Д. ГИЛЬБЕРТ и В. АККЕРМАН

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

GRUNDZUGE
DER THEORETISCHEN LOGIK

Von

D. HILBERT und W. ACKERMANN

zweite, verbesserte Auflage
New York
1946

Д. ГИЛЬБЕРТ и В. АККЕРМАН

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Перевод с немецкого
А. А. ЕРОФЕЕВА

Редакция, вступительная статья и комментарии
проф. С. А. ЯНОВСКОЙ

1947
Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

ПРЕДИСЛОВИЕ
К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Историю излагаемой в этой книге теоретической или *математической*, как правильнее ее называть, логики начинают обычно с «универсальной характеристики» *Лейбница*, после чего переходят к работам *А. де Моргана*, *Буля*, *Джевонса*, *Шредера*, *Пирса*, принадлежащим XIX в. И хотя это в известной мере правильно[1], все же, в основном, математическая логика должна быть отнесена к числу новейших научных дисциплин, характерных именно для науки XX в.

Прежде всего, в XX в. математическая логика, по существу, стала частью математики. Существует ряд соображений, в силу которых ей следует называться именно математической логикой. Ее рост обусловливается, в первую очередь, потребностями математики. Создание неевклидовых геометрий, в истории которых основное место принадлежит нашему соотечественнику *Н. И. Лобачевскому*, и возникновение методов современной теоретико-множественной математики породили и в математике ту крутую ломку понятий, подлинную двойственную сущность которой вскрыл *В. И. Ленин* в «Материализме и эмпириокритицизме». Наука, с одной стороны, испытала невиданное еще в ее истории развитие и притом не только количественное, но и качественное; она стихийно встала на путь материалистической диалектики. Но в условиях империализма самый прогресс науки породил реакционные попытки идеалистической философии паразитировать на науке, использовать каждый новый успех ее в своих целях. Именно такого рода картина, на деталях которой мы не имеем здесь возможности остановиться, развернулась и в области проблем обоснования математики, лежащих на границе математики и логики. Уже в самом начале исследований, приведших в дальнейшем к созданию неевклидовых геометрий, математикам пришлось заняться разбором различных вариантов рассуждений, претендовавших на право называться *доказательствами* евклидовского постулата о параллельных. Так как при

---

[1] Если не забывать при этом оригинальные работы русского ученого — казанского математика и логика П. С. Порецкого.

этом чаще всего обнаруживалось, что в числе посылок явно или неявно используется допущение, попросту равносильное самому постулату, то возникла естественная потребность выявить все посылки, на которых в действительности построена система «Начал» Евклида. Однако завершена эта работа была лишь в начале XX в. в известных «Основаниях геометрии» *Д. Гильберта*. *Гильберт* точно перечислил основные неопределяемые понятия геометрии, с помощью которых определяются остальные ее понятия, и основные недоказываемые предложения, с помощью которых доказываются все остальные предложения. Но для того чтобы проверить, что перечисленных аксиом действительно достаточно для доказательства всех вообще истинных предложений некоторой науки и что с их помощью нельзя, наоборот, вывести ложное заключение, нужно было располагать обзором не только всех принимаемых посылок, но и всех допустимых средств вывода из них новых предложений. В последней четверти XIX в. за такую работу взялись независимо друг от друга *Пеано* и *Фреге*. Благодаря тому, что при этом пришлось заняться выяснением самых глубоких и основных логических связей между наиболее элементарными понятиями и предложениями математики, у *Фреге* создалось даже впечатление, что ему удалось определить и неопределяемые понятия арифметики, доказать и недоказываемые в ней предложения, сведя их к более общим понятиям и предложениям («законам») логики. Еще при жизни *Фреге*, в начале XX в., *Рэссел* обнаружил, однако, в его системе противоречие. Как оказалось,—несмотря на то, что многие из вскрытых *Фреге* конкретных связей действительно имеют место,—система в целом не годится, так как с ее помощью можно доказать все что угодно. Чтобы избежать так называемых «парадоксов расширенного исчисления предикатов», *Рэссел* придумал свою известную «разветвленную теорию типов», с которой сразу же оказались связанными новые трудности, обусловленные его половинчатой и путаной субъективистской установкой. От вышедшего в 1910—1913 гг. трехтомного труда *Рэссела и Уайтхеда* «Principia mathematica» можно было итти дальше по двум направлениям: можно было, как это и случилось с его авторами, занять позиции все более и более агрессивного наступления на материализм и защиты схоластики (вооруженный такой идеологией Б. Рэссел не случайно пропагандирует сейчас применение атомных бомб против СССР), и можно было с меньшими или большими колебаниями (в условиях империалистического общества такие колебания вполне естественны), более или менее стихийно вступить на путь отказа от субъективистских установок *Рэссела*. И тот и другой путь были действительно использованы буржуазными учеными. Необходимо здесь же подчеркнуть, что идеалистические установки неизменно приводили к новым трудностям и что, наоборот, самые ценные достижения принадлежат математикам, вставшим на путь отказа от субъективизма и формализма и связанных с ними ограничений запаса содержательных средств нашего мышления.

