части. Сначала мы покажем, что доказательство формулы

$$0 \neq 0$$

в нашей системе аксиом не может быть осуществлено без использования связанных переменных, а затем рассмотрим и общий случай.

Итак, сначала допустим, что у нас имеется доказательство формулы

$$0 \neq 0$$

в нашей системе аксиом и что связанные переменные в нем не встречаются. Тогда в роли исходных формул будут фигурировать только тождественные формулы исчисления высказываний и формулы

$$(J_1), (J_2), (<_1), (<_2), (<_3), (P_1), (P_2),$$

а в качестве единственной схемы — схема заключения. Таким образом, рассматриваемое доказательство состоит из последовательности формул такой, что для каждой ее формулы имеет место один из следующих трех случаев:

1. Эта формула является тождественной формулой исчисления высказываний или одной из наших аксиом.

2. Эта формула совпадает с какой-либо из предыдущих формул рассматриваемой последовательности или получается из нее в результате подстановки.

3. Эта формула является результирующей формулой какой-либо схемы заключения.

Теперь представим себе, что у нас имеется доказательство такого рода с заключительной формулой $0 \neq 0$. Над этим доказательством мы последовательно, друг за другом, выполним две операции, которые мы назовем *разложением этого доказательства на нити и исключением свободных переменных*.

Разложение доказательства на нити производится следующим образом. Мы просматриваем доказательство в обратном направлении, начиная с заключительной формулы $\mathfrak{E}$. Рассмотрим эту формулу с целью выяснения, какая из трех перечисленных выше возможностей имеет для нее место. Первая возможность — быть тождественной формулой или аксиомой — реализоваться не может. Мы можем также отвлечься и от возможности быть повторением какой-нибудь ранее полученной формулы, так как в этом случае мы могли бы закончить наше доказательство раньше. Но может случиться, что формула $\mathfrak{E}$ получается в результате подстановки из формулы, полученной ранее, или что она является результирующей формулой какой-нибудь схемы заключения. В первом из этих случаев мы поместим формулу $\mathfrak{A}$, из которой $\mathfrak{E}$ получается в результате подстановки, над формулой $\mathfrak{E}$, изобразив это следующим образом:

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A} \\ \downarrow \\ \mathfrak{E} \end{array}$$

Во втором случае посылки $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{E}$ рассматриваемой схемы заключения с результирующей формулой $\mathfrak{E}$ мы поместим слева и справа над формулой $\mathfrak{E}$, изобразив это в виде

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S} & & \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{E} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathfrak{E} & \end{array}$$

Теперь мы рассмотрим формулу $\mathfrak{A}$ (соответственно каждую из формул $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{E}$) с точки зрения упомянутой выше альтернативы. Если эта формула является тождественной формулой или

находятся формулы 1), 2), 6) и 8). Формула 2) — тождественная формула исчисления высказываний, а 8), 1) и 6) — это наши аксиомы ($<_1$), ($<_2$) и ($<_3$). Указанным четырем конечным вершинам соответствуют следующие четыре нити доказательства:

10), 9), 7), 5), 4), 1);

10), 9), 7), 5), 3), 2);

10), 9), 7), 6);

10), 9), 8).

В то время как разложение заданного доказательства на нити ведет к однозначно определяемой фигуре разложения, одной и той же фигуре разложения отвечает, вообще говоря, несколько различных доказательств, которые, правда, отличаются друг от друга лишь несущественными деталями, а именно таким образом, что одно из них всегда может быть получено из другого в результате перестановок и повторения (соответственно опускания повторно встречающихся) формул.

Так, например, доказательство, состоящее из последовательности формул

2), 3), 1), 4), 3), 4), 5), 6), 5), 7), 8), 7), 9), 10),

дает то же самое разложение на нити, что и заданное нам доказательство, состоящее из последовательности

1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 10)

Фигуру разложения какого-либо доказательства мы для краткости будем называть **разложенным доказательством**.

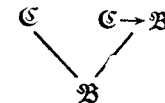
Такая фигура характеризуется следующими свойствами. Она состоит из **нитей доказательства**, т. е. из последовательностей формул, начинающихся (мы ведем счет снизу вверх) одной и той же формулой. Каждые две несовпадающие нити доказательства расщепляются у формулы, которая является результирующей формулой некоторого заключения, посылками которого являются следующие по порядку формулы обеих нитей, и у всех нитей, которые проходят через такое место фигуры, где стоит результирующая формула некоторого заключения, за этой формулой следует одна из двух посылок заключения. Формула, в которой никакие две нити доказательства не расщепляются, находится со следующей за ней формулой (в любой нити, которая их содержит) в таком отношении, что либо она совпадает с этой формулой, либо получается из нее в результате подстановки. Всякая нить оканчивается формулой, которая является либо тождественной формулой, либо аксиомой.

2. Возвратный перенос подстановок; исключение свободных переменных; нумерические формулы; определение истинности и ложности; истинность всякой формулы, выводимой без использования связанных переменных. Разложение на нити мы упомянули в качестве первой из тех двух операций, которые мы смогли бы произвести над выводом формулы

$$0 \neq 0,$$

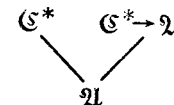
если бы он оказался в нашем распоряжении. Вторая операция, примыкающая к данной, представляет собой *исключение свободных переменных*. Чтобы подготовить эту операцию, мы *перенесем все подстановки*, которые производятся в данном доказательстве, *в исходные формулы*. Это может быть проделано следующим образом. Мы идем по каждой нити, начиная с заключительной формулы, до тех пор, пока не дойдем до двух рядом стоящих в этой нити формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, первая из которых получается из второй в результате подстановки. Тогда мы производим эту подстановку и в самой формуле $\mathcal{B}$, так что вместо $\mathcal{B}$ у нас получится повторение формулы $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{B}$ представляет собой исходную формулу, то в результате этой процедуры рассматриваемая подстановка оказывается перенесенной в исходную формулу. В противном случае $\mathcal{B}$ либо получается подстановкой из некоторой предыдущей формулы $\mathcal{C}$, либо является повторением предыдущей формулы, либо является результирующей формулой некоторого заключения



В первом случае на место $\mathcal{C}$ мы снова помещаем формулу $\mathcal{A}$, так что в $\mathcal{C}$ должны быть произведены сразу обе подстановки, ведущие от $\mathcal{C}$ к $\mathcal{B}$ и от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$. В случае повторения выполняется только одна подстановка.

Если $\mathcal{B}$ получается в результате применения схемы заключения, то мы производим подстановку, ведущую от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$, в формулах $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$; при этом формула $\mathcal{C}$ претерпевает изменения в том и только в том случае, когда она содержит ту переменную, вместо которой производится подстановка при переходе от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$. В любом случае на месте первоначальной схемы заключения с результирующей формулой $\mathcal{B}$ будет стоять схема заключения



Указанный процесс мы будем продолжать до тех пор, пока по каждой нити не дойдем до исходной формулы. Когда этот процесс закончится, на месте каждой подстановки будет стоять повторение, на месте каждой схемы заключения снова будет стоять некоторая схема заключения, а в исходных формулах будут произведены те или иные подстановки.

Если мы применим эту процедуру к нашему предыдущему примеру, то вместо формулы 9) мы должны будем написать повторение формулы 10):

$$\neg (0'' < 0').$$

Эта формула получается из 9) в результате подстановки $0'$ вместо a . Теперь мы должны произвести ту же самую подстановку и в трех идущих в обратном направлении схемах заключения; иными словами, мы должны будем в формулах

$$8), 7), 6), 5), 4), 3)$$

всюду вместо a подставить $0'$. Наконец, мы должны будем вместо формулы 2) написать формулу, получающуюся в результате этой подстановки из формулы 3), а вместо формулы 1) — формулу, получающуюся в результате этой подстановки из формулы 4).

В результате всех этих подстановок вместо первоначального доказательства мы получим следующий ряд формул:

$$\begin{array}{l} 0' < 0'' \& 0'' < 0' \rightarrow 0' < 0', \\ (0' < 0'' \& 0'' < 0' \rightarrow 0' < 0') \rightarrow (0' < 0'' \rightarrow (\neg (0' < 0') \rightarrow \neg (0'' < 0'))), \\ (0' < 0'' \& 0'' < 0' \rightarrow 0' < 0') \rightarrow (0' < 0'' \rightarrow (\neg (0' < 0') \rightarrow \neg (0'' < 0'))), \\ 0' < 0'' \& 0'' < 0' \rightarrow 0' < 0' \\ \hline 0' < 0'' \rightarrow (\neg (0' < 0') \rightarrow \neg (0'' < 0')) \\ \quad 0' < 0'' \\ \hline \neg (0' < 0') \rightarrow \neg (0'' < 0') \\ \quad \neg (0' < 0') \\ \hline \neg (0'' < 0') \\ \quad \neg (0'' < 0') \end{array}$$

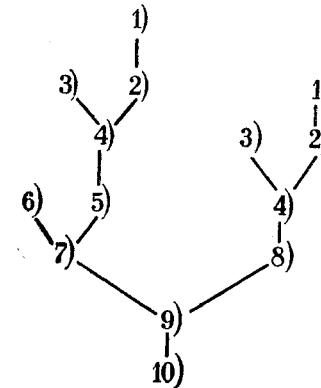
Этот пример носит несколько специальный характер, так как в рассматриваемом случае процедура *возвратного переноса подстановок* соотносит каждой формуле нашего первоначального доказательства соответствующую ей модифицированную формулу совершенно однозначным образом. В общем случае этого достичь не удастся, потому что при разложении доказательства на нити

одна и та же формула доказательства может встречаться в фигуре разложения в нескольких местах.

В качестве примера рассмотрим следующее доказательство формулы $0'''' \neq 0''$:

$$\begin{array}{l} \boxed{1) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \\ \rightarrow 2) \quad (a' = b' \rightarrow a = b) \rightarrow (a \neq b \rightarrow a' \neq b') \\ 3) \quad a' = b' \rightarrow a = b \\ \hline 4) \quad a \neq b \rightarrow a' \neq b' \\ \rightarrow 5) \quad a' \neq 0 \rightarrow a'' \neq 0' \\ 6) \quad a' \neq 0 \\ \hline 7) \quad a'' \neq 0' \\ \rightarrow 8) \quad a'' \neq 0' \rightarrow a''' \neq 0'' \\ 9) \quad a''' \neq 0'' \\ \rightarrow 10) \quad 0'''' \neq 0'' \end{array}$$

В результате разложения этого доказательства на нити мы получим следующую фигуру разложения:



Здесь в первую очередь бросается в глаза то, что отдельные формулы доказательства встречаются в фигуре разложения в нескольких местах. Правда, само по себе это еще не исключает того, что в процессе возвратного переноса подстановок одна и та же формула доказательства будет всюду претерпевать одни и те же изменения. Однако в действительности дело будет обстоять не так. В самом деле, начав производить возвратный перенос подстановок, мы прежде всего должны будем заменить формулу 9) формулой 10), т. е. подставить в 9) $0'$ вместо a . Затем эту подстановку нужно будет выполнить в идущих за формулой 9) схемах заклю-

чения, а потом в нитях доказательства

10), 9), 8), 4), 2), 1)

и

10), 9), 8), 4), 3)

вместо 4) надо будет вставить ту формулу, которая у нас получится вместо 8), а в нитях

10), 9), 7), 5), 4), 2), 1),

10), 9), 7), 5), 4), 3)

вместо 4) — ту формулу, которая получится вместо 5).

Но при возвратном переносе подстановки $0'$ вместо a мы вместо 8) получим формулу

$$0''' \neq 0' \rightarrow 0'''' \neq 0'',$$

а вместо 5) — формулу

$$0'' \neq 0 \rightarrow 0''' \neq 0'.$$

Эти две формулы отличны друг от друга, и, значит, формула 4) в тех двух местах, где она встречается в рассматриваемой фигуре разложения, будет по-разному модифицирована нашей процедурой.

Таким образом, при возвратном переносе подстановок соотношение формул, полученных в результате этого процесса, формулам первоначального доказательства оказывается, вообще говоря, неоднозначным. Однозначность соотнесения имеет место лишь в отношении конкретных вхождений формул в фигуру разложения.

В обоих рассмотренных нами примерах все переменные в результате возвратного переноса подстановок были исключены полностью. И все же этого могло бы и не случиться. В частности, этого могло не случиться и в том случае, если бы мы применили наш метод возвратного переноса подстановок к гипотетическому доказательству формулы $0 \neq 0$, хотя заключительная формула этого доказательства вовсе не содержит никаких переменных. Иначе говоря, некоторые переменные могли бы остаться даже и после возвратного переноса подстановок.

Если это действительно окажется так, мы удалим оставшиеся переменные, заменив каждую из них каким-либо допустимым выражением без переменных. Чтобы каким-нибудь образом нормировать эти замены, мы условимся подставлять: а) вместо любой *формульной переменной* без аргументов формулу

$$0 = 0,$$

б) вместо *формульной переменной* с аргументом a равенство

$$a = a,$$

Из двух различных цифр z и t (мы теперь имеем в виду фигуры $0, 0'', 0''', \dots$) одна, как легко видеть, является составной частью другой в том смысле, что ее построение осуществляется в процессе построения этой второй цифры. Неравенство

$$z < t$$

мы будем считать истинным, если цифра z отлична от цифры t и является ее составной частью; в противном случае эта формула будет считаться ложной.

Исходя из так определенных истинностных значений для равенств и неравенств, мы получим соответствующее определение и для нумерических формул, составленных из элементарных формул такого рода с помощью связок исчисления высказываний; при этом надо будет воспользоваться определениями истинностных функций

$$\&, \vee, \rightarrow, \sim, \neg.$$

В смысле этого определения все формулы нашей модифицированной (в результате исключения переменных) фигуры разложения принимают значение «истина», или, как мы будем говорить, являются истинными.

Действительно, истинными являются все формулы, стоящие на месте исходных.

Для формул, получающихся из тождественных формул в результате подстановок, это непосредственно вытекает из определения тождественно истинной формулы.

Без труда можно убедиться и в том, что формулы, получающиеся из аксиом (J_1) , $(<_1)$, $(<_3)$ и (P_1) , тоже являются истинными.

Далее, что касается аксиомы $(<_2)$, то формула, получающаяся из нее в результате подстановки, будет иметь вид

$$x < y \& y < z \rightarrow x < z,$$

где x, y и z — цифры. Если посылка этой импликации истинна, то истинным будет и ее заключение; действительно, если построение y проходит через построение x , а построение z — через построение y , то построение z пройдет через построение x . Тем самым любая формула такого вида оказывается истинной. То же самое верно и в отношении формул, получающихся из аксиомы (P_2) и, следовательно, имеющих вид

$$z' = t' \rightarrow z = t;$$

действительно, всякая такая формула истинна, во-первых, тогда, когда z совпадает с t , потому что в этом случае истинно равенство $z = t$; а во-вторых, она истинна и тогда, когда z отлична от t ,

так как в этом случае z' отлична от t' и тем самым равенство $z' = t'$ ложно.

Разбором тех же самых случаев мы убеждаемся, что истинными оказываются и те нумерические формулы, которые получаются в результате подстановки из формулы (J_2) . Рассуждение здесь в точности совпадает с тем, которое мы уже проводили в гл. V¹⁾, когда показывали, что формула (J_2) тождественна в конечном.

После того как мы убедились таким образом в истинности всех исходных формул нашей модифицированной фигуры разложения, легко установить, что все остальные фигурирующие в ней формулы тоже являются истинными. Действительно, эти формулы мы получаем из исходных в результате повторений и применений схемы заключения, а при каждом заключении значение «истина» переносится, в силу характеристического свойства импликации, с посылок $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ на результирующую формулу $\mathcal{Z}$. Тем самым действительно получается, что все формулы нашей фигуры являются истинными.

Однако это находится в противоречии с тем фактом, что в конце рассматриваемого нами доказательства должна быть формула

$$0 \neq 0.$$

Действительно, эта формула — как не содержащая переменных — процедурой исключения переменных не затрагивается; следовательно, в модифицированной фигуре разложения заключительной формулой должна быть формула $0 \neq 0$; как и все формулы этой фигуры, она должна быть истинной, в то время как в действительности она является ложной.

Тем самым для того случая, когда употребление связанных переменных в выводе не допускается, невозможность вывода формулы

$$0 \neq 0$$

из рассматриваемой нами системы аксиом доказана. Рассуждение это основывается на том же самом принципе, с помощью которого мы ранее убедились в невозможности вывода средствами исчисления предикатов, равно как и средствами расширенного исчисления предикатов, каких-либо двух формул $\mathcal{M}$ и $\neg \mathcal{M}$. Вместо использованного там понятия формулы, тождественной в конечном, мы пользуемся здесь понятиями истинности и ложности, которые, однако, формулируются нами только для нумерических формул. Из-за этого ограничения мы и должны были сопоставить гипотетическому доказательству формулы $0 \neq 0$ некоторую фигуру, построенную из нумерических формул. Это сопоставление было нами осуществлено в резуль-

¹⁾ См. с. 233.

тате разложения доказательства на нити и последующего исключения переменных.

Конечно, рассмотренному результату можно придать и положительную форму, следующим образом усилив доказанную нами теорему невозможности:

Всякая формула, выводимая из нашей системы аксиом без использования связанных переменных, является истинной.

3. Включение связанных переменных; мероприятия по сохранению схем при возвратном переносе подстановок; недостаточность прежних методов. Теперь все дело сводится к тому, чтобы убрать из этой теоремы запрет на употребление связанных переменных и таким образом показать, что и в том случае, если мы станем пользоваться связанными переменными, *всякая нумерическая формула, выводимая из наших аксиом, все равно окажется истинной.*

Вообразим себе, что нам дано доказательство какой-либо нумерической формулы. Тогда в точности так же, как и в предыдущем случае, мы разложим фигуру доказательства на нити и произведем перенос подстановок в исходные формулы. Правда, здесь, ввиду наличия схем (α) и (β), нам потребуется провести специальные мероприятия. Рассматриваемые схемы

$$\frac{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(a)}{\mathcal{A} \rightarrow \forall x \mathcal{B}(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\mathcal{B}(a) \rightarrow \mathcal{A}}{\exists x \mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A}}$$

применимы, как известно, лишь в предположении, что переменная a встречается только там, где это указано аргументом. Мы должны будем специально проследить за тем, чтобы это условие, будучи выполненным вначале, соблюдалось и после возвратного переноса подстановок. С этой целью перед выполнением переноса подстановок мы предпримем следующие действия. Мы пойдем по разложенной фигуре доказательства, начиная с заключительной формулы, и всюду, где будут встречаться две формулы

$$\mathcal{A} \rightarrow \forall x \mathcal{B}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(a)$$

или соответственно

$$\exists x \mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \mathcal{B}(a) \rightarrow \mathcal{A},$$

связанные друг с другом применением схемы (α) (или соответственно (β)), мы во второй из этих формул (т. е. в первой формуле схемы) подставим вместо a какую-нибудь ранее в этой нити доказательства не встречавшуюся свободную переменную и сохраним ее в продолжении этой нити и в нитях, ответвляющихся от нее, до того места, до которого можно проследить это вхождение переменной a , начиная с рассматриваемого места.

Для разъяснения этого указания мы рассмотрим следующий фрагмент доказательства:

$$\left. \begin{array}{l} \vdash 1) \quad a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c \\ \vdash 2) \quad d < b \ \& \ b < c \rightarrow d < c \\ \vdash 3) \quad d < a \ \& \ a < c \rightarrow d < c \\ \vdash 4) \quad \frac{\exists x (d < x \ \& \ x < c) \rightarrow d < c}{\exists x (a < x \ \& \ x < c) \rightarrow a < c} \\ \vdash 5) \end{array} \right\} \text{схема } (\beta)$$

(за этими формулами могут идти еще и другие, ведущие нас к заключительной формуле $\mathfrak{E}$).

Мы рассмотрим нить доказательства, идущую сначала от заключительной формулы $\mathfrak{E}$ к формуле 5) и проходящую затем через формулы

$$5), 4), 3), 2), 1).$$

Для этой нити наше предписание состоит в следующем. В формуле 3), которая связана с 4) по схеме (β), мы должны вместо переменной a подставить какую-нибудь еще нигде в этой нити (начиная с самой формулы $\mathfrak{E}$) не встречавшуюся переменную — например r . Производить эту замену в рассматриваемой нити дальше не надо, так как в формуле 2) переменная a уже не встречается.

В результате этого вместо следующих друг за другом в указанной нити доказательства формул

$$1), 2), 3), 4), 5)$$

мы получим следующий модифицированный ряд формул:

$$\begin{aligned} a < b \ \& \ b < c &\rightarrow a < c, \\ d < b \ \& \ b < c &\rightarrow d < c, \\ d < r \ \& \ r < c &\rightarrow d < c, \\ \exists x (d < x \ \& \ x < c) &\rightarrow d < c, \\ \exists x (a < x \ \& \ x < c) &\rightarrow a < c. \end{aligned}$$

Структура доказательства при этом преобразовании останется абсолютно незатронутой; только в применении схем (α) и (β) вместо ранее выделенной переменной a теперь будет фигурировать некоторая другая переменная (в рассматриваемом случае — переменная r).

На этом примере можно убедиться, что принятые нами меры действительно являются необходимыми. Предположим для определенности, что на том отрезке нашего доказательства, который ведет от формулы 5) к заключительной формуле $\mathfrak{E}$, переменные a и c , фигурирующие в формуле 5), исключаются не в результате подстановки, а в результате применения формул (a), (b), и схем

(α), (β) [например, по правилу (δ)¹⁾]; тогда при возвратном переносе подстановок формула 5) не будет затронута.

Если же в рассматриваемой нити доказательства мы применим процедуру возвратного переноса подстановок к первоначальным формулам разложенного вывода, начиная с формулы 5), то вместо формул 3) и 4) получим формулы

$$3') \quad a < a \ \& \ a < c \rightarrow a < c$$

и

$$4') \quad \exists x (a < x \ \& \ x < c) \rightarrow a < c$$

и тем самым структура вывода окажется разрушенной, так как условие применимости схемы (β), необходимое для перехода от 3') к 4'), не будет выполняться.

Если же процедуру возвратного переноса подстановок мы применим к формулам, предварительно модифицированным согласно нашему предписанию, то вместо первоначальных формул 3) и 4) мы получим формулы

$$3*) \quad a < r \ \& \ r < c \rightarrow a < c$$

и

$$4*) \quad \exists x (a < x \ \& \ x < c) \rightarrow a < c;$$

при этом структура доказательства сохранится; только выделенная в схеме (β) переменная a в 3*) будет заменена на r .

Осуществив в схемах (α) и (β) описанные выше замены, мы можем затем произвести возвратный перенос подстановок в исходные формулы — так, как это делалось раньше, — без ущерба для структуры доказательства, поскольку роль выделенной в схемах (α) и (β) переменной a мы теперь будем поручать и некоторым другим свободным индивидуальным переменным. После возвратного переноса подстановок можно будет указанным ранее способом *исключить и, возможно, остающиеся еще формульные переменные*.

Исключить все свободные индивидуальные переменные прежними методами теперь невозможно, ввиду наличия в схемах (α) и (β) свободных переменных. Таким образом, фигура разложения, к которой мы пришли, состоит не только из нумерических формул; в ее формулах встречаются свободные и связанные переменные, а следование формул доказательства друг за другом происходит не только на основе повторения уже имеющих формул и применения схем заключения, но также и на основе схем (α) и (β) и переименования связанных переменных. В качестве исходных формул к тождественным формулам исчисления высказываний и нашим аксиомам присоединяются еще и основные формулы (a) и (b) исчисления предикатов.

¹⁾ См. с. 146.

§ 3. Доказательство непротиворечивости с помощью процедуры редукции

1. Исключение квантора всеобщности; этапы редуцирования; понятие редукции формулы. Мы будем теперь стремиться обобщить нашу первоначальную процедуру таким образом, чтобы вместо истинности нумерических формул рассматривалось некоторое более общее свойство, которым обладают не только нумерические формулы и которое будет затем обнаружено у всех формул любого конкретного доказательства.

Этот план мы осуществим методом, который независимо друг от друга разработали Эрбран и Пресбургер¹⁾. Метод этот заключается в том, что формулам, содержащим связанные переменные, ставятся в соответствие их р е д у к ц и и — формулы без связанных переменных, равнозначные первоначальным формулам при содержательном их истолковании.

Мы можем упростить эту процедуру, с самого начала полностью удалив из доказательства кванторы всеобщности. Действительно, если в первоначально данном нам доказательстве каждое выражение $\forall x \mathfrak{A}(x)$ мы заменим соответствующим ему выражением $\neg \exists x \neg \mathfrak{A}(x)$, то основная формула (a)

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a)$$

перейдет при этом в формулу

$$\neg \exists x \neg A(x) \rightarrow A(a),$$

которая получается из основной формулы (b) в результате подстановки и контрапозиции, а схема (α)

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x)}$$

перейдет в схему

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \rightarrow \neg \exists x \neg \mathfrak{B}(x)},$$

вместо которой может быть вставлен вывод формулы

$$\mathfrak{A} \rightarrow \neg \exists x \neg \mathfrak{B}(x)$$

из формулы

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a),$$

¹⁾ Herbrand J. Recherches sur la theorie de la demonstration: Dissertation. — Paris, 1930, ch. IV; Presburger M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. — C.r. du premier congrès des math. des Pays Slaves, Warschau, 1930.

¹⁹ Д. Гильберт, П. Бернайс

который получится, если мы сначала применим контрапозицию:

$$\neg \mathfrak{B}(a) \rightarrow \neg \mathfrak{A},$$

затем схему (β):

$$\exists x \neg \mathfrak{B}(x) \rightarrow \neg \mathfrak{A},$$

а затем еще раз контрапозицию:

$$\mathfrak{A} \rightarrow \neg \exists x \neg \mathfrak{B}(x).$$

Таким образом, при выводе формулы, не содержащей квантора всеобщности, — и, значит, в частности, при выводе нумерической формулы — мы можем обойтись без использования квантора всеобщности, заменив его соответствующим применением квантора существования.

Если мы теперь представим, что данный нам вывод уже был подвергнут этой процедуре, то в формулах, которым нам нужно сопоставлять их редукции, мы будем иметь дело только с такими связанными переменными, которые связываются *кванторами существования*.

Речь теперь идет о том, чтобы определить операцию, посредством которой мы будем каждой формуле сопоставлять ее *редукцию*. Операция эта будет выполняться в несколько этапов.

Прежде всего мы найдем в рассматриваемой формуле одну из наиболее глубоко расположенных в ней составных частей вида

$$\exists x \mathfrak{A}(x),$$

т. е. такую составную часть $\exists x \mathfrak{A}(x)$, в которой выражение $\mathfrak{A}(x)$ составных частей такого вида больше уже не содержит. Переменной x не отдается при этом какого-либо предпочтения перед другими переменными. Мы фиксируем ее здесь только для примера. Кроме переменной x формула $\exists x \mathfrak{A}(x)$, вообще говоря, может содержать еще и другие связанные переменные, относящиеся к внешним по отношению к ней кванторам существования. Выражение $\mathfrak{A}(x)$ строится с помощью связей исчисления высказываний из равенств и неравенств

$$a = b, \quad a < b,$$

где a и b суть либо цифры, либо индивидуальные переменные, быть может, с навешенными на них штрихами, причем это могут быть как свободные, так и связанные индивидуальные переменные.

Чтобы в дальнейшем иметь возможность указывать количество навешенных на a штрихов, мы будем посредством

$$a^{(t)}$$

обозначать то выражение, которое получается из a путем навешивания на него t штрихов. Посредством $a^{(t)}$ мы будем обозначать само выражение a .

Теперь мы выполним над выражением $\mathfrak{A}(x)$ ряд преобразований.

1. Сперва мы преобразуем его в какую-либо дизъюнктивную нормальную форму

$$\mathfrak{A}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_r,$$

члены которой $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r$ суть конъюнкции, построенные из равенств и неравенств, а также их отрицаний.

2. Затем мы исключим встречающиеся в нем отрицания, заменив каждый конъюнктивный член

$$a \neq b$$

посредством

$$a < b \vee b < a,$$

а каждый член

$$\neg (a < b)$$

посредством

$$a = b \vee b < a.$$

При этой замене структура нашей дизъюнктивной нормальной формы, вообще говоря, будет разрушена. Мы вновь восстановим ее, пользуясь дистрибутивным законом логики высказываний. Таким образом, вместо выражения $\mathfrak{A}(x)$ мы получим такую дизъюнктивную нормальную форму

$$\mathfrak{B}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{B}_n,$$

в которой $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ будут конъюнкциями равенств и неравенств.

3. В тех равенствах и неравенствах, которые переменную x содержат в обеих частях, мы заменим x посредством 0, иначе говоря, всякое встречающееся нам равенство

$$x^{(t)} = x^{(l)}$$

мы заменим равенством

$$0^{(t)} = 0^{(l)},$$

а всякое неравенство

$$x^{(t)} < x^{(l)}$$

неравенством

$$0^{(t)} < 0^{(l)}.$$

Тем самым мы добьемся того, что в каждом равенстве и в каждом неравенстве переменная x будет встречаться самое большее в одной

из его частей; если равенство будет содержать x в правой части, мы поменяем его части местами.

4. Пусть t — наибольшее число штрихов, навешенных на переменную x в получившейся таким образом формуле. В каждом равенстве и неравенстве, в котором x стоит с меньшим числом штрихов (это число t может оказаться равным и нулю), мы к обоим выражениям, стоящим слева и справа от символа $=$ или $<$, добавим $t - t$ штрихов. В результате мы добьемся того, что во всех элементарных формулах, содержащих x , переменная x будет снабжена одним и тем же числом t штрихов. Наконец, дизъюнктивные члены этой дизъюнктивной нормальной формы мы расположим в такой последовательности, чтобы члены, не содержащие x , стояли последними.

После выполнения операций 1—4 вместо $\mathfrak{A}(x)$ получится выражение, обладающее следующими свойствами.

Оно представляет собой дизъюнктивную нормальную форму, построенную из равенств и неравенств, каждое из которых (если оно содержит x) имеет один из следующих трех видов:

$$x^{(t)} = a, \quad x^{(t)} < a, \quad a < x^{(t)},$$

где t всюду одно и то же (оно может быть равно и нулю), а a не содержит переменной x ; дизъюнктивные члены с x стоят впереди. Таким образом, наша дизъюнкция имеет вид

$$\mathfrak{G}_1(x^{(t)}) \vee \dots \vee \mathfrak{G}_m(x^{(t)}) \vee \mathfrak{G}_{m+1} \vee \dots \vee \mathfrak{G}_n,$$

причем переменная x входит только в те члены, где это указано специально.

Мы заменим теперь выражение $\exists x \mathfrak{A}(x)$ дизъюнкцией

$$\exists x \mathfrak{G}_1(x^{(t)}) \vee \dots \vee \exists x \mathfrak{G}_m(x^{(t)}) \vee \mathfrak{G}_{m+1} \vee \dots \vee \mathfrak{G}_n.$$

Для каждого члена

$$\exists x \mathfrak{G}_r(x^{(t)}) \quad (r = 1, \dots, m)$$

имеются две возможности:

либо в $\mathfrak{G}_r(x^{(t)})$ входит какое-нибудь равенство

$$x^{(t)} = a,$$

либо $x^{(t)}$ встречается в нем только в неравенствах.

В первом случае $\exists x \mathfrak{G}_r(x^{(t)})$ имеет вид

$$\exists x (x^{(t)} = a \& \mathfrak{G}_r^*(x^{(t)}))$$

(причем допускается и такой случай, когда $x^{(t)}$ в $\mathfrak{G}_r^*(x^{(t)})$ вовсе не входит) или же просто вид

$$\exists x (x^{(t)} = a).$$

Каждый член вида

$$\exists x (x^{(t)} = a \& \mathfrak{G}_r^*(x^{(t)}))$$

мы заменим не зависящим от x выражением

$$(0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a) \& \mathfrak{G}_r^*(a),$$

а член

$$\exists x (x^{(t)} = a)$$

мы заменим выражением

$$0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a.$$

Во втором случае мы сначала вынесем из-под квантора существования члены конъюнкции, не содержащие $x^{(t)}$. Тогда под квантором существования останется конъюнкция $\mathfrak{R}(x^{(t)})$ неравенств вида $a < x^{(t)}$ или $x^{(t)} < a$. Таким образом, общий вид конъюнкции $\mathfrak{R}(x^{(t)})$ будет таков:

$$a_1 < x^{(t)} \& \dots \& a_t < x^{(t)} \& x^{(t)} < b_1 \& \dots \& x^{(t)} < b_s.$$

Мы заменим теперь $\exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$ не содержащей x конъюнкцией

$$0^{(t)} < b_1 \& \dots \& 0^{(t)} < b_s$$

$$\& a'_1 < b_1 \& \dots \& a'_t < b_s$$

$$\& \dots \dots \dots$$

$$\& a'_t < b_1 \& \dots \& a'_t < b_s.$$

Если $\mathfrak{R}(x^{(t)})$ не содержит членов вида $a < x^{(t)}$, то надо будет взять одну только конъюнкцию

$$0^{(t)} < b_1 \& \dots \& 0^{(t)} < b_s;$$

если не будет членов вида $x^{(t)} < b$, то $\exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$ надо будет заменить равенством

$$0 = 0.$$

Применив эту процедуру замены ко всем выражениям

$$\exists x \mathfrak{G}_r(x^{(t)}),$$

мы получим вместо первоначальной составной части $\exists x \mathfrak{A}(x)$ рассматриваемой нами формулы некоторое выражение, не содержащее переменной x , которое содержит только такие связанные пере-

менные, которые связываются кванторами существования, содержащими в своей области действия это выражение. Если в полученном выражении будут встречаться не все те отличные от x свободные и связанные переменные, которые входили в $\mathfrak{A}(x)$, то для каждой такой недостающей переменной — например для a или для y , — мы добавим к этому выражению в качестве конъюнктивного члена соответствующее равенство $a = a$ или $y = y$ так, чтобы получающееся выражение *содержало в точности те же самые переменные*, что и $\mathfrak{A}(x)$, *за исключением переменной x* . Если в рассматриваемую нами формулу вместо ее составной части $\exists x \mathfrak{A}(x)$ мы подставим это выражение, то количество кванторов существования у формулы уменьшится на единицу.

Эту процедуру мы теперь можем применить еще раз к одной из аналогичных внутренних составных частей $\exists x \mathfrak{B}(x)$. Продолжая таким образом и далее, мы по очереди удалим все кванторы существования и придем к формуле, которая вообще не будет содержать связанных переменных. При этом в ней будут встречаться те же самые свободные переменные, что и в первоначальной формуле. Любую из полученных таким образом формул мы будем называть *редукцией* нашей исходной формулы, а саму процедуру ее получения мы будем называть *о п е р а ц и е й р е д у к ц и и*.

2. Верифицируемые формулы; теорема об однозначности; леммы. С помощью этого понятия мы придем к желаемому обобщению определения *истинной* формулы, которое, как мы помним, было сформулировано только для нумерических формул. Это обобщение мы получим в результате введения понятия *верифицируемой* формулы, которое мы — предварительно ограничиваясь рассмотрением формул без кванторов всеобщности — определим следующим образом:

1. Нумерическую формулу мы будем называть верифицируемой, если она является истинной.

2. Формулу с одной или несколькими свободными индивидуальными переменными (но без других переменных) мы будем называть верифицируемой, если она истинна при любой замене этих переменных цифрами ¹⁾.

3. Формулу со связанными переменными, но без формульных переменных и кванторов всеобщности мы будем называть верифицируемой, если применение процедуры редукции переводит ее в верифицируемую формулу (в смысле, определенном в пп. 1 и 2).

Последний пункт этого определения, относящийся к формулам со связанными переменными, нуждается в специальном обосно-

¹⁾ Такую замену можно рассматривать и как подстановку. Здесь и далее в этой главе мы будем пользоваться выражением *замена* с учетом будущих обобщений понятия *верифицируемости*, в связи с которыми нам придется иметь дело с заменой свободных переменных такими выражениями, которые не относятся к нашему дедуктивному формализму.

вании, поскольку процедура редукции определена не вполне однозначно. Действительно, некоторый произвол имеет место уже при построении дизъюнктивной нормальной формы. Для того чтобы наше определение верифицируемости для формул со связанными переменными получило однозначный смысл, необходимо, чтобы этот произвол в процедуре редукции не оказывал влияния на верифицируемость результата. Это мы действительно можем доказать, опираясь на следующую, несколько более сильную теорему:

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть редукции одной и той же формулы $\mathfrak{F}$, то при любой замене входящих в них свободных переменных цифрами эти формулы либо обе окажутся истинными, либо обе будут ложными ¹⁾.

Из этой теоремы об однозначности немедленно вытекает, что если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — редукции одной и той же формулы и $\mathfrak{A}$ верифицируема, то верифицируема и $\mathfrak{B}$.

Таким образом, все дело теперь сводится к тому, чтобы доказать эту теорему об однозначности ²⁾. Теорема эта верна в том случае, когда формула $\mathfrak{F}$, редукции которой мы рассматриваем, не содержит связанных переменных, так как в этом случае единственной редукцией $\mathfrak{F}$ является сама эта формула. Далее, заметим, что если наша теорема будет иметь место для формул $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$, то она будет справедлива и для любой их комбинации, построенной с помощью связок исчисления высказываний, так как редукция $\mathfrak{F}$ строится из редукций формул $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$ тем же самым способом, которым $\mathfrak{F}$ строится из $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$. Действительно, операция редукции, как мы знаем, сводится к последовательному, идущему изнутри наружу исключению кванторов существования; при этом очередность применения связок исчисления высказываний, не попадающих в область действия кванторов существования, не подвергается никаким изменениям.

Теперь уясним себе следующий факт. Редуцирование любой формулы $\exists x \mathfrak{G}(x)$ производится таким образом, что сначала в ней устраняются наиболее глубоко расположенные кванторы существования. При этой процедуре с переменной x мы обращаемся так, как если бы она была свободной переменной. Поэтому, если $\mathfrak{R}(x)$ обозначает выражение, в которое $\mathfrak{G}(x)$ перейдет в результате исключения стоящих внутри него кванторов существования, и если мы подставим вместо x какую-нибудь свободную переменную, не встречающуюся в $\mathfrak{G}(x)$ (а значит, и в $\mathfrak{R}(x)$), например c , то $\mathfrak{R}(c)$ будет представлять собой редукцию $\mathfrak{G}(c)$, а всякая редукция формулы $\exists x \mathfrak{G}(x)$, полученная в результате дальнейшего

¹⁾ Заметим, что $\mathfrak{A}$ содержит те же свободные переменные, что и $\mathfrak{B}$.

²⁾ Соображения, которыми мы для этого воспользуемся, одновременно послужат и вспомогательным средством для установления непротиворечивости рассматриваемой нами системы аксиом.

развертывания процедуры редукции, будет редукцией формулы $\exists x \mathfrak{K}(x)$.

Таким образом, если переменная s не входит в $\mathfrak{G}(x)$, то любая редукция формулы $\exists x \mathfrak{G}(x)$ одновременно будет редукцией и всякой такой формулы $\exists x \mathfrak{K}(x)$, у которой $\mathfrak{K}(c)$ является редукцией $\mathfrak{G}(c)$.

Теперь на основе этого факта и предыдущего замечания легко убедиться, что для установления теоремы об однозначности достаточно доказать следующее: Если теорема об однозначности верна для формулы $\mathfrak{F}(c)$ и если s не входит в $\mathfrak{F}(x)$, то она будет верна и для $\exists x \mathfrak{F}(x)$.

Доказательство этого утверждения опирается на следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{K}$ — редукция $\mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{F}'$ и $\mathfrak{K}'$ получаются из $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ в результате замены свободных переменных (которые в $\mathfrak{F}$ и в $\mathfrak{K}$ совпадают) какими-либо цифрами. Тогда $\mathfrak{K}'$ является редукцией $\mathfrak{F}'$.

Действительно, в процессе редуцирования со свободными переменными мы обращаемся точно так же, как с цифрами.

Лемма 2. Пусть формула $\mathfrak{A}(c)$ не содержит никаких переменных, отличных от c , и пусть $\mathfrak{K}$ — редукция формулы $\exists x \mathfrak{A}(x)$. Если цифра z такова, что нумерическая формула $\mathfrak{A}(z)$ является истинной, то и $\mathfrak{K}$ истинна. Верно и обратное: если формула $\mathfrak{K}$ истинна, то с помощью процедуры редукции мы найдем такую цифру z , что $\mathfrak{A}(z)$ будет истинно.

Обоснование леммы 2 требует более детального рассмотрения процедуры редукции. Чтобы не прерывать сейчас ход наших мыслей, мы займемся этим впоследствии.

Теперь, используя обе эти леммы и предполагая, что наша теорема об однозначности уже оказалась справедливой для формулы $\mathfrak{F}(c)$, мы можем следующим образом убедиться в справедливости ее для формулы $\exists x \mathfrak{F}(x)$. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две редукции формулы $\exists x \mathfrak{F}(x)$; тогда, по ранее доказанной теореме, $\mathfrak{A}$ есть редукция формулы $\exists x \mathfrak{K}(x)$, а $\mathfrak{B}$ — редукция формулы $\exists x \mathfrak{G}(x)$, где $\mathfrak{K}(c)$ и $\mathfrak{G}(c)$ суть редукции формулы $\mathfrak{F}(c)$ и формула $\exists x \mathfrak{F}(x)$ переменной s не содержит. В $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ встречаются те же самые свободные переменные, что и в $\mathfrak{F}(x)$, а также в $\mathfrak{K}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$. Если мы заменим эти переменные цифрами, то вместо $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{K}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$ мы получим $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{F}'(x)$, $\mathfrak{K}'(x)$ и $\mathfrak{G}'(x)$ соответственно. По лемме 1 $\mathfrak{A}'$ является редукцией $\exists x \mathfrak{K}'(x)$, а $\mathfrak{B}'$ — редукцией $\exists x \mathfrak{G}'(x)$. $\mathfrak{K}'(c)$ и $\mathfrak{G}'(c)$ никаких переменных, кроме c , не содержат, так как они получаются из редукций формул $\mathfrak{K}(c)$ и $\mathfrak{G}(c)$ в результате замены цифрами всех отличных от c свободных переменных; формулы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ являются нумерическими.

Пусть теперь формула $\mathfrak{A}'$ истинна; тогда по лемме 2 с помощью процедуры редукции формулы $\exists x \mathfrak{K}'(x)$ в формулу $\mathfrak{A}'$ мы

найдем такую цифру z , что $\mathfrak{K}'(z)$ окажется истинной. $\mathfrak{K}'(z)$ получается из $\mathfrak{K}(c)$ с помощью замены свободных переменных некоторыми цифрами. Та же самая замена переведет формулу $\mathfrak{G}(c)$ в $\mathfrak{G}'(z)$. Так как $\mathfrak{K}(c)$ и $\mathfrak{G}(c)$ обе являются редукциями формулы $\mathfrak{F}(c)$, для которой наша теорема об однозначности выполняется, то из истинности $\mathfrak{K}'(z)$ следует, что $\mathfrak{G}'(z)$ истинна. Так как $\mathfrak{B}'$ является редукцией формулы $\exists x \mathfrak{G}'(x)$, то из истинности $\mathfrak{G}'(z)$ по лемме 2 следует истинность $\mathfrak{B}'$. Но в точности так же, как из истинности $\mathfrak{A}'$ мы заключили об истинности $\mathfrak{B}'$, из предположения об истинности $\mathfrak{B}'$ мы можем заключить об истинности $\mathfrak{A}'$. Таким образом, формулы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$, которые являются нумерическими, могут быть либо обе истинными, либо обе ложными. Таким образом, наша теорема об однозначности оказывается справедливой и для формулы $\exists x \mathfrak{F}(x)$.

Итак, доказательство нашей теоремы об однозначности закончено с точностью до обоснования леммы 2.

Что же касается этого обоснования, то оно может быть получено прослеживанием процедуры редукции, которая устроена как раз таким образом, что утверждения леммы 2 оказываются выполненными¹⁾. Прежде всего, мы должны будем показать следующее:

Если $\mathfrak{A}(c)$ не содержит никаких переменных, кроме c , и если нумерическая формула $\mathfrak{A}(z)$ истинна для какой-либо цифры z , то всякая редукция формулы $\exists x \mathfrak{A}(x)$ является истинной.

Фактически мы убедимся в этом, последовательно выполняя шаги процедуры редукции и используя при этом элементарные арифметические соображения интуитивного характера. В частности, мы будем пользоваться следующими интуитивно ясными фактами:

а) Элементарные преобразования исчисления высказываний не изменяют истинностного значения нумерической формулы.

б) Из двух различных цифр одна является составной частью другой, и потому, каковы бы ни были цифры a и b , истинна одна (и только одна) из формул

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a.$$

в) Если для некоторой цифры z $z^{(f)}$ совпадает с $z^{(l)}$, то число штрихов f должно совпадать с l . Поэтому равенства

$$z^{(f)} = z^{(l)} \quad \text{и} \quad 0^{(f)} = 0^{(l)}$$

либо оба истинны, либо оба ложны. Для того чтобы $z^{(f)}$ было отлично от $z^{(l)}$ и являлось составной частью $z^{(l)}$, необходимо

¹⁾ Читатель, который хотел бы пропустить это подробное рассуждение, может перейти прямо к с. 300.

и достаточно, чтобы число штрихов f было меньше, чем l ; тем самым неравенства

$$z^{(f)} < z^{(l)} \quad \text{и} \quad 0^{(f)} < 0^{(l)}$$

либо оба истинны, либо оба ложны.

г) Если к двум совпадающим цифрам прибавить одинаковое число штрихов или если от обеих этих цифр отнять по одинаковому числу штрихов, то получающиеся при этом цифры по-прежнему будут совпадать. Равным образом, если цифра a является составной частью цифры b , то это отношение между ними будет сохраняться и в том случае, если мы к a и b добавим одинаковое число штрихов или если мы от них отнимем по одинаковому числу штрихов.

д) Дизъюнкция нумерических формул истинна тогда и только тогда, когда истинным является хотя бы один член этой дизъюнкции; конъюнкция нумерических формул истинна тогда и только тогда, когда истинным является каждый член этой конъюнкции.

е) Для любой цифры z либо $0^{(t)}$ совпадает с $z^{(t)}$, либо $0^{(t)}$ является составной частью $z^{(t)}$. Поэтому формула

$$0^{(t)} = z^{(t)} \vee 0^{(t)} < z^{(t)}$$

непрерывно истинна; если же для какой-либо цифры b истинна формула $z^{(t)} < b$, то формула $0^{(t)} < b$ также является истинной.

ж) Если для цифр a , b и c истинны формулы

$$a < b \quad \text{и} \quad b < c,$$

то формулы $a < c$ и $a' < c$ также являются истинными.

На основании перечисленных здесь фактов может быть получено первое утверждение рассматриваемой нами леммы. Теперь остается обосновать только второе утверждение:

Если формула $\exists x \mathcal{U}(x)$ не содержит переменных, отличных от x , и если какая-либо ее редукция истинна, то с помощью процедуры редукции мы сможем найти такую цифру z , что формула $\mathcal{U}(z)$ будет истинной.

Мы непосредственно укажем способ, с помощью которого из процесса редукции данной формулы $\exists x \mathcal{U}(x)$, ведущего к истинной (нумерической) формуле, можно извлечь цифру z , для которой $\mathcal{U}(z)$ истинно.

Редукция формулы $\exists x \mathcal{U}(x)$ представляет собой дизъюнкцию, получающуюся из некоторой формулы

$$\exists x \mathcal{G}_1(x^{(t)}) \vee \dots \vee \exists x \mathcal{G}_m(x^{(t)}) \vee \mathcal{G}_{m+1} \vee \dots \vee \mathcal{G}_n$$

в результате замены первых m членов некоторыми другими формулами, не содержащими переменной x . Нам придется рассмотреть несколько возможностей.

Прежде всего, может оказаться истинным один из членов $\mathcal{G}_{m+1}, \dots, \mathcal{G}_n$. Тогда в качестве z можно будет взять 0.

Допустим теперь, что этот случай места не имеет, но у рассматриваемой дизъюнкции имеется истинный член вида

$$(0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a) \& \mathcal{G}_r^*(a)$$

(или вида

$$0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a),$$

который получился из члена

$$\exists x (x^{(t)} = a \& \mathcal{G}_r^*(x^{(t)}))$$

(соответственно из члена

$$\exists x (x^{(t)} = a)).$$

Здесь a представляет собой некоторую цифру, имеющую вследствие истинности формулы

$$0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a$$

вид $c^{(t)}$. Тогда в качестве z мы возьмем цифру c .

Если ни один из двух упомянутых случаев места не имеет, то остается единственная возможность: а именно, что один из тех членов $\exists x \mathcal{G}_r(x^{(t)})$, в которых $\mathcal{G}_r(x^{(t)})$ не содержит равенства в качестве составной части, в результате редукции переходит в истинную формулу. Тогда нам придется рассмотреть следующие три случая:

1) $\mathcal{G}_r(x^{(t)})$ имеет вид

$$a_1 < x^{(t)} \& \dots \& a_f < x^{(t)}.$$

Тогда по нашему редукционному предписанию $\exists x \mathcal{G}_r(x^{(t)})$ должно быть заменено равенством $0 = 0$. Среди цифр $a_1, \dots, a_f$ непременно найдется такая, в которой все остальные содержатся в качестве составной части. Пусть эта наибольшая из перечисленных нами цифр будет a ; тогда в качестве z мы возьмем цифру a' .

2) $\mathcal{G}_r(x^{(t)})$ имеет вид

$$x^{(t)} < b_1 \& \dots \& x^{(t)} < b_g,$$

и согласно редукционному предписанию вместо $\exists x \mathcal{G}_r(x^{(t)})$ должно быть подставлено

$$0^{(t)} < b_1 \& \dots \& 0^{(t)} < b_g.$$

Тогда в качестве z мы возьмем цифру 0.

Дальнейшее построение доказательства происходит путем повторения уже имеющихся формул, переименования связанных переменных, применения схем заключения и схемы (β) для квантора существования.

Наше утверждение о верифицируемости любой формулы, входящей в доказательство, окажется справедливым, если мы сможем показать, что:

1)) каждая формула (без формульных переменных и кванторов всеобщности), получающаяся из наших аксиом в результате подстановки, верифицируема;

2)) каждая формула (без формульных переменных и кванторов всеобщности), получающаяся в результате подстановки из тождественной формулы исчисления высказываний, верифицируема;

3)) если формулы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Z}$ верифицируемы, то $\mathcal{Z}$ также верифицируема;

4)) верифицируемость какой-либо формулы не нарушается вследствие переименования связанных переменных;

5)) всякая формула вида $\mathcal{A}(a) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x)$, не содержащая формульных переменных и кванторов всеобщности, верифицируема;

6)) если формула $\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{B}$ (у которой a встречается только на местах, указанных в качестве аргумента) верифицируема, то формула $\exists x \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}$ также верифицируема.

Обоснование утверждения 1)) для формул

$$(J_1), (<_1), (<_2), (<_3), (P_1), (P_2)$$

мы уже приводили в первой части нашего доказательства (когда еще запрещалось употребление связанных переменных) при доказательстве того, что каждая из этих формул при замене входящих в нее свободных переменных цифрами дает истинную нумерическую формулу.

Отдельного рассмотрения требует вторая аксиома равенства (J_2) . Любая формула, получающаяся из нее в результате подстановки, имеет вид

$$a = b \rightarrow (\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(b)),$$

причем здесь должно соблюдаться дополнительное условие, состоящее в том, что $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{A}(b)$ не содержат ни формульных переменных, ни кванторов всеобщности. Чтобы показать, что всякая такая формула верифицируема, достаточно (по теореме об однозначности) установить верифицируемость редукции этой формулы при каком-нибудь определенном способе редукции. Редукцию всегда можно провести так, чтобы — после выбора какой-нибудь не встречающейся в $\mathcal{A}(x)$ свободной переменной, например r , — редукции формул $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{A}(b)$ получались из редукции формулы $\mathcal{A}(r)$ в результате подстановки вместо r цифр a и b , так что если $\mathcal{B}(r)$

есть редукция формулы $\mathcal{A}(r)$, то редукция результирующей формулы будет иметь вид

$$a = b \rightarrow (\mathcal{B}(a) \rightarrow \mathcal{B}(b)).$$

Но эта формула, которая теперь уже не содержит связанных переменных, обладает, как мы установили ранее, тем свойством, что при любой замене встречающихся в ней свободных переменных цифрами получается некоторая истинная формула. Тем самым эта формула оказывается верифицируемой.

Для доказательства утверждения 2)) достаточно вспомнить, что редукция формулы $\mathcal{F}$, построенной с помощью связок исчисления высказываний из формул $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$, строится в точности тем же самым способом из редукций формул $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$.

Если же учесть рассуждение, проведенное нами в первой части доказательства для схемы заключения, то ввиду теоремы об однозначности из этого факта будет следовать справедливость утверждения 3)).

Утверждение 4)) без труда усматривается из того, что переименование связанных переменных не оказывает никакого влияния на результат редукции формулы.

Обоснование утверждений 5)) и 6)) мы получим из теоремы о частичной редукции.

Для доказательства утверждения 5)) мы рассмотрим произвольную формулу вида

$$\mathcal{A}(a) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x)$$

без формульных переменных и кванторов всеобщности. Пусть $\mathcal{R}(a)$ — редукция формулы $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{E}$ — редукция $\exists x \mathcal{A}(x)$. Тогда редукция рассматриваемой формулы имеет вид

$$\mathcal{R}(a) \rightarrow \mathcal{E}.$$

Нам нужно показать, что любая нумерическая формула

$$\mathcal{R}'(z) \rightarrow \mathcal{E}',$$

получающаяся из формулы

$$\mathcal{R}(a) \rightarrow \mathcal{E}$$

в результате замены свободных переменных цифрами, истинна. Но этот факт непосредственно вытекает из теоремы о частичной редукции. Действительно, согласно этой теореме, из истинности $\mathcal{R}'(z)$ следует истинность $\mathcal{E}'$.

Так же легко получается и обоснование утверждения 6)); здесь мы предполагаем, что формула

$$\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{B},$$

в которую a входит только на местах, указанных в качестве аргумента, верифицируема. Требуется показать, что тогда верифицируема и формула

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Пусть $\mathfrak{K}(a)$ — редукция формулы $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{S}$ — редукция $\exists x \mathfrak{A}(x)$, а $\mathfrak{Z}$ — редукция $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\mathfrak{K}(a) \rightarrow \mathfrak{Z}$$

будет редукцией формулы

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B},$$

а

$$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z}$$

— редукцией формулы

$$\exists x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Верифицируемость формулы

$$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z}$$

будет доказана, если удастся доказать, что при каждой замене свободных переменных цифрами получающаяся при этом нумерическая формула

$$\mathfrak{S}' \rightarrow \mathfrak{Z}'$$

будет истинной, т. е. если удастся доказать, что при любой замене, такой что формула $\mathfrak{S}'$ истинна, формула $\mathfrak{Z}'$ также будет истинной. Это может быть проделано следующим образом.

Пусть замена переменных цифрами, ведущая от формулы $\mathfrak{S}$ к $\mathfrak{S}'$, переводит формулу $\mathfrak{K}(a)$ в $\mathfrak{K}'(a)$ [заметим, что согласно сделанному нами предположению переменная a в $\mathfrak{A}(x)$ — a значит, и в $\mathfrak{S}$ — не встречается]; тогда, по теореме о частичной редукции, в случае истинности $\mathfrak{S}'$ процедура редукции дает цифру z такую, что $\mathfrak{K}'(z)$ истинно. Но вследствие нашего предположения о том, что формула

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}$$

верифицируема, формула

$$\mathfrak{K}(a) \rightarrow \mathfrak{Z}$$

должна быть верифицируемой, т. е. при любой замене переменных цифрами она должна давать истинную нумерическую формулу. Следовательно, должна быть истинной и формула

$$\mathfrak{K}'(z) \rightarrow \mathfrak{Z}',$$

а так как $\mathfrak{K}'(z)$ истинна, то истинной будет также и $\mathfrak{Z}$.

Тем самым доказательство непротиворечивости рассматриваемой нами системы аксиом доведено до конца. Из этого доказательства мы можем также извлечь и следующую, более сильную теорему.

Т е о р е м а. *Всякая формула без формульных переменных и кванторов всеобщности, выводимая из наших аксиом, является верифицируемой.*

Что касается обеих сделанных здесь оговорок, то ограничение, связанное с кванторами всеобщности, может быть снято таким образом, что процедуру исключения кванторов всеобщности, а именно замену каждого выражения вида $\forall x \mathfrak{A}(x)$ выражением $\neg \exists x \neg \mathfrak{A}(x)$ (и аналогичные замены для других связанных переменных), мы включим в процедуру редукции формулы. Тем самым понятие редуцируемости, а вместе с ним и понятие верифицируемости распространится на формулы с кванторами всеобщности. После этого теорема о том, что всякая выводимая формула верифицируема, окажется справедливой для любых формул, не содержащих формульных переменных.

Что касается выводимых формул, содержащих формульные переменные, то для них справедливо утверждение о том, что если получающаяся из них в результате подстановки формула сама формульных переменных не содержит, то она верифицируема. (Заметим, что в этом утверждении речь идет только о таких подстановках, при которых подставляемые формулы оказываются построенными из символов нашего формализма.)

Из проведенного нами рассуждения мы можем также заключить, что при выводе формул, не содержащих формульных переменных, можно вообще избежать применения формульных переменных, заменив те исходные формулы, в которых формульные переменные встречаются, — это будут тождественные формулы исчисления высказываний, основные формулы (a) и (b) и формула (J₂) — соответствующими схемами аксиом. Каждая такая схема аксиом состоит в договоренности о том, что всякую формулу определенного заданного вида разрешается использовать в качестве исходной формулы. Так, например, тождественной формуле

$$A \vee \neg A$$

соответствует договоренность о том, что каждая формула

$$\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$$

может быть допущена в качестве исходной формулы, а формуле

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a)$$

соответствует договоренность о том, что в качестве исходной может быть допущена любая формула вида

$$\forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a).$$

При этом понятие *формулы* ограничивается таким образом, что формульные переменные с аргументами или без них в качестве элементарных формул более не допускаются и тем самым вообще предотвращается появление формульных переменных.

Поскольку для нас главным является не само изображение логических теорем посредством формул, а формализация логики как способа вывода, для формальной дедукции этот способ на самом деле равносильен примененному нами способу, использующему исходные формулы с формульными переменными. Это непосредственно усматривается из процедуры возвратного переноса подстановок в исходные формулы и исключения оставшихся формульных переменных ¹⁾. Действительно, с помощью этой процедуры мы приходим к такой фигуре разложения, у которой на месте тех исходных формул, которые содержали формульные переменные, стоят аналогично построенные, но свободные от формульных переменных исходные формулы, которые получаются из первоначальных формул подстановкой ²⁾. В дальнейшем мы будем иметь в виду установленный здесь факт возможности обойтись без использования формульных переменных.

§ 4. Переход к одной (в области формул, не содержащих формульных переменных) дедуктивно завершенной системе аксиом

1. Выводимость ряда верифицируемых формул в рассматриваемой системе аксиом; доказательство с помощью «цифр второго рода». Теперь мы вернемся к нашему основному результату, который утверждает, что всякая формула без формульных переменных, построенная из введенных нами символов и выводимая средствами исчисления предикатов из аксиом ³⁾

$$(J_1), (J_2), (<_1), (<_2), (<_3), (P_1), (P_2),$$

является также и верифицируемой.

Этот результат подсказывает нам вопрос о том, не имеет ли место и обратная теорема, т. е. не является ли любая построенная из введенных нами символов верифицируемая формула выводимой из упомянутых аксиом средствами исчисления предикатов.

На этот вопрос следует дать отрицательный ответ. Именно, можно указать различные примеры формул, построенных из введенных нами символов, которые, будучи верифицируемыми, выво-

¹⁾ См. с. 278—283.

²⁾ Схемы аксиом как средство, позволяющее избежать употребления формульных переменных, были впервые применены Дж. фон Нейманом в работе: Neumann J. von. Zur Hilbertschen Beweistheorie.— Math. Z., 1927, 26, № 1.

³⁾ См. с. 273.

димыми не являются. Такова, например, формула

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b.$$

С одной стороны, как легко видеть, она является верифицируемой, а с другой стороны, она не может быть выведена из наших аксиом. Это можно доказать с помощью некоторой модификации метода, примененного нами для установления непротиворечивости рассматриваемой нами системы аксиом.

Мы расширим понятие цифр, введя в качестве цифр нового рода символ α и те фигуры $\alpha^{(1)}$, которые получаются из α в результате однократного или многократного навешивания символа штриха. Эти цифры, в отличие от цифр в обычном смысле слова (цифр первого рода), мы будем называть цифрами второго рода. Это определение и название будут использоваться только в рамках излагаемого здесь доказательства. Подстановка цифр второго рода и построенных из них формул в нашем дедуктивном формализме допускаться не будет. Мы будем использовать их лишь для модификации определения понятия верифицируемости. Эту модификацию мы получим, надлежащим образом обобщив определения терминов *нумерический*, *истинный*, *ложный* и соответствующим образом видоизменив процедуру редукции.

Формулу мы будем называть нумерической, если она является равенством или неравенством между цифрами (первого или второго рода) или если она получается из формул этого типа с помощью связей исчисления высказываний.

Определение истинности и ложности для нумерических равенств, а также для неравенств между двумя цифрами первого рода и между двумя цифрами второго рода остается прежним; в соответствии со сказанным, неравенство $\alpha^{(1)} < \alpha^{(1)}$ считается истинным, если $\alpha^{(1)}$ отлично от $\alpha^{(1)}$ и является составной частью $\alpha^{(1)}$, в противном случае оно считается ложным. Для неравенств между цифрой первого рода и цифрой второго рода мы соглашаемся о нижеследующем: для каждой цифры второго рода n неравенство

$$0 < n$$

истинно, а неравенство

$$n < 0$$

ложно. Для каждой отличной от 0 цифры первого рода z и для каждой цифры второго рода n неравенство

$$n < z$$

истинно, а неравенство

$$z < n$$

ложно. Исходя из определений истинности и ложности для равенств и неравенств, эти определения можно сформулировать (в точности так же, как это делалось раньше) и для случая произвольной нумерической формулы.

Для этих обобщенных определений истинности и ложности процедуру редукции можно будет видоизменить таким образом, что теорема об однозначности и теорема о частичной редукции снова окажутся верными. В самом деле, чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны будем изменить только п. 4 процедуры редукции ¹⁾ и подобрать соответствующие замены для выражений

$$\exists x \mathcal{G}_r(x^{(t)})$$

с учетом изменения содержательного смысла формул, вызванного появлением цифр второго рода; в первоначальной процедуре редукции эти замены производились в соответствии с обычным содержательным смыслом формул. Теперь в случае равенства

$$x^{(1)} = a$$

или неравенств

$$x^{(1)} < a \quad \text{и} \quad a < x^{(1)}$$

мы должны различать случаи, когда на месте x или a стоит цифра первого или цифра второго рода.

Это различие мы можем формализовать, так как свойства быть цифрой первого рода и соответственно цифрой второго рода можно изобразить с помощью формул

$$0' < a''$$

и соответственно

$$a' < 0'.$$

Эти формулы изображают указанные свойства в том смысле, что при всякой замене переменной a цифрой первого рода первая формула переходит в истинную, а вторая — в ложную нумерическую формулу; а при каждой замене a цифрой второго рода первая формула переходит в ложную, а вторая — в истинную нумерическую формулу.

Ввиду сказанного, мы приходим к следующим изменениям в процедуре редукции.

В п. 4, где речь шла о том, чтобы переменную x всюду снабдить максимальным встречающимся числом штрихов t , неравенство

$$x^{(r)} < a$$

¹⁾ См. с. 292.

с числом штрихов r , меньшим чем t , мы теперь преобразуем в выражение

$$(0' < a' \& x^{(t)} < a^{(s)}) \vee (a' < 0' \& (x^{(t)} = 0^{(s)} \vee x^{(t)} < a^{(t)}))$$

вместо использованного ранее выражения

$$x^{(t)} < a^{(s)},$$

а неравенство

$$a < x^{(r)}$$

при $r < t$ и $r + s = t$ преобразуем в выражение

$$(0^{(s)} < x^{(t)} \& a^{(s)} < x^{(t)}) \vee (x^{(t)} < 0' \& (a = 0 \vee a^{(s)} < x^{(t)}))$$

вместо использованного ранее выражения

$$a^{(s)} < x^{(t)}.$$

В случае замены

$$\exists x (x^{(t)} = a) \quad \text{или} \quad \exists x (x^{(t)} = a \& \mathcal{G}_r^*(x)),$$

вместо выражения

$$0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a$$

будет фигурировать выражение

$$0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a \vee (a < 0' \& (a^{(t)} = a \vee a^{(t)} < a)),$$

а в случае замены

$$\exists x (a_1 < x^{(t)} \& \dots \& a_f < x^{(t)} \& x^{(t)} < b_1 \& \dots \& x^{(t)} < b_s)$$

вместо

$$0^{(t)} < b_1 \& \dots \& 0^{(t)} < b_s$$

будет фигурировать выражение

$$(0^{(t)} < b_1 \& \dots \& 0^{(t)} < b_s) \vee$$

$$(a_1 < 0' \& \dots \& a_f < 0' \& a^{(t)} < b_1 \& \dots \& a^{(t)} < b_s);$$

кроме того, вместо каждого из конъюнктивных членов

$$a'_p < b_q \quad (p = 1, \dots, f; q = 1, \dots, s)$$

будет стоять выражение

$$a'_p < b_q \vee (a_p = 0 \& a < b_q).$$

Теперь определение верифицируемости может быть сформулировано дословно так же, как и в предыдущем случае, но встречаю-

щиеся в нем термины должны пониматься в измененном смысле. Тогда мы, во-первых, снова сможем констатировать, что формулы (J_1) , $(<_1)$, $(<_2)$, $(<_3)$, (P_1) и (P_2) , а также все формулы без формульных переменных, которые получаются из формулы (J_2) в результате подстановки, являются верифицируемыми; а затем на основании теорем о редукции (справедливость которых мы обеспечили соответствующим изменением процедуры редукции) получается, что каждая формула, выводимая из рассматриваемых нами аксиом, является верифицируемой.

Отсюда следует, что формула

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b$$

не может быть выведена из наших аксиом. Действительно, эта формула не является верифицируемой в смысле нашего нового определения, так как если мы заменим в ней переменную a цифрой 0, а b — цифрой α , то получим формулу

$$0 < \alpha \rightarrow 0' = \alpha \vee 0' < \alpha,$$

которая является ложной.

2. Подход к пополнению этой системы аксиом; выводимость ряда эквивалентностей как достаточное условие. Создавшаяся в результате всего этого ситуация не является неожиданной, так как система наших аксиом и правил формализует только четыре из пяти пeanовских аксиом арифметики, между тем как аксиома полной индукции нами пропущена.

Достоин внимания тот факт, что для пополнения нашей системы аксиом вовсе не обязательно добавлять саму аксиому индукции ни в виде формулы, ни в виде схемы и что для того, чтобы всякая верифицируемая формула оказалась также и выводимой, вместо нее достаточно взять некоторые элементарные аксиомы.

Путь к такому пополнению нашей системы аксиом указывает процедура редукции. Действительно, для того чтобы добиться выводимости всякой верифицируемой формулы, нам только нужно позаботиться о том, чтобы каждая формула без формульных переменных была дедуктивно равна своей редукции. В самом деле, если это условие выполнится в результате добавления определенных (построенных из рассматриваемых нами символов) аксиом, то тогда окажется, что всякая верифицируемая формула выводима. Для того чтобы установить этот факт, предварительно докажем, что каждая истинная нумерическая формула выводима из нашей системы аксиом.

Действительно, разберем следующие случаи:

1. Истинное нумерическое равенство имеет вид

$$z = z$$

и получается подстановкой из формулы (J_1) .

2. Отрицание нумерического равенства, если оно истинно, имеет вид

$$0(t) \neq 0(t + t)$$

или вид

$$0(t + t) \neq 0(t),$$

где t отлично от 0. Всякая такая формула выводится средствами исчисления высказываний с использованием аксиом (P_1) и (P_2) .

3. Истинное нумерическое неравенство имеет вид

$$z < z(t),$$

где t отлично от 0. Оно выводится средствами исчисления высказываний с использованием аксиом $(<_2)$ и $(<_3)$.

4. Отрицание нумерического неравенства, если оно истинно, имеет вид

$$\neg (z(t) < z),$$

где t может быть и нулем. Всякая такая формула выводится средствами исчисления высказываний с использованием аксиом $(<_1)$, $(<_2)$ и $(<_3)$.

Из разбора этих четырех случаев выводимость каждой истинной нумерической формулы получается следующим образом. Сначала рассматриваемую нумерическую формулу преобразованиями исчисления высказываний можно перевести в конъюнктивную нормальную форму. Каждый конъюнктивный член этой нормальной формы в свою очередь является истинной нумерической формулой и имеет вид дизъюнкции, у которой каждый член является или равенством, или неравенством, или отрицанием какой-либо формулы такого рода. Так как эта дизъюнкция истинна, то она должна содержать по меньшей мере один истинный член. Для этого члена имеет место один из четырех рассмотренных выше случаев, и поэтому этот член выводим. Тем самым выводима (средствами исчисления высказываний) и вся дизъюнкция. Так как это верно для любой дизъюнкции, являющейся конъюнктивным членом нашей нормальной формы, то выводима вся конъюнктивная нормальная форма в целом, а следовательно, и данная нам истинная нумерическая формула.

На основе только что установленной теоремы мы можем привести доказательство высказанного нами утверждения о том, что если в результате добавления некоторых аксиом, в которых не содержатся формульные переменные или какие-нибудь новые символы, каждая формула без формульных переменных будет дедуктивно равна своей редукции, то тогда всякая верифицируемая формула будет выводимой.

Представим себе, что наш формализм дополнен указанным образом новыми аксиомами, так что всякая формула без формульных переменных оказывается дедуктивно равной своей редукции. Пусть теперь $\mathcal{A}$ — какая-либо верифицируемая формула. Предположим сначала, что она не содержит свободных индивидных переменных, и пусть $\mathcal{B}$ — редукция $\mathcal{A}$. Тогда, по определению верифицируемости, $\mathcal{B}$ является истинной нумерической формулой. Но каждая такая формула, как мы видели, выводима. С другой стороны, согласно нашему предположению, формула $\mathcal{A}$ дедуктивно равна своей редукции $\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{A}$ может быть выведена из $\mathcal{B}$ и тем самым $\mathcal{A}$ оказывается выводимой формулой.

Теперь рассмотрим случай, когда заданная верифицируемая формула содержит свободные переменные. Пусть $a, b, \dots, r$ — список всех этих переменных, и пусть в соответствии с этим формула $\mathcal{A}$ более детально записана в виде

$$\mathcal{B}(a, b, \dots, r).$$

Предположение о верифицируемости $\mathcal{A}$ выражает тот факт, что всякая редукция формулы $\mathcal{B}(a, b, \dots, r)$ при любой замене переменных $a, b, \dots, r$ цифрами переходит в истинную нумерическую формулу. Теперь образуем из $\mathcal{B}(a, b, \dots, r)$ формулу

$$\exists x \exists y \dots \exists u \neg \mathcal{B}(x, y, \dots, u).$$

Переменные $x, y, \dots, u$ мы выбираем таким образом, чтобы они не входили в $\mathcal{B}(a, b, \dots, r)$. Любая редукция этой формулы является нумерической формулой и, значит, истинной или ложной. Однако легко убедиться, что она не может быть истинной. Действительно, если бы редукция формулы

$$\exists x \exists y \dots \exists u \neg \mathcal{B}(x, y, \dots, u)$$

была истинной, то по теореме о частичной редукции формула

$$\exists y \dots \exists u \neg \mathcal{B}(\beta_1, y, \dots, u)$$

также имела бы истинную редукцию для некоторой цифры β_1 , которая отыскивается с помощью процедуры редукции. В силу истинности этой редукции, снова нашлась бы такая цифра β_2 , для которой была бы истинной редукция формулы

$$\exists z \dots \exists u \mathcal{B}(\beta_1, \beta_2, z, \dots, u).$$

Если f — число переменных $x, y, z, \dots, u$, то, повторив это рассуждение f раз, мы получим, что для некоторых конкретных цифр

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$$

формула

$$\neg \mathcal{B}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f)$$

имеет истинную редукцию, а это противоречит тому, что всякая редукция формулы $\mathcal{B}(a, b, \dots, r)$ при любой замене переменных цифрами переходит в некоторую истинную формулу.

Таким образом, редукции формулы

$$\exists x \exists y \dots \exists u \neg \mathcal{B}(x, y, \dots, u)$$

должны быть ложными, а потому редукции формулы

$$\neg \exists x \exists y \dots \exists u \neg \mathcal{B}(x, y, \dots, u)$$

являются истинными. Значит, последняя формула является верифицируемой формулой без свободных переменных. Но относительно такой формулы мы знаем, что она является выводимой. Далее, из формулы

$$\neg \exists x \exists y \dots \exists u \neg \mathcal{B}(x, y, \dots, u)$$

с помощью исчисления предикатов [по правилу $(\lambda)^1$] мы получаем формулу

$$\forall x \forall y \dots \forall u \mathcal{B}(x, y, \dots, u),$$

а из нее [по правилу $(e')^2$] формулу

$$\mathcal{B}(a, b, \dots, r),$$

т. е. формулу $\mathcal{A}$. Следовательно, формула $\mathcal{A}$ также выводима.

Таким образом, мы действительно показали, что при сделанном предположении каждая верифицируемая формула будет также и выводимой. С другой стороны, если все аксиомы, добавляемые для того, чтобы обеспечить выполнение этого предположения, окажутся верифицируемыми, то сохранится теорема о том, что каждая выводимая формула, не содержащая формульных переменных, является верифицируемой, так что в области формул без формульных переменных верифицируемость совпадает с выводимостью.

Теперь мы должны выяснить, может ли в действительности выполняться это предположение, при котором возникает такая прозрачная ситуация, т. е. действительно ли мы сможем путем добавления соответствующих формул к системе наших аксиом добиться того, чтобы каждая формула, не содержащая формульных переменных, была дедуктивно равна любой своей редукции.

Действительно, это оказывается возможным. Можно удовлетворить даже более сильному требованию, чтобы каждая формула $\mathcal{A}$, не содержащая формульных переменных, была *переводима* в любую

¹⁾ См. с. 181.

²⁾ См. с. 175.

свою редукцию $\mathfrak{R}$, так что в итоге формула

$$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{R}$$

будет выводимой с помощью расширенной системы аксиом.

Для того чтобы это имело место, достаточно, чтобы каждому преобразованию, которое мы выполняем в процедуре редукции, соответствовала выводимая эквивалентность. Если, принимая во внимание все сказанное, мы еще раз рассмотрим нашу процедуру редукции¹⁾, проверяя, какие формулы должны быть выводимыми для того, чтобы на каждом шаге редукции предыдущая формула была переводима в последующую, то убедимся, что кроме выводимых эквивалентностей исчисления предикатов (в которое включается, конечно, и исчисление высказываний) потребуются только следующие эквивалентности²⁾:

- ((1)) $a \neq b \sim a < b \vee b < a$,
- ((2)) $\neg(a < b) \sim a = b \vee b < a$,
- ((3)) $a^{(f)} = a^{(l)} \sim 0^{(f)} = 0^{(l)}$,
- ((4)) $a^{(f)} < a^{(l)} \sim 0^{(f)} < 0^{(l)}$ } (для произвольных чисел f и l),
- ((5)) $a = b \sim b = a$,
- ((6)) $a = b \sim a' = b'$,
- ((7)) $a < b \sim a' < b'$,
- ((8)) $\exists x (x^{(t)} = a) \sim 0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a$,
- ((9)) $\exists x (x^{(t)} = a \& A(x^{(t)})) \sim (0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a) \& A(a)$,
- ((10)) $\exists x (a_1 < x^{(t)} \& \dots \& a_f < x^{(t)} \& x^{(t)} < b_1 \& \dots \& x^{(t)} < b_g)$
 $\sim 0^{(t)} < b_1 \dots \& 0^{(t)} < b_g \& a'_1 < b_1 \& \dots \& a'_f < b_g$
 $\& \dots \& a'_f < b_1 \& \dots \& a'_f < b_g$.

[Здесь $a_1, \dots, a_f, b_1, \dots, b_g$ — свободные переменные. Количество штрихов t в формулах ((8)), ((9)) и ((10)) произвольно.]

3. Дедуктивное сведение этих эквивалентностей к пяти добавляемым к этой системе аксиом формулам; система (A). Прежде всего заметим, что эквивалентности ((3)), ((4)), ((5)) и ((6)) выводятся из наших прежних аксиом. Именно, ((5)) мы можем получить из аксиом равенства, ((6)) — из формулы (P_2) и аксиом равенства, ((3)) — из аксиом равенства и аксиом ($<_1$), ($<_2$), ($<_3$)³⁾.

¹⁾ См. с. 289—294.

²⁾ Читатель, если он хочет пропустить идущие далее выводы, может перейти к системе аксиом (A) на с. 322.

³⁾ На ошибку, имевшуюся здесь в тексте первого издания, нам указал Раджо (A. Raggio).

Если мы разложим эквивалентности ((1)), ((2)) и ((7)), согласно схеме эквивалентности, на импликации, то две импликации

$$a < b \vee b < a \rightarrow a \neq b$$

и

$$a = b \vee b < a \rightarrow \neg(a < b)$$

будут выводимы из аксиом ($<_1$), ($<_2$) и из второй аксиомы равенства. Из оставшихся теперь от формул ((1)), ((2)), ((7)) четырех импликаций

$$\begin{aligned} a \neq b &\rightarrow a < b \vee b < a, \\ \neg(a < b) &\rightarrow a = b \vee b < a, \\ a < b &\rightarrow a' < b', \\ a' < b' &\rightarrow a < b \end{aligned}$$

четвертая может быть выведена из второй и третьей с привлечением аксиом равенства и формул ($<_1$) и ($<_2$). Далее, вторая импликация получается из первой путем элементарных преобразований.

Таким образом, для вывода эквивалентностей ((1)) — ((7)) к нашим аксиомам достаточно будет присоединить две формулы

$$\begin{aligned} a \neq b &\rightarrow a < b \vee b < a, \\ a < b &\rightarrow a' < b'. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим эквивалентности ((8)). Прежде всего, каждая из них легко может быть сведена (средствами исчисления предикатов) к следующим двум формулам:

$$\begin{aligned} c^{(t)} = a &\rightarrow 0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a, \\ 0^{(t)} < a &\rightarrow \exists x (x^{(t)} = a). \end{aligned}$$

Первая из этих формул в том случае, когда количество штрихов t равно 0, дедуктивно равна формуле

$$0 = a \vee 0 < a.$$

С другой стороны, из этой формулы для любого числа штрихов t может быть получена формула

$$c^{(t)} = a \rightarrow 0^{(t)} = a \vee 0^{(t)} < a.$$

Действительно, из формулы

$$0 = c \vee 0 < c$$

с применением формулы

$$a = b \rightarrow a' = b'$$

и вновь присоединенной формулы

$$a < b \rightarrow a' < b'$$

может быть выведена формула

$$0^{(t)} = c^{(t)} \vee 0^{(t)} < c^{(t)},$$

из которой без труда с помощью второй аксиомы равенства получается искомая формула.

Формула

$$0^{(t)} < a \rightarrow \exists x (x^{(t)} = a)$$

в том случае, когда число штрихов равно 0, записывается в виде

$$0 < a \rightarrow \exists x (x = a).$$

В этом случае она может быть выведена уже из формулы

$$a = a.$$

В том случае, когда число штрихов равно 1, она имеет вид

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a).$$

Если мы присоединим эту формулу к числу наших аксиом, то сможем шаг за шагом получить из нее дальнейшие формулы (с большим числом штрихов t). Действительно, пусть формула

$$0^{(t)} < a \rightarrow \exists x (x^{(t)} = a)$$

оказалась уже выведенной. Тогда формулу

$$0^{(t+1)} < a \rightarrow \exists x (x^{(t+1)} = a)$$

мы получим следующим образом: во-первых, из $(<_2)$ и $(<_3)$ получим

$$0^{(t+1)} < a \rightarrow 0^t < a;$$

из этой формулы в сочетании с вновь присоединенной формулой

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a)$$

и второй аксиомой равенства получим

$$0^{(t+1)} < a \rightarrow \exists x (x' = a \& 0^{(t+1)} < x'),$$

а отсюда с использованием формулы

$$a' < b' \rightarrow a < b,$$

которая выводима из вновь добавленных аксиом, мы получим формулу

$$0^{(t+1)} < a \rightarrow \exists x (x' = a \& 0^{(t)} < x).$$

С другой стороны, из формулы

$$0^{(t)} < a \rightarrow \exists x (x^{(t)} = a),$$

которую мы предполагаем выведенной, мы получим формулу

$$0^{(t)} < b \& b' = a \rightarrow \exists x (x^{(t)} = b \& b' = a),$$

а отсюда, с помощью аксиом равенства, получим формулу

$$0^{(t)} < b \& b' = a \rightarrow \exists x (x^{(t+1)} = a),$$

из которой далее получится формула

$$\exists x (x' = a \& 0^{(t)} < x) \rightarrow \exists x (x^{(t+1)} = a).$$

Эта последняя вместе с упомянутой выше формулой

$$0^{(t+1)} < a \rightarrow \exists x (x' = a \& 0^{(t)} < x)$$

и дает нам искомую формулу

$$0^{(t+1)} < a \rightarrow \exists x (x^{(t+1)} = a).$$

Таким образом, если к уже ранее добавленным аксиомам мы присоединим формулы

$$0 = a \vee 0 < a$$

и

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a),$$

то формулы ((8)) будут выводимыми при всех t .

Из каждой формулы ((8)) применением аксиом равенства мы получим соответствующую формулу ((9)).

Осталось рассмотреть эквивалентности ((10)). С помощью формулы

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

или получающейся из нее дизъюнкции

$$a = b \vee a < b \vee b < a,$$

в которой вместо a и b надо подставить каждую пару переменных $a_1, \dots, a_t$ и каждую пару переменных $b_1, \dots, b_s$, эти эквивалентности путем повторного применения схемы дизъюнкции, а также формул (J_2) и $(<_2)$ можно свести к более простым эквивалентностям

$$\exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b) \sim 0^{(t)} < b \& a' < b.$$

Каждую из этих эквивалентностей мы разложим на две импликации:

$$0^{(t)} < b \& a' < b \rightarrow \exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b)$$

и

$$\exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b) \rightarrow 0^{(t)} < b \& a' < b.$$

Вывод первой из этих двух формул использованием дизъюнкции

$$a' = 0^{(t)} \vee a' < 0^{(t)} \vee 0^{(t)} < a'$$

можно свести к выводу двух формул:

$$(a' = 0^{(t)} \vee a' < 0^{(t)}) \& 0^{(t)} < b \rightarrow \exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b)$$

и

$$0^{(t)} < a' \& a' < b \rightarrow \exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b),$$

первая из которых может быть получена с использованием формул ($<_2$), ($<_3$) и второй аксиомы равенства, а вторая — с использованием уже выведенной нами формулы

$$0^{(t)} < a \rightarrow \exists x (x^{(t)} = a)$$

вместе со второй аксиомой равенства и формулой ($<_3$).

Вторая формула

$$\exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b) \rightarrow 0^{(t)} < b \& a' < b$$

может быть преобразована в конъюнкцию двух формул:

$$\exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b) \rightarrow 0^{(t)} < b$$

и

$$\exists x (a < x^{(t)} \& x^{(t)} < b) \rightarrow a' < b.$$

Одна из них получается из формулы

$$0^{(t)} = c^{(t)} \vee 0^{(t)} < c^{(t)}$$

с помощью аксиомы ($<_2$) и второй аксиомы равенства, а вторая — из формулы

$$a < c \& c < b \rightarrow a' < b,$$

которая дедуктивно равна этой формуле, когда число штрихов t равно нулю, т. е. формуле

$$\exists x (a < x \& x < b) \rightarrow a' < b.$$

Таким образом, в результате присоединения к аксиомам формулы

$$a < c \& c < b \rightarrow a' < b$$

формулы ((10)) становятся выводимыми.

Итог проведенного нами обсуждения состоит в том, что для вывода эквивалентностей ((1)) — ((10)) к нашим аксиомам достаточно добавить следующие формулы:

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

$$a < b \rightarrow a' < b',$$

$$0 = a \vee 0 < a,$$

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a),$$

$$a < c \& c < b \rightarrow a' < b.$$

Полученная таким образом система аксиом допускает дальнейшие существенные упрощения.

Прежде всего, формулы (P_1) и (P_2) оказываются теперь излишними. Именно, из второй аксиомы равенства (J_2) и из формулы ($<_1$) мы получаем формулы

$$a < b \rightarrow a \neq b,$$

$$a < b \rightarrow b \neq a$$

(это уже было неоднократно использовано в предшествующих выводах); из них и из формул

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

$$a < b \rightarrow a' < b'$$

получается

$$a \neq b \rightarrow a' \neq b',$$

а отсюда

$$a' = b' \rightarrow a = b.$$

Кроме того, формула

$$0 = a \vee 0 < a$$

в сочетании с (J_2), ($<_2$) и ($<_3$) дает формулу

$$0 < a',$$

которая вместе с

$$a < b \rightarrow b \neq a$$

позволяет нам получить формулу

$$a' \neq 0$$

Затем формула

$$a < b \rightarrow a' < b'$$

может быть выведена из $(<_3)$ и из формулы

$$a < c \ \& \ c < b \rightarrow a' < b,$$

которые в результате подстановки дают формулы

$$b < b'$$

и

$$a < b \ \& \ b < b' \rightarrow a' < b'.$$

Формулу (J_1) мы также можем вывести из формул $(<_1)$ и

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a.$$

Таким образом, из списка наших аксиом мы можем вычеркнуть четыре формулы, так что в нем останутся только следующие формулы:

$$(J_2), \ (<_1), \ (<_2), \ (<_3),$$

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

$$0 = a \vee 0 < a,$$

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a),$$

$$a < c \ \& \ c < b \rightarrow a' < b.$$

Эту систему формул можно подвергнуть дальнейшим упрощениям. Именно, формула

$$0 = a \vee 0 < a$$

с учетом выводимых из (J_2) , $(<_1)$ и $(<_2)$ формул

$$a = b \rightarrow \neg (b < a),$$

$$a < b \rightarrow \neg (b < a)$$

и формулы

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

дедуктивно равна более простой формуле

$$\neg (a < 0).$$

Кроме того, рассмотрим формулу

$$a < c \ \& \ c < b \rightarrow a' < b.$$

Из нее подстановками можно получить формулу

$$a < b \ \& \ b < a' \rightarrow a' < a'.$$

а отсюда с использованием формулы

$$\neg (a < a)$$

получается формула

$$a < b \rightarrow \neg (b < a').$$

И обратно, из последней формулы можно получить формулу

$$a < c \ \& \ c < b \rightarrow a' < b.$$

В самом деле, формула

$$a < b \rightarrow \neg (b < a')$$

в сочетании с выводимой из

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

формулой

$$\neg (b < a') \rightarrow a' = b \vee a' < b$$

дает

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b.$$

Подставив в нее c вместо b и используя формулы (J_2) и $(<_2)$, мы получим формулу

$$a < c \ \& \ c < b \rightarrow a' < b.$$

Таким образом, эта формула может быть заменена более простой формулой

$$a < b \rightarrow \neg (b < a').$$

Далее, формула

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a)$$

с помощью остальных наших формул переводима в

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a).$$

В самом деле, формула

$$0' < a \rightarrow \exists x (x' = a)$$

переводима в формулу

$$0' = a \vee 0' < a \rightarrow \exists x (x' = a).$$

Таким образом, нам достаточно будет установить, что формула

$$0' = a \vee 0' < a$$

переводима в формулу

$$a \neq 0,$$

т. е. что выводимы две импликации:

$$0' = a \vee 0' < a \rightarrow a \neq 0$$

и

$$a \neq 0 \rightarrow 0' = a \vee 0' < a.$$

В самом деле, первая из этих двух формул получается с использованием формул

$$(J_2), 0' \neq 0 \text{ и } \neg(a < 0)$$

а вторая — с использованием формул

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

$$\neg(a < 0),$$

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b.$$

Наконец, формула $(<_1)$ может быть выведена из формул $(<_3)$ и

$$a < b \rightarrow \neg(b < a').$$

Действительно, из последней формулы подстановкой и контрапозицией получается

$$a < a' \rightarrow \neg(a < a).$$

Таким образом, мы пришли к следующей системе аксиом, состоящей из семи формул:

$$(A) \quad \begin{cases} a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \\ a < b \& b < c \rightarrow a < c, \\ a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a, \\ \quad \quad \quad a < a', \\ a < b \rightarrow \neg(b < a'), \\ \quad \quad \quad \neg(a < 0), \\ a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a). \end{cases}$$

Позже ¹⁾ мы покажем, что эти аксиомы независимы друг от друга.

4. Полнота системы (A). Проведенное нами рассмотрение показывает, что если за основу взять приведенную здесь систему аксиом (A), то всякая формула, не содержащая формульных переменных, будет дедуктивно равна своей редукции. Вследствие этого всякая верифицируемая формула будет выводима.

Мы должны убедиться еще и в том, что для предложенной нами новой системы аксиом остается в силе теорема о верифицируемости всякой выводимой формулы, не содержащей формульных пере-

¹⁾ См. с. 340—347.

менных. Для этого, как уже упоминалось, достаточно показать, что все вновь присоединенные аксиомы являются верифицируемыми. Верифицируемость формул

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

$$a < b \rightarrow \neg(b < a'),$$

$$\neg(a < 0)$$

усматривается немедленно, а для формулы

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

она получается из того, что редукцией этой формулы является формула

$$a \neq 0 \rightarrow 0' = a \vee 0' < a.$$

Таким образом, мы убеждаемся, что если взять за основу рассмотренную нами систему аксиом (A), то совокупность выводимых формул, не содержащих формульных переменных, будет совпадать с совокупностью верифицируемых формул.

Подведем итоги. Прежде всего, нами получена следующая Теорема о полноте: Для каждой формулы $\mathfrak{A}$, построенной из имеющихся в нашем распоряжении символов и не содержащей формульных и свободных индивидуальных переменных, имеет место альтернатива, заключающаяся в том, что с помощью исчисления предикатов из наших аксиом (A) выводима либо $\mathfrak{A}$, либо $\neg \mathfrak{A}$, причем мы всегда можем решить вопрос о том, какой именно из этих двух случаев имеет место. В самом деле, редукция $\mathfrak{R}$ такой формулы $\mathfrak{A}$ является нумерической формулой и поэтому она либо истинна, либо ложна. Тем самым одна из формул $\mathfrak{A}$ и $\neg \mathfrak{A}$ верифицируема. Формулу $\mathfrak{R}$ мы находим по заданной формуле $\mathfrak{A}$ с помощью имеющейся у нас процедуры редукции. Та из формул $\mathfrak{R}$ и $\neg \mathfrak{R}$, которая является истинной, является также и выводимой. Далее, каждому шагу выполнения процедуры редукции соответствует определенная переводимость с помощью аксиом системы (A), и это нам дает вывод формулы $\mathfrak{A}$ из формулы $\mathfrak{R}$ или соответственно формулы $\neg \mathfrak{A}$ из формулы $\neg \mathfrak{R}$.

Приведем еще одно

Следствие: Если для каждой цифры z оказывается выводимой формула $\mathfrak{A}(z)$, не содержащая формульных переменных, то выводимой будет также формула $\mathfrak{A}(a)$, а вместе с ней и $\forall x \mathfrak{A}(x)$. В самом деле, пусть $\mathfrak{R}(a)$ — редукция $\mathfrak{A}(a)$; тогда для каждой цифры z $\mathfrak{R}(z)$ является редукцией $\mathfrak{A}(z)$. Так как формула $\mathfrak{A}(z)$ по предположению выводима, то она верифицируема. Значит, $\mathfrak{R}(z)$ при каждой замене встречающихся в ней свободных индивидуальных переменных цифрами переходит в истинную формулу. Так как это имеет место для любой цифры z , то формула $\mathfrak{R}(a)$, а потому

и $\mathfrak{A}(a)$, верифицируема; следовательно, формула $\mathfrak{A}(a)$ является также и выводимой.

Поскольку выводимость формулы совпадает с ее верифицируемостью, из указанного следствия получается, что формула $\forall x \mathfrak{A}(x)$, не содержащая формульных переменных, верифицируема тогда и только тогда, когда формула $\mathfrak{A}(z)$ верифицируема для любой цифры z .

Аналогичный факт, касающийся формул $\exists x \mathfrak{A}(x)$, если ограничиться формулами без свободных переменных, представляет собой частный случай теоремы о частичной редукции. Он состоит в том, что всякая формула $\exists x \mathfrak{A}(x)$, не содержащая формульных и свободных индивидуальных переменных, верифицируема тогда и только тогда, когда для некоторой конкретной цифры z верифицируема формула $\mathfrak{A}(z)$, причем в случае верифицируемости $\exists x \mathfrak{A}(x)$ такая цифра z находится с помощью процесса редукции этой формулы.

Если мы теперь объединим оба эти факта, касающиеся формул $\forall x \mathfrak{A}(x)$ и $\exists x \mathfrak{A}(x)$, и примем во внимание совпадение выводимости с верифицируемостью, то получим теорему о том, что для формул, не содержащих свободных переменных и записанных в предваренной нормальной форме, выводимость совпадает с содержательной финитной интерпретируемостью, так что, например, формула

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \mathfrak{A}(x, y, z, u),$$

у которой $\mathfrak{A}(x, y, z, u)$ не содержит никаких переменных, кроме x, y, z и u , выводима тогда и только тогда, когда для каждой данной цифры z_1 мы можем указать такую цифру z_2 , что для каждой цифры z_3 можно указать цифру z_4 , для которой нумерическая формула

$$\mathfrak{A}(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

будет истинной.

В таком положении вещей находит отчетливое выражение то обстоятельство, что в области, определяемой посредством аксиом (A), имеет место полная согласованность между формализмом и содержательной точкой зрения.

§ 5. Включение полной индукции

1. Формализация принципа полной индукции с помощью формул и с помощью схемы; равносильность обеих формализаций; инвариантность запаса выводимых формул без формульных переменных относительно добавления к системе схемы индукции. Замечательным следствием полученных результатов является также тот факт, что если рассматривать лишь формулы без фор-

мульных переменных, то присоединение принципа полной индукции не может расширить совокупности выводимых формул.

С принципом полной индукции как вспомогательным средством для проведения рассуждений мы познакомились уже при рассмотрении финитной арифметики ¹⁾. Если согласовать его с нашим новым понятием цифры, то он будет выражать тот факт, что любое высказывание финитного характера, выполняющееся для 0 и такое, что если оно выполняется для какой-нибудь цифры n , то будет выполняться и для n' , выполняется для любой цифры.

Вместо этого разумного принципа, основывающегося на наглядном по своему характеру построении цифр, при аксиоматическом изложении арифметики появляется некая аксиома, которая выражается предложением, аналогичным предложению, выражающему этот принцип, но с той разницей, что в ней речь идет не о цифрах, а об элементах некоторой индивидуальной области, и не о финитных высказываниях, а о высказываниях рассматриваемой нами теории.

От аксиоматической версии этого принципа мы теперь можем перейти к его формализации; она может быть произведена, с одной стороны, посредством некоторой формулы, а с другой стороны, посредством некоторой схемы. Эта формула, а к с и о м а и н д у к ц и и, записывается в виде

$$A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a).$$

Что же касается с х е м ы и н д у к ц и и, то она имеет вид

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \quad \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)}.$$

Эта схема (подобно схемам нашего исчисления предикатов) должна применяться при условии, что переменная a в $\mathfrak{A}(a)$ встречается только там, где она указана в качестве аргумента.

В том, что это ограничение необходимо, можно убедиться на простых примерах. Если мы, например, возьмем в качестве $\mathfrak{A}(c)$ формулу

$$c = 0 \vee a' = c,$$

то соответствующие формулы

$$\mathfrak{A}(0) \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a'),$$

т. е.

$$0 = 0 \vee a' = 0$$

и

$$a = 0 \vee a' = a \rightarrow a' = 0 \vee a' = a',$$

¹⁾ См. гл. II, с. 49.

будут выводимыми. Если бы мы допустили применение схемы индукции к этим формулам, то в результате получили бы формулу

$$a = 0 \vee a' = a,$$

а из нее подстановкой — формулу

$$0' = 0 \vee 0'' = 0',$$

которая в сочетании с выводимыми формулами

$$0' \neq 0 \text{ и } 0'' \neq 0'$$

привела бы нас к противоречию.

Оба способа формализации принципа полной индукции равносильны в том смысле, что схема индукции может быть получена из аксиомы индукции в качестве производного правила, а с другой стороны, аксиома индукции тоже может быть выведена с помощью схемы индукции.

Именно, подстановкой формулы $\mathfrak{A}(c)$ вместо именной формы $A(c)$ мы из аксиомы индукции получаем формулу

$$\mathfrak{A}(0) \& \forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x')) \rightarrow \mathfrak{A}(a).$$

Если переменная a встречается в формуле $\mathfrak{A}(a)$ только там, где она указана в качестве аргумента, т. е. если в $\mathfrak{A}(c)$ переменная a не встречается, то из формулы

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$$

мы по правилу $(\gamma')^1$ получим формулу

$$\forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x'));$$

эта формула вместе с

$$\mathfrak{A}(0)$$

по правилам исчисления высказываний дает формулу

$$\mathfrak{A}(0) \& \forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x')),$$

а эта последняя в сочетании с формулой

$$\mathfrak{A}(0) \& \forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x')) \rightarrow \mathfrak{A}(a)$$

дает формулу

$$\mathfrak{A}(a).$$

Таким образом, от формул

$$\mathfrak{A}(0) \text{ и } \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$$

мы с помощью аксиомы индукции приходим к формуле

$$\mathfrak{A}(a).$$

¹⁾ См. с. 146.

И обратно, если мы в качестве правила возьмем схему индукции, то формула

$$A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a)$$

окажется выводимой. Действительно, обозначим для краткости эту формулу посредством $\mathfrak{A}(a)$. Тогда, на основании схемы индукции, для вывода $\mathfrak{A}(a)$ достаточно будет вывести формулы

$$\mathfrak{A}(0) \text{ и } \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a'),$$

т. е.

$$A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(0)$$

и

$$\{A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a)\} \rightarrow \{A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a')\}.$$

Первая из этих двух формул получается непосредственной подстановкой из тождественной формулы

$$A \& B \rightarrow A,$$

а вторая с использованием тождественной формулы

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((D \& A \rightarrow B) \rightarrow (D \& A \rightarrow C))$$

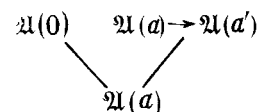
может быть получена из формулы

$$\forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow (A(a) \rightarrow A(a')),$$

которая в свою очередь получается подстановкой из основной формулы (а) исчисления предикатов.

Мы теперь покажем, что присоединение схемы индукции к нашей системе аксиом (А) не расширяет запаса выводимых формул, не содержащих формульных переменных, так что любая неverified формула, не содержащая формульных переменных, будет невыводимой и после присоединения схемы индукции.

Представим себе, что нам дан вывод формулы $\mathfrak{A}$, произведенный на основе исчисления предикатов с помощью аксиом (А) и с привлечением схемы индукции. Предположим, что формула $\mathfrak{A}$ не содержит формульных переменных. Тогда мы сможем, пользуясь нашей прежней методикой, разложить это доказательство на нити, поступая со схемой индукции аналогично тому, как мы поступали со схемой заключения, т. е. сопоставляя каждой такой схеме фигуру вида



При этом следует заметить, что переменная a в третьей формуле схемы *не связана* с переменной a во второй формуле; то, что для этих двух формул схемы индукции мы берем одну и ту же переменную a , представляет собой некоторое соглашение, само по себе не необходимое.

Таким образом, нижняя (третья) формула схемы индукции вводит некоторую новую свободную индивидуальную переменную, в то время как раньше по нашим правилам свободные переменные вводились только исходными формулами. Отсюда следует, что в случае фигуры доказательства с встречающимися в ней схемами индукции возвратный перенос подстановок может вести не только к исходным формулам, но и к нижним формулам каких-либо схем индукции. Такого рода формула $\mathfrak{U}(a)$ тогда перейдет в $\mathfrak{U}(t)$ с каким-нибудь термом t .

Теперь для того, чтобы в рассматриваемом выводе формулы $\mathfrak{F}$ произвести возвратный перенос подстановок, мы, во-первых, должны будем ввиду наличия схем (α) и (β) исчисления предикатов осуществить обсуждавшиеся ранее ¹⁾ меры предосторожности, которые состоят в том, что в случае каждой такой схемы переменная a заменяется какой-нибудь новой переменной, которая прежде в фигуре разложения не встречалась. Очередность этих замен следует устанавливать в соответствии с обратным просмотром фигуры разложения и замену встречающейся в каждой такой схеме переменной a следует проводить до тех пор, пока рассматриваемое вхождение переменной будет прослеживаться в соответствии с зависимостью формул в выводе.

Необходимость этого мероприятия вытекает из ограничения, которое налагается на применение схем (α) и (β) . Аналогичное ограничение действует и в случае применения схемы индукции, и поэтому мы должны осуществлять упомянутое мероприятие применительно и к этой схеме, заменяя всякий раз переменную a в формуле

$$\mathfrak{U}(a) \rightarrow \mathfrak{U}(a')$$

какой-нибудь новой, ранее не встречавшейся переменной и продолжая эту замену в обратном направлении.

В остальном мы, как и раньше, перенесем подстановки назад, а затем исключим быть может еще оставшиеся формульные переменные. Все эти преобразования не затрагивают заключительной формулы $\mathfrak{F}$, так как она формульных переменных не содержит.

В получившейся таким образом фигуре разложения мы рассмотрим теперь одно из тех применений схемы индукции (соответственно тех фигур, получающихся из них в результате проведенных модификаций), которым при просмотре нитей доказа-

¹⁾ См. с. 286.

тельства в направлении от исходных формул (т. е. в направлении развертывания вывода) не предшествует никакое другое применение схемы индукции. Пусть формулы этой схемы в первоначальном выводе имели вид

$$\mathfrak{B}(0), \quad \mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a'), \quad \mathfrak{B}(a),$$

а в результате выполненных преобразований на их месте оказались формулы

$$\mathfrak{B}^*(0), \quad \mathfrak{B}^*(r) \rightarrow \mathfrak{B}^*(r'), \quad \mathfrak{B}^*(f).$$

При этом f — какой-нибудь терм, а относительно переменной r мы гарантированы (в результате принятых нами мер), что в $\mathfrak{B}^*(r)$ она встречается только там, где она указана в качестве аргумента. Кроме того, мы знаем, что $\mathfrak{B}^*(r)$ не содержит никаких формульных переменных.

Нити доказательства, ведущие от исходных формул к формулам

$$\mathfrak{B}^*(0), \quad \mathfrak{B}^*(r) \rightarrow \mathfrak{B}^*(r),$$

не содержат применений схемы индукции, поэтому они дают вывод обеих этих формул, использующий только аксиомы (A). Пусть теперь z — какая-либо цифра; тогда из формул

$$\mathfrak{B}^*(0), \quad \mathfrak{B}^*(r) \rightarrow \mathfrak{B}^*(r')$$

путем подстановок и повторного применения схемы заключения можно будет вывести

$$\mathfrak{B}^*(z).$$

Таким образом, для любой цифры z формула $\mathfrak{B}^*(z)$ оказывается выводимой из системы аксиом (A). Кроме того, эта формула не содержит формульных переменных. Следовательно, по одному из наших утверждений о системе аксиом (A) ¹⁾, формула

$$\forall x \mathfrak{B}^*(x),$$

а значит, и формула

$$\mathfrak{B}^*(f)$$

тоже могут быть выведены из системы аксиом (A) без использования схемы индукции.

Если мы теперь для какого-нибудь такого вывода формулы $\mathfrak{B}^*(f)$ осуществим разложение его на нити, возвратный перенос подстановок и исключение формульных переменных, то полученную таким образом не содержащую схем индукции фигуру разложения с заключительной формулой $\mathfrak{B}^*(f)$ мы сможем подставить вместо всех тех нитей нашей первоначальной фигуры разложения, которые ведут от исходных формул к формуле $\mathfrak{B}^*(f)$.

¹⁾ См. с. 323.

Таким образом, в результате получится некоторое новое разложение на нити доказательство формулы $\mathfrak{F}$, в фигуре разложения которого схема индукции встречается на один раз меньше, чем в первоначальной фигуре разложения.

Мы можем повторить использованный нами прием нужное число раз и таким образом устранить друг за другом все применения схемы индукции, так что в конце концов мы придем к некоторому доказательству формулы $\mathfrak{F}$, проведенному без использования схем индукции, с помощью одних лишь аксиом (A).

Тем самым мы фактически показали, что в результате присоединения схемы индукции к системе аксиом (A) выводимыми оказываются только те формулы без формульных переменных, которые можно было вывести и без использования этой схемы. В точности то же самое справедливо и в отношении аксиомы индукции, так как она выводима с помощью схемы индукции и, следовательно, не может дать больше, чем сама эта схема.

Из этого результата мы можем, в частности, сделать вывод о непротиворечивости системы, которая получится, если к системе (A) присоединить аксиому или схему индукции.

2. Упрощение рассматриваемой системы аксиом в результате добавления аксиомы индукции; система (B). При рассмотрении этой системы мы замечаем, что формулы

$$\neg (a < 0)$$

и

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

являются в ней излишними. Действительно, в результате контрапозиции и подстановки из формулы

$$a < b \rightarrow \neg (b < a')$$

мы получим формулу

$$0 < a' \rightarrow \neg (a' < 0).$$

Таким образом, для того чтобы получить формулу

$$\neg (a < 0),$$

нам достаточно вывести формулу

$$0 < a'.$$

Однако это легко может быть сделано с помощью схемы индукции, если воспользоваться формулами

$$a < a'$$

и

$$a < b \ \& \ b < c \rightarrow a' < c.$$

В процессе этого вывода формула

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

не использовалась. Поэтому для вывода этой формулы мы можем теперь воспользоваться формулой

$$\neg (a < 0),$$

а значит, и

$$\neg (0 < 0).$$

Из этой формулы в сочетании с

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

мы прежде всего получим

$$0 = 0,$$

а отсюда, с помощью исчисления высказываний,

$$0 \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = 0).$$

Таким образом, если формулу

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a),$$

доказательство которой мы хотим получить, обозначить для краткости посредством $\mathfrak{A}(a)$, то формула $\mathfrak{A}(0)$ оказывается уже полученной. Поэтому, в соответствии со схемой индукции, для вывода $\mathfrak{A}(a)$ нам достаточно будет вывести формулу

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a'),$$

а для этого достаточно вывести формулу

$$a' \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a').$$

Но эта формула получается средствами исчисления предикатов из формулы

$$a = a,$$

которая выводится из формул

$$a < a',$$

$$a < b \rightarrow \neg (b < a'),$$

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a.$$

Таким образом, в результате присоединения аксиомы индукции обе формулы

$$\neg (a < 0) \text{ и } a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

оказываются ненужными.

Имеют место еще и следующие соотношения. Как мы знаем, из формул

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

и

$$a < b \rightarrow \neg (b < a')$$

может быть выведена формула

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b.$$

Обратно, из этой последней в сочетании с аксиомой равенства (J_2) и формулами ($<_1$), ($<_2$) можно снова получить формулу

$$a < b \rightarrow \neg (b < a').$$

Но, кроме того, теперь имеется возможность воспользоваться аксиомой (или схемой) индукции и вывести формулу

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

из формул (J_2), ($<_2$), ($<_3$) и формул

$$0 = 0 \text{ и } a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b.$$

Действительно, сначала рассматриваемая формула элементарным образом может быть преобразована в формулу

$$a = b \vee a < b \vee b < a.$$

Затем, чтобы с помощью схемы индукции вывести эту формулу, которую мы обозначим посредством $\mathfrak{A}(a)$, достаточно будет вывести $\mathfrak{A}(0)$ и $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$. Формулу $\mathfrak{A}(0)$, т. е.

$$0 = b \vee 0 < b \vee b < 0,$$

можно получить из формулы

$$0 = a \vee 0 < a,$$

которая в свою очередь с помощью схемы индукции получается из формул

$$0 = 0, \quad (<_2) \text{ и } (<_3)$$

(с использованием уже упоминавшегося вывода формулы $0 < a'$). Формула же $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$ получается из формул

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

$$a = b \rightarrow b < a',$$

$$b < a \rightarrow b < a',$$

первая из которых была взята нами в качестве исходной, а две другие могут быть получены из формул

$$a < a',$$

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$$

$$a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c.$$

Между прочим, все эти выводы производятся без использования связанных переменных.

Основываясь на установленных соотношениях, мы сначала можем убрать из системы (A), расширенной путем присоединения аксиомы индукции, обе оказавшиеся ненужными формулы, а затем формулы

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

$$a < b \rightarrow \neg (b < a')$$

можно будет заменить формулами

$$0 = 0,$$

$$\neg (a < a'),$$

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

которых, правда, по количеству больше, но они выражают все таки более слабые допущения, постольку поскольку переход от предыдущих двух формул к этим трем может быть непосредственно произведен с помощью формулы ($<_3$) путем подстановок и использования средств исчисления высказываний, в то время как при обратном переходе для вывода формулы

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

кроме формул (J_2), ($<_2$) и ($<_3$) требуется по существу использовать аксиому или схему индукции.

Теперь возникает вопрос о том, нельзя ли будет сэкономить еще на чем-нибудь, если снова вместо формулы $0 = 0$ взять аксиому (J_1). Тогда в качестве аксиом у нас окажутся формулы ($<_1$), ($<_2$), ($<_3$), аксиомы равенства (J_1) и (J_2), формула

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b$$

и аксиома индукции.

Как это впервые установил Хазенъяегер¹⁾, формулу, приведенную здесь в качестве предпоследней аксиомы, можно

¹⁾ Hasenjaeger G. Ein Beitrag zur Ordnungstheorie.— Arch. math. Logik Grundlagenforschung, 1950, 1, № 1, S. 30—31. В первом издании нашей книги вопрос о выводимости формулы $a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b$ из остальных сформулированных здесь аксиом был только поставлен, но не был решен.

будет вывести из остальных аксиом. Этот вывод может быть произведен следующим образом.

Обозначим посредством $\mathfrak{R}(b)$ формулу

$$\forall x (x < b \rightarrow x' = b \vee x' < b).$$

Она дедуктивно равна той формуле, которую мы хотим получить. $\mathfrak{R}(0)$ получается из формулы $\neg(a < 0)$, которая с помощью схемы индукции выводится из формул $(<_1)$, $(<_2)$ и $(<_3)$. Поэтому для того, чтобы с помощью схемы индукции получить $\mathfrak{R}(b)$, достаточно будет вывести формулу $\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{R}(b')$ (а тем самым и $\mathfrak{R}(a) \rightarrow \mathfrak{R}(a')$).

С этой целью мы сначала выведем, используя схему индукции, формулу

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow (a < b' \rightarrow a = b \vee a < b),$$

правую часть которой обозначим для краткости посредством $\mathfrak{U}(a, b)$. Формулу

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(0, b)$$

мы получим из формулы

$$0 = b \vee 0 < b,$$

выводимой с помощью схемы индукции из формул $0 = 0$ и $0 < a'$ ($0 < a'$ получается индукцией с помощью $(<_3)$ и $(<_2)$). Что же касается формулы

$$(\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(a, b)) \rightarrow (\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(a', b)),$$

то она получается следующим образом. С помощью $(<_3)$ и $(<_2)$ мы получаем

$$a' < b' \rightarrow a < b',$$

с помощью (J_2) и $(<_1)$ —

$$a' < b' \rightarrow a \neq b.$$

Полученные две формулы друг с другом дают

$$a' < b' \& (a < b' \rightarrow a = b \vee a < b) \rightarrow a < b,$$

т. е.

$$a' < b' \& \mathfrak{U}(a, b) \rightarrow a < b.$$

Далее, с помощью исчисления предикатов непосредственно получается

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow (a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b).$$

Полученные две формулы друг с другом дают

$$\mathfrak{R}(b) \& \mathfrak{U}(a, b) \& a' < b' \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

откуда с помощью исчисления высказываний получаем

$$(\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(a, b)) \& \mathfrak{R}(b) \rightarrow (a' < b' \rightarrow a' = b \vee a' < b),$$

а тем самым и

$$(\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(a, b)) \rightarrow (\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(a', b)).$$

Итак, мы получили в наше распоряжение формулу

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{U}(a, b),$$

т. е.

$$[1] \quad \mathfrak{R}(b) \rightarrow (a < b' \rightarrow a = b \vee a < b).$$

С другой стороны, из уже использованной формулы

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow (a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b)$$

с помощью (J_2) , $(<_2)$ и $(<_3)$ мы получаем формулу

$$[2] \quad \mathfrak{R}(b) \rightarrow (a < b \rightarrow a' < b').$$

Формулы [1] и [2] совместно с получающейся из (J_2) и (J_1) формулой

$$a = b \rightarrow (a' = b')$$

с помощью исчисления высказываний дают формулу

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow (a < b' \rightarrow a' = b' \vee a' < b')$$

и далее (так как переменная a не входит в $\mathfrak{R}(b)$) формулу

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow \forall x (x < b' \rightarrow x' = b' \vee x' < b'),$$

т. е.

$$\mathfrak{R}(b) \rightarrow \mathfrak{R}(b').$$

Далее, по схеме индукции получается формула $\mathfrak{R}(b)$, а вместе с тем и формула

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

выводимость которой требовалось доказать.

Итак, система аксиом, получающаяся из системы (A) добавлением аксиомы индукции, равносильна следующей системе аксиом:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a, \\ a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \\ \neg(a < a), \\ a < b \& b < c \rightarrow a < c, \\ a < a', \\ A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a). \end{array} \right.$$

На эту систему аксиом без труда переносятся ранее доказанные нами общие теоремы ¹⁾. Таким образом, опять будет иметь место утверждение о том, что любая построенная из имеющихся в нашем распоряжении символов формула, не содержащая формульных переменных, выводима из аксиом системы (B) тогда и только тогда, когда она верифицируема, и что вследствие этого для любой формулы, не содержащей никаких свободных переменных, имеет место выводимость либо самой этой формулы, либо её отрицания.

§ 6. Доказательства независимости

1. Невыводимость аксиомы индукции из формул системы (A). В приведенных выше утверждениях всегда речь идет о формулах, не содержащих формульных переменных. С точки зрения выводимости таких формул системы (A) и (B), как мы показали, являются равносильными. Но эта равносильность немедленно перестает иметь место, как только мы допустим к рассмотрению формулы, в которых содержатся формульные переменные. В самом деле, уже *аксиома индукции не выводима средствами системы (A)*.

Для того чтобы доказать это, мы расширим систему (A), присоединив к ней предикатный символ $Z(a)$, а также аксиомы

$$Z(0)$$

и

$$Z(a) \rightarrow Z(a').$$

Расширенную таким образом систему мы обозначим символом (A*). Если предположить, что в системе (A) выводима аксиома индукции, то в системе (A*) должна оказаться выводимой формула

$$Z(a),$$

так как она получается из формул

$$Z(0) \text{ и } Z(a) \rightarrow Z(a')$$

по схеме индукции, а тем самым и с помощью аксиомы индукции. И тем не менее мы покажем, что формула $Z(a)$ не может быть выведена средствами системы (A*).

Это может быть проделано с помощью уже применявшегося однажды метода видоизменения понятия верифицируемости посредством обобщения понятий *нумеричности*, *истинности*, *ложности* и модификации процедуры редукции.

Для расширения запаса цифр мы прежде всего введем символ ω и все фигуры, которые получаются из ω путем присоединения правого нижнего индекса в виде одной или нескольких звездочек,

¹⁾ См. с. 323.

например, ω_* , ω_{***} . Для любого числа p символом ω_p мы будем обозначать фигуру, получающуюся из ω в результате присоединения p звездочек; ω_0 будет обозначать ω . В качестве цифр второго рода мы возьмем теперь фигуры ω_p , а также те фигуры $\omega_p^{(f)}$, которые получаются из них в результате однократного или многократного навешивания символа штриха. Нумерическими мы назовем такие формулы, которые либо являются равенствами или неравенствами, составленными из цифр, либо являются формулами вида $Z(a)$ с какой-либо цифрой a , либо оказываются построенными из формул этого рода с помощью связок исчисления высказываний. К прежним пунктам определения истинности и ложности мы добавим следующие новые. Любая формула вида

$$0^{(f)} < \omega_p^{(l)}$$

истинна. Формулы вида

$$\omega_p^{(f)} < 0^{(l)}, \quad 0^{(f)} = \omega_p^{(l)} \text{ и } \omega_p^{(f)} = 0^{(l)}$$

ложны. Формула

$$\omega_p^{(f)} = \omega_q^{(l)}$$

истинна, если число $f + q$ совпадает с $l + p$, и ложна в противном случае.

$$Z(0^f)$$

всегда истинна,

$$Z(\omega_p^{(f)})$$

всегда ложна. Для произвольных нумерических формул истинностные значения получаются на основе этих, а также прежних пунктов определения.

В качестве следствия из этого определения истинностных значений отметим, что для всякой цифры второго рода $\omega_p^{(f)}$ и для произвольного числа t всегда можно указать такую цифру второго рода a , для которой будет истинным равенство

$$a^{(t)} = \omega_p^{(f)}.$$

Действительно, такой цифрой является $\omega_{p+t}^{(f)}$.

Теперь, чтобы процедуру построения редукции формулы без формульных переменных привести в соответствие с только что сформулированным определением истинностных значений нумери-

ческих формул, в обычной процедуре редукции нужно будет произвести лишь следующую модификацию:

1. В четвертом преобразовании из числа тех, которым мы подвергаем выражение $\mathfrak{U}(x)$ [при устранении квантора существования в какой-либо из самых внутренних составных частей вида $\exists x \mathfrak{U}(x)$], каждый входящий в $\mathfrak{U}(x)$ член $Z(x^{(t)})$, где t меньше, чем максимальное число t навешенных на x штрихов, мы заменим посредством $Z(x^{(t)})$ и в соответствии с этим $\neg Z(x^{(t)})$ заменим посредством $\neg Z(x^{(t)})$. Если в результате этого несколько членов конъюнкции или дизъюнкции окажутся совпадающими, то возникшие при этом повторения мы удалим.

2. При рассмотрении членов

$$\exists x \mathfrak{G}_r(x^{(t)}),$$

в которых $\mathfrak{G}_r(x^{(t)})$ не содержит в качестве конъюнктивного члена никакого равенства

$$x^{(t)} = a,$$

после вынесения из-под квантора существования членов, не содержащих x , для оставшегося выражения

$$\exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$$

мы должны будем различать следующие случаи:

а) В конъюнкцию $\mathfrak{R}(x^{(t)})$ входят одни только неравенства; в этом случае мы поступим прежним образом.

б) В конъюнкцию $\mathfrak{R}(x^{(t)})$ в качестве члена входят как $Z(x^{(t)})$, так и $\neg Z(x^{(t)})$; в этом случае выражение $\exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$ мы заменим формулой $0 \neq 0$.

в) Выражение $\exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$ имеет вид

$$\exists x Z(x^{(t)}) \text{ или } \exists x \neg Z(x^{(t)});$$

в этом случае мы заменим его равенством $0 = 0$.

г) $\mathfrak{R}(x^{(t)})$ имеет один из следующих двух видов:

$$Z(x^{(t)}) \& \mathfrak{R}^*(x^{(t)}),$$

$$\neg Z(x^{(t)}) \& \mathfrak{R}^*(x^{(t)}),$$

где $\mathfrak{R}^*(x^{(t)})$ представляет собой конъюнкцию неравенств

$$a_1 < x^{(t)} \& \dots \& a_f < x^{(t)} \& x^{(t)} < b_1 \& \dots \& x^{(t)} < b_g.$$

Тогда мы прежде всего заменим

$$\exists x (Z(x^{(t)}) \& \mathfrak{R}^*(x^{(t)}))$$

конъюнкцией

$$Z(a_1) \& \dots \& Z(a_f) \& \exists x \mathfrak{R}(x^{(t)}),$$

а

$$\exists x (\neg Z(x^{(t)}) \& \mathfrak{R}^*(x^{(t)}))$$

соответственно конъюнкцией

$$\neg Z(b_1) \& \dots \& \neg Z(b_g) \& \exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$$

и после этого заменим $\exists x \mathfrak{R}(x^{(t)})$ так же, как и раньше, причем в последнем из упомянутых случаев, когда имеется конъюнктивный член $\neg Z(x^{(t)})$, члены

$$0^{(t)} < b_1 \& \dots \& 0^{(t)} < b_g$$

могут быть опущены.

Для этой процедуры редукции снова можно будет доказать обе прежние леммы и с их помощью доказать теорему об однозначности и теорему о частичной редукции¹⁾. Кроме того, мы можем дословно перенести наше прежнее определение понятия *верифицируемости*, причем под *цифрами* теперь надо будет понимать цифры первого и второго рода.

С помощью элементарных рассуждений о числах теперь легко будет убедиться, что в соответствии с этим определением все аксиомы системы (A*), за исключением (J₂), являются верифицируемыми. Для аксиомы (J₂) также можно будет, аналогично предыдущему²⁾, показать, что всякая формула без формульных переменных, получающаяся из нее в результате подстановки, является верифицируемой. При этом возникнет некоторое расхождение с прежним рассуждением (как, впрочем, уже и в доказательствах теорем о редукции), поскольку из истинности численного равенства $a = b$ теперь нельзя будет сделать вывод о совпадении a с b , а вместо этого нужно будет пользоваться теоремой о том, что если a и b суть цифры, для которых $a = b$ истинно, а c — произвольная цифра, то формулы

$$a = c, c = a, a < c, c < a$$

соответственно имеют те же самые истинностные значения, что и формулы

$$b = c, c = b, b < c, c < b.$$

Опираясь на эти утверждения об аксиомах, с помощью теоремы о частичной редукции можно будет показать, что всякая формула,

¹⁾ См. с. 300.

²⁾ См. с. 302.

выводимая из системы (A*) и не содержащая формульных переменных, является верифицируемой ¹⁾.

По отсюда следует, что формула $Z(a)$ не может быть выведена из системы (A*), так как она не верифицируема. Действительно, если мы заменим в ней переменную a цифрой ω , то она перейдет в ложную формулу $Z(\omega)$.

Тем самым невыводимость аксиомы индукции из системы (A) установлена.

В качестве следствия мы можем получить отсюда и независимость аксиомы индукции от остальных аксиом системы (B); действительно, все эти аксиомы, как мы знаем, выводимы из системы (A).

2. Доказательства независимости с помощью метода подстановок. После этого мы для обеих систем (A) и (B) установим независимость входящих в их состав аксиом. Для большей части аксиом доказательство нам удастся провести с помощью одного очень простого приема, основанного на следующем соображении.

Пусть в рамках нашего формализма дан вывод какой-либо формулы $\mathcal{A}$ из определенных аксиом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$, осуществленный при помощи исчисления предикатов. Пусть, далее, $\mathcal{G}(a, b)$ — некоторая формула нашего формализма, не содержащая переменных, отличных от a и b . Заменим в рассматриваемом выводе всякое равенство $a = b$ формулой $\mathcal{G}(a, b)$ и обозначим посредством $\mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_r^*, \mathcal{A}^*$ формулы, которые в результате этой замены получатся из формул $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r, \mathcal{A}$. Тогда у нас получится вывод формулы $\mathcal{A}^*$ из формул $\mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_r^*$.

Действительно, в рамках исчисления предикатов знак равенства используется не иначе, как с привлечением правила подстановки и аксиом. Однако в отношении подстановки формула $\mathcal{G}(a, b)$ обладает теми же самыми возможностями, что и формула $a = b$, а в аксиомах нами была произведена замена знака равенства с аргументами a и b соответствующим ему выражением $\mathcal{G}(a, b)$. Аналогичное рассуждение может быть проведено и тогда, когда описанная замена производится не для равенств $a = b$, а для неравенств $a < b$.

Такое положение вещей позволяет нам пользоваться следующим приемом для установления независимости тех или иных аксиом. Для того чтобы показать, что в рамках рассматриваемой нами совокупности формул какая-либо формула $\mathcal{A}$ не выводится из данных аксиом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$, достаточно так подобрать формулу $\mathcal{G}(a, b)$, не содержащую переменных, отличных от a и b , чтобы при замене каждого равенства $a = b$ (или же каждого неравенства $a < b$) соответствующим ему выражением $\mathcal{G}(a, b)$ фор-

мулы $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ переходили в формулы $\mathcal{A}^*, \mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_r^*$ такие, что можно констатировать невыводимость формулы $\mathcal{A}^*$ из $\mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_r^*$.

Пользуясь этим методом, мы сможем доказать независимость всех аксиом системы (B) (за исключением аксиомы индукции, независимость которой уже установлена) от остальных аксиом системы. Далее, мы сможем тем же самым способом установить и независимость ряда аксиом системы (A) от остальных аксиом этой системы.

1. Для аксиомы равенства (J_2) мы покажем, что она не зависит от всех остальных формул систем (A) и (B), даже если их взять вместе. В самом деле, если бы она выводилась из этих формул, то из них выводилась бы и получающаяся из (J_2) подстановкой формула

$$a' = a \rightarrow (a < a' \rightarrow a < a).$$

Если мы теперь вместо равенства $a = b$ всюду подставим выражение

$$a = b \vee a \neq b,$$

то только что упоминавшаяся формула перейдет в

$$a' = a \vee a' \neq a \rightarrow (a < a' \rightarrow a < a),$$

а остальные аксиомы систем (A) и (B), содержащие знак равенства, перейдут в формулы, выводимые с помощью исчисления предикатов, в то время как остальные останутся без изменения. Таким образом, в результате произведенной замены все эти аксиомы дадут нам такие формулы, которые выводятся из системы (B). Поэтому и формула

$$a' = a \vee a' \neq a \rightarrow (a < a' \rightarrow a < a)$$

также должна была бы выводиться из системы (B), а тем самым, согласно доказанному нами относительно системы (B), она должна быть верифицируемой. Однако это не так, в чем можно убедиться, подставив 0 вместо a .

2. Независимость аксиомы ($<_1$) от остальных аксиом системы (B) может быть установлена путем замены $a < b$ выражением

$$a = b \vee a \neq b.$$

Действительно, в результате этой замены те формулы системы (B), исключая ($<_1$), которые этой заменой подвергаются каким-либо изменениям, переходят в такие формулы, которые выводятся средствами исчисления предикатов, в то время как формула ($<_1$) переходит в формулу

$$\neg (a = a \vee a \neq a).$$

¹⁾ См. с. 305.

Если бы аксиома ($\leq_1$) была выводимой из остальных аксиом системы (B), то эта формула выводилась бы из системы (B) (даже из одних только аксиом равенства и аксиомы индукции), в то время как на самом деле она не верифицируема.

3. Заменяя неравенство $a < b$ выражением

$$a = b \ \& \ a \neq b$$

мы получим, что если бы аксиома ($\leq_3$) была выводима из остальных аксиом систем (A) и (B), то формула

$$a = a' \ \& \ a \neq a'$$

должна была бы выводиться из аксиом

$$(J_1), (J_2), a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a),$$

аксиомы индукции и формулы

$$a \neq b \rightarrow (a = b \ \& \ a \neq b) \vee (b = a \ \& \ b \neq a)$$

(с использованием символа штриха). Однако в результате этой замены они дают, как легко убедиться, лишь такие формулы, которые, будучи рассмотрены в индивидуальной области, состоящей только из 0 (при этом значение 0' считается равным 0), при замене входящих в них формульных переменных логическими функциями, а свободных индивидуальных переменных символом 0 всегда принимают значение «истина», в то время как формула

$$a = a' \ \& \ a \neq a'$$

принимает значение «ложь». Тем самым аксиома ($\leq_3$) оказывается независимой от всех остальных аксиом систем (A) и (B).

4. Независимость аксиомы ($\leq_2$) от остальных аксиом системы (B) доказывается с помощью замены $a < b$ выражением

$$a \neq b.$$

5. Независимость формулы $a = a$ от остальных аксиом системы (B) доказывается с помощью замены $a = b$ выражением

$$a = b \ \& \ a \neq b.$$

6. Независимость формулы

$$a < b \rightarrow \neg (b < a')$$

от остальных аксиом системы (A) доказывается с помощью замены $a < b$ выражением

$$(a = 0 \vee a \neq 0) \ \& \ b \neq 0.$$

Тем самым для системы (B) все необходимые доказательства независимости проведены. У системы (A) пока отсутствуют дока-

зательства независимости для формул

$$\begin{aligned} a &\neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a), \\ a &< b \ \& \ b < c \rightarrow a < c, \\ \neg (a < 0) \end{aligned}$$

и

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a.$$

3. Установление ряда других независимостей с помощью модификации процедуры редукции. Для проведения этих доказательств мы применим следующий прием: сначала мы расширим совокупность нумерических формул путем введения соответствующих значений нумерических формул и, производя для каждого из этих определений соответствующие изменения в процедуре редукции, мы так определим понятие верифицируемости, сохранив первоначальную схему его определения¹⁾, чтобы каждая выводимая из используемых аксиом формула без формульных переменных была верифицируемой в смысле этого определения, а формула, независимость которой устанавливается, была неверифицируемой, откуда и будет следовать независимость рассматриваемой формулы от указанных аксиом.

Для задания проводимых этим способом доказательств независимости мы можем использовать то обстоятельство, что изменение процедуры редукции определяется уже тем, как мы вводим истинные значения нумерических формул.

Действительно, в тех подготовительных операциях 1—4 процедуры редукции²⁾, которые отличны от преобразований исчисления высказываний, речь идет о том, чтобы исключить, во-первых, отрицания равенств и неравенств, во-вторых, — такие равенства и неравенства, у которых x стоит в обеих частях, и, в-третьих, — такие равенства и неравенства, у которых x фигурирует с меньшим, чем максимальное встречающееся, числом штрихов. При этом — чтобы можно было доказать теоремы о редукции — указанное исключение должно производиться путем таких преобразований, при которых выражение $\mathfrak{B}$, получающееся из выражения $\mathfrak{A}$, при каждой замене цифрами переменных, входящих в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, должно принимать то же самое истинностное значение, что и выражение $\mathfrak{A}$.

На последнем шаге процедуры редукции, при рассмотрении выражений $\exists x \mathfrak{C}_x (x^{(t)})$, речь идет о том, чтобы для каждого такого выражения найти не содержащее переменной x выраже-

¹⁾ См. с. 289 и далее, а также с. 305.

²⁾ См. с. 291 и далее.

ние $\mathfrak{C}_r$, которое содержало бы все остальные фигурирующие в $\mathfrak{C}_r(x^{(t)})$ переменные и не содержало никаких других и которое при каждой замене этих переменных цифрами переходило бы в истинную или в ложную формулу в зависимости от того, возможно или невозможно указать такую цифру z , чтобы выражение $\mathfrak{C}_r(z^{(t)})$ при той же самой замене переменных переходило в истинную формулу, чем заодно устанавливается финитный характер этой альтернативы.

То, что эти задачи оказываются разрешимыми для каждого из подлежащих рассмотрению расширений запаса цифр в сочетании с соответствующими определениями истинностных значений нумерических формул, по существу обуславливается тем, что свойства «быть цифрой первого рода» и «быть цифрой второго рода» в тех случаях, когда в редукции используется различие обоих родов цифр, выразимы при помощи некоторых формул $\mathfrak{Z}_1(a)$ и $\mathfrak{Z}_2(a)$ в том смысле, что для любой цифры a первого рода $\mathfrak{Z}_1(a)$ истинно, а $\mathfrak{Z}_2(a)$ ложно, а для любой цифры a второго рода $\mathfrak{Z}_1(a)$ ложно, а $\mathfrak{Z}_2(a)$ истинно. Для каждой из рассматриваемых нами систем цифр и истинностных значений к решению упомянутых выше задач мы приходим, с помощью определенного соответствующими соглашениями истолкования формул, некоторым, по существу (т. е. отвлекаясь от несущественных подробностей) единообразным способом.

Поэтому для проведения этих четырех доказательств независимости мы можем ограничиться тем, что введем цифры второго рода, а также новые, дополнительные по отношению к обычным, определения истинностных значений нумерических равенств и неравенств (другие элементарные формулы у нас не встречаются), а кроме того, в тех доказательствах независимости, где в процедуре редукции проводится различие цифр первого и второго рода, мы приведем соответствующие формулы $\mathfrak{Z}_1(a)$ и $\mathfrak{Z}_2(a)$. Ради большей ясности в тех случаях, когда в соответствии с определением истинностных значений будет требоваться изменение одной или нескольких подготовительных операций 2—4, входящих в процедуру редукции, мы будем специально это подчеркивать. (Изменение, всякий раз требующееся на последнем шаге редукции, специально оговариваться не будет.)

Для формулы, независимость которой мы будем доказывать, всякий раз будет указываться некоторая замена ее свободных переменных цифрами, в результате которой эта формула, в соответствии с текущим определением, будет оказываться верифицируемой.

Установление того факта, что каждая формула, выводимая из остальных аксиом системы (A), является верифицируемой, протекает способом, аналогичным тому, которым соответствующее

доказательство проводилось в случае обычной процедуры редукции, т. е. при помощи теорем о частичной редукции и об однозначности ¹⁾. При этом, в частности, используются следующие общие свойства цифр и истинностных значений.

Цифра $a^{(t)}$ является цифрой первого рода тогда и только тогда, когда a является цифрой первого рода.

Для любой цифры a равенство $a = a$ является истинным. Для произвольных цифр a и b равенство $a = b$ имеет то же самое истинностное значение, что и равенство $b = a$.

Если для каких-либо цифр a и b равенство $a = b$ является истинным, то для любой цифры c формулы

$$a = c, a < c \text{ и } c < a$$

соответственно имеют те же самые истинностные значения, что и формулы

$$b = c, b < c \text{ и } c < b.$$

Для равенств и неравенств между цифрами первого рода, а также для соответствующих истинностных функций исчисления высказываний справедливы обычные определения их истинностных значений.

Теперь, с учетом этих предварительных замечаний, упомянутые четыре доказательства независимости могут быть представлены в следующем сокращенном виде:

1. Независимость формулы

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a).$$

Цифрами второго рода являются фигуры $\omega^{(t)}$.

Для равенств между произвольными цифрами и для неравенств между цифрами одного и того же рода берется обычное определение истинности и ложности. Если a — цифра первого рода, а b — цифра второго рода, то неравенство $a < b$ считается истинным, а неравенство $b < a$ — ложным.

Формулы $\mathfrak{Z}_1(a)$ и $\mathfrak{Z}_2(a)$ имеют вид

$$a < \omega \text{ и } \omega < a'.$$

Редукцией рассматриваемой формулы

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

является формула

$$a \neq 0 \rightarrow (a < \omega \ \& \ (0' = a \vee 0' < a)) \vee (\omega < a' \ \& \ (\omega' = a \vee \omega' < a)).$$

¹⁾ См. с. 295, 300.

При замене a посредством ω эта формула оказывается ложной, так как $\omega \neq 0$ истинно, $\omega < \omega$ ложно и $\omega' = \omega \vee \omega' = \omega$ ложно.

2. Независимость формулы

$$a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c.$$

Цифрами второго рода являются фигуры $\omega^{(f)}$.

Равенство $\omega^{(f)} = \omega^{(l)}$ является истинным, а неравенство $\omega^{(f)} < \omega^{(l)}$ — ложным, если числа f и l либо совпадают, либо отличаются друг от друга на четное число; в противном случае указанное равенство считается ложным, а неравенство — истинным.

Если a — цифра первого рода, а b — цифра второго рода, то неравенство $a < b$ считается истинным, а равенства $a = b$, $b = a$ и неравенство $b < a$ — ложными.

Формулы $\mathfrak{Z}_1(a)$ и $\mathfrak{Z}_2(a)$ имеют вид

$$a < \omega \ \& \ a < \omega', \quad a = \omega \vee a = \omega'.$$

В процедуре редукции должна быть модифицирована операция 3. Рассматриваемая формула

$$a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c$$

при замене переменных a , b и c цифрами ω , ω' и ω оказывается ложной.

3. Независимость формулы

$$\neg(a < 0).$$

Цифрами второго рода являются фигуры $(-0^{(p)})^{(f)}$.

Равенства

$$(-0^{(p)})^{(f)} = 0^{(l)} \text{ и } 0^{(l)} = (-0^{(p)})^{(f)}$$

считаются истинными или ложными в зависимости от того, совпадает число f с числом $l + p$ или же нет.

Из неравенств

$$(-0^{(p)})^{(f)} < 0^{(l)} \text{ и } 0^{(l)} < (-0^{(p)})^{(f)}$$

первое истинно, а второе ложно, если число f меньше, чем $l + p$, и второе истинно, а первое ложно, если число f больше, чем $l + p$; оба неравенства ложны, если число f совпадает с $l + p$.

Равенство

$$(-0^{(p)})^f = (-0^{(q)})^{(l)}$$

истинно, если число $f + q$ совпадает с $l + p$, и ложно в противном случае. Неравенство

$$(-0^{(p)})^{(f)} < (-0^{(q)})^{(l)}$$

истинно, если число $f + q$ меньше, чем $l + p$, и ложно в противном случае.

В определении операции редукции различие между цифрами первого и второго рода не проявляется.

Рассматриваемая формула

$$\neg(a < 0)$$

при замене a цифрой $-0'$ превращается в ложную.

4. Независимость формулы

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a.$$

Цифрами второго рода являются фигуры $\alpha_p^{(f)}$, причем α_0 обозначает символ α , а α_p для p , отличного от 0, обозначает фигуру, получающуюся из α навешиванием нижнего индекса в виде p звездочек.

Равенство

$$\alpha_p^{(f)} = \alpha_q^{(l)}$$

истинно, если число $f + q$ совпадает с $l + p$, и ложно в противном случае. Неравенство

$$\alpha_p^{(f)} < \alpha_q^{(l)}$$

истинно, если число $f + q$ меньше, чем $l + p$, и ложно в противном случае.

Если a — цифра первого рода, а b — цифра второго рода, то равенства $a = b$ и $b = a$, а также неравенства $a < b$ и $b < a$ всегда ложны; если же a отлично от 0, то $b < a$ истинно.

Формулы $\mathfrak{Z}_1(a)$ и $\mathfrak{Z}_2(a)$ имеют вид

$$0 < a', \quad a' < 0'.$$

В процедуре редукции должны быть модифицированы операции 2 и 4.

Рассматриваемая формула

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$

при замене переменных a и b цифрами 0 и α оказывается ложной.

Тем самым для системы (A), так же как и для системы (B), нами установлена независимость каждой из ее аксиом от всех остальных.

§ 7. Изображение принципа наименьшего числа при помощи выражающей его формулы; равносильность этой формулы аксиоме индукции на основе прочих аксиом системы (B)

Для характеристики системы аксиом (B) мы приведем еще один вывод, а именно вывод из этой системы следующей формулы:

$$A(a) \rightarrow \exists x (A(x) \& \forall y (A(y) \rightarrow x = y \vee x < y)),$$

которая выражает *принцип наименьшего числа*, т. е. предложение, говорящее о том, что для любого высказывания, выполняющегося для какого-нибудь числа, всегда имеется наименьшее число, для которого это высказывание имеет место.

Кроме исчисления предикатов, мы используем для этого вывода аксиомы

$$(J_2), \quad a < a',$$

выводимые формулы

$$\neg(a < 0), \quad a < b' \rightarrow a < b \vee a = b, \\ \neg(b < a) \rightarrow a = b \vee a < b$$

и схему индукции, которая, как мы знаем, равносильна аксиоме индукции. Схему индукции мы будем применять к формуле

$$\exists x (A(x) \& x < a) \rightarrow \exists x (A(x) \& \forall y (A(y) \rightarrow x = y \vee x < y)).$$

Посылку и заключение этой формулы мы для краткости обозначим символами $\mathfrak{B}(a)$ и $\mathfrak{C}$ соответственно. Тогда рассматриваемое применение схемы индукции будет иметь вид

$$\frac{\mathfrak{B}(0) \rightarrow \mathfrak{C} \quad (\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{C})}{\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}}$$

Нам нужно вывести формулы

$$\mathfrak{B}(0) \rightarrow \mathfrak{C}$$

и

$$(\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{C}).$$

Первая из них получается из формулы $\neg \mathfrak{B}(0)$, т. е. из формулы

$$\neg \exists x (A(x) \& x < 0),$$

которая может быть получена из

$$\neg(a < 0).$$

Для того чтобы получить вторую формулу, мы сначала с помощью

$$a < b' \rightarrow a < b \vee a = b$$

выведем формулу

$\exists x (A(x) \& x < a') \rightarrow \exists x (A(x) \& x < a) \vee \exists x (A(x) \& x = a)$,
которая сокращенно может быть записана в виде

$$\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{B}(a) \vee \exists x (A(x) \& x = a).$$

Далее, из аксиомы (J_2) мы получим

$$\exists x (A(x) \& x = a) \rightarrow A(a),$$

а отсюда, в сочетании с предыдущей формулой, —

$$\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{B}(a) \vee A(a).$$

Теперь, формула

$$\mathfrak{B}(a) \vee A(a)$$

по правилам исчисления высказываний переводима в

$$\mathfrak{B}(a) \vee (A(a) \& \neg \mathfrak{B}(a));$$

далее, формула $\neg \mathfrak{B}(a)$, т. е.

$$\neg \exists x (A(x) \& x < a),$$

переводима в

$$\forall y (A(y) \rightarrow \neg(y < a)),$$

и потому, используя формулу

$$\neg(b < a) \rightarrow a = b \vee a < b,$$

мы получим

$$\neg \mathfrak{B}(a) \rightarrow \forall y (A(y) \rightarrow a = y \vee a < y).$$

Но из основной формулы (b) подстановкой получается формула

$$A(a) \& \forall y (A(y) \rightarrow a = y \vee a < y) \rightarrow \mathfrak{C}.$$

В результате мы приходим к формуле

$$\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{B}(a) \vee \mathfrak{C},$$

а из нее средствами исчисления высказываний получается формула

$$(\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{C}).$$

После этого можно применить схему индукции и получить формулу

$$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{C}.$$

От этой формулы мы легко можем перейти к искомой. Действительно, искомая формула имеет вид

$$A(a) \rightarrow \mathfrak{C},$$

а из полученной нами формулы, если вместо a подставить a' , получается формула

$$\mathfrak{B}(a') \rightarrow \mathfrak{C}.$$

Таким образом, будет достаточно вывести формулу

$$A(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a'),$$

т. е.

$$A(a) \rightarrow \exists x (A(x) \& x < a').$$

Но эта формула может быть получена с использованием формулы $a < a'$ и основной формулы (b).

Тем самым мы завершили вывод формулы

$$A(a) \rightarrow \exists x (A(x) \& \forall y (A(y) \rightarrow x = y \vee x < y)).$$

Заметим, что верно также и обратное, т. е. из этой формулы в сочетании с формулами

$$(J_2), \quad a' \neq a, \quad \neg(a' < a) \text{ и } a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

может быть выведена аксиома индукции. Для этого надо в формулу, выражающую принцип наименьшего числа, вместо именной формы $A(c)$ подставить $\neg A(c)$, а затем к импликации, стоящей в области действия квантора всеобщности $\forall y$, применить правило контрапозиции. Тогда с использованием перечисленных формул и формулы

$$A(0) \rightarrow \{\exists x (\neg A(x) \& B(x)) \rightarrow \exists x (\neg A(x) \& B(x) \& x \neq 0)\},$$

которая выводится с помощью второй аксиомы равенства, мы получим формулу

$$\neg A(a) \& A(0) \rightarrow \exists x (\neg A(x') \& A(x)),$$

из которой с помощью простых преобразований и получается аксиома индукции.

РЕКУРСИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Некоторые пояснения принципиального характера

1. Простейшая схема рекурсии; формализация интуитивной процедуры вычисления; сопоставление явных определений с рекурсивными. В системе (B) ¹⁾ нашли свою формализацию все пять аксиом арифметики Пеано ²⁾. Именно, две из них были формализованы введением символа 0 и символа штриха, две другие — выводимостью формул (P_1) и (P_2) ³⁾ и, наконец, аксиома полной индукции — введением формальной аксиомы индукции.

Поэтому можно было бы думать, что в теоремах, доказанных нами относительно системы (B), вопросы непротиворечивости и полноты арифметики нашли свое окончательное решение.

Однако, если мы взглянем более пристально, то заметим, что нашего формализма никоим образом не хватает для изображения всех применяемых в арифметике понятий.

И у Пеано ⁴⁾ видимость того, что сформулированных им пяти аксиом достаточно для развития арифметики, тоже существует исключительно потому, что, руководствуясь распространенным способом выражаться, он рекурсивные равенства, с помощью которых вводятся элементарные функции, — например, равенства для суммы $a + b$ и произведения $a \cdot b$

$$\begin{aligned} a + 0 &= a, \\ a + n' &= (a + n)', \\ a \cdot 0 &= 0, \\ a \cdot n' &= (a \cdot n) + a, \end{aligned}$$

называет *определениями*. Этот широко распространенный способ выражаться соответствует точке зрения *интуитивной, финитной арифметики*.

Напомним, что при рассмотрении финитной арифметики ⁵⁾ рекурсивные определения играют роль сокращенного сообщения

¹⁾ См. с. 335.

²⁾ См. с. 272, 325.

³⁾ См. с. 273.

⁴⁾ Peano G. Formulario Mathematico.— V Ed.— Torino, 1908, II,

§ 1 и далее.

⁵⁾ См. с. 51.

процедуры, посредством которой одной или несколькими заданным цифрам сопоставляется вполне определенная новая цифра.

Эту процедуру мы сможем промоделировать и в нашем формализме, если допустим введение функциональных знаков в сочетании с рекурсивными равенствами.

При этом, подобно тому, как это делалось в финитной арифметике, происходит расстановка рекурсий в определенную *последовательность*, в соответствии с которой для каждой рекурсии указывается перечень тех рекурсий, которые ей предшествуют. В выборе этой последовательности может иметь место значительный произвол, однако мы заметно ограничим его, если будем обращать внимание на то, чтобы не производилось ненужных рекурсий.

Введение функционального знака при помощи рекурсии мы будем кратко называть *рекурсивным введением* этого знака. Данный терм мы будем называть *независимым* от рекурсивно введенного функционального знака f , если он содержит только такие функциональные знаки, которые были введены еще до проведения рекурсии для f .

Поначалу мы будем рассматривать только рекурсивные равенства одного очень простого типа, или, как мы еще будем говорить, простейшую *схему рекурсии*, и понятие рекурсии мы пока этим и ограничим. В том случае, когда вводимый функциональный знак зависит только от одного аргумента, рассматриваемая схема рекурсии выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(n') &= b(n, f(n)). \end{aligned}$$

Здесь для f следует взять какой-нибудь еще не использовавшийся в нашем формализме функциональный знак с одним аргументом. В качестве таких знаков мы будем брать — за исключением отдельных случаев, когда будем пользоваться общеупотребительными математическими символами, — строчные буквы греческого алфавита. Далее, a в этой схеме должно представлять собой терм без переменных, независимый от функционального знака $f(\cdot)$, а $b(n, f(n))$ должно получаться в результате подстановки $f(n)$ вместо t из термина $b(n, t)$, также независимого от f и не содержащего переменных, отличных от n и t . (Мы не требуем, чтобы переменные n и t действительно присутствовали в $b(n, t)$.)

В случае введения функционального знака $f(a, n)$ с двумя аргументами аналогичная схема рекурсии имеет вид

$$\begin{aligned} f(a, 0) &= a(a), \\ f(a, n') &= b(a, n, f(a, n)). \end{aligned}$$

Здесь снова $a(a)$ и $b(a, n, t)$ — термы, независимые от вводимого функционального знака, и наши обозначения снова следует

понимать в том смысле, что в $a(a)$ не должны встречаться никакие переменные, кроме a , а в $b(a, n, t)$ — никакие переменные, кроме a , n и t , причем некоторые из этих переменных, вообще говоря, могут и отсутствовать.

В рекурсии для $f(a, n)$ переменная n является *выделенной* в этой рекурсии, в то время как a выступает в ней только в роли *параметра*. Если вместо одного параметра мы допустим в рекурсии большее их количество, то у нас получится *схема* рекурсии для функции $f(a, \dots, k, n)$ с более чем двумя аргументами:

$$\begin{aligned} f(a, \dots, k, 0) &= a(a, \dots, k), \\ f(a, \dots, k, n') &= b(a, \dots, k, n, f(a, \dots, k, n)). \end{aligned}$$

Из соглашений, касающихся схемы рекурсии, в частности, вытекает, что в каждом рекурсивном равенстве в правой части должны встречаться только такие переменные, которые являются аргументами в левой его части; однако не обязательно, чтобы все стоящие слева аргументы встречались также и справа.

Рекурсивные равенства для суммы $a + b$ и произведения $a \cdot b$ получаются в качестве частных случаев схемы рекурсии для функционального знака с двумя аргументами, с тем лишь несущественным различием, что вместо стоящих перед аргументами греческих букв мы пользуемся здесь общеупотребительным способом записи.

Выражения $a(a)$ и $b(a, n, t)$ в случае рекурсии для суммы имеют вид

$$a \text{ и } t',$$

а в случае рекурсии для произведения — вид

$$0 \text{ и } t + a.$$

Мы видим, что очередность рекурсий для суммы и произведения должна быть выбрана таким образом, чтобы рекурсия для суммы производилась ранее; тогда в рекурсии для произведения терм $t + a$ будет удовлетворять условию независимости его от вводимого функционального знака.

Формализация интуитивной процедуры рекурсивного определения с помощью схемы рекурсии основывается на том, что при рекурсивном введении функционального знака $f(a, \dots, k, n)$ мы для каждой цифры z получаем некоторое *равенство*

$$f(a, \dots, k, z) = t(a, \dots, k),$$

выводимое с помощью рекурсивных равенств и аксиом равенства (здесь $t(a, \dots, k)$ представляет собой терм, независимый от функционального знака $f(\dots)$).