Заметим также, что создание особой теории математического доказательства (объектом изучения которой являются уже не собственные предметы математики—вроде *чисел*, *точек*, *прямых*, а также *функций*, *множеств* или *отношений* между числами, точками и т. п.,—а приемы и методы обращения с ними в математике) в руках специалистов-математиков оказалось нужным не только в целях обоснования математики и решения возникающих здесь трудностей: с помощью теории доказательства был уже получен—продолжает получаться и сейчас—ряд специальных и притом все более и более важных математических результатов.

Но математическая логика оправдывает свое название не только потому, что она выросла из потребностей математики и что подавляющее большинство новейших результатов, добытых ею, принадлежит специалистам-математикам. Она строится сама как типичная математическая дисциплина и может быть рассматриваема не только как логика математики, но и как математика логики. Ибо она является в значительной мере результатом применения математических методов к проблемам формальной логики.

И все же знакомство с ней нужно не только математикам. Не говоря уже о том, что философские трудности обоснования математики интересуют и философов, конкретные проблемы теории математического доказательства и, особенно, применения математики к вопросам логики должны интересовать и специалистов-логиков. Овладев элементами математической логики, последние смогут познакомиться в дальнейшем с рядом более интересных для них вопросов. Они встретят здесь и конкретные результаты, относящиеся к выяснению соотношения между содержательной истинностью и формальной доказуемостью; и полное решение вопроса о границах возможностей последней; и попытки построения выходящей за рамки непосредственных потребностей математики *логики модальностей*; и некоторый подход к проблемам *индуктивной логики*; и ряд проблем, непосредственно связанных с обобщениями классической теории силлогизмов по Аристотелю; и даже чисто технические приложения,—например, простейшей части математической логики, так называемого «исчисления высказываний», к построению электрических релейно-контактных схем.

Число работ по математической логике и ее приложениям интенсивно растет. Как уже было отмечено, основные результаты в этой области принадлежат специалистам-математикам. Они опубликованы по преимуществу в математических журналах. Из работ советских ученых отметим принадлежащие *Д. А. Бочвару, В. И. Гливенко. И. И. Жегалкину, А. Н. Колмогорову, А. И. Мальцеву, А. А. Маркову, П. С. Новикову, М. И. Шейнфинкелю, В. И. Шестакову.* Большинство из них напечатано в «Математическом сборнике», «Докладах» и «Известиях» (математическая серия) Академии Наук СССР, «Ученых записках» Московского университета. Но все же в настоящее время не выходит почти ни одной статьи или книги по логике, даже элементарного учебника, в той или иной мере не учитывающей результатов и методов современной математической логики. Нет буквально ни одного раздела математической логики, даже самого элементарного, где, казалось бы, все уже давно выяснено, который не подвергался бы дальнейшей разработке. И притом подчас с помощью довольно сильных средств современной математики (вроде алгебраических: теории структур, теории колец и алгебр). В целях получения топологических интерпретаций для различных видоизменений исчисления высказываний—простейшим случаем такой интерпретации является обычное изображение понятий кругами—строятся, например, так называемые *булевские алгебры с замыканием*, примыкающие к топологии (и в свою очередь дающие затем возможность перефразировать формальное изучение множеств в некоторые виды топологий).