Рассмотрим этот вопрос для случая функционального знака с двумя аргументами. Допустим, что функциональный знак $f(a, n)$

вводится рекурсивными равенствами

$$\begin{aligned}\varphi(a, 0) &= a(a), \\ \varphi(a, n') &= b(a, n, \varphi(a, n)),\end{aligned}$$

и возьмем в качестве z цифру $0''$. Тогда речь будет идти о том, чтобы вывести некоторое равенство вида

$$\varphi(a, 0'') = t(a),$$

в котором $t(a)$ — какой-то терм, не зависящий от функционального знака $\varphi(\cdot, \cdot)$. С этой целью во второе из рассматриваемых рекурсивных равенств мы вместо переменной n подставим по очереди 0 и $0'$. Тогда мы получим формулы

$$\begin{aligned}\varphi(a, 0') &= b(a, 0, \varphi(a, 0)), \\ \varphi(a, 0'') &= b(a, 0', \varphi(a, 0')).\end{aligned}$$

Теперь, с помощью аксиом равенства, мы можем вывести формулу

$$r = s \rightarrow b(a, c, r) = b(a, c, s).$$

Эту формулу мы используем для двух различных подстановок: один раз мы подставим $\varphi(a, 0)$ вместо r , $a(a)$ вместо s и 0 вместо c , а второй раз подставим $\varphi(a, 0')$ вместо r , $b(a, 0, a(a))$ вместо s и $0'$ вместо c . В результате получатся следующие две формулы:

$$\begin{aligned}\varphi(a, 0) &= a(a) \rightarrow b(a, 0, \varphi(a, 0)) = b(a, 0, a(a)), \\ \varphi(a, 0') &= b(a, 0, a(a)) \rightarrow b(a, 0', \varphi(a, 0')) = b(a, 0', b(a, 0, a(a))).\end{aligned}$$

Первая из них вместе с рекурсивным равенством

$$\varphi(a, 0) = a(a)$$

дает формулу

$$b(a, 0, \varphi(a, 0)) = b(a, 0, a(a)),$$

которая в сочетании с

$$\varphi(a, 0') = b(a, 0, \varphi(a, 0))$$

и с использованием второй аксиомы равенства дает формулу

$$\varphi(a, 0') = b(a, 0, a(a)).$$

Если мы возьмем эту формулу вместе со второй из двух полученных выше формул, то по схеме заключения получим

$$b(a, 0', \varphi(a, 0')) = b(a, 0', b(a, 0, a(a))).$$

А эта формула в сочетании с формулой

$$\varphi(a, 0'') = b(a, 0', \varphi(a, 0')),$$

ранее полученной нами из второго рекурсивного равенства, позволяет с использованием аксиомы (J_2) получить

$$\varphi(a, 0'') = b(a, 0', b(a, 0, a(a))),$$

что и дает искомое равенство, в правой части которого стоит независимый от функционального знака $\varphi(\cdot, \cdot)$ терм, не содержащий никаких переменных, кроме a .

Пользуясь этим способом, мы, например, сможем для любой цифры z с помощью рекурсивных равенств для суммы и аксиом равенства вывести равенство

$$a + z = a^{(z)}.$$

Аналогично, для любой отличной от нуля цифры z' с помощью рекурсивных равенств для произведения можно будет вывести равенство

$$a \cdot z' = r(a),$$

где $r(a)$ означает выражение, которое получается из переменной a в результате z' -кратного приписывания выражения $+a$ (с заключением в скобки результата каждого такого приписывания).

Вообще, этот способ позволяет для любого рекурсивно введенного функционального знака $f(\dots)$ и для любой заданной цифры z , подставляемой вместо выделенной в данной рекурсии переменной, вывести некоторое равенство

$$f(a, \dots, k, z) = t,$$

где стоящий в правой части терм не зависит от функционального знака $f(\dots)$ и не содержит никаких отличных от $a, \dots, k$ переменных.

Если мы подставим в это равенство вместо параметров $a, \dots, k$ некоторые цифры $a, \dots, f$, то получим равенство

$$f(a, \dots, f, z) = c,$$

в правой части которого стоит терм без переменных, который тоже не зависит от функционального знака $f(\dots)$ и у которого аргументами самых внутренних функциональных знаков являются цифры. Это выражение представляет собой как раз то, что мы получаем при обычном способе вычисления значения $f(a, \dots, f, z)$, когда функциональный знак $f(\dots)$ исключается нами путем повторного применения описывающих его рекурсивных равенств.

Если c — цифра, то вывод равенства

$$f(a, \dots, f, z) = c$$

дает нам полную формализацию вычисления значения выражения $f(a, \dots, f, z)$. Мы теперь покажем, что и в том случае, когда c еще содержит рекурсивно вводимые функциональные знаки,

продолжение процесса вычисления тоже будет допускать формализацию, так что если l представляет собой цифру, получающуюся в результате вычисления значения $f(a, \dots, f, z)$, то нам удастся получить вывод равенства

$$f(a, \dots, f, z) = l.$$

Для этого мы рассудим следующим образом. Допустим, что для каждого введенного до $f(\dots)$ функционального знака при фиксации значений его аргументов цифрами удастся вывести равенство, у которого в левой части стоит этот функциональный знак с цифрами в качестве аргументов, а в правой части — та цифра, которая получается в качестве значения функции в результате естественного процесса вычислений. Тогда мы можем вывести равенство

$$c = l,$$

а тем самым и

$$f(a, \dots, f, z) = l.$$

В самом деле, вывод равенства $c = l$ мы получим совершенно тем же способом, которым от выражения c мы переходим к его значению l при естественном процессе вычисления. Это делается таким образом, что вместо каждого самого внутреннего функционального знака мы подставляем его значение, которое является цифрой, затем с получившимся выражением поступаем точно таким же образом, исключая шаг за шагом все функциональные знаки. Этот процесс всегда завершается, так как в выражении c имеется лишь конечное число вложенных друг в друга функциональных знаков. Это исключение функциональных знаков из выражения c мы можем полностью промоделировать в нашем дедуктивном формализме. Действительно, каждый из фигурирующих в этой процедуре функциональных знаков вводится ранее функционального знака $f(\dots)$; поэтому, если $g(m, \dots, r)$ — один из этих функциональных знаков с цифрами в качестве аргументов, а z — его значение, то согласно нашему предположению выводимо равенство

$$g(m, \dots, r) = z,$$

и чтобы использовать это равенство для замены выражения $g(m, \dots, r)$ цифрой z , нам недостает лишь формализации принципа замены равного равным. Но эта последняя может быть получена с помощью аксиом равенства. Как было замечено в гл. V¹⁾, с помощью аксиом равенства можно для каждого (построенного из функциональных знаков, переменных и цифр) термина $t(c)$ вывести формулу

$$a = b \rightarrow t(a) = t(b),$$

¹⁾ См. с. 238.

а тем самым и получить равенство

$$t(a) = t(b),$$

когда скоро $a = b$.

Таким образом, вывод равенства

$$f(a, \dots, f, z) = l,$$

если он еще не был получен прямо с помощью рекурсивных равенств для $f(\dots)$, сводится посредством однозначно описанной процедуры к выводу конечного числа конкретных равенств вида

$$g(m, \dots, r) = z,$$

где g — некоторый функциональный знак, рекурсивно введенный ранее $f(\dots)$, а z — значение выражения $g(m, \dots, r)$ с цифрами $m, \dots, r$ в качестве аргументов, получающееся в результате соответствующего рекурсивного вычисления.

Эта процедура сведения может быть повторена необходимое количество раз, и тогда не позже, чем после q -кратного ее применения, где q есть число функциональных знаков, рекурсивно введенных ранее $f(\dots)$, мы получим вывод равенства

$$f(a, \dots, f, z) = l.$$

Итак, применяемый в финитной арифметике метод рекурсивных вычислений можно полностью промоделировать в нашем формализме, надлежащим образом используя в процессе дедукции рекурсивные равенства. Принимая во внимание это положение вещей, мы будем считать оправданной такую терминологию, когда введение какого-либо функционального знака при помощи рекурсивных равенств мы будем называть *рекурсивным определением* и будем говорить о «функции», определенной с помощью рекурсии. Однако мы должны отчетливо понимать то обстоятельство, что речь при этом идет не об определении в смысле простого разъяснения знаков, т. е. не о введении символа, служащего сокращением для составного выражения.

Определение в таком более узком смысле слова мы будем называть *явным определением*. С помощью явного определения может быть введен какой-либо новый индивидуальный символ, предикатный символ или знак математической функции. Такое введение в формализм обычно производится при помощи какой-либо специальной аксиомы, которая в случае индивидуального символа или знака математической функции имеет вид некоторого *равенства*, а в случае предикатного символа — некоторой *эквивалентности*; при этом в левой части определения стоит вводимый символ, аргументы которого (если таковые имеются) замещены отличными друг от друга свободными переменными, а в правой части стоит не содержащее вводимого символа (т. е. построенное из ранее введенных зна-

ков) выражение, такое что входящие в него свободные переменные совпадают с переменными, входящими в левую часть. В случае равенства оно является *термом*, а в случае эквивалентности — *формулой*. Так, например, с помощью явных определений мы можем ввести обычные символы для цифр, такие как

$$\begin{aligned} 1 &= 0', \\ 2 &= 0'', \\ 3 &= 0'''. \end{aligned}$$

Далее, с помощью явных определений мы можем ввести принятые в математике символы $\leq$, $>$, $\geq$:

$$\begin{aligned} a \leq b &\sim a = b \vee a < b, \\ a > b &\sim b < a, \\ a \geq b &\sim a = b \vee b < a. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы не раз встретимся с различными примерами введения знаков тех или иных математических функций при помощи соответствующих явных определений¹⁾.

В случае такого явного определения всегда можно непосредственно убедиться в том, что принятие его не приводит ни к какому противоречию, так как рассматриваемый новый символ всюду, где он встречается может быть заменен определяющим его выражением; при этом соответствующее определяющее равенство (или эквивалентность) переходит в выводимую формулу вида

$$\alpha = \alpha \quad (\text{или } \mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}).$$

Таким образом, получается, что если в некотором доказательстве какой-либо формулы $\mathfrak{F}$, не содержащей данного явно определенного символа, этот символ встречается, то его можно устранить и в этом доказательстве, причем это можно сделать путем непосредственной замены нового символа определяющим его выражением.

Если мы теперь сравним рекурсивные определения с явными, то обнаружим некоторое сходство между ними, заключающееся

¹⁾ заметим, кстати, что в рамках нашего формализма явное определение функционального знака может быть представлено и в виде некоторой рекурсии. Например, если явное определение имеет вид

$$\varphi(a, n) = t(a, n),$$

то вместо него мы можем ввести рекурсивные равенства

$$\begin{aligned} \varphi(a, 0) &= t(a, 0), \\ \varphi(a, n') &= t(a, n'), \end{aligned}$$

которые получаются подстановкой из упомянутого выше определяющего равенства. И обратно, это явное определение с помощью схемы индукции может быть выведено из приведенных нами рекурсивных равенств.

в том, что рекурсивные определения при помощи особой, допускающей определенную формализацию процедуры дают нам некоторую замену для любого из тех термов, которые получаются из какой-либо рекурсивно определенной функции при фиксации ее аргументов *цифрами*, а именно замену посредством той самой цифры, которая получается в результате вычисления соответствующего значения этой функции. Более того, эта процедура дает нам некоторый терм-заменитель уже в том случае, если цифрой мы заменим только *выделенную* в данной рекурсии переменную. Так, в качестве замены для $a + 0''$ мы получим терм a'' , а для $a \cdot 0'''$ получим терм $(a + a) + a$. Эта замена обладает еще и тем свойством, что в результате ее выполнения рекурсивные равенства, если в них вместо выделенной переменной n будет стоять какая-либо цифра, перейдут в равенства вида

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}.$$

Действительно если $\varphi(a, \dots, k, n)$ — данная рекурсивно определенная функция, то рассматриваемые рекурсивные равенства после замены переменной n какой-либо цифрой z будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi(a, \dots, k, 0) &= a'(a, \dots, k), \\ \varphi(a, \dots, k, z') &= b(a, \dots, k, z, \varphi(a, \dots, k, z)). \end{aligned}$$

В качестве терма, заменяющего $\varphi(a, \dots, k, 0)$, эти равенства непосредственно дают $a(a, \dots, k)$, а нахождение терма, заменяющего $\varphi(a, \dots, k, z')$, происходит таким образом, что $\varphi(a, \dots, k, z')$ с самого начала заменяется термом $b(a, \dots, k, z, \varphi(a, \dots, k, z))$. Уже в результате этого оба рекурсивные равенства перейдут в равенства вида

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$$

и дальнейшие шаги замены больше не изменят указанного вида этих равенств.

В только что рассмотренной процедуре замены аргументы-параметры $a, \dots, k$ остаются переменными. Если мы подставим цифры и вместо этих переменных, то процедура вычисления может быть продолжена далее, до тех пор пока все имеющиеся у нас рекурсивно введенные функциональные знаки не будут исключены. При этом окончательном вычислении значений оба рассматриваемые рекурсивные равенства, которые уже после первого шага процедуры приобрели вид

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z},$$

должны будут перейти в нумерические равенства вида

$$z = z.$$

И все же замена этого рода в том виде, в каком она получается при использовании рекурсивных равенств, не дает нам никакого выражения, которым можно было бы заменить рекурсивно введенный функциональный знак с переменной на месте выделенного аргумента.

В этом и заключается существенное отличие рекурсивных определений от явных, и с этим, в частности, связано то обстоятельство, что доказательство непротиворечивости результата добавления рекурсивных определений к рассмотренным в гл. VI системам аксиом с использованием процедуры замены мы сможем провести только при условии исключения из рассмотрения связанных переменных.

2. Доказательство непротиворечивости добавления рекурсивных определений в рамках элементарного исчисления со свободными переменными; привлечение схемы индукции. Мы сейчас приведем это доказательство. Будут рассматриваться следующие, отличающиеся друг от друга системы аксиом: во-первых, система ¹⁾

$$(J_1), (J_2), (<_1), (<_2), (<_3), (P_1), (P_2),$$

во-вторых, система (A) ²⁾ и, в-третьих, система (B) ³⁾; при этом нам нужно будет исключить из рассмотрения те аксиомы, которые содержат связанные переменные, т. е. формулу

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

из системы (A) и аксиому индукции из (B).

Все три указанные системы формул обладают тем свойством, что за исключением второй аксиомы равенства (J_2) они содержат только такие формулы, в которых не встречается никаких переменных, кроме свободных индивидуальных, причем все эти формулы являются *верифицируемыми*.

Что касается логического исчисления, которое мы возьмем, исключив из исчисления предикатов связанные переменные, то оно будет допускать в качестве исходных формул лишь тождественные формулы исчисления высказываний. Будут также допускаться подстановки вместо формульных и вместо свободных индивидуальных переменных и применение схемы заключения. Это урезанное исчисление мы для краткости будем называть *элементарным исчислением со свободными переменными*.

Искомое доказательство непротиворечивости результата добавления рекурсивных определений к каждой из трех указанных систем аксиом с исключением связанных переменных будет получено одновременно со следующей, более общей теоремой:

¹⁾ См. с. 273.

²⁾ См. с. 322.

³⁾ См. с. 335.

Пусть у нас имеется система аксиом, состоящая из формулы (J_2), т. е.

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$$

и, кроме того, из некоторых других формул

$$A_1, A_2, \dots, A_f,$$

которые: а) не содержат никаких переменных, кроме свободных индивидуальных, б) кроме логических символов содержат только символы $=$, $<$, 0 и символ штриха и в) являются верифицируемыми, т. е. при любой подстановке цифр вместо свободных переменных переходят в истинные формулы. Если мы к этим формулам дополнительно присоединим рекурсивные определения каких-либо функций и, значит, допустим в качестве термов вводимые этими определениями функциональные знаки (с аргументами), а соответствующие рекурсивные равенства допустим в качестве исходных формул (аксиом), то и тогда формула $0 \neq 0$ будет невыводима средствами элементарного исчисления со свободными переменными; более того, всякая выводимая нумерическая формула будет в этом случае истинной.

Это утверждение легко установить методом исключения переменных. Действительно, пусть $\mathfrak{E}$ — нумерическая формула, для которой имеется доказательство, т. е. вывод из формул

$$(J_2), A_1, \dots, A_f$$

и присоединенных к ним рекурсивных равенств, проведенный средствами элементарного исчисления со свободными переменными. Тогда можно будет снова разложить это доказательство на нити ¹⁾, и исключить из него переменные. Разумеется, в получившейся в результате этого разложенной фигуре доказательства, не содержащей теперь переменных, в которой новые вхождения формул получаются из предыдущих посредством повторений или применений схем заключения, не все формулы обязаны быть нумерическими. В них могут, например, встречаться вводимые при помощи рекурсий функциональные знаки. Тем не менее все эти функциональные знаки могут быть устранены соответствующими заменами, получающимися с помощью рекурсивных равенств. Действительно, у самых внутренних функциональных знаков в качестве аргументов фигурируют только цифры, так как переменные были нами исключены; значение, получаемое нами для такого функционального знака с цифрами при помощи процедуры вычисления, снова является цифрой. Таким образом, заменяя в соответствии с процедурой вычисления каждый функциональный знак с цифрами соответствующей ему цифрой, мы придем к тому, что все встре-

¹⁾ См. с. 275 и далее.

ающиеся в доказательстве рекурсивно введенные функциональные знаки будут последовательно, друг за другом, исключены.

Таким образом, все формулы станут нумерическими, причем все исходные формулы перейдут в истинные нумерические формулы. Действительно, для рекурсивных равенств мы уже ранее установили, что при подстановке цифр вместо переменных они переходят в равенства вида

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}.$$

Формулы $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_f$ по предположению верифицируемы, а термины, которые мы подставляем в эти формулы вместо встречающихся в них переменных, после применения операций возврата переноса подстановок, устранения переменных и исключения рекурсивно введенных функциональных знаков могут быть только цифрами. Таким образом, эти формулы также перейдут в истинные нумерические формулы. Теперь остается рассмотреть аксиому (J_2) . Любая формула, получающаяся из нее в результате подстановки и устранения переменных, будет иметь вид

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)).$$

В ней могут встречаться различные рекурсивно введенные функциональные знаки. В частности, в формуле $\mathfrak{A}(a)$ терм a (соответственно в формуле $\mathfrak{A}(b)$ терм b) может быть аргументом такого функционального знака. Но в любом случае в отношении модификации, которую эта формула испытывает в ходе исключения рекурсивно введенных функциональных знаков, имеет место следующая альтернатива: либо терм a заменяется той же самой цифрой, что и b , и тогда формула $\mathfrak{A}(a)$ заменяется той же самой формулой, что и $\mathfrak{A}(b)$; либо термины a и b заменяются различными цифрами. Таким образом, получающаяся при этом формула имеет либо вид

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}),$$

либо вид

$$\mathfrak{z} = t \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}),$$

где $\mathfrak{z}$ и t — различные цифры. В обоих случаях получающаяся нумерическая формула является истинной.

Таким образом, действительно, в результате выполненных операций все исходные формулы нашей фигуры доказательства перейдут в истинные нумерические формулы. Но остальные формулы выводятся из них с помощью повторений и применений схем заключения, а заключительная формула $\mathfrak{E}$ при выполнении этих операций никаких изменений вообще не испытывает, так как она является нумерической с самого начала. Поэтому совершенно так же, как в ранее рассмотренном нами доказательстве, проведен-

ном методом исключения переменных, получается, что формула $\mathfrak{E}$ является истинной.

Тем самым мы показали, что и в случае допущения рекурсивных определений всякая нумерическая формула, выводимая из аксиом

$$(J_2), \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_f$$

средствами элементарного исчисления со свободными переменными, будет истинной.

Но рассмотренный нами метод доказательства позволяет получить и некоторый более общий результат. Рассмотрим произвольную выводимую указанными средствами формулу $\mathfrak{A}$, относительно которой мы не предполагаем, что она является нумерической. Мы будем только считать, что она не содержит формульных переменных. Пусть вместо входящих в нее свободных индивидуальных переменных производится подстановка каких-либо цифр, и пусть при этом получается формула $\mathfrak{A}^*$. Тогда эта формула, которая теперь уже вообще не содержит никаких переменных, тоже выводится при помощи допускаемых нами средств. К ее выводу мы снова можем применить наш метод исключения переменных и рекурсивно введенных функциональных знаков. Единственное отличие по сравнению с предыдущим рассуждением будет состоять в том, что заключительная формула при исключении функциональных знаков возможно подвергнется каким-либо изменениям. Но в любом случае получается, что формула $\mathfrak{A}^*$ либо уже сама является истинной нумерической формулой, либо в результате процедуры исключения функциональных знаков (т. е. в результате вычисления значений рекурсивно определенных функций) она переходит в некоторую истинную нумерическую формулу.

Таким образом, при любой подстановке цифр вместо свободных индивидуальных переменных в результате последующего вычисления значений соответствующих функций (для встречающихся в $\mathfrak{A}$ рекурсивно определенных функций) формула $\mathfrak{A}$ перейдет в истинную нумерическую формулу.

В порядке расширения нашей нынешней терминологии формулу, обладающую такого рода свойством, также представляется естественным назвать *верифицируемой*. Тем самым понятие *верифицируемости* распространится и на такие формулы, в которых имеются рекурсивно введенные функциональные знаки, но нет формульных, а также связанных переменных.

Пользуясь этим термином, мы можем придать полученному нами результату следующую формулировку:

Всякая формула без формульных переменных, выводимая с помощью перечисленных выше средств, является верифицируемой.

Дальнейшее обобщение этого результата, которое непосредственно получается из проведенного нами рассмотрения, состоит

в том, что мы можем допустить наличие в формулах $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ рекурсивно введенных функциональных знаков, если только эти формулы будут верифицируемыми в смысле только что произведенного обобщения. Действительно, при этом предположении мы можем быть уверены, что после выполнения тех операций, которыми формулы какого-либо (разложенного на нити) доказательства преобразуются в нумерические формулы, на месте тех формул из числа $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$, которые используются в качестве исходных формул, будут стоять истинные нумерические формулы.

Тем самым мы приходим к констатации следующего факта:

Если элементарное исчисление со свободными переменными расширить путем присоединения некоторых рекурсивных определений, верифицируемых (но все же не содержащих связанных переменных) аксиом и аксиомы равенства (J_2), то всякая формула, выводимая в полученном таким образом формализме и не содержащая формульных переменных, будет верифицируемой.

Эта редакция полученного нами результата позволяет без труда включить в рассмотрение *схему индукции* и показать, что в случае добавления этой схемы выводимые формулы, не содержащие формульных переменных, тоже будут верифицируемыми.

Заметим, что вследствие полного исключения из нашего рассмотрения связанных переменных применение схемы индукции также должно быть ограничено такими формулами, в которых связанные переменные не встречаются.

Представим себе, что нам дано доказательство формулы $\mathcal{E}$, не содержащей формульных переменных. Пусть это доказательство проведено средствами элементарного исчисления со свободными переменными с добавлением рекурсивных определений, верифицируемых аксиом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ (не содержащих связанных переменных), а также аксиомы (J_2) и, кроме того, с использованием схемы индукции. Тогда, как было показано в гл. VI, с помощью разложения доказательства на нити и возвратного переноса подстановок мы можем с самого начала устранить *формульные переменные*, причем, как мы уже отмечали ¹⁾, для того чтобы не нарушился вид схемы индукции, необходимо в случае надобности заменить переменную a во второй формуле

$$\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(a')$$

этой схемы какой-нибудь другой свободной переменной.

Теперь рассмотрим одно из тех применений схемы индукции, которым при поступательном, т. е. начинающемся с исходных формул доказательства, просмотре его нитей не предшествует никакая схема индукции. Пусть формулы этой схемы (после выпол-

¹⁾ См. с. 328.

нения соответствующих операций) имеют вид

$$\mathcal{B}(0), \quad \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathcal{B}(r'), \quad \mathcal{B}(r).$$

Для первых двух формул наша фигура доказательства дает вывод без использования схемы индукции.

Но теперь для произвольной цифры z формула $\mathcal{B}(z)$ с помощью подстановок и повторного применения схемы заключения может быть выведена из формул

$$\mathcal{B}(0) \quad \text{и} \quad \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathcal{B}(r').$$

Тем самым эта формула может быть выведена с использованием перечисленных средств, но без использования схемы индукции. Следовательно, в соответствии со сформулированным нами ранее результатом, она верифицируема, т. е. при каждой подстановке цифр вместо встречающихся в ней индивидуальных переменных (формульных переменных, по условию, в нее не входят) в результате последующего вычисления значений соответствующих функций она переходит в истинную нумерическую формулу. Так как сказанное справедливо для любой цифры z , то формула $\mathcal{B}(r)$ также оказывается верифицируемой.

Теперь мы расширим систему аксиом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$, добавив к ней формулу $\mathcal{B}(r)$. Тогда формулу $\mathcal{B}(r)$ можно будет получить не по схеме индукции, а непосредственной подстановкой. Теперь этот прием мы можем по очереди применить ко всем встречающимся в доказательстве схемам индукции. Таким образом, получается, что мы можем избежать применения схемы индукции для вывода формулы $\mathcal{E}$, добавив к аксиомам $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ ряд верифицируемых формул — обозначим их посредством $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$. В результате формула $\mathcal{E}$ оказывается выводимой средствами элементарного исчисления с добавлением рекурсивных определений из аксиом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ и аксиомы (J_2). При этом все аксиомы $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ суть верифицируемые формулы, не содержащие формульных (а также связанных) переменных. Но отсюда, в соответствии с нашим предыдущим результатом, получается, что формула $\mathcal{E}$ является верифицируемой.

Из доказанной таким образом теоремы, в частности, следует, что если мы положим в основу наших рассуждений элементарное исчисление со свободными переменными, то рекурсивные определения в сочетании с аксиомами равенства, схемой индукции и какими-либо верифицируемыми аксиомами никогда не смогут привести нас ни к какому противоречию.

3. Невозможность вывода непротиворечивости рекурсивных определений в качестве следствия непротиворечивости систем предыдущих аксиом; заменимость арифметических аксиом явными

определениями; явное определение символа $<$ при помощи соответствующей рекурсивной функции; вывод основных свойств символа $<$. Если этот результат, а также предыдущие рассуждения, направленные на установление непротиворечивости рекурсивных определений, мы рассмотрим с целью сравнения рекурсивных определений с собственно явными определениями, то заметим здесь следующее существенное различие: присоединение к системе аксиом каких-либо явных определений всегда непротиворечиво, если исходная система является непротиворечивой сама по себе (т. е. до присоединения этих определений); в противоположность этому, непротиворечивость присоединения к какой-либо системе аксиом рекурсивных определений мы установили только при более сильном предположении, что аксиомы $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_f$ являются *верифицируемыми*. Это предположение является на самом деле существенным и не может быть заменено предположением о непротиворечивости исходной системы аксиом.

В этом можно убедиться на следующем простом примере. Мы будем исходить из элементарного исчисления со свободными переменными. К логическим символам исчисления высказываний мы присоединим символы $=$, 0 и символ штриха (символ $<$ мы не присоединяем). В качестве аксиом мы возьмем обе аксиомы равенства

$$!a = a$$

и

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)),$$

а кроме них, — еще две формулы

$$0' \neq 0$$

и

$$a'' = a.$$

Непротиворечивость этой системы аксиом мы можем установить с помощью двуэлементной индивидной области. В качестве индивидов мы возьмем 0 и 1 . Равенства $0 = 0$ и $1 = 1$ мы будем считать истинными; $0 = 1$ и $1 = 0$ будем считать ложными. Штрих-функцию мы определим так, чтобы $0'$ имело значение 1 , а $1'$ имело значение 0 . Основываясь на этих соглашениях и учитывая обычные определения функций истинности исчисления высказываний, мы получим определения истинности и ложности для формул, построенных с помощью связок исчисления высказываний из равенств вида

$$0^{(1)} = 0^{(1)}.$$

Теперь, с помощью метода исключения переменных, мы снова можем показать, что всякая выводимая указанными средствами

формула, не содержащая переменных, является в смысле сформулированного здесь определения истинной. Отсюда, в частности, следует, что формула $0 \neq 0$, которая как отрицание истинного равенства $0 = 0$ является ложной, не может быть выведена из указанных аксиом и, следовательно, эта система аксиом является непротиворечивой.

Если мы теперь добавим к этой системе аксиом рекурсивные равенства

$$\delta(0) = 0,$$

$$\delta(n') = n,$$

то система перестанет быть непротиворечивой. Именно, второе из этих равенств при подстановке $0'$ вместо n даст

$$\delta(0'') = 0',$$

а из аксиомы

$$a'' = a$$

мы путем подстановки получим

$$0'' = 0.$$

Далее, используя аксиомы равенства, мы получим формулу

$$0'' = 0 \rightarrow \delta(0'') = \delta(0),$$

так что с помощью схемы заключения получится равенство

$$\delta(0'') = \delta(0).$$

Эта формула вместе с

$$\delta(0'') = 0'$$

и

$$\delta(0) = 0$$

с использованием второй аксиомы равенства дает

$$0' = 0,$$

в то время как среди наших аксиом имеется формула

$$0' \neq 0.$$

Создавшуюся здесь ситуацию можно объяснить и с содержательной точки зрения. Система, состоящая из двух равенств вида

$$f(0) = a,$$

$$f(n') = b(n, f(n)),$$

представляет собой некоторое налагаемое на функцию $f(n)$ условие, выполнимость которого зависит не только от структуры рекурсивных равенств, а еще и от характеристических свойств штрих-

функции: от того, что эта функция никогда не принимает 0 в качестве значения и что двум различным значениям аргумента всегда соответствуют два различных значения этой функции.

Таким образом, допущение рекурсивных определений равносильно *неявной характеристике штрих-функции*. Эта характеристика касается как раз тех двух свойств штрих-функции, в силу которых она дает нам отображение, соответствующее дедекиндовскому определению бесконечности, и формализация которых приводит нас к аксиомам (P_1) и (P_2) ¹⁾.

В свете этих соображений становится понятным, что введение рекурсивных определений согласуется не с любой непротиворечивой системой аксиом. Вместе с этим напрашивается предположение, что пеановские аксиомы (P_1) и (P_2) могут быть выведены с помощью рекурсивных определений. Такой вывод действительно оказывается возможным, причем для этого нам потребуется взять за основу лишь аксиомы равенства и нумерическую формулу

$$0' \neq 0.$$

Вывод формулы (P_1)

$$a' \neq 0$$

получается введением рекурсивных равенств

$$\begin{aligned} \text{sgn } 0 &= 0, \\ \text{sgn } n' &= 0'. \end{aligned}$$

Действительно, вторая из этих формул в результате подстановки дает

$$\text{sgn } a' = 0'.$$

Далее, с помощью аксиом равенства мы получаем формулу

$$a' = 0 \rightarrow \text{sgn } a' = \text{sgn } 0,$$

которая в сочетании с формулами

$$\text{sgn } a' = 0' \text{ и } \text{sgn } 0 = 0$$

дает с использованием второй аксиомы равенства формулу

$$a' = 0 \rightarrow 0' = 0.$$

Получающаяся отсюда путем контрапозиции формула

$$0' \neq 0 \rightarrow a' \neq 0$$

вместе с взятой в качестве аксиомы формулой

$$0' \neq 0$$

¹⁾ См. с. 272 и далее.

дает с помощью схемы заключения искомую формулу

$$a' \neq 0.$$

Для вывода формулы (P_2)

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

мы возьмем уже приводившиеся выше рекурсивные равенства

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0, \\ \delta(n') &= n. \end{aligned}$$

Второе из них при помощи подстановки дает формулы

$$\delta(a') = a, \quad \delta(b') = b.$$

Из этих формул и из получающейся с помощью аксиом равенства формулы

$$a' = b' \rightarrow \delta(a') = \delta(b')$$

мы с помощью второй аксиомы равенства получаем искомую формулу

$$a' = b' \rightarrow a = b.$$

Таким образом, в результате допущения рекурсивных определений аксиомы (P_1) и (P_2) становятся ненужными.

Впрочем, если пользоваться схемой индукции, то формула (P_1) может быть выведена также с помощью рекурсивных равенств для $\delta(n)$ вместо $\text{sgn } n$. В самом деле, ввиду того, что у нас имеется схема индукции и формула $0' \neq 0$, нам достаточно вывести формулу

$$a' \neq 0 \rightarrow a'' \neq 0.$$

Но эта формула получается путем контрапозиции из формулы

$$a'' = 0 \rightarrow a' = 0,$$

которая с помощью рекурсивных равенств для $\delta(n)$ и аксиомы (J_2) получается из формулы

$$a'' = 0 \rightarrow \delta(a'') = \delta(0),$$

выводимой с помощью аксиом равенства ¹⁾.

Попутно напомним, что (по замечанию, сделанному в гл. V ¹⁾) из равенства $\delta(n') = n$ с помощью аксиомы (J_2) может быть выведена формула (J_1) .

Другая возможность, открывающаяся в результате допущения рекурсивных определений, заключается в том, что символ $<$ можно взять не в качестве основного знака, а ввести его посред-

¹⁾ См. с. 238.

ством определения. В самом деле, используя приведенное выше рекурсивное определение функции $\delta(n)$, введем сначала функциональный знак $a \dot{\div} b$ с помощью рекурсивных равенств

$$\begin{aligned} a \dot{\div} 0 &= a, \\ a \dot{\div} n' &= \delta(a \dot{\div} n). \end{aligned}$$

А затем явно определим формулу $a < b$ при помощи эквивалентности

$$a < b \sim b \dot{\div} a \neq 0.$$

Используя эту эквивалентность, формулы

$$(<_1), (<_2), (<_3)$$

можно будет перевести в формулы

$$\begin{aligned} a \dot{\div} a &= 0, \quad b \dot{\div} a \neq 0 \ \& \ c \dot{\div} b \neq 0 \rightarrow c \dot{\div} a \neq 0, \\ a' \dot{\div} a &\neq 0. \end{aligned}$$

А эти последние можно будет вывести с использованием схемы индукции.

Методика проведения соответствующих выводов математикам хорошо знакома, и логический формализм играет при этом только подчиненную роль. Поэтому будет достаточно, если ход этих выводов мы заметим лишь в целом.

Для проведения этих выводов мы воспользуемся замечанием, сделанным в гл. V относительно выводимости формулы $(J_1)^1$. В самом деле, в нашем распоряжении имеется равенство $\delta(n') = n$. В соответствии с этим применение аксиом равенства сводится к применению аксиомы (J_2) и второго рекурсивного равенства для $\delta(n)$. Поэтому в дальнейшем мы часто будем говорить просто об аксиоме равенства, имея в виду аксиому (J_2) .

Дальнейшему мы предпошлем еще одно замечание относительно использования схемы индукции. Из схемы индукции в качестве производной схемы можно получить следующее ее обобщение:

$$\frac{\mathfrak{A}(0), \mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{A}(y')}{\mathfrak{A}(y)},$$

где y — произвольная не входящая в $\mathfrak{A}(0)$ свободная индивидуальная переменная. Выводимость этой схемы устанавливается следующим образом. Если y представляет собой переменную a , то никакого доказательства не требуется. Пусть y — какая-нибудь отличная от a переменная, и предположим сначала, что a вообще не входит в $\mathfrak{A}(y)$. Тогда из формулы $\mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{A}(y')$ мы подстановкой получим формулу $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$, которая

¹⁾ См. с. 238.

вместе с $\mathfrak{A}(0)$ по схеме индукции даст формулу $\mathfrak{A}(a)$, из которой мы подстановкой снова получим формулу $\mathfrak{A}(y)$. Если же $\mathfrak{A}(y)$ переменную a содержит, то мы подставим в формулах $\mathfrak{A}(0)$ и $\mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{A}(y')$ вместо a какую-нибудь свободную переменную, не встречающуюся в $\mathfrak{A}(y)$. Из получившихся в результате этого формул $\mathfrak{A}^*(0)$ и $\mathfrak{A}^*(y) \rightarrow \mathfrak{A}^*(y')$ (в которые переменная a больше не входит) мы получим, как только что было показано, формулу $\mathfrak{A}^*(y)$, а из нее снова подстановкой — формулу $\mathfrak{A}(y)$.

Применение указанной обобщенной схемы индукции мы для краткости будем называть индукцией по y . Например, формулу

$$a' \dot{\div} b' = a \dot{\div} b$$

мы можем получить индукцией по b из формул

$$a' \dot{\div} 0' = a \dot{\div} 0$$

и

$$a' \dot{\div} b' = a \dot{\div} b \rightarrow a' \dot{\div} b'' = a \dot{\div} b',$$

которые сами получаются с использованием рекурсивных равенств для $a \dot{\div} b$ и $\delta(n)$, а также аксиомы равенства.

Теперь, исходя из этого специального, полученного индукцией по b равенства

$$a' \dot{\div} b' = a \dot{\div} b,$$

при помощи схемы индукции и аксиомы равенства можно будет вывести формулы

$$a \dot{\div} a = 0 \quad \text{и} \quad a' \dot{\div} a = 0'.$$

В то же самое время, используя формулу $0' \neq 0$, мы можем получить формулу

$$a' \dot{\div} a \neq 0.$$

Тем самым мы получили первые две формулы из числа тех, которые нам надлежит вывести, и, значит, осталось вывести только формулу

$$b \dot{\div} a \neq 0 \ \& \ c \dot{\div} b \neq 0 \rightarrow c \dot{\div} a \neq 0.$$

Этот вывод мы проведем индукцией по b и с этой целью сокращенно обозначим рассматриваемую формулу посредством $\mathfrak{A}(b)$.

Формула $\mathfrak{A}(0)$ получается при помощи средств исчисления высказываний из формулы $0 \dot{\div} a = 0$, которая сама получается по схеме индукции.

Нам остается вывести формулу $\mathfrak{A}(b) \rightarrow \mathfrak{A}(b')$. Для этого рассмотрим два случая: $b \dot{\div} a \neq 0$ и $b \dot{\div} a = 0$. С формальной точки зрения это означает, что формулу $\mathfrak{A}(b) \rightarrow \mathfrak{A}(b')$ мы получим

средствами исчисления высказываний из двух формул:

$$b \div a \neq 0 \rightarrow (\mathfrak{A}(b) \rightarrow \mathfrak{A}(b'))$$

и

$$b \div a = 0 \rightarrow (\mathfrak{A}(b) \rightarrow \mathfrak{A}(b')).$$

Первая из этих формул получается средствами исчисления высказываний из формулы

$$c \div b' \neq 0 \rightarrow c \div b \neq 0.$$

А эта формула получается контрапозицией из формулы

$$c \div b = 0 \rightarrow c \div b' = 0,$$

которая получается из равенств

$$c \div b' = \delta(c \div b) \text{ и } \delta(0) = 0$$

с использованием аксиомы равенства.

Для вывода второй формулы

$$b \div a = 0 \rightarrow (\mathfrak{A}(b) \rightarrow \mathfrak{A}(b'))$$

мы можем вообще не пользоваться посылкой $\mathfrak{A}(b)$, а вывести сразу формулу

$$b \div a = 0 \rightarrow \mathfrak{A}(b').$$

Действительно, эта формула, которая записывается в виде

$$b \div a = 0 \rightarrow (b' \div a \neq 0 \ \& \ c \div b' \neq 0 \rightarrow c \div a \neq 0),$$

получается средствами исчисления высказываний с помощью уже выведенной формулы

$$c \div b' \neq 0 \rightarrow c \div b \neq 0$$

и формулы

$$b \div a = 0 \ \& \ b' \div a \neq 0 \rightarrow (c \div b \neq 0 \rightarrow c \div a \neq 0),$$

которую мы по правилу силлогизма получим из формул

$$b = a \rightarrow (c \div b \neq 0 \rightarrow c \div a \neq 0)$$

и

$$b \div a = 0 \ \& \ b' \div a \neq 0 \rightarrow b = a.$$

Первая из этих формул получается в результате подстановки в (J_2) .

Таким образом, нам остается вывести только вторую формулу. С этой целью мы прежде всего воспользуемся формулами

$$a \div b = a' \div b' \text{ и } a \div b' = \delta(a \div b),$$

из которых, произведя подстановки и применив аксиому равенства, получим равенство

$$b \div a = \delta(b' \div a).$$

Далее, с помощью аксиомы равенства из выводимой по схеме индукции формулы

$$a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$$

мы получим вспомогательную формулу

$$\delta(a) = 0 \ \& \ a \neq 0 \rightarrow a = 0'.$$

Произведя подстановку в эту вспомогательную формулу и воспользовавшись предшествующим ей равенством и аксиомой (J_2) , мы получим

$$b \div a = 0 \ \& \ b' \div a \neq 0 \rightarrow b' \div a = 0'.$$

Тем самым все сводится к выводу формулы ¹⁾

$$*) \quad b' \div a \neq 0 \ \& \ b' \div a = 0' \rightarrow b = a.$$

Сначала выведем формулу

$$b' \div a \neq 0 \rightarrow b' \div (b' \div a) = a,$$

которую сокращенно обозначим через $\mathfrak{B}(b, a)$. При помощи аксиомы равенства из формул $b' \div 0 = b'$ и $b' \div b' = 0$ получим равенство

$$b' \div (b' \div 0) = 0.$$

Следовательно, выводима формула $\mathfrak{B}(b, 0)$. Если мы сможем вывести еще и $\mathfrak{B}(b, a) \rightarrow \mathfrak{B}(b, a')$, то с помощью схемы индукции получим искомую формулу $\mathfrak{B}(b, a)$.

Вывод формулы $\mathfrak{B}(b, a) \rightarrow \mathfrak{B}(b, a')$ получается разбором двух случаев: $a = 0$ и $a \neq 0$. Действительно, с одной стороны, из формулы $\mathfrak{B}(b, 0')$, которая получается аналогично $\mathfrak{B}(b, 0)$ в результате формализованного вычисления термина $b' \div (b' \div 0')$ (с использованием формул

$$b' \div 0' = b \div 0, \quad b \div 0 = b, \quad b' \div b = 0'),$$

мы, пользуясь аксиомой равенства и преобразованиями исчисления высказываний, выведем формулу

$$a = 0 \rightarrow \mathfrak{B}(b, a').$$

Для вывода формулы

$$a \neq 0 \rightarrow (\mathfrak{B}(b, a) \rightarrow \mathfrak{B}(b, a')),$$

¹⁾ Посылка $b' \div a \neq 0$, сама по себе лишняя в этой формуле, добавляется для упрощения дальнейших выводов.

т. е. (после соединения посылок)

$$a \neq 0 \& (b' \div a \neq 0 \rightarrow b' \div (b' \div a) = a) \rightarrow \\ (b' \div a' \neq 0 \rightarrow b' \div (b' \div a') = a'),$$

мы сначала с помощью формул

$$b' \div a' = \delta(b' \div a) \text{ и } \delta(c) \neq 0 \rightarrow c \neq 0$$

(во второй из которых вместо c надо будет подставить $b' \div a$) выведем формулу

$$b' \div a' \neq 0 \rightarrow b' \div a \neq 0.$$

Легко показать, что нам остается вывести формулу

$$a \neq 0 \& b' \div a \neq 0 \& b' \div (b' \div a) = a \rightarrow b' \div (b' \div a') = a'.$$

Для вывода этой формулы мы используем следующие две формулы:

$$b' \div a \neq 0 \rightarrow b' \div (b' \div a) = \delta(b' \div (b' \div a'))$$

и

$$a \neq 0 \& \delta(b' \div (b' \div a')) = a \rightarrow b' \div (b' \div a') = a',$$

первая из которых получается с помощью формул

$$a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a \text{ и } b' \div c' = \delta(b' \div c),$$

а вторая — с помощью формулы

$$a \neq 0 \& \delta(c) = a \rightarrow c = a'.$$

Искомая формула теперь может быть выведена из двух полученных нами формул при помощи аксиомы равенства и средств исчисления высказываний.

Теперь, после того как индукцией по a мы завершили вывод формулы $\mathfrak{B}(b, a)$, т. е.

$$b' \div a \neq 0 \rightarrow b' \div (b' \div a) = a,$$

мы с помощью аксиомы равенства и средств исчисления высказываний получим формулу

$$b' \div a \neq 0 \& b' \div a = 0' \rightarrow b' \div 0' = a,$$

а отсюда, ввиду того, что $b' \div 0' = b$, — формулу

$$b' \div a \neq 0 \& b' \div a = 0' \rightarrow b = a.$$

Но это и есть та формула *), которой нам не хватало для вывода формулы

$$b \div a \neq 0 \& c \div b \neq 0 \rightarrow c \div a \neq 0,$$

) См. формулу () на с. 373. — *Прим. ред.*

а эта последняя по определению выражения $a < b$ переводится в формулу $(<_2)$.

Следует, впрочем, отметить, что из формулы $\mathfrak{B}(b, a)$ с помощью формул

$$0 \div a = 0, \quad b \neq 0 \rightarrow b = \delta(b)', \quad (J_2)$$

разбором случаев $b = 0$ и $b \neq 0$ без труда получается формула

$$b \div a \neq 0 \rightarrow b \div (b \div a) = a.$$

Выводя нашу формулу $\mathfrak{B}(b, a)$, мы попутно получили и формулу

$$b \div a = 0 \& b' \div a \neq 0 \rightarrow b = a^1);$$

из этой формулы, производя подстановку a' вместо a и пользуясь равенством $b' \div a' = b \div a$, формулой $b = a' \rightarrow a' = b$, а также средствами исчисления высказываний, мы получаем формулу

$$b \div a \neq 0 \rightarrow a' = b \vee b \div a' \neq 0,$$

которая, с одной стороны, по определению неравенства $a < b$ переходит в формулу

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

а с другой стороны, дает формулу

$$b \div a = 0' \rightarrow a' = b.$$

Из выведенных формул $(<_1)$, $(<_2)$ и $(<_3)$ и только что упомянутой формулы

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b$$

с помощью аксиом равенства и схемы индукции, но без использования связанных переменных можно вывести формулы

$$\neg(a < 0), \quad a < b \rightarrow \neg(b < a'), \quad a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a,$$

как это было установлено в гл. VI ²⁾.

Таким образом, все формулы систем (A) и (B), не содержащие связанных переменных, могут быть выведены средствами элементарного исчисления со свободными переменными с добавлением

¹⁾ Вывод этой формулы, а тем самым и вывод формулы $(<_2)$, в первом издании получался с привлечением рекурсивного определения суммы $a + b$, которое было использовано для вывода формулы

$$b \div a = 0' \rightarrow a' = b;$$

то, что это обращение к сумме является излишним, было замечено Г. Крайзлом, к письменному сообщению которого (февраль 1962 г.) и восходит вышеупомянутый вывод.

²⁾ См. с. 330—333.

схемы индукции из аксиомы равенства (J_2), формулы $0' \neq 0$ и рекурсивных равенств для функций δ и $a \div b$ с использованием явного определения для $a < b$.

При этом подходе арифметические аксиомы, касающиеся штрих-функции и предиката $a < b$, заменяются рекурсивными равенствами, к которым дополнительно присоединяется нумерическая формула $0' \neq 0$.

§ 2. Рекурсивная арифметика

1. Вывод законов для сложения, вычитания, умножения и для символа $<$. Возможности рекурсивных определений еще больше проявляются при систематическом развертывании формализма, который получается, если за основу взять элементарное исчисление со свободными переменными, аксиому равенства и формулу $0' \neq 0$, при широком использовании рекурсивных определений (наряду с явными) и схемы индукции. При помощи этого формализма можно строить понятия элементарной арифметики и формально выводить различные ее теоремы — например теоремы о наибольшем общем делителе и об однозначности разложения чисел на простые множители.

Такой способ изложения арифметики был предложен Сколемом в 1923 г.¹⁾

Мы продемонстрируем здесь несколько характерных результатов этих рассуждений. Дальнейшему изложению мы предположим обзор арифметических законов, которым подчиняются операции сложения и умножения, а также функция $a \div b$; вместе с этим мы рассмотрим некоторые относящиеся сюда формулы и кратко наметим их выводы.

Прежде всего, для суммы $a + b$ при помощи рекурсивных равенств с использованием схемы индукции могут быть выведены формулы

$$0 + a = a$$

и

$$a' + b = a + b'.$$

С помощью этих двух формул мы получим, пользуясь полной индукцией, закон коммутативности сложения

$$a + b = b + a.$$

Закон ассоциативности сложения

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

¹⁾ Skolem T. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich. — Videnskapsselskapets Skrifter, I, Mat.-Nat. Kl., 1923, № 6.

как уже было упомянуто, выводится индукцией по c . Для умножения $a \cdot b$ с помощью полной индукции мы сначала получим

$$0 \cdot a = 0.$$

Затем, используя закон ассоциативности сложения, а также формулу

$$a + b' = b + a',$$

которая получается из формулы

$$a' + b = a + b'$$

и закона коммутативности сложения, мы полной индукцией по b получим формулу

$$a' \cdot b = (a \cdot b) + b.$$

Эту формулу мы будем писать также и без скобок, пользуясь принятым в математике соглашением о том, что произведение $a \cdot b$, являющееся членом суммы, не обязательно заключать в скобки.

Используя эту формулу и формулу

$$0 \cdot a = 0,$$

мы можем получить — полной индукцией по какой-либо из переменных — закон коммутативности умножения

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Закон правой дистрибутивности

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

получается полной индукцией по c с использованием закона ассоциативности сложения.

Из закона правой дистрибутивности и закона коммутативности умножения получается закон левой дистрибутивности

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

С помощью закона правой дистрибутивности полной индукцией по c мы получаем, наконец, закон ассоциативности умножения

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Ввиду наличия законов ассоциативности сложения и умножения, целесообразно, — как это общепринято в математике, — опускать в многочленных суммах и произведениях скобки.

Для $a \div b$ уже была установлена выводимость формул

$$0 \div a = 0, \quad a \div a = 0,$$

$$a' \div b' = a \div b.$$

С помощью последней из них мы индукцией по c получим

$$(a + c) \div (b + c) = a \div b.$$

Подставив в эту формулу 0 вместо b , а затем b вместо c и пользуясь равенством

$$0 + a = a,$$

мы получим формулу

$$(a + b) \div b = a.$$

Далее, индукцией по c мы получим

$$a \div (b + c) = (a \div b) \div c,$$

а отсюда, в частности,

$$a \div (a + b) = 0.$$

Кроме того, индукцией по b может быть выведена формула

$$a \cdot c \div b \cdot c = (a \div b) \cdot c.$$

Для этого надо воспользоваться формулами

$$0 \cdot a = 0,$$

$$a' \cdot b = a \cdot b + b,$$

только что упоминавшейся формулой

$$a \div (b + c) = (a \div b) \div c$$

и формулой

$$a \cdot c \div c = (a \div 0') \cdot c,$$

которая получается индукцией по a с использованием равенства

$$(a + b) \div b = a.$$

Из формул

$$(a + b) \div b = a, \quad 0 \div a = 0$$

получается формула

$$a + b = 0 \rightarrow a = 0,$$

а из нее в сочетании с законом коммутативности сложения получается

$$a + b = 0 \rightarrow a = 0 \& b = 0,$$

а тем самым и формула

$$a + b = 0 \sim a = 0 \& b = 0.$$

Соответствующая формула для произведения имеет вид

$$a \cdot b = 0 \sim a = 0 \vee b = 0.$$

Она выводится из формулы

$$b \neq 0 \rightarrow (a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0),$$

которая получается с помощью уже упоминавшейся выводимой формулы

$$a \neq 0 \rightarrow a = \delta(a)'$$

и формулы

$$a + b = 0 \rightarrow b = 0.$$

Основываясь на определении отношения $a < b$

$$a < b \sim b \div a \neq 0$$

и используя арифметические законы, выведенные для $a \div b$, мы можем для этого отношения, кроме уже упоминавшихся ранее формул ¹⁾, получить следующие две формулы:

$$a < b \sim a + c < b + c$$

и

$$c \neq 0 \rightarrow (a < b \sim a \cdot c < b \cdot c).$$

Первая из них получается из равенства

$$(a + c) \div (b + c) = a \div b,$$

а вторая — из равенства

$$a \cdot c \div b \cdot c = (a \div b) \cdot c$$

в сочетании с формулой

$$a \cdot b = 0 \sim a = 0 \vee b = 0.$$

Как мы недавно установили ²⁾, с помощью рекурсивных равенств для $\delta(n)$ и $a \div b$ может быть выведена формула

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a.$$

Из нее, если учесть определение для $a < b$, с помощью элементарного преобразования получается формула

$$a \div b = 0 \& b \div a = 0 \rightarrow a = b,$$

из которой мы затем получаем

$$(a \div b) + (b \div a) = 0 \rightarrow a = b,$$

а потом и

$$a = b \sim (a \div b) + (b \div a) = 0.$$

¹⁾ См. с. 370—375.

²⁾ См. с. 375.

Из формулы

$$a \div b = 0 \ \& \ b \div a = 0 \rightarrow a = b,$$

взятой вместе с определениями неравенств $a < b$ и $a \leq b$ ¹⁾, вытекает, кроме того, импликация

$$a \div b = 0 \rightarrow a \leq b.$$

С другой стороны, из $a \div a = 0$, (J_2), $a < b \rightarrow \neg (b < a)$ и определения для $a < b$ получается формула

$$a \leq b \rightarrow a \div b = 0.$$

Тем самым мы получаем эквивалентность

$$a \leq b \sim a \div b = 0.$$

После этого без труда может быть установлена выводимость следующих формул:

$$\begin{aligned} a &\leq b \vee b < a, \\ a &\leq b \ \& \ b \leq a \rightarrow a = b, \\ a &\leq a + b, \\ a &\leq 0 \rightarrow a = 0. \end{aligned}$$

Из первоначального определения неравенства $a \leq b$ на основании ($\leq_2$) и аксиомы равенства непосредственно получается формула

$$a \leq b \ \& \ b \leq c \rightarrow a \leq c.$$

Отметим также, что из ранее выведенной формулы²⁾

$$b \div a = 0 \ \& \ b' \div a \neq 0 \rightarrow b = a$$

в результате подстановок и использования равенства $a \div b = a' \div b'$ мы можем получить формулу

$$a \div b' = 0 \ \& \ a \div b \neq 0 \rightarrow a = b',$$

из которой, ввиду эквивалентности $a \div b = 0 \sim a \leq b$, вытекает формула

$$a \leq b' \rightarrow a \leq b \vee a = b',$$

которую мы в дальнейшем будем использовать вместе с формулой $a \leq 0 \rightarrow a = 0$ для индукций.

В заключение упомянем еще о выводимости формулы

$$a < b \rightarrow a + (b \div a) = b,$$

¹⁾ См. с. 358.

²⁾ См. с. 375.

которая получается индукцией по a с использованием формул

$$\begin{aligned} 0 + b &= b, \quad a' < b \rightarrow a < b, \quad a' + b = a + b', \\ a \neq 0 &\rightarrow a = \delta(a)'. \end{aligned}$$

2. Изображение высказываний равенствами вида $t=0$; суммы и произведения с переменным числом членов; изображение высказываний с ограниченными кванторами; изображение максимума и минимума. После этих предварительных замечаний мы перейдем к доказательству следующей теоремы:

Всякая формула нашего формализма, не содержащая формульных переменных, переводима в некоторое равенство вида

$$t = 0.$$

Действительно, каждая из подлежащих рассмотрению формул либо сама является равенством, либо оказывается построенной из равенств при помощи связок исчисления высказываний, либо же при помощи явных определений переводится в равенство или соответственно в формулу, построенную из равенств. Далее, каждая из связок исчисления высказываний может быть выражена в смысле переводимости через отрицание и дизъюнкцию. Таким образом, для доказательства нашей теоремы будет достаточно доказать следующие три утверждения:

1. Каждое равенство

$$a = b$$

переводимо в некоторое равенство

$$t = 0.$$

2. Если формула $\mathcal{A}$ переводима в равенство вида

$$t = 0,$$

то $\neg \mathcal{A}$ также переводима в равенство такого вида.

3. Если формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обе переводимы в равенства вида

$$t = 0,$$

то формула $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ также переводима в такое равенство.

В справедливости этих утверждений мы убедимся следующим простым способом.

1. Как упоминалось выше, выводима эквивалентность

$$a = b \sim (a \div b) + (b \div a) = 0;$$

подставив в эту эквивалентность a вместо a и b вместо b , мы получим, что равенство

$$a = b$$

переводимо в равенство

$$(a \div b) + (b \div a) = 0.$$

2. С помощью рекурсивных равенств

$$\overline{\text{sgn}} 0 = 0';$$

$$\overline{\text{sgn}} n' = 0$$

введем функцию $\overline{\text{sgn}} n$. Из этих равенств с помощью формулы

$$a \neq 0 \rightarrow a = \delta(a)'$$

мы выведем эквивалентность

$$a \neq 0 \sim \overline{\text{sgn}} a = 0.$$

Пусть теперь формула $\mathfrak{A}$ переводима в равенство

$$t = 0,$$

т. е. пусть выводима эквивалентность

$$\mathfrak{A} \sim t = 0.$$

Тогда из нее может быть получена формула

$$\neg \mathfrak{A} \sim t \neq 0;$$

с другой стороны, из только что выведенной эквивалентности для функции $\text{sgn } a$ мы при помощи подстановки получаем

$$t \neq 0 \sim \overline{\text{sgn}} t = 0;$$

тем самым получается формула

$$\neg \mathfrak{A} \sim \overline{\text{sgn}} t = 0.$$

3. Предположим, что у нас имеются эквивалентности

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{z} = 0,$$

$$\mathfrak{B} \sim t = 0.$$

Из них мы получим

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \sim \mathfrak{z} = 0 \vee t = 0.$$

Теперь воспользуемся выводимой эквивалентностью

$$a = 0 \vee b = 0 \sim a \cdot b = 0.$$

Если мы подставим в нее $\mathfrak{z}$ вместо a и t вместо b , то в сочетании с предыдущей эквивалентностью получим

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \sim \mathfrak{z} \cdot t = 0.$$

Тем самым сформулированная нами теорема доказана полностью. В связи с этим заметим также, что из двух эквивалентностей

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{z} = 0$$

и

$$\mathfrak{B} \sim t = 0$$

с помощью выводимой формулы

$$a = 0 \& b = 0 \sim a + b = 0$$

может быть выведена эквивалентность

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \sim \mathfrak{z} + t = 0.$$

Таким образом, при переводе формул в равенства вида

$$t = 0$$

конъюнкции соответствует сумма, а дизъюнкции — произведение приравняваемых нулю термов.

Поэтому, если формула $\mathfrak{A}(a)$ переводима в формулу

$$t(a) = 0,$$

то для любой цифры $\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z} + 1$)-членная конъюнкция

$$\mathfrak{A}(0) \& \mathfrak{A}(0') \& \dots \& \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

переводима в равенство

$$t(0) + t(0') + \dots + t(\mathfrak{z}) = 0,$$

а ($\mathfrak{z} + 1$)-членная дизъюнкция

$$\mathfrak{A}(0) \vee \mathfrak{A}(0') \vee \dots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

переводима в равенство

$$t(0) \cdot t(0') \cdot \dots \cdot t(\mathfrak{z}) = 0.$$

Теперь в этих суммах и произведениях с помощью рекурсивных определений мы можем перейти от фиксированного числа членов к переменному. Используя принятые в математике знаки для суммы и произведения, мы следующим образом запишем вводимые для этой цели рекурсивные равенства:

$$\sum_{x \leq 0} t(x) = t(0),$$

$$\sum_{x \leq n'} t(x) = \left(\sum_{x \leq n} t(x) \right) + t(n'),$$

$$\prod_{x \leq 0} t(x) = t(0),$$

$$\prod_{x \leq n'} t(x) = \left(\prod_{x \leq n} t(x) \right) \cdot t(n').$$

Тем самым $\sum_{x \leq n} t(x)$ и $\prod_{x \leq n} t(x)$ рекурсивно вводятся нами как функции переменной n , а также и тех переменных, которые фигурируют в $t(n)$. При желании знаков суммы и произведения здесь можно было бы избежать, вводя в каждом отдельном случае свой особый функциональный знак.

В символике, использующей знаки для суммы и произведения, буква x играет роль связанной переменной, по отношению к которой должны применяться те же самые соглашения, которые мы применяем и к другим связанным переменным: эти буквы по внешнему виду должны отличаться от свободных переменных; должно действовать правило переименования, и, кроме того, мы требуем отсутствия коллизий. Такие соглашения выглядят естественными, особенно если вспомнить, что к правилам, касающимся связанных переменных в исчислении предикатов, мы были подведены как раз аналогией с требованиями, обычно предъявляемыми при употреблении индексов суммирования¹⁾.

Теперь, ввиду эквивалентности

$$\mathfrak{U}(a) \sim t(a) = 0,$$

формула

$$\sum_{x \leq n} t(x) = 0$$

соответствует содержательному высказыванию о том, что предикат $\mathfrak{U}(a)$ имеет место для всех чисел a от 0 до n (включительно), и в точности так же формула

$$\prod_{x \leq n} t(x) = 0$$

соответствует высказыванию о том, что предикат $\mathfrak{U}(a)$ имеет место по крайней мере для одного числа a среди чисел от 0 до n ²⁾. Это соответствие имеет место еще и в том смысле, что в нашем формализме равенства

$$\sum_{x \leq n} t(x) = 0 \text{ и } \prod_{x \leq n} t(x) = 0$$

играют ту роль, которая при использовании кванторов в исчислении предикатов отводится формулам

$$\forall x (x \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(x))$$

¹⁾ См. с. 132.

²⁾ Здесь и в дальнейшем в тех формулировках, делаемых в рамках естественного языка, которые мы либо сопоставляем выражениям нашего символического формализма, либо используем для эвристических рассуждений или же для рекурсивных определений, вместо готических букв, которыми мы обычно пользуемся для обозначения цифр, мы будем использовать латинские буквы; в этих случаях, пользуясь общепринятым в математике способом выражаться, мы будем также говорить вместо *цифр* о *числах*.

и

$$\exists x (x \leq n \& \mathfrak{U}(x)).$$

Действительно, применение основных формул (а) и (б) к обоим этим формулам дает нам

$$\forall x (x \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(x)) \rightarrow (a \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(a))$$

и

$$a \leq n \& \mathfrak{U}(a) \rightarrow \exists x (x \leq n \& \mathfrak{U}(x)),$$

а схемы (α) и (β) в применении к этим формулам выглядят следующим образом:

$$\frac{\mathfrak{B} \rightarrow (a \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(a))}{\mathfrak{B} \rightarrow \forall x (x \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(x))},$$

$$\frac{a \leq n \& \mathfrak{U}(a) \rightarrow \mathfrak{B}}{\exists x (x \leq n \& \mathfrak{U}(x)) \rightarrow \mathfrak{B}}$$

(здесь $\mathfrak{B}$ обозначает формулу, которая не содержит переменной a , но может содержать переменную n).

Если теперь мы заменим формулу

$$\forall x (x \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(x))$$

равенством

$$\sum_{x \leq n} t(x) = 0$$

а формулу

$$\exists x (x \leq n \& \mathfrak{U}(x))$$

равенством

$$\prod_{x \leq n} t(x) = 0$$

то обе получающиеся из (а) и (б) в результате такой подстановки формулы перейдут в формулы

$$\sum_{x \leq n} t(x) = 0 \rightarrow (a \leq n \rightarrow \mathfrak{U}(a))$$

и

$$a \leq n \& \mathfrak{U}(a) \rightarrow \prod_{x \leq n} t(x) = 0,$$

которые обе выводимы индукцией по n с помощью эквивалентности

$$\mathfrak{U}(a) \sim t(a) = 0;$$

а вместо применений схем (α) и (β) мы получим переход от формулы

$$\mathfrak{B} \rightarrow (a \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(a))$$

к формуле

$$\mathfrak{B} \rightarrow \sum_{x \leq n} t(x) = 0$$

и от формулы

$$a \leq n \ \& \ \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}$$

к формуле

$$\prod_{x \leq n} t(x) = 0 \rightarrow \mathfrak{B};$$

оба этих перехода также осуществимы в нашем формализме с помощью схемы индукции. Действительно, используя эквивалентность

$$\mathfrak{A}(a) \sim t(a) = 0,$$

из формулы

$$\mathfrak{B} \rightarrow (a \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(a))$$

можно индукцией по m вывести формулу

$$m \leq n \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \sum_{x \leq m} t(x) = 0).$$

Если в эту формулу вместо m подставить n , то можно будет опустить посылку $n \leq n$, являющуюся выводимой формулой, и мы получим

$$\mathfrak{B} \rightarrow \sum_{x \leq n} t(x) = 0.$$

Совершенно аналогично, из формулы

$$a \leq n \ \& \ \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}$$

при помощи

$$\mathfrak{A}(a) \sim t(a) = 0 \quad \text{и} \quad a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

индукцией по m мы получим формулу

$$m \leq n \rightarrow \left(\prod_{x \leq m} t(x) = 0 \rightarrow \mathfrak{B} \right),$$

а затем, подставив n вместо m и применив схему заключения, придем к формуле

$$\prod_{x \leq n} t(x) = 0 \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Таким образом, если формула $\mathfrak{A}(a)$ принадлежит нашему формализму, то мы оказываемся в состоянии изобразить в нем высказывания вида «для всех чисел a , не превосходящих n , имеет место $\mathfrak{A}(a)$ » или же «существует число a , не превосходящее n , для которого имеет место $\mathfrak{A}(a)$ »¹⁾.

Если бы мы захотели вместо условия $a \leq n$ взять условие $a < n$ и, следовательно, выразить то обстоятельство, что некоторое высказывание имеет место для всех чисел, меньших n , или соответственно для некоторого числа, меньшего n , то вместо функций $\sum_{x \leq n} t(x)$ и $\prod_{x \leq n} t(x)$ нам пришлось бы взять функции

$$\sum_{x < n} t(x) \quad \text{и} \quad \prod_{x < n} t(x),$$

определяемые рекурсивными равенствами вида

$$\begin{aligned} \sum_{x < 0} t(x) &= 0, & \prod_{x < 0} t(x) &= 0', \\ \sum_{x < n'} t(x) &= \left(\sum_{x < n} t(x) \right) + t(n), & \prod_{x < n'} t(x) &= \left(\prod_{x < n} t(x) \right) \cdot t(n). \end{aligned}$$

С другой стороны, если мы захотим брать эти суммы и произведения не от 0 до n , а от 1 до n , то мы должны будем положить

$$\sum_{1 \leq x \leq n} t(x) = \sum_{x < n} t(x'), \quad \prod_{1 \leq x \leq n} t(x) = \prod_{x < n} t(x').$$

Рекурсивно же можно определить и максимум термов $t(0)$, $t(1)$, ..., $t(n)$. Сначала равенством

$$\max(a, b) = a + (b \div a)$$

можно явно определить максимум чисел a и b . Из этого равенства можно будет получить формулы²⁾

$$\begin{aligned} a &\leq \max(a, b), \\ b &\leq a \rightarrow \max(a, b) = a, \\ a &< b \rightarrow \max(a, b) = b, \end{aligned}$$

¹⁾ При добавлении кванторов формулы

$$\forall x (x \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(x)) \sim \sum_{x \leq n} t(x) = 0,$$

$$\exists x (x \leq n \ \& \ \mathfrak{A}(x)) \sim \prod_{x \leq n} t(x) = 0$$

оказываются выводимыми.

²⁾ Об этом см. с. 380.

из которых затем, на основании альтернативы

$$a < b \vee b \leq a,$$

мы получим формулы

$$\max(a, b) = a \vee \max(a, b) = b$$

и

$$\max(a, b) = \max(b, a),$$

так что в целом у нас для $\max(a, b)$ получается следующая формальная характеристика:

$$\begin{aligned} a \leq b &\rightarrow \max(a, b) = b, & b \leq a &\rightarrow \max(a, b) = a, \\ a \leq \max(a, b), & & b \leq \max(a, b), \\ a \leq c \& b \leq c &\rightarrow \max(a, b) \leq c. \end{aligned}$$

Максимум a, b и c определяется равенством

$$\max(a, b, c) = \max(\max(a, b), c).$$

Аналогичным образом мы получим представление и для максимума нескольких чисел.

Теперь, чтобы для данного термина $t(c)$ посредством рекурсии определить максимум $t(0), t(1), \dots, t(n)$ (с переменным n), мы возьмем в качестве символа выражение $\max_{x \leq n} t(x)$, в котором буква x снова будет играть роль связанной переменной и которое будет являться термом с аргументом n . Соответствующие рекурсивные равенства будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \max_{x \leq 0} t(x) &= t(0), \\ \max_{x \leq n'} t(x) &= \max(\max_{x \leq n} t(x), t(n')). \end{aligned}$$

С помощью этих равенств индукцией по n могут быть выведены формулы

$$\begin{aligned} a \leq n &\rightarrow t(a) \leq \max_{x \leq n} t(x), \\ \sum_{x \leq n} (t(x) \div c) = 0 &\rightarrow \max_{x \leq n} t(x) \leq c; \end{aligned}$$

посредством этих формул значение $\max_{x \leq n} t(x)$ может быть охарактеризовано как наименьшее число, которое не меньше любого из значений $t(0), t(1), \dots, t(n)$.

Аналогично максимуму $t(0), t(1), \dots, t(n)$ мы можем рекурсивно определить и минимум этих термов. Исходная функция

$\min(a, b)$ задается посредством явного определения

$$\min(a, b) = a \div (a \div b),$$

из которого получается формула

$$a \leq b \rightarrow \min(a, b) = a.$$

Кроме того, на основании ранее выведенной ¹⁾ формулы

$$b \div a \neq 0 \rightarrow b \div (b \div a) = a$$

(после перестановки a и b) мы получаем

$$b < a \rightarrow \min(a, b) = b.$$

Теперь для любой формулы $\mathfrak{A}(a)$ с помощью рекурсивных равенств можно определить такую функцию, что в том случае, когда хотя бы одно из чисел от 1 до k обладает свойством $\mathfrak{A}(a)$, она принимает в качестве значения *наименьшее* из этих чисел, а в противном случае — число 0. Эта функция от k , которую мы будем обозначать символом $\min_{0 < x \leq k} \mathfrak{A}(x)$, получается с помощью перевода формулы $\mathfrak{A}(a)$ в соответствующее равенство

$$t(a) = 0.$$

Определяющие эту функцию рекурсивные равенства записываются в виде

$$\begin{aligned} \min_{0 < x \leq 0} \mathfrak{A}(x) &= 0, \\ \min_{0 < x \leq n'} \mathfrak{A}(x) &= \min_{0 < x \leq n} \mathfrak{A}(x) + n' \cdot \overline{\text{sgn}}(\min_{0 < x \leq n} \mathfrak{A}(x) + t(n')). \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что функция

$$\min_{0 < x \leq n} \mathfrak{A}(x)$$

наряду с выделенной в этой рекурсии переменной n может дополнительно содержать какие-нибудь параметры.

Характеристическое свойство этой функции формально представляется посредством следующих двух, выводимых с помощью схемы индукции формул:

$$\begin{aligned} \min_{0 < x \leq k} \mathfrak{A}(x) = 0 &\rightarrow (0 < a \& a \leq k \rightarrow \neg \mathfrak{A}(a)), \\ 0 < a \& a \leq k \& \mathfrak{A}(a) &\rightarrow \min_{0 < x \leq k} \mathfrak{A}(x) \leq a \& \mathfrak{A}(\min_{0 < x \leq k} \mathfrak{A}(x)). \end{aligned}$$

Терм

$$k \div \min_{0 < x \leq k} \mathfrak{A}(k \div x)$$

¹⁾ См. с. 375.

в том случае, если среди чисел, меньших k , имеются числа со свойством $\mathfrak{A}(a)$, представляет собой *наибольшее из таких чисел*, а в противном случае он равен числу k . Затем, используя рекурсивно определенную ¹⁾ функцию $\text{sgn } n$, мы получим функцию

$$\text{Min}_{x \leq k} \mathfrak{A}(x) = \text{Min}_{0 < x \leq k} \mathfrak{A}(x) \cdot \text{sgn}(t(0)),$$

которая в том случае, когда среди чисел от 0 до k имеются числа со свойством $\mathfrak{A}(a)$, равна наименьшему из этих чисел, а в противном случае равна 0.

3. Делимость; деление с остатком; наименьший отличный от 1 делитель; последовательность простых чисел; разложение числа на простые множители; нумерация конечных последовательностей чисел; нумерация числовых пар; наибольший общий делитель; наименьшее общее кратное. Полученные в результате этого формально-изобразительные и дедуктивные возможности позволяют нам без особого труда перевести в наш формализм многие понятия и доказательства элементарной арифметики. Проиллюстрируем эту мысль на нескольких примерах.

Начнем с понятия *делимости*. Высказывание « a делится на b » или « b делит a » выражает ту мысль, что существует число c , не превосходящее a и такое, что имеет место равенство

$$a = b \cdot c.$$

По виду этого высказывания мы без труда можем догадаться, что в нашем формализме оно изобразимо посредством равенства

$$t = 0$$

такого, что участвующий в нем терм t построен из рекурсивно определенных функций.

Такого рода терм мы будем кратко называть *рекурсивным термом*, а равенство

$$t = 0$$

или же

$$\mathfrak{s} = t,$$

где $\mathfrak{s}$ и t — рекурсивные термы, мы будем называть *рекурсивной формулой*. Подобно этому, всякую функцию, введенную рекурсивно или составленную из такого рода функций, мы также будем называть *рекурсивной функцией* ²⁾.

¹⁾ Повторно эта рекурсия приведена на с. 391.

²⁾ В современной терминологии понятие рекурсивности чаще всего употребляется в смысле общерекурсивности (в соответствии с определением, приведенным в т. II; см. указание 5 после оглавления т. II), в то время как термы и формулы, рекурсивные в смысле данного нами здесь определения, обычно называются *примитивно рекурсивными*.