Чтобы иметь возможность следить за современной литературой по математической логике, необходимо поэтому основательно проработать, разобравшись даже в деталях доказательств, систематический курс, посвященный аппарату математической логики. От начинающего, особенно если он не привык к чтению математической литературы, это может потребовать значительной работы, но никакого специального знакомства с математикой при этом все же не требуется. Не пройдя же такой предварительной стадии ознакомления с техническим аппаратом, невозможно следить критически за обширной литературой по математической логике. А следить нужно именно критически. Как уже было отмечено, в зарубежной литературе по математической логике и ее приложениям мы можем встретиться и с ценными научными результатами и с реакционными идеалистическими поползновениями использовать их в целях пропаганды мракобесия. Использовать вопреки тому, что чем сильнее оказывается полученный результат, тем яснее для нас, что он подтверждает правильность философских позиций диалектического материализма; вопреки тому, что и буржуазным ученым фактически удается получать свои наиболее важные результаты ценою вынужденного отказа от субъективизма и мистики.

Известный специалист по математической логике *К. Гедель* недаром вынужден признать, что трудности, связанные с философскими проблемами математики в трактовке их *Расселом*, обусловлены субъективизмом последнего. Чтобы избежать трудностей этого рода, необходимо признать, утверждает *Гедель*, что множества вещей и определяющие их свойства и отношения существуют реально, независимо от наших субъективных конструкций. «Допущение таких объектов,—рассуждает он,—столь же законно, как и допущение физических тел... Они в том же смысле необходимы для получения удовлетворительной системы математики, как физические тела... для удовлетворительной теории наших ощущений, и в обоих случаях невозможно интерпретировать предложения об этих сущностях, как предложения о «данных». Чтобы судить о подлинном смысле этих утверждений, нужно было бы знать, правда, как понимает *Гедель* процесс образования абстракций, но во всяком случае достаточно показательно уже и то, как воспринимает установку *Геделя* рецензирующий его работу *Бернайс*. «Характеризуя в целом установку *Геделя* по философскому вопросу логического обоснования математики,—пишет *Бернайс*,—основной пункт следует видеть в его отказе от того вида феноменализма, который стремится «отмахнуться» от содержания математики, и в привлечении им внимания к тому, что обще математике и теоретической физике в смысле необходимости предполагать объекты и отношения существующими независимо от наших восприятий и умственных построений».

А наряду с этим мы можем встретить утверждение, принадлежащее тоже довольно крупному специалисту *Карри*, что «реалистическая точка зрения, очевидно, не должна приниматься всерьез в настоящее время. Конечно, она является первоначальным взглядом — математика первобытных народов существенно эмпирична, и она приемлема для простых арифметических предложений, таких как $2+2=4$. Но то обстоятельство, что инфинититстские концепции современной математики не имеют прообраза во внешнем окружении, есть пункт, не требующий разработки». Конечно,—добавим к этому мы,—*Карри* не имеет представления о диалектическом материализме и прибегает к излюбленному противниками материализма приему его вульгаризации. Наоборот, идейная — с позиций марксизма-ленинизма—борьба с идеалистическими извращениями предполагает такое владение техникой дела, которое позволяет повернуть против врага его же собственное оружие.