Для понятия делимости представление при помощи рекурсивной формулы мы можем получить очень просто, формализовав *деление с остатком* введением двух рекурсивных функций $\rho(a, b)$ и $\pi(a, b)$. Чтобы написать рекурсивные равенства для этих функций, мы сначала введем следующие явные определения:

$$\alpha(a, b) = \text{sgn}((a \div b) + (b \div a))$$

и

$$\beta(a, b) = \overline{\text{sgn}}((a \div b) + (b \div a)),$$

в которых $\text{sgn } n$ и $\overline{\text{sgn}} n$ — функции, уже ранее введенные нами посредством рекурсивных равенств

$$\text{sgn } 0 = 0, \quad \overline{\text{sgn}} 0 = 0',$$

$$\text{sgn } n' = 0', \quad \overline{\text{sgn}} n' = 0.$$

Для функций $\alpha(a, b)$ и $\beta(a, b)$ могут быть выведены следующие формулы:

$$a = b \rightarrow \alpha(a, b) = 0 \ \& \ \beta(a, b) = 0',$$

$$a \neq b \rightarrow \alpha(a, b) = 0' \ \& \ \beta(a, b) = 0.$$

Теперь мы напомним рекурсивные равенства для $\rho(a, b)$ и $\pi(a, b)$:

$$\rho(0, b) = 0,$$

$$\rho(n', b) = \rho(n, b)' \cdot \alpha(b, \rho(n, b)');$$

$$\pi(0, b) = 0,$$

$$\pi(n', b) = \pi(n, b) + \beta(b, \rho(n, b)').$$

Из этих рекурсивных равенств индукцией по a мы выведем формулы

$$a = b \cdot \pi(a, b) + \rho(a, b),$$

$$b \neq 0 \rightarrow \rho(a, b) < b,$$

а из них — формулу

$$a = b \cdot c + r \ \& \ r < b \rightarrow c = \pi(a, b) \ \& \ r = \rho(a, b).$$

Функция $\rho(a, b)$ изображает остаток от деления a на b . В соответствии со сказанным, делимость числа a на b изображается равенством

$$\rho(a, b) = 0.$$

Равенство

$$\rho(a, k) = \rho(b, k)$$

выражает тот факт, что a и b при делении на k дают один и тот же остаток. Для этого в теории чисел обычно применяется запись

$$a \equiv b \pmod{k}.$$

Таким образом, эту запись мы можем ввести посредством явного определения

$$a \equiv b \pmod{k} \sim \rho(a, k) = \rho(b, k).$$

Понятие делимости ведет нас к понятию *простого числа*. Высказывание « n является простым числом» означает « n отлично от 1 и от 0, и для всякого числа a из ряда чисел от 1 до n имеет место альтернатива

$$a = 1 \vee a = n \vee \rho(n, a) \neq 0.$$

Легко видеть, что это высказывание выразимо посредством некоторой рекурсивной формулы

$$\rho(n) = 0.$$

Теперь мы покажем, что всякое число, начиная с 2, делится по крайней мере на одно простое число и что для всякого числа n существуют простые числа, большие n .

С этой целью мы сначала сформулируем определение для наименьшего из тех чисел от 0 до n , которые делят n и отличны от 1, если $n \neq 1$.

Это понятие тоже может быть изображено посредством некоторой рекурсивной функции $q(n)$. Исходя из определения этой функции и пользуясь равенством $\rho(n, n) = 0$, мы получим формулы

$$\begin{aligned} q(n) &\leq n, \\ \rho(n, q(n)) &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, можно вывести импликацию

$$n > 1 \rightarrow \rho(q(n)) = 0.$$

Две последние формулы выражают тот факт, что при $n > 1$ $q(n)$ является простым числом и одновременно делит n . Кроме того, из этих формул мы можем также получить

$$n > 1 \rightarrow (\rho(n) = 0 \sim q(n) = n).$$

Далее, введем функцию $n!$ с помощью рекурсивных равенств

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \\ (n')! &= (n!) \cdot n'. \end{aligned}$$

Из этих равенств можно вывести формулы

$$\begin{aligned} n! + 1 &> 1, \\ 1 < a \&a \leq n \rightarrow \rho(n! + 1, a) \neq 0, \end{aligned}$$

которые в сочетании с приведенными для $q(n)$ формулами дают формулы

$$\begin{aligned} q(n! + 1) &\leq n! + 1, \\ n &< q(n! + 1), \\ \rho(q(n! + 1)) &= 0. \end{aligned}$$

Эти формулы выражают тот факт, что $q(n! + 1)$ есть простое число, большее n и не превосходящее $n! + 1$.

Теперь при помощи некоторого рекурсивного термина $u(n)$ мы можем изобразить также и наименьшее из тех чисел от 1 до $n! + 1$, которые превосходят n и одновременно являются простыми числами. С помощью этого термина мы определим *последовательность простых чисел* посредством рекурсии

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= 2, \\ \mathcal{P}_n &= u(\mathcal{P}_n). \end{aligned}$$

Для $n \neq 0$ $\mathcal{P}_n$ представляет собой n -е нечетное простое число. Можно формально доказать, что для каждого числа $m > 2$, являющегося простым числом, существует число k из ряда чисел от 1 до m , для которого

$$m = \mathcal{P}_k.$$

Для того чтобы получить *разложение чисел на простые множители*, мы сначала с помощью обычной рекурсии

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^{n'} &= a^n \cdot a \end{aligned}$$

введем *степень* a^b . На основе этой рекурсии индукцией по c можно вывести следующие законы, которым подчиняется эта операция:

$$\begin{aligned} a^b \cdot a^c &= a^{b+c}, \\ a^c \cdot b^c &= (a \cdot b)^c; \end{aligned}$$

затем индукцией по b может быть получена формула

$$a > 1 \rightarrow b < a^b.$$

Затем мы определим функцию $v(n, k)$, которая в том случае, когда среди чисел, меньших n , имеется число a , такое что $\mathcal{P}_a^n$ является делителем n (при $n \neq 0$ это всегда имеет место), дает наибольшее из таких чисел, а в противном случае принимает значение 0. Это определение (в соответствии с нашим предшествующим изложением) также может быть формализовано с по-

мощью рекурсивных равенств, и из этих равенств и формулы

$$a > 1 \rightarrow b < a^b$$

получаются формулы

$$\begin{aligned} \rho(n, \mathcal{G}_k^{v(n, k)}) &= 0, \\ n \neq 0 \rightarrow \rho(n, \mathcal{G}_k^{v(n, k)+1}) &\neq 0, \end{aligned}$$

которые выражают тот факт, что (для $n \neq 0$) наибольшая степень числа $\mathcal{G}_k$, делящая n , равна $v(n, k)$. [Если n не делится на $\mathcal{G}_k$, то $v(n, k) = 0$.]

Возможность разложения на простые множители для любого отличного от 0 числа изображается теперь с помощью выводимой формулы

$$m \neq 0 \rightarrow m = \prod_{x < m} \mathcal{G}_x^{v(m, x)},$$

а однозначность разложения изображается формулами

$$\begin{aligned} v(\mathcal{G}_k^a, k) &= a, \\ k \neq l \rightarrow v(\mathcal{G}_k^a, l) &= 0, \\ a \cdot b \neq 0 \rightarrow v(a \cdot b, k) &= v(a, k) + v(b, k). \end{aligned}$$

При выводе указанных формул существенную роль играет формула

$$\rho(p) = 0 \ \& \ \rho(a \cdot b, p) = 0 \rightarrow \rho(a, p) = 0 \vee \rho(b, p) = 0.$$

Она соответствует теореме о том, что если произведение $a \cdot b$ делится на простое число, то по крайней мере один из сомножителей a и b делится на это простое число. Для того чтобы вывести эту формулу, нам надо будет формализовать содержательное доказательство этой теоремы, которое сводится к доказательству того, что если a не делится на простое число p , то каждое число c такое, что $a \cdot c$ делится на p , само делится на наименьшее из чисел от 1 до p , обладающих тем же свойством.

Номер наибольшего простого делителя числа n (для $n > 1$) можно рекурсивно определить как наибольшее из чисел k таких, что $k < n$ и $v(n, k) > 0$, если такие числа существуют, и число n в противном случае. Если эту функцию от n обозначить $\lambda(n)$, то мы получим

$$\begin{aligned} n > 1 \rightarrow v(n, \lambda(n)) &\neq 0, \\ \lambda(n) < k \rightarrow v(n, k) &= 0. \end{aligned}$$

Функция $v(n, k)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между числами, большими единицы, и конечными последовательностями чисел с последним членом, отличным от 0. С содержатель-

ной точки зрения это соответствие состоит в следующем: всякому числу $m > 1$ однозначно соответствует последовательность значений функции $v(m, k)$ для $k = 0, 1, 2, \dots, \lambda(m)$, последнее из которых $v(m, \lambda(m))$ отлично от 0, и, обратно, каждая последовательность чисел $a_0, \dots, a_l$, у которой $a_l \neq 0$, однозначно определяет число

$$m = \prod_{x \leq l} \mathcal{G}_x^{a_x}$$

такое, что

$$\lambda(m) = l \text{ и } v(m, k) = a_k \text{ для всех } k \leq l.$$

В отношении определения отображающей функции это отображение более элегантно, чем те, с помощью которых обычно в теории множеств доказываются счетность множества всех конечных последовательностей целых чисел.

После этого отображения, осуществляющего нумерацию конечных последовательностей чисел, мы рассмотрим нумерацию числовых пар. Эта задача — устроить с помощью рекурсивной функции нумерацию числовых пар, т. е. взаимно однозначное соответствие между числовыми парами и числами, — является сравнительно легкой и может быть решена различными способами. Наиболее естественным способом нумерации является тот, который соответствует следующему перечислению:

(0,0)	(3,1)
(0,1)	(2,3)
(1,0)	(3,2)
(1,1)	(3,3)
(0,2)	(0,4)
(2,0)	(4,0)
(1,2)	(1,4)
(2,1)	(4,1)
(2,2)	(2,4)
(0,3)	(4,2)
(3,0)	(3,4)
(1,3)	и т. д.

В этом перечислении номер пары (a, b) изображается следующей явно определенной функцией:

$$\sigma(a, b) = (b^2 + 2a) \cdot \overline{\text{sgn}}(a \div b) + (a^2 + 2b + 1) \cdot \text{sgn}(a \div b).$$

а функции $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$, обращающие функцию $\sigma(a, b)$, определяются следующим образом. Сначала дается рекурсивное определение для функции $[\sqrt{n}]$, значение которой равняется наи-

большему из тех чисел, квадрат которых не превосходит n . Это определение может быть дано с помощью равенств

$$[\sqrt{0}] = 0, \\ [\sqrt{n'}] = [\sqrt{n}] + \beta(([\sqrt{n}] + 1)^2, n').$$

Теперь, используя функцию $[\sqrt{n}]$, для $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$ можно дать следующие явные определения ¹⁾:

$$\sigma_1(n) = [\sqrt{n}] \cdot \rho(n \div [\sqrt{n}]^2, 2) + \\ \pi(n \div [\sqrt{n}]^2, 2) \cdot \beta(\rho(n \div [\sqrt{n}]^2, 2)), \\ \sigma_2(n) = \pi(n \div [\sqrt{n}]^2, 2) \cdot \rho(n \div [\sqrt{n}]^2, 2) + \\ [\sqrt{n}] \cdot \beta(\rho(n \div [\sqrt{n}]^2, 2)).$$

На основании этих определений могут быть выведены следующие формулы:

$$\sigma(\sigma_1(n), \sigma_2(n)) = n, \\ \sigma_1(\sigma(a, b)) = a, \quad \sigma_2(\sigma(a, b)) = b.$$

Любая функция нашего формализма, зависящая от двух или большего числа аргументов, с помощью функции $\sigma(a, b)$ может быть выражена через функцию, зависящую только от одного аргумента.

В самом деле, рассмотрим произвольную функцию $\varphi(a, b)$ от двух аргументов. Выбрав какой-нибудь функциональный знак с одним аргументом, например ψ , положим

$$\psi(s) = \varphi(\sigma_1(s), \sigma_2(s)).$$

Тогда имеем

$$\psi(\sigma(a, b)) = \varphi(a, b).$$

Для того чтобы с помощью функции одного аргумента и функции $\sigma(a, b)$ выразить функцию $\varphi(a, b, c)$, мы положим

$$\chi(r) = \varphi(\sigma_1(\sigma_1(r)), \sigma_2(\sigma_1(r)), \sigma_2(r));$$

тогда получится

$$\chi(\sigma(\sigma(a, b), c)) = \varphi(a, b, c).$$

Тем же самым способом функции $\sigma(a, b)$, $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$ можно использовать и для того, чтобы рекурсии с несколькими параметрами свести к рекурсиям только с одним параметром и к явным определениям. Пусть, например, у нас имеется рекурсия с тремя

¹⁾ Определение функций $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$ с помощью одновременной рекурсии см. на с. 403.

параметрами

$$\varphi(a, b, c, 0) = a(a, b, c), \\ \varphi(a, b, c, n') = b(a, b, c, n, \varphi(a, b, c, n)).$$

Тогда мы можем свести ее к рекурсии с двумя параметрами, введя сначала с помощью рекурсивных равенств

$$\psi(a, b, 0) = a(a, \sigma_1(b), \sigma_2(b)), \\ \psi(a, b, n') = b(a, \sigma_1(b), \sigma_2(b), n, \psi(a, b, n))$$

некоторую новую функцию $\psi(a, b, n)$ и применив затем явное определение

$$\varphi(a, b, c, n) = \psi(a, \sigma(b, c), n).$$

Действительно, если в рекурсивные равенства для функции $\psi(a, b, n)$ вместо b подставить терм $\sigma(b, c)$ и воспользоваться равенствами

$$\sigma_1(\sigma(b, c)) = b, \quad \sigma_2(\sigma(b, c)) = c,$$

то, опираясь на данное нами определение функции φ , можно будет показать, что приведенные выше рекурсивные равенства для $\varphi(a, b, c, n)$ являются выводимыми формулами.

Подобным образом можно любую рекурсию с несколькими параметрами заменить рекурсией с числом параметров, меньшим на единицу, и поэтому повторное применение этого приема позволяет свести любую рекурсию с несколькими параметрами к рекурсии только с одним параметром и к явным определениям.

Для определения используемых при этом функций $\sigma(a, b)$, $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$ тоже требуются рекурсии не более чем с одним параметром, а именно рекурсии для функций

$$a + b, a \cdot b, \delta(n), a \div b, \rho(a, b), \pi(a, b) \text{ и } [\sqrt{n}].$$

[Встречающиеся в определениях функций $\sigma(a, b)$, $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$ и $[\sqrt{n}]$ функции $\text{sgn } n$, $\text{sgn } n$ и $\beta(a, b)$ могут быть явно определены через $a \div b$ с помощью равенств

$$\overline{\text{sgn } n} = 1 \div n, \quad \text{sgn } n = 1 \div (1 \div n), \\ \beta(a, b) = \overline{\text{sgn } ((a \div b) + (b \div a))}.]$$

Другая простая нумерация числовых пар, отличная от той, которую нам дает функция $\sigma(a, b)$, может быть произведена при помощи функции $\tau(a, b)$, которая явно определяется равенством

$$\tau(a, b) = \binom{a+b+1}{2} + a,$$

где функция $\binom{n}{2}$ вводится рекурсивными равенствами

$$\binom{0}{2} = 0,$$

$$\binom{n'}{2} = \binom{n}{2} + n.$$

Теперь рассмотрим вкратце теорию *наибольшего общего делителя*. Понятие наибольшего общего делителя двух чисел a и b (из которых хотя бы одно отлично от 0) прямым путем ведет нас к рекурсивному определению. Однако для того, чтобы добраться до существенных свойств наибольшего общего делителя по возможности более просто, целесообразно исходить из некоторого другого определения. Пусть $a \cdot b \neq 0$. Среди чисел от 1 до $a \cdot b$ мы рассмотрим те числа c , для которых существуют числа k и l такие, что $k \leq b$, $l \leq a$ и

$$k \cdot a \div l \cdot b = c.$$

При условии, что $a \cdot b \neq 0$, такое число c имеется всегда; в качестве такого числа можно взять, например, a . Мы построим рекурсивный терм, который изображает наименьшее из таких чисел c , если $a \cdot b \neq 0$, и число 0 в противном случае. Прибавлением термина $\text{sgn } a \cdot b + \text{sgn } b \cdot a$ мы можем еще добиться того, чтобы при $a = 0$ получалось значение b , а при $b = 0$ — значение a . Обозначим полученный таким образом терм

$$\delta(a, b).$$

Основываясь на выводимости формулы

$$k \leq b \text{ \& } l \leq a \rightarrow k \cdot a \div l \cdot b = (a \div l) \cdot b \div (b \div k) \cdot a$$

и используя формулы

$$a \div l \leq a, \quad b \div k \leq b,$$

мы получим формулу

$$\delta(a, b) = \delta(b, a).$$

Затем можно получить формулу

$$r \cdot a \div s \cdot b = t \vee s \cdot b \div r \cdot a = t \rightarrow t = 0 \vee \delta(a, b) \leq t$$

и с ее помощью вывести формулу

$$\rho(b, \delta(a, b)) = 0,$$

из которой, ввиду того, что $\delta(a, b) = \delta(b, a)$, можно получить и равенство

$$\rho(a, \delta(a, b)) = 0.$$

Кроме того, оказывается выводимой формула

$$\rho(a, d) = 0 \text{ \& } \rho(b, d) = 0 \rightarrow \rho(\delta(a, b), d) = 0.$$

Полученные нами формулы выражают тот факт, что $\delta(a, b)$ является общим делителем a и b и что каждый общий делитель a и b делит также и $\delta(a, b)$. Тем самым получается, что, за исключением случая, когда $a = 0$ и $b = 0$, $\delta(a, b)$ представляет собой *наибольший* общий делитель чисел a и b , что и выражается формулой

$$a + b \neq 0 \text{ \& } \rho(a, d) = 0 \text{ \& } \rho(b, d) = 0 \rightarrow d \leq \delta(a, b).$$

Определение $\delta(a, b)$ непосредственно дает нам представимость наибольшего общего делителя a и b (при $a \cdot b \neq 0$) в виде

$$k \cdot a \div l \cdot b,$$

где k и l — некоторые числа такие, что $k \leq b$ и $l \leq a$. Фигурирующее в этом представлении число $k \cdot a$ удовлетворяет сравнениям

$$k \cdot a \equiv 0 \pmod{a}$$

и

$$k \cdot a \equiv \delta(a, b) \pmod{b}.$$

В то же самое время мы получаем

$$(a \div l) \cdot b \equiv \delta(a, b) \pmod{a},$$

$$(a \div l) \cdot b \equiv 0 \pmod{b}.$$

Отсюда получаем следующие сравнения с переменными r и s :

$$(a \div l) \cdot b \cdot r + k \cdot a \cdot s \equiv r \cdot \delta(a, b) \pmod{a},$$

$$(a \div l) \cdot b \cdot r + k \cdot a \cdot s \equiv s \cdot \delta(a, b) \pmod{b}.$$

Это вычисление может быть полностью осуществлено в рамках нашего формализма; действительно, сравнимость чисел вводилась посредством явного определения с помощью функции $\rho(a, b)$. От полученных таким образом сравнений, в левых частях которых, кроме того, терм

$$(a \div l) \cdot b \cdot r + k \cdot a \cdot s$$

можно заменить термом

$$\rho((a \div l) \cdot b \cdot r + k \cdot a \cdot s),$$

мы придем к выводу формулы, соответствующей высказыванию о том, что при $a \cdot b \neq 0$ среди чисел, меньших $a \cdot b$, имеется

такое число n , для которого имеют место сравнения

$$n \equiv r \cdot d(a, b) \pmod{a},$$

$$n \equiv s \cdot d(a, b) \pmod{b},$$

где r и s фигурируют в качестве произвольных параметров.

Если теперь дополнительно наложить условие $d(a, b) = 1$, которое выражает в а и м н у простоту чисел a и b , т. е. отсутствие у них общих делителей, отличных от 1, то в этом случае мы получим, что среди чисел, меньших $a \cdot b$, существует число n , удовлетворяющее сравнениям

$$n \equiv r \pmod{a},$$

$$n \equiv s \pmod{b}$$

при произвольных r и s .

Еще проще, чем приведенные нами теоремы о наибольшем общем делителе, получаются теоремы о наименьшем общем кратном. Наименьшее общее кратное чисел a и b может быть рекурсивно определено как «наименьшее из тех чисел, не превосходящих $a \cdot b$, которые делятся на a и на b и отличны от 0 при $a \cdot b \neq 0$ ». Можно привести формальное доказательство того, что всякое число, делящееся на a и на b , делится также и на наименьшее общее кратное чисел a и b .

Этих примеров достаточно для того, чтобы составить себе представление об этом методе, следуя которому можно осуществить формальное построение арифметики с помощью рекурсий и схемы индукции, но абсолютно без какого бы то ни было использования связанных переменных. Такой способ изложения арифметики называется рекурсивным изложением этой теории, или, для краткости, просто *рекурсивной арифметикой*.

Эта рекурсивная арифметика находится в тесной связи с интуитивной арифметикой, в том виде как мы рассматривали ее в гл. II, поскольку все ее формулы допускают *финитное содержательное истолкование*. Возможность такого содержательного истолкования вытекает из ранее установленной нами верифицируемости всех выводимых формул рекурсивной арифметики. В самом деле, верифицируемость носит в этом случае характер прямой содержательной интерпретации. Вот почему установление непротиворечивости оказалось здесь таким легким делом.

§ 3. Некоторые обобщения схем рекурсии и индукции

1. Рекурсии, допускающие сведение к простейшей схеме рекурсии (примитивная рекурсия); рекурсии пробег, одновременные рекурсии. Отличительной чертой рекурсивной арифметики по сравнению с интуитивной теорией являются ограничения, кото-

рые накладываются на ее формальный аппарат; она имеет единственный, не считая явных определений, способ образования новых понятий — схему рекурсии; применяемые в ней способы дедукции также подвергнуты сильным ограничениям.

Правда, не меняя ничего, что было бы характерным для методов рекурсивной арифметики, мы можем произвести определенные *обобщения схемы рекурсии*, а также схемы индукции. Об этих обобщениях мы и хотели бы немного поговорить.

Прежде всего, что касается рекурсий, то мы должны делать различие между такими модификациями схемы рекурсии, которые сводятся к последовательному применению рекурсий ранее рассматривавшегося вида, и такими, допущение которых представляет собой действительное расширение формализма рекурсивной арифметики. Рассмотрим сначала несколько таких видов рекурсии, которые хотя и отклоняются от обычной схемы рекурсии

$$f(a, \dots, k, 0) = a(a, \dots, k),$$

$$f(a, \dots, k, n') = b(a, \dots, k, n, f(a, \dots, k, n)),$$

но все-таки могут быть сведены к рекурсиям, проводимым по этой схеме, — в дальнейшем эти последние мы будем кратко называть *примитивными рекурсиями*.

Пример такого рода рекурсии вообще, сводимой к примитивным рекурсиям, представляет собой схема

$$f(0) = c,$$

$$f(n') = b(n, f(t_1(n)), \dots, f(t_r(n))),$$

в которой вместо f должен быть взят функциональный знак с одним аргументом, а

$$t_1(n), \dots, t_r(n)$$

обозначают уже введенные термы, для которых выводимы формулы

$$t_1(n) \leq n, \dots, t_r(n) \leq n.$$

Сведение этой схемы к примитивным рекурсиям ¹⁾ производится таким образом, что сначала вместо $f(n)$ в качестве рекурсивно определяемой функции берется функция

$$h(n) = \prod_{k \leq n} g_k^{f(k)}.$$

¹⁾ Возможность сведения к примитивным рекурсиям для этой схемы, а также для различных других видов рекурсий была показана Рожей Петер (Полицер). См. доклад: P e t e r R. Rekursive Funktionen.— Verhandlungen des internat. Math.-Kongr. Zürich, 1932, Band II, S. 336, а также работу: P e t e r R. Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion.— Math. Ann., 1934, 110, S. 612—623.

Эта функция $h(n)$ определяется при помощи следующей примитивной рекурсии:

$$h(0) = 2^a, \\ h(n') = h(n) \cdot g_{n'}^{b(n, v(h(n), t_1(n)), \dots, v(h(n), t_r(n)))}.$$

Затем $f(n)$ получается из $h(n)$ с помощью явного определения

$$f(n) = v(h(n), n).$$

Рассмотренная схема рекурсии представляет собой рекурсию типа «рекурсии пробега», т. е. такой рекурсии, при которой значение $f(n')$ зависит не только от n и $f(n)$, но и от всего пробега значений функции f до аргумента n . Эту схему, не нарушая ее сводимости к примитивным рекурсиям, мы можем обобщить путем введения параметров, так что получится следующая схема:

$$(R_1) \begin{cases} f(a, \dots, l, 0) = a(a, \dots, l), \\ f(a, \dots, l, n') = \\ b(a, \dots, l, n, f(a, \dots, l, t_1(n)), \dots, f(a, \dots, l, t_r(n))), \end{cases}$$

где снова $t_1(n), \dots, t_r(n)$ означают термы, для которых выводимы формулы

$$t_1(n) \leq n, \dots, t_r(n) \leq n.$$

В эту схему (R_1) могут быть, в частности, включены рекурсии следующего вида:

$$(R_2) \begin{cases} f(a, \dots, l, 0) = a_0(a, \dots, l), \\ f(a, \dots, l, 0') = a_1(a, \dots, l), \\ \vdots \\ f(a, \dots, l, 0^{(f)}) = a_f(a, \dots, l), \\ f(a, \dots, l, n^{(f+1)}) = b(a, \dots, l, n, f(a, \dots, l, n), \\ f(a, \dots, l, n'), \dots, f(a, \dots, l, n^{(f)})), \end{cases}$$

где $f \geq 1$. Действительно, $f+2$ равенства этой схемы могут быть сведены в следующие два равенства:

$$f(a, \dots, l, 0) = a_0(a, \dots, l), \\ f(a, \dots, l, n') = \beta(n', 1) \cdot a_1(a, \dots, l) + \dots + \beta(n', f) \cdot a_f(a, \dots, l) + \\ \text{sgn}(f \div n) \cdot b(a, \dots, l, (n \div f), f(a, \dots, l, (n \div f)), \\ f(a, \dots, l, (n \div f)'), \dots, f(a, \dots, l, (n \div f)^{(f)})),$$

а эти равенства уже укладываются в схему (R_1) , так как выводимы формулы

$$(n \div f) \leq n, (n \div f)' \leq n, \dots, (n \div f)^{(f)} \leq n.$$

Пример рекурсивных равенств вида (R_2) дает нам алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя чисел a и b . Возникающая в процессе применения этого алгоритма последовательность равенств

$$a = q_1 \cdot b + r_1, \\ b = q_2 \cdot r_1 + r_2, \\ r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3, \\ \dots$$

представляет собой не что иное, как рекурсивное определение некоторой функции

$$\rho(a, b, c),$$

которое производится с помощью функции

$$\rho(a, b)$$

следующими равенствами:

$$\rho(a, b, 0) = a, \\ \rho(a, b, 0') = b, \\ \rho(a, b, n'') = \rho(\rho(a, b, n), \rho(a, b, n')).$$

К схеме (R_2) может быть сведен другой тип обобщенной рекурсии — одновременная рекурсия для двух или большего числа функций. Схема одновременной рекурсии в простейшем случае, когда речь идет о двух одновременно определяемых функциях одного аргумента $\psi(n)$ и $\chi(n)$, выглядит следующим образом:

$$\psi(0) = a_1, \quad \chi(0) = a_2, \\ \psi(n') = b_1(n, \psi(n), \chi(n)), \quad \chi(n') = b_2(n, \psi(n), \chi(n)).$$

В качестве примера такой одновременной рекурсии мы дадим второе определение для функций $\sigma_1(n)$ и $\sigma_2(n)$, обращающих функцию $\sigma(a, b)$, т. е. для тех двух функций, которые в определенной последовательности сопоставляют числам числовые пары ¹⁾. Это определение по сравнению с предыдущим будет иметь то преимущество, что оно получится непосредственно из процедуры нумерации без вспомогательных арифметических рассуждений; оно выглядит следующим образом:

$$\sigma_1(0) = 0, \quad \sigma_2(0) = 0, \\ \sigma_1(n') = \text{sgn}(\sigma_2(n) \div \sigma_1(n)) \cdot \sigma_2(n) \\ + \text{sgn}(\sigma_1(n) \div \sigma_2(n)) \cdot (\sigma_2(n) + 1), \\ \sigma_2(n') = \text{sgn}(\sigma_2(n) \div \sigma_1(n)) \cdot \sigma_1(n) + \text{sgn}(\sigma_1(n) \div \sigma_2(n)) \cdot \sigma_1(n) \\ + \beta(\sigma_1(n), \sigma_2(n)) \cdot (\sigma_2(n) + 1).$$

¹⁾ См. с. 395.

Сведение указанной схемы одновременной рекурсии для $\psi(n)$ и $\chi(n)$ к схеме $(\mathfrak{R}_2)$ осуществляется путем написания рекурсивных равенств для функции $\varphi(n)$, значения которой определяются равенствами

$$\begin{aligned}\varphi(2n) &= \psi(n), \\ \varphi(2n+1) &= \chi(n).\end{aligned}$$

Для этой цели мы используем функцию $\rho(n, 2)$, которая для четного аргумента принимает значение 0, а для нечетного — значение 1, и функцию $\pi(n, 2)$, которая для четного n удовлетворяет равенству $2 \cdot \pi(n, 2) = n$, а для нечетного n — равенству $2 \cdot \pi(n, 2) + 1 = n$. Рекурсивные равенства для $\varphi(n)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= a_1, \\ \varphi(0') &= a_2, \\ \varphi(0'') &= b_1(0, a_1, a_2), \\ \varphi(n'') &= \rho(n, 2) \cdot b_1(\pi(n, 2) + 1, \varphi(n'), \varphi(n'')) \\ &\quad + \rho(n', 2) \cdot b_2(\pi(n, 2), \varphi(n), \varphi(n')).\end{aligned}$$

После того как мы тем же образом ввели функцию $\varphi(n)$, функции $\psi(n)$ и $\chi(n)$ можно будет получить с помощью явных определений:

$$\begin{aligned}\psi(n) &= \varphi(2n), \\ \chi(n) &= \varphi(2n+1).\end{aligned}$$

Совершенно аналогичным образом к обобщенной схеме рекурсии для одной функции сводится и одновременная рекурсия для нескольких функций; эта рекурсия может также содержать параметры:

$$\begin{aligned}g_1(a, \dots, l, 0) &= a_1(a, \dots, l), \\ &\vdots \\ g_f(a, \dots, l, 0) &= a_f(a, \dots, l), \\ g_1(a, \dots, l, n') &= b_1(a, \dots, l, n, g_1(a, \dots, l, n), \dots, g_f(a, \dots, l, n)), \\ &\vdots \\ g_f(a, \dots, l, n') &= b_f(a, \dots, l, n, g_1(a, \dots, l, n), \dots, g_f(a, \dots, l, n)).\end{aligned}$$

Для этого сведения устраивается рекурсия для некоторой функции

$$f(a, \dots, l, n),$$

значения которой связаны со значениями функций

$$g_1(a, \dots, l, n), \dots, g_f(a, \dots, l, n)$$

равенствами

$$\begin{aligned}f(a, \dots, l, f \cdot n) &= g_1(a, \dots, l, n), \\ f(a, \dots, l, f \cdot n + 1) &= g_2(a, \dots, l, n), \\ &\vdots \\ f(a, \dots, l, f \cdot n + \delta(f)) &= g_f(a, \dots, l, n);\end{aligned}$$

при этом нужно воспользоваться функциями $\rho(n, f)$ и $\pi(n, f)$.

Из сводимости одновременной рекурсии к рекурсии вида $(\mathfrak{R}_2)$ вытекает также сводимость ее к примитивным рекурсиям.

2. Перекрестные рекурсии; несводимость перекрестных рекурсий определенного типа к примитивным рекурсиям. Кроме рекурсий пробега вида $(\mathfrak{R}_1)$, схемы $(\mathfrak{R}_2)$ и одновременных рекурсий, имеется много других различных видов рекурсий, допускающих сведение к примитивным рекурсиям. Возникает вопрос, не сводятся ли к примитивным рекурсиям все рекурсии, с помощью которых формализуются те или иные способы последовательного вычисления одной или нескольких функций и которые оказываются возможным изобразить без введения каких-либо новых типов переменных.

На этот вопрос следует дать отрицательный ответ: могут быть указаны рекурсии, обладающие указанными свойствами и такие, что они не могут быть сведены к примитивным.

В этом можно убедиться двумя различными способами. Один метод — это канторовская диагональная процедура. Устраивается перечисление всех функций одного аргумента, допускающих определение с помощью примитивной рекурсии. Всякому такому перечислению соответствует некоторая функция двух аргументов $\chi(a, n)$, обладающая тем свойством, что для каждой цифры z функция $\chi(a, z)$ совпадает с той функцией одного аргумента, которая в этом перечислении имеет номер z . Функция $\chi(a, n)$ не может быть получена с помощью примитивных рекурсий. Действительно, если бы это было так, то это же самое было бы справедливо и в отношении функции

$$\chi(n, n) + 1;$$

но эта функция не может встречаться в рассматриваемом нами перечислении, потому что если бы она имела в нем номер z , то должно было бы иметь место равенство

$$\chi(n, z) = \chi(n, n) + 1,$$

которое при подстановке z вместо n привело бы нас к противоречию.

Следовательно, если нам теперь удастся определить эту функцию $\chi(a, n)$ с помощью какой-либо рекурсии, то тем самым мы получим пример рекурсии, несводимой к примитивным рекурсиям.

На этом пути действительно можно найти рекурсивное определение, обладающее признаками формализованной вычислительной процедуры, с одной стороны, и несводимое к примитивным рекурсиям — с другой. Правда, построение соответствующего перечисления оказывается весьма трудоемким, но при этом удается воспользоваться тем ранее упоминавшимся фактом, что всякая функция, определяемая с помощью произвольных примитивных рекурсий, может быть определена и с помощью таких примитивных рекурсий, которые содержат не более одного параметра, и что, следовательно, для перечисления функций одного аргумента, определенных с помощью каких-либо примитивных рекурсий, достаточно рассматривать рекурсии с не более чем одним параметром.

Но в нашем распоряжении имеется и еще один, прямой метод, позволяющий устанавливать существование таких рекурсий, которые не сводимы к примитивным. Этот метод, с помощью которого соответствующий пример был впервые построен Аккерманом¹⁾, заключается в том, что мы рекурсивно определяем некоторую функцию, относительно которой удастся показать, что она растет быстрее, чем любая функция, определяемая посредством примитивных рекурсий.

Функция, для которой Аккерман установил этот факт, получается следующим образом. Строится такая последовательность функций двух аргументов

$$\xi_0(a, b), \quad \xi_1(a, b), \quad \dots,$$

что

$$\begin{aligned}\xi_0(a, b) &= a + b, \\ \xi_1(a, b) &= a \cdot b, \\ \xi_2(a, b) &= a^b,\end{aligned}$$

а затем (для $n \geq 2$) $\xi_{n+1}(a, b)$ определяется с помощью $\xi_n(a, b)$ рекурсией

$$\begin{aligned}\xi_{n+1}(a, 0) &= a, \\ \xi_{n+1}(a, b') &= \xi_n(a, \xi_{n+1}(a, b)).\end{aligned}$$

Если рассматривать эту последовательность как функцию трех аргументов

$$\xi(a, b, n) = \xi_n(a, b),$$

то для этой функции получаются следующие определяющие равенства:

$$\begin{aligned}\xi(a, b, 0) &= a + b, \\ \xi(a, 0, n') &= \beta(n, 1) + a \cdot \operatorname{sgn}(\delta(n)), \\ \xi(a, b', n') &= \xi(a, \xi(a, b, n'), n).\end{aligned}$$

¹⁾ Ackermann W. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.— Math. Ann., 1928, 99, № 1/2.

Эти равенства имеют вид «перекрестной» рекурсии, т. е. такой рекурсии, которая производится по значениям двух переменных¹⁾.

Если в этих равенствах вместо n по очереди подставить цифры от 0 до β , то получатся схемы рекурсии обычного типа для функций

$$\xi(a, b, 1), \quad \xi(a, b, 2), \quad \dots, \quad \xi(a, b, \beta + 1),$$

причем схема для $\xi(a, b, \beta + 1)$ содержит введенную предыдущей схемой функцию $\xi(a, b, \beta)$. Таким образом, получается определенная процедура для вычисления значений функции $\xi(a, b, n)$ для произвольных числовых значений аргументов, и вычисление значения c , которое $\xi(a, b, n)$ принимает для тройки цифр a , b и n , с помощью равенств, определяющих функцию $\xi(a, b, n)$, может быть переведено в формальный вывод равенства

$$\xi(a, b, n) = c.$$

Три указанных определяющих равенства, если в них вместо переменных подставить цифры, а затем повсюду подставить получающиеся в результате процедуры вычисления значения, также перейдут в истинные нумерические равенства.

Тем самым перекрестная рекурсия, с помощью которой мы определили $\xi(a, b, n)$, обладает общими с примитивными рекурсиями свойствами формализованной шагообразной вычислительной процедуры.

И тем не менее эта рекурсия не может быть сведена к примитивным²⁾. Действительно, если бы это имело место, то функция

¹⁾ Введением соответствующей функциональной переменной можно следующим образом разложить эту перекрестную рекурсию на две рекурсии, каждая из которых производится по значениям только одной переменной. Сначала рекурсией

$$\begin{aligned}\tau_x(f(x), c, 0) &= c, \\ \tau_x(f(x), c, n') &= f(\tau_x(f(x), c, n))\end{aligned}$$

определяется « n -кратная итерация функции $f(a)$ с начальным значением c », а затем $\xi(a, b, n)$ вводится при помощи рекурсивных равенств

$$\begin{aligned}\xi(a, b, 0) &= a + b, \\ \xi(a, b, n') &= \tau_x(\xi(a, x, n), \beta(n, 1) + a \cdot \operatorname{sgn}(\delta(n)), b).\end{aligned}$$

Однако обе эти рекурсии уже не относятся к рассматриваемому нами формализму рекурсивной арифметики.

²⁾ В уже упоминавшейся работе (см. сноску на с. 406) Аккерман устанавливает более общий факт — а именно, что для рекурсивного определения функции $\xi(a, b, n)$ нельзя обойтись такими рекурсиями, которые производятся только по значениям какой-либо одной переменной и не используют переменных более высоких типов. Такие рекурсии — в соответствии с уже упоминавшимися новейшими результатами Р. Петер — могут быть сведены к примитивным рекурсиям, и поэтому установленное Аккерманом свойство функции $\xi(a, b, n)$ можно вывести уже из теоремы о том, что функция $\xi(a, b, n)$ не определима при помощи примитивных рекурсий.

$\xi(a, a, a)$ была бы определима при помощи примитивных рекурсий. Однако Аккерман показал, что эта функция растет быстрее, чем любая функция одного аргумента, определяемая при помощи примитивных рекурсий.

Это принадлежащее Аккерману доказательство существования рекурсивной, но не определимой примитивными рекурсиями функции теперь, с использованием ряда значительных упрощений, произведенных Р. Петер (Полицер), может быть изложено в следующем сокращенном виде.

Рассмотрим перекрестную рекурсию

$$\begin{aligned}\psi(a, 0) &= 2 \cdot a + 1, \\ \psi(0, n') &= \psi(1, n), \\ \psi(a', n') &= \psi(\psi(a, n'), n).\end{aligned}$$

Эта рекурсия, как и рассмотренная Аккерманом рекурсия для функции $\xi(a, b, n)$, тоже обладает свойствами формализованной вычислительной процедуры. Покажем, что определенная с ее помощью функция $\psi(a, n)$ не может быть определена при помощи примитивных рекурсий.

С этой целью мы извлечем из рекурсии для $\psi(a, n)$ ряд полезных для дальнейшего оценок.

Во-первых, для каждой цифры n оказывается выводимым неравенство ¹⁾

$$a < \psi(a, n).$$

Действительно, неравенство

$$a < \psi(a, 0)$$

может быть получено непосредственно. Если уже выведено неравенство

$$a < \psi(a, n),$$

то из него с помощью подстановок можно будет получить формулы

$$1 < \psi(1, n), \quad \psi(a, n') < \psi(\psi(a, n'), n),$$

которые на основании рекурсивных равенств для $\psi(a, n)$ дают неравенства

$$0 < \psi(0, n'), \quad \psi(a, n') < \psi(a', n');$$

но из этих неравенств индукцией по a может быть получена формула

$$a < \psi(a, n').$$

¹⁾ Следует отметить, что мы здесь не выводим эту формулу для переменного n , а лишь содержательно показываем, что она выводима для любой цифры n . Соответствующий вывод для переменного n будет изложен позднее (с. 425) с помощью обобщенной схемы индукции.

Из неравенства

$$a < \psi(a, n)$$

мы получаем

$$a' \leq \psi(a, n).$$

Во-вторых, для каждой цифры n может быть выведена формула

$$a < b \rightarrow \psi(a, n) < \psi(b, n).$$

Сначала для каждой цифры n мы получим

$$\psi(a, n) < \psi(a', n);$$

в самом деле, для $n = 0$ это неравенство усматривается непосредственно, а для цифры n , отличной от 0, только что указанный способ вывода формулы

$$a < \psi(a, n)$$

заодно дает и формулу

$$\psi(a, n) < \psi(a', n).$$

Теперь из формулы

$$\psi(a, n) < \psi(a', n)$$

мы индукцией по k выведем формулу

$$\psi(a, n) < \psi(a + k', n),$$

а из нее с помощью формулы

$$a < b \rightarrow b = a + (b \div a)'$$

искомую формулу

$$a < b \rightarrow \psi(a, n) < \psi(b, n).$$

Из этой формулы получается также импликация

$$a \leq b \rightarrow \psi(a, n) \leq \psi(b, n).$$

В-третьих, для каждой цифры n индукцией по a может быть выведена формула

$$\psi(a', n) \leq \psi(a, n').$$

Действительно, неравенство

$$\psi(0', n) \leq \psi(0, n')$$

получается непосредственно, а с помощью формул

$$a \leq b \rightarrow \psi(a, n) \leq \psi(b, n)$$

и

$$a' \leq \psi(a, n)$$

могут быть получены формулы

$$\psi(a', n) \leq \psi(a, n') \rightarrow \psi(\psi(a', n), n) \leq \psi(\psi(a, n'), n)$$

и

$$\psi(a'', n) \leq \psi(\psi(a', n), n),$$

которые в сочетании с третьей рекурсивной формулой для $\psi(a, n)$ дают нам формулу

$$\psi(a', n) \leq \psi(a, n') \rightarrow \psi(a'', n) \leq \psi(a', n'),$$

так что при помощи схемы индукции мы получим формулу

$$\psi(a', n) \leq \psi(a, n').$$

Объединив эту формулу с неравенством

$$\psi(a, n) < \psi(a', n),$$

мы получим также неравенство

$$\psi(a, n) < \psi(a, n'),$$

а отсюда для произвольных, отличных друг от друга цифр r и s , таких что s больше r , мы получим формулу

$$\psi(a, r) < \psi(a, s).$$

В дальнейшем будет целесообразно использовать как явное определение следующий способ записи:

$$\psi_n(a) = \psi(a, n),$$

который соответствует взгляду на $\psi(a, n)$ как на изображение некоторой последовательности функций одного аргумента. Используя этот способ записи, мы представим полученные нами оценки в следующем виде. Для каждой цифры n выводимы формулы

$$a < \psi_n(a),$$

$$a < b \rightarrow \psi_n(a) < \psi_n(b),$$

$$\psi_n(a') \leq \psi_n(a);$$

а кроме того, для любой цифры m , большей n , выводима формула

$$\psi_n(a) < \psi_m(a).$$

С помощью этих неравенств мы покажем, что для всякой функции $f(n)$, допускающей определение при помощи примитивных рекурсий (и подстановок), может быть указана цифра r , для которой выводимо неравенство

$$f(a) < \psi_r(a).$$

С этой целью вспомним о том, что каждая функция, которая может быть определена с помощью произвольных примитивных рекурсий, может быть определена и с помощью таких рекурсий, которые содержат не более одного параметра и, следовательно, имеют вид

$$h(0) = a,$$

$$h(n') = b(n, h(n))$$

или вид

$$h(a, 0) = a(a),$$

$$h(a, n') = b(a, n, h(n)),$$

где вместо h всякий раз должен быть подставлен подлежащий введению функциональный знак ¹⁾.При этом мы можем также освободиться от произвольности термина a , соответственно $a(a)$. Если мы, например, рассматриваем рекурсию

$$\varphi(a, 0) = a(a),$$

$$\varphi(a, n') = b(a, n, \varphi(a, n)),$$

то определенную с ее помощью функцию $\varphi(a, n)$ мы можем получить из функции $\chi(a, n)$, определенной при помощи рекурсивных равенств

$$\chi(a, 0) = 0,$$

$$\chi(a, n') = \overline{\text{sgn } n} \cdot a(a) + \text{sgn } n \cdot b(a, \delta(n), \chi(a, n));$$

именно, $\varphi(a, n)$ получится из $\chi(a, n)$ с помощью следующего явного определения:

$$\varphi(a, n) = \chi(a, n').$$

Подобный же прием может быть применен и к рекурсии без параметров.

В этой редукции используются функции

$$\overline{\text{sgn } n}, \text{sgn } n, \delta(n), a + b \text{ и } a \cdot b.$$

¹⁾ В этом направлении можно было бы пойти еще дальше. Именно, с помощью уже упоминавшегося метода Р. Петер сведения рекурсий пробега к примитивным рекурсиям получается, что каждая функция, определяемая при помощи примитивных рекурсий, может быть определена при помощи одних только рекурсий без параметров, если в качестве исходных функций дополнительно к штрих-функции взять

$$a + b, a \cdot b, a^b, a \div b, \varphi_n, \nu(n, k).$$

Мы могли бы использовать этот факт в нашем доказательстве. Тем не менее мы обойдемся без этой редукции.

Из них функции

$$\operatorname{sgn} n, \delta(n) \text{ и } a \cdot b$$

определяются такими рекурсиями, у которых в правой части первого равенства стоит терм 0. В рекурсии для $a + b$ в правой части первого рекурсивного равенства стоит терм a , а функция $\operatorname{sgn} n$ с помощью равенства

$$\overline{\operatorname{sgn} n} = 1 \div n$$

выражается через функцию $a \div b$, у которой в первом рекурсивном равенстве справа также стоит терм a .

В соответствии с этим, из примитивных рекурсий без параметров мы можем рассматривать лишь такие, у которых первое равенство имеет вид

$$h(0) = 0,$$

а среди рекурсий с одним параметром — лишь такие, у которых первое равенство имеет вид

$$h(a, 0) = 0$$

или

$$h(a, 0) = a,$$

так что в любом из этих случаев будет выводимо неравенство

$$h(a, 0) \leq a.$$

Примитивную рекурсию с не более чем одним параметром, первое равенство которой имеет один из видов

$$h(0) = 0, \quad h(a, 0) = 0, \quad h(a, 0) = a,$$

мы для краткости будем называть *нормированной рекурсией*.

Пусть теперь $f(a)$ — функция, определенная при помощи примитивных рекурсий. Тогда эта функция может быть также определена и при помощи нормированных рекурсий. (При этом явными определениями мы можем и не пользоваться, так как всякий введенный посредством такого определения символ можно заменить определяющим его выражением.) Представим себе, что такое определение функции $f(a)$ с помощью нормированных рекурсий произведено. В каждой из этих рекурсий для написания второго рекурсивного равенства мы пользуемся некоторым термом $b(r, s)$ или соответственно $b(r, s, t)$, который в свою очередь строится из термов, введенных до него. Поэтому в рассматриваемом нами определении функции $f(a)$, вообще говоря, будут встречаться термы с тремя переменными; термы с более чем тремя переменными встречаться не будут, поскольку мы следим за тем, чтобы все встречающиеся составные функциональные выражения строи-

лись после определения их составных частей. В качестве исходных термов у нас имеются символ 0 и свободные индивидуальные переменные, а в качестве исходной функции — штрих-функция.

Теперь для того, чтобы с помощью имеющегося у нас определения функции $f(a)$ получить требуемое неравенство

$$f(a) < \psi_f(a),$$

мы выведем друг за другом оценки одного и того же типа для всех входящих в определение $f(a)$ термов. Эти оценки для термов с одной переменной будут иметь вид

$$t(a) < \psi_f(a),$$

а для термов с двумя и тремя переменными — вид

$$t(a, b) < \psi_f(\mu(a, b))$$

или вид

$$t(a, b, c) < \psi_f(\mu(a, b, c))$$

соответственно, причем f всякий раз будет означать какую-либо цифру; здесь $\mu(a, b)$ и $\mu(a, b, c)$ суть функции, которые представляют максимум a и b (соответственно максимум a, b и c) и которые могут быть явно определены посредством равенств

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= a + (b \div a), \\ \mu(a, b, c) &= \mu(a, \mu(b, c)), \end{aligned}$$

из которых можно вывести формулы

$$\begin{aligned} a &\leq \mu(a, b), \quad b \leq \mu(a, b), \\ a &= \mu(a, b) \vee b = \mu(a, b), \\ a &\leq \mu(a, b, c), \quad b \leq \mu(a, b, c), \quad c \leq \mu(a, b, c), \\ a &= \mu(a, b, c) \vee b = \mu(a, b, c) \vee c = \mu(a, b, c). \end{aligned}$$

То, что для каждого участвующего в определении $f(a)$ терма, а тем самым в итоге и для самого $f(a)$, действительно получается оценка искомого вида, вытекает из следующих фактов:

1. Для любой цифры f выводимы формулы

$$\begin{aligned} 0 &< \psi_0(a), \quad a < \psi_0(a), \\ \psi_f(a)' &\leq \psi_{f'}(a). \end{aligned}$$

2. Если $h(a)$ вводится рекурсией

$$\begin{aligned} h(0) &= 0, \\ h(n') &= h(n, h(n)) \end{aligned}$$

и если для $b(a, b)$ выведена оценка

$$b(a, b) < \psi_f(\mu(a, b)),$$

то отсюда могут быть выведены формулы

$$\bar{b}(a, \bar{h}(a)) < \psi_{\bar{f}}(\mu(a, \bar{h}(a))),$$

$$\bar{h}(a) < \psi_{\bar{f}+1}(a) \rightarrow \bar{b}(a, \bar{h}(a)) < \psi_{\bar{f}}(\psi_{\bar{f}+1}(a)),$$

а с помощью равенства

$$\psi_{\bar{f}}(\psi_{\bar{f}+1}(a)) = \psi_{\bar{f}+1}(a')$$

и формула

$$\bar{h}(a) < \psi_{\bar{f}+1}(a) \rightarrow \bar{h}(a') < \psi_{\bar{f}+1}(a'),$$

которая в сочетании с выводимой формулой

$$\bar{h}(0) < \psi_{\bar{f}+1}(0)$$

при помощи схемы индукции дает формулу

$$\bar{h}(a) < \psi_{\bar{f}+1}(a).$$

Заметим, что сделанные здесь предположения выполняются и тогда, когда в $\bar{b}(a, b)$ встречается только одна из переменных a и b и когда для этой переменной оказывается выводимым неравенство

$$\bar{b}(a, b) < \psi_{\bar{f}}(a)$$

или

$$\bar{b}(a, b) < \psi_{\bar{f}}(b)$$

соответственно. Действительно, каждое из этих неравенств с помощью формулы

$$a \leq b \rightarrow \psi_{\bar{f}}(a) \leq \psi_{\bar{f}}(b)$$

дает неравенство

$$\bar{b}(a, b) < \psi_{\bar{f}}(\mu(a, b)).$$

3. Если $\bar{h}(a, b)$ введено рекурсией

$$\bar{h}(a, 0) = 0 \text{ (или } \bar{h}(a, 0) = a),$$

$$\bar{h}(a, n') = \bar{b}(a, n, \bar{h}(a, n))$$

и если для

$$\bar{b}(a, b, c)$$

выводимо ограничение

$$\bar{b}(a, b, c) < \psi_{\bar{f}}(\mu(a, b, c)),$$

то отсюда мы получим ограничение

$$\bar{b}(a, b) < \psi_{\bar{f}+2}(\mu(a, b)).$$

Действительно, индукцией по b мы сначала следующим образом выведем неравенство

$$\bar{h}(a, b) < \psi_{\bar{f}+1}(a + b).$$

Прежде всего мы имеем

$$\bar{h}(a, 0) < \psi_{\bar{f}+1}(a + 0);$$

далее, мы получим

$$\bar{h}(a, b) < \psi_{\bar{f}+1}(a + b) \rightarrow \bar{b}(a, b, \bar{h}(a, b)) < \psi_{\bar{f}}(\psi_{\bar{f}+1}(a + b)),$$

а затем отсюда получим

$$\bar{h}(a, b) < \psi_{\bar{f}+1}(a + b) \rightarrow \bar{h}(a, b') < \psi_{\bar{f}+1}(a + b');$$

теперь с помощью схемы индукции можно будет получить

$$\bar{h}(a, b) < \psi_{\bar{f}+1}(a + b).$$

С другой стороны, используя формулы

$$a + b \leq 2 \cdot \mu(a, b),$$

$$2 \cdot \mu(a, b) < \psi_0(\mu(a, b)),$$

$$\psi_{\bar{f}+1}(\psi_0(a)) < \psi_{\bar{f}+1}(\psi_{\bar{f}+2}(\delta(a))),$$

$$a \neq 0 \rightarrow \psi_{\bar{f}+1}(\psi_{\bar{f}+2}(\delta(a))) = \psi_{\bar{f}+2}(a),$$

мы получим неравенство

$$\psi_{\bar{f}+1}(a + b) < \psi_{\bar{f}+2}(\mu(a, b)),$$

так что в целом можно будет получить

$$\bar{h}(a, b) < \psi_{\bar{f}+2}(\mu(a, b)).$$

Случай, когда в

$$\bar{b}(r, s, t)$$

входят не все три переменные a, b, c , рассматривается совершенно так же, как соответствующий случай при рекурсии без параметров.

4. Пусть t — терм, в котором не встречаются никакие переменные, кроме a, b и c , а $\bar{h}(n)$ — функциональный знак с одним аргументом. Пусть для $\bar{h}(n)$ выводимо неравенство

$$\bar{h}(a) < \psi_{\bar{f}}(a),$$

а для t — неравенство

$$t < \psi_{\bar{f}}(c),$$

где c — один из термов

$$a, b, c, \mu(a, b), \mu(a, c), \mu(b, c), \mu(a, b, c).$$

Тогда будет выводимо также неравенство

$$h(t) < \psi_{\mu(f, 1)+2}(c).$$

Действительно, можно получить неравенства *)

$$\begin{aligned} h(t) &< \psi_I(\psi_I(c)) \\ &\leq \psi_{\mu(f, 1)}(\psi_{\mu(f, 1)}(c)) \\ &< \psi_{\mu(f, 1)+1}(c') \\ &\leq \psi_{\mu(f, 1)+2}(c). \end{aligned}$$

5. Пусть u и b — термы, не содержащие никаких переменных кроме a, b и c , а $h(m, n)$ — функциональный знак с двумя аргументами. Пусть выводимы неравенства

$$\begin{aligned} h(a, b) &< \psi_i(\mu(a, b)), \\ u &< \psi_f(a), \\ b &< \psi_I(b), \end{aligned}$$

где a и b — термы из списка

$$a, b, c, \mu(a, b), \mu(a, c), \mu(b, c), \mu(a, b, c).$$

Тогда можно вывести неравенство

$$h(u, b) < \psi_{\mu(i, f, 1)+2}(c),$$

где c снова — один из термов

$$a, b, c, \mu(a, b), \mu(a, c), \mu(b, c), \mu(a, b, c).$$

Действительно, сначала мы получим

$$\begin{aligned} h(u, b) &< \psi_i(\mu(\psi_f(a), \psi_I(b))) \\ &< \psi_i(\psi_{\mu(f, 1)}(\mu(a, b))), \end{aligned}$$

а отсюда, аналогично тому, как это делалось в п. 4, получим

$$h(u, b) < \psi_{\mu(i, f, 1)+2}(\mu(a, b)).$$

Кроме того, выводимо равенство

$$\mu(a, b) = c,$$

в котором c — один из термов, указанных в нашем утверждении. На основании установленных в пп. 1—5 утверждений о выводимости

*) По монотонности функции $\psi(a, n)$ (см. с. 410). — Прим. ред.

мости, для всякой функции $f(a)$, следуя ее определению с помощью нормированных рекурсий, мы получим некоторую оценку

$$f(a) < \psi_r(a),$$

которую можно также записать в виде

$$f(a) < \psi(a, r).$$

Отсюда следует, что функция $\psi(a, n)$ не может быть определена при помощи примитивных рекурсий. В самом деле, если бы это оказалось возможным, то это же самое было бы справедливо и в отношении функции $\psi(a, a)$ и в соответствии с этим для некоторой вполне определенной цифры r было бы выводимо неравенство

$$\psi(a, a) < \psi(a, r),$$

из которого подстановкой r вместо a получилась бы формула

$$\psi(r, r) < \psi(r, r),$$

а из нее — противоречие. Однако это противоречие было бы противоречием внутри рекурсивной арифметики (понимаемой в нашем первоначальном смысле), в то время как мы показали, что возможность противоречия такого рода исключается.

Тем самым мы показали, что рекурсия, определяющая функцию $\psi(a, n)$, действительно выходит за рамки примитивных рекурсий.

Из этого результата мы можем следующим образом получить аналогичное утверждение и относительно аккермановской функции $\xi(a, b, n)$. Рассмотрим функцию

$$\chi(a, n) = \xi(2, a + 1, n + 2).$$

Для этой функции мы получим сначала

$$\begin{aligned} \chi(a, 0) &= \xi(2, a + 1, 2) \\ &= 2^{a+1}, \\ \chi(a, 0) &> \psi(a, 0), \end{aligned}$$

затем

$$\begin{aligned} \chi(0, n') &= \xi(2, 1, n + 3) \\ &= \xi(2, \xi(2, 0, n + 3), n + 2) \\ &= \xi(2, 2, n + 2), \\ \chi(0, n') &= \chi(1, n), \end{aligned}$$

и наконец,

$$\begin{aligned} \chi(a', n') &= \xi(2, a + 2, n + 3) \\ &= \xi(2, \xi(2, a + 1, n + 3), n + 2), \\ \chi(a', n') &= \xi(2, \chi(a, n'), n + 2). \end{aligned}$$

С помощью этих формул для каждой цифры n может быть выведена формула

$$\chi(a, n) > \psi(a, n).$$

Для $n = 0$ эта формула уже выведена. Таким образом, достаточно показать, что с помощью формулы

$$\chi(a, n) > \psi(a, n)$$

может быть выведена формула

$$\chi(a, n') > \psi(a, n').$$

Этот вывод может быть получен индукцией по a . Прежде всего, из формул

$$\chi(0, n') = \chi(1, n),$$

$$\chi(1, n) > \psi(1, n),$$

$$\psi(1, n) = \psi(0, n')$$

получим формулу

$$\chi(0, n') > \psi(0, n').$$

Теперь все дело сводится к тому, чтобы получить формулу

$$\chi(a, n') > \psi(a, n') \rightarrow \chi(a', n') > \psi(a', n').$$

Для этой цели мы используем тот факт, что для любой цифры способом, совершенно аналогичным тому, с помощью которого ранее ¹⁾ была выведена формула

$$\psi(a, n) < \psi(a', n),$$

может быть выведена формула

$$\xi(2, a, n+2) < \xi(2, a', n+2),$$

а тем самым и формула

$$b \geq a \rightarrow \xi(2, b, n+2) \geq \xi(2, a, n+2).$$

Из этой формулы, используя формулу

$$\chi(a, n') > \psi(a, n') \rightarrow \chi(a, n') \geq \psi(a, n') + 1$$

и равенства

$$\xi(2, \chi(a, n'), n+2) = \chi(a', n'),$$

$$\xi(2, \psi(a, n') + 1, n+2) = \chi(\psi(a, n'), n),$$

мы получим формулу

$$\chi(a, n') > \psi(a, n') \rightarrow \chi(a', n') \geq \chi(\psi(a, n'), n).$$

¹⁾ См. с. 409.

С другой стороны, из формулы

$$\chi(a, n) > \psi(a, n)$$

путем подстановки получим

$$\chi(\psi(a, n'), n) > \psi(\psi(a, n'), n),$$

а отсюда с помощью рекурсивного равенства

$$\psi(a', n') = \psi(\psi(a, n'), n)$$

формулу

$$\chi(\psi(a, n'), n) > \psi(a', n'),$$

так что в итоге получится искомая формула

$$\chi(a, n') > \psi(a, n') \rightarrow \chi(a', n') > \psi(a', n').$$

Тем самым, действительно, формула

$$\chi(a, n) > \psi(a, n)$$

оказывается выводимой для любой цифры n . На основании доказанного относительно функции $\psi(a, n)$ отсюда следует, что для всякой функции $f(a)$, определяемой посредством примитивных рекурсий, можно указать такую цифру r , что будет выводимо неравенство

$$f(a) < \chi(a, r).$$

Поэтому функция $\chi(a, a)$, так же как и $\psi(a, a)$, не может быть определена посредством примитивных рекурсий. Следовательно, не может быть определена примитивными рекурсиями функция

$$\xi(2, a+1, a+2),$$

а потому и функцию $\xi(a, b, n)$ нельзя будет определить посредством примитивных рекурсий.

3. Обобщенная схема индукции; устранимость этой схемы. Мы не будем здесь продолжать рассмотрение возможных обобщений рекурсивного определения, а только вкратце обсудим одно обобщение схемы индукции. Оно будет касаться применения схемы индукции к таким формулам, которые содержат более одной индивидуальной переменной. В этих случаях для формализации перехода от n к $n+1$ оказывается целесообразным — поскольку в полном соответствии с методами рекурсивной арифметики мы хотим избежать употребления связанных переменных — допустить схему индукции следующего вида:

$$\frac{\mathfrak{A}(b, 0) \quad \mathfrak{A}(t, a) \rightarrow \mathfrak{A}(b, a^t)}{\mathfrak{A}(b, a)},$$

а также схему еще более общего вида:

$$\frac{\mathfrak{A}(b, 0) \quad \mathfrak{A}(t_1, a) \& \dots \& \mathfrak{A}(t_r, a) \rightarrow \mathfrak{A}(b, a')}{\mathfrak{A}(b, a)}.$$

Здесь $t, t_1, \dots, t_r$ обозначают какие-либо термы, которые могут также содержать и переменные a, b ; единственным условием применимости этой схемы является отсутствие переменных a и b в формуле $\mathfrak{A}(c, r)$.

Заметим, что если допустить использование связанных переменных, то эта обобщенная схема индукции сведется к обычной. Действительно, средствами исчисления предикатов из формул

$$\mathfrak{A}(b, 0), \\ \mathfrak{A}(t_1, a) \& \dots \& \mathfrak{A}(t_r, a) \rightarrow \mathfrak{A}(b, a')$$

можно получить формулы

$$\forall x \mathfrak{A}(x, 0), \\ \forall x \mathfrak{A}(x, a) \rightarrow \forall x \mathfrak{A}(x, a'),$$

из которых с помощью обычной схемы индукции мы получим формулу

$$\forall x \mathfrak{A}(x, a),$$

а из нее — формулу

$$\mathfrak{A}(b, a).$$

Но сведение к обычной схеме индукции может быть осуществлено, как это впервые показал Сколема¹⁾, и без привлечения связанных переменных.

Сперва рассмотрим схему

$$\text{(Ind 1)} \quad \frac{\mathfrak{A}(b, 0) \quad \mathfrak{A}(t(a, b), a) \rightarrow \mathfrak{A}(b, a')}{\mathfrak{A}(b, a)}$$

(в которой возможность наличия в t переменных a и b указана теперь явным образом). Пусть функция $\psi(a, b, k)$ вводится сле-

¹⁾ Skolem Th. Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie. — Monatsh. Math., Phys., 1939, 48, S. 268—276. Первоначально здесь использовалась еще одна схема рекурсии, которая непосредственно вида примитивной рекурсии не имеет; однако, как это было указано Р. Петер в реферате работы Сколема (J. Symbolic Logic, 1940, 5, № 1, p. 34—35), она может быть сведена к примитивной рекурсии.

дующей примитивной рекурсией:

$$\psi(a, b, 0) = b, \\ \psi(a, b, k') = t(a \div k', \psi(a, b, k)).$$

Если во второе из этих равенств вместо a подставить переменную n , а вместо k — терм $n \div a'$ и использовать формулы

$$n \div a \neq 0 \rightarrow (n \div a')' = n \div a \text{ и } a' \leq n \rightarrow n \div a \neq 0,$$

то, применив аксиому равенства (J_2), мы получим

$$a' \leq n \rightarrow \psi(n, b, n \div a) = t(n \div (n \div a), \psi(n, b, n \div a')),$$

а затем с помощью ранее выведенной формулы¹⁾

$$b \div a \neq 0 \rightarrow b \div (b \div a) = a,$$

которая вместе с

$$a' \leq n \rightarrow n \div a \neq 0$$

дает формулу

$$a' \leq n \rightarrow n \div (n \div a) = a,$$

получим

$$a' \leq n \rightarrow \psi(n, b, n \div a) = t(a, \psi(n, b, n \div a')).$$

Из этой формулы в сочетании со второй посылкой рассматриваемой схемы (Ind 1), в которой вместо b подставлено $\psi(n, b, n \div a')$, и с аксиомой равенства мы получим формулу

$$a' \leq n \rightarrow [\mathfrak{A}(\psi(n, b, n \div a), a) \rightarrow \mathfrak{A}(\psi(n, b, n \div a'), a')],$$

а она вместе с $a' \leq n \rightarrow a \leq n$ при помощи средств исчисления высказываний дает

$$(a \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(\psi(n, b, n \div a), a)) \rightarrow (a' \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(\psi(n, b, n \div a'), a')).$$

Эта формула имеет вид $\mathfrak{B}(n, b, a) \rightarrow \mathfrak{B}(n, b, a')$. Поэтому для того, чтобы индукцией по a получить формулу $\mathfrak{B}(n, b, a)$, нам остается получить формулу $\mathfrak{B}(n, b, 0)$, т. е.

$$0 \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(\psi(n, b, n \div 0), 0).$$

Но эту формулу можно вывести из первой посылки нашей схемы, произведя подстановку и применив преобразования исчисления высказываний.

Таким образом, нами получена формула $\mathfrak{B}(n, b, a)$, т. е.

$$a \leq n \rightarrow \mathfrak{A}(\psi(n, b, n \div a), a).$$

¹⁾ См. с. 375.

Если мы подставим в нее вместо n переменную a и воспользуемся формулами $a \leq a$ и $a \div a = 0$, то получим формулу

$$\mathfrak{A}(\psi(a, b, 0), a),$$

откуда с помощью первой рекурсивной формулы для ψ и аксиомы равенства получается искомая формула $\mathfrak{A}(b, a)$.

Теперь для того, чтобы общий вид обобщенной схемы индукции свести к более специальному виду (Ind 1), а тем самым и к обычной схеме индукции, мы воспользуемся тем, что формула $\mathfrak{A}(b, c)$ может быть переведена в некоторое равенство $a(b, c) = 0$ с рекурсивным термом $a(b, c)$.

Положим

$$\varphi(b, c) = \sum_{x \leq b} a(x, c).$$

Опираясь на выводимые схемы для многочленных сумм¹⁾ и на эквивалентность $\mathfrak{A}(c, d) \sim a(c, d) = 0$, мы получим

$$((1)) \quad \varphi(b, a) = 0 \rightarrow (c \leq b \rightarrow \mathfrak{A}(c, a))$$

и, в частности, формулу

$$((1a)) \quad \varphi(b, a) = 0 \rightarrow \mathfrak{A}(b, a),$$

а также получим переход

$$((2)) \quad \frac{\mathfrak{B} \rightarrow (c \leq b \rightarrow \mathfrak{A}(c, d))}{\mathfrak{B} \rightarrow \varphi(b, d) = 0}$$

для произвольной формулы $\mathfrak{B}$, не содержащей переменной c .

Участвующие в этой схеме термы $t_1, \dots, t_r$, в которые, как мы знаем, могут входить переменные a и b , запишем более развернуто в виде $t_1(a, b), \dots, t_r(a, b)$.

Пусть функция $\psi(a, n)$ определяется следующей примитивной рекурсией:

$$\begin{aligned} \psi(a, 0) &= \max(t_1(a, 0), t_2(a, 0), \dots, t_r(a, 0)), \\ \psi(a, n') &= \max(\psi(a, n), t_1(a, n'), \dots, t_r(a, n')). \end{aligned}$$

Отсюда обычной индукцией по n получим

$$((3)) \quad c \leq n \rightarrow t_1(a, c) \leq \psi(a, n) \& \dots \& t_r(a, c) \leq \psi(a, n).$$

Подставим теперь в ((1)) вместо b терм $\psi(a, b)$, а вместо c — сначала $t_1(a, c)$, а затем $t_2(a, c), \dots, t_r(a, c)$. Так мы получим r формул

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(a, b), a) = 0 \rightarrow (t_i(a, c) \leq \psi(a, b) \rightarrow \mathfrak{A}(t_i(a, c), a)) \\ (i = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

¹⁾ См. с. 383—386.

Эти формулы вместе с ((3)) (где вместо n подставлено b) дают

$$\varphi(\psi(a, b), a) = 0 \& c \leq b \rightarrow \mathfrak{A}(t_1(a, c), a) \& \dots \& \mathfrak{A}(t_r(a, c), a).$$

Применив вторую посылку рассматриваемой нами схемы

$$\mathfrak{A}(t_1(a, b), a) \& \mathfrak{A}(t_2(a, b), a) \& \dots \& \mathfrak{A}(t_r(a, b), a) \rightarrow \mathfrak{A}(b, a')$$

(в которую вместо b подставим c), мы получим

$$\varphi(\psi(a, b), a) = 0 \& c \leq b \rightarrow \mathfrak{A}(c, a'),$$

а значит, и

$$\varphi(\psi(a, b), a) = 0 \rightarrow (c \leq b \rightarrow \mathfrak{A}(c, a')),$$

откуда по схеме ((2)) следует

$$\varphi(\psi(a, b), a) = 0 \rightarrow \varphi(b, a') = 0.$$

С другой стороны, из первой посылки $\mathfrak{A}(b, 0)$ рассматриваемой нами схемы мы получим формулу

$$c \leq b \rightarrow \mathfrak{A}(c, 0),$$

из которой при помощи схемы ((2)) мы выведем формулу

$$\varphi(b, 0) = 0.$$

Но из двух формул

$$\varphi(b, 0) = 0 \text{ и } \varphi(\psi(a, b), a) = 0 \rightarrow \varphi(b, a') = 0$$

в соответствии с обобщенной схемой индукции специального вида (Ind 1) получается формула $\varphi(b, a) = 0$, из которой при помощи ((1a)) получится искомая формула $\mathfrak{A}(b, a)$.

Дальнейшим обобщением схемы индукции является следующая схема перекрестной индукции:

$$\frac{\begin{aligned} &\mathfrak{A}(b, 0) \\ &\mathfrak{A}(t_1, a) \rightarrow \mathfrak{A}(0, a') \\ &\mathfrak{A}(t_2, a) \rightarrow (\mathfrak{A}(b, a') \rightarrow \mathfrak{A}(b', a')) \end{aligned}}{\mathfrak{A}(b, a)},$$

на которую мы снова накладываем ограничение, заключающееся в требовании, чтобы формула $\mathfrak{A}(c, d)$ не содержала переменных a и b .

Мы не потеряем общности, предположив, что терм t_1 содержит только такие переменные, которые входят в $\mathfrak{A}(0, a')$, а t_2 — только такие, которые входят в $\mathfrak{A}(b, a)$. Действительно, в противном случае другие переменные, встречающиеся в t_1 и t_2 , не изменяя вида этой схемы, можно было бы удалить соответствующей подстановкой цифр.

В дальнейшем мы будем записывать эти термы более развернуто в виде $t_1(a)$ и $t_2(a, b)$. (Согласно нашему предположению, $t_1(a)$ не содержит переменной b .)

Эту схему перекрестной индукции также можно будет свести к специальному виду обобщенной схемы индукции (Ind 1), а тем самым и к обычной схеме индукции.

С этой целью мы снова воспользуемся переводимостью формулы $\mathfrak{A}(c, d)$ в равенство вида $\alpha(c, d) = 0$ и, как и в предыдущем случае, положим

$$\varphi(b, c) = \sum_{x \leq b} \alpha(x, c).$$

На основе этого определения мы, как и раньше, получим схемы ((1)), ((1a)) и ((2)), а из посылки $\mathfrak{A}(b, 0)$ рассматриваемой нами схемы мы снова получим равенство

$$\varphi(b, 0) = 0.$$

Отметим также формулу

$$((4)) \quad c \leq d \rightarrow (\varphi(d, a) = 0 \rightarrow \varphi(c, a) = 0),$$

которая на основе определения функции φ переводима в формулу

$$c \leq d \rightarrow \left(\sum_{x \leq d} \alpha(x, a) = 0 \rightarrow \sum_{x \leq c} \alpha(x, a) = 0 \right),$$

которая может быть получена индукцией по d .

Определим теперь функцию $\psi(a, n)$ посредством примитивной рекурсии

$$\begin{aligned} \psi(a, 0) &= t_1(a), \\ \psi(a, n') &= \max(\psi(a, n), t_2(a, n)). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, достаточно будет, кроме уже полученной формулы $\varphi(b, 0)$, вывести формулу

$$\varphi(\psi(a, b), a) = 0 \rightarrow \varphi(b, a') = 0.$$

Обозначим эту формулу посредством $\mathfrak{B}(a, b)$. Вывод $\mathfrak{B}(a, b)$ может быть осуществлен обычной индукцией по b .

Формула $\mathfrak{B}(a, 0)$ на основании определений φ и ψ переводима в формулу

$$\varphi(t_1(a), a) = 0 \rightarrow \alpha(0, a') = 0,$$

а затем в формулу

$$\varphi(t_1(a), a) = 0 \rightarrow \mathfrak{A}(0, a'),$$

которая при помощи схемы ((1a)) может быть получена из второй посылки рассматриваемой нами схемы.

Формула $\mathfrak{B}(a, b) \rightarrow \mathfrak{B}(a, b')$ средствами исчисления высказываний может быть преобразована в

$$(\varphi(\psi(a, b), a) = 0 \rightarrow \varphi(b, a') = 0) \& \varphi(\psi(a, b'), a) = 0 \rightarrow \varphi(b', a') = 0.$$

На основании неравенства

$$\psi(a, b) \leq \psi(a, b'),$$

извлекаемого из определения функции ψ , мы с помощью ((4)) получим формулу

$$\varphi(\psi(a, b'), a) = 0 \rightarrow \varphi(\psi(a, b), a) = 0.$$

Таким образом, для получения формулы $\mathfrak{B}(a, b) \rightarrow \mathfrak{B}(a, b')$ остается вывести формулу

$$\varphi(\psi(a, b'), a) = 0 \& \varphi(b, a') = 0 \rightarrow \varphi(b', a') = 0.$$

Это удаётся проделать следующим образом.

На основании определения ψ имеем

$$t_2(a, b) \leq \psi(a, b),$$

откуда с помощью ((4)) можно получить

$$\varphi(\psi(a, b'), a) = 0 \rightarrow \varphi(t_2(a, b), a) = 0.$$

Тогда в силу ((1a)) имеем

$$((5)) \quad \varphi(\psi(a, b'), a) = 0 \rightarrow \mathfrak{A}(t_2(a, b), a).$$

Далее, определение φ дает нам

$$\varphi(b, a') = 0 \& \alpha(b', a') = 0 \rightarrow \varphi(b', a') = 0,$$

а значит, и

$$((6)) \quad \varphi(b, a') = 0 \rightarrow (\mathfrak{A}(b', a') \rightarrow \varphi(b', a') = 0).$$

В силу ((1a)) имеем

$$((7)) \quad \varphi(b, a') = 0 \rightarrow \mathfrak{A}(b, a').$$

Формулы ((5)), ((6)) и ((7)) вместе с третьей посылкой нашей схемы

$$\mathfrak{A}(t_2(a, b), a) \rightarrow (\mathfrak{A}(b, a') \rightarrow \mathfrak{A}(b', a'))$$

дают

$$\varphi(\psi(a, b'), a) = 0 \& \varphi(b, a') = 0 \rightarrow \varphi(b', a') = 0,$$

что и требовалось для завершения искомого сведения.

В качестве примера применения схемы перекрестной индукции приведем вывод неравенства

$$a < \psi(a, n)$$

из рекурсивных равенств

$$\begin{aligned}\psi(a, 0) &= 2 \cdot a + 1, \\ \psi(0, n') &= \psi(1, n), \\ \psi(a', n') &= \psi(\psi(a, n'), n).\end{aligned}$$

Пока мы доказали, что это неравенство выводимо только при фиксированных значениях переменной n . С помощью схемы перекрестной индукции оно теперь следующим образом может быть выведено с переменной n .

Из первого рекурсивного равенства мы получаем

$$a < \psi(a, 0),$$

из второго —

$$1 < \psi(1, n) \rightarrow 0 < \psi(0, n'),$$

а из третьего —

$$\psi(a, n') < \psi(\psi(a, n'), n) \rightarrow \psi(a, n') < \psi(a', n')$$

и отсюда, далее, —

$$\psi(a, n') < \psi(\psi(a, n'), n) \rightarrow (a < \psi(a, n') \rightarrow a' < \psi(a', n')).$$

Если в полученных формулах подставить b вместо a , а вместо n и затем применить схему перекрестной индукции, взяв в качестве $\mathfrak{U}(c, d)$ формулу $c < \psi(c, d)$, а в качестве t_1 и t_2 — термы 1 и $\psi(b, a')$, то мы придем к формуле $b < \psi(b, a)$, из которой с помощью подстановок можно будет получить искомое неравенство

$$a < \psi(a, n).$$

Совершенно аналогично с помощью схемы перекрестной индукции может быть получено неравенство

$$a < \xi(2, a, n + 2)$$

для аккермановской функции $\xi(a, b, n)$ ¹⁾, из которого на основании рекурсивных равенств для $\xi(a, b, n)$ можно непосредственно получить

$$\xi(2, a, n + 3) < \xi(2, a + 1, n + 3),$$

а тем самым и

$$\xi(2, a, n + 2) < \xi(2, a + 1, n + 2),$$

т. е. неравенство, выводимость которого прежде мы могли установить только при фиксированных значениях переменной n .

¹⁾ См. с. 406.

Из сводимости рассмотренных нами обобщенных схем к обычным схемам индукции, в частности, следует, что при использовании обобщенных схем остается в силе теорема о том, что каждая выводимая в рекурсивной арифметике формула без формульных переменных является верифицируемой.

§ 4. Представимость рекурсивных функций; переход к удовлетворительной системе аксиом для арифметики

1. Возврат к полному формализму; система (C); понятие существенного расширения формализма; примеры несущественных расширений; представимость функции. От рассмотрения рекурсивной арифметики мы теперь вернемся к прежнему кругу идей. Мы исходили из тех соображений, что присоединение к исчислению предикатов системы аксиом (B)¹⁾ еще не дает нам формализма арифметики, несмотря на то, что все пять аксиом Пеано оказались в ней формализованными, причем не дает по той простой причине, что мы не включили в эту систему разрешения вводить функции при помощи рекурсивных определений. Это привело нас к более детальному рассмотрению метода рекурсивных определений²⁾, которое показало, что хотя рекурсивное введение функции и заслуживает названия определения, поскольку при подстановке какой-либо цифры вместо выделенной (посредством данной рекурсии) переменной, а тем более при подстановке цифр вместо всех переменных, оно дает нам некоторое определяющее выражение, но что для самой функции, рассматриваемой с переменными аргументами, при этом не получается никакого выражения, чем рекурсивное введение и отличается от *явного* определения, которое заключается во введении определенного сокращенного обозначения. В качестве еще одного отличия рекурсивного определения в сравнении с явным мы констатировали то обстоятельство, что непротиворечивость введения рекурсивных определений еще не гарантируется непротиворечивостью предшествующих аксиом, а зависит от определенных свойств этих аксиом. Рекурсивные определения неявно характеризуют штрих-функцию и поэтому они могут также играть роль арифметических аксиом. В частности, мы нашли, что аксиомы (P₁) и (P₂) с помощью аксиомы равенства (J₂) ((J₁) оказывается здесь излишней) и формулы $0' \neq 0$ могут быть выведены из рекурсивных равенств для функций $\text{sgn } n$ и $\delta(n)$ ³⁾. В случае присоединения схемы индукции, для вывода формул (P₁) и (P₂) достаточно уже одних рекурсивных равенств для функции $\delta(n)$. А из рекурсивных равенств для $\delta(n)$ и $a \div b$ на основе

¹⁾ См. с. 335.

²⁾ См. с. 351.

³⁾ См. с. 367—368.

явного определения

$$a < b \sim b \div a \neq 0$$

с помощью аксиом равенства, формулы $0' \neq 0$ и схемы индукции можно вывести аксиомы ¹⁾

$$\neg(a < a), \quad a < a', \quad a < b \& b < c \rightarrow a < c.$$

Все эти выводы основываются на элементарном исчислении со свободными переменными.

Если же за основу взять исчисление предикатов, то тем более получится, что все формулы системы аксиом (В) могут быть выведены из системы аксиом, состоящей из второй аксиомы равенства, формулы $0' \neq 0$, рекурсивных равенств для функций $\delta(n)$ и $a \div b$ и аксиомы индукции, т. е. из системы формул

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \\ 0' \neq 0, \\ \delta(0) = 0, \\ \delta(n') = n, \\ a \div 0 = a, \\ a \div n' = \delta(a \div n), \\ A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a) \end{array} \right.$$

с добавленным явным определением

$$a < b \sim b \div a \neq 0.$$

Еще более, чем рассмотрением этих выводимостей, силу рекурсивных определений мы продемонстрировали тем, что с помощью рекурсий, обходясь без использования связанных переменных, мы осуществили построение значительного фрагмента арифметики. Это построение рекурсивной арифметики сделало в высшей степени правдоподобным предположение, что если мы положим в основу рассмотрения все исчисление предикатов в целом, то присоединение рекурсивных определений к символам и аксиомам системы (В) приведет к существенному расширению нашего формализма. Но какого-либо строгого доказательства этому факту мы еще не дали. Для того чтобы провести такое доказательство, мы должны будем уточнить, что именно мы будем понимать под существенным расширением нашего формализма. Расширение какого-либо формализма имеет место уже тогда, когда вводится какой-нибудь функциональный знак, который нельзя явно определить с помощью какого-либо ранее постро-

¹⁾ См. с. 371 и далее.

енного термина таким образом, чтобы при замене данного функционального знака этим термом формулы, посредством которых вводится этот функциональный знак, переходили в выводимые (т. е. в выводимые в исходном формализме). В этом смысле слова формализм системы (В) расширяется уже введением функции $\delta(n)$ при помощи рекурсивных равенств

$$\delta(0) = 0,$$

$$\delta(n') = n.$$

Под формализмом системы (В) мы при этом понимаем систему аксиом (В) с включением всех тех соглашений, на которые опирается применение этих аксиом, а также всех тех правил образования термов и формул и проведения доказательств, которые допускаются этими соглашениями. В этом формализме всякий терм представляет собой либо цифру, либо переменную, либо переменную, снабженную штрихами. Таким образом, явное определение $\delta(n)$ с помощью термина могло бы иметь только вид

$$\delta(n) = a^{(t)},$$

где a — либо символ 0, либо какая-нибудь переменная, Терм $a^{(t)}$ должен был бы содержать переменную n , потому что в противном случае при замене $\delta(n')$ выражением $a^{(t)}$ равенство

$$\delta(n') = n$$

должно было бы перейти в формулу, выводимую средствами системы (В), т. е. оказалось бы выводимым равенство

$$a^{(t)} = n.$$

Но тогда средствами системы (В) можно было бы вывести и формулы

$$a^{(t)} = 0, \quad a^{(t)} = 0'$$

(так как по предположению a не содержит переменной n), а тем самым и формулу

$$0' = 0.$$

Но мы знаем, что эта формула, являющаяся ложной, не может быть выведена средствами системы (В). Таким образом, a могло бы быть только переменной n , и, значит, наше явное определение тогда имело бы вид

$$\delta(n) = n^{(t)}.$$

Но этот случай тоже не может иметь места; действительно, если бы это равенство представляло собой соответствующее явное определение, то для $\delta(n')$ в качестве замены получалось бы $n^{(t+1)}$

и тогда средствами системы (В) можно было бы вывести равенство

$$n^{(t+1)} = n,$$

получающееся в результате этой замены из второго рекурсивного равенства для $\delta(n)$. Но тогда было бы выводимо и равенство

$$0^{(t+1)} = 0,$$

между тем как эта формула является ложной.

Таким образом, функция $\delta(n)$ действительно не допускает явного определения в формализме системы (В). И тем не менее совокупность *высказываний*, изображимых в формализме системы (В) посредством формул ¹⁾, не претерпевает никакого расширения. Действительно, функциональное отношение, изображаемое равенством

$$\delta(a) = b,$$

может быть выражено без функционального знака δ формулой

$$(a = 0 \ \& \ b = 0) \vee a = b'.$$

Именно, если мы сокращенно обозначим эту формулу посредством $\mathfrak{B}(a, b)$, то из аксиомы (J₁) непосредственно могут быть выведены формулы

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(0, 0), \\ \mathfrak{B}(n', n); \end{aligned}$$

из этих формул при помощи схемы индукции можно будет получить

$$\exists x \mathfrak{B}(a, x),$$

а с помощью формул (P₁), (P₂) и второй аксиомы равенства мы получим

$$\mathfrak{B}(a, b) \ \& \ \mathfrak{B}(a, c) \rightarrow b = c.$$

Эти две формулы выражают тот факт, что отношение $\mathfrak{B}(a, b)$ всякому значению переменной a однозначно сопоставляет то единственное значение переменной b , для которого имеет место $\mathfrak{B}(a, b)$, а формулы

$$\mathfrak{B}(0, 0), \ \mathfrak{B}(n', n)$$

выражают тот факт, что это соответствие, рассматриваемое как функция, удовлетворяет рекурсивным равенствам для $\delta(n)$.

Только что приведенные выводы осуществляются без использования функции $\delta(n)$. Если же дополнительно присоединить рекурсивные равенства для $\delta(n)$, то индукцией по a мы получим

¹⁾ Заметим, что формула, принадлежащая формализму системы (В), не обязательно должна быть выводимой формулой.

эквивалентность

$$\delta(a) = b \sim \mathfrak{B}(a, b),$$

которая в прямом виде выражает тот факт, что $\delta(a)$ равно тому числу b , которое находится к a в отношении $\mathfrak{B}(a, b)$. Из этой эквивалентности с помощью аксиом равенства [т. е. с использованием формулы ба)] из гл. VI ¹⁾ можно, далее, получить формулу

$$A(\delta(a)) \sim \forall x (\mathfrak{B}(a, x) \rightarrow A(x)),$$

при помощи которой любая формула, построенная с использованием функционального знака $\delta(\cdot)$, может быть переведена в такую формулу, в которой этот функциональный знак не встречается.

Между прочим, с исключением функционального знака $\delta(\cdot)$ из формул можно связать (что из предшествующего непосредственно не усматривается) исключение функции $\delta(n)$ из выводов; иначе говоря, в выводе формулы, не содержащей функционального знака $\delta(\cdot)$, мы всегда сможем обойтись без использования функции $\delta(n)$.

То, что это действительно имеет место, в дальнейшем можно будет извлечь из одной весьма общей логической теоремы об устранимости понятия «тот, который», доказательство которой будет приведено в следующей главе ²⁾.

Рассмотренная нами связь между равенством

$$\delta(a) = b$$

и формулой

$$\mathfrak{B}(a, b)$$

позволяет сделать следующие выводы относительно цифр, являющихся значениями фигурирующих здесь переменных: Если z — цифра, а t — значение, которое получается в результате вычисления $\delta(z)$, то формула

$$\mathfrak{B}(z, t)$$

является истинной и в то же самое время выводимой средствами системы (В). А если n — цифра, отличная от t , то формула

$$\mathfrak{B}(z, n)$$

является ложной, а ее отрицание выводимо средствами системы (В).

Такое же положение вещей, с каким мы сталкиваемся здесь в связи с функцией $\delta(n)$, имеет место и в отношении функции

¹⁾ См. с. 214.

²⁾ Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением таких доказательств, заключительные формулы которых не содержат формульных переменных, мы можем доказать устранимость функции $\delta(n)$ также и с помощью модификации разработанного в гл. VI метода редукции.

$\alpha(a, b)$, которую мы в нашей рекурсивной арифметике ввели посредством явного определения ¹⁾

$$\alpha(a, b) = \text{sgn}((a \div b) + (b \div a))$$

с помощью функций $a + b$, $a \div b$ и $\text{sgn } n$.

Относительно этой функции мы тоже можем утверждать, что она не допускает явного определения с помощью какого-либо термина, построенного из переменных и символа 0 при помощи штрих-символа. Но равенство

$$\alpha(a, b) = c$$

может быть заменено формулой

$$(a = b \ \& \ c = 0) \vee (a \neq b \ \& \ c = 0'),$$

принадлежащей формализму системы (B). К этой формуле упомянутое определение функции $\alpha(a, b)$ ведет нас не непосредственно, а лишь через выводимые из него формулы

$$\begin{aligned} a = b &\rightarrow \alpha(a, b) = 0, \\ a \neq b &\rightarrow \alpha(a, b) = 0'. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют функцию $\alpha(a, b)$ в том смысле, что для любых двух цифр z и t (в зависимости от того, равны эти цифры или различны) они дают возможность вывести либо равенство

$$\alpha(z, t) = 0,$$

либо равенство

$$\alpha(z, t) = 0'$$

и тем самым дают возможность формализовать вычисление значений этой функции.

Если равенство

$$\alpha(a, b) = c$$

заменить формулой

$$(a = b \ \& \ c = 0) \vee (a \neq b \ \& \ c = 0'),$$

которую мы для краткости обозначим посредством $\mathfrak{E}(a, b, c)$, то определяющие $\alpha(a, b)$ формулы перейдут в формулы

$$\begin{aligned} a = b &\rightarrow \mathfrak{E}(a, b, 0), \\ a \neq b &\rightarrow \mathfrak{E}(a, b, 0'), \end{aligned}$$

которые могут быть выведены с помощью формулы

$$a = a.$$

¹⁾ См. с. 391.

Кроме того, с помощью аксиом равенства могут быть выведены формулы

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(a, b, c) \ \& \ a = b &\rightarrow c = 0, \\ \mathfrak{E}(a, b, c) \ \& \ a \neq b &\rightarrow c = 0'. \end{aligned}$$

Полученные четыре формулы показывают, что формула $\mathfrak{E}(a, b, c)$ находится к равенству $\alpha(a, b) = c$ в отношении, совершенно аналогичном тому, в котором ранее рассмотренная нами формула $\mathfrak{B}(a, b)$ находится к равенству $\delta(a) = b$. В частности, получается, что для каждой тройки цифр r, z, t , в которой t совпадает со значением $\alpha(r, z)$, средствами системы (B) может быть выведена формула

$$\mathfrak{E}(r, z, t)$$

и что если t отлично от значения $\alpha(r, z)$, то теми же самыми средствами может быть выведена формула

$$\neg \mathfrak{E}(r, z, t).$$

Рассмотрение примеров этих двух функций, присоединение которых к формализму системы (B) хотя и расширяет запас термов, но не изменяет запаса изобразимых отношений, наводит нас на мысль дать следующее уточнение понятия существенного расширения (речь идет о расширении формализма путем присоединения какой-либо функции).

Допустим, что к данному формализму мы добавляем функцию одного или нескольких аргументов путем введения специального функционального знака $\mathfrak{f}(a, \dots, k)$ вместе с относящимися к нему формулами, позволяющими проводить формализованное вычисление значений этой функции для цифр, являющихся значениями аргументов. Мы будем говорить, что функция $\mathfrak{f}(a, \dots, k)$ *представима* в рассматриваемом нами формализме, если равенство

$$\mathfrak{f}(a, \dots, k) = l$$

можно представить¹⁾ формулой

$$\mathfrak{A}(a, \dots, k, l)$$

этого формализма в том смысле, что при каждом замещении переменных

$$a, \dots, k, l$$

цифрами

$$a, \dots, f, l$$

¹⁾ Условие, определяющее представимость, мы выбираем как можно более слабым, чтобы утверждение о непредставимости было как можно более сильным.

в рассматриваемом формализме оказывается выводимой формула

$$\mathcal{A}(a, \dots, f, l),$$

если l совпадает со значением

$$f(a, \dots, f),$$

и формула

$$\neg \mathcal{A}(a, \dots, f, l)$$

в противном случае. При этом представляющая формула

$$\mathcal{A}(a, \dots, k, l)$$

может быть выбрана таким образом, чтобы кроме $a, \dots, k, l$ в ней не встречалось никаких свободных переменных. В самом деле, в представляющей формуле, содержащей другие свободные переменные, эти переменные без нарушения указанных свойств формулы можно устранить посредством соответствующих подстановок.

Мы будем теперь говорить, что присоединение данной функции является *существенным* расширением нашего формализма, если эта функция в рассматриваемом формализме *не представима*.

2. Доказательство того, что сумма и разность не представимы в формализме системы (B); рекурсивные равенства для сложения как аксиомы; система (D). Мы сейчас покажем, что уже присоединение к формализму системы (B) функции $a + b$, равно как и присоединение функции $a \div b$, ведет к существенному расширению этого формализма.

Рассмотрим произвольную формулу из формализма системы (B) с единственной переменной a ; эта формула средствами системы (B) переводима в ее редукцию, а эта последняя может быть переведена в такую дизъюнктивную нормальную форму, в которой не встречается отрицаний, так что каждый ее дизъюнктивный член представляет собой конъюнкцию равенств и неравенств. Равенства отдельно можно не рассматривать, так как любое равенство

$$a = b$$

переводимо в конъюнкцию неравенств

$$a < b' \ \& \ b < a'.$$

Для неравенства, не содержащего никаких переменных, кроме a , имеются следующие возможности:

Либо оно является нумерическим; тогда оно истинно или ложно.

Либо оно имеет вид

$$a^{(f)} < a^{(l)};$$

тогда оно переводимо в нумерическое неравенство

$$0^{(f)} < 0^{(l)}.$$

Либо оно имеет вид

$$a^{(f)} < 0^{(l)};$$

тогда, если $f \geq l$, оно переводимо в ложное неравенство

$$0 < 0;$$

если же $f < l$, оно переводимо в некоторое неравенство

$$a < 0^{(l)};$$

неравенство такого рода мы будем называть *верхней оценкой* для a .

Либо оно имеет вид

$$0^{(f)} < a^{(l)};$$

тогда, если $f < l$, оно переводимо в истинное неравенство

$$0 < 0';$$

если же $f \geq l$, то оно переводимо в некоторое неравенство

$$0^{(f)} < a;$$

неравенство такого рода мы будем называть *нижней оценкой* для a .

В соответствии с этим для формулы в целом получается альтернатива, заключающаяся в том, что эта формула переводима либо в истинную, либо в ложную нумерическую формулу, либо же в такую дизъюнктивную нормальную форму, у которой каждый дизъюнктивный член представляет собой конъюнкцию верхних и нижних оценок для a .

Рассмотрим последний из перечисленных случаев. Здесь мыслится следующие две возможности. Либо верхних оценок для a нет по крайней мере в одном из дизъюнктивных членов; тогда при любой подстановке цифры, большей чем определенная цифра $0^{(l)}$, эта формула переходит в некоторую истинную формулу. Либо же верхняя оценка для a встречается в каждом дизъюнктивном члене; тогда при любой подстановке какой-либо цифры, большей чем определенная цифра $0^{(l)}$, эта формула переходит в некоторую ложную формулу.

Таким образом, во всех случаях наша формула обладает тем свойством, что либо она становится истинной для всех достаточно больших подставляемых вместо a цифр, либо же для всех достаточно больших цифр она становится ложной.

Теперь для исходной формулы получается, что либо она сама выводима для всех достаточно больших значений a , либо для всех достаточно больших значений a выводимо ее отрицание. При этом указанное свойство присуще любой формуле, принадлежащей формализму системы (B) и содержащей a в качестве единственной свободной переменной.

Теперь на основе этого факта легко показать, что функции $a + b$ и $a \div b$ не представимы в формализме системы (B).

В самом деле, допустим, что равенство

$$a + b = c$$

представимо некоторой формулой

$$\mathfrak{A}(a, b, c)$$

формализма системы (B). Тогда эту формулу — как мы уже заметили — можно выбрать таким образом, чтобы она не содержала никаких свободных переменных, кроме a , b и c , а также чтобы в ней не встречалась связанная переменная x , так как в случае надобности эту переменную всегда можно переименовать в какую-нибудь другую.

Тогда формула

$$\exists x \mathfrak{A}(x, x, a)$$

принадлежит формализму системы (B) и содержит единственную свободную переменную a . Поэтому, согласно доказанной нами теореме, либо для всех достаточно больших цифр z , т. е. начиная с некоторой цифры $0^{(t)}$, средствами системы (B) выводима формула

$$\exists x \mathfrak{A}(x, x, z)$$

либо для всех достаточно больших z выводимо отрицание этой формулы, а значит, и формула

$$\forall x \neg \mathfrak{A}(x, x, z).$$

Таким образом, если мы выберем цифру f достаточно большой, то для цифр z , являющейся значением $f + f$, средствами системы (B) будут выводимы либо обе формулы

$$\exists x \mathfrak{A}(x, x, z), \quad \exists x \mathfrak{A}(x, x, z'),$$

либо обе формулы

$$\forall x \neg \mathfrak{A}(x, x, z), \quad \forall x \neg \mathfrak{A}(x, x, z').$$

В первом случае, вследствие выводимости формулы

$$\exists x \mathfrak{A}(x, x, z'),$$

по теореме о частичной редукции¹⁾ мы нашли бы цифру l , такую что средствами системы (B) была бы выводима формула

$$\mathfrak{A}(l, l, z');$$

во втором случае вследствие выводимости формулы

$$\forall x \neg \mathfrak{A}(x, x, z),$$

была бы выводимой формула

$$\neg \mathfrak{A}(f, f, z).$$

Но ни формула

$$\mathfrak{A}(l, l, z'),$$

ни формула

$$\neg \mathfrak{A}(f, f, z)$$

не могут быть выведены средствами системы (B).

Действительно, так как z является значением $f + f$, то ввиду того, что формула

$$\mathfrak{A}(a, b, c)$$

представляет равенство

$$a + b = c,$$

формула

$$\mathfrak{A}(f, f, z)$$

должна быть выводимой средствами системы (B). Из того же самого свойства формулы $\mathfrak{A}(a, b, c)$ следует, что и формула

$$\neg \mathfrak{A}(l, l, z')$$

выводима, так как при $l \leq f$ z' больше значения $l + l$, а в случае $l > f$ оно меньше этого значения и, значит, в любом случае отлично от значения $l + l$. Таким образом, и в случае выводимости

$$\mathfrak{A}(l, l, z'),$$

и в случае выводимости

$$\neg \mathfrak{A}(f, f, z)$$

средствами системы (B) была бы выводима некоторая формула вместе с ее отрицанием, между тем как мы ранее показали, что система (B) непротиворечива.

¹⁾ См. с. 304.

Тот факт, что равенство

$$a \dot{-} b = c$$

также не представимо в формализме системы (B) никакой формулой

$$\mathfrak{B}(a, b, c),$$

получается совершенно аналогичным образом, если рассмотреть формулу

$$\exists x \mathfrak{B}(a, x, x).$$

Для того чтобы убедиться в этом, нам не нужно снова повторять проведенное рассуждение, а достаточно лишь заметить, что справедливость равенства

$$\mathfrak{z} \dot{-} \mathfrak{f} = \mathfrak{f},$$

согласно определению значения $\mathfrak{z} \dot{-} \mathfrak{f}$, равносильна справедливости равенства

$$\mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{z}.$$

Тем самым действительно показано, что ни одна из функций $a + b$ и $a \dot{-} b$ не представима в формализме системы (B). Отсюда, в частности, получается, что система (C), относительно которой мы показали, что ее средствами могут быть выведены все формулы системы (B), является более богатой, чем система (B), т. е. формализм системы (C) является существенным расширением формализма системы (B).

Системе (C), в которой в качестве аксиом фигурируют рекурсивные равенства для $a \dot{-} b$, мы сопоставим следующую, основанную на рекурсивных равенствах для $a + b$ систему аксиом:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \\ a' \neq 0, \\ a' = b' \rightarrow a = b, \\ a + 0 = a, \\ a + b' = (a + b)', \\ A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a). \end{array} \right.$$

В этой системе кроме аксиомы равенства (J_2) (аксиома (J_1) оказывается излишней ввиду наличия аксиомы $a + 0 = a$) имеются обе пеановские аксиомы (P_1) и (P_2), которые в системе (C) были заменены рекурсивными равенствами для $\delta(n)$ и формулой $0' \neq 0$, а также рекурсивные равенства для $a + b$ и аксиома индукции.

К этому мы добавим явное определение выражения $a < b$, которое вводится здесь формулой

$$a < b \sim \exists x (x \neq 0 \& a + x = b).$$

Основываясь на этом определении, мы можем вывести формулы

$$a < a', \quad a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b, \quad \neg (a < a), \\ a < b \& b < c \rightarrow a < c,$$

причем ¹⁾ первая из них выводится непосредственно с помощью формулы (P_1), вторая — с помощью (выводимых при помощи аксиомы индукции) формул

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a), \\ a' + b = a + b',$$

третья — с помощью формулы

$$a + b = a \rightarrow b = 0,$$

выводимой из формул

$$0 + a = a, \\ a' + b = a + b'$$

и (P_2) индукцией по a , а четвертая — с помощью формул

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

и

$$b \neq 0 \rightarrow a + b \neq 0,$$

последняя из которых может быть получена из формул

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x (x' = a)$$

и (P_1).

Тем самым все аксиомы системы (B) оказываются выводимыми средствами системы (D) с учетом явного определения выражения $a < b$.

В формализме системы (D) равенство

$$a \dot{-} b = c$$

может быть представлено формулой

$$(a < b \& c = 0) \vee a = b + c.$$

Обозначим для краткости эту формулу посредством $\mathfrak{B}(a, b, c)$. Тогда, как легко убедиться, для каждой тройки цифр r, s, t средствами системы (D) можно будет вывести либо формулу

$$\mathfrak{B}(r, s, t)$$

либо формулу

$$\neg \mathfrak{B}(r, s, t)$$

¹⁾ В последующем кратком эскизе доказательства случаи прямого использования рекурсивных равенств для $a + b$, а также второй аксиомы равенства специально оговариваться не будут.

в зависимости от того, совпадает или не совпадает t со значением $t \div s$ ¹⁾.

Если бы мы захотели добавить $a \div b$ к системе (D) в качестве термина, то это проще всего было бы сделать, добавив к аксиомам этой системы формулы

$$(a + b) \div a = b$$

и

$$a \div (a + b) = 0.$$

В получившейся таким образом системе (D₁) посредством равенства

$$\delta(n) = n \div 0'$$

можно было бы явно определить функцию $\delta(n)$ и на основании этого определения вывести рекурсивные равенства для $\delta(n)$ и $a \div b$. Тем самым из этой системы (D₁) можно было бы вывести все формулы системы (C).

3. Доказательство непротиворечивости и полноты системы (D) с помощью метода редукции; непредставимость умножения в формализме системы (D). Переход от системы (B) к системе (D), как мы видели, представляет собой существенное расширение нашего формализма. И все же в результате этого расширения ситуация, обнаружившаяся при рассмотрении системы (B), в принципиальном отношении не меняется. Более того, для (D) могут быть получены результаты, совершенно аналогичные тем, которые были установлены нами для системы (B).

Прежде всего, нам требуется доказать непротиворечивость системы (D), так как эта последняя еще не вытекает из непротиворечивости системы (B), а также и из непротиворечивости рекурсивной арифметики, в которой, как мы помним, было запрещено использование связанных переменных. Метод, пользуясь которым мы в гл. VI доказали непротиворечивость системы (B), теперь может быть приспособлен для рассмотрения системы (D) и он, помимо непротиворечивости, дает для этой системы также соответствующие теоремы о полноте. Этот метод, предложенный Пресбургером²⁾, мы изложим здесь не во всех подробностях, а лишь

¹⁾ С другой стороны, заметим, что равенство

$$+ b = c$$

может быть представлено внутри системы (C) формулой

$$c \div b = a \ \& \ b \div c = 0.$$

²⁾ Presburger M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.— Comptes Rendus du Premier Congres d. Math. des Pays Slaves, Warschau, 1930.

в такой мере, чтобы были отчетливо видны основные идеи и точный вид результата. С этой целью мы предположим дальнейшему следующее рассмотрение.

К термам, участвующим в формализме системы (D), относятся в частности, многочисленные суммы вида

$$(\dots ((a + a) + a) + \dots) + a$$

с одинаковыми слагаемыми. Для краткости n -членную сумму этого вида мы будем обозначать посредством

$$a \cdot f,$$

не вводя, однако, этого выражения в рассматриваемый нами формализм. К нашему формализму мы добавим формулы вида

$$a \equiv b \pmod{f}$$

(читается: a сравнимо с b по модулю f), где f — цифра, отличная от 0 и 0'. Такие сравнения по модулю f мы введем посредством следующего явного определения:

$$a \equiv b \pmod{f} \sim \exists x (a = b + x \cdot f \vee b = a + x \cdot f);$$

это определение формулируется здесь отдельно для каждой встречающейся в этом контексте цифры f . Например, если f представляет собой цифру 0'', то без использования сокращения эта запись будет иметь следующий вид:

$$a \equiv b \pmod{0''} \sim \exists x (a = b + ((x + x) + x) \vee b = a + ((x + x) + x))$$

Сравнение

$$t \equiv s \pmod{f},$$

в котором t и s суть цифры, мы будем считать *истинным*, если при делении t на f получается тот же самый остаток, что и при делении s на f ; мы будем считать его *ложным*, если остатки, получающиеся при выполнении указанных делений, различны. В нашем формализме эти сравнения будут играть роль элементарных формул. И вообще, формулами без связанных переменных и без формульных переменных в нашем формализме будут равенства, неравенства и сравнения, а также формулы, построенные из формул этих трех типов с помощью связок исчисления высказываний.

Формулу такого рода мы будем называть *верифицируемой*, если при каждой замене свободных переменных цифрами после выполнения соответствующих суммирований она оказывается истинной. Теперь это понятие верифицируемости с помощью некоторой процедуры редукции может быть распространено, подобно тому, как это делалось в гл. VI, на формулы со связанными

переменными¹⁾. Иначе говоря, мы можем указать способ, с помощью которого всякой формуле $\mathcal{A}$ из формализма системы (D), не содержащей формульных переменных (с включением неравенств и сравнений), может быть сопоставлена (по крайней мере одна) ее *редукция* таким образом, что будут выполняться следующие условия:

1. Редукция формулы $\mathcal{A}$ представляет собой формулу без связанных переменных и содержит те же самые свободные индивидуальные переменные, что и $\mathcal{A}$.

2. Формула без связанных переменных (и без формульных переменных) сама является своей собственной редукцией.

3. Если формула $\mathcal{F}$ строится из формул $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ с помощью связок исчисления высказываний, то всякая редукция $\mathcal{F}$ тем же самым способом строится из редукций формул $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$.

4. Редукция формулы $\mathcal{A}$, содержащей квантор всеобщности, совпадает с редукцией формулы, которая получается из $\mathcal{A}$ заменой всякой составной части $\forall x \mathcal{B}(x)$ выражением $\neg \exists x \neg \mathcal{B}(x)$ (и аналогичными заменами для других переменных).

5. Пусть переменная c не входит в $\mathcal{G}(x)$; тогда всякая редукция формулы $\exists x \mathcal{G}(x)$ одновременно является и редукцией формулы $\exists x \mathcal{H}(x)$, где $\mathcal{H}(c)$ является редукцией формулы $\mathcal{G}(c)$ (вместо x здесь может фигурировать любая другая связанная переменная, а вместо c — любая другая свободная индивидуальная переменная).

6. Если формула $\mathcal{A}'$ получается из формулы $\mathcal{A}$ путем замены входящих в $\mathcal{A}$ индивидуальных переменных цифрами (формульных переменных в $\mathcal{A}$ быть не должно), то в результате этой замены всякая редукция формулы $\mathcal{A}$ перейдет в некоторую редукцию формулы $\mathcal{A}'$.

7. Пусть $\mathcal{A}(c)$ не содержит никаких переменных, кроме c , и пусть $\mathcal{H}$ — редукция формулы $\exists x \mathcal{A}(x)$. Тогда, если для какой-либо цифры z формула $\mathcal{A}(z)$ верифицируема, т. е. если после вычисления входящих в нее сумм получается истинная формула, то $\mathcal{H}$ также будет верифицируемой, и обратно: если $\mathcal{H}$ верифицируема, то из процесса редукции формулы $\exists x \mathcal{A}(x)$ мы найдем такую цифру z , что формула $\mathcal{A}(z)$ будет верифицируема.

8. Формула и ее редукция всегда переводимы друг в друга.

Теперь перечислим кратко те операции, с помощью которых для данной формулы без формульных переменных может быть получена ее редукция; при этом в целях большей понятности мы будем пользоваться эвристическим способом изложения.

У нас речь идет об удалении связанных переменных в тех случаях, когда они встречаются. Квантор всеобщности из рассмотре-

ния исключается сразу же, в соответствии с п. 4. Таким образом, как и раньше, задача заключается в том, чтобы, двигаясь изнутри, шаг за шагом исключить в формуле все кванторы существования. Процедура исключения будет вполне определена, если мы для одной из наиболее глубоко расположенных подформул вида $\exists x \mathcal{A}(x)$ (вместо x может фигурировать и какая-нибудь другая переменная) укажем соответствующую замену выражением, не содержащим рассматриваемого квантора существования $\exists x$.

Эта операция замены начнется с того, что выражение $\mathcal{A}(x)$ мы подвергнем ряду преобразований.

а) Сначала при помощи преобразований исчисления высказываний мы приведем его к дизъюнктивной нормальной форме, построенной из равенств, неравенств и сравнений. После этого мы исключим равенства и их отрицания, а затем — отрицания неравенств и сравнений, заменяя всякое равенство

$$a = b$$

конъюнкцией

$$a < b' \ \& \ b < a',$$

отрицание равенства

$$a \neq b$$

дизъюнкцией

$$a < b \vee b < a,$$

трицание неравенства

$$\neg (a < b)$$

неравенством

$$b < a'$$

и отрицание сравнения

$$a \equiv b \pmod{f}$$

($f-1$)-членной дизъюнкцией

$$a \equiv b + 0' \pmod{f} \vee a \equiv b + 0'' \pmod{f} \vee \dots$$

$$\vee a \equiv b + 0^{(f-1)} \pmod{f}.$$

Вообще говоря, структура рассматриваемой дизъюнктивной нормальной формы этими заменами будет разрушена, но ее можно будет затем восстановить. В полученной таким образом нормальной форме каждый дизъюнктивный член будет конъюнкцией неравенств и сравнений. Выражения, стоящие в обеих частях неравенств и сравнений, будут либо цифрами, либо переменными, либо будут построены из цифр и переменных с помощью штрих-символа и знака $+$.

¹⁾ См. с. 294 и далее, а также с. 305.

б) Каждое такое выражение, стоящее в какой-либо части неравенства или сравнения, в том случае если оно содержит подлежащую исключению переменную x , мы приведем к виду

$$x \cdot f + r, \text{ соответственно } x \cdot f$$

где r — выражение, не содержащее x , но, возможно, еще содержащее какие-нибудь другие переменные. Для этого каждое выражение

$$a^{(t)},$$

где a не является цифрой, а t отлочно от нуля, заменим суммой

$$x + 0^{(t)}$$

и затем к выражениям, построенным с помощью знака $+$, применим обычные правила вычисления суммы.

Далее мы можем добиться того, чтобы все неравенства и все сравнения содержали переменную x не более чем в одной части. Действительно, неравенство

$$x \cdot f + r < x \cdot f + s$$

можно заменить неравенством

$$r < s,$$

неравенство

$$x \cdot f + r < x \cdot l + s$$

или соответственно

$$x \cdot l + r < x \cdot f + s,$$

где l представляет собой наибольшее из двух чисел f и l , а значит, имеет вид $f + p$, можно заменить на

$$r_p^f < x \cdot p + s$$

или соответственно на

$$x \cdot p + r < s.$$

Совершенно аналогичным образом мы поступим и со сравнениями. Кроме того, переменную x , если она стоит только в правой части сравнения, мы можем, поменяв обе части местами, перенести в левую часть, так что в дальнейшем у нас будут встречаться только сравнения вида

$$x \cdot p \equiv s \pmod{n}$$

или соответственно

$$x \cdot p + r \equiv s \pmod{n}.$$

Далее, у сравнения

$$x \cdot p + r \equiv s \pmod{n}$$

в левой части мы уберем слагаемое r , заменив это сравнение сравнением

$$x \cdot p \equiv s + r \cdot (n-1) \pmod{n}^1,$$

так что каждое сравнение, содержащее x , получит вид

$$x \cdot p \equiv t \pmod{n}.$$

Конечно, t в этом сравнении не обязано быть цифрой. Тем не менее мы можем добиться, чтобы у каждого сравнения рассматриваемого типа справа стояла некоторая цифра. В самом деле, сравнение

$$x \cdot p \equiv t \pmod{n}$$

может быть заменено n -членной дизъюнкцией

$$(t \equiv 0 \pmod{n}) \& x \cdot p \equiv 0 \pmod{n})$$

$$\vee (t \equiv 0' \pmod{n}) \& x \cdot p \equiv 0' \pmod{n})$$

$$\vee \dots \vee (t \equiv 0^{(n-1)} \pmod{n}) \& x \cdot p \equiv 0^{(n-1)} \pmod{n}).$$

После выполнения этой замены мы должны будем позаботиться о том, чтобы структура дизъюнктивной нормальной формы снова была восстановлена.

После того как все это будет проделано, каждый дизъюнктивный член нашей нормальной формы будет представлять собой конъюнкцию членов, либо не содержащих x , либо имеющих один из следующих] видов:

$$x \cdot p + r < s,$$

$$r < x \cdot p + s,$$

$$x \cdot p \equiv z \pmod{n},$$

где z — цифра, а r и s не обязаны быть цифрами.]

р) Для конъюнкции сравнений вида

$$x \cdot p \equiv z \pmod{n}$$

(у различных сравнений цифры p , z , n могут быть разными) имеет место следующая элементарно-арифметическая альтернатива: либо эти сравнения не имеют общего решения, либо они равносильны одному единственному сравнению вида

$$x \equiv q \pmod{m},$$

где q снова является] цифрой. В том, какой из этих двух случаев имеет место на самом деле, можно разобраться элементарными средствами, причем во втором случае можно будет отыскать и сами цифры q и m . В первом случае мы заменим рассматри-

¹⁾ $n-1$ здесь обозначает соответствующую цифру.

ваемую конъюнкцию неравенством $0 < 0$, а во втором случае мы заменим ее соответствующим равносильным ей сравнением

$$x \equiv q \pmod{m}.$$

В случае конъюнкции, состоящей из неравенств, содержащих x , мы прежде всего можем добиться того, чтобы в каждом из неравенств этой конъюнкции переменная x встречалась в одном и том же сочетании

$$x \cdot p + t.$$

Действительно, если у нас имеются два неравенства

$$x \cdot p_1 + r_1 < s_1$$

и

$$x \cdot p_2 + r_2 < s_2,$$

то вместо них мы можем написать два других неравенства

$$x \cdot (p_1 \cdot p_2) + (r_1 \cdot p_2 + r_2 \cdot p_1) < s_1 \cdot p_2 + r_2 \cdot p_1$$

и

$$x \cdot (p_1 \cdot p_2) + (r_1 \cdot p_2 + r_2 \cdot p_1) < s_2 \cdot p_1 + r_1 \cdot p_2;$$

аналогичным образом мы можем поступить и в случае двух неравенств

$$x \cdot p_1 + r_1 < s_1, \quad s_2 < x \cdot p_2 + r_2$$

или соответственно

$$s_1 < x \cdot p_1 + r_1, \quad s_2 < x \cdot p_2 + r_2.$$

Тем самым число различных сочетаний

$$x \cdot p + t,$$

в которых x встречается внутри рассматриваемой конъюнкции неравенств, уменьшится на единицу, и путем повторения этой операции оно в конце концов будет доведено до 1.

Если теперь у нас имеется конъюнкция неравенств, имеющая вид

$$[x \cdot p + t < s_1 \& \dots \& x \cdot p + t < s_b,$$

то мы можем заменить ее b -членной дизъюнкцией, i -й член которой будет иметь вид

$$s_1 < s_1 + 1 \& s_1 < s_2 + 1 \& \dots \& s_1 < s_b + 1 \& x \cdot p + t < s_1.$$

Аналогично, конъюнкцию

$$r_1 < x \cdot p + t \& \dots \& r_m < x \cdot p + t$$

мы заменим m -членной дизъюнкцией с общим членом

$$r_1 < r_1 + 1 \& r_2 < r_1 + 1 \& \dots \& r_m < r_1 + 1 \& r_1 < x \cdot p + t.$$

В результате этих замен вид нашей дизъюнктивной нормальной формулы нарушится. Если затем снова восстановить его, то каждый дизъюнктивный член будет содержать переменную x самое большее в трех членах конъюнкции — а именно, не более чем в одном сравнении вида

$$x \equiv q \pmod{n}$$

(с цифрой q) и не более чем $\frac{1}{2}$ в одном из неравенств каждого из следующих двух видов:

$$a < x \cdot p + t,$$

и

$$x \cdot p + t < b,$$

причем в том случае, когда оба этих вида встречаются одновременно, выражение $x \cdot p + t$ в обоих случаях будет одно и то же.

После того как выражение $\mathfrak{A}(x)$ операциями а), б) и в) будет преобразовано в дизъюнктивную нормальную форму, обладающую указанными простыми свойствами, мы поставим перед ним квантор существования $\exists x$ и распределим этот квантор на все члены дизъюнкции в отдельности, если они еще содержат x . Затем у каждого члена, начинающегося квантором $\exists x$, мы вынесем из-под $\exists x$ конъюнктивные члены, не содержащие x .

Теперь нам осталось исключить переменную x только из таких выражений, которые либо имеют вид

$$\exists x (x \equiv q \pmod{n} \& a < x \cdot p + t \& x \cdot p + t < b),$$

либо отличаются от него только отсутствием одного или двух членов стоящей под квантором конъюнкции.

Случай, когда член

$$a < x \cdot p + t$$

отсутствует, мы можем специально и не рассматривать, так как вместо неравенства

$$x \cdot p + t < b$$

мы всегда можем написать конъюнкцию

$$0 < x \cdot p + t' \& x \cdot p + t' < b'.$$

Если у конъюнкции отсутствует член

$$x \cdot p + t < b,$$

то мы все выражение в целом заменим истинной нумерической формулой

$$0 < 0'.$$

Если в конъюнкции отсутствует сравнение и p равно 1, то у нас оказывается формула

$$\exists x (a < x + t \& x + t' < b)$$

и вместо нее мы можем написать

$$a' < b' \& t < b.$$

Если же сравнение отсутствует, а цифра p больше 1, то выражение

$$\exists x (a' < x \cdot p + t \& x \cdot p + t' < b)$$

может быть заменено формулой

$$\exists x (x \equiv 0 \pmod{p} \& a < x + t \& x + t' < b),$$

что и возвращает нас к основному случаю конъюнкции с тремя членами, с той особенностью, что p равно 1. Эта специализация может быть достигнута и в случае полного выражения

$$\exists x (x \equiv q \pmod{n} \& a < x \cdot p + t \& x \cdot p + t' < b),$$

если мы заменим его формулой

$$\exists x (x \equiv q \cdot p \pmod{n \cdot p} \& a < x + t \& x + t' < b)$$

и подставим в нее вместо термов $q \cdot p$ и $n \cdot p$ цифры, являющиеся их значениями.

Таким образом, нам осталось рассмотреть только выражение

$$\exists x (x \equiv z \pmod{n} \& a < x + t \& x + t' < b),$$

где z — цифра, в то время как a , b и t цифрами быть не обязаны. При этом относительно цифры z можно предполагать, что она представляет собой одну из цифр от 0 до $n - 1$; действительно, если бы в сравнении первоначально стояла цифра, превосходящая $n - 1$, то вместо нее мы могли бы взять остаток, получающийся при делении ее на n .

Каждое такое выражение мы заменим теперь дизъюнкцией

$$(a < t \& t + z < b) \vee \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2 \vee \dots \vee \mathcal{D}_n,$$

где $\mathcal{D}_p$ сокращенно обозначает конъюнкцию

$$t < a' \& a + p < b \& a + p \equiv t + z \pmod{n}.$$

После того как рассматриваемая подформула $\exists x \mathcal{A}(x)$ будет указанным образом заменена выражением, не содержащим переменной x , мы сможем, в случае надобности конъюнктивно присое-

динив члены вида $a = a$, добиться того, чтобы в выражении, фигурирующем теперь вместо $\exists x \mathcal{A}(x)$, встречались все те отличные от x переменные, которые встречаются в $\mathcal{A}(x)$.

Тем самым мы описали процедуру замены внутренних подформул вида $\exists x \mathcal{A}(x)$, а вместе с нею и процедуру редукции.

Отправляясь от этого описания, мы можем теперь констатировать наличие у процедуры редукции перечисленных выше свойств 1—8. Свойства 1—6 усматриваются непосредственно. Проверка свойства 7 протекает аналогично доказательству леммы 2 из гл. VI путем точной имитации процедуры редукции с помощью рассмотрений, относящихся к области элементарной интуитивной арифметики. Существенно более трудной является проверка свойства 8. Здесь нужно будет показать, что каждый шаг процедуры редукции представляет собой преобразование в смысле *переводимости*¹⁾, причем, в частности, придется существенным образом использовать аксиому индукции.

Основываясь на свойствах 1—7 нашей процедуры редукции, теперь можно будет полностью перенести из гл. VI те рассуждения, с помощью которых мы получили теорему об однозначности и теорему о частичной редукции²⁾. Из теоремы об однозначности вытекает, что если из двух редукций какой-либо формулы одна является верифицируемой, то тогда верифицируемой будет и другая.

Формулу со связанными переменными (но без формульных переменных), как и прежде, мы будем называть *верифицируемой*, если она имеет верифицируемую редукцию. Имеет место теорема о том, что *всякая формула, выводимая средствами системы (D) (с добавлением явного определения для $a < b$), является верифицируемой*.

Для доказательства этого факта изменения по сравнению с соответствующим доказательством из гл. VI потребуются лишь постольку, поскольку теперь среди наших аксиом заранее имеется аксиома индукции. Тем не менее в результате этого не возникает никаких трудностей. В самом деле, аксиому индукции мы по-прежнему можем свести к схеме индукции. Исключение формульных переменных тоже, как и в предыдущем случае, может быть произведено с соблюдением необходимых мер предосторожности. Нам остается теперь только показать, что если две формулы

$$\mathcal{A}(0) \text{ и } \mathcal{A}(r) \rightarrow \mathcal{A}(r')$$

верифицируемы, а переменная r (вместо которой, разумеется, может фигурировать и какая-нибудь другая свободная индивиду-

¹⁾ Переводимость будет, конечно, иметь место лишь в том случае, если к системе (D) будут добавлены явные определения для $<$ и для сравнений.
²⁾ См. с. 295—301.

ная переменная) входит только на местах, указанных в качестве аргумента, то $\mathcal{U}(a)$ также будет верифицируемой. Но это вытекает из того, что при указанных предположениях формула $\mathcal{U}(z)$ верифицируема для любой цифры z .

Из теоремы о том, что всякая выводимая формула без формульных переменных является верифицируемой, в частности, вытекает *непротиворечивость* системы (D).

Обратное утверждение, что всякая верифицируемая формула является также и выводимой, может быть получено из свойства 8 процедуры редукции, если воспользоваться выводимостью всякой истинной нумерической формулы системы (D), выводимостью истинных неравенств и сравнений, а также теоремой о частичной редукции¹⁾. Таким образом, в формализме системы (D) верифицируемость также совпадает с выводимостью.

Из полученных результатов вытекает, что если формула, принадлежащая нашему формализму, не содержит свободных переменных, то либо она сама, либо ее отрицание выводимо. Проверка того, какой именно из этих двух случаев имеет место, производится при помощи процедуры редукции; при этом в случае выводимости соответствующей формулы она дает нам также и способ, позволяющий найти вывод этой формулы.

В частности, если выводимая формула без свободных переменных имеет вид $\exists x \mathcal{U}(x)$, то процедура редукции ведет к нахождению такой цифры z , что будет выводимой формула $\mathcal{U}(z)$ (это последнее вытекает из теоремы о частичной редукции). Что же касается формул вида $\forall x \mathcal{U}(x)$, не содержащих свободных переменных, то каждая такая формула выводима тогда и только тогда, когда для каждой цифры z выводима формула $\mathcal{U}(z)$.

Таким образом, система (D) обладает теми же самыми свойствами полноты, что и системы (A) и (B), и в той же самой мере позволяет производить проверку разрешимости всех формулируемых в ней проблем.

Однако с этим преимуществом связана и определенная недостаточность в отношении изобразительных способностей этого формализма. Действительно, рассмотрим в формализме системы (D) [подобно тому, как это делалось в системе (B)] формулы, содержащие a в качестве единственной свободной переменной. Каждая такая формула либо сама является своей собственной редукцией, либо переводима в нее. Эту последнюю снова можно перевести (методами, которые использовались в процедуре редукции) либо в истинную формулу $0 = 0$, либо в ложную формулу $0 < 0$, либо в дизъюнктивную нормальную форму, члены которой суть конъюнкции составных частей вида

$$a \equiv q \pmod{n}, \quad f < a \cdot p, \quad a \cdot p < l$$

¹⁾ См. соответствующие соображения в гл. VI, с. 310—314.

где q, f, l — цифры, причем в каждой из этих конъюнкций встречается не более одного члена каждого из трех указанных видов.

Далее, неравенство

$$f < a \cdot p$$

переводимо в некоторую нижнюю оценку

$$r < a,$$

а неравенство

$$a \cdot p < l$$

в свою очередь переводимо в некоторую верхнюю оценку

$$a < z.$$

Тем самым наша исходная формула переводима либо в некоторую истинную, либо в некоторую ложную нумерическую формулу, либо в дизъюнктивную нормальную форму, каждый член которой представляет собой конъюнкцию не более одной нижней оценки для a , не более одной верхней оценки для a и не более одного сравнения

$$a \equiv q \pmod{n}.$$

Для такой дизъюнктивной нормальной формы имеет место следующая альтернатива. Либо в каждом ее дизъюнктивном члене содержится некоторая верхняя оценка для a ; тогда при всякой замене a цифрой, большей, чем входящая в эту верхнюю оценку цифра z , она перейдет в некоторую ложную формулу. Либо эта дизъюнкция содержит по крайней мере один член, в котором не встречается ни одной верхней оценки, так что он состоит или из некоторой нижней оценки, или из сравнения

$$a \equiv q \pmod{n},$$

или из конъюнкции нижней оценки и сравнения; тогда этот член, а тем самым и вся дизъюнктивная нормальная форма, перейдет в истинную формулу, если a заменить достаточно большой цифрой, которая (при наличии сравнения) при делении на n дает тот же самый остаток, что и q .

Для исходной формулы $\mathcal{U}(a)$ отсюда теперь вытекает, что либо для всех достаточно больших цифр z формула $\mathcal{U}(z)$ выводима, либо можно указать три такие цифры z_0, n и r ($r < n$), что для любой цифры z , большей z_0 и дающей при делении на n остаток r , выводима формула $\mathcal{U}(z)$. Таким образом, указанная альтернатива имеет место для всякой формулы нашего формализма, содержащей единственную переменную a . Это обнаруживает серьезную ограниченность изобразительных возможностей нашего формализма.

В частности, отсюда следует, что функция $a \cdot b$ не представима в формализме системы (D). Действительно, если бы равенство

$$a \cdot b = c$$

было представимо некоторой формулой

$$\mathfrak{B}(a, b, c),$$

принадлежащей формализму системы (D), то эту формулу можно было бы выбрать так, чтобы в ней не встречалось никаких свободных переменных, кроме a , b и c , а также чтобы в нее не входила связанная переменная x . Эта формула $\mathfrak{B}(a, b, c)$ должна была бы обладать тем свойством, что для любой тройки цифр f, l, m , для которой вычисление значения $f \cdot l$ дает цифру m , средствами системы (D) выводима формула

$$\mathfrak{B}(f, l, m),$$

а для любой тройки, у которой вычисление $f \cdot l$ дает значение, отличное от m , выводима формула

$$\neg \mathfrak{B}(f, l, m).$$

Формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x, x, a)$$

содержит одну-единственную свободную переменную a , и для нее должна была бы иметь место указанная альтернатива, т. е. либо для любой достаточно большой цифры z должно было бы быть выводимым отрицание формулы

$$\exists x \mathfrak{B}(x, x, z),$$

а потому и формула

$$\forall x \neg \mathfrak{B}(x, x, z),$$

либо можно было бы указать также цифры n и r , что r меньше n и что для любой достаточно большой цифры z , дающей при делении на n остаток r , была бы выводимой формула

$$\exists x \mathfrak{B}(x, x, z).$$

Однако ни один из этих двух случаев не может иметь места, так как в первом случае для достаточно большой цифры z и для любой цифры f была бы выводимой формула

$$\neg \mathfrak{B}(f, f, z)$$

и поэтому, на основании предположенного свойства формулы $\mathfrak{B}(a, b, c)$, для любой достаточно большой цифры z и для любой

цифры f значение $f \cdot f$ должно быть отлично от z , в то время как сколь угодно далеко имеются цифры, допускающие представление в виде $f \cdot f$. Во втором случае для всякой достаточно большой цифры z , дающей при делении на n в остатке r , (по теореме о частичной редукции) можно было бы указать цифру f , такую что формула

$$\mathfrak{B}(f, f, z)$$

выводима, и тем самым значение $f \cdot f$ было бы равно z . Таким образом, для всякой достаточно большой цифры p значение $p \cdot n + r$ было бы представимо в виде $f \cdot f$. Однако это очевидным образом неверно. Действительно, если в качестве p мы возьмем цифру, большую n , и если

$$p \cdot n + r = t \cdot t,$$

то цифра t больше n и значение $p \cdot n + r$, с одной стороны, больше $t \cdot t$, а с другой — меньше $t' \cdot t'$. Но между $t \cdot t$ и $t' \cdot t'$ нет цифр, представимых в виде значения какого-либо произведения вида $f \cdot f$. Таким образом, $p \cdot n + r$ не представимо в виде $f \cdot f$.

Тем самым получается, что добавление к системе (D) функции $a \cdot b$ и ее рекурсивных равенств ведет к существенному расширению нашего формализма. Таким образом, система (D) во всех отношениях ведет себя аналогично системам (A) и (B).

Попутно отметим также, что все это рассмотрение, в том виде как мы провели его для системы (D), может быть проведено и для системы (D₁), получающейся из (D) путем присоединения функции $a \div b$ вместе с формулами

$$a \div (a + b) = 0,$$

$$(a + b) \div b = a.$$

В формализме этой системы функция $a \cdot b$ также оказывается непредставимой¹⁾.

4. Изменение ситуации в случае добавления рекурсивных равенств для умножения; система (Z). Можно было бы думать, что при добавлении новых рекурсивных функций всегда будет повторяться ситуация, аналогичная той, с которой мы встретились при рассмотрении систем (A), (B) и (D). Тем не менее это не так; уже при добавлении функции $a \cdot b$ и ее рекурсивных равенств ситуация оказывается в корне иной. В результате добавления

¹⁾ Это получается, впрочем, уже из того факта, что функция $a \div b$ представима в формализме системы (D) (см. с. 439—440).

функции $a \cdot b$ к системе (D) получается следующая система аксиом:

$$(Z) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \\ a' \neq 0, \\ a' = b' \rightarrow a = b, \\ a + 0 = a, \\ a + b' = (a + b)', \\ a \cdot 0 = 0, \\ a \cdot b' = a \cdot b + a, \\ A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a). \end{array} \right.$$

Если мы попытаемся доказать непротиворечивость этой системы (Z) нашими прежними методами с помощью процедуры редукции, то заметим, что эти методы здесь уже не применимы. Именно, в случае рассмотренных нами до сих пор формализмов систем (A), (B) и (D) выполнимость процедуры редукции существенным образом основывалась на том, что мы полностью овладевали выразимыми в них арифметическими соотношениями. Метод редукции как раз в том и заключался, что мы осуществляли полный математический контроль над тем фрагментом арифметики, который формализуется рассматриваемой системой. Поэтому и неудивительно, что этот метод позволял нам ответить на любой математический вопрос, формулируемый в рамках этого фрагмента. Но для формализма системы (Z) в нашем распоряжении уже не будет такого средства, позволяющего контролировать все выразимые в этом формализме математические соотношения.

Эту мысль можно пояснить на примерах. Рассмотрим формулу

$$\forall u \forall v (u \neq 0' \& v \neq 0' \rightarrow u \cdot v \neq n),$$

выражающую тот факт, что n является простым числом (если число 1 также считать простым). Если мы для краткости обозначим эту формулу посредством $\mathfrak{P}r(n)$, то формула

$$\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \exists z (\mathfrak{P}r(y) \& \mathfrak{P}r(z) \& x + x = y + z))$$

будет изображать утверждение о том, что всякое четное число является суммой двух простых, а формула

$$\forall x \exists y (x < y \& \mathfrak{P}r(y) \& \mathfrak{P}r(y'))$$

соответствует утверждению о том, что за любым числом имеются пары простых чисел с разностью, равной двум. Оба эти утверждения знамениты тем, что вопрос об их справедливости представляет собой нерешенную математическую проблему. Если бы мы располагали процедурой редукции для системы (Z), аналогичной

процедурам для предыдущих систем, то в результате ее применения мы получили бы решение этих проблем.

Заметим, далее, что степень a^f для любого фиксированного показателя f может быть изображена посредством f -членного произведения

$$(\dots (a \cdot a) \dots),$$

и если мы воспользуемся записью a^f как *сокращением* для этого произведения, то утверждение великой теоремы Ферма для фиксированного показателя степени $f > 2$ в формализме системы (Z) будет изображаться посредством формулы

$$\forall x \forall y \forall z [(x \neq 0' \& y \neq 0' \rightarrow x^f + y^f \neq z^f)].$$

Как мы знаем, великая теорема Ферма (для произвольных чисел $f > 2$) не доказана, а также нет и метода, который позволял бы для любой заданной цифры f выяснить, справедливо ли для нее утверждение этой теоремы. Процедура редукции для системы (Z) должна была бы дать нам такой метод.

Эта процедура редукции должна была бы отвечать и на произвольный вопрос о разрешимости того или иного диофантового уравнения, иначе говоря, она должна была бы отвечать на любые вопросы, касающиеся разрешимости в положительных целых числах любых алгебраических уравнений с одним или несколькими неизвестными и с целочисленными коэффициентами*). Кроме того, с помощью процедуры редукции мы могли бы получить ответ и на вопрос о том, обладает ли данное уравнение «бесконечным числом» решений, а также на вопрос о том, верно ли, что такое уравнение для произвольных значений одного из неизвестных (или соответственно для всех значений, превышающих некоторое заданное число) имеет решение (в остальных неизвестных).

Но все это — вопросы, от решения которых мы в математике очень далеки. Однако нам вовсе не нужно вдаваться в дискуссию по поводу отдельных примеров, так как в дальнейшем получится — и в этом проявляется существенное отличие системы (Z) от ранее рассмотренной системы, — что рассматриваемый нами формализм системы (Z) не только позволяет, как мы в этом только что убедились, формулировать те или иные трудные проблемы арифметики, но что он вообще *дает нам определенную формализацию всей арифметики*. Именно, в этом формализме уже оказываются представимыми все функции, которые вводятся при помощи

*) Как было установлено в работе: М а т и я с е в и ч Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств. — ДАН СССР, 1970, 191, с. 279—282, алгоритм, распознающий разрешимость диофантовых уравнений, невозможен. — Прим. ред.

рекурсивных равенств, причем даже в том случае, если мы допустим ряд рассматриваемых в рекурсивной арифметике обобщений схемы рекурсии.

Этот материал мы изложим только в следующей главе в связи с рассмотрением понятия «тот, который», так как в этой связи ему может быть придана более точная редакция и более четкий вид.

Пока же мы отметим, что в случае системы (Z) метод установления непротиворечивости при помощи процедуры редукции не достигает своей цели. Тем не менее этот метод позволил нам убедиться в непротиворечивости таких систем аксиом, которые не выполнимы в конечном (правда, только при некоторых ограничениях на способы образования понятий). Кроме того, он содействовал установлению того факта, что система аксиом Пеано, если взять за основу исчисление предикатов и аксиомы равенства, оказывается недостаточной для построения арифметики и что добавление к этой системе аксиом рекурсивных равенств для сложения и умножения является существенным расширением формализма; только благодаря такому расширению и проявляется все богатство арифметических отношений.

§ 5. Дополнительное рассмотрение аксиом равенства

1. Замена второй аксиомы равенства аксиомами более специального характера. В заключение этой дискуссии мы рассмотрим одно замечание, относящееся ко второй аксиоме равенства. Эта аксиома (J_2) во всех рассмотренных нами системах занимает особое положение, потому что, если не считать аксиомы индукции, она является единственной аксиомой, содержащей формульную переменную. Достоянно внимания, что этого появления формульной переменной мы могли бы и избежать, если бы интересовались выводимостью только таких формул, которые не содержат формульных переменных.

Мы постараемся проиллюстрировать эту мысль на примере первой из обсуждавшихся в гл. VI систем аксиом, которая кроме аксиом равенства содержит аксиомы ($<_1$), ($<_2$), ($<_3$), (P_1) и (P_2)¹⁾. Если из этой системы аксиом оказывается выведенной какая-либо формула, то, как мы знаем, из ее вывода можно исключить формульные переменные, сначала разложив этот вывод на нити, затем выполнив перенос подстановок вместо формульных переменных в исходные формулы и совершив произвольные подстановки вместо оставшихся формульных переменных²⁾. Тогда вместо формулы (J_2) у нас появятся исходные формулы вида

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)),$$

¹⁾ См. с. 273.

²⁾ См. с. 273 и далее.

где формула $\mathfrak{A}(c)$ [которую мы подставляем в (J_2) вместо именной формы $A(c)$] не содержит формульных переменных. Эта формула является либо равенством, либо неравенством, либо строится из равенств и неравенств с помощью связок исчисления высказываний и, быть может, связывания одной или нескольких переменных. В обеих частях любого равенства или неравенства стоят выражения $a^{(f)}$, где a представляет собой либо символ 0, либо (свободную или связанную) переменную. То обстоятельство, что формула $\mathfrak{A}(c)$ устроена именно таким образом, позволяет нам заключить, что любая из рассматриваемых нами исходных формул

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

может быть выведена с помощью исчисления предикатов из следующих формул:

$$\begin{aligned} (J_1) & \quad a = a, \\ (i_1) & \quad a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c), \\ (i_2) & \quad a = b \rightarrow a' = b', \\ (i_3) & \quad a = b \rightarrow (a < c \rightarrow b < c), \\ (i_4) & \quad a = b \rightarrow (c < a \rightarrow c < b). \end{aligned}$$

Факт этой выводимости вытекает из того, что:

1. Из формул (J_1) и (i_1), как было показано ранее¹⁾, выводимы формулы

$$a = b \rightarrow b = a$$

и

$$a = b \rightarrow (c = a \rightarrow c = b).$$

2. Из формулы (i_2) для любого f выводима формула

$$a = b \rightarrow a^{(f)} = b^{(f)}.$$

3. Из формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{C}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(b)),$$

пользуясь формулой

$$a = b \rightarrow b = a,$$

можно вывести формулу

$$a = b \rightarrow (\neg \mathfrak{C}(a) \rightarrow \neg \mathfrak{C}(b)).$$

4. Если $\mathfrak{U}$ — произвольная формула, то из формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{C}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(b)),$$

¹⁾ См. гл. V, с. 212—213.

средствами исчисления высказываний выводимы формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{E}(a) \vee \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{E}(b) \vee \mathfrak{U})$$

и

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{U} \vee \mathfrak{E}(a) \rightarrow \mathfrak{U} \vee \mathfrak{E}(b)).$$

5. Из формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{E}(a, r) \rightarrow \mathfrak{E}(b, r))$$

выводима формула

$$a = b \rightarrow (\exists x \mathfrak{E}(a, x) \rightarrow \exists x \mathfrak{E}(b, x)).$$

6. Всякая формула рассматриваемого формализма переводима средствами исчисления предикатов в некоторую другую формулу, не содержащую кванторов всеобщности и такую, что из числа связок исчисления высказываний в ней встречаются только отрицание и дизъюнкция.

Отсюда следует, что в процессе вывода формул, не содержащих формульных переменных, в рассматриваемой системе аксиом вторая аксиома равенства (J_2) может быть заменена формулами (i_1), (i_2), (i_3) и (i_4).

В этом рассуждении мы не пользовались какими-либо особыми свойствами отношения $a < b$ или штрих-функции, нашедшими отражение в аксиомах ($<_1$), ($<_2$), ($<_3$), (P_1) и (P_2); поэтому полученный нами результат можно применить и к другим формализованным системам аксиом, возникающим в результате добавления к формализму исчисления предикатов тех или иных предикатных символов, индивидуальных символов и знаков для математических функций вместе с относящимися к ним аксиомами; только среди аксиом этой системы должен содержаться знак равенства с аксиомами (J_1) и (J_2). Если внутри такого формализма рассматривать выводы формул, не содержащих формульных переменных, то в этих выводах аксиому (J_2) можно будет заменить рядом формул, имеющих вид

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{P}(a) \rightarrow \mathfrak{P}(b))$$

или

$$a = b \rightarrow \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b),$$

где $\mathfrak{P}$ означает какой-нибудь предикатный символ, а $\mathfrak{f}$ — какой-нибудь функциональный знак. Как $\mathfrak{P}$, так и $\mathfrak{f}$ кроме обозначенных аргументов могут иметь и какие-нибудь другие; тогда эти аргументы должны быть попарно различными переменными, отличными от a и от b .

Среди формул

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{P}(a) \rightarrow \mathfrak{P}(b))$$

находится формула (i_1), а кроме того, каждому аргументу любого отличного от знака равенства предикатного символа соответствует по одной такой формуле и каждому аргументу любого функционального знака соответствует некоторая формула вида

$$a = b \rightarrow \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b).$$

Так, в случае только что рассмотренной системы аксиом двум аргументам предикатного символа $<$ соответствуют две формулы (i_3) и (i_4), а единственному аргументу штрих-функции соответствует формула (i_2).

2. Применение к системам (A), (B) и (Z). У некоторых систем аксиом те или иные представляющие формулы оказываются излишними. Рассмотрим с этой точки зрения системы (A) и (B). Система (A), правда, непосредственно не попадает в сферу действия нашей общей теоремы, так как формула (J_1) в ней среди аксиом не встречается. Тем не менее данное обстоятельство не препятствует применению этой теоремы, так как в системе (A) аксиома (J_1) может быть выведена из аксиом ($<_3$), $a < b \rightarrow \neg(b < a')$ и $a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a^1$.

Здесь можно добиться некоторых упрощений. Именно, в системе (A) вместо формул (i_2), (i_3) и (i_4) достаточно взять формулу

$$a = b \rightarrow \neg(a < b)$$

или же формулу

$$a = b \rightarrow a < b',$$

так что каждая из этих двух формул вместе с (i_1) может заменить в системе (A) аксиому (J_2).

В самом деле, если мы в (A) заменим (J_2) аксиомой (i_1) и воспользуемся только что упоминавшимся выводом формулы (J_1), то окажутся выводимыми формулы

$$a = b \rightarrow b = a \text{ и } a = b \rightarrow (b = c \rightarrow a = c)^2.$$

Привлекая формулу

$$a = b \rightarrow \neg(a < b),$$

мы получим, с использованием аксиом ($<_2$) и $a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$, формулы (i_3) и (i_4). Из (i_3) с помощью аксиомы ($<_3$) мы получим, далее, формулу

$$a = b \rightarrow b < a'$$

и, с учетом $a = b \rightarrow b = a$, получим

$$a = b \rightarrow a < b'.$$

¹) См. гл. VI, с. 320, 322.

²) См. с. 212—213.

Две последние формулы, в сочетании с формулой $a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b$, выводимой в (A) без использования (J_2) ¹⁾, дают формулу (i_2) (с использованием $(<_2)$, $\neg(a < a)$ и $b' = a' \rightarrow a' = b'$).

С другой стороны, если вместо $a = b \rightarrow \neg(a < b)$ добавить к системе (A) в качестве аксиомы формулу

$$a = b \rightarrow a < b',$$

то можно будет получить формулу

$$a = b \rightarrow b < a',$$

а из нее с помощью аксиомы $a < b \rightarrow \neg(b < a')$ можно будет снова получить формулу

$$a = b \rightarrow \neg(a < b).$$

В случае системы (B) мы вернемся к рассмотрению уже приводившегося хазенъегеровского вывода формулы $a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b$ ²⁾. В этом выводе аксиома равенства (J_2) используется только для вывода следующих трех формул:

$$a' < b' \rightarrow a \neq b, \quad a' = b \rightarrow a' < b' \text{ и } a = b \rightarrow a' = b'.$$

Третья из них есть (i_2) ; первая получается из (i_2) в сочетании с формулой

$$a = b \rightarrow \neg(a < b),$$

а вторая получается из

$$a = b \rightarrow a < b'$$

в результате подстановки. Тем самым в хазенъегеровском выводе аксиома (J_2) может быть заменена формулами (i_2) , $a = b \rightarrow \neg(a < b)$ и $a = b \rightarrow a < b'$.

С другой стороны, располагая формулой

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

мы можем получить формулу

$$a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$$
³⁾,

пользуясь схемой индукции и, кроме того, формулами $0 = 0$, $(<_2)$ и $(<_3)$, а также формулой

$$a = b \rightarrow b < a'$$

(которая может быть получена из $a = b \rightarrow b = a$ и $a = b \rightarrow a < b'$).

¹⁾ См. с. 321.

²⁾ См. с. 333—335.

³⁾ Об этом см. гл. VI, с. 332.

Но, как было замечено выше, используя формулы (J_1) , (i_1) , (i_2) , $a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a$ и добавив к ним формулу $a = b \rightarrow \neg(a < b)$, можно вывести (i_3) и (i_4) .

Таким образом, в итоге получается, что в системе (B) аксиома (J_2) может быть заменена формулами (i_1) и (i_2) , взятыми вместе с формулами

$$a = b \rightarrow \neg(a < b) \text{ и } a = b \rightarrow a < b'.$$

Здесь можно произвести еще одно упрощение, поскольку две последние формулы, с учетом наличия аксиомы (J_1) , делают ненужными аксиомы $(<_1)$ и $(<_3)$. Итак, в конце концов вместо системы (B) получается следующая система аксиом:

$$(J_1), (i_1), (i_2), (<_2),$$

$$a = b \rightarrow \neg(a < b),$$

$$a = b \rightarrow a < b',$$

аксиома индукции.

Теперь применим нашу теорему о второй аксиоме равенства (J_2) к системе (Z). В этой системе аксиом в качестве единственного предикатного символа (взятого в качестве основного знака) фигурирует знак равенства. Однако, кроме штрих-символа, в ней имеются еще два математических функциональных знака: $a + b$ и $a \cdot b$. Наша теорема в этом случае утверждает, что если интересоваться выводимостью формул, не содержащих формульных переменных, то формула (J_2) может быть заменена формулами (i_1) , (i_2) и следующими четырьмя формулами:

$$a = b \rightarrow a + c = b + c,$$

$$a = b \rightarrow c + a = c + b,$$

$$a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c,$$

$$a = b \rightarrow c \cdot a = c \cdot b.$$

Но последние четыре формулы с помощью формул (J_1) , (i_1) , (i_2) и схемы индукции могут быть выведены из рекурсивных равенств для $a + b$ и $a \cdot b$.

Таким образом, при выводе арифметических формул, не содержащих формульных переменных, а также при исследовании вопроса о непротиворечивости, который сводится к вопросу о выводимости формулы $0 \neq 0$, формулу (J_2) можно заменить двумя формулами (i_1) и (i_2) . Формулу (i_2) , т. е.

$$a = b \rightarrow a' = b',$$

и аксиому

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

можно объединить в одну формулу

$$a = b \sim a' = b'.$$

Если же мы, кроме того, заменим аксиому индукции равносильной ей ¹⁾ схемой индукции, то получится система, состоящая из аксиом

$$\begin{aligned} a = b &\rightarrow (a = c \rightarrow b = c), \\ a' &\neq 0, \\ a = b &\sim a' = b', \\ a + 0 &= a, \\ a + b' &= (a + b)', \\ a \cdot 0 &= 0, \\ a \cdot b' &= a \cdot b + a \end{aligned}$$

и схемы индукции.

Здесь как в аксиомах, так и в схеме индукции нет ни связанных, ни формульных переменных. Теперь при выводе арифметических формул мы вообще сможем избежать применения формульных переменных, заменив все формулы исчисления предикатов схемами формул упоминавшимся в гл. VI методом ²⁾, т. е. выполнив заранее в исходных формулах те подстановки вместо формульных переменных, которые должны были бы выполняться впоследствии, так что формульные переменные будут полностью исключены.

Действуя таким образом, мы значительно ограничиваем наш формализм; разумеется, при этом мы ничего не выигрываем в части, касающейся установления его непротиворечивости; более того, такое ограничение формализма лишь частично предвосхищает результат операции возвратного переноса подстановок, который все равно имеется в нашем распоряжении в качестве начального шага в установлении непротиворечивости. И все же для целого ряда рассмотрений полезно знать, что формализация арифметических доказательств может быть произведена столь ограниченными средствами.

3. Применение к проблеме разрешимости; устранимость аксиом равенства из выводов формул исчисления предикатов. Доказанная нами теорема о второй аксиоме равенства играет, в частности, важную роль в установлении взаимосвязи между аксиоматикой и проблемой разрешимости. Напомним рассуждение, которое мы проводили относительно этой взаимосвязи в гл. IV ³⁾. Мы рассматривали системы аксиом, такие что входящие в их состав аксиомы

¹⁾ См. с. 326.

²⁾ См. с. 305—306.

³⁾ См. с. 199.

можно было записать без функциональных знаков и без формульных переменных. В таких системах при записи аксиом можно вообще обойтись без свободных переменных, так как всякая формула со свободными переменными дедуктивно равна формуле, получающейся из нее путем замены свободных переменных связанными. Пусть

$$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t$$

— формулы без свободных переменных, изображающие рассматриваемые нами аксиомы, и пусть $\mathcal{E}$ изображает какое-либо формулируемое в этой теории предложение. Тогда условие, необходимое и достаточное для того, чтобы предложение $\mathcal{E}$ было выводимо из аксиом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t$ при помощи доказательства, допускающего формализацию в рамках исчисления предикатов, заключается в выводимости той логической формулы, которая получается из формулы

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{E}$$

заменой каждого входящего в нее предикатного символа некоторой формульной переменной (с тем же самым числом аргументов).