Предлагаемый вниманию читателя перевод руководства по элементам математической логики *Д. Гильберта* и *В. Аккермана* содержит систематическое построение аппарата. Книга выросла из курса лекций известного математика конца XIX и первых трилцати лет XX вв. *Д. Гильберта* и написана его учеником *Аккерманом*. Философские проблемы, связанные с математической логикой и ее приложениями к основаниям математики, в том числе и опровергнутые дальнейшим развитием науки формалистические установки самого *Гильберта*, в ней вообще не обсуждаются. Книга была намечена первоначально как введение в появившуюся позже двухтомную монографию *Д. Гильберта* и *П. Бернайса*, посвященную «Основаниям математики» и содержащую подробный разбор основных результатов в этой области, доведенный до 1940 г. Поэтому в ней не затрагиваются, или почти не затрагиваются, вопросы так называемой *металогики*, относящиеся к общей теории построения логических «формализмов», обсуждению методов и возможностей доказательства их непротиворечивости и полноты; не доказывается и введенная в этой связи, но выросшая затем в общую теорию алгоритмических методов математики теория *рекурсивных функций*, а также использующая последнюю «арифметизация металогики», принадлежащая *Геделю*. Не доказывается, хотя и выясняется необходимость такого доказательства, совместность так называемого «узкого исчисления предикатов», про законы которого можно сказать, что они экстраполированы из изучения *конечных* областей предметов, с предположением о *бесконечности* области, т. е. наше право рассуждать в известных случаях о бесконечных областях предметов так, как если бы они были конечными. Совсем не рассматриваются отличные от классической логики логические «формализмы», вроде не пользующегося законом исключенного третьего «исчисления проблем» *Колмогорова* или различных многозначных «логик» и т. п.

Авторы строго ограничивают себя самым необходимым материалом, но зато дают все детали доказательств. Читатель, внимательно проработавший книгу, будет действительно владеть техникой дела. Книга написана очень сжато и лаконично и рассчитана на читателя, привыкшего пользоваться математической литературой. Учитывая интересы более широкого круга читателей, мы снабдили ее несколькими комментариями, являющимися не дополнениями к ней, а, в первую очередь, пояснениями. Прежде всего это относится к комментарию к первым двум параграфам второй главы, интересной для преподавателя элементарной логики, поскольку она представляет собой известную формализацию логики Аристотеля.

Второе издание книги, с которого сделан перевод, значительно отличается от первого. В нем исправлены некоторые неточности первого издания, например нечеткая формулировка правил подстановки для «узкого исчисления предикатов». Интересны и существенны добавленные к третьей главе доказательства полноты и независимости для системы аксиом и правил «узкого исчисления», содержащие, в частности, известный результат *Лёвенгейма*, от которого датируют начало выяснения границ возможностей для логических «исчислений». Значительно улучшено содержащееся в четвертой главе изложение «расширенного исчисления», имеющего особое значение ля решения философских проблем обоснования математики. Однако в этой связи нужно отметить следующее. С целью справиться с так называемыми «семантическими» парадоксами *Рэссел* ввел свою «разветвленную теорию типов», которую распространил при этом на всю математику, создав таким образом для математики ряд новых трудностей. Но если отбросить субъективистские установки *Рэссела*, то, поскольку «семантические парадоксы» вообще не угрожают математике, в применении к ней оказывается достаточной «простая теория типов». Из второго издания своего учебника авторы совсем исключили поэтому «разветвленную теорию» и обсуждение связанных с нею трудностей. Для чтения литературы по философским проблемам математики знакомство с этой теорией, однако, необходимо. Кроме того, с чисто логической стороны «семантические парадоксы» не только представляют самостоятельный интерес, но и широко используются в упомянутых выше общих металогических исследованиях. Нам представлялось поэтому целесообразным не только привести, как это сделали авторы, самые парадоксы, но рассказать и о возможных способах справиться с ними, предупредив читателя, что сложный логический аппарат «разветвленной теории типов» имеет смысл лишь в применении к определенным системам аксиом, о которых без уточнений, предусматриваемых этой теорией, нельзя рассуждать по правилам, более или менее соответствующим законам обычной формальной логики. Мы сочли поэтому необходимым добавить в приложении параграфы из первого издания книги, посвященные «разветвленной теории типов» и связанным с нею трудностям.