Предполагаемое в этом рассуждении условие в большинстве рассматриваемых конкретных систем аксиом, например в системе аксиом элементарной геометрии (с исключением аксиом непрерывности), вообще говоря, не выполняется, так как в этих системах к аксиоматически введенным основным предикатам обычно добавляется (содержательно понимаемое) отношение равенства. В таких случаях мы можем действовать, как было замечено ранее ¹⁾, двояким образом. Либо мы добавим аксиомы равенства к исчислению предикатов и исследуем выводимость в расширенном исчислении предикатов соответствующей формулы, получающейся из импликации

$$\mathcal{A}_1 \& \dots \& \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{E}$$

в результате указанных замен, либо же мы уравниваем аксиомы равенства в правах с аксиомами $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_t$, как мы это делали в арифметических системах. Однако у второго из этих способов (особенно, если интересоваться сведением проблемы доказуемости в аксиоматике к проблеме разрешимости) имеется тот недостаток, что в аксиоме (J_2) фигурирует формульная переменная.

Согласно нашей теореме о второй аксиоме равенства (J_2), этот недостаток теперь можно будет устранить, заменив аксиому (J_2) рядом специализированных аксиом без формульных переменных. Если мы добавим эти аксиомы, а также первую аксиому равенства

¹⁾ См. гл. IV, с. 171.

к нашей первоначальной системе, не включающей в себя аксиом равенства, то условия применимости предыдущего рассуждения будут выполнены, и поэтому доказуемость какого-либо предложения с помощью этих аксиом снова будет совпадать с выводимостью некоторой логической формулы в обычном исчислении предикатов ¹⁾.

Вкратце поясним сказанное на примере системы сформулированных в гл. I аксиом ²⁾ (включая и аксиому о параллельных) для основных предикатов

$Gx(y, z)$ (x, y, z лежат на одной прямой)

и

$Zw(x, y, z)$ (x лежит между y и z),

которые представляют собой аксиоматизацию отношений сочетания и порядка для плоской геометрии. В основе рассмотрения будет лежать единственная предметная область — область «точек». Каждому из аргументов обоих основных предикатов Gx и Zw будет соответствовать некоторая специализация формулы (J_2). Ввиду симметричности этих предикатов, из шести получающихся таким образом формул мы можем взять только три, а именно — одну для Gx и две для Zw . К этим формулам мы добавим, кроме того, формулы (J_1) и (i_1). Если мы заменим теперь свободные переменные связанными, а затем для равенства примем обозначение, аналогичное обозначению основных предикатов Gx и Zw , перейдя от употребления знака равенства к употреблению символа Id , то у нас получатся пять формул:

$$\begin{aligned} & \forall x Id(x, x), \\ & \forall x \forall y \forall z \{ Id(x, y) \rightarrow (Id(x, z) \rightarrow Id(y, z)) \}, \\ & \forall x \forall y \forall u \forall v \{ Id(x, y) \rightarrow (Gx(x, u, v) \rightarrow Gx(y, u, v)) \}, \\ & \forall x \forall y \forall u \forall v \{ Id(x, y) \rightarrow (Zw(x, u, v) \rightarrow Zw(y, u, v)) \}, \\ & \forall x \forall y \forall u \forall v \{ Id(x, y) \rightarrow (Zw(u, v, x) \rightarrow Zw(u, v, y)) \}, \end{aligned}$$

которые необходимо будет добавить к прежним аксиомам, приведенным в пп. I, II и III § 1 гл. I. Если теперь обозначить посредством $\mathfrak{A}$ конъюнкцию всех аксиом, а посредством $\mathfrak{S}$ — формулу для какого-либо геометрического предложения, выразимого с помощью основных предикатов Id , Gx и Zw , то доказуемость этого предложения на основе наших аксиом будет равносильна выводимости в исчислении предикатов формулы, которая получит-

¹⁾ В связи с этим см. проведенное с позиций теоретико-множественной логики предикатов исследование Л. Кальмара (Kalmár L. Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie. — Acta Litt. Sci. Szeged, 1929, 4, № 4).
²⁾ См. с. 28 и далее.

ся из формулы

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{S},$$

если мы всюду заменим в ней символ Id формульной переменной A с двумя аргументами, а символы Gx и Zw — формульными переменными B и C с тремя аргументами.

Заметим, что этот метод исследования доказуемости сохраняет свою применимость и в том случае, когда речь идет о доказуемости предложений, изображаемых формулами $\mathfrak{F}$, содержащими формульные переменные. В самом деле, в выводе такой формулы $\mathfrak{F}$ входящие в нее формульные переменные не должны затрагиваться (каждая начиная с того места, где она впервые появляется среди формул, связанных с заключительной формулой вывода), т. е. по отношению к ним не должны производиться никакие подстановки. Таким образом, они ведут себя точно так же, как и предикатные символы. В силу этого выводимость формулы $\mathfrak{F}$ совпадает с выводимостью формулы, которая получится из $\mathfrak{F}$, если мы каждую из входящих в $\mathfrak{F}$ формульных переменных заменим новым предикатным символом с тем же самым числом аргументов. Для исследования этой выводимости, кроме уже добавленных вместо второй аксиомы равенства (J_2) специализаций этой аксиомы, мы должны будем добавить в качестве аксиом некоторые другие ее специализации для вновь вводимых предикатных символов.

Из этого рассуждения мы можем извлечь еще одно важное следствие. Пусть $\mathfrak{S}$ — формула исчисления предикатов, выводимая с привлечением аксиом равенства. Как уже отмечалось, мы можем, не производя никаких других изменений, заменить в выводе этой формулы встречающиеся в ней формульные переменные предикатными символами с тем же самым числом аргументов. Пусть $\mathfrak{S}'$ — формула, возникающая таким образом из формулы $\mathfrak{S}$. В выводе $\mathfrak{S}'$ аксиома (J_2) может быть заменена формулой (i_1) и рядом формул (i_2), ..., (i_n) вида

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{P}_f(a) \rightarrow \mathfrak{P}_f(b)) \quad (f = 2, \dots, n).$$

Действительно, каждому из введенных предикатных символов и каждому из его аргументов соответствует некоторая формула такого рода. Эти формулы таковы, что у предикатных символов с несколькими аргументами не указанные в обозначении $\mathfrak{P}_f(a)$ аргументы представляют собой свободные переменные, отличные друг от друга, от a и от b . Сопоставим каждой из этих отличных от a и от b свободных переменных какую-либо связанную переменную. Пусть

$$x, y, \dots, u$$

представляет собой список всех этих связанных переменных, 30 Д. Гильберт, П. Бернайс

и пусть $\mathfrak{P}_i^*(a)$ — выражение, получающееся из $\mathfrak{P}_i(a)$ в результате замены каждой отличной от a свободной переменной сопоставленной ей связанной переменной.

Рассмотрим формулу

$$\forall x \forall y \dots \forall u \{ (\mathfrak{P}_2^*(a) \sim \mathfrak{P}_2^*(b)) \& \dots \& (\mathfrak{P}_n^*(a) \sim \mathfrak{P}_n^*(b)) \}.$$

В этой формуле, которую мы обозначим посредством $\mathfrak{G}(a, b)$, a и b суть единственные входящие в нее свободные переменные. Легко убедиться, что формулы

$$\begin{aligned} &\mathfrak{G}(a, a), \\ &\mathfrak{G}(a, b) \rightarrow (\mathfrak{G}(a, c) \rightarrow \mathfrak{G}(b, c)), \\ &\mathfrak{G}(a, b) \rightarrow (\mathfrak{P}_i(a) \rightarrow \mathfrak{P}_i(b)) \end{aligned}$$

выводимы средствами исчисления предикатов. Но эти формулы получаются из формул $(J_1), (i_1), (i_2), \dots, (i_n)$ в результате замены равенства $a = b$ формулой $\mathfrak{G}(a, b)$. Таким образом, если мы в упоминавшемся выводе формулы $\mathfrak{G}'$ всюду произведем замену равенства $a = b$ формулой $\mathfrak{G}(a, b)$, то встречающиеся в ней вхождения формул $(J_1), (i_1), \dots, (i_n)$, добавленных в качестве аксиом к основным формулам исчисления предикатов, перейдут в такие формулы, которые могут быть выведены с помощью исчисления предикатов. С другой стороны, при этой замене формула $\mathfrak{G}'$, в которую знак равенства не входит, останется без изменений. Таким образом, мы получаем вывод формулы $\mathfrak{G}'$ в рамках исчисления предикатов без присоединения каких-либо дополнительных аксиом. Теперь мы можем снова вместо предикатных символов вставить в этот вывод первоначальные формульные переменные. Тем самым получится некоторый вывод формулы $\mathfrak{G}$ в исчислении предикатов.

Итак, любая формула исчисления предикатов, выводимая с добавлением аксиом равенства, будет выводимой и в самом исчислении предикатов.

После этих вспомогательных замечаний мы снова займемся нашей основной темой. Как мы уже говорили, нашей ближайшей задачей является исследование понятия «тот, который», изображение которого в формализме необходимо в дополнение к формализации процесса вывода. Это исследование приведет нас, в частности, к уже упоминавшейся теореме об устранимости понятия «тот, который» и в связи с этим позволит нам убедиться, что в системе (Z) оказываются представимыми все рекурсивные функции¹⁾.

¹⁾ См. с. 455 и далее.

ПОНЯТИЕ «ТОТ, КОТОРЫЙ» И ЕГО УСТРАНИМОСТЬ

§ 1. ι -правило и оперирование с ним

1. Разъяснения неформального характера; введение ι -правила; предотвращение коллизий; изображение функций посредством ι -термов. Наш логический формализм в том виде, как мы его до сих пор развивали, вполне достаточен для целей формализации аксиоматических теорий и проводимых в них доказательств. Тем не менее в нем отсутствует изображение одной логической конструкции, часто используемой в повседневном мышлении, и в особенности в математике, хотя в доказательствах применения ее можно было бы и избежать.

Логическая операция, о которой здесь идет речь, в языке выражается при помощи оборотов типа определенного артикля. Примерами могут служить такие обороты, как «высочайшая вершина Альп», «мать Гёте», «композитор, сочинивший данную оперу», «камень, который мы вчера нашли» *). Из области математики в качестве примеров можно привести «наибольший общий делитель чисел 63 и 84» или «наибольшее значение функции $x \cdot e^{-x^2}$ ».

Здесь всякий раз некоторый объект характеризуется тем, что для него и только для него выполняется некоторый вполне определенный предикат.

В области рассматриваемых нами высказываний всякий такой предикат изображается некоторой формулой ¹⁾

$$\mathfrak{A}(a)$$

и условие, что этот предикат выполняется для одного и только для одного объекта, выражается с помощью следующих двух формул:

$$\begin{aligned} &\exists x \mathfrak{A}(x), \\ &\forall x \forall y (\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{A}(y) \rightarrow x = y), \end{aligned}$$

которые называются формулами единственности для $\mathfrak{A}(a)$. Разумеется, нам нужен специальный символ, который

*) Все примеры в оригинале начинаются определенным артиклем, в русском языке отсутствующим. — *Прим. перев.*

¹⁾ Переменная a , подобно индивидуальной переменной какой-либо именной формы, служит здесь только для указания места, на котором стоит аргумент.

характеризовал бы сопоставление предикату $\mathcal{U}(a)$ того единственного объекта, для которого $\mathcal{U}(a)$ выполняется.

Объект этот определяется пробегом значений предиката $\mathcal{U}(a)$; в соответствии с этим, при формализации указанного сопоставления аргумент предиката $\mathcal{U}$ играет роль *связанной переменной*.

Следуя Расселу и Уайтхеду, мы используем символ

$$\iota_x \mathcal{U}(x)$$

(читается: «тот объект x , для которого имеет место $\mathcal{U}(x)$ »). Выражение такого рода мы будем называть *характеристикой*.

Рассел и Уайтхед, особенно настойчиво подчеркивавшие своеобразие рассматриваемой нами конструкции, содержательно истолковывают формулы вида $\mathcal{B}(\iota_x \mathcal{U}(x))$, в которых вместо термина фигурирует некоторая характеристика, понимая под $\mathcal{B}(\iota_x \mathcal{U}(x))$ следующее высказывание: «существует единственный объект, для которого имеет место $\mathcal{U}(a)$, и для этого объекта имеет место также и $\mathcal{B}(a)$ ».

В соответствии с этим, формула, в которой встречается символ $\iota_x \mathcal{U}(x)$, всякий раз изображает ложное высказывание уже в том случае, если для $\mathcal{U}(a)$ не выполняются условия, изображенные соответствующими формулами единственности.

Это истолкование формул вида $\mathcal{B}(\iota_x \mathcal{U}(x))$ не носит характера явного определения для символа (*ι-символа*) $\iota_x \mathcal{U}(x)$; действительно, оно не дает для этого символа выражения, которое непосредственно определяло бы его, а лишь определяет формулы, в которые $\iota_x \mathcal{U}(x)$ входит вместо некоторого термина как составная часть. Но все же мы можем извлечь из этого истолкования некоторый подход к доказательству, с помощью которого мы установим *устранимость характеристик (ι-символов)*.

Для того чтобы упорядочить применение ι-символа в нашем исчислении, мы будем как можно ближе придерживаться фактически соблюдаемого в речевом обиходе, и в особенности в математике, правила, которое заключается в том, что выражение «тот объект, который обладает свойством $\mathcal{U}$ » употребляется лишь в том случае, когда уже установлено, что существует один и только один объект, обладающий этим свойством.

В соответствии с этим, выражение $\iota_x \mathcal{U}(x)$ мы будем допускать в качестве термина только тогда, когда уже *выведены* соответствующие формулы единственности для $\mathcal{U}(a)$. Кроме того, мы должны выразить еще и то обстоятельство, что в упомянутом случае терм $\iota_x \mathcal{U}(x)$ изображает как раз такой объект, для которого $\mathcal{U}(a)$ имеет место. Так мы приходим к формулировке следующего правила употребления ι-символа, которое мы для краткости будем называть *ι-правилом*:

Если для формулы $\mathcal{U}(a)$ выведены формулы единственности, то, начиная с этого момента, выражение $\iota_x \mathcal{U}(x)$ (или соответственно $\iota_y \mathcal{U}(y)$, $\iota_z \mathcal{U}(z)$) будет считаться термом, а формула $\mathcal{U}(\iota_x \mathcal{U}(x))$ будет считаться формулой, выведенной по схеме

$$\frac{\exists x \mathcal{U}(x) \quad \forall x \forall y (\mathcal{U}(x) \& \mathcal{U}(y) \rightarrow x = y)}{\mathcal{U}(\iota_x \mathcal{U}(x))}.$$

Разумеется, это ι-правило еще нуждается в уточнении в части, касающейся применения связанных переменных.

В отношении входящей в ι-символ связанной переменной, как и в отношении переменных, связанных кванторами всеобщности и существования, будет действовать *правило их переименования*.

В случае кванторов всеобщности и существования это правило применялось для того, чтобы избежать коллизий между связанными переменными¹⁾. Теперь это требование отсутствия коллизий мы распространяем и на связанные переменные, входящие в состав ι-символов. Это означает, что для того, чтобы какое-либо выражение могло считаться *формулой* или соответственно *термом*, мы будем требовать, чтобы ни один из кванторов существования и всеобщности и ни один из ι-символов не попадал в нем в область действия другого квантора или ι-символа с той же самой связанной переменной. Так, например, ни один из символов $\forall y$, $\exists y$, ι_y не должен находиться в области действия какого-либо другого из этих знаков в сочетании с той же самой связанной переменной y .

Наличие правила переименования связанных переменных всегда дает возможность избегать таких коллизий между связанными переменными. При употреблении ι-символов мы постоянно должны будем пользоваться этими переименованиями. Уже при выводе формул единственности всякая связанная переменная, входящая в $\mathcal{U}(a)$, должна получить наименование, отличное от x и от y . Кроме того, следует заметить, что образование выражения

$$\mathcal{U}(\iota_x \mathcal{U}(x)),$$

если формула $\mathcal{U}(a)$ содержит какую-либо связанную переменную, всегда дает повод к коллизии между связанными переменными. Во всех этих случаях ι-правило должно пониматься таким образом, что в заключительной формуле схемы в выражении $\iota_x \mathcal{U}(x)$ производится переименование всех входящих в $\mathcal{U}(a)$ связанных переменных, так что в получающемся выражении $\iota_x \mathcal{U}^*(x)$ ни

¹⁾ См. с. 133.

одна из этих переменных больше не встречается, и потому в

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}^*(x))$$

коллизий между связанными переменными не будет.

Пусть, например, $\mathfrak{A}(a)$ представляет собой формулу

$$\exists z (z = 0 \ \& \ z = a).$$

Формулы единственности для нее могут быть получены из аксиом равенства с помощью эквивалентности

$$a = 0 \sim \exists z (z = 0 \ \& \ z = a).$$

Тем самым ι -правило может быть применено к $\mathfrak{A}(a)$. Тем не менее при этом с самого начала имеется трудность, заключающаяся в том, что в выражении

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x)),$$

которое записывается в виде

$$\exists z (z = 0 \ \& \ z = \iota_x \exists z (z = 0 \ \& \ z = x)),$$

имеет место коллизия между связанными переменными, так как в нем в области действия стоящего слева квантора существования $\exists z$ этот же самый квантор встречается еще раз. Мы избежим этой коллизии, переименовав внутри $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ переменную z в какую-нибудь другую переменную, например в u . Измененный таким образом терм

$$\iota_x \exists u (u = 0 \ \& \ u = x)$$

теперь можно будет подставить в формулу $\mathfrak{A}(a)$ вместо a , и при этом получится формула

$$\exists z (z = 0 \ \& \ z = \iota_x \exists u (u = 0 \ \& \ u = x)),$$

которая по схеме ι -правила следует из формул единственности для $\mathfrak{A}(a)$.

В дальнейшем это выполнение переименований в целях избегания коллизий между связанными переменными всегда будет рассматриваться как составная часть применения ι -правила и не всегда будет оговариваться специально. В дальнейшем простоты ради мы будем разрешать запись

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{B}(x))$$

и в тех случаях, когда подстановка терма

$$\iota_x \mathfrak{B}(x)$$

в формулу $\mathfrak{A}(a)$ требует переименования одной или нескольких связанных переменных и когда для указания этих изменений

следовало бы более точно писать

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{B}^*(x)).$$

В качестве простого примера на применение ι -правила установим выводимость эквивалентности

$$\mathfrak{A}(a) \sim a = \iota_x \mathfrak{A}(x)$$

для формулы $\mathfrak{A}(c)$ с уже выведенными формулами единственности.

В самом деле, ι -правило дает нам формулу $\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$, а эта формула в сочетании с аксиомой равенства (J_2) дает

$$a = \iota_x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a).$$

С другой стороны, импликация

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow a = \iota_x \mathfrak{A}(x)$$

получается из формулы $\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ в сочетании со второй формулой единственности.

После этих дополнений к ι -правилу мы сделаем также ряд замечаний относительно содержательного понимания введенных при помощи ι -правила термов. Вводя ι -символ для целей формализации понятия «тот, который», мы исходили из рассмотрения таких формул $\mathfrak{A}(a)$, с помощью которых изображается вполне определенное свойство некоторого (подставляемого вместо переменной a) объекта. Но формула $\mathfrak{A}(a)$ представляет какое-либо определенное свойство только тогда, когда она не содержит других свободных переменных, кроме a . В противном случае она изображает двучленное или же многочленное отношение между объектами или, если в ней содержатся формульные переменные, отношение между объектами и предикатами.

Постараемся понять, что же содержательно соответствует введению терма $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ в случае формулы $\mathfrak{A}(a)$ с несколькими свободными переменными. Простейший мыслимый случай — это случай, когда имеется формула $\mathfrak{B}(a, b)$, которая не содержит никаких свободных переменных, кроме a и b , и для которой по отношению к переменной a оказываются выводимыми формулы единственности

$$\exists x \mathfrak{B}(x, b)$$

и

$$\forall x \forall y (\mathfrak{B}(x, b) \ \& \ \mathfrak{B}(y, b) \rightarrow x = y),$$

так что с помощью ι -правила выражение $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$ может быть введено в рассмотрение в качестве терма.

Здесь $\mathfrak{B}(a, b)$ изображает некоторое двучленное отношение, и формулам единственности содержательно соответствует высказывание о том, что для всякого объекта b (из положенной в основу

рассмотрения индивидуальной области) существует один и только один объект a , находящийся к нему в отношении $\mathfrak{B}(a, b)$. Значит, терм $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$ изображает «объект, находящийся к b в отношении $\mathfrak{B}(a, b)$ » в его зависимости от b , т. е. как функцию от b .

С помощью этой функции отношение $\mathfrak{B}(a, b)$ можно разрешить относительно a в виде равенства

$$a = \iota_x \mathfrak{B}(x, b).$$

Формально это осуществляется путем вывода эквивалентности

$$\mathfrak{B}(a, b) \sim a = \iota_x \mathfrak{B}(x, b),$$

которая представляет собой частный случай эквивалентности, уже упоминавшейся ранее.

Подобно тому, как в этом рассмотренном нами случае терм $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$ при содержательном его истолковании изображает некоторую функцию от аргумента b , которая каждому принимаемому в качестве значения b объекту (из положенной в основу рассмотрения индивидуальной области) однозначно сопоставляет некоторый новый объект (этой области), в общем случае терм $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, содержащий одну или несколько свободных переменных, изображает функцию, имеющую эти переменные в качестве аргументов. В частности, если все фигурирующие в этом терме свободные переменные являются индивидуальными переменными, то изображаемая им функция является математической функцией, т. е. однозначным соотношением какого-либо нового объекта одному или нескольким исходным объектам¹⁾, в то время как при наличии формульных переменных изображаемая функция одному или нескольким (одноместным или же многоместным) предикатам, а кроме того, быть может, одному или нескольким объектам будет однозначно сопоставлять в качестве значения некоторый новый объект.

2. Вложение и подчинение; символы для сокращений. Теперь посмотрим, какое влияние оказывает ι -правило на наш формализм и что мы благодаря этому правилу выигрываем. Прежде всего, мы должны произвести обзор различных термов вида

$$\iota_x \mathfrak{A}(x),$$

возникающих на основе применения ι -правила (такие термы мы будем кратко называть ι -термами). Большое разнообразие этих термов получается благодаря возможности комбинированных применений ι -символа; мы будем отличать друг от друга два различных способа комбинирования этих символов: *вложение* и *подчинение*.

¹⁾ См. гл. V, с. 239.

Речь здесь идет о следующем. Мы исходим из некоторой формулы

$$\mathfrak{A}(a, b).$$

Предположим, что в эту формулу вместо b мы подставили некоторый ι -терм $\iota_y \mathfrak{B}(y)$. Пусть для получившейся в результате этого формулы

$$\mathfrak{A}(a, \iota_y \mathfrak{B}(y)),$$

которую мы сокращенно обозначим $\mathfrak{C}(a)$, оказались выводимыми формулы единственности, так что в соответствии с ι -правилом может быть введен терм $\iota_x \mathfrak{C}(x)$.

Если переменная a не входит в $\iota_y \mathfrak{B}(y)$, то при связывании ι -символом переменной a в формуле $\mathfrak{C}(a)$ этот терм не затрагивается, т. е. он без изменений входит в $\iota_x \mathfrak{C}(x)$ в качестве составной части; тогда терм $\iota_x \mathfrak{C}(x)$ будет иметь вид

$$\iota_x \mathfrak{A}(x, \iota_y \mathfrak{B}(y)).$$

В этом случае мы будем говорить, что терм $\iota_y \mathfrak{B}(y)$ *вложен* в терм $\iota_x \mathfrak{C}(x)$. Вообще, мы будем говорить о вложении ι -терма, когда он в качестве составной части входит в какой-либо объемлющий его ι -терм.

Если же, напротив, терм $\iota_y \mathfrak{B}(y)$ содержит переменную a , так что точнее было бы записать его в виде $\iota_y \mathfrak{B}(a, y)$, то терм $\iota_x \mathfrak{C}(x)$ будет иметь вид

$$\iota_x \mathfrak{A}(x, \iota_y \mathfrak{B}(x, y)).$$

В этом случае мы будем говорить, что внешний ι -символ *подчиняет* ι -символ, стоящий внутри формулы, или соответственно, что внутренний ι -символ *подчинен* внешнему.

При этом следует заметить, что составная часть

$$\iota_y \mathfrak{B}(x, y)$$

из-за входящей в нее переменной x не является термом, так что мы должны называть ее не ι -термом, а разве лишь ι -выражением.

Относительно вложения мы заметим также, что кроме только что указанного случая оно может возникнуть и в результате подстановки. Действительно, такой терм, как

$$\iota_x \mathfrak{A}(x, \iota_y \mathfrak{B}(y)),$$

может быть, например, получен в результате подстановки терма $\iota_y \mathfrak{B}(y)$ вместо какой-либо свободной переменной (скажем, b) из $\iota_x \mathfrak{A}(x, b)$, но, разумеется, только тогда, когда для формулы $\mathfrak{A}(a, b)$ могут быть выведены формулы единственности по переменной a .

Мы продемонстрируем различные упоминавшиеся возможности комбинирования ι -выражений на совсем простых примерах ¹⁾, относящихся к формализму аксиом равенства и пеановских аксиом (P_1), (P_2).

В качестве $\mathfrak{A}(a, b)$ возьмем сначала формулу

$$a = b'.$$

Для нее формулы единственности, относящиеся к переменной a , имеют вид

$$\begin{aligned} \exists x (x = b'), \\ \forall x \forall y (x = b' \ \& \ y = b' \rightarrow x = y) \end{aligned}$$

и могут быть выведены с помощью аксиом равенства. В качестве $\mathfrak{B}(a)$ возьмем формулу

$$a = 0,$$

формулы единственности для которой также можно получить при помощи аксиом равенства.

Мы можем теперь построить термы

$$\iota_x \mathfrak{A}(x, b), \text{ т. е. } \iota_x (x = b'),$$

и

$$\iota_y \mathfrak{B}(y), \text{ т. е. } \iota_y (y = 0),$$

и, подставив второй терм вместо переменной b в первый, мы получим терм

$$\iota_x (x = \iota_y (y = 0)'),$$

в котором $\iota_y (y = 0)$ выступает в роли вложенного ι -терма.

Однако этот терм мы можем ввести и непосредственно, выведя формулы единственности для $\mathfrak{A}(a, \iota_y \mathfrak{B}(y))$, т. е. для

$$a = \iota_y (y = 0)'. \quad (1)$$

Если мы в качестве $\mathfrak{A}(a, b)$ возьмем формулу

$$a' = b,$$

то соответствующие формулы единственности по переменной a уже не будут выводимы. Но формулы единственности для формулы

$$a' = \iota_y (y = 0')$$

¹⁾ Эти примеры выбраны без учета их математической значимости, а руководствуясь только тем, что выводимость отвечающих им формул единственности усматривается немедленно. Примеры, интересные с математической точки зрения, мы рассмотрим в дальнейшем.

будут выводимы, и поэтому выражение

$$\iota_x (x' = \iota_y (y = 0'))$$

также может быть введено в качестве терма.

В обоих рассмотренных нами примерах мы встречаемся с вложением ι -термов, но только в первом из них вложение может быть получено также и в результате подстановки.

Если мы теперь возьмем в качестве $\mathfrak{A}(a, b)$ формулу

$$a = 0 \vee b = 0',$$

а в качестве $\mathfrak{B}(a, b)$ формулу $b = a'$, то с помощью ι -правила выражение

$$\iota_y \mathfrak{B}(a, y), \text{ т. е. } \iota_y (y = a'),$$

может быть введено в качестве терма и затем с помощью ι -правила мы получим формулу

$$\iota_y (y = a') = a'.$$

При помощи этой формулы с использованием аксиом равенства и аксиомы (P_2) могут быть выведены соответствующие формулы единственности для формулы

$$a = 0 \vee \iota_y (y = a') = 0'.$$

Тем самым мы можем ввести в качестве терма выражение

$$\iota_x \mathfrak{A}(x, \iota_y \mathfrak{B}(x, y)), \text{ т. е. } \iota_x (x = 0 \vee \iota_y (y = x') = 0').$$

Мы имеем здесь пример подчинения. Внешний, подчиняющий ι -символ связывает свободную переменную, входящую в подчиненный терм $\iota_y (y = a')$.

Кроме такого способа подчинения, когда переменная какого-либо ι -выражения непосредственно связывается подчиняющим его ι -символом, существует еще и *косвенный способ подчинения*, который заключается в том, что какая-либо переменная ι -выражения связывается снаружи каким-нибудь квантором (всеобщности или существования) или же каким-нибудь ι -символом, а этот в свою очередь находится в области действия какого-нибудь другого ι -символа.

Подчинение такого типа имеет, например, место в случае терма вида

$$\iota_x \forall y \mathfrak{A}(x, \iota_z \mathfrak{B}(y, z)),$$

где переменная y в выражении $\iota_z \mathfrak{B}(y, z)$ связывается квантором всеобщности $\forall y$, который сам находится внутри рассматриваемого нами ι -терма.

Другой пример косвенного подчинения представляет собой терм

$$\iota_x \mathfrak{A}(x, \iota_y \mathfrak{B}(y, \iota_z \mathfrak{C}(y, z))),$$

в котором выражение $\iota_z \mathfrak{E}(y, z)$ подчинено всему рассматриваемому ι -терму через посредство вложенного термина

$$\iota_y \mathfrak{B}(y, \iota_z \mathfrak{E}(y, z)).$$

Возможны и такие случаи, когда прямое подчинение имеет место наряду с косвенным; действительно, различные переменные какого-либо ι -выражения могут быть связаны по-разному. Так, например, терму

$$\iota_x \exists y \mathfrak{A}(\iota_z \mathfrak{B}(x, y, z))$$

встречающееся в нем ι -выражение $\iota_z \mathfrak{B}(x, y, z)$ подчинено, с одной стороны, непосредственно (связыванием переменной x), а с другой стороны, косвенно (связыванием y).

Как можно видеть уже из этих примеров, в результате комбинирования различных способов сочетания ι -символов на свет могут появиться чрезвычайно запутанные структуры.

Уже в случае сравнительно простых образований ι -термы становятся трудно обозримыми. Поэтому для тех или иных часто встречающихся ι -термов целесообразно вводить с помощью *явных определений сокращающие их символы*. Такой сокращающий символ в том случае, когда заменяемый им ι -терм не содержит свободных переменных, будет символом без аргумента, играющим роль индивидуального символа. Если же заменяемый ι -терм содержит свободные переменные, то в соответствии с нашим общим соглашением относительно явных определений ¹⁾ сокращающий символ будет содержать встречающиеся в этом ι -терме свободные переменные в качестве аргументов. При содержательном истолковании этот символ будет изображать некоторую функцию, и если в качестве аргументов будут фигурировать лишь индивидуальные переменные, то это будет обычная математическая функция.

Если в качестве аргументов будут фигурировать формульные переменные, у которых в свою очередь в качестве аргументов имеется одна или несколько индивидуальных переменных, то аргументы этих формульных переменных мы будем указывать при помощи связанных переменных, которые будут записываться в виде нижних индексов у зависящего от этих аргументов вводимого знака ²⁾. Таким способом мы получим символы типа $\beta_x(A(x))$,

¹⁾ См. гл. VII, с. 357.

²⁾ Если в ι -терме, для которого мы вводим сокращение, в качестве аргументов формульных переменных встречаются свободные индивидуальные переменные, то эти индивидуальные переменные должны быть указаны в качестве самостоятельных аргументов вводимого символа наряду с формульными переменными. В соответствии с этим, для ι -терма, содержащего в качестве составной части выражение $A(c)$ и не содержащего более никаких свободных переменных, сокращающий символ будет, например, иметь вид

$$f_x(A(x), c),$$

где f — какой-либо функциональный знак; роль x может играть и какая-нибудь другая связанная переменная.

$\gamma_{xyz}(a, B(x), C(y, z))$; при этом с содержательной точки зрения $\beta_x(A(x))$

будет изображать функцию, которая всякому предикату с одним аргументом ставит в соответствие некоторый индивид, а

$$\gamma_{xyz}(a, B(x), C(y, z))$$

будет изображать функцию, которая любой тройке, состоящей из индивида, предиката с одним аргументом и предиката с двумя аргументами, ставит в соответствие некоторый новый индивид.

3. Функция $\omega(A)$; формализация понятия наименьшего числа с помощью функции $\mu_x A(x)$; формулы однозначности. Мы займемся сейчас подробным рассмотрением ряда важных *функциональных конструкций*, оказывающихся осуществимыми благодаря наличию ι -символа. В качестве первого примера мы рассмотрим изображение такой функции высказывания, которая любому высказыванию сопоставляет значение 0 или 1 в зависимости от того, истинно это высказывание или нет. С этой целью мы будем исходить из формулы

$$(A \rightarrow a = 0) \& (\neg A \rightarrow a = 0').$$

Формулы единственности для нее запишутся в виде

$$\exists x((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0')),$$

$$\forall x \forall y ((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0') \& (A \rightarrow y = 0) \& (\neg A \rightarrow y = 0') \rightarrow x = y).$$

Обе они могут быть выведены с помощью аксиом равенства. Вывод первой формулы протекает следующим образом.

Из первой аксиомы равенства подстановкой и добавлением посылок получаем

$$A \rightarrow (A \rightarrow 0 = 0).$$

Из тождественной формулы

$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

подстановкой получаем

$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow 0 = 0').$$

Полученные формулы по схеме конъюнкции дают

$$A \rightarrow ((A \rightarrow 0 = 0) \& (\neg A \rightarrow 0 = 0'));$$

далее, из формулы (b) подстановкой получается формула

$$(A \rightarrow 0 = 0) \& (\neg A \rightarrow 0 = 0') \rightarrow \exists x((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0')),$$

которая вместе с предыдущей формулой по правилу силлогизма дает

$$A \rightarrow \exists x((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0')).$$

Аналогичным образом мы получим и формулу

$$\neg A \rightarrow \exists x ((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0')).$$

Теперь по схеме для дизъюнкции можно получить формулу

$$A \vee \neg A \rightarrow \exists x ((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0')),$$

и так как $A \vee \neg A$ является тождественной формулой, то мы получаем

$$\exists x ((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 0')).$$

Совершенно аналогичным образом протекает вывод второй формулы единственности: с одной стороны, ее можно вывести с посылкой A , а с другой стороны, с посылкой $\neg A$. Вместо первой аксиомы равенства, используемой в доказательстве первой формулы, здесь используется формула

$$a = c \& b = c \rightarrow a = b,$$

из которой в результате применения подстановки и средств исчисления высказываний получается формула

$$A \rightarrow \{(A \rightarrow a = 0) \& (\neg A \rightarrow a = 0') \& (A \rightarrow b = 0) \& (\neg A \rightarrow b = 0') \rightarrow a = b\},$$

а также аналогичная формула с посылкой $\neg A$; вместо формулы (b) здесь используются схема (α) и правило переименования.

Выводимость обеих формул единственности позволяет ввести в качестве ι-терма выражение

$$\iota_x ((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 1)).$$

Чтобы иметь для этого терма соответствующее сокращение, мы сформулируем следующее явное определение:

$$\omega(A) = \iota_x ((A \rightarrow x = 0) \& (\neg A \rightarrow x = 1)).$$

Опираясь на это определение и используя вторую аксиому равенства, мы с помощью ι-правила получим формулы

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \omega(A) = 0, \\ \neg A &\rightarrow \omega(A) = 1, \end{aligned}$$

а из них, применив формулу

$$0' \neq 0,$$

получим эквивалентность

$$A \sim \omega(A) = 0.$$

Тем самым мы в общем виде показали, что всякая формула переводима в равенство вида

$$a = 0.$$

В рекурсивной арифметике это было возможно только для формул некоторого специального вида. В полученных нами формулах для $\omega(A)$ вместо переменной A можно будет подставлять произвольные формулы и таким образом мы получим ряд дальнейших функций. Например, если мы вместо A подставим $A(a)$, то получатся формулы

$$\begin{aligned} A(a) &\rightarrow \omega(A(a)) = 0, \\ \neg A(a) &\rightarrow \omega(A(a)) = 1, \end{aligned}$$

в которые вместо $A(a)$ можно будет снова подставить какую-нибудь формулу $\mathfrak{A}(a)$. Тогда

$$\omega(\mathfrak{A}(a))$$

изобразит нам такую функцию, которая принимает значение 0 или 1 в зависимости от того, выполняется высказывание $\mathfrak{A}(a)$ для индивида a или же нет. Тем самым с помощью функции $\omega(A(a))$ в общем виде формализуется переход от логических функций (предикатов) к математическим функциям.

Если в приведенных выше формулах мы подставим вместо переменной A формулу $\forall x A(x)$, то, используя преобразование $\neg \forall x A(x)$ в $\exists x \neg A(x)$, получим формулы

$$\begin{aligned} \forall x A(x) &\rightarrow \omega(\forall x A(x)) = 0, \\ \exists x \neg A(x) &\rightarrow \omega(\forall x A(x)) = 1. \end{aligned}$$

Здесь снова вместе $A(a)$ можно будет подставить какую-нибудь конкретную формулу $\mathfrak{A}(a)$, и тогда

$$\omega(\forall x \mathfrak{A}(x))$$

изобразит нам значение 0 или 1 в зависимости от того, верен предикат $\mathfrak{A}(a)$ для всех элементов индивидуальной области или же он неверен по крайней мере для одного из них.

При введении функции $\omega(A)$ и при выводе характеризующих ее формул

$$A \rightarrow \omega(A) = 0 \quad \text{и} \quad \neg A \rightarrow \omega(A) = 1$$

кроме общих логических формул и правил, включая ι-правило, мы пользовались только аксиомами равенства и формулой $0' \neq 0$. Теперь мы рассмотрим такую функциональную конструкцию, в которой ι-правило будет применяться в сочетании с арифметическими аксиомами, в частности с аксиомой индукции. Таким образом, эта конструкция при содержательном ее истолковании будет относиться специально к числовой индивидуальной области.

Как мы показали в гл. VI, из аксиомы индукции и из аксиом для символов $=$ и $<$, т. е. из формул системы (B), может быть

выведена формула

$$A(a) \rightarrow \exists x (A(x) \& \forall y (A(y) \rightarrow x = y \vee x < y)),$$

изображающая принцип наименьшего числа.

Если формулу

$$A(c) \& \forall u (A(u) \rightarrow c = u \vee c < u)$$

сокращенно обозначить посредством $\mathfrak{M}(c)$, то предыдущую формулу, переименовав в ней переменную y в u , можно будет записать в виде

$$A(a) \rightarrow \exists x \mathfrak{M}(x).$$

Из этой формулы с помощью схемы (β) мы получим формулу

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x \mathfrak{M}(x).$$

Применим ι-правило к формуле

$$(\forall z \neg A(z) \rightarrow a = 0) \& (\exists z A(z) \rightarrow \mathfrak{M}(a)).$$

Соответствующие формулы единственности снова можно будет получить при помощи схемы дизъюнкции: сначала каждая из обеих этих формул выводятся, с одной стороны, с посылкой $\forall z \neg A(z)$, а с другой стороны, с посылкой $\exists z A(z)$; после этого можно будет воспользоваться формулой

$$\forall z \neg A(z) \vee \exists z A(z).$$

Упомянутые выводы могут быть получены средствами исчисления предикатов с помощью формул

$$\begin{aligned} 0 = 0, \exists x A(x) \rightarrow \exists x \mathfrak{M}(x), \\ a = 0 \& b = 0 \rightarrow a = b, \mathfrak{M}(a) \& \mathfrak{M}(b) \rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Последняя из этих формул может быть получена следующим образом. Используя основную формулу (а) (в сочетании с правилом переименования), с помощью исчисления высказываний мы получим

$$\mathfrak{M}(b) \rightarrow A(b) \& (A(a) \rightarrow b = a \vee b < a).$$

Если (с помощью подстановок) мы поменяем в ней местами переменные a и b , то получим

$$\mathfrak{M}(a) \rightarrow A(a) \& (A(b) \rightarrow a = b \vee a < b).$$

Взяв обе полученные формулы, мы с помощью исчисления высказываний получим формулу

$$\mathfrak{M}(a) \& \mathfrak{M}(b) \rightarrow (a = b \vee a < b) \& (b = a \vee b < a),$$

которая в сочетании с формулами

$$\begin{aligned} b = a \rightarrow a = b, \\ a < b \rightarrow \neg(b < a) \end{aligned}$$

с помощью исчисления высказываний дает нам формулу

$$\mathfrak{M}(a) \& \mathfrak{M}(b) \rightarrow a = b.$$

Теперь, после того как выведены обе формулы единственности для формулы

$$(\forall z \neg A(z) \rightarrow a = 0) \& (\exists z A(z) \rightarrow \mathfrak{M}(a)),$$

выражение

$$\iota_x \{(\forall z \neg A(z) \rightarrow x = 0) \& (\exists z A(z) \rightarrow \mathfrak{M}(x))\}$$

может быть введено в качестве ι-терма. В качестве единственной свободной переменной в нем фигурирует формульная переменная A с одним аргументом. Мы возьмем для этого терма в качестве сокращения символ

$$\mu_x A(x);$$

таким образом, мы вводим этот символ при помощи следующего явного определения:

$$\mu_x A(x) = \iota_x \{(\forall z \neg A(z) \rightarrow x = 0) \& (\exists z A(z) \rightarrow \mathfrak{M}(x))\};$$

это функциональный знак, который в качестве аргумента имеет формульную переменную, которая, со своей стороны, зависит от некоторого аргумента. Разновидность подчинения, изображаемую этим функциональным знаком, мы выявим, написав формулу, которая извлекается для $\mu_x A(x)$ из схемы ι-правила. Эта формула имеет вид

$$(\forall z \neg A(z) \rightarrow \mu_x A(x) = 0) \& (\exists z A(z) \rightarrow \mathfrak{M}(\mu_x A(x))).$$

Если мы разобьем эту конъюнкцию на члены и переименуем переменную z в x , то получим

$$\begin{aligned} \forall x \neg A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = 0, \\ \exists x A(x) \rightarrow \mathfrak{M}(\mu_x A(x)). \end{aligned}$$

Теперь учтем уже использовавшуюся ранее (при выводе второй формулы единственности) формулу

$$\mathfrak{M}(b) \rightarrow A(b) \& (A(a) \rightarrow b = a \vee b < a);$$

если мы подставим в нее вместо b терм $\mu_x A(x)$, то, используя сокращение $\leq$, получим формулу

$$\mathfrak{M}(\mu_x A(x)) \rightarrow (A(\mu_x A(x)) \& (A(a) \rightarrow \mu_x A(x) \leq a)),$$

а эта последняя вместе с упоминавшейся выше формулой

$$\exists x A(x) \rightarrow \mathfrak{M}(\mu_x A(x))$$

с помощью основной формулы (b) и средств исчисления высказываний даст следующие две формулы:

$$(\mu_1) \quad \exists x A(x) \rightarrow A(\mu_x A(x)),$$

$$(\mu_2) \quad A(a) \rightarrow \mu_x A(x) \leq a.$$

Будучи истолкованы содержательно, эти формулы выражают тот факт, что для всякого числового предиката $\mathfrak{A}(a)$, выполняющегося хотя бы для одного числа, символ $\mu_x \mathfrak{A}(x)$ изображает *наименьшее число*, для которого выполняется этот предикат. Для полного определения функции $\mu_x \mathfrak{A}(x)$ нужна еще упоминавшаяся выше формула

$$(\mu_3) \quad \forall x \neg A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = 0,$$

которая выражает тот факт, что для свойства $\mathfrak{A}(a)$, которое не выполняется ни для какого числа, $\mu_x \mathfrak{A}(x)$ принимает в качестве значения 0.

Таким образом, рассматриваемая функция $\mu_x A(x)$ формализует понятие числа, наименьшего среди обладающих определенным свойством либо равного 0, если чисел, обладающих этим свойством, нет. Введенное нами понятие идет существенно дальше, чем то, которое в рекурсивной арифметике было формализовано нами посредством выражения

$$\text{Min}_{0 \leq x \leq k} \mathfrak{A}(x),$$

так как это последнее, во-первых, применимо лишь к предикатам специального типа и, кроме того, оно содержит ограничение на интервал фигурирующих здесь чисел, которые должны не превосходить k .

Из содержательного смысла функции $\mu_x A(x)$ можно немедленно заключить, что связанное с предикатом $\mathfrak{A}(a)$ число $\mu_x \mathfrak{A}(x)$ однозначно определяется *множеством* тех чисел, для которых этот предикат выполняется. Факт этой однозначной определенности «объемом» предиката формально выражается формулой

$$\forall x (A(x) \sim B(x)) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x).$$

Для установления выводимости этой формулы (в силу дедукционной теоремы) достаточно с помощью формулы

$$\forall x (A(x) \sim B(x))$$

при незатронутых формульных переменных вывести равенство

$$\mu_x A(x) = \mu_x B(x).$$

Для этого мы сначала получим из (μ_2) формулы

$$A(\mu_x B(x)) \rightarrow \mu_x A(x) \leq \mu_x B(x),$$

$$B(\mu_x A(x)) \rightarrow \mu_x B(x) \leq \mu_x A(x),$$

которые совместно друг с другом дадут

$$A(\mu_x B(x)) \& B(\mu_x A(x)) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x).$$

Теперь мы воспользуемся формулой

$$\forall x (A(x) \sim B(x)),$$

из которой могут быть получены формулы

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x),$$

$$A(a) \rightarrow B(a), \quad B(a) \rightarrow A(a).$$

Первая из них в сочетании с формулами

$$\exists x A(x) \rightarrow A(\mu_x A(x)),$$

$$\exists x B(x) \rightarrow B(\mu_x B(x)),$$

получающимися из (μ_1) , дает формулу

$$\exists x A(x) \rightarrow A(\mu_x A(x)) \& B(\mu_x B(x));$$

вторая и третья подстановкой вместо переменной a дают формулы

$$A(\mu_x A(x)) \rightarrow B(\mu_x A(x)), \quad B(\mu_x B(x)) \rightarrow A(\mu_x B(x)),$$

так что в целом мы получим

$$\exists x A(x) \rightarrow A(\mu_x B(x)) \& B(\mu_x A(x)),$$

а из нее, в сочетании с выведенной выше формулой

$$A(\mu_x B(x)) \& B(\mu_x A(x)) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x),$$

получим формулу

$$\exists x A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x).$$

С другой стороны, применив еще раз формулу

$$\forall x (A(x) \sim B(x)),$$

мы получим

$$\forall x \neg A(x) \rightarrow \forall x \neg B(x),$$

а эта формула в сочетании с получающимися из (μ_3) формулами

$$\forall x \neg A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = 0,$$

$$\forall x \neg B(x) \rightarrow \mu_x B(x) = 0$$

и с формулой

$$\mu_x A(x) = 0 \& \mu_x B(x) = 0 \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x)$$

дает

$$\forall x \neg A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x).$$

Но две полученные нами формулы

$$\exists x A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x)$$

и

$$\forall x \neg A(x) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x)$$

совместно друг с другом дают искомое равенство

$$\mu_x A(x) = \mu_x B(x).$$

Однозначность, аналогичная той, которая для функции $\mu_x A(x)$ изображается выводимой формулой

$$\forall x (A(x) \sim B(x)) \rightarrow \mu_x A(x) = \mu_x B(x),$$

имеет место также и для того соотношения индивида предикату, которое формализуется с помощью ι -символа. Однозначность эта формально выражается в том, что для произвольных формул $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{B}(a)$ с выводимыми формулами единственности оказывается выводимой формула

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{B}(x)) \rightarrow \iota_x \mathcal{A}(x) = \iota_x \mathcal{B}(x).$$

Мы докажем здесь и этот факт. Для этого достаточно будет показать, что в том случае, когда для $\mathcal{A}(a)$ и для $\mathcal{B}(a)$ оказываются выводимыми формулы единственности, из формулы

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{B}(x))$$

при незатронутых входящих в нее свободных переменных может быть получена формула

$$\iota_x \mathcal{A}(x) = \iota_x \mathcal{B}(x).$$

Прежде всего, с учетом выведенных формул единственности, ι -правило дает нам формулы

$$\mathcal{A}(\iota_x \mathcal{A}(x)) \text{ и } \mathcal{B}(\iota_x \mathcal{B}(x)).$$

Из формулы

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{B}(x))$$

может быть получена формула

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x)),$$

откуда, далее, получаем

$$\mathcal{A}(\iota_x \mathcal{A}(x)) \rightarrow \mathcal{B}(\iota_x \mathcal{A}(x));$$

а эта формула вместе с формулами

$$\mathcal{A}(\iota_x \mathcal{A}(x)) \text{ и } \mathcal{B}(\iota_x \mathcal{B}(x))$$

дает нам

$$\mathcal{B}(\iota_x \mathcal{A}(x)) \& \mathcal{B}(\iota_x \mathcal{B}(x)).$$

С другой стороны, из второй формулы единственности для $\mathcal{B}(a)$ мы получаем формулу

$$\mathcal{B}(\iota_x \mathcal{A}(x)) \& \mathcal{B}(\iota_x \mathcal{B}(x)) \rightarrow \iota_x \mathcal{A}(x) = \iota_x \mathcal{B}(x),$$

которая вместе с предыдущей формулой дает равенство

$$\iota_x \mathcal{A}(x) = \iota_x \mathcal{B}(x).$$

Заметим, что в этом выводе формулу

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{B}(x))$$

мы использовали только для получения формулы

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x)).$$

Из этого обстоятельства вытекает, что в случае выводимости формул единственности для $\mathcal{A}(a)$ и для $\mathcal{B}(a)$ формула

$$\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x)) \rightarrow \iota_x \mathcal{A}(x) = \iota_x \mathcal{B}(x)$$

также является выводимой. Заметим, что вывод этой формулы из формул единственности для $\mathcal{A}(a)$ и для $\mathcal{B}(a)$ протекает *без использования аксиом равенства*, при помощи одного лишь ι -правила и средств исчисления предикатов.

На примере рассмотренных нами формул однозначности обнаруживается то преимущество, которое дает нам введение функции $\mu_x A(x)$ по сравнению с оперированием с ι -символом: в то время как доказуемость формул однозначности для ι -символа мы можем констатировать лишь *в каждом отдельном случае*, для функции $\mu_x A(x)$ у нас оказывается общая формула однозначности, которая включает в себя все эти частные случаи.

Это различие возникает вследствие того, что $\mu_x A(x)$ является термом независимо ни от чего, в то время как при введении ι -термов мы оказываемся связанными выводимостью формул единственности. С этой точки зрения важно уяснить себе, что функция $\mu_x A(x)$, после того как она однажды была введена с помощью ι -символа, начиная с этого места вообще может быть использована для замены ι -символа, так что *любое дальнейшее применение ι -правила оказывается ненужным*.

Именно, если для формулы $\mathcal{A}(a)$ окажутся выводимыми формулы единственности, то будет выводимым и равенство

$$\iota_x \mathcal{A}(x) = \mu_x \mathcal{A}(x).$$

Действительно, в этом случае, согласно ι -правилу, мы получим

$$\mathcal{A}(\iota_x \mathcal{A}(x)).$$

Далее, из формулы (μ_1) и из первой формулы единственности для $\mathfrak{A}(a)$ можно получить

$$\mathfrak{A}(\mu_x \mathfrak{A}(x)),$$

так что мы будем иметь

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{A}(\mu_x \mathfrak{A}(x)).$$

С другой стороны, из второй формулы единственности для $\mathfrak{A}(a)$ получается формула

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{A}(\mu_x \mathfrak{A}(x)) \rightarrow \iota_x \mathfrak{A}(x) = \mu_x \mathfrak{A}(x),$$

так что мы действительно приходим к равенству

$$\iota_x \mathfrak{A}(x) = \mu_x \mathfrak{A}(x).$$

Таким образом, в случае формул $\mathfrak{A}(a)$, для которых ι -правило допускает введение терма $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, роль этого терма в известной мере берет на себя терм $\mu_x \mathfrak{A}(x)$, и тем самым, используя функцию $\mu_x A(x)$, мы можем обойтись без введения ι -термов по ι -правилу, т. е. без вывода соответствующих формул единственности.

Разумеется, такая возможность имеется только в арифметике, где действует принцип наименьшего числа, в то время как формализованное с помощью ι -символа понятие «тот, который» обладает универсальной применимостью.

§ 2. Дедуктивное построение арифметики на основе системы аксиом (Z) с добавлением формализованного понятия наименьшего числа

1. Понятие «меньше»; сравнения; деление с остатком; делимость; взаимно простые числа. Для введения функции $\mu_x \mathfrak{A}(x)$ мы из арифметики использовали здесь только аксиомы системы (B). Теперь мы добавим рекурсивные равенства для сложения и умножения и таким образом перейдем от системы (B) к системе (Z). Значение функциональной конструкции $\mu_x A(x)$ полностью раскроется только в рамках этого формализма. В частности, мы покажем, что с помощью функции $\mu_x A(x)$ все остальные рекурсивные определения можно будет заменить явными определениями.

В качестве подготовки мы должны будем проследить за формализацией некоторого фрагмента арифметики в том виде, как она получается на основе аксиом системы (Z) с добавлением функционального знака $\mu_x A(x)$ и относящихся к нему формул (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) .

Этот способ изложения арифметики представляет собой полную противоположность рекурсивной арифметике; то, что там удавалось достичь при помощи рекурсивных определений, здесь

получится в результате использования связанных переменных, в частности, с помощью функции $\mu_x A(x)$. Поэтому те же самые арифметические отношения и функции теперь появятся в новом формальном изложении; но все же мы позволим себе сохранить для них прежние символы, как мы уже делали это в отношении символа $<$. В самом деле, символ $a < b$ мы сначала (в гл. VI) ввели в качестве основного знака, затем в рекурсивной арифметике мы ввели его при помощи функции $a \div b$ посредством определения ¹⁾

$$a < b \sim b \div a \neq 0,$$

а после этого, используя связанные переменные, мы ввели его при помощи функции $a + b$ посредством определения

$$a < b \sim \exists x (x \neq 0 \& a + x = b).$$

Это последнее определение мы и возьмем за основу для дальнейшего.

Из этого определения могут быть получены [как мы показали в гл. VII ²⁾ при рассмотрении системы (D)] формулы $(<_1)$, $(<_2)$, $(<_3)$, а также

$$a < b \rightarrow a' = b \vee a' < b,$$

из которых дальше (как было установлено в гл. VI ³⁾) могут быть выведены формулы

$$a = b \vee a < b \vee b < a \text{ и } a < b \rightarrow \neg (b < a').$$

Кроме того, к этому могут быть добавлены формулы

$$a < b \rightarrow a + c < b + c, \\ c \neq 0 \rightarrow (a < b \sim a \cdot c < b \cdot c),$$

которые получаются с помощью законов для сложения и умножения ⁴⁾. Далее, из определения для $a < b$ получается эквивалентность

$$a \leq b \sim \exists x (a + x = b).$$

Мы начнем теперь с определения сравнения по модулю n

$$a \equiv b \pmod{n},$$

которое формулируется следующим образом ⁵⁾:

$$a \equiv b \pmod{n} \sim \exists x (a = n \cdot x + b \vee b = n \cdot x + a).$$

¹⁾ См. с. 370.

²⁾ См. с. 439.

³⁾ См. с. 332.

⁴⁾ См. с. 379.

⁵⁾ Следует сравнить с этим приведенное в гл. VII (см. с. 441) определение для $a \equiv b \pmod{f}$ при фиксированной цифре f . В рамках системы (D) мы были вынуждены ограничиваться цифрами f , так как в нашем распоряжении не было функции $a \cdot b$.

Из этого определения, в силу законов для сложения и умножения, а также формул

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \rightarrow a = b, \\ a &= b \vee a < b \vee b < a \end{aligned}$$

могут быть получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \pmod{n}, \\ a &\equiv b \pmod{n} \ \& \ a \equiv c \pmod{n} \rightarrow b \equiv c \pmod{n}, \\ a &\equiv b \pmod{n} \sim a + c \equiv b + c \pmod{n}, \\ a &\equiv b \pmod{n} \rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}, \\ a &\equiv b \pmod{n \cdot c} \rightarrow a \equiv b \pmod{n}. \end{aligned}$$

Понятие сравнения по какому-либо модулю находится в тесной связи с операцией деления. От деления нам нужно здесь лишь понятие остатка. Функцию $\rho(a, b)$, изображающую остаток от деления a на b , мы введем с помощью следующего явного определения:

$$\rho(a, b) = \mu_x \exists y (a = b \cdot y + x).$$

Здесь мы впервые встречаемся с примером определения арифметической функции через функцию $\mu_x A(x)$. Формальные свойства определенной таким образом функции должны получаться с использованием формул (μ_1) , (μ_2) , (μ_3) . В рассматриваемом случае нам будут нужны только первые две из них. Если мы подставим в (μ_1) вместо формульной переменной $A(c)$ формулу

$$\exists y (a = b \cdot y + c),$$

то, используя определяющее функцию $\rho(a, b)$ равенство, мы получим

$$\exists x \exists y (a = b \cdot y + x) \rightarrow \exists y (a = b \cdot y + \rho(a, b)).$$

Затем из равенства

$$a = b \cdot 0 + a$$

средствами исчисления предикатов мы получим формулу

$$\exists x \exists y (a = b \cdot y + x);$$

тем самым мы получаем формулу

$$\exists y (a = b \cdot y + \rho(a, b)),$$

а отсюда, используя определение сравнения, получаем

$$a \equiv \rho(a, b) \pmod{b}.$$

Теперь возьмем формулу (μ_2) . Прежде всего, подставим в нее вместо a переменную r , а вместо именной формы $A(c)$ мы снова

подставим формулу

$$\exists y (a = b \cdot y + c);$$

это дает нам

$$\exists y (a = b \cdot y + r) \rightarrow \rho(a, b) \leq r.$$

С другой стороны, применив соответствующие законы для сложения и умножения, мы получим формулу

$$a = b \cdot n + s \ \& \ b + r = s \rightarrow a = b \cdot n' + r,$$

а из нее — средствами исчисления предикатов — формулу

$$\exists y (a = b \cdot y + \rho(a, b)) \rightarrow (b + r = \rho(a, b) \rightarrow \exists y (a = b \cdot y + r)).$$

Фигурирующую здесь в качестве посылки формулу

$$\exists y (a = b \cdot y + \rho(a, b))$$

мы уже вывели ранее. Тем самым мы получаем

$$b + r = \rho(a, b) \rightarrow \exists y (a = b \cdot y + r),$$

а эта формула вместе с ранее полученной формулой

$$\exists y (a = b \cdot y + r) \rightarrow \rho(a, b) \leq r$$

дает формулу

$$b + r = \rho(a, b) \rightarrow \rho(a, b) \leq r,$$

из которой мы получим, далее,

$$b + r = \rho(a, b) \rightarrow b + r \leq r.$$

С помощью формулы

$$b + r \leq r \rightarrow b = 0$$

которая выводится из эквивалентности

$$a \leq b \sim \exists x (a + x = b),$$

мы теперь получим

$$b + r = \rho(a, b) \rightarrow b = 0,$$

а отсюда средствами исчисления предикатов —

$$\exists x (b + x = \rho(a, b)) \rightarrow b = 0.$$

Если мы еще раз воспользуемся эквивалентностью

$$a \leq b \sim \exists x (a + x = b),$$

то придем к формуле

$$b \leq \rho(a, b) \rightarrow b = 0,$$

а из нее, произведя контрапозицию и используя дизъюнкцию

$$a = b \vee a < b \vee b < a,$$

получим формулу

$$b \neq 0 \rightarrow \rho(a, b) < b.$$

Эта формула и является изображением результата нашего применения формулы (μ_2). Вместе со сравнением

$$a \equiv \rho(a, b) \pmod{b}$$

она дает нам полную характеристику функции $\rho(a, b)$. Формально это обстоятельство выражается выводимостью формулы

$$a \equiv r \pmod{b} \& r < b \rightarrow r = \rho(a, b),$$

которая может быть получена с использованием формулы

$$r \equiv s \pmod{b} \rightarrow r \geq b + s \vee s \geq b + r \vee r = s.$$

Из формулы

$$a \equiv r \pmod{b} \& r < b \rightarrow r = \rho(a, b),$$

можно, кроме того, вывести эквивалентность

$$a \equiv b \pmod{n} \sim \rho(a, n) = \rho(b, n),$$

которую в рекурсивной арифметике мы брали в качестве определения сравнения.

Как можно видеть на этом примере введения функции $\rho(a, b)$, придерживаться точного формального стиля даже в случае самых начальных арифметических рассуждений оказывается делом достаточно затруднительным. В дальнейшем, чтобы избежать многословия, мы будем довольствоваться краткими указаниями, и это будет тем более допустимо, что речь здесь идет о формализации привычных рассуждений из области арифметики и мы должны будем следить только за тем, чтобы ход доказательств укладывался в рамки рассматриваемого нами формализма¹⁾.

Для достижения поставленной нами цели требуется формализация понятий делимости, взаимной простоты и наименьшего общего кратного. Для делимости мы возьмем применяемый иногда в теории чисел символ $a \mid b$ (a делит b), определение которого имеет вид

$$a \mid b \sim \exists x (a \cdot x = b).$$

Из этого определения могут быть выведены следующие эквивалентности:

$$a \mid b \sim b \equiv 0 \pmod{a},$$

$$a \mid b \sim \rho(b, a) = 0;$$

¹⁾ Тот, кто хотел бы пропустить идущие далее формальные построения, может перейти непосредственно к с. 499.

затем мы можем получить формулы

$$\begin{aligned} a \mid a \cdot b, \quad b \mid a \cdot b, \\ a \mid b \& b \mid c \rightarrow a \mid c, \\ a \mid b \& a \mid c \rightarrow a \mid b + c, \\ a \mid b \& a \mid b + c \rightarrow a \mid c, \\ a \mid 0, \quad 0 \mid b \rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Из эквивалентности

$$a \mid b \sim b \equiv 0 \pmod{a}$$

можно также получить

$$a \mid b \& b \equiv c \pmod{a} \rightarrow a \mid c.$$

С целью формализации понятия «*a* взаимно просто с *b*» мы сформулируем следующее определение:

$$\text{Prim}(a, b) \sim \exists x (a \cdot x \equiv 1 \pmod{b}).$$

Из этого определения легко получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{Prim}(a, b) \& c \mid a \rightarrow \text{Prim}(c, b), \\ \text{Prim}(a, n) \& \text{Prim}(b, n) \rightarrow \text{Prim}(a \cdot b, n), \\ \text{Prim}(a, n) \& a \equiv b \pmod{n} \rightarrow \text{Prim}(b, n). \end{aligned}$$

Несколько более трудным делом является вывод свойства симметрии, выражаемого формулой

$$\text{Prim}(a, b) \rightarrow \text{Prim}(b, a).$$

Этот вывод протекает с использованием следующих формул:

$$\begin{aligned} \text{Prim}(1, a), \text{Prim}(a, 0) \rightarrow a = 1, \text{Prim}(0, 1), \\ b > 1 \& \text{Prim}(a, b) \rightarrow \exists x \exists y (x < b \& y < a \& a \cdot x = b \cdot y + 1), \\ \exists x \exists y (x < b \& y < a \& a \cdot x = b \cdot y + 1) \\ \rightarrow \exists x \exists y \exists u \exists v (x + u = b \& y + v = a \& a \cdot x = b \cdot y + 1), \\ \exists x \exists y \exists u \exists v (x + u = b \& y + v = a \& a \cdot x = b \cdot y + 1) \\ \rightarrow \exists u \exists v (b \cdot v = a \cdot u + 1). \end{aligned}$$

Из формулы

$$\text{Prim}(a, b) \rightarrow \text{Prim}(b, a),$$

пользуясь определением $\text{Prim}(a, b)$, мы получим

$$\text{Prim}(a, b) \rightarrow \exists x (a \cdot x \equiv 1 \pmod{b}) \& \exists x (b \cdot x \equiv 1 \pmod{a}).$$

Если воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} a \cdot r \equiv 1 \pmod{b} \& b \cdot s \equiv 1 \pmod{a} \\ \rightarrow a \cdot r \cdot l + b \cdot s \cdot k \equiv l \pmod{b} \& a \cdot r \cdot l + b \cdot s \cdot k \equiv k \pmod{a}, \end{aligned}$$

то получится

$$\text{Prim}(a, b) \rightarrow \exists x (x \equiv k \pmod{a} \& x \equiv l \pmod{b}).$$

2. Наименьшее общее кратное двух чисел и конечной последовательности чисел; максимум конечной последовательности чисел. Теперь при помощи определения

$$\text{mult}(a, b) = \mu_x (x \neq 0 \ \& \ a \mid x \ \& \ b \mid x)$$

мы введем функцию $\text{mult}(a, b)$, которая будет изображать *наименьшее общее кратное* a и b . Чтобы воспользоваться этим определением, мы должны обратиться к формулам (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) . Эти формулы будут применяться здесь следующим образом. Прежде всего мы подставим в (μ_2) вместо a переменную n , а затем во все три формулы вместо именной формы $A(c)$ подставим формулу

$$c \neq 0 \ \& \ a \mid c \ \& \ b \mid c.$$

Так мы из (μ_1) и (μ_2) получим формулы

$$\begin{aligned} \exists x (x \neq 0 \ \& \ a \mid x \ \& \ b \mid x) \rightarrow \text{mult}(a, b) \neq 0 \ \& \ a \mid \text{mult}(a, b) \\ \& \ b \mid \text{mult}(a, b), \\ n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \leq n, \end{aligned}$$

а из (μ_3) после простых преобразований получим

$$\forall x (a \mid x \ \& \ b \mid x \rightarrow x = 0) \rightarrow \text{mult}(a, b) = 0.$$

Последняя формула в сочетании с формулой

$$0 \mid b \rightarrow b = 0$$

дает

$$a = 0 \vee b = 0 \rightarrow \text{mult}(a, b) = 0.$$

В формуле, полученной нами из (μ_1) , посылка [с учетом формул

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \rightarrow a \cdot b \neq 0$$

и

$$a \mid a \cdot b, \quad b \mid a \cdot b,$$

из которых можно получить формулу

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \rightarrow \exists x (x \neq 0 \ \& \ a \mid x \ \& \ b \mid x)$$

может быть заменена посредством $a \neq 0 \ \& \ b \neq 0$. Полученная таким образом формула может быть разложена на следующие две формулы:

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \rightarrow \text{mult}(a, b) \neq 0,$$

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \rightarrow a \mid \text{mult}(a, b) \ \& \ b \mid \text{mult}(a, b).$$

Во второй из них на основе ранее полученной формулы

$$a = 0 \vee b = 0 \rightarrow \text{mult}(a, b) = 0$$

и формулы $a \mid 0$ может быть отброшена посылка, так что в результате мы получим

$$a \mid \text{mult}(a, b) \ \& \ b \mid \text{mult}(a, b).$$

Теперь, для того чтобы воспользоваться полученной из (μ_2) формулой

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \leq n,$$

мы прежде всего заметим, что формула

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow a \neq 0 \ \& \ b \neq 0,$$

которая получается с помощью формулы

$$0 \mid b \rightarrow b = 0,$$

вместе с выведенной нами формулой

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \rightarrow \text{mult}(a, b) \neq 0$$

дает формулу

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \neq 0.$$

Эта формула вместе с формулой

$$b \neq 0 \rightarrow \rho(a, b) < b,$$

в которую мы вместо a подставим n , а вместо b $\text{mult}(a, b)$, дает

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \rho(n, \text{mult}(a, b)) < \text{mult}(a, b).$$

Затем мы привлечем формулы

$$a \equiv \rho(a, b) \pmod{b}$$

и

$$(*) \quad a \mid b \ \& \ b \equiv c \pmod{a} \rightarrow a \mid c.$$

Первая из них в результате подстановки дает

$$n \equiv \rho(n, \text{mult}(a, b)) \pmod{\text{mult}(a, b)}.$$

Далее, используя $a \mid \text{mult}(a, b)$ и $b \mid \text{mult}(a, b)$, мы получим

$$n \equiv \rho(n, \text{mult}(a, b)) \pmod{a},$$

$$n \equiv \rho(n, \text{mult}(a, b)) \pmod{b}.$$

Произведя подстановки в формулу $(*)$, мы получим

$$a \mid n \ \& \ n \equiv \rho(n, \text{mult}(a, b)) \pmod{a} \rightarrow a \mid \rho(n, \text{mult}(a, b)),$$

$$b \mid n \ \& \ n \equiv \rho(n, \text{mult}(a, b)) \pmod{b} \rightarrow b \mid \rho(n, \text{mult}(a, b)).$$

Тем самым получается

$$a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow a \mid \rho(n, \text{mult}(a, b)) \ \& \ b \mid \rho(n, \text{mult}(a, b)).$$

Теперь применим полученную из (μ_2) формулу

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \leq n.$$

Если мы вместо n подставим в нее $\rho(n, \text{mult}(a, b))$, то в сочетании с предыдущей формулой у нас получится

$$\rho(n, \text{mult}(a, b)) \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \leq \rho(n, \text{mult}(a, b)).$$

С другой стороны, ранее мы вывели формулу

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \rho(n, \text{mult}(a, b)) < \text{mult}(a, b);$$

тем самым мы получаем

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \rho(n, \text{mult}(a, b)) = 0$$

и, значит, ввиду эквивалентности

$$a \mid b \sim \rho(b, a) = 0,$$

имеем

$$n \neq 0 \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \mid n.$$

Наконец, из-за

$$\text{mult}(a, b) \mid 0,$$

здесь еще можно будет опустить в посылке член $n \neq 0$, так что в итоге мы приходим к формуле

$$a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \mid n.$$

Итак, мы получили для функции $\text{mult}(a, b)$ следующие формулы:

$$a \mid \text{mult}(a, b) \ \& \ b \mid \text{mult}(a, b),$$

$$a \mid n \ \& \ b \mid n \rightarrow \text{mult}(a, b) \mid n.$$

Формулы эти достаточным образом характеризуют рассматриваемую нами функцию.

Для дальнейшего нам потребуется также *наименьшее общее кратное конечной последовательности чисел*, задаваемой с помощью m последовательных значений какого-либо терма $t(a)$. Мы получим его с помощью следующего определения:

$$\text{mult}_x(t(x); m) = \mu_x(x \neq 0 \ \& \ \forall y(y < m \rightarrow t(y) \mid x)).$$

Из этого определения получаются формулы, совершенно аналогичные тем, которые мы получили выше для функции $\text{mult}(a, b)$, а именно

$$\forall y(y < m \rightarrow t(y) \neq 0) \rightarrow \text{mult}_x(t(x); m) \neq 0,$$

$$\forall y(y < m \rightarrow t(y) \mid \text{mult}_x(t(x); m)),$$

$$\forall y(y < m \rightarrow t(y) \mid n) \rightarrow \text{mult}_x(t(x); m) \mid n.$$

Вывод этих формул протекает аналогично выводу соответствующих формул для $\text{mult}(a, b)$; надо будет только индукцией по m вывести формулу, которая теперь заменяет формулу

$$a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 \rightarrow \exists x(x \neq 0 \ \& \ a \mid x \ \& \ b \mid x)$$

и которая записывается в виде

$$\forall y(y < m \rightarrow t(y) \neq 0) \rightarrow \exists x(x \neq 0 \ \& \ \forall y(y < m \rightarrow t(y) \mid x)).$$

В связи с этим выводом следует обратить особое внимание на тот факт, что с его помощью удастся *обойтись без использования рекурсивного определения*. Вывод этот протекает следующим образом. Если мы сокращенно обозначим доказываемую формулу посредством

$$\mathfrak{A}(m) \rightarrow \mathfrak{B}(m),$$

то формула $\mathfrak{B}(0)$, т. е.

$$\exists x(x \neq 0 \ \& \ \forall y(y < 0 \rightarrow t(y) \mid x)),$$

может быть получена из формулы

$$0' \neq 0 \ \& \ \forall y(y < 0 \rightarrow t(y) \mid 0');$$

а из $\mathfrak{B}(0)$ мы получим

$$\mathfrak{A}(0) \rightarrow \mathfrak{B}(0).$$

Теперь для того, чтобы применить схему индукции, нам остается только вывести формулу

$$(\mathfrak{A}(m) \rightarrow \mathfrak{B}(m)) \rightarrow (\mathfrak{A}(m') \rightarrow \mathfrak{B}(m')).$$

Так как $\mathfrak{A}(m)$ имеет вид

$$\forall y(y < m \rightarrow t(y) \neq 0),$$

то мы можем получить

$$\mathfrak{A}(m') \rightarrow \mathfrak{A}(m) \ \& \ t(m) \neq 0.$$

Поэтому достаточно вывести формулу

$$(\mathfrak{A}(m) \rightarrow \mathfrak{B}(m)) \rightarrow (\mathfrak{A}(m) \ \& \ t(m) \neq 0 \rightarrow \mathfrak{B}_1^*(m')),$$

для чего в свою очередь будет достаточно средствами исчисления высказываний вывести формулу

$$\mathfrak{B}(m) \ \& \ t(m) \neq 0 \rightarrow \mathfrak{B}(m').$$

Но эта формула, которая в подробной записи имеет вид

$$\exists x(x \neq 0 \ \& \ \forall y(y < m \rightarrow t(y) \mid x)) \ \& \ t(m) \neq 0$$

$$\rightarrow \exists x(x \neq 0 \ \& \ \forall y(y < m' \rightarrow t(y) \mid x)),$$

средствами исчисления предикатов получается из выводимой формулы

$$a \neq 0 \& \forall y (y < m \rightarrow t(y) \mid a) \& t(m) \neq 0 \\ \rightarrow a \cdot t(m) \neq 0 \& \forall y (y < m' \rightarrow t(y) \mid a \cdot t(m)).$$

Из получающихся таким образом формул для функции $\text{mult}_x(t(x); m)$ мы теперь можем вывести еще одну формулу:

$$\forall x (x < m \rightarrow \text{Prim}(t(x), a)) \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); m), a).$$

Эта формула также может быть получена индукцией по m . Мы опять сокращенно запишем ее в виде

$$\mathfrak{A}(m) \rightarrow \mathfrak{B}(m).$$

$\mathfrak{B}(0)$ представляет собой формулу

$$\text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); 0), a);$$

ее можно получить из выводимого равенства

$$\text{mult}_x(t(x); 0) = 1$$

в сочетании с формулой

$$\text{Prim}(1, a).$$

Тем самым оказывается выведенной и формула

$$\mathfrak{A}(0) \rightarrow \mathfrak{B}(0).$$

Теперь требуется еще вывести формулу

$$(\mathfrak{A}(m) \rightarrow \mathfrak{B}(m)) \rightarrow (\mathfrak{A}(m') \rightarrow \mathfrak{B}(m')).$$

Для этого, ввиду формулы

$$\mathfrak{A}(m') \rightarrow \mathfrak{A}(m) \& \text{Prim}(t(m), a),$$

достаточно вывести формулу

$$\mathfrak{B}(m) \& \text{Prim}(t(m), a) \rightarrow \mathfrak{B}(m'),$$

т. е. в подробной записи:

$$\text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); m), a) \& \text{Prim}(t(m), a) \\ \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); m'), a).$$

Эта формула может быть получена с помощью имеющихся для $\text{mult}_x(t(x); m)$ формул

$$\forall y (y < m \rightarrow t(y) \mid \text{mult}_x(t(x); m))$$

и

$$\forall y (y < m \rightarrow t(y) \mid n) \rightarrow \text{mult}_x(t(x); m) \mid n.$$

Действительно, из первой формулы мы получаем

$$\forall y (y < m' \rightarrow t(y) \mid (\text{mult}_x(t(x); m) \cdot t(m))).$$

Из второй формулы подстановкой m' вместо m и $\text{mult}_x(t(x); m) \cdot t(m)$ вместо n получаем формулу, которая вместе с предыдущей дает

$$\text{mult}_x(t(x); m') \mid \text{mult}_x(t(x); m) \cdot t(m).$$

В силу этой формулы вывод формулы

$$\text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); m), a) \& \text{Prim}(t(m), a) \rightarrow \\ \text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); m'), a)$$

сводится к применению формулы

$$\text{Prim}(k, a) \& \text{Prim}(l, a) \& r \mid k \cdot l \rightarrow \text{Prim}(r, a),$$

которую можно получить из формул

$$\text{Prim}(a, n) \& \text{Prim}(b, n) \rightarrow \text{Prim}(a \cdot b, n)$$

и

$$\text{Prim}(a, b) \& c \mid a \rightarrow \text{Prim}(c, b).$$

Ввиду сказанного, схема индукции дает нам искомую формулу

$$\forall x (x < m \rightarrow \text{Prim}(t(x), a)) \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(t(x); m), a).$$

Мы применим эту формулу некоторым специальным образом, взяв в качестве $t(x)$ терм $x' \cdot k + 1$ ¹⁾ и подставив вместо a терм $m' \cdot k + 1$. В результате этого мы получим формулу

$$\forall x (x < m \rightarrow \text{Prim}(x' \cdot k + 1, m' \cdot k + 1)) \rightarrow \\ \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; m), m' \cdot k + 1).$$

Посылку этой импликации можно заменить посредством

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k);$$

действительно, мы можем вывести формулу

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow \forall x (x < m \rightarrow \text{Prim}(x' \cdot k + 1, m' \cdot k + 1)).$$

Наметим вкратце план этого вывода. Достаточно будет вывести

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow (r < m \rightarrow \text{Prim}(r' \cdot k + 1, m' \cdot k + 1)).$$

Для этого мы будем исходить из двух выводимых формул

$$r < m \rightarrow \exists x (x \neq 0 \& r' + x = m')$$

и

$$s \neq 0 \& r' + s = m' \rightarrow \exists x (s = x' \& x < m).$$

¹⁾ Мы пользуемся записью $x' \cdot k + 1$ вместо $(x' \cdot k)'$ для уменьшения числа скобок.