Д. Гильберт разрабатывал аппарат математической логики в надежде с его помощью оправдать свою формалистическую и идеалистическую точку зрения на математику, как на совокупность лишенных содержания формул, которые пишутся по определенным правилам. Однако действительное развитие логики, и притом с помощью построенного самим же Гильбертом аппарата, обнаружило неосуществимость его надежд. Развитие науки и в этой области неизменно подтверждает правильность философских установок марксизма-ленинизма. Но реакционные буржуазные ученые не хотят признавать этого. Они упорно борются против всякого проявления материализма. И притом все более и более агрессивно. Одни потерпевшие крушение идеалистические «надежды» сменяются другими, еще более реакционными. В руках исследователя, вооруженного передовой марксистско-ленинской философией, и математическая логика становится не только орудием открытия новых истин, но и средством разоблачения реакционной идеологии.

В применении к математической логике нам особенно следует помнить партийное указание, сделанное товарищем А. А. Ждановым в его выступлении на дискуссии по книге Г. Ф. Александрова «История западно-европейской философии». «Современная буржуазная наука, — говорит А. А. Жданов, — снабжает поповщину, фидеизм новой аргументацией, которую необходимо беспощадно разоблачать». «Кому же, как не нам — стране победившего марксизма и ее философам, — возглавить борьбу против растленной и гнусной буржуазной идеологии, кому, как не нам, наносить ей сокрушающие удары!»

С. Яновская

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРЕОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга излагает теоретическую логику (называемую также математической логикой, логическим исчислением или алгеброй логики) в той форме, которую она приобрела в моих университетских лекциях по принципиальным вопросам математики. («Принципы математики» — зимний семестр 1917/18 гг.; «Логическое исчисление» — зимний семестр 1920 г.; «Основания математики» — зимний семестр 1921/22 гг.). При подготовке этих лекций я пользовался существенной помощью и советами моего коллеги Бернайса; он же самым тщательным образом обработал лекции. Использовав и дополнив возникший таким образом материал, мой ученик Аккерман, выдвинувшийся тем временем благодаря значительным самостоятельным работам в области оснований математики, дал приводимое ниже расчленение и окончательное изложение всего материала.

Книга должна служить одновременно целям подготовки и облегчения понимания следующей книги, которую мы с Бернайсом в скором времени собираемся выпустить и которая трактует основания математики тем же самым методом, какой я (также при деятельнейшем участии Бернайса) изложил в ряде трудов: Neubegründung der Mathematik. — Abhandlungen des mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität, Bd. 1, стр. 157, 1922; Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Ann., Bd. 88, стр. 151, 1922; Über das Unendliche, Math. Ann., Bd. 95, стр. 161, 1925.

Гёттинген, 16 января 1928 г. *Гильберт*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОГОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании «Основ теоретической логики» сохранены везде конструкция и последовательность первого издания. Однако достижения науки за последнее время сделали необходимым внимательный просмотр материала и внесение различных улучшений и дополнений, которое необходимо было сделать, не выходя за рамки прежнего объема книги.

По существу, главы I и II не претерпели изменений; исключением является только краткий обзор более новых исследований по аксиоматике исчисления высказываний в главе I. От разработки изложения исчисления классов в главе II, само по себе желательной, мы пока отказались, так как это исчисление в общем построении книги занимает все же изолированное положение. В главе III прежде всего улучшена редакция правил вывода для исчисления предикатов; прежняя формулировка была недостаточно точной. Добавлены отсутствовавшие в первом издании доказательства независимости и полноты использованной в этой главе системы аксиом; раздел о проблеме разрешимости дополнен обзором более новых результатов. Глава IV могла быть подвергнута сокращению, поскольку подробное рассмотрение разветвленной теории типов Рэссела и Уайтхеда оказалось ненужным, после того как подавляющее большинство исследователей отказалось от этой теории. За счет этого оказалось возможным существенно улучшить и пополнить построение исчисления предикатов второй ступени и ступенчатого исчисления вообще.

Терминология была приспособлена к «Grundlagen der Mathematik» Гильберта и Бернайса. Например, выражение «функциональное исчисление» заменено повсюду на «исчисление предикатов». Выражения «логическая сумма» и «логическсе произведение», в соответствии с общепринятым логическим слсвсупотреблением, переделаны повсюду в «конъюнкцию» и «дизъюнкцию».

Господину Н. Бернайсу (Цюрих), который прочел корректуру в гранках, я особенно обязан за многочисленные советы. За различные мысли и указания я благодарю также господ Гентцена (Геттинген), который просмотрел рукопись, Арнольда Шмидта (Марбург) и Шольца (Мюнстер). Всем им выражаю свою искреннюю благодарность.

Еургштейнфурт, ноябрь 1937 г.

В. Аккерман

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая логика, называемая также *математической* или *символической логикой*, есть применение формального метода математики к области логики. Она применяет к логике тот же язык формул, который уже издавна употребляется для выражения математических отношений. В настоящее время было бы утопией при построении какой-либо математической дисциплины пытаться обойтись лишь обычным языком. Большие успехи, которые сделаны в математике, например в алгебре, со времен античности, обусловлены в значительной степени тем обстоятельством, что удалось найти полезный и продуктивный формализм. Чего удалось достичь благодаря языку формул в математике, то же должно быть получено с его помощью и в теоретической логике, а именно: точная научная трактовка ее предмета. Логические связи, которые существуют между суждениями, понятиями и т. д., находят свое выражение в формулах, толкование которых свободно от неясностей, какие легко могли бы возникнуть при словесном выражении. Переход к логическим следствиям, совершающийся посредством умозаключения, разлагается на свои последние элементы и представляется как формальное преобразование исходных формул по известным правилам, которые аналогичны правилам счета в алгебре; логическое мышление отображается в *логическом исчислении*. Это исчисление делает возможным успешный охват проблем, перед которыми принципиально бессильно чисто содержательное логическое мышление. К таковым принадлежит, например, проблема: как можно охарактеризовать предложения, которые вообще могут быть выведены из данных посылок. Особо важное значение логическое исчисление приобрело в последние десятилетия еще и потому, что оно развилось в необходимое вспомогательное средство исследования основ математики.

Идея математической логики впервые в ясной форме была выдвинута Лейбницем. Первые результаты получили де Морган (1806—1876) и Буль (1815—1864). С Буля начинается все дальнейшее развитие. Из числа его последователей новую науку обогатили Джевонс (1835—1882) и прежде всего Пирс (1839—1914). Шредером, в его «Vorlesungen über die Algebra der Logik» («Лекции по алгебре логики», 1890—1895), были систематически собраны и усовершенствованы различные результаты, добытые его предшественниками. «Лекции по алгебре логики» представляют собой в известной степени заключительное звено в цепи развития, начинающегося с Буля.

Отчасти независимо от развития булевско-шредеровской алгебры логическая символика получила новый стимул для своего развития благодаря потребностям математики в точном обосновании и строгом аксиоматическом изложении. Г. Фреге опубликовал свои труды «Begriffsschrift» («Исчисление понятий», 1879) и «Grundgesetze der Arithmetik» («Основные законы арифметики», 1893—1903). Пеано и его сотрудники начали в 1894 г. издание «Formulaire de Mathématiques» («Формуляр математики»), в котором все математические дисциплины должны были быть представлены в логическом исчислении. Появление «Principia mathematica» (1910—1913) Уайтхеда и Рэссела является высшей точкой этого развития. В недавнее время Гильберт в ряде трудов и в университетских лекциях использовал логическое исчисление для того, чтобы на новом пути достичь такого построения математики, которое дает возможность установить непротиворечивость положенных в основу посылок. Первое связное сообщение об этих исследованиях появилось в настоящее время в первом томе «Grundlagen der Mathematik» («Основания математики», 1934) Гильберта и Бернайса.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Так называемое исчисление высказываний составляет первую необходимую часть математической логики. Под высказыванием следует понимать каждое предложение, в отношении которого имеет смысл утверждать, что его содержание истинно или ложно. Например, высказываниями являются: «математика есть наука», «снег черен», «9 есть простое число». В исчислении высказываний не входят в более тонкую логическую структуру предложений, структуру, которая выражается в связи между субъектом и предикатом. Высказывания в нем рассматриваются как целое, в их логической связи с другими высказываниями.

§ 1. Введение основных логических связей

Высказывания могут определенным образом соединяться в новые высказывания. Например, можно из двух высказываний: «2 меньше 3», «снег черен» образовать новые высказывания: «2 меньше 3 *и* снег черен», «2 меньше 3 *или* снег черен», «*если* 2 меньше 3, *то* снег черен». Наконец, можно из высказывания «2 меньше 3» образовать новое высказывание: «2 *не* меньше 3», которое выражает логическую противоположность первого высказывания.

Соединения высказываний здесь разговорно выражаются словами: «*и*», «*или*», «*не*», «*если — то*».

Эти основные соединения высказываний мы выразим соответствующей символикой. Для обозначения высказываний будем употреблять большие латинские буквы: X, Y, Z, U, ... Для выражения логической связи высказываний мы вводим следующие 5 знаков:

1. $\overline{X}$ (читается «*не* X») обозначает контрадикторную противоположность X. $\overline{X}$ обозначает высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно.

2. $X \& Y$ (читается «X *и* Y») обозначает высказывание, которое истинно в том и только в том случае, если как X, так и Y истинны.

3. $X \vee Y$ (читается «X *или* Y») обозначает высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда по крайней мере одно из двух высказываний X, Y является истинным.

4. $X \rightarrow Y$ (читается «*если* X, *то* Y») обозначает высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда X истинно и Y ложно.

5. $X \sim Y$ (читается «X *равнозначно* Y»), что пишут также $X \rightleftarrows Y$ или $X \leftrightarrow Y$, обозначает высказывание, которое тогда и только тогда истинно, когда X и Y оба истинны или X и Y оба ложны. $X \sim Y$ означает, таким образом, что X и Y имеют одно и то же значение истинности или ложности.

Относительно 3. следует заметить, что связь «X или Y» не нужно смешивать с исключающим «или» в смысле латинского «*aut—aut*». Напротив, это «или» имеет значение «или также» в смысле латинского «*vel*», т. е. допускает возможность сосуществования X и Y [1].

Соотношение «если X, то Y» не следует понимать как выражение для отношения основания и следствия. Напротив, высказывание $X \rightarrow Y$ истинно всегда уже в том случае, когда X есть ложное или же Y истинное высказывание.

Так, например, следующие высказывания следует считать истинными:

Если «дважды 2 равно 4», то «снег бел».

[1] Исключающее «или—или» может быть выражено при помощи некоторой комбинации основных знаков. «Или X или Y» является отрицанием $X \sim Y$ и выражается так: $\overline{X \sim Y}$.

Если «дважды 2 равно 5», то «снег бел».

Если «дважды 2 равно 5», то «снег черен».

Ложным же было бы высказывание: если «дважды 2 равно 4», то «снег черен». Все же соотношение $X \rightarrow Y$ имеет общим с соотношением основания и следствия то, что в случае истинности $X \rightarrow Y$ из истинности X можно заключить об истинности Y.

Соотношение $X \sim Y$ не понимается здесь как равносильность по смыслу X с Y; оно имеет место между любыми двумя истинными, а также между любыми двумя ложными высказываниями. Например, высказывания

$$(2 \text{ и } 2 \text{ равно } 4) \sim (\text{снег бел}),$$

$$(2 > 3) \sim (\text{снег черен})$$

истинны.

Особую важность имеет еще то общее замечание, что, в силу нашего определения основных логических связей, *истинность или ложность сложного высказывания зависит только от истинности и ложности составляющих высказываний, а не от их содержания*. Если сокращенно обозначить истинное высказывание буквой $\mathfrak{R}$, а ложное—буквой $\mathfrak{F}$, то, например, связь $\rightarrow$ характеризуется тем, что высказывания $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ являются истинными, а высказывание $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{F}$ — ложным. Для связи & высказывание $\mathfrak{R} \& \mathfrak{R}$ является истинным, а все остальные: $\mathfrak{R} \& \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \& \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \& \mathfrak{F}$ — ложными. Дальше, $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{R}$ — истинны, а $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}$ — ложно. Связь $\sim$ характеризуется тем, что $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{F}$ — истинны, между тем как $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{R}$ — ложны. Наконец, $\overline{\mathfrak{R}}$ ложно, $\overline{\mathfrak{F}}$ истинно. Таким образом, мы имеем право рассматривать основные связи как функции истинности (Wahrheitsfunktionen), т. е. как определенные функции, для которых в качестве аргументов и в качестве значений функций рассматриваются только $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F}$.