Из второй формулы мы получим

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow (s \neq 0 \ \& \ r' + s = m' \rightarrow s \mid k),$$

а отсюда, в сочетании с первой формулой, получим

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow (r < m \rightarrow \exists x (x \mid k \ \& \ r' + x = m')).$$

После этого для вывода искомой формулы будет достаточно вывести формулу

$$\exists x (x \mid k \ \& \ r' + x = m') \rightarrow \text{Prim}(r' \cdot k + 1, m' \cdot k + 1),$$

которая в свою очередь дедуктивно равна формуле

$$a \mid k \ \& \ r' + a = m' \rightarrow \text{Prim}(r' \cdot k + 1, m' \cdot k + 1).$$

Но эта формула может быть получена следующим образом. Так как мы имеем

$$r' + a = m' \rightarrow r' \cdot k + 1 + a \cdot k = m' \cdot k + 1,$$

то выводима формула

$$r' + a = m' \rightarrow m' \cdot k + 1 \equiv a \cdot k \pmod{(r' \cdot k + 1)}.$$

Далее, из определения $\text{Prim}(a, b)$ мы получим

$$\text{Prim}(r' \cdot k + 1, k)$$

и

$$\text{Prim}(k, r' \cdot k + 1),$$

а также

$$a \mid k \rightarrow \text{Prim}(a, r' \cdot k + 1);$$

две последние формулы совместно друг с другом дают

$$a \mid k \rightarrow \text{Prim}(a \cdot k, r' \cdot k + 1).$$

Основываясь на приводившейся выше формуле

$$r' + a = m' \rightarrow m' \cdot k + 1 \equiv a \cdot k \pmod{(r' \cdot k + 1)},$$

мы теперь можем получить

$$a \mid k \ \& \ r' + a = m' \rightarrow \text{Prim}(m' \cdot k + 1, r' \cdot k + 1),$$

а отсюда и требующуюся нам формулу

$$a \mid k \ \& \ r' + a = m' \rightarrow \text{Prim}(r' \cdot k + 1, m' \cdot k + 1).$$

Тем самым формула

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; m), m' \cdot k + 1)$$

оказывается выведенной.

Наконец покажем, как при помощи функции $\mu_x A(x)$ может быть определен максимум значений какого-либо терма $t(a)$ для $a < n$. Соответствующее определение записывается в виде

$$\max_{x < n} t(x) = \mu_x \forall y (y < n \rightarrow t(y) \leq x).$$

В дальнейшем от этой функции нам потребуется лишь то ее свойство, которое изображается формулой

$$\forall y (y < n \rightarrow t(y) \leq \max_{x < n} t(x)).$$

Формулу эту мы можем получить, применив формулу (μ_1) в сочетании с формулой

$$\exists x \forall y (y < n \rightarrow t(y) \leq x),$$

которая выводится индукцией по n .

§ 3. Сведение примитивных рекурсий к явным определениям посредством функции $\mu_x A(x)$ на основе аксиом системы (Z)

1. Эвристический подход. Теперь мы продвинулись настолько, что можем показать, каким образом с помощью функции $\mu_x A(x)$ всякое рекурсивное определение может быть заменено подходящим явным определением, в котором в качестве основных функций кроме штрих-функции используются только сложение и умножение. Рекурсивные определения вводятся, как мы помним, в определенной очередности, и функции, введенные к настоящему моменту, могут быть использованы в последующих рекурсивных определениях. Наша замена рекурсивных определений явными также будет протекать шаг за шагом с учетом этой очередности. Все дело теперь сводится к тому, чтобы показать, что если до определенного места рекурсивные определения — не считая таковых для сложения и умножения, которые в системе (Z) берутся в качестве аксиом, — уже заменены явными определениями, то и непосредственно следующее за ними рекурсивное определение также может быть заменено явным. Пусть эта очередная рекурсия (здесь речь идет только о рекурсиях в узком смысле слова, т. е. о примитивных рекурсиях) имеет вид ¹⁾

$$\varphi(a, \dots, k, 0) = a(a, \dots, k),$$

$$\varphi(a, \dots, k, n') = b(a, \dots, k, n, \varphi(a, \dots, k, n)).$$

¹⁾ Согласно ранее доказанному (гл. VII, с. 396), мы могли бы здесь ограничиться рекурсиями с не более чем одним параметром, но наше рассуждение от этого не стало бы проще.

Мы можем здесь считать, что входящие в $a(a, \dots, k)$ и в $b(a, \dots, k, n, m)$ рекурсивные функции уже заменены соответствующими термами, так что правые части обоих равенств, если не считать функции f и сокращенных обозначений (т. е. явно определенных символов), не содержат никаких символов, кроме функциональных знаков a' , $a + b$, $a \cdot b$, символа $\mu_x A(x)$ и логических символов [которые могут, например, встречаться внутри какого-либо выражения $\mu_x \mathcal{A}(x)$].

Задача теперь заключается в том, чтобы найти такой терм $f(a, \dots, k, n)$, что для него выводимы формулы

$$f(a, \dots, k, 0) = a(a, \dots, k)$$

и

$$f(a, \dots, k, n') = b(a, \dots, k, n, f(a, \dots, k, n)).$$

Здесь в записи термов параметры $a, \dots, k$, можно всюду опустить, так что эти равенства могут быть записаны просто в виде ¹⁾

$$f(0) = a,$$

$$f(n') = b(n, f(n)).$$

Сначала мы изложим основные идеи решения этой задачи. Мы будем следовать Дедекинду, который в своем сочинении «Was sind und was sollen die Zahlen?» впервые показал разрешимость рекурсивных равенств, рассматриваемых как определяющие равенства для вводимой в рассмотрение функции, не пользуясь наглядными соображениями. Его доказательство заключается в том, что сначала он показывает, что для каждого числа n имеется функция $f_n(a)$, обладающая тем свойством, что

$$f_n(0) = a$$

и что для всякого числа $x < n$

$$f_n(x') = b(x, f_n(x)).$$

Доказательство это производится индукцией по n . Далее он устанавливает, что указанными условиями значение $f_n(x)$ однозначно образом определяется для всех $x \leq n$, так что если $x \leq n$ и $x \leq m$, то

$$f_n(x) = f_m(x).$$

¹⁾ Требование явно указывать параметры в схеме рекурсии проистекает — по крайней мере в случае простейшей схемы рекурсии — исключительно от того, что для функциональных знаков мы условились явно выписывать все их аргументы. То, что в левых частях рекурсивных равенств стоит вновь вводимый функциональный знак с соответствующими аргументами, а не произвольные термы с теми же самыми переменными, является существенной особенностью вида нашей схемы рекурсии.

Отсюда следует, что функция

$$f(n) = f_n(n)$$

удовлетворяет этим рекурсивным равенствам при всех значениях аргумента.

Это доказательство может быть проведено чисто формальным образом, но не в рассматриваемом нами формализме, а в логическом исчислении «второй ступени», т. е. с использованием связанных функциональных переменных (или, вместо этого, связанных формульных переменных, или соответственно переменных для множеств). Действительно, ведь нам требуется выразить некоторое утверждение, говорящее о *существовании функции*, обладающей определенными свойствами.

Но эта трудность может быть обойдена. Действительно, каждую из функций $f_n(x)$ нам нужно рассматривать только для значений аргумента от 0 до n ; поэтому существование функции $f_n(x)$ со свойством

$$f_n(0) = a \ \& \ \forall x (x < n \rightarrow f_n(x') = b(x, f_n(x)))$$

эквивалентно существованию такой $(n + 1)$ -членной числовой последовательности

$$a_0, a_1, \dots, a_n,$$

что $a_0 = a$ и для каждого индекса $k < n$ выполняется соотношение

$$a_k = b(k, a_k).$$

С другой стороны, мы знаем, что конечные числовые последовательности могут быть перечислены, т. е. взаимно однозначно сопоставлены с числами. В рекурсивной арифметике мы рассматривали перечисление, которое основывается на представлении чисел в виде произведения степеней простых чисел. В этом перечислении последовательности

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

соответствует число

$$\mathcal{Q}_0^{a_0} \cdot \mathcal{Q}_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \mathcal{Q}_n^{a_n},$$

где $\mathcal{Q}_0$ представляет собой число 2, а $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ суть n первых нечетных простых чисел. Обратно, если мы будем исходить из числа

$$m = \mathcal{Q}_0^{a_0} \cdot \dots \cdot \mathcal{Q}_n^{a_n},$$

то соответствующая последовательность

$$a_0, \dots, a_n$$

будет изображаться при помощи введенной в рекурсивной арифметике функции $v(m, k)$ последовательностью

$$v(m, 0), \dots, v(m, n).$$

А существование числовой последовательности $a_0, \dots, a_n$ с искомым свойством изобразится при помощи формулы

$$\exists x [v(x, 0) = a \ \& \ \forall y (y < n \rightarrow v(x, y') = b(y, v(x, y)))]$$

существованием определенным образом устроенного числа. Этот способ позволяет преобразовать рассуждение Дедекинда таким образом, что в его формализации не будет встречаться никаких других переменных, кроме числовых ¹⁾.

И все же это еще не приводит нас к желаемой цели. Действительно, в формализме системы (Z) в нашем распоряжении нет функции $v(m, k)$. В рекурсивной арифметике эта функция определяется при помощи ряда рекурсий ²⁾. Если мы попробуем при помощи функции $\mu_x A(x)$ исключить эти рекурсии, не считая рекурсий для сложения и умножения, которые в системе (Z) являются допустимыми, то заметим, что для некоторых из них это удастся без труда; но остаются рекурсии для двух функций

$$a^n \text{ и } \wp_n,$$

для которых в рамках системы (Z) не известно никакого явного определения (которое не использовало бы общего способа замены схемы рекурсии явным определением, который здесь как раз и должен быть построен).

2. Формальная реализация; возможность обобщения этого метода. Вследствие этого мы должны пытаться каким-нибудь иным способом изобразить существование числовой последовательности $a_0, \dots, a_n$ с рассматриваемым свойством посредством экзистенциального высказывания о числах. Выход из этого положения удастся найти на основе следующего замечания Гёделя ³⁾: если число l выбрать таким образом, чтобы оно делилось на все числа от 1 до n , то числа

$$1 \cdot l + 1, 2 \cdot l + 1, \dots, n \cdot l + 1, (n + 1) \cdot l + 1$$

будут попарно взаимно простыми и потому можно будет найти такое число m , что будут иметь место сравнения

$$m \equiv a_k \pmod{(k + 1) \cdot l + 1} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

¹⁾ Возможность такого преобразования, вероятно, впервые была замечена Дж. фон Нейманом.

²⁾ См. с. 393—395.

³⁾ См. доказательство теоремы VII в его работе: Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. — Monatsh. Math. Phys., 1931, 38, № 1.

Если же l будет, кроме того, выбрано не меньше наибольшего из чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$, то будут выполняться неравенства

$$a_k < (k + 1) \cdot l + 1$$

и, значит, a_k будет остатком от деления m на $(k + 1) \cdot l + 1$. Тем самым последовательность $a_0, \dots, a_n$ будет изображаться последовательностью остатков от деления m на числа

$$1 \cdot l + 1, 2 \cdot l + 1, \dots, (n + 1) \cdot l + 1$$

Такое изображение оказывается возможным для любой последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n$. В связи с этим существование последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n$, удовлетворяющей условиям

$$a_0 = a, \quad a_k = b(k, a_k) \quad \text{для всех } k < n,$$

оказывается равносильным существованию таких чисел m и l , что

$$\rho(m, l + 1) = a$$

и что для каждого числа k от 0 до $(n - 1)$

$$\rho(m, k' \cdot l + 1) = b(k, \rho(m, k' \cdot l + 1)).$$

Утверждение о существовании таких чисел m и l мы можем изобразить и в нашем формализме, опираясь на сформулированное нами явное определение функции $\rho(a, b)$, а именно, при помощи формулы

$$\exists x \exists y [\rho(x, y + 1) = a \ \& \ \forall z (z < n \rightarrow \rho(x, z' \cdot y + 1) = b(z, \rho(x, z' \cdot y + 1))],$$

которую мы сокращенно обозначим посредством $\mathfrak{A}(n)$. Теперь задача заключается в том, чтобы вывести эту формулу и после этого построить некоторый терм $f(n)$, для которого можно будет доказать формулы

$$f(0) = a$$

$$f(n') = b(n, f(n')).$$

Вывод ¹⁾ формулы $\mathfrak{A}(n)$ может быть проведен индукцией по n . Формула $\mathfrak{A}(0)$ переводима в

$$\exists x \exists y (\rho(x, y + 1) = a),$$

а эту последнюю можно получить из равенства

$$\rho(a, a + 1) = a.$$

¹⁾ Читатель, не придающий большого значения проверке этого несколько утомительного вывода, может перейти к с. 507.

которое получается из формулы

$$a \equiv r \pmod{b} \& r < b \rightarrow r = \rho(a, b).$$

Для того чтобы получить формулу

$$\mathfrak{A}(n) \rightarrow \mathfrak{A}(n'),$$

мы сначала *индукцией по a* выведем формулу

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(x'; n') \mid k \& a \leq n \\ \rightarrow \exists x \forall y (y \leq a \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}). \end{aligned}$$

Эта формула имеет вид

$$\mathfrak{U} \& a \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(a),$$

причем переменная a в $\mathfrak{U}$ не входит.

Формулу $\mathfrak{B}(0)$, а тем самым и формулу

$$\mathfrak{U} \& 0 \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(0),$$

можно немедленно получить из формулы

$$b \equiv b \pmod{c}.$$

Теперь, для того чтобы применить индукцию, мы должны будем вывести формулу

$$(\mathfrak{U} \& a \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(a)) \rightarrow (\mathfrak{U} \& a' \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(a')),$$

а для этого достаточно будет вывести формулу

$$\mathfrak{U} \& a < n \rightarrow (\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a')).$$

так как от этой последней с помощью исчисления высказываний и формул для $<$ легко перейти к предшествующей ей формуле.

Таким образом, речь идет о выводе формулы

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(x'; n') \mid k \& a < n \rightarrow \\ \{ \exists x \forall y (y \leq a \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \rightarrow \\ \exists x \forall y (y \leq a' \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \}. \end{aligned}$$

Искомый вывод может быть получен с помощью ранее ¹⁾ выведенной формулы

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; m), m' \cdot k + 1).$$

Если мы подставим в нее a' вместо m и воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} r < a' \& a < n \rightarrow r < n', \\ r < n' \rightarrow r' \mid \text{mult}_x(x'; n'), \\ r' \mid \text{mult}_x(x'; n') \& \text{mult}_x(x'; n') \mid k \rightarrow r' \mid k, \end{aligned}$$

¹⁾ См. с. 498.

то придем к формуле

$$\text{mult}_x(x'; n') \mid k \& a < n \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; a'), a'' \cdot k + 1).$$

Возьмем формулу

$$\text{Prim}(a, b) \rightarrow \exists z (z \equiv k \pmod{a} \& z \equiv l \pmod{b}),$$

из которой с помощью подстановок получим

$$\begin{aligned} \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; a'), a'' \cdot k + 1) \rightarrow \\ \exists z (z \equiv c \pmod{\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; a')} \& \\ z \equiv \rho(m, a'' \cdot l + 1) \pmod{(a'' \cdot k + 1)}); \end{aligned}$$

кроме того, с помощью без труда получающихся формул

$$\begin{aligned} b \equiv c \pmod{\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; a')} \rightarrow \\ \forall y (y \leq a \rightarrow b \equiv c \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \forall y (b \equiv c \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \& c \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)} \\ \rightarrow b \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \} \end{aligned}$$

мы выведем формулу

$$\begin{aligned} \forall y (y \leq a \rightarrow c \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \& \\ b \equiv c \pmod{\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; a')} \& \\ b \equiv \rho(m, a'' \cdot l + 1) \pmod{(a'' \cdot k + 1)} \\ \rightarrow \forall y (y \leq a' \rightarrow b \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}). \end{aligned}$$

Объединив полученные нами формулы, мы придем к

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(x'; n') \mid k \& a < n \rightarrow \\ \{ \exists x \forall y (y \leq a \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \rightarrow \\ \exists x \forall y (y \leq a' \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \}; \end{aligned}$$

но это как раз и есть та формула, которую мы сокращенно записали в виде

$$\mathfrak{U} \& a < n \rightarrow (\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a')).$$

Из нее мы получим также и формулу

$$(\mathfrak{U} \& a \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(a)) \rightarrow (\mathfrak{U} \& a' \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(a')).$$

Тем самым индукцией по a мы получаем формулу

$$\mathfrak{U} \& a \leq n \rightarrow \mathfrak{B}(a),$$

т. е.

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(x'; n') \mid k \& a \leq n \rightarrow \\ \exists x \forall y (y \leq a \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}). \end{aligned}$$

Если мы подставим в нее n вместо a , то в посылке можно будет опустить член $n \leq n$ и таким образом мы получим

$$\text{mult}_x(x'; n') \mid k \rightarrow \exists x \forall y (y \leq n \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}).$$

Теперь применим еще раз формулу

$$\forall x (x < m \rightarrow x' \mid k) \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; m), m' \cdot k + 1),$$

подставив на этот раз n' вместо m . Воспользовавшись снова формулами

$$r < n' \rightarrow r' \mid \text{mult}_x(x'; n')$$

и

$$r' \mid \text{mult}_x(x'; n') \& \text{mult}_x(x'; n') \mid k \rightarrow r' \mid k,$$

мы получим формулу

$$\text{mult}_x(x'; n') \mid k \rightarrow \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; n'), n'' \cdot k + 1).$$

Потом возьмем (см. с. 505) формулы

$$\begin{aligned} \text{Prim}(\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; n'), n'' \cdot k + 1) \rightarrow \\ \exists z (z \equiv c \pmod{\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; n')}) \\ \& z \equiv b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1)) \pmod{(n'' \cdot k + 1)}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b \equiv c \pmod{\text{mult}_x(x' \cdot k + 1; n')} \rightarrow \\ \forall y (y \leq n \rightarrow b \equiv c \pmod{(y' \cdot k + 1)}). \end{aligned}$$

Подставив в них $\rho(m, y' \cdot l + 1)$ вместо c и добавив к ним предыдущую формулу, мы получим в итоге формулу

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(x'; n') \mid k \rightarrow \\ \exists x [\forall y (y \leq n \rightarrow x \equiv \rho(m, y' \cdot l + 1) \pmod{(y' \cdot k + 1)}) \& \\ x \equiv b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1)) \pmod{(n'' \cdot k + 1)}]. \end{aligned}$$

Воспользуемся, кроме того, формулой

$$a \equiv r \pmod{b} \& r < b \rightarrow r = \rho(a, b);$$

если мы подставим в нее $c' \cdot k + 1$ вместо b , то, используя формулу

$$k < c' \cdot k + 1,$$

получим формулу

$$a \equiv r \pmod{(c' \cdot k + 1)} \& r \leq k \rightarrow r = \rho(a, c' \cdot k + 1).$$

Объединив эту формулу с полученной ранее, а также с формулой

$$\forall y (y \leq n \rightarrow \rho(m, y' \cdot l + 1) \leq \max_{x < n'} \rho(m, x' \cdot l + 1))$$

мы придем к формуле

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(x'; n') \mid k \& \max_{x < n'} \rho(m, x' \cdot l + 1) \leq k \& b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1)) \leq k \\ \rightarrow \exists x \forall y (y \leq n \rightarrow \rho(x, y' \cdot k + 1) = \rho(m, y' \cdot l + 1)) \\ \& \rho(x, n'' \cdot k + 1) = b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1)). \end{aligned}$$

Опираясь на выводимую формулу

$$\exists u (\text{mult}_x(x'; n') \mid u \& \max_{x < n'} \rho(m, x' \cdot l + 1) \leq u \&$$

$$b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1)) \leq u),$$

мы перейдем от этой формулы к формуле

$$\begin{aligned} \exists u \exists x (\forall y (y \leq n \rightarrow \rho(x, y' \cdot u + 1) = \rho(m, y' \cdot l + 1)) \& \\ \rho(x, n'' \cdot u + 1) = b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1))); \end{aligned}$$

из этой формулы мы сначала получим формулу

$$\begin{aligned} \exists x \exists u (\rho(x, u + 1) = \rho(m, l + 1) \\ \& \forall z (z' \leq n \rightarrow \rho(x, z'' \cdot u + 1) = \rho(m, z'' \cdot l + 1)) \\ \& \forall z (z < n \rightarrow \rho(x, z' \cdot u + 1) = \rho(m, z' \cdot l + 1)) \\ \& \rho(x, n' \cdot u + 1) = \rho(m, n' \cdot l + 1) \\ \& \rho(x, n'' \cdot u + 1) = b(n, \rho(m, n' \cdot l + 1))), \end{aligned}$$

а отсюда, далее, получим

$$\begin{aligned} \rho(m, l + 1) = a \& \forall z (z < n \rightarrow \rho(m, z'' \cdot l + 1) = \\ b(z, \rho(m, z' \cdot l + 1))) \rightarrow \exists x \exists u (\rho(x, u + 1) = a \\ \& \forall z (z < n' \rightarrow \rho(x, z'' \cdot u + 1) = b(z, \rho(x, z' \cdot u + 1)))). \end{aligned}$$

А эта формула с помощью исчисления предикатов немедленно дает формулу

$$\mathfrak{A}(n) \rightarrow \mathfrak{A}(n'),$$

вывод которой мы и стремились получить.

После этого индукцией по n может быть получена формула $\mathfrak{A}(n)$, т. е. формула

$$\begin{aligned} \exists x \exists y [\rho(x, y + 1) = a \& \forall z (z < n \rightarrow \rho(x, z'' \cdot y + 1) = \\ b(z, \rho(x, z' \cdot y + 1)))]]. \end{aligned}$$

Если мы теперь образуем терм

$$\begin{aligned} \mu_x \exists y [\rho(x, y + 1) = a \& \forall z (z < n \rightarrow \rho(x, z'' \cdot y + 1) = \\ b(z, \rho(x, z' \cdot y + 1)))]], \end{aligned}$$

который для краткости обозначим посредством $\mathfrak{h}(n)$ ¹⁾, то, применив формулу (μ_1) в сочетании с доказанной формулой $\mathfrak{A}(n)$, мы получим

$$\exists y [\rho(\mathfrak{h}(n), y+1) = a \& \forall z (z < n \rightarrow \rho(\mathfrak{h}(n), z'' \cdot y + 1) = \mathfrak{b}(z, \rho(\mathfrak{h}(n), z^{\mathfrak{e}} \cdot y + 1)))].$$

Опираясь на эту формулу и применяя к терму

$$\mu_y [\rho(\mathfrak{h}(n), y+1) = a \& \forall z (z < n \rightarrow \rho(\mathfrak{h}(n), z'' \cdot y + 1) = \mathfrak{b}(z, \rho(\mathfrak{h}(n), z' \cdot y + 1)))],$$

который мы сокращенно обозначим посредством $\mathfrak{f}(n)$, формулу (μ_1) , мы получим следующие две формулы:

$$\begin{aligned} \rho(\mathfrak{h}(n), \mathfrak{f}(n)+1) &= a, \\ a < n \rightarrow \rho(\mathfrak{h}(n), a' \cdot \mathfrak{f}(n)+1) &= \mathfrak{b}(a, \rho(\mathfrak{h}(n), a' \cdot \mathfrak{f}(n)+1)). \end{aligned}$$

Тем самым мы теперь близки к поставленной цели — нахождению терма $\mathfrak{f}(n)$, для которого выводимы равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(0) &= a, \\ \mathfrak{f}(n') &= \mathfrak{b}(n, \mathfrak{f}(n)). \end{aligned}$$

В самом деле, если обозначить $\rho(\mathfrak{h}(n), a' \cdot \mathfrak{f}(n)+1)$ посредством $\mathfrak{r}(n, a)$, то обе полученные нами формулы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(n, 0) &= a, \\ a < n \rightarrow \mathfrak{r}(n, a') &= \mathfrak{b}(a, \mathfrak{r}(n, a)). \end{aligned}$$

Если в первую из этих формул мы подставим 0 вместо n , а во вторую n' вместо n и n вместо a , а затем опустим посылку $n < n'$, то получим²⁾ равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(0, 0) &= a, \\ \mathfrak{r}(n', n') &= \mathfrak{b}(n, \mathfrak{r}(n', n)). \end{aligned}$$

Кроме того, во втором равенстве вместо $\mathfrak{r}(n', n)$ здесь можно написать $\mathfrak{r}(n, n)$. Действительно, равенство

$$\mathfrak{r}(n', n) = \mathfrak{r}(n, n)$$

может быть выведено следующим образом.

¹⁾ Мы пользуемся здесь знаком для сокращения, так как рассматриваемый терм уже сам содержит обозначения $a, \mathfrak{b}(\cdot, \cdot)$, не входящие в наш формализм.

²⁾ Мы предполагаем здесь, что переменная a , так же как и n , не входит ни в a , ни в $\mathfrak{b}(k, l)$. Подходящим выбором переменных мы всегда можем удовлетворить этому условию. То же самое в дальнейшем будет предполагаться и относительно m .

Из приведенных выше двух формул для $\mathfrak{r}(n, a)$ мы можем получить

$$\mathfrak{r}(m, 0) = \mathfrak{r}(n, 0)$$

и

$$a < m \& a < n \rightarrow (\mathfrak{r}(m, a) = \mathfrak{r}(n, a) \rightarrow \mathfrak{r}(m, a') = \mathfrak{r}(n, a')).$$

Вторая из этих формул дает нам, далее,

$$\begin{aligned} (a \leq m \& a \leq n \rightarrow \mathfrak{r}(m, a) = \mathfrak{r}(n, a)) \\ \rightarrow (a' \leq m \& a' \leq n \rightarrow \mathfrak{r}(m, a') = \mathfrak{r}(n, a')), \end{aligned}$$

так что индукцией по a мы получим формулу

$$a \leq m \& a \leq n \rightarrow \mathfrak{r}(m, a) = \mathfrak{r}(n, a).$$

Если мы подставим в нее n вместо a и n' вместо m , то можно будет опустить посылку

$$n \leq n' \& n \leq n$$

и тогда получится

$$\mathfrak{r}(n', n) = \mathfrak{r}(n, n).$$

Таким образом, мы пришли к равенствам

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(0, 0) &= a, \\ \mathfrak{r}(n', n') &= \mathfrak{b}(n, \mathfrak{r}(n, n)). \end{aligned}$$

В соответствии со сказанным, терм $\mathfrak{r}(n, n)$ обладает нужными нам свойствами. Мы можем взять его в качестве $\mathfrak{f}(n)$, и тогда будут выводимы равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(0) &= a, \\ \mathfrak{f}(n') &= \mathfrak{b}(n, \mathfrak{f}(n)). \end{aligned}$$

Заметим, что выражения a и $\mathfrak{b}(n, m)$ здесь могут содержать в качестве параметров какие-либо свободные переменные; эти последние входят тогда в термы $\mathfrak{h}(n)$ и $\mathfrak{f}(n)$, а тем самым и в $\mathfrak{f}(n)$.

Тем самым мы показали, что в рамках системы (Z) при добавлении функции $\mu_x A(x)$ и относящихся к ней формул рекурсивные определения могут быть сведены к явным.

Применимость этого метода не ограничивается рассмотренным случаем примитивно рекурсивных функций. Напротив, совершенно аналогичным образом при помощи функции $\mu_x A(x)$ к явным определениям могут быть сведены и рекурсии более сложных типов. Так, например, «перекрестные» рекурсивные равенства для функции Аккермана

$$\begin{aligned} \xi(a, b, 0) &= a + b, \\ \xi(a, 0, n') &= \beta(n, 1) + a \cdot \text{sgn}(\delta(n)), \\ \xi(a, b', n') &= \xi(a, \xi(a, b, n'), n) \end{aligned}$$

(здесь b и n являются выделенными переменными рекурсии, в то время как a выступает только в роли параметра) могут быть разрешены при помощи некоторого терма $\bar{f}(m, n)$, для которого в (Z) удастся вывести равенства

$$\begin{aligned}\bar{f}(b, 0) &= a + b, \\ \bar{f}(0, n') &= \beta(n, 1) + a \cdot \text{sgn}(\delta(n)), \\ \bar{f}(b', n') &= \bar{f}(\bar{f}(b, n'), n).\end{aligned}$$

Правда, доказательство этого факта нельзя непосредственно извлечь из того метода, с помощью которого мы рассмотрели простейший тип рекурсии, потому что здесь добавляется трудность, заключающаяся в том, что в то время как в случае примитивной рекурсии набор тех значений аргумента a , для которых при рекурсивном вычислении $\bar{f}(n)$ требуется найти значение $\bar{f}(a)$, состоит просто из последовательности чисел от 0 до n , в рассматриваемой рекурсии набор пар значений c, d таких, что значение $\bar{f}(c, d)$ фигурирует в рекурсивном вычислении $\bar{f}(b, n)$, зависит от пары значений b, n весьма сложным образом, через посредство некоторого рекурсивного закона.

Поэтому процедура установления разрешимости этих рекурсивных равенств оказывается значительно более запутанной. Однако, как показали фон Нейман и Гёдель, такое доказательство все-таки удастся получить ¹⁾.

§ 4. Устранимость характеристик (ι -символов)

1. Обобщение ι -правила; связь с первоначальным ι -правилом; термы $\iota_x^{(d)} A(x)$. Мы рассмотрели вопрос о формализации арифметики в рамках системы (Z) с присоединенной функцией $\mu_x A(x)$ и формулами (μ_1) , (μ_2) , (μ_3) и таким образом ознакомились с возможными способами применения функции $\mu_x A(x)$, а также получили некоторое представление о формальных возможностях, открывающихся в результате ее введения.

Функция $\mu_x A(x)$ в свою очередь определялась нами с помощью ι -символа ²⁾, а формулы (μ_1) , (μ_2) , (μ_3) мы вывели с помощью ι -правила. Тем самым связанные с функцией $\mu_x A(x)$ построения в конце концов сводятся к применениям ι -правила.

После этого подробного изложения способов применения ι -символа, т. е. формализации понятия «тот, который», мы теперь

¹⁾ Изложение этого доказательства по методу фон Неймана было приведено Р. Петер — которая первоначально пришла к этому доказательству другим способом — в ее работе: P e t e r R. Über die mehrfache Rekursion. — Math. Ann., 1936, 113, S. 489—527, § 5. (Вместо «перекрестной рекурсии» Р. Петер говорит о «многократной рекурсии», и это выражение с тех пор получило права гражданства.)

²⁾ См. с. 481.

вернемся к ранее ¹⁾ сформулированной теореме, в которой утверждается *устраанимость характеристик*.

Эта теорема относится к системе расширенного исчисления предикатов, т. е. исчисления предикатов с присоединенными аксиомами равенства. Она относится также к таким формальным системам, которые получаются из этого исчисления в результате добавления некоторых индивидуальных символов, предикатных символов, математических функциональных знаков вместе с относящимися к ним аксиомами, причем *относительно этих аксиом мы предполагаем, что они не содержат формульных переменных*. Такие аксиомы без формульных переменных (а также соответствующие им содержательные предложения) мы для краткости будем называть *собственными аксиомами*, в отличие от аксиом, выражающих условия более общего характера.

Однако наша теорема охватывает и тот случай, когда наряду с собственными аксиомами будет иметься *аксиома индукции* или если вместо нее будет в качестве правила фигурировать схема индукции.

Для всех формальных систем указанного типа теорема, которую мы должны будем доказать, выражает тот факт, что *в результате добавления ι -символа и ι -правила запас выводимых формул, не содержащих ι -символа, не расширяется*. Другими словами, *если формула рассматриваемой формальной системы оказывается выводимой в результате введения ι -правила, то она может быть выведена уже внутри этой системы, без присоединения ι -правила*.

Для доказательства этой теоремы формализм характеристик целесообразно несколько расширить. Наши соглашения относительно обращения с ι -символами, которых, как мы видели, вполне хватает для математического обихода, с точки зрения теории доказательств имеют определенные недостатки. Один из них вытекает непосредственно из того обстоятельства, что выражение $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ мы допускаем в качестве терма лишь тогда, когда для $\mathfrak{A}(c)$ выводимы соответствующие формулы единственности. Отсюда в частности следует, что свойство выражения быть термом не распознаваемо по его внешнему виду и может зависеть от доказуемости того или иного предложения ²⁾.

Еще одним недостатком ι -правила является то, что при добавлении этого правила перестает действовать теорема о дедукции. В самом деле, обычное доказательство этой теоремы здесь не проходит, так как схема ι -правила при добавлении соответствующей посылки к ее формулам не сохраняет своего вида, а также и не

¹⁾ См. с. 468.

²⁾ На это обстоятельство указывал, в частности, Р. Карнап в своей книге «Meaning and Necessity» (§ 7. Individual Descriptions). (Имеется русский перевод: К а р н а п Р. Значение и необходимость. — М., ИЛ, 1959; см. с. 72. — Прим. перев.)

переходит в такую схему, выводимость которой непосредственно усматривалась бы.

Мы сможем устранить оба эти недостатка, если, во-первых, условимся выражение $\iota_x \mathcal{U}(x)$ (с какой-либо связанной переменной x) считать термом всякий раз, когда $\mathcal{U}(x)$ является формулой, и, во-вторых, примем в качестве формальной аксиомы соответствующую схеме ι -правила формулу

$$\exists x A(x) \ \& \ \forall x \forall y (A(x) \ \& \ A(y) \rightarrow x = y) \rightarrow A(\iota_x A(x)).$$

Этой аксиоме мы можем придать и несколько более простой вид, используя то обстоятельство, что формула

$$\exists x A(x) \ \& \ \forall x \forall y (A(x) \ \& \ A(y) \rightarrow x = y)$$

переводима с использованием аксиомы равенства (J_2) в формулу

$$\exists x (A(x) \ \& \ \forall y (A(y) \rightarrow x = y)),$$

а эта последняя переводима с использованием обеих аксиом равенства в формулу

$$\exists x \forall y (A(y) \sim y = x).$$

В соответствии с этим, в качестве формальной « ι -аксиомы» мы можем взять формулу

$$[I] \quad \exists x \forall y (A(y) \sim y = x) \rightarrow A(\iota_x A(x)).$$

Исходя из этой аксиомы и воспользовавшись формулой

$$\exists x A(x) \ \& \ \forall x \forall y (A(x) \ \& \ A(y) \rightarrow x = y) \rightarrow \exists x \forall y (A(y) \sim y = x),$$

мы немедленно получим схему ι -правила в качестве производного правила.

Таким образом, с формальной точки зрения неограниченное допущение выражений $\iota_x \mathcal{U}(x)$ в качестве термов и придание формуле $[I]$ статуса формальной аксиомы являются *обобщением ι -правила*.

С другой стороны, это обобщение оказывается несущественным, поскольку с помощью исходного ι -правила мы можем ввести такие термы, которые будут играть роль ι -термов в смысле обобщенного ι -правила. Это удастся проделать способом, совершенно аналогичным тому, с помощью которого мы в арифметическом формализме при посредстве исходного ι -правила ввели символ $\mu_x A(x)$, для которого затем оказалось возможным вывести формулы (μ_1) , (μ_2) , (μ_3) ¹⁾.

Обозначим посредством $\mathcal{U}(A)$ формулу

$$\exists u \forall v (A(v) \sim v = u).$$

¹⁾ См. с. 481—482.

Применим ι -правило к формуле

$$(\mathcal{U}(A) \rightarrow A(a)) \ \& \ (\neg \mathcal{U}(A) \rightarrow a = d),$$

которую сокращенно обозначим посредством $\mathcal{G}(a)$. С помощью исчисления высказываний можно получить формулы

$$\mathcal{U}(A) \rightarrow (\mathcal{G}(a) \sim A(a)) \quad \text{и} \quad \neg \mathcal{U}(A) \rightarrow (\mathcal{G}(a) \sim a = d),$$

а отсюда, так как переменная a не входит в $\mathcal{U}(A)$, можно получить

$$\mathcal{U}(A) \rightarrow \forall z (\mathcal{G}(z) \sim A(z)) \quad \text{и} \quad \neg \mathcal{U}(A) \rightarrow \forall z (\mathcal{G}(z) \sim z = d).$$

Первая из этих формул вместе с формулой

$$\mathcal{U}(A) \rightarrow \exists x A(x) \ \& \ \forall x \forall y (A(x) \ \& \ A(y) \rightarrow x = y)$$

(которая, согласно сказанному выше, может быть получена с помощью исчисления предикатов и аксиом равенства) при помощи средств исчисления предикатов дает формулу

$$\mathcal{U}(A) \rightarrow \exists x \mathcal{G}(x) \ \& \ \forall x \forall y (\mathcal{G}(x) \ \& \ \mathcal{G}(y) \rightarrow x = y).$$

Вторая из них совместно с формулой

$$\exists x (x = d) \ \& \ \forall x \forall y (x = d \ \& \ y = d \rightarrow x = y),$$

которая получается с использованием аксиом равенства, аналогичным же образом дает формулу

$$\neg \mathcal{U}(A) \rightarrow \exists x \mathcal{G}(x) \ \& \ \forall x \forall y (\mathcal{G}(x) \ \& \ \mathcal{G}(y) \rightarrow x = y).$$

Две полученные таким образом формулы дают нам

$$\exists x \mathcal{G}(x) \ \& \ \forall x \forall y (\mathcal{G}(x) \ \& \ \mathcal{G}(y) \rightarrow x = y).$$

Тем самым мы вывели конъюнкцию обеих формул единственности для $\mathcal{G}(a)$. Поэтому, согласно ι -правилу, мы можем ввести выражение $\iota_x \mathcal{G}(x)$ в качестве термина и сверх того получить

$$\mathcal{G}(\iota_x \mathcal{G}(x)),$$

а следовательно, и

$$\mathcal{U}(A) \rightarrow A(\iota_x \mathcal{G}(x)), \quad \neg \mathcal{U}(A) \rightarrow \iota_x \mathcal{G}(x) = d.$$

Если мы теперь положим $\iota_x^{(d)} A(x) = \iota_x \mathcal{G}(x)$, т. е. введем определение

$$\iota_x^{(d)} A(x) = \iota_x ((\mathcal{U}(A) \rightarrow A(x)) \ \& \ (\neg \mathcal{U}(A) \rightarrow x = d)),$$

то полученные нами формулы перейдут в

$$\exists u \forall v (A(v) \sim v = u) \rightarrow A(\iota_x^{(d)} A(x)),$$

$$\neg \exists u \forall v (A(v) \sim v = u) \rightarrow \iota_x^{(d)} A(x) = d.$$

В силу первой из этих двух формул терм $\iota_x^{(d)}A(x)$ будет играть ту роль, которая *обобщенным ι -правилом* отводится терму $\iota_x A(x)$. Далее, для каждой формулы $\mathcal{A}(c)$ (не содержащей переменной x) $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x)$ также является термом, а формула

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}(\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x))$$

(с быть может требующимся переименованием переменных) является выводимой формулой.

В том случае, если формулы единственности для $\mathcal{A}(c)$ окажутся выводимыми, мы получим $\mathcal{A}(\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x))$ и (непосредственно с помощью ι -правила) $\mathcal{A}(\iota_x \mathcal{A}(x))$, а тем самым и $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x) = \iota_x \mathcal{A}(x)$. С другой стороны, если одна из формул единственности для $\mathcal{A}(c)$ окажется опровержимой, то мы получим $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x) = d$.

Что касается свободной переменной d , которая фигурирует в нашем рассуждении в качестве параметра, то вместо нее мы можем взять какой-либо индивидуальный символ, если в формальной системе, в которой мы вводим характеристики, такой символ содержится; тогда тем самым будет устранена зависимость от этого параметра. В противном случае, для того чтобы избежать нежелательных совпадений, мы возьмем вместо d такую свободную переменную, которая не будет встречаться в рассматриваемых нами выводах.

Содержательный смысл выражения $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x)$ заключается в следующем. Если $\mathcal{A}(c)$ представляет собой какой-нибудь предикат, а d — какой-нибудь объект индивидуальной области, то в том случае, если этот предикат выполняется в точности для одного объекта индивидуальной области, $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x)$ как раз и будет являться этим объектом; в противном случае $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x)$ будет представлять собой объект d .

Применительно к нашей цели, состоящей в доказательстве устранимости характеристик, проведенное нами рассмотрение дает следующий результат: *Если бы мы располагали способом, позволяющим устранять такие ι -термы, которые вводятся по первоначальному ι -правилу, то мы смогли бы устранить и применение ι -термов, вводимых на основании обобщенного ι -правила* (мы всюду предполагаем, что речь идет о выводах, заключительные формулы которых не содержат ι -символов). Действительно, в любом выводе, использующем обобщенное ι -правило, всякий встречающийся в нем терм $\iota_x \mathcal{A}(x)$ мы смогли бы заменить соответствующим термом $\iota_x^{(d)}\mathcal{A}(x)$, а этот терм мы могли бы ввести в соответствии с первоначальным ι -правилом; в самом деле, соответствующие формулы единственности могут быть получены из формул

$$\exists x \mathcal{U}(x), \quad \forall x \forall y (\mathcal{U}(x) \& \mathcal{U}(y) \rightarrow x = y),$$

выводимость которых была установлена ранее, путем подстановки $\mathcal{A}(c)$ вместо формульной переменной $A(c)$. Из преобразованного таким образом вывода ι -термы, согласно нашему предположению, могут быть устранены. Таким образом, устранимость ι -символов достаточно будет доказать для первоначальной версии ι -правила.

2. Россеровский подход и его упрощение, произведенное Хазенбегером; подстановка ι -термов; аксиома $\{\iota\}$; свойства рассматриваемых формальных систем. И все-таки для целей нашего доказательства оказывается выгодным воспользоваться такой формализацией характеристик, которая представляет собой нечто среднее между нашим первоначальным и обобщенным ι -правилами. Этот способ формализации характеристик, восходящий к Россеру¹⁾, заключается в том, что, хотя для каждой формулы $\mathcal{A}(c)$ (не содержащей связанной переменной x) выражение $\iota_x \mathcal{A}(x)$ и допускается в качестве терма, тем не менее возможность подстановки ι -термов вместо свободных индивидуальных переменных ограничивается такими термами, для которых соответствующие им формулы единственности оказываются выводимыми. Термы такого типа мы будем называть *собственными ι -термами*.

В этом случае, как и в случае обобщенного ι -правила, в качестве аксиомы мы возьмем формулу $[\iota]$:

$$\mathcal{A}(A) \rightarrow A(\iota_x A(x)),$$

а подстановку ι -термов формализуем с помощью аксиомы²⁾

$$[\iota, B] \quad \mathcal{A}(A) \rightarrow (\forall x B(x) \rightarrow B(\iota_x A(x))).$$

Пользуясь этой аксиомой и правилом подстановки вместо свободных индивидуальных переменных, ограниченными термами без ι -символов, можно произвести все те подстановки вместо свободных индивидуальных переменных, которые могут быть осуществлены, если за основу взять наше первоначальное ι -правило.

В самом деле, в первоначальном варианте ι -правила в подстановках вместо свободных индивидуальных переменных могут фигурировать только такие термы, которые либо не содержат ι -символов, либо являются собственными ι -термами, либо построены из собственных ι -термов с помощью функциональных знаков.

¹⁾ Rosser J. B. On the Consistency of Quine's «New Foundations for Mathematical Logic». — J. Symbolic Logic, 1939, 4, pp. 15—24. Это формальное изложение характеристик Россер проводит здесь в рамках определенного формализма и указывает точный метод устранения ι -символов из выводов формул, не содержащих этих символов.

²⁾ Вместо этих двух аксиом Россер, который не пользуется формульными переменными, берет аналогичные им схемы формул. Заметим, что если в основу рассмотрения положить обобщенное ι -правило, то формула $[\iota, B]$, и даже $\forall x B(x) \rightarrow B(\iota_x A(x))$, оказывается выводимой.

Для собственного ι -терма $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ формула $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ является выводимой (быть может, с переименованными переменными u и v); поэтому аксиома $[1, B]$ дает нам формулу

$$\forall x B(x) \rightarrow B(\iota_x \mathfrak{A}(x)).$$

Пусть теперь $\mathfrak{B}(c)$ — формула, в которую вместо переменной c требуется подставить терм $\iota_x \mathfrak{A}(x)$. (Мы предполагаем, что в результате этого не возникает коллизий между связанными переменными.) Предположим, что в $\mathfrak{B}(c)$ не входит переменная x . Тогда с помощью средств исчисления предикатов мы сможем перейти от $\mathfrak{B}(c)$ к $\forall x \mathfrak{B}(x)$. А эта формула вместе с ранее полученной формулой $\forall x B(x) \rightarrow B(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ при помощи подстановки $\mathfrak{B}(y)$ вместо именной формы $B(y)$ и с применением схемы заключения дает искомую формулу $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$. (Если бы переменная x входила в $\mathfrak{B}(c)$, то, может быть, потребовалось бы предпринять некоторые переименования.)

И наконец, что касается подстановки таких термов, которые построены из собственных ι -термов и функциональных знаков, то эти подстановки могут быть разбиты на подстановки термов без ι -символов и подстановки собственных ι -термов. Пусть, например, у нас имеется терм $\psi(\iota_x \mathfrak{A}(x), \varphi(\iota_y \mathfrak{B}(y)))$, где φ — какой-либо одноместный, а ψ — двуместный функциональный знак. Пусть $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ и $\iota_y \mathfrak{B}(y)$ — собственные ι -термы, и пусть требуется подставить терм $\psi(\iota_x \mathfrak{A}(x), \varphi(\iota_y \mathfrak{B}(y)))$ в формулу $\mathfrak{C}(c)$ вместо переменной c (снова предполагается, что при этом не возникнет никаких коллизий между связанными переменными). Тогда мы можем действовать следующим образом: выбрав какую-нибудь не входящую в $\mathfrak{C}(c)$ свободную переменную (например, b) и какую-нибудь не входящую ни в $\mathfrak{C}(c)$, ни в $\mathfrak{A}(c)$ свободную переменную (например, d), мы сначала подставим вместо c терм $\psi(b, \varphi(d))$, а затем в получившуюся формулу подставим вместо b собственный ι -терм $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ и, наконец, в полученную таким образом формулу вместо d подставим собственный ι -терм $\iota_y \mathfrak{B}(y)$.

Таким образом, мы видим, что с помощью аксиом Россера можно осуществить (в переведенном виде) все те выводы, которые оказываются возможными на основе обобщенного ι -правила. А потому, если у нас будет способ, позволяющий устранять характеристики, формализованные в соответствии с аксиомами Россера, то тем самым у нас будет и способ, позволяющий устранять применения ι -правила, а также, как мы выяснили, и способ для устранения обобщенного ι -правила.

Россеровская формализация характеристик теперь может быть упрощена путем объединения аксиом $[1]$ и $[1, B]$ в формулу

$$\{1\} \quad \mathfrak{U}(A) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow B(\iota_x A(x))).$$

В самом деле, подставив в эту формулу $A(c)$ вместо $B(c)$ ¹⁾ и используя выводимость формулы $\forall x (A(x) \rightarrow A(x))$, мы получим средствами исчисления высказываний формулу $[1]$; а формула $[1, B]$ получается из $\{1\}$ при помощи исчисления высказываний с использованием выводимой формулы $\forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$. С другой стороны, $\{1\}$ можно получить из $[1]$ и $[1, B]$, подставив в $[1, B]$ $A(c) \rightarrow B(c)$ вместо $B(c)$, что даст нам формулу

$$\mathfrak{U}(A) \rightarrow (\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(\iota_x A(x)) \rightarrow B(\iota_x A(x)))),$$

которая вместе с $[1]$ средствами исчисления высказываний дает формулу $\{1\}$.

На возможность такого объединения аксиом Россера в одну единственную аксиому указал Гисберт Хазенбегер, который разработал и во многих отношениях упростил предложенный Россером метод устранения ι -термов в применении к произвольным теориям, формализуемым в рамках исчисления предикатов с аксиомами равенства²⁾. В дальнейших рассуждениях мы по существу будем придерживаться данного им доказательства.

Наконец, для подготовки планируемого нами устранения ι -термов целесообразно методом возвратного переноса подстановок в исходные формулы исключить, как это делалось в гл. VI³⁾, подстановки вместо формульных переменных. Но этот метод должен ограничиться исключением подстановок вместо формульных переменных. Сами формульные переменные могут и не исключаться; они остаются для образования элементарных формул. Но вместо тех исходных формул, которые содержат формульные переменные, мы должны будем использовать соответствующие *схемы формул*.

Теперь напомним структуру тех формальных систем, для которых мы после проведенных приготовлений будем доказывать устранимость ι -символов.

Формулами их являются либо элементарные формулы, либо формулы, образованные из других формул при помощи символов

¹⁾ Подстановки вместо формульных переменных мы здесь не ограничиваем. Впрочем, формульные переменные вскоре будут исключены из рассмотрения.

²⁾ Эта работа «Der bestimmte Artikel im Prädikatenkalkül» (март 1952 г.) в печати не появлялась. Положенный в ней в основу изложения формализм расширенного исчисления предикатов отличается от формализма, приведенного в гл. IV и гл. V, не считая других незначительных различий, тем, что в нем нет подстановок вместо формульных переменных. Впрочем, Хазенбегер пользуется не формулой $\{1\}$, а дедуктивно равной ей (ввиду аксиом равенства) формулой

$$\forall x (A(x) \sim x = c) \ \& \ B(c) \rightarrow B(\iota_x A(x))$$

или соответствующей ей схемой формул.

³⁾ См. с. 275 и далее.

логики высказываний и кванторов. Внелогическими символами являются знак равенства и, быть может, какие-нибудь другие предикатные символы, а также индивидуальные символы и функциональные знаки. В качестве переменных в них имеются свободные и связанные индивидуальные переменные, а также, быть может, свободные формульные переменные. Всякая элементарная формула состоит либо из формульной переменной без аргумента, либо из формульной переменной с термами в качестве аргументов, либо из предикатного символа с термами в качестве аргументов. Терм есть либо свободная переменная, либо индивидуальный символ, либо функциональный знак с термами в качестве аргументов, либо ι -терм, т. е. терм вида $\iota_x \mathcal{A}(x)$, где $\mathcal{A}(x)$ — формула, содержащая свободную переменную x и не содержащая связанной переменной x .

В качестве исходных формул у нас имеются: 1) собственные аксиомы; 2) формулы, построенные по одной из следующих схем формул:

а) схемы тождественно истинных формул исчисления высказываний; формулы, построенные по схеме такого рода, мы будем называть формулами, истинными в логике высказываний;

б) схемы, соответствующие основным формулам (а) и (б) исчисления предикатов:

$$\forall x \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{A}(a), \quad \mathcal{A}(a) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x);$$

в) схема, соответствующая аксиоме равенства (J_2):

$$a = b \rightarrow (\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(b));$$

г) схема, соответствующая аксиоме $\{1\}$:

$$\exists x \forall y (\mathcal{A}(y) \sim y = x) \rightarrow (\forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x)) \rightarrow \mathcal{B}(\iota_x \mathcal{A}(x)));$$

д) быть может, схема, соответствующая аксиоме индукции ¹⁾:

$$\mathcal{A}(0) \& \forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{A}(x')) \rightarrow \mathcal{A}(a).$$

В качестве правил вывода у нас имеются: схема заключения, схемы (α) и (β) для кванторов всеобщности и существования, правило подстановки вместо свободных индивидуальных переменных термов, не содержащих ι -символов, и правило переименования связанных переменных.

Среди аксиом должна быть формула $a = a$, если она не является выводимой.

3. Определение редукции формулы и сведение требующегося доказательства к доказательству выводимости без ι -символов для формул, построенных по определенным схемам. Устранимость

¹⁾ Если рассматриваемая формальная система содержит схему индукции в качестве правила, то это правило (как показано в гл. VI, с. 324—330) может быть сведено к схеме формул, соответствующей аксиоме индукции.

ι -символов из выводов таких формул, которые сами ι -символов не содержат, будет устанавливаться таким образом, что каждой формуле $\mathcal{A}$ будет сопоставляться некоторая ее «редукция» $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ ¹⁾, которая является формулой без ι -символов и которая совпадает с $\mathcal{A}$ в том случае, если $\mathcal{A}$ является формулой без ι -символов. С учетом такого определения редукции провозглашенная нами устранимость будет доказана, если из каждого вывода формулы $\mathcal{E}$, осуществленного в формализме описанного типа, мы сможем извлечь вывод формулы $\mathcal{R}(\mathcal{E})$, не содержащий ι -символов. Этот факт будет установлен, если мы сможем показать, что: 1) редукция всякой исходной формулы может быть выведена без использования ι -символов; 2) если в применении какого-либо правила мы заменим посылки этого правила их редукциями, то из этих редукций можно будет без использования ι -символов вывести редукцию формулы, получаемой по этому правилу.

Теперь речь пойдет о том, чтобы ввести соответствующее понятие редукции формулы. С этой целью мы условимся, что редукция формулы, построенной из элементарных формул с помощью логических символов исчисления предикатов, будет в точности тем же самым способом строиться из редукций элементарных формул. Таким образом, редукцией формулы $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ будет $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \& \mathcal{R}(\mathcal{B})$, редукцией формулы $\neg \mathcal{A}$ будет $\neg \mathcal{R}(\mathcal{A})$; аналогично для $\vee$, $\rightarrow$ и $\sim$. Редукцией формулы $\forall x \mathcal{A}(x)$ будет $\forall x \mathcal{R}(\mathcal{A}(x))$, редукцией формулы $\exists x \mathcal{A}(x)$ будет $\exists x \mathcal{R}(\mathcal{A}(x))$ (здесь $\mathcal{R}(\mathcal{A}(x))$ означает выражение, которое получается из формулы $\mathcal{R}(\mathcal{A}(c))$ со свободной переменной c , не входящей в $\mathcal{A}(x)$, в результате замены c на x). Эти соглашения мы будем кратко называть *перестановочностью оператора редукции с логическими операциями*.

Теперь нам нужно еще дать определение редукции для случая элементарной формулы. Вследствие предъявляемых нами к определению редукции требований, редукция формулы без ι -символов должна будет совпадать с самой этой формулой. Элементарная формула, содержащая хотя бы одно вхождение ι -символа, представляет собой либо формульную переменную с аргументами, либо предикатный символ с аргументами. В обоих случаях эта элементарная формула может быть записана в виде $\mathcal{P}(\iota_{x_1} \mathcal{A}(x_1), \iota_{x_2} \mathcal{B}(x_2), \dots, \iota_{x_r} \mathcal{R}(x_r))$. Эта запись должна пониматься таким образом, что $\iota_{x_1} \mathcal{A}(x_1)$, $\iota_{x_2} \mathcal{B}(x_2)$, $\dots$, $\iota_{x_r} \mathcal{R}(x_r)$ суть различные ι -термы, внешние в этой элементарной формуле, т. е. не вложенные ни в какие другие ι -термы. Такого рода внешний ι -терм, входящий в элементарную формулу, не обязан быть непосредственным

¹⁾ Буква $\mathcal{R}$ в виде исключения обозначает здесь не формулу, а некоторую (метаматематическую) операцию.

аргументом формульной переменной или предикатного символа. Он может быть и аргументом какого-либо функционального знака. Далее, следует обратить внимание на то, что один и тот же ι -терм может входить в элементарную формулу как в качестве внешнего терма, так и в качестве вложенного в какой-нибудь другой. Так, терм $\iota_{x_1} \mathfrak{A}(x_1)$, который в рассматриваемой элементарной формуле встречается в качестве внешнего, может например, одновременно быть вложенным в $\iota_{x_2} \mathfrak{B}(x_2)$; такое вхождение *не будет учитываться* в нашей записи элементарной формулы. С другой стороны, один и тот же ι -терм в данной элементарной формуле может несколько раз встречаться в качестве внешнего терма; в этом случае он будет перечисляться в нашей записи только один раз. Так, $\mathfrak{B}(c)$ может иметь вид $c < c$, и тогда $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ будет представлять собой элементарную формулу $\iota_x \mathfrak{A}(x) < \iota_x \mathfrak{A}(x)$. Кроме того, следует подчеркнуть, что равными мы будем считать и такие ι -термы, которые отличаются друг от друга обозначением связанных переменных; таким образом, в нашем списке ι -термов $\iota_{x_1} \mathfrak{A}(x_1), \dots, \iota_{x_r} \mathfrak{R}(x_r)$ не должно быть двух таких, которые отличались бы друг от друга только обозначением связанных переменных. Так, элементарная формула $\iota_x \mathfrak{A}(x) < \iota_y \mathfrak{A}(y)$ должна записываться в виде

$$\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x)),$$

а не в виде

$$\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x), \iota_y \mathfrak{A}(y)).$$

Редукцией формулы

$$(*) \quad \mathfrak{B}(\iota_{x_1} \mathfrak{A}(x_1), \iota_{x_2} \mathfrak{B}(x_2), \dots, \iota_{x_r} \mathfrak{R}(x_r))$$

мы назовем формулу

$$\forall x_1 \dots \forall x_r (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x_1)) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(x_r)) \rightarrow \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_r)).$$

Правда, этим определением редукция формулы (*) непосредственно еще не указывается, поскольку в ней в качестве составных частей фигурируют редукции формул $\mathfrak{A}(c_1), \dots, \mathfrak{R}(c_r)$. Но эти формулы содержат меньше ι -символов, чем исходная элементарная формула, и, в силу перестановочности логических операций с оператором редукции, редукции этих формул оказываются построенными из редукций элементарных формул, которые содержат меньше ι -символов, чем рассматриваемая нами исходная элементарная формула. Таким образом, для нахождения редукций элементарных формул мы получаем некоторую *рекурсивную процедуру*, выполнение которой заканчивается за число шагов, не превосходящее числа ι -символов, содержащихся в этой элементарной

формуле. Обрыв процесса происходит тогда, когда мы доходим до элементарных формул без ι -символов, редукции которых, как мы знаем, совпадают с ними самими.

В итоге мы получаем некоторое определение редукции формулы, удовлетворяющее обоим поставленным требованиям: 1) редукция любой формулы не содержит ι -символов и 2) редукция формулы, не содержащей ι -символов, совпадает с ней самой. Кроме того, в силу данного нами определения, оператор редукции перестановочен с логическими операциями. А отсюда уже получается, что логическая структура редукции произвольной формулы совпадает со структурой самой этой формулы. Оператор редукции устроен, кроме того, таким образом, что всякая свободная переменная, являющаяся параметром какой-либо формулы, остается параметром и ее редукции.

Из этих замечаний мы можем сделать следующие выводы:

ни одна из собственных аксиом не претерпевает в результате редуцирования никаких изменений;

редукция формулы, истинной в логике высказываний, также истинна в логике высказываний;

редукция формулы одного из следующих видов:

$$\begin{aligned} \forall x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a), \quad \mathfrak{A}(a) \rightarrow \exists x \mathfrak{A}(x), \quad a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)), \\ \mathfrak{A}(0) \& \forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x')) \rightarrow \mathfrak{A}(a) \end{aligned}$$

сама является формулой такого же вида.

Что касается схемы заключения, схем (α) и (β) и правила подстановки вместо свободных индивидуальных переменных термов, не содержащих ι -символов, то при каждом применении любого из этих правил замена участвующих в этом применении формул их редукциями сохраняет вид применяемой схемы; таким образом, из редукции посылки (соответственно из редукций посылок) редукция результирующей формулы выводится по той же самой схеме. Кроме того, редукции двух формул, получающихся друг из друга переименованием связанных переменных, тоже путем переименования могут быть переведены друг в друга.

Поэтому, в соответствии с нашим планом доказательства устранимости ι -символов, остается только показать, что редукция формулы, полученной по схеме

$$\exists x \forall y (\mathfrak{A}(y) \sim y = x) \rightarrow (\forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)) \rightarrow \mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))),$$

выводима без использования ι -символов.

Мы установим несколько больше, а именно — выводимость без использования ι -символов редукций более сильных формул, получающихся по схеме

$$\exists x \forall y (\mathfrak{A}(y) \sim y = x) \rightarrow (\forall x (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)) \sim \mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))),$$

т.е. выводимость без использования ι -символов формул вида

$$\{N, A, B\} \quad \exists x \forall y (N(A(y)) \sim y = x) \rightarrow \\ (\forall x (N(A(x)) \rightarrow N(B(x))) \sim N(B(\iota_x A(x))),$$

из которых уже могут быть выведены редукции рассматриваемых нами формул.

4. Доказательство. Доказательство будет вестись индукцией по числу логических знаков в формуле $B(c)$ — с переменной c , не встречающейся ни в $A(x)$, ни в $B(x)$ («именная переменная»), — причем к логическим знакам мы причисляем здесь и ι -символы.

Если рассматриваемое число равно нулю, то $B(c)$ является элементарной формулой без ι -символов; тогда, по определению редукции, $N(B(\iota_x A(x)))$ представляет собой формулу $\forall x (N(A(x)) \rightarrow B(x))$, а $N(B(c))$ совпадает с $B(c)$. Следовательно, $\{N, A, B\}$ является формулой, истинной в логике высказываний.

Пусть теперь $B(c)$ — элементарная формула, в которую входит по меньшей мере один ι -символ. Рассмотрим сначала случай, когда переменная c не встречается ни в одном из входящих в $B(c)$ ι -термов. Тогда в формуле $B(\iota_x A(x))$ терм $\iota_x A(x)$ является внешним ι -термом. Кроме того, мы предположим, что терм $\iota_x A(x)$ не входит в $B(c)$. Тогда формула $B(\iota_x A(x))$ будет иметь вид

$$B(\iota_x A(x), \iota_{x_1} F_1(x_1), \dots, \iota_{x_f} F_f(x_f)),$$

где $B(c, c_1, \dots, c_f)$ — элементарная формула без ι -символов. Ее редукцией будет формула

$$\forall x \forall x_1 \dots \forall x_f (N(A(x)) \& N(F_1(x_1)) \& \dots \& N(F_f(x_f)) \rightarrow \\ B(x, x_1, \dots, x_f)).$$

Эта редукция может быть преобразована в формулу

$$\forall x (N(A(x)) \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_f (N(F_1(x_1)) \& \dots \& N(F_f(x_f)) \rightarrow \\ B(x, x_1, \dots, x_f)));$$

но эта последняя и есть в точности

$$\forall x (N(A(x)) \rightarrow N(B(x))).$$

Тем самым эквивалентность

$$\forall x (N(A(x)) \rightarrow N(B(x))) \sim N(B(\iota_x A(x)))$$

и тем более формула $\{N, A, B\}$ оказываются выводимыми без использования ι -символов.

В рассмотренных до сих пор случаях посылка формулы $\{N, A, B\}$ в процессе вывода этой формулы не играла никакой роли; мы не пользовались и индуктивным предположением о том,

что для всякой формулы B_1 с числом логических знаков, меньшим, чем у формулы B , без использования ι -символов выводима формула $\{N, A, B_1\}$. В дальнейших рассуждениях, напротив, и то, и другое найдет себе самое существенное применение.

В случае элементарной формулы $B(c)$ мы должны еще рассмотреть тот случай, когда один из входящих в $B(c)$ ι -термов совпадает (быть может, с точностью до обозначений связанных переменных) с термом $\iota_x A(x)$, а также случай, когда переменная c входит внутрь одного или нескольких ι -термов из числа $\iota_{x_i} F_i(x_i)$ ($i = 1, \dots, f$), что мы будем в этом случае отражать в записи $\iota_{x_i} F_i(x_i, c)$.

Обе указанные возможности могут реализоваться и одновременно. Но случай, когда какой-либо из термов $\iota_{x_i} F_i(x_i, c)$ совпадает с $\iota_x A(x)$, не входит в рассмотрение. Действительно, переменная c используется в записи $B(c)$ только в качестве именной переменной; и эта именная переменная должна выбираться отличной от всех остальных, в частности от переменных, входящих в $A(x)$.

Допустим сначала, что реализуется только первая из указанных возможностей. Тогда, если $\iota_{x_1} F_1(x_1), \dots, \iota_{x_f} F_f(x_f)$ — полный список различных (с точностью до обозначений связанных переменных) внешних ι -термов формулы $B(c)$, то мы можем считать, что $F_1(x_1)$ совпадает с $A(x)$. Тогда формула $\forall x (N(A(x)) \rightarrow N(B(x)))$ после элементарных преобразований ее средствами исчисления предикатов запишется в виде

$$(1) \quad \forall x \forall x_1 \dots \forall x_f (N(A(x)) \& N(A(x_1)) \& N(F_2(x_2)) \& \dots \\ \& N(F_f(x_f)) \rightarrow B(x, x_1, \dots, x_f)).$$

Формула $B(\iota_x A(x))$, т.е. $B(\iota_x A(x), \iota_{x_1} F_1(x_1), \dots, \iota_{x_f} F_f(x_f))$, по принятому нами соглашению должна записываться в виде $B^*(\iota_x A(x), \iota_{x_2} F_2(x_2), \dots, \iota_{x_f} F_f(x_f))$, где $B^*(c, c_2, \dots, c_f)$ представляет собой формулу $B(c, c, c_2, \dots, c_f)$. Тем самым редукция $N(B(\iota_x A(x)))$ есть формула

$$(2) \quad \forall x \forall x_2 \dots \forall x_f (N(A(x)) \& N(F_2(x_2)) \& \dots \& N(F_f(x_f)) \rightarrow \\ B(x, x, x_2, \dots, x_f)).$$

Чтобы убедиться, что в этом случае формула $\{N, A, B\}$ выводима без использования ι -символов, согласно теореме о дедукции, достаточно установить, что формула (1) может быть переведена с помощью формулы $\exists x \forall y (N(A(y)) \sim y = x)$ в (2).

Как мы знаем, из формулы $\exists x \forall y (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(y)) \sim y = x)$ при помощи аксиомы равенства (J_2) можно получить вторую формулу единственности для $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(c))$, а тем самым и

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(a)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{A}(a_1)) \rightarrow a = a_1.$$

С другой стороны, снова пользуясь аксиомой (J_2), мы получим формулу

$$a = a_1 \rightarrow (\mathfrak{B}(a, a_1, a_2, \dots, a_f) \sim \mathfrak{B}(a, a, a_2, \dots, a_f));$$

эти две формулы совместно друг с другом дают

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(a)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{A}(a_1)) \rightarrow (\mathfrak{B}(a, a_1, a_2, \dots, a_f) \sim \mathfrak{B}(a, a, a_2, \dots, a_f))^1.$$

При помощи этой формулы формула (1) может быть переведена в формулу

$$\forall x \forall x_1 \dots \forall x_f (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x_1)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x_2)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x_f)) \rightarrow \mathfrak{B}(x, x, x_2, \dots, x_f),$$

а эта последняя может быть переведена в (2) согласно выводимой схеме формул:

$$\forall x \forall x_1 (\mathfrak{G}(x) \& \mathfrak{G}(x_1) \rightarrow \mathfrak{H}(x)) \sim \forall x (\mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{H}(x)).$$

Рассмотрим теперь вторую из упомянутых выше возможностей, а именно тот случай, когда переменная c встречается по крайней мере в одном из ι -термов, входящих в нашу элементарную формулу $\mathfrak{B}(c)$. Переменная c в этом случае может встречаться в $\mathfrak{B}(c)$ еще и помимо этих ι -термов.

Предположим, что это последнее места не имеет. Тогда $\mathfrak{B}(c)$ имеет вид

$$\mathfrak{B}(\iota_{x_1} \mathfrak{F}_1(x_1, c), \dots, \iota_{x_r} \mathfrak{F}_r(x_r, c), \iota_{y_1} \mathfrak{G}_1(y_1), \dots, \iota_{y_s} \mathfrak{G}_s(y_s))$$

(здесь переменная c не входит в выражения $\mathfrak{G}_1(y_1), \dots, \mathfrak{G}_s(y_s)$; впрочем, число s может быть и нулем). В рассматриваемом случае $\forall x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{B}(x)))$ изображается формулой

$$\begin{aligned} [1] \quad \forall x [\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s (\mathfrak{N}(\mathfrak{F}_1(x_1, x)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{F}_r(x_r, x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \\ \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s))], \end{aligned}$$

¹⁾ Чтобы избежать нежелательных совпадений, быть может, следует в этих формулах вместо $a, a_1, \dots, a_f$ взять какие-нибудь другие свободные переменные.

а $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x)))$ — формулой

$$\begin{aligned} [2] \quad \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s (\mathfrak{N}(\mathfrak{F}_1(x_1, \iota_x \mathfrak{A}(x))) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{F}_r(x_r, \iota_x \mathfrak{A}(x))) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \\ \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)). \end{aligned}$$

Чтобы в этом случае установить, что формула $\{\mathfrak{N}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ выводима без использования ι -символов, в силу теоремы о дедукции достаточно показать, что, используя формулу $\exists x \forall y (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(y)) \sim y = x)$, можно без использования ι -символов перевести друг в друга формулы [1] и [2] при помощи исчисления предикатов и с применением аксиомы равенства (J_2). Кроме того, мы можем воспользоваться индукционным предположением. Его можно будет применить к формуле $\mathfrak{F}_1(c_1, c) \& \dots \& \mathfrak{F}_r(c_r, c)$ (c именными переменными $c, c_1, \dots, c_r$)¹⁾, где $c_1, \dots, c_r$ мы рассматриваем как параметры; эта формула содержит по крайней мере на один логический символ меньше, чем формула $\mathfrak{B}(c)$, так как число добавляемых знаков конъюнкции на единицу меньше числа упраздненных ι -символов $\iota_{x_1}, \dots, \iota_{x_r}$. Мы сокращенно запишем эту конъюнкцию в виде $\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c)$.

Таким образом, для нашего вывода мы располагаем формулой

$$\begin{aligned} \exists x \forall y (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(y)) \sim y = x) \rightarrow \\ [\forall x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, x))) \sim \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, \iota_x \mathfrak{A}(x)))]. \end{aligned}$$

Так как формулу $\exists x \forall y (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(y)) \sim y = x)$ мы используем в качестве вспомогательной, то по схеме заключения получим эквивалентность

$$\forall x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, x))) \sim \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, \iota_x \mathfrak{A}(x))),$$

согласно которой мы можем оба ее члена заменять друг другом.

С этими вспомогательными средствами мы приступим к переводу формулы [1] в формулу [2]. Формула [1] средствами исчисления предикатов может быть преобразована в

$$\begin{aligned} \forall x \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s [\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_r, x)) \& \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)] \end{aligned}$$

и далее в формулу

$$\begin{aligned} [1'] \quad \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s [\exists x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_r, x)) \& \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)]. \end{aligned}$$

¹⁾ При этом мы должны будем воспользоваться тем обстоятельством, что редукция конъюнкции каких-либо формул, по определению, есть конъюнкция редукций ее членов.

Теперь воспользуемся установленной нами переводимостью формулы $\exists x \forall y (A(y) \sim y = x)$ в конъюнкцию формул

$$\exists x A(x) \text{ и } \forall x \forall y (A(x) \& A(y) \rightarrow x = y).$$

Отсюда следует, что из нашей вспомогательной формулы

$$\exists x \forall y (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(y)) \sim y = x)$$

можно вывести формулы единственности для $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(a))$ (a играет роль именной переменной); из этих последних при помощи исчисления предикатов и аксиомы равенства (J_2) можно получить эквивалентность

$$\exists x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& B(x)) \sim \forall x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow B(x)).$$

Подставив в нее вместо $B(c)$ формулу $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c))$, мы получим тем самым формулу

$$\exists x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, x))) \sim \forall x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, x))).$$

Части этой эквивалентности можно заменять друг другом. Но вместо второй из них можно, как мы установили выше, написать $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, \iota_x \mathfrak{A}(x)))$.

Поэтому формулу [1'] мы можем перевести в формулу

$$\forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s [\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_r, \iota_x \mathfrak{A}(x))) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \mathfrak{P}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)].$$

Но это и есть формула [2], так как $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c))$ совпадает с $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_1(c_1, c)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_r(c_r, c))$. Тем самым искомый перевод осуществлен. Заметим, что в нем отсутствуют ι -символы. В самом деле, все редукции свободны от ι -символов (даже тогда, когда ι -символы встречаются в их обозначениях).

Аналогичным образом мы поступим и тогда, когда в элементарной формуле $\mathfrak{B}(c)$ переменная c будет встречаться и вне ι -термов, так что $\mathfrak{B}(c)$ будет иметь вид

$$\mathfrak{P}(c, \iota_{x_1} \mathfrak{F}_1(x_1, c), \dots, \iota_{x_r} \mathfrak{F}_r(x_r, c), \iota_{y_1} \mathfrak{G}_1(y_1), \dots, \iota_{y_s} \mathfrak{G}_s(y_s)),$$

где c снова не входит в $\mathfrak{G}_1(y_1), \dots, \mathfrak{G}_s(y_s)$.