Для формальной характеристики введенных операций следует заметить, что только отрицание $\overline{X}$ одночленно, между тем как все остальные операции являются двучленными.

§ 2. Эквивалентности; заменяемость основных связей

Применяя несколько раз основные связи, можно образовать из данных высказываний более сложные связи высказываний. Например, из основных высказываний X, Y, Z возникает таким образом сложное высказывание $((X \to Y) \& (Y \to Z)) \& (X \vee Z)$.

Каждое такое сложное высказывание представляет так же, как и простые связи высказываний, определенную функцию истинности. В упомянутом сложном высказывании мы имеем для X, Y, Z восемь возможных троек значений; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$. Каждой тройке формулой

$$((X \to Y) \& (Y \to Z)) \& (X \vee Z)$$

придается соответственно значение $\mathfrak{R}$ или $\mathfrak{F}$. Например, комбинации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$ соответствует значение $\mathfrak{F}$. В самом деле, согласно определению основных связей, мы можем заменить

$$((\mathfrak{F} \to \mathfrak{R}) \& (\mathfrak{R} \to \mathfrak{F})) \& (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F})$$

на

$$(\mathfrak{R} \& \mathfrak{F}) \& \mathfrak{F},$$

дальше на $\mathfrak{F} \& \mathfrak{F}$ и, наконец, на $\mathfrak{F}$.

Замечательно, что некоторые различные из этих связей равнозначны, т. е. выражают ту же самую функцию истинности. Так, $\overline{\overline{X}}$ равнозначно с X: двойное отрицание означает то же самое, что и утверждение. В самом деле, $\overline{\overline{X}}$, точно так же как X, при подстановке $\mathfrak{R}$ принимает значение $\mathfrak{R}$ и при подстановке $\mathfrak{F}$ — значение $\mathfrak{F}$. Такие равнозначащие связи высказываний мы будем называть в дальнейшем «эквивалентными» и будем писать кратко

$$\overline{\overline{X}} \text{ экв } X\text{.[1]} \qquad (1)$$

Сейчас мы установим ряд других эквивалентностей. Прежде всего обнаруживается аналогия способа применения знаков $\&$ и $\vee$ со знаками алгебры $+$ и $\cdot$. Именно, имеют место следующие эквивалентности:

$$X \& Y \text{ экв } Y \& X, \qquad (2)$$

$$X \& (Y \& Z) \text{ экв } (X \& Y) \& Z, \qquad (3)$$

$$X \vee Y \text{ экв } Y \vee X, \qquad (4)$$

$$X \vee (Y \vee Z) \text{ экв } (X \vee Y) \vee Z, \qquad (5)$$

$$X \vee (Y \& Z) \text{ экв } (X \vee Y) \& (X \vee Z). \qquad (6)$$

Истинность этих (и всех иных) эквивалентностей может быть установлена, как явствует уже из сказанного, следующим образом: берем все возможные комбинации, которые можно образовать из $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F}$ для основных высказываний, и убеждаемся, что для каждой из таких комбинаций обе стороны рассматриваемой эквивалентности всякий раз дают одинаковое значение истины или лжи. Эту проверку предоставляем читателю.

Из эквивалентностей (2) — (6) следуют *коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный* законы. В силу этой аналогии с алгеброй, $X \& Y$ называют также *логической суммой*, а $X \vee Y$ — *логическим произведением*. Из приведенных законов следует, что логические выражения можно, как в алгебре, «перемножать» или выносить за скобки общий множитель. С тем же, впрочем, успехом мы могли бы назвать $X \& Y$ логическим произведением, а