Аналогично предыдущему, здесь формула $\forall x (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{B}(x)))$ с использованием сокращения $\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c)$ может быть записана в виде

$$[1x] \quad \forall x [\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s (\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_r, x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \mathfrak{P}(x, x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s))].$$

Но теперь $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ фигурирует в $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ в качестве внешнего ι -терма, и тем самым редукция $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x)))$ может быть записана в виде ¹⁾

$$[2x] \quad \forall x \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_r, \iota_x \mathfrak{A}(x))) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \mathfrak{P}(x, x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)).$$

Для установления того, что формула $\{\mathfrak{N}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ может быть выведена без использования ι -символов, достаточно перевести — без использования ι -символов — формулу [1x] в [2x], используя при этом в качестве вспомогательного средства формулу

$$\exists x \forall y (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(y)) \sim y = x),$$

которую мы кратко обозначим посредством $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}(\mathfrak{A}))$.

Для этого мы применим наше индукционное предположение к формуле $\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c)$ (где $c_1, \dots, c_r$ — параметры). Это даст нам возможность заменить формулу

$$\forall z (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(z)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, z)))$$

формулой

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, \iota_z \mathfrak{A}(z))).$$

С другой стороны, из формулы $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}(\mathfrak{A}))$ могут быть выведены формулы единственности для $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(a))$. Применяя вторую из них, а также аксиому равенства (J_2), мы получим средствами исчисления предикатов формулу

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(c)) \& B(c) \sim \mathfrak{N}(\mathfrak{A}(c)) \& \forall z (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(z)) \rightarrow B(z)).$$

Подставив в нее вместо $B(c)$ формулу $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c))$, мы получим переводимость формулы

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(c)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, c))$$

в формулу

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(c)) \& \forall z (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(z)) \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, z))),$$

которая, другой стороны, как было указано выше, заменяема формулой

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(c)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(c_1, \dots, c_r, \iota_z \mathfrak{A}(z))).$$

Но тем самым мы имеем перевод [1x] в [2x], не использующий ι -символов, так как [1x] допускает преобразование в

$$\forall x \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_s (\mathfrak{N}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_r, x)) \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_1(y_1)) \& \dots \& \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_s(y_s)) \rightarrow \mathfrak{P}(x, x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)).$$

¹⁾ Следует обратить внимание на необходимость переименования переменной x во вложенном ι -терме $\iota_x \mathfrak{A}(x)$.

Остается еще рассмотреть случай, когда в элементарную формулу $\mathfrak{B}(c)$ наряду с ι -термами, содержащими переменную c , входит ι -терм, совпадающий с $\iota_x \mathfrak{A}(x)$. Но этот последний, как мы заметили, не может совпадать ни с каким из термов $\iota_{x_i} \mathfrak{F}_i(x_i, c)$; следовательно, он должен находиться среди термов $\iota_{y_j} \mathfrak{G}_j(y_j)$, для которых при переводе [1] в [2] или соответственно [1x] в [2x] соответствующие члены $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}_j(y_j))$ не претерпевают никаких изменений. Поэтому здесь оказывается возможным скомбинировать процедуру, посредством которой (в простейшем случае) формула (1) переводится в формулу (2), с процедурой перевода [1] в [2], а также с процедурой перевода [1x] в [2x]. Тем самым во всех этих случаях редукция формулы { ι } оказывается выводимой без использования ι -символов.

Теперь мы должны рассмотреть случаи, когда формула $\mathfrak{B}(c)$ содержит хотя бы один символ логики высказываний или квантор. В этих случаях $\mathfrak{B}(c)$ либо имеет один из видов $\neg \mathfrak{B}_1(c)$, $\forall x \mathfrak{B}_1(x)$, $\exists x \mathfrak{B}_1(x)$, либо состоит из двух формул $\mathfrak{B}_1(c)$ и $\mathfrak{B}_2(c)$, соединенных друг с другом при помощи одной из связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$. К формуле $\mathfrak{B}_1(c)$, фигурирующей в первых трех случаях, и к формулам $\mathfrak{B}_1(c)$ и $\mathfrak{B}_2(c)$, фигурирующим в остальных случаях, мы можем применить наше индукционное предположение.

Однако нам не нужно рассматривать все эти случаи в отдельности, так как связи логики высказываний можно выразить через конъюнкцию и отрицание, а формулу $\exists x \mathfrak{A}(x)$ можно преобразовать в $\neg \forall x \neg \mathfrak{A}(x)$. Ввиду перестановочности оператора редукции с логическими операциями, эти преобразования формул переносятся и на их редукции, причем таким образом, что если в результате этих преобразований формула $\mathfrak{B}(c)$ переходит в $\mathfrak{B}^*(c)$, то в результате тех же самых преобразований $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}(c))$ перейдет в $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}^*(c))$, а $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x)))$ — в $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}^*(\iota_x \mathfrak{A}(x)))$. Итак возможность вывода без ι -символов формулы $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ приведет к аналогичной возможности и для формулы $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

Поэтому — после того как для элементарных формул $\mathfrak{B}(c)$ мы установили выводимость $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ без использования ι -символов — нам будет достаточно индукцией по числу логических символов в $\mathfrak{B}(c)$ показать, что:

(1) если наше утверждение о выводимости $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ без использования ι -символов справедливо для формулы $\mathfrak{B}(c)$, то оно будет справедливо и для формулы $\neg \mathfrak{B}(c)$;

(2) если оно справедливо для формул $\mathfrak{B}_1(c)$ и $\mathfrak{B}_2(c)$, то оно будет справедливо и для формулы $\mathfrak{B}_1(c) \& \mathfrak{B}_2(c)$;

(3) если оно справедливо для формулы $\mathfrak{B}(a, c)$ (c отличной от a и не входящей в $\mathfrak{A}(x)$ свободной переменной a), то оно будет справедливо и для формулы $\forall x \mathfrak{B}(x, c)$.

Во всех требующихся здесь доказательствах мы снова можем пользоваться теоремой о дедукции, вследствие чего установление выводимости $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ сводится к установлению выводимости формулы

$$[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}(x)] \quad \forall x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{B}(x))) \sim \mathfrak{R}(\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x)))$$

из формулы $\iota (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$.

Таким образом, для того, чтобы установить (1), мы должны будем — в предположении, что формула $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ может быть выведена с помощью $\iota (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$ без использования ι -символов, — доказать, что без использования ι -символов может быть выведена и формула $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{B}(x)]$, т. е.

$$\forall x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(x))) \rightarrow \mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))).$$

Формулы $\iota (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$ и $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ по схеме заключения дают эквивалентность $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}(x)]$. Взяв отрицания обеих ее частей и выполнив затем преобразования по правилам исчисления предикатов, мы получим формулу

$$\exists x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \& \neg \mathfrak{R}(\mathfrak{B}(x))) \sim \neg \mathfrak{R}(\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x)))$$

и, вследствие перестановочности отрицания с оператором редукции, формулу

$$\exists x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(x))) \sim \mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))).$$

Из формулы $\iota (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$, как незадолго перед этим было замечено, мы можем вывести формулы единственности для $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(a))$, а из этих последних мы получим формулу

$$[3] \quad \exists x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \& B(x)) \sim \forall x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow B(x)),$$

и во всех этих выводах будут отсутствовать ι -символы. Из формулы [3], подставив $\mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(c))$ вместо $B(c)$, мы получим формулу

$$\exists x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \& \mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(x))) \sim \forall x (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow \mathfrak{R}(\neg \mathfrak{B}(x))),$$

которая вместе с полученной ранее эквивалентностью средствами исчисления высказываний дает нам искомую формулу $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{B}(x)]$.

Ввиду наличия вспомогательной формулы $\iota (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$, в случаях (2) и (3) речь идет о том, чтобы из двух эквивалентностей $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1(x)]$ и $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}_2(x)]$ вывести эквивалентность $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1(x) \& \mathfrak{B}_2(x)]$, а из $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}(a, x)]$ вывести эквивалентность $[\mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \forall x \mathfrak{B}(x, a)]$ (мы здесь предполагаем, что переменная a не входит в $\mathfrak{A}(x)$).

Но эти все выводы мы немедленно получим с помощью исчисления предикатов, опираясь на перестановочность оператора редукции с логическими связками.

5. Формулировка теоремы об устранимости; переводимость всякой формулы в ее редукцию; сравнение различных методов устранения. В общем и целом, наши последние рассуждения приводят к следующему результату:

Будем исходить из некоторой формальной системы, состоящей из расширенного (при помощи аксиом равенства) исчисления предикатов, к которому могут быть добавлены какие-нибудь собственные аксиомы, а также, быть может, аксиома индукции (соответственно схема индукции). Если совокупность термов такой системы расширить путем соотнесения формулам $\mathfrak{A}(c)$ ι -термов $\iota_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}(x)$ и если дополнительно принять в качестве аксиомы формулу $\{ \}$ или же добавить соответствующую схему формул, то это не расширит запаса выводимых формул, не содержащих ι -символов. Или, как мы еще будем говорить: *из вывода любой формулы, не содержащей ι -символов, ι -символы могут быть устранены*. Ввиду сказанного выше ¹⁾, устранимость эта будет иметь место и для выводов, в которых ι -термы вводятся и используются в соответствии с нашим первоначальным ι -правилом, и для выводов, использующих обобщенное ι -правило.

Одновременно мы установили, что для всякой формулы, выводимой с использованием ι -правила, ее редукция выводима без использования ι -символов. В дополнение к сказанному мы покажем, что если допустить выводы с использованием ι -правила ²⁾, то всякая формула $\mathfrak{F}$ будет переводима в свою редукцию. Мы докажем это индукцией по числу логических знаков в $\mathfrak{F}$, причем ι -символы также будем причислять к логическим знакам. Для случая, когда рассматриваемое число равно нулю, наше утверждение тривиально, так как $\mathfrak{F}$ тогда не содержит ι -символов и тем самым $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ совпадает с $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ составлена из каких-либо других формул с помощью связок логики высказываний, то это утверждение может быть получено средствами исчисления высказываний на основе нашего индукционного предположения. В том случае, когда $\mathfrak{F}$ имеет один из видов $\forall x \mathfrak{F}_1(x)$, $\exists x \mathfrak{F}_1(x)$, это утверждение совершенно аналогичным образом может быть получено средствами исчисления предикатов на основе имеющегося у нас индукционного предположения.

Остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ является элементарной формулой $\mathfrak{P}(\iota_{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{A}_1(x_1), \dots, \iota_{\mathfrak{A}_r}\mathfrak{A}_r(x_r))$ с внешними ι -термами

$$\iota_{x_1}\mathfrak{A}_1(x_1), \dots, \iota_{x_r}\mathfrak{A}_r(x_r).$$

¹⁾ См. с. 515—517.

²⁾ Где фигурируют, следовательно, только собственные ι -термы.

Редукция формулы $\mathfrak{F}$ в этом случае имеет вид

$$\forall x_1 \dots \forall x_r (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(x_1)) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(x_r))) \rightarrow \mathfrak{P}(x_1, \dots, x_r).$$

На основании сделанного нами индукционного предположения выводимы эквивалентности

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(c_1)) \sim \mathfrak{A}_1(c_1), \dots, \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(c_r)) \sim \mathfrak{A}_r(c_r)$$

(со свободными переменными $c_1, \dots, c_r$). Эти переменные мы выберем так, чтобы они не входили в формулу $\mathfrak{F}$.

Далее, для каждой формулы $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, \dots, r$) мы располагаем соответствующими формулами единственности, из которых при помощи ι -правила и аксиомы равенства (J_2) могут быть выведены эквивалентности ¹⁾

$$\mathfrak{A}_i(c_i) \sim c_i = \iota_{x_i}\mathfrak{A}_i(x_i) \quad (i = 1, \dots, r).$$

Эти эквивалентности совместно с эквивалентностями, приведенными выше, дают формулы

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_i(c_i)) \sim c_i = \iota_{x_i}\mathfrak{A}_i(x_i) \quad (i = 1, \dots, r),$$

из которых, применив нужное число раз аксиому равенства (J_2), мы получим импликацию

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(c_1)) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(c_r)) \rightarrow (\mathfrak{P}(\iota_{x_1}\mathfrak{A}_1(x_1), \dots, \iota_{x_r}\mathfrak{A}_r(x_r)) \rightarrow \mathfrak{P}(c_1, \dots, c_r)),$$

а отсюда с помощью исчисления предикатов — формулу

$$\mathfrak{F} \rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_r (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(x_1)) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(x_r))) \rightarrow \mathfrak{P}(x_1, \dots, x_r),$$

т.е. формулу $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{F})$.

С другой стороны, импликация $\mathfrak{R}(\mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{F}$ получается следующим образом. Мы исходим из импликации

$$\forall x_1 \dots \forall x_r (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(x_1)) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(x_r))) \rightarrow \mathfrak{P}(x_1, \dots, x_r) \rightarrow (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(c_1)) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(c_r))) \rightarrow \mathfrak{P}(c_1, \dots, c_r),$$

выводимой средствами исчисления предикатов. Посылка этой импликации представляет собой формулу $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$. Если вместо переменных $c_1, \dots, c_r$ подставить ι -термы $\iota_{x_1}\mathfrak{A}_1(x_1), \dots, \iota_{x_r}\mathfrak{A}_r(x_r)$, то на месте члена $\mathfrak{P}(c_1, \dots, c_r)$ получится формула $\mathfrak{F}$. Таким образом, мы получим формулу

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{F}) \rightarrow (\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1(\iota_{x_1}\mathfrak{A}_1(x_1))) \& \dots \& \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_r(\iota_{x_r}\mathfrak{A}_r(x_r)))) \rightarrow \mathfrak{F}.$$

Но формулы $\mathfrak{A}_i(\iota_{x_i}\mathfrak{A}_i(x_i))$ ($i = 1, \dots, r$) выводимы с помощью ι -правила, и, следовательно, формулы $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_i(\iota_{x_i}\mathfrak{A}_i(x_i)))$

¹⁾ См. с. 471.

являются выводимыми (даже без использования ι -символов). Следовательно, средствами исчисления высказываний получается формула $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$. Из выведенных таким образом импликаций $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ мы получим эквивалентность $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \sim \mathcal{F}$.

Таким образом, опираясь на индукционное предположение, мы установили, что эта эквивалентность выводима во всех подлежащих разбору случаях.

Замечание. В первом издании этой книги доказательство устранимости ι -символов было проведено прямо для первоначального ι -правила, причем было показано, что всегда может быть устранено последнее введение ι -терма.

Индукция такого рода оказалась, однако, чрезвычайно утомительной. Курт Шютте привел существенно более простое доказательство¹⁾, в котором за основу берется то же самое первоначальное ι -правило, но индукция ведется таким образом, что уменьшается максимальная «степень» ι -выражения, причем под степенью выражения $\iota_x \mathcal{A}(x)$ понимается число встречающихся в нем ι -символов. Вместе с тем доказательство Шютте дает более сильный результат, так как оно относится и к таким формальным системам, в которых имеются свободные и связанные функциональные, а также связанные формульные переменные и в которых ι -символ употребляется в сочетании с функциональными, а также с формульными переменными, так что формализованными оказываются также характеристики функций и предикатов.

По сравнению с методом, предложенным Шютте, примененный нами метод Россера — Хазенбегера допускает несколько более легкую проверку, поскольку главная часть рассуждения ограничивается в этом случае рассмотрением одной-единственной схемы формул^{2,3)}.

¹⁾ См. его работу: Schütte K. Die Eliminierbarkeit des bestimmten Artikels in Kodifikaten der Analysis. — Math. Ann., 1951, 123, S. 166—186.

²⁾ Укажем также на доказательство устранимости характеристик, приведенное в учебнике: Kleene S. C. Introduction to Metamathematics. — Amsterdam, 1952 (есть русский перевод: Клине С. К. Введение в метаматерику. — М.: ИЛ, 1957 — прим. перев.). В качестве новейших публикаций по этому вопросу следует также упомянуть работы Р. Шрётера: Schröter K. Theorie des bestimmten Artikels. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1956, 2 — и Э. Мендельсона: Mendelson E. A semantic proof of the eliminability of descriptions. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1960, 6, S. 199—208.

³⁾ В порядке подготовки к первоначальному доказательству устранимости ι -символов нами было доказано одно дополнение к теореме из гл. VII (с. 456—459) о возможности замены аксиомы равенства (J_2) или соответственной схемы равенства

$$a = b \rightarrow (\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(b))$$

собственными аксиомами. Относящиеся к этому рассуждения следуют ниже в специальном дополнении; см. с. 547—550.

§ 5. Следствия, вытекающие из устранимости характеристик

1. **Представимость рекурсивных функций в системе (Z).** Из полученного нами результата мы можем, в частности, вывести как следствие сформулированную в гл. VII теорему о *представимости рекурсивных функций в системе (Z)*¹⁾. Пусть $f(a, b, \dots, k)$ — функция, получаемая, исходя из штрих-функции, применением примитивных рекурсий и подстановок. Как мы знаем²⁾, внутри той системы, которая возникает из системы (Z) в результате присоединения функции $\mu_x \mathcal{A}(x)$ и формул (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) , такую функцию можно изобразить посредством некоторого терма $\mathcal{g}(a, b, \dots, k)$, который не содержит никаких свободных переменных, кроме $a, b, \dots, k$; при этом отношение терма $\mathcal{g}(a, b, \dots, k)$ к функции $f(a, b, \dots, k)$ таково, что всякая формула, выводимая в рекурсивной арифметике и содержащая функцию $f(a, b, \dots, k)$, в результате замены $f(a, b, \dots, k)$ посредством $\mathcal{g}(a, b, \dots, k)$ перейдет в формулу, выводимую средствами системы (Z), дополненной формулами (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) .

Как известно, применение функции $\mu_x \mathcal{A}(x)$ и формул (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) здесь может быть сведено к применению ι -правила³⁾.

Если вместо встречающихся в $\mathcal{g}(a, \dots, k)$ выражений $\mu_x \mathcal{A}(x)$ мы подставим их определения при помощи ι -символа, то у нас получится некоторый терм $\mathcal{g}(a, \dots, k)$, построенный с помощью ι -символов; этот терм снова находится к $f(a, \dots, k)$ в таком отношении, что каждая формула, выводимая в рекурсивной арифметике и содержащая функцию $f(a, \dots, k)$, в результате замены $f(a, \dots, k)$ посредством $\mathcal{g}(a, \dots, k)$ перейдет в некоторую формулу, выводимую средствами системы (Z) с добавлением ι -правила. Поэтому, в частности, если

$$a, b, \dots, f, \iota$$

суть какие-либо цифры, то в системе (Z) с добавленным ι -правилом выводимо равенство

$$\mathcal{g}(a, b, \dots, f) = \iota$$

или же его отрицание

$$\mathcal{g}(a, b, \dots, f) \neq \iota$$

в зависимости от того, совпадает или не совпадает с ι значение функции $f(a, b, \dots, f)$, получающееся в результате рекурсивного вычисления.

¹⁾ См. с. 455 и далее.

²⁾ См. с. 499 и далее.

³⁾ См. с. 481—482.

Теперь рассмотрим равенство

$$g(a, \dots, k) = l$$

с переменными $a, \dots, k, l$. Редукцией этого равенства является не содержащая ι -символов формула $\mathfrak{G}(a, \dots, k, l)$, для которой выводима эквивалентность

$$[\mathfrak{G}] \quad \mathfrak{G}(a, \dots, k, l) \sim g(a, \dots, k) = l.$$

Так как в эту эквивалентность вместо переменных $a, \dots, k, l$ мы можем подставить любые цифры, то в соответствии с ранее сказанным получается, что в зависимости от того, совпадает или не совпадает с l значение $f(a, \dots, f)$, средствами системы (Z) в сочетании с ι -правилом может быть выведена либо формула

$$\mathfrak{G}(a, \dots, f, l),$$

либо ее отрицание.

Из доказанной нами теоремы об устранимости ι -символов теперь вытекает, что из вывода формулы

$$\mathfrak{G}(a, \dots, f, l), \text{ соответственно формулы } \neg \mathfrak{G}(a, \dots, f, l),$$

поскольку в ней не содержится ι -символов, применение ι -правила может быть устранено. Поэтому средствами самой системы (Z) может быть выведена либо формула

$$\mathfrak{G}(a, \dots, f, l)$$

либо ее отрицание в зависимости от того, совпадает или не совпадает с l значение $f(a, \dots, f)$.

Поэтому функция $f(a, \dots, k)$ действительно оказывается представимой в системе (Z) в смысле нашего более раннего определения ¹⁾: в самом деле, равенство

$$f(a, \dots, k) = l$$

оказывается представленным формулой

$$\mathfrak{G}(a, \dots, k, l).$$

Однако представимость рекурсивных функций в системе (Z) имеет место не только в смысле указанного определения ²⁾, но и в некотором более сильном смысле.

Действительно, основываясь на выводимости эквивалентности $[\mathfrak{G}]$, мы можем заключить о выводимости формул единственности

$$\exists x \mathfrak{G}(a, \dots, k, x),$$

$$\forall x \forall y (\mathfrak{G}(a, \dots, k, x) \& \mathfrak{G}(a, \dots, k, y) \rightarrow x = y)$$

¹⁾ См. с. 433.

²⁾ Для целей проводившихся тогда рассмотрений условие «представимости» функции при формулировке этого определения было выбрано чрезвычайно слабым. См. примечание на с. 433.

(с подходящими связанными переменными x и y). В соответствии с этим можно будет ввести ι -терм $\iota_x \mathfrak{G}(a, \dots, k, x)$ и мы получим формулу

$$\mathfrak{G}(a, \dots, k, \iota_x \mathfrak{G}(a, \dots, k, x)),$$

равно как и эквивалентность

$$\mathfrak{G}(a, \dots, k, l) \sim l = \iota_x \mathfrak{G}(a, \dots, k, x).$$

Подставив $g(a, \dots, k)$ вместо l и воспользовавшись эквивалентностью $[\mathfrak{G}]$ и аксиомой (J_2) , мы придем к равенству

$$g(a, \dots, k) = \iota_x \mathfrak{G}(a, \dots, k, x).$$

Тем самым терм $g(a, \dots, k)$, а значит, и функция $f(a, \dots, k)$ оказываются изображенными посредством некоторого ι -терма, получившегося в результате применения ι -символа к некоторой формуле системы (Z) . Итак, этим способом можно изобразить любую рекурсивную функцию, и данная изобразимость основывается на добавлении к системе (Z) рассмотренного нами ι -правила.

При помощи этого способа, позволяющего изобразить любую рекурсивную функцию посредством некоторого ι -терма $\iota_x \mathfrak{A}(a, \dots, k, x)$, мы можем теперь перейти от равенств, представляющих собой рекурсивное построение какой-либо функции $f(a, \dots, k)$, к формулам без ι -символов, характеризующим предикат $\mathfrak{G}(a, \dots, k, l)$ в системе (Z) .

Пусть, например, функциональный знак $\varphi(a, b)$ вводится рекурсивными равенствами

$$\varphi(a, 0) = a(a),$$

$$\varphi(a, n') = b(a, n, \varphi(a, n)),$$

где $a(a)$ и $b(a, n, c)$ — рекурсивные термы, и пусть функции $\varphi(a, b)$, $a(a)$ и $b(a, n, c)$ изображаются ι -термами

$$\iota_x \mathfrak{G}(a, b, x), \quad \iota_y \mathfrak{A}(a, y) \text{ и } \iota_z \mathfrak{B}(a, n, c, z),$$

где $\mathfrak{G}(a, b, k)$, $\mathfrak{A}(a, b)$ и $\mathfrak{B}(a, n, c, d)$ — формулы системы (Z) . Тогда вместо этих рекурсивных равенств мы сначала получим равенства

$$\iota_x \mathfrak{G}(a, 0, x) = \iota_y \mathfrak{A}(a, y),$$

$$\iota_x \mathfrak{G}(a, n', x) = \iota_z \mathfrak{B}(a, n, \iota_x \mathfrak{G}(a, n, x), z).$$

Затем из первого равенства с помощью выводимых эквивалентностей

$$\mathfrak{G}(a, 0, c) \sim c = \iota_x \mathfrak{G}(a, 0, x),$$

$$\mathfrak{A}(a, c) \sim c = \iota_y \mathfrak{A}(a, y)$$

и формулы

$$a = b \rightarrow (c = a \sim c = b),$$

получающейся из аксиомы равенства (J_2), мы получим эквивалентность

$$\mathfrak{G}(a, 0, c) \sim \mathfrak{A}(a, c).$$

Из второго равенства с помощью выводимой формулы

$$\mathfrak{G}(a, n, b) \rightarrow b = \iota_x \mathfrak{G}(a, n, x)$$

и аксиомы равенства (J_2) мы получим формулу

$$\mathfrak{G}(a, n, b) \rightarrow \iota_x \mathfrak{G}(a, n', x) = \iota_z \mathfrak{B}(a, n, b, z),$$

а из нее с помощью эквивалентностей

$$\mathfrak{G}(a, n', c) \sim c = \iota_x \mathfrak{G}(a, n', x),$$

$$\mathfrak{B}(a, n, b, c) \sim c = \iota_z \mathfrak{B}(a, n, b, z)$$

и аксиомы равенства (J_2) мы получим, далее, формулу

$$\mathfrak{G}(a, n, b) \rightarrow (\mathfrak{G}(a, n', c) \sim \mathfrak{B}(a, n, b, c)).$$

Тем самым для характеристики предиката $\mathfrak{G}(a, n, c)$ мы получаем две формулы без ι -символов:

$$\mathfrak{G}(a, 0, c) \sim \mathfrak{A}(a, c),$$

$$\mathfrak{G}(a, n, b) \rightarrow (\mathfrak{G}(a, n', c) \sim \mathfrak{B}(a, n, b, c)),$$

которые заменяют в системе (Z) рекурсивное определение функции $\varphi(a, b)$. Обратим внимание на то, что из этих формул и из формул единственности для $\mathfrak{A}(a, c)$ по второму аргументу и для $\mathfrak{B}(a, n, b, c)$ по четвертому аргументу индукцией по n могут быть выведены формулы единственности для $\mathfrak{G}(a, n, c)$ по третьему аргументу.

Далее, если функция ξ является комбинацией уже построенных рекурсивных функций, то из предикатов, представляющих в системе (Z) участвующие в этой комбинации функции, мы получим характеристику предиката, представляющего функцию ξ .

Пусть, например, функция $\xi(a)$ определяется, исходя из функций $\varphi(a, b)$, $\psi(a)$ и $\chi(a)$, при помощи функционального соотношения $\xi(a) = \varphi(\psi(a), \chi(a))$, и пусть

$$\varphi(b, c) = \iota_x \mathfrak{A}(b, c, x), \quad \psi(a) = \iota_y \mathfrak{B}(a, y), \quad \chi(a) = \iota_z \mathfrak{C}(a, z),$$

$$\xi(a) = \iota_x \mathfrak{R}(a, x),$$

где $\mathfrak{A}(b, c, d)$, $\mathfrak{B}(a, d)$, $\mathfrak{C}(a, d)$ и $\mathfrak{R}(a, d)$ — формулы из системы (Z), представляющие эти функции. Тогда в качестве опреде-

ляющего равенства мы получим сначала

$$\iota_x \mathfrak{R}(a, x) = \iota_x \mathfrak{A}(\iota_y \mathfrak{B}(a, y), \iota_z \mathfrak{C}(a, z), x).$$

Из него, опираясь на эквивалентности

$$\mathfrak{B}(a, b) \sim b = \iota_y \mathfrak{B}(a, y), \quad \mathfrak{C}(a, c) \sim c = \iota_z \mathfrak{C}(a, z),$$

мы получим при помощи аксиомы равенства (J_2) формулу

$$\mathfrak{B}(a, b) \& \mathfrak{C}(a, c) \rightarrow \iota_x \mathfrak{R}(a, x) = \iota_x \mathfrak{A}(b, c, x),$$

а затем из нее — опираясь на эквивалентности

$$\mathfrak{A}(b, c, d) \sim d = \iota_x \mathfrak{A}(b, c, x), \quad \mathfrak{R}(a, d) \sim d = \iota_x \mathfrak{R}(a, x)$$

и используя аксиому (J_2) — формулу

$$\mathfrak{B}(a, b) \& \mathfrak{C}(a, c) \rightarrow (\mathfrak{R}(a, d) \sim \mathfrak{A}(b, c, d)),$$

посредством которой предикат $\mathfrak{R}(a, d)$ характеризуется в системе (Z).

Из этих формул и из формул единственности по последнему аргументу для формул $\mathfrak{B}(a, b)$, $\mathfrak{C}(a, b)$ и $\mathfrak{A}(b, c, d)$ могут быть выведены формулы единственности для $\mathfrak{R}(a, b)$ по второму аргументу.

Этот способ позволяет нам шаг за шагом получать для каждого состоящего из примитивных рекурсий и подстановок определения какой-либо рекурсивной функции $\mathfrak{f}(a, \dots, k)$ характеристику некоторого предиката, представляющего ее в системе (Z).

Только что проведенное нами рассуждение может быть обобщено в том смысле, что относительно рассматриваемой нами функции $\mathfrak{f}(a, \dots, k)$ мы можем и не предполагать, что все использованные для ее построения рекурсии являются примитивными; более того, будет достаточно, чтобы все эти рекурсии обладали следующими двумя свойствами:

1. Они дают возможность вычислять значения этой функции при произвольной фиксации аргументов, причем оказывается возможной формализация этого вычисления, т. е. вывод равенства

$$\mathfrak{f}(a, \dots, \mathfrak{f}) = \mathfrak{l}$$

в том случае, если $\mathfrak{l}$ является значением $\mathfrak{f}(a, \dots, \mathfrak{f})$.

2. В рамках системы (Z) они допускают сведение к явному определению при помощи функции $\mu_x A(x)$.

В проведенном нами доказательстве представимости рекурсивных функций мы совершили два различных перехода: во-первых, арифметическое сведение рекурсивных функций к сложению и умножению при помощи функции $\mu_x A(x)$ и, во-вторых, устранение ι -символа, с помощью которого вместо функциональных равенств (построенных с участием ι -символов) мы получаем соответствующие представляющие формулы.

Эти два шага можно было бы объединить в один и таким образом избежать использования ι -символов; однако с помощью ι -символов этот прием принимает более прозрачный вид.

2. Общий способ исключения функциональных знаков путем введения предикатных символов; исключение индивидуальных символов. Вообще, введение ι -символов представляет собой удобный способ перехода от функциональных знаков к соответствующим (т. е. представляющим функциональные равенства) предикатным символам. В самом деле, имеет место некоторая *общая представимость*¹⁾ функциональных знаков посредством предикатных символов, которую можно очень легко уяснить с помощью теоремы об устранимости ι -символов. Соответствующее рассуждение достаточно провести для какого-нибудь типичного примера.

Пусть нам дан формализм $\mathfrak{S}$, получающийся из исчисления предикатов путем добавления к нему аксиом равенства, тех или иных собственных аксиом вместе с встречающимися в них символами, а также, быть может, аксиомы индукции или, соответственно, равносильной ей схемы индукции. Пусть к числу символов формализма $\mathfrak{S}$ относится функциональный знак φ с двумя аргументами; пусть этот знак встречается только в одной из наших аксиом, которая имеет вид

$$\mathfrak{R}(a, b, c, \varphi(a, b), \varphi(a, c))$$

[это обозначение следует понимать таким образом, что функциональный знак $\varphi(\cdot, \cdot)$ фигурирует только в составе указанных термов $\varphi(a, b)$ и $\varphi(a, c)$].

Теперь введем какой-нибудь предикатный символ с тремя аргументами (например, Φ) при помощи явного определения

$$\Phi(a, b, c) \sim \varphi(a, b) = c.$$

Тогда из этого определения могут быть выведены формулы единственности для $\Phi(a, b, c)$ по аргументу c :

$$\begin{aligned} & \exists x \Phi(a, b, x), \\ & \forall x \forall y (\Phi(a, b, x) \& \Phi(a, b, y) \rightarrow x = y). \end{aligned}$$

Если мы воспользуемся теперь ι -правилом, то у нас в качестве термина появится

$$\iota_x \Phi(a, b, x);$$

при этом, с одной стороны, ι -правило даст нам формулу

$$\Phi(a, b, \iota_x \Phi(a, b, x)),$$

а с другой стороны, определение символа $\Phi(a, b, c)$ в сочетании с аксиомой (J_1) даст формулу

$$\Phi(a, b, \varphi(a, b));$$

¹⁾ Что здесь следует более точно понимать под «представимостью», станет ясно из дальнейшего.

тем самым, с помощью второй из только что приведенных формул единственности, мы получим равенство

$$\varphi(a, b) = \iota_x \Phi(a, b, x).$$

Воспользовавшись этим равенством и аксиомой (J_2), мы по любой формуле $\mathfrak{F}$, в которую входит функциональный знак $\varphi(\cdot, \cdot)$, получим формулу $\mathfrak{F}'$, являющуюся результатом замены в $\mathfrak{F}$ всякой составной части $\varphi(a, b)$ соответствующим ей выражением $\iota_x \Phi(a, b, x)$. В частности, по аксиоме

$$\mathfrak{R}(a, b, c, \varphi(a, b), \varphi(a, c))$$

мы получим формулу

$$\mathfrak{R}(a, b, c, \iota_x \Phi(a, b, x), \iota_x \Phi(a, c, x)),$$

которая переводима в формулу

$$\forall x \forall y (\Phi(a, b, x) \& \Phi(a, c, y) \rightarrow \mathfrak{R}(a, b, c, x, y)).$$

Теперь, если вместо того, чтобы вводить предикатный символ Φ посредством явного определения, мы возьмем его в качестве основного знака, а обе относящиеся к $\iota_x \Phi(a, b, x)$ формулы единственности и формулу

$$\forall x \forall y (\Phi(a, b, x) \& \Phi(a, c, y) \rightarrow \mathfrak{R}(a, b, c, x, y))$$

добавим к аксиомам и при этом опустим аксиому

$$\mathfrak{R}(a, b, c, \varphi(a, b), \varphi(a, c)),$$

а функциональный знак $\varphi(\cdot, \cdot)$, который ранее был у нас основным знаком, теперь [после введения $\iota_x \Phi(a, b, x)$ при помощи ι -правила] явно определим посредством равенства

$$\varphi(a, b) = \iota_x \Phi(a, b, x),$$

то совокупность выводимых формул не изменится. В самом деле, в результате этого формулы

$$\mathfrak{R}(a, b, c, \varphi(a, b), \varphi(a, c))$$

и

$$\Phi(a, b, c) \sim \varphi(a, b) = c$$

перейдут в некоторые выводимые формулы¹⁾.

¹⁾ См. сделанное ранее замечание относительно выводимости формулы

$$\mathfrak{B}(a, b) \sim a = \iota_x \mathfrak{B}(x, b)$$

(с. 472). Вообще, эквивалентность

$$\mathfrak{A}(a) \sim a = \iota_x \mathfrak{A}(x)$$

может быть таким образом выведена для любого термина $\iota_x \mathfrak{A}(x)$.

Теперь устранение ι -терма $\iota_x \Phi(a, b, x)$ оказывается равносильным устранению $\varphi(a, b)$. Если мы произведем устранение терма $\iota_x \Phi(a, b, x)$, то вместо любой построенной по правилам формализма $\mathcal{E}$ формулы, содержащей функциональный символ $\varphi(\cdot, \cdot)$, мы получим «представляющую» ее формулу формализма $\mathcal{E}^*$, получающегося из $\mathcal{E}$ опусканием функционального символа $\varphi(\cdot, \cdot)$ и аксиомы $\mathcal{R}(a, b, c, \varphi(a, b), \varphi(a, c))$ и добавлением предикатного символа Φ , а также трех сформулированных для него аксиом. Если формула, построенная по правилам $\mathcal{E}$, выводима средствами этой системы, то представляющая ее формула будет выводима средствами $\mathcal{E}^*$, и наоборот. Действительно, одна выводимость следует из другой с учетом ι -правила; но так как результирующая формула ι -символов не содержит, то применение ι -правила может быть устранено.

Тем же самым способом мы можем убедиться в том, что в формализме, получающемся из $\mathcal{E}$ путем присоединения явного определения

$$\Phi(a, b, c) \sim \varphi(a, b) = c,$$

формула, не содержащая функционального знака $\varphi(\cdot, \cdot)$, выводима тогда и только тогда, когда она выводима в $\mathcal{E}^*$.

Таким образом, формализмы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ оказываются равносильными в этом смысле слова.

Этот результат может быть немедленно распространен на случай произвольного числа функциональных знаков (с произвольным количеством аргументов) и произвольного числа аксиом для этих функций. Под этот случай подпадают и индивидуальные символы, так как их можно рассматривать как функциональные знаки без аргументов.

Итак, мы убеждаемся, что если за основу рассмотрения взять исчисление предикатов и аксиомы равенства, то всякая система аксиом, содержащая только собственные аксиомы и, быть может, аксиому индукции, будет равносильна такой системе аксиом, в которой функциональные и индивидуальные символы отсутствуют.

Замена системы аксиом рассмотренного типа, формализованной с применением функциональных знаков, равносильной системой аксиом без функциональных знаков дает, в частности, возможность (в том случае, если аксиома индукции среди аксиом не встречается) свести проблемы выводимости в этой системе и ее непротиворечивости к некоторым частным проблемам разрешимости в исчислении предикатов¹⁾.

Исключение индивидуальных символов не дает в этом смысле никаких преимуществ. Вообще, замена индивидуального символа представляющим его предикатным символом по большей части

нецелесообразна, и исключение такого символа мы будем производить лишь тогда, когда будет удаваться явным образом определить этот символ с помощью некоторого ι -терма и, значит, без введения какого-либо нового предикатного символа.

3. Применение этой процедуры к системе (Z); перспективы дальнейших исследований. Мы проиллюстрируем переход от функциональных знаков к представляющим их предикатным символам в том виде, как он происходит при помощи ι -термов, а также и процедуру исключения индивидуальных символов при помощи явных определений на примере системы (Z).

В системе (Z) у нас имеются функциональные знаки a' , $a + b$, $a \cdot b$. При помощи эквивалентностей

- {1} $Sq(a, b) \sim a' = b,$
- {2} $Ad(a, b, c) \sim a + b = c,$
- {3} $Mr(a, b, c) \sim a \cdot b = c$

мы сопоставим этим знакам *предикатные* символы Sq , Ad и Mr .

Если эти эквивалентности рассматривать как явные определения указанных предикатных символов, то из них для каждого из этих символов с помощью аксиом равенства могут быть выведены соответствующие формулы единственности по последнему аргументу.

Сейчас мы, наоборот, возьмем эти формулы единственности в качестве аксиом. Тогда при помощи ι -правила мы сможем ввести термы

$$\iota_x S q(a, x), \quad \iota_x Ad(a, b, x) \quad \text{и} \quad \iota_x Mr(a, b, x),$$

и если мы возьмем равенства

- [1] $a' = \iota_x S q(a, x),$
- [2] $a + b = \iota_x Ad(a, b, x),$
- [3] $a \cdot b = \iota_x Mr(a, b, x)$

в качестве явных определений, то формулы {1}, {2}, {3} окажутся выводимыми.

Теперь, для того чтобы из системы (Z) получить такую систему аксиом, в которой вместо указанных трех функциональных знаков фигурируют сопоставленные им предикатные символы, нам остается только удалить, применив эквивалентности {1}, {2}, {3} и равенства [1], [2], [3], эти функциональные знаки из аксиом, в которых они встречаются [т. е. из аксиом (P_1) , (P_2) , рекурсивных равенств для $a + b$ и $a \cdot b$ и аксиомы индукции], а затем устранить ι -термы. Процедура эта принимает следующий вид:

Аксиомы (P_1) и (P_2) с помощью эквивалентности {1} могут быть переведены в формулы

$$\neg Sq(a, 0)$$

¹⁾ См. гл. IV с. 199—200.

и

$$\text{Sq}(a, b') \rightarrow a = b,$$

вторая из которых с помощью [1] может быть затем переведена в формулу

$$\text{Sq}(a, \iota_x \text{Sq}(b, x)) \rightarrow a = b,$$

а из нее, исключив ι -символ, мы получим формулу

$$\text{Sq}(b, c) \rightarrow (\text{Sq}(a, c) \rightarrow a = b),$$

которая допускает элементарное преобразование в

$$\text{Sq}(a, c) \& \text{Sq}(b, c) \rightarrow a = b.$$

Рекурсивные равенства для $a + b$ с помощью эквивалентности {2} могут быть переведены в

$$\text{Ad}(a, 0, a)$$

и

$$\text{Ad}(a, b', (a + b)');$$

вторая из них с помощью [1] и [2] может быть переведена в формулу

$$\text{Ad}(a, \iota_x \text{Sq}(b, x), \iota_x \text{Sq}(\iota_y \text{Ad}(a, b, y), x)),$$

из которой исключением ι -символов и элементарными преобразованиями мы получим формулу

$$\text{Ad}(a, b, c) \& \text{Sq}(b, r) \& \text{Sq}(c, s) \rightarrow \text{Ad}(a, r, s).$$

Совершенно аналогичным образом вместо рекурсивных равенств для $a \cdot b$ с помощью {3} и [1], [2], [3] могут быть получены формулы

$$\text{Mp}(a, 0, 0)$$

и

$$\text{Mp}(a, b, c) \& \text{Sq}(b, r) \& \text{Ad}(c, a, s) \rightarrow \text{Mp}(a, r, s).$$

Аксиома индукции с помощью [1] может быть переведена в формулу

$$A(0) \& \forall x (A(x) \rightarrow A(\iota_y \text{Sq}(x, y))) \rightarrow A(a),$$

а из нее в результате устранения ι -символа и простых преобразований мы получим формулу

$$A(0) \& \forall x \forall y (\text{Sq}(x, y) \& A(x) \rightarrow A(y)) \rightarrow A(a).$$

Тем самым мы произвели переход от системы (Z) к такой равносильной ей системе аксиом, в которой вместо функциональных знаков фигурируют предикатные символы. В этой системе аксиом

формулы единственности

$$\exists x \text{Ad}(a, b, x) \text{ и } \exists x \text{Mp}(a, b, x)$$

как аксиомы оказываются ненужными. Действительно, формула

$$\exists x \text{Ad}(a, b, x)$$

с помощью модифицированной аксиомы индукции и формулы единственности

$$\exists x \text{Sq}(a, x)$$

может быть выведена из тех двух формул, которые представляют рекурсивные равенства для $a + b$; аналогично, формула

$$\exists x \text{Mp}(a, b, x)$$

с помощью модифицированной аксиомы индукции и формулы

$$\exists x \text{Ad}(a, b, c)$$

может быть выведена из двух формул, появившихся вместо рекурсивных равенств для $a \cdot b$.

Таким образом, после замены связанных переменных свободными во вторых формулах единственности для символов Sq, Ad и Mp, мы вместо системы (Z) получим, не считая аксиом равенства, следующие аксиомы:

$$\exists x \text{Sq}(a, x),$$

$$\text{Sq}(a, b) \& \text{Sq}(a, c) \rightarrow b = c,$$

$$\text{Sq}(a, c) \& \text{Sq}(b, c) \rightarrow a = b,$$

$$\neg \text{Sq}(a, 0),$$

$$\text{Ad}(a, b, c) \& \text{Ad}(a, b, d) \rightarrow c = d,$$

(Z*)

$$\text{Ad}(a, 0, a),$$

$$\text{Ad}(a, b, c) \& \text{Sq}(b, r) \& \text{Sq}(c, s) \rightarrow \text{Ad}(a, r, s),$$

$$\text{Mp}(a, b, c) \& \text{Mp}(a, b, d) \rightarrow c = d,$$

$$\text{Mp}(a, 0, 0),$$

$$\text{Mp}(a, b, c) \& \text{Sq}(b, r) \& \text{Ad}(c, a, s) \rightarrow \text{Mp}(a, r, s),$$

$$A(0) \& \forall x \forall y (\text{Sq}(x, y) \& A(x) \rightarrow A(y)) \rightarrow A(a).$$

Количество аксиом при переходе от системы (Z) к (Z*) увеличилось на четыре; а именно, добавились две формулы единственности для Sq и по одной для Ad и для Mp.

Теперь еще можно будет исключить при помощи явного определения символ 0. В самом деле, из аксиомы

$$\neg \text{Sq}(a, 0)$$

средствами исчисления предикатов мы получим сначала

$$\forall z \neg Sq(z, 0),$$

а затем

$$\exists x \forall z \neg Sq(z, x).$$

Тем самым оказывается выведенной первая формула единственности для

$$\forall z \neg Sq(z, a).$$

Вторую формулу можно получить из формулы

$$\forall z \neg Sq(z, a) \rightarrow a = 0,$$

которая сама получается применением модифицированной аксиомы индукции. Теперь ι -правило в сочетании с только что приведенной формулой дает нам равенство

$$[4] \quad 0 = \iota_x \forall z \neg Sq(z, x).$$

Аналогично тому, как мы поступали при исключении функциональных символов, мы можем снова обратить дедуктивную связь, взяв в качестве аксиом формулы единственности

$$\exists x \forall z \neg Sq(z, x),$$

$$\forall x \forall y (\forall z \neg Sq(z, x) \& \forall z \neg Sq(z, y) \rightarrow x = y),$$

которые мы ранее вывели с использованием символа 0, а в качестве явного определения для символа 0 равенство [4] (после введения при помощи ι -правила термина

$$\iota_x \forall z \neg Sq(z, x)).$$

Теперь, опираясь на эту модификацию формализма, мы можем следующим образом провести исключение символа 0: сначала вместо этого символа мы всюду подставим определяющий его ι -терм, а затем применим процедуру исключения ι -символов.

Если для замены ι -терма $\iota_x \forall z \neg Sq(z, x)$ при выполнении нашей процедуры взята переменная b , то аксиома

$$\neg Sq(a, 0)$$

перейдет в выводимую средствами исчисления предикатов формулу

$$\forall z \neg Sq(z, b) \rightarrow \neg Sq(a, b),$$

а три остальные формулы системы (Z^*) , содержащие символ 0 (т. е. формулы

$$Ad(a, 0, a), \quad Mp(a, 0, 0)$$

и модифицированная аксиома индукции), превратятся соответственно в формулы

$$\forall z \neg Sq(z, b) \rightarrow Ad(a, b, a),$$

$$\forall z \neg Sq(z, b) \rightarrow Mp(a, b, b)$$

и

$$\forall z \neg Sq(z, b) \& A(b) \& \forall x \forall y (Sq(x, y) \& A(x) \rightarrow A(y)) \rightarrow A(a),$$

которые нужно будет взять в качестве аксиом вместо этих формул.

Наконец, сказывается еще и то обстоятельство, что из аксиомы индукции в новом ее виде может быть выведена вторая из связанных с термом $\iota_x \forall z \neg Sq(z, x)$ формул единственности, которую мы взяли в качестве аксиомы. Действительно, если мы в новой аксиоме индукции вместо формульной переменной с именной формой $A(c)$ подставим формулу

$$\forall z \neg Sq(z, c) \rightarrow c = b,$$

которую сокращенно обозначим посредством $\mathfrak{A}(c)$, то ввиду выводимости формулы

$$\mathfrak{A}(b) \& \forall x \forall y (Sq(x, y) \& \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(y))$$

мы получим формулу

$$\forall z \neg Sq(z, b) \rightarrow \mathfrak{A}(a),$$

которая в подробной записи имеет вид

$$\forall z \neg Sq(z, b) \rightarrow (\forall z \neg Sq(z, a) \rightarrow a = b);$$

из этой формулы элементарным преобразованием с заменой свободных переменных связанными мы получим нужную нам формулу единственности. Таким образом, в качестве аксиомы она оказывается ненужной.

Другая формула единственности

$$\exists x \forall z \neg Sq(z, x)$$

в новой системе аксиом замещает прежнюю аксиому $\neg Sq(a, 0)$.

В итоге вместо системы (Z) мы получили некоторую систему (Z^{**}) , не содержащую никаких основных арифметических знаков, кроме предикатных символов Sq , Ad и Mp .

Изложенный на этом примере метод исключения функциональных знаков и индивидуальных символов играет важную роль в вопросах сведения целого ряда проблем, имеющих отношение к аксиоматическому методу, к проблемам специального типа.

С другой точки зрения введение функциональных знаков и индивидуальных символов может оказаться, наоборот, выгодным; в частности, иногда оно может быть использовано для частичного исключения экзистенциальных аксиом и для замены оставшихся

такими аксиомами, в которых встречаются только свободные переменные.

Например, если мы произведем обратный переход от системы (Z^{**}) к системе (Z) , то в результате введения штрих-функции аксиома

$$\exists x S q(a, x)$$

окажется ненужной, а вместо аксиомы

$$\exists x \forall z \neg S q(z, x)$$

появится аксиома

$$a' \neq 0,$$

не содержащая связанных переменных.

В расчете на это упрощение мы ввели в гл. VI штрих-символ и символ 0^1 , и с помощью этих символов нам удалось описать общую модель двух систем формул $(\mathfrak{D})$ и $(\mathfrak{F})$ при помощи системы аксиом без связанных переменных.

Теперь возникает вопрос о том, всегда ли исключение экзистенциальных аксиом путем введения функциональных знаков и индивидуальных символов может быть реализовано в виде перехода к некоторой равносильной системе аксиом.

Этим вопросом, который нашими предыдущими рассмотрениями был положительно решен лишь в отдельных случаях ²⁾, мы займемся в общем виде в начале следующего раздела нашего сочинения. Обсуждение этого вопроса попутно приведет нас к доказательству уже упоминавшейся ранее теоремы Эрбрана ³⁾, а отсюда — к преодолению той проблематики, с рассмотрения которой и начались наши исследования (мы имеем в виду наши сомнения в достаточности моделей финитной арифметики для установления непротиворечивости тех или иных систем аксиом).

Но проблема установления непротиворечивости ни в коем случае этим не исчерпывается, даже если мы ограничимся формализмом системы (Z) с добавлением функции $\mu_x A(x)$. Мы только знаем из теоремы об устранимости ι -символов, что в предположении непротиворечивости системы (Z) непротиворечивой оказы-

¹⁾ См. с. 267—270. То, что штрих-символ, введенный нами в целях изображения взаимно однозначного соответствия [в смысле модели формул $(\mathfrak{D})$], в то же самое время позволяет усилить экзистенциальную аксиому

$$\exists y (a < y)$$

до аксиомы

$$a' < a,$$

является своеобразной особенностью данного случая.

²⁾ К этим случаям мы еще вернемся при общем обсуждении проблемы.

³⁾ См. гл. IV, с. 169.

вается и та система, которая получается из (Z) в результате присоединения символа $\mu_x A(x)$ и добавления к числу аксиом формул (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) . Но непротиворечивость самой системы (Z) не вытекает ни из предыдущих результатов, ни из теоремы Эрбрана.

К доказательству непротиворечивости системы (Z) и к связанным с этим фундаментальным вопросам мы вернемся в последнем разделе нашего сочинения.

§ 6. Добавление: распространение теоремы о возможности замены аксиомы равенства (J_2) в случае добавления ι -правила

Здесь мы покажем, что доказанная в гл. VII теорема о возможности замены аксиомы равенства (J_2) или соответственно схемы равенства

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

специальными собственными аксиомами равенства ¹⁾ остается справедливой и в случае добавления ι -правила ²⁾. Наше рассмотрение с самого начала будет относиться к формализмам без формульных переменных, и в соответствии с этим аксиома равенства будет нами приниматься в виде схемы.

Мы будем исходить из рассуждения, приведенного в гл. VII. Нами было показано, что если формула $\mathfrak{A}(a)$ построена из индивидуальных переменных, предикатных символов, индивидуальных символов и знаков для математических функций с помощью символов исчисления предикатов, то формула

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

может быть выведена средствами исчисления предикатов из следующего списка аксиом, который мы для краткости обозначим через (i):

1. Формулы

$$a = a,$$

$$a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c).$$

2. Формулы вида

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(b)).$$

¹⁾ См. с. 456.

²⁾ В первом издании нашей книги это доказательство проводилось путем установления устранимости ι -символов. В новом измененном варианте этого доказательства нам нет необходимости отдельно рассматривать случай, когда ι -символы уже устранены.

3. Формулы вида

$$a = b \rightarrow (t(a) = t(b)),$$

где $\mathfrak{B}(a)$ и $t(a)$ обозначают предикатный символ и функциональный знак с аргументом a и, быть может, какими-нибудь другими аргументами.

Это рассуждение теперь нуждается в дополнении с учетом появления ι -символов. Прежде всего следует обратить внимание на осложнения, вызванные условиями, ограничивающими ι -правило (мы берем его здесь в первоначальном виде). Для какой-либо формулы $\mathfrak{B}(a, c)$ и терма c может оказаться, что выражение $\iota_x \mathfrak{B}(x, c)$ является термом, в то время как $\iota_x \mathfrak{B}(x, c)$ термом не является. В этом можно убедиться на простых примерах. Поэтому выражение $\mathfrak{A}(c)$ иногда может быть формулой без того, чтобы формулой было $\mathfrak{A}(c)$.

С учетом этого обстоятельства мы докажем наше утверждение в несколько уточненной формулировке: *Если a и b — термы, а $\mathfrak{A}(a)$ и $\mathfrak{A}(b)$ — формулы, то формула*

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

может быть выведена из аксиом (i) при помощи средств исчисления предикатов и ι -правил.

Это утверждение может быть доказано следующим образом. Проследивая построение формул, — аналогично тому, как это делалось в уже упоминавшемся рассуждении из гл. VII, — мы сначала убеждаемся в том, что формула

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

может быть выведена средствами исчисления предикатов из формул (i) и формул вида

$$a = b \rightarrow \iota_x \mathfrak{B}(x, a) = \iota_x \mathfrak{B}(x, b),$$

где $\iota_x \mathfrak{B}(x, a)$ и $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$ суть термы, которые входят в $\mathfrak{A}(a)$ или соответственно в $\mathfrak{A}(b)$ в качестве внешних ι -термов (в отличие от вложенных в другие ι -термы). Наше предположение о том, что $\mathfrak{A}(a)$ и $\mathfrak{A}(b)$ являются формулами, включает в себя допущение, что входящие в $\mathfrak{A}(a)$ и в $\mathfrak{A}(b)$ ι -термы [в частности, стало быть, и термы $\iota_x \mathfrak{B}(x, a)$, $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$] вводятся по ι -правилу при помощи соответствующих формул единственности. Разумеется, здесь вместо x может фигурировать и какая-нибудь другая связанная переменная.

Теперь каждую из формул

$$a = b \rightarrow \iota_x \mathfrak{B}(x, a) = \iota_x \mathfrak{B}(x, b)$$

можно будет вывести без использования аксиом равенства из некоторой формулы вида

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{C}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(b)),$$

в которой $\mathfrak{C}(a)$ и $\mathfrak{C}(b)$ содержат меньше ι -символов, чем $\mathfrak{A}(a)$ и $\mathfrak{A}(b)$. Действительно, если мы возьмем какую-нибудь не входящую ни в $\mathfrak{B}(x, a)$, ни в $\mathfrak{B}(x, b)$ свободную индивидуальную переменную (например, c), то формула

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{B}(c, a) \rightarrow \mathfrak{B}(c, b))$$

будет иметь указанный вид; при этом $\mathfrak{B}(c, a)$ будет содержать меньше ι -символов, чем $\mathfrak{A}(a)$, а $\mathfrak{A}(c, b)$ — меньше, чем $\mathfrak{A}(b)$, потому что $\iota_x \mathfrak{B}(x, a)$ является составной частью $\mathfrak{A}(a)$, а $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$ — составной частью $\mathfrak{A}(b)$. Далее, при помощи средств исчисления предикатов мы можем перейти от формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{B}(c, a) \rightarrow \mathfrak{B}(c, b))$$

к формуле

$$a = b \rightarrow \forall x (\mathfrak{B}(x, a) \rightarrow \mathfrak{B}(x, b)).$$

С другой стороны, применив формулы

$$\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{B}(x, a), a) \text{ и } \mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{B}(x, b), b)$$

и вторую связанную с $\iota_x \mathfrak{B}(x, b)$ формулу единственности, мы, как было показано ранее¹⁾, получим средствами исчисления предикатов формулу

$$\forall x (\mathfrak{B}(x, a) \rightarrow \mathfrak{B}(x, b)) \rightarrow \iota_x \mathfrak{B}(x, a) = \iota_x \mathfrak{B}(x, b),$$

а эта последняя, вместе с предыдущей формулой, по правилу силлогизма даст нам формулу

$$a = b \rightarrow \iota_x \mathfrak{B}(x, a) = \iota_x \mathfrak{B}(x, b).$$

Таким образом, в итоге получается, что при помощи средств исчисления предикатов, ι -правил и формул (i) формула

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

может быть выведена из формул вида

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{C}(a) \rightarrow \mathfrak{C}(b)),$$

у которых число входящих в них ι -символов меньше, чем у формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)).$$

¹⁾ См. с. 485.

Повторное применение этой процедуры в конце концов сводит вывод формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

к выводам таких формул

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{R}(a) \rightarrow \mathfrak{R}(b)),$$

которые вообще не содержат ни одного ι -символа. А эти формулы, как мы знаем, могут быть получены из формул (i) при помощи средств исчисления предикатов.

Тем самым для вывода формулы

$$a = b \rightarrow (\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b))$$

оказывается достаточно средств исчисления предикатов, ι -правила и формул (i), что и требовалось доказать.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аккерман (Ackermann W.) 19, 20, 187—188, 406—408, 509
 Аксиома индукции 325, 511
 — о параллельных 29
 Аксиоматика Евклида 45
 Аксиоматическая теория 122
 Аксиоматический способ построения теории 24
 Аксиомы как формулы 125
 — Пеано 272, 351
 — — (P_1) и (P_2) 273
 — порядка 28
 — равенства (J_1) и (J_2) 210
 — собственные 511
 — соединения 28
 Алгебра логики 83
 —, содержательный подход к ней 56
 —, формальная точка зрения в ней 56
 Анализ, аксиоматический 43
 —, выход за рамки финитной установки в нем 62
 Аргумент формулы 138
 Арифметизация понятия величины 70
 Арифметика 45, 351
 —, открытые проблемы 63
 —, рекурсивная 376
 —, формализация ее в (Z) 486
 Бема (Behmann H.) 189, 250
 Бернайс (Bernays P.) 11, 15—16, 19, 187
 Брауэр (Brouwer L. E. J.) 12—13, 24, 61, 71
 Буль (Boole G.) 11

Вайсберг (Wajsberg M.) 101, 160, 163
 Веблен (Veblen O.) 26, 36

Вейерштрасс (Weierstrass K.) 11
 Вейль (Weyl H.) 67
 Верифицируемая формула 294, 301, 305, 307, 336, 339, 343, 360, 363, 441, 449
 Верхняя грань 67
 Весли (Vesley R.) 15
 Взаимно простые числа 491
 Вложение ι -термов 472
 Возвратный перенос подстановок 278
 — — — при включении схемы индукции 328
 — — — наличии связанных переменных 286
 Вывод средствами исчисления предикатов 141
 — формальный 94
 Выделенная переменная рекурсии 353
 Выполнимость 31, 164, 167, 171
 — в конечном 233
 Выражение 77, 123

Гейтинг (Heyting A.) 102
 Гельмгольц (Helmholtz H.) 56
 Генетический способ построения теории 24
 Генцен (Gentzen G.) 14
 Гёдель (Gödel K.) 14, 19—20, 168, 187—188, 203, 502, 510
 Гильберт (Hilbert D.) 11, 13—16, 19—20, 23—24, 28—29, 39, 96
 Гипотетическое истолкование всеобщности 59

Двоичная дробь 66
 Двойственность 83, 151, 168
 Дедекин (Dedekind R.) 11, 265, 500, 502

- Дедекиндово определение бесконечности 265
 — сечение 64
 Дедуктивное равенство 192
 Дедукционная теорема 194
 Деление в рекурсивной арифметике 391
 — цифр 51
 Диагональная процедура 405
 Дизъюнкция 27, 75
 —, нульчленная 144
 —, распространенная на всю индивидуальную область 34
 —, n -членная 34
 Диофантово уравнение 455
 Доказательство как вывод 274
 — невозможности 54
 — независимости 37, 103
 Дополнение множества 166
- Евклид 23, 45, 51
- Закон исключенного третьего 62, 71
 — тождества 212
 Законы ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности в исчислении высказываний 79
 Замена свободных переменных связанными 250
 Заменимость дизъюнкции импликацией 81
 — связок исчисления высказываний 79—82
 Зенон 40
 Зифкес (Siefkes D.) 18
 Знак отрицания 27, 75
 Знаки для сообщения 46
- Идентификация переменных 209
 Изображение рациональных чисел целыми 64
 «Или» разделительное 82
 Именная переменная 522
 — форма 123
 Импликативная формула 99
 — —, регулярная 99
 Импликация 27, 76
 Индивидуальная область 24, 32
 — —, бесконечная 38, 42
 — —, пустая 32, 43
 Индивидуальные переменные 31, 121
 — —, свободные и связанные 130
- Индивидуальный символ 123
 Индукция 49, 371
 —, полная 49, 325
 Интенциональная логика 83
 Интерпретация 103
 Интуиционизм 71
 — как расширение финитной установки 71
 Исключение свободных переменных 279
 — формульных переменных 251—255
 — функциональных знаков 56
 — экзистенциальных высказываний 270
 Истинностное значение 75
 — —, выделенное 106
 Истинностные функции 74
 — —, выразимость их через $\&$, $\vee$ и $\neg$ 77
 — —, зависимость между ними 77
 Исходная формула 94, 142
 Исчисление бесконечно малых 64
 — второй степени 501
 — высказываний 83, 96, 115
 — предикатов 141, 144—145
 — —, одноместное 162, 188
 — —, —, расширенное 226
 — —, расширенное 276, 511
- Кальмар (Kalmár L.) 187—188
 Кантор (Cantor G.) 11, 39
 Карнап (Carnap R.) 511
 Квантор всеобщности 26, 135
 — существования 26, 135
 Класс с разрешимой проблемой выводимости 186
 — — — выполнимости 186
 Клаузиус (Clausius R.) 23
 Клейн (Klein F.) 13
 Клини (Kleene S. C.) 15, 532
 Количественные формулы 225
 Количество суждения 135
 Коллизия между связанными переменными 133, 470
 Компоненты формулы 161
 Конструктивный способ построения теории 24
 Континуум 41
 Контрапозиция 117
 Конъюнкция 27, 75
 —, нульчленная 144
 —, распространенная на всю индивидуальную область 135
 —, n -членная 34

- Крайзел (Kreisel G.) 18, 375
 Кронекер (Kronecker L.) 71
 Куайн (Quine W. V.) 143, 515
- Лейбниц (Leibnitz G. W.) 11
 Лесьневский (Leśniewski S.) 96
 Лёвенгейм (Löwenheim L.) 168, 250
 Лобачевский Н. И. 13
 Логика предикатов 121
 — —, теоретико-множественная 165
 — —, чистая 31
 Логическая сумма 83
 Логические знаки 26
 Логическое произведение 83
 Лукасевич (Lukasiewicz J.) 46, 101—103
 Льюис (Lewis C. I.) 99
- Максимум двух и трех чисел 387—388
 — конечной последовательности чисел 499
 Матиясевич Ю. В. 455
 Мендельсон (Mendelson E.) 532
 Метаматематика 73
 Метод арифметизации 25, 43
 — построения модели 45
 Модель 43
 Морган, де (de Morgan A.) 11
 Мюллер (Müller G.) 18
- Наибольший общий делитель 398
 Наименьший делитель, отличный от единицы 51
 Невыполнимость 35
 Независимость 37, 103
 — аксиом систем (A) и (B) 336, 340
 — термов от рекурсивно вводимых функциональных знаков 352
 Нейман, фон (von Neumann J.) 306, 502, 510
 Неопровержимость 169
 Непротиворечивость анализа 72
 — арифметики 39
 —, дедуктивная 43
 — логики предикатов 160
 — натурального ряда 39
 — системы аксиом 170
 — — (D) 440
 — элементарного исчисления со свободными переменными 360
- Неявное определение основных отношений посредством аксиом 30
 Нико (Nicod J.) 96
 Новиков П. С. 14
 Нормальная дизъюнкция 203
 — оценка 106
 — форма 83, 172, 182
 — — в одноместном исчислении предикатов 243
 — — — расширенном одноместном исчислении предикатов 226, 250
 — — дизъюнктивная 83
 — — конъюнктивная 83
 — — предваренная 182
 — — сколемовская 203
 — — совершенная дизъюнктивная 87
 — — — конъюнктивная 88
 Нумерация конечных числовых последовательностей 394
 — числовых пар 395
 Ньютон (Newton I.) 23
- Область субъектов 24
 Обобщенное правило подстановки 123
 Общезначимость 31, 168
 Объединение множеств 68, 166
 Определение 351
 —, рекурсивное 357
 —, явное 357, 476
 Опровержимость 168
 Основные отношения 122
 — правила 144
 — равенства 109
 — формулы исчисления предикатов 142
 Отношение $<$, определение его через $+$ 438
 — —, — — — $\div$ 370
 — —, — — через него отношений $\leq$, $>$ и $\geq$ 358
 — —, характеристика его аксиомами ($<_1$), ($<_2$), ($<_3$) 271—272
 Отрицание 27, 60, 75
 —, усиленное 60
 — элементарных суждений 60
 Оценка Лукасевича 110
- Парадокс Зенона 40
 Парадоксы, логические и теоретико-множественные 39
 Параметр рекурсии 353

- Пеано (Peano G.) 11, 14, 43, 269, 272—273, 351, 427
 Переводимость 173
 Переименование связанных переменных 133
 — — — при применении ι -правила 469
 Переменные в исчислении высказываний 78
 Пересечение множеств 166
 Петер (Peter R.) 401, 407—408, 411, 420, 510
 Пирс (Peirce C.) 11, 78
 Подстановка вместо формульных переменных 133
 — — —, ограничения на нее 133
 Подчинение 472
 —, косвенный способ 475
 Позитивная логика 99
 Позитивно тождественная формула 100
 Полином 56
 Полицер (Politzer см. Петер) 401, 408
 Полнота дедуктивной логики высказываний 97
 — исчисления предикатов 163
 — одноместного исчисления предикатов 239
 — правил замены 90
 — расширенного одноместного исчисления предикатов 250
 — системы (A) 322
 Понятие количества 55
 Посылки 92
 —, их противоречивость 119
 Правила для конъюнкции и дизъюнкции 79
 — — отрицания 79
 — замены 77
 — исчисления предикатов 141
 — преобразования составных высказываний 77
 —, производные 139, 144, 172
 — сокращения и распространения 79
 — устранения и введения импликаций 79
 — — — эквивалентности 79
 Правило переименования связанных переменных 133
 — подстановки в исчислении высказываний 94
 — разделения и соединения посылок 116
 — силлогизма 118
 — (γ) 145
 — (γ') 146
 Правило (δ) 146
 — (δ') 147
 — (ϵ) 174
 — (ϵ') 175
 — (ξ) 176
 — (η) 177
 — (θ) 178
 — (ι) 179
 — (κ) 181
 — (λ) 181
 Предикат 26, 30, 120
 —, 1-численный 211
 —, 2-численный 211
 Предикатная переменная 123
 Предикатный символ 122
 Представимость рекурсивных функций в системе (Z) 533
 — функций 433
 — функциональных знаков предикатными символами 538
 Преобразование 172
 Пресбургер (Presburger M.) 289, 440
 Принцип выбора 69
 — наименьшего числа 62, 348
 Пробег значений 33
 — — предиката 33, 121
 Проблема разрешимости 31, 169—172, 185—188
 — — для одноместного исчисления предикатов 239
 Простое число 51
 — — в рекурсивной арифметике 392
 Противоречие, дедуктивное 43, 119
 Равенство 27, 30, 171, 209
 Равносильность формализмов $\in$ и $\subseteq$ 540
 Раджо (Raggio A.) 314
 Различие между импликацией и гипотетическим суждением 127
 Разложение доказательства на нити 275
 Разложенное доказательство 278
 — — в обобщенном смысле 283
 Рассел (Russel B.) 11—12, 14, 39, 43, 95, 211, 468
 Редукция 289, 294
 —, ее однозначность 295, 449
 —, модифицированная 307, 337, 343
 — по Пресбургеру 441
 — при устранении ι -символов 518
 —, частичная 301, 449
 Рекурсивное введение функции 352
 Рекурсия 52
 —, нормированная 412

- Рекурсия, одновременная 403
 —, перекрестная 405, 407, 509
 —, примитивная 401, 499
 — пробега 402
 Рефлексивность 213
 Рёддинг (Rödding D.) 18
 Россер (Rosser B.) 18, 515—517, 532
 Сведение примитивных рекурсий с несколькими параметрами к рекурсиям с одним параметром и явным определением 396
 Сводимость к примитивной рекурсии 400
 Символ Шеффера 78, 96
 — 0 270
 Символы для цифр 358
 Симметрия 213
 Система аксиом первой ступени 199
 — исходных формул для дедуктивной логики высказываний 96
 — Лукасевича 103
 — Уайтхеда и Рассела 95
 — формул 266
 — ($\mathfrak{D}$) 268
 — ($\mathfrak{D}_0$) 261
 — ($\mathfrak{F}$), ($\mathfrak{G}$) 261
 — ($\mathfrak{F}_0$) 262
 — ($\mathfrak{G}^*$) 266
 — ($\mathfrak{S}$) 261
 — Фреге 95, 103
 — (A) 322
 — (A*) 336
 — (B) 335
 — (C) 428
 — (D) 438
 — (D₁) 440
 — (Z) 454
 — (Z*) 543
 — (Z**) 545
 Сколем (Skolem T.) 18, 168—169, 187—188, 203—204, 206, 208, 250, 376, 420
 Следствие 93
 Сложение в рекурсивной арифметике 376
 — цифр 48
 Собочинский (Sobociński B.) 96
 Сравнение 400, 441, 487
 Субъект 120
 Схема аксиом 305
 — заключения 94
 — индукции 325, 364
 —, обобщения ее 419
 — рекурсии 352
 Схема рекурсии, обобщения ее 419
 — формул 462
 — эквивалентности 119
 Схемы (α) и (β) 142
 Тарский (Tarski A.) 96, 101
 Теорема Евклида о простых числах 51
 — об однозначности редукции 295, 449
 — о частичной редукции 301, 449
 — Сколема 203
 — Ферма 455
 Теоретико-множественная логика предикатов 165
 Теория доказательств 73
 Терм 236, 271, 468
 —, рекурсивный 390
 Тождества элементарной алгебры 57
 Тождественная истинность 84
 — ложность 85
 Тождественность в конечном 160, 233
 Традиционная логика 73
 Транзитивность 213
 Уайтхед (Whitehead A. N.) 11, 95, 468
 Умножение цифр 49
 Условия конечности 162
 Устранение характеристик 511, 530
 Ферма (Fermat P.) 455
 Финитная установка 59
 Финитный способ рассуждений 45
 Формализация гипотетического суждения 127
 — процесса логического вывода 92
 Формализм 429
 —, расширение его 428
 — рекурсивной арифметики 400
 — системы (B) 429
 Формальная точка зрения 74
 Формула 27, 122, 131
 —, выводимая 142
 —, истинная 283
 —, — в логике высказываний 518
 — исчисления высказываний 93
 — — предикатов 518
 —, нумерическая 283
 —, общезначимая 167

Формула, опровержимая 168
 —, предваренная 182
 —, примарная 188, 250
 —, тождественная 124
 —, — исчисления высказываний 84, 142
 —, элементарная 122
 — $\mathfrak{D}$ 266
 — $\mathfrak{F}$ 162, 261
 — $\mathfrak{F}_0$ 262
 — $\mathfrak{G}$ 162, 261
 — $\mathfrak{H}$ 163, 261
 — $[u]$ 512
 — $\{i\}$ 516
 — $[i, B]$ 515
 — (1), (2) 147
 — (2'), (3), (3'), (4) 148
 — (5), (6) 149
 — (7) 150
 — (8), (9), (10), (10a) 152
 — (10b), (10c), (11), (12) 153
 — (13), (13a) 154
 — (13') 155
 — (14) 154
 — (14'), (15), (15a) 155
 — (16a), (16b), (17a), (17b) 156
 — (18), (19), (20) 156
 — 1), 2), 2a) 212
 — 3) 213
 — 4), 5), 6a), 6b)) 214
 — 7a)), 7b)) 215
 — 8a)), 8b)) 218
 — 9a)), 9b)) 219
 — 10a)), 10b)) 222
 Формулы единственности 467
 — (μ_1) , (μ_2) и (μ_3) 482
 Формульные переменные 123
 Фреге (Frege G.) 11—12, 14, 33, 39, 43, 95, 103, 121, 211
 Френкель (Fraenkel A. A.) 71
 Фундаментальная последовательность 64
 Функциональный знак 235, 267
 Функция 52, 121, 472
 — Аккермана 406, 509
 —, изображение ее ι -термом 472
 —, логическая 165
 —, математическая 239
 — Петер 408
 —, рекурсивная 390

Хазенъягер (Hasenjaeger G.) 17—18, 163, 333, 515, 517, 532
 Хантингтон (Huntington E. V.) 37
 Характеристика 511

Цауг (Zaugg W.) 18
 Цермело (Zermelo E.) 39, 70
 Цифры 34, 46, 271
 —, ликвидация их 46
 — первого и второго рода 307, 337, 343

Частичное суждение 59
 Чёрч (Church A.) 15, 172
 Числа как сокращения для цифр 47, 358
 Число, действительное 64
 —, рациональное 64

Шейнфинкель М. И. 101, 187
 Шеффер (Sheffer H. M.) 78, 96
 Шмидт А. (Schmidt A.) 21
 Шмидт Ф. К. (Schmidt F. K.) 17—18
 Шнайдер (Schneider H. H.) 143
 Шольц (Scholz H.) 17—18, 20
 Шрёдер (Schröder E.) 43
 Шрётер (Schröter K.) 532
 Штрих-символ 267
 Шютте (Schütte K.) 21, 163, 187—188, 532

Эквивалентность 77
 —, транзитивность ее 119
 Экзистенциальное утверждение с финитной точки зрения 59
 Экзистенциальные высказывания, исключение их 270
 Экстенциональная логика 83
 Экстраполяция, мысленная 41
 Элементарная логика высказываний 74
 Элементарное исчисление со свободными переменными 360
 Эрбран (Herbrand J.) 20, 169, 171—172, 188, 289, 546—547

Яськовский (Jaśkowski S.) 143

Barbara 156
 Darii 156
 Dictum de omni 94, 140

$\dot{i}$ -выполнимость 233
 $\dot{i}$ -тождественность 158, 233
 Modus ponens 94
 Tertium non datur 62
 — — — в случае бесконечных последовательностей 68
 — — — для предикатов 165
 — — — целых чисел 62
 — — — с финитной точки зрения 61
 ι -аксиома 512
 ι -выражение 473
 ι -правило 468
 ι -правило, обобщение его 512
 ι -символ 468
 ι -терм 472
 ι -терм, собственный 515
 μ -символ 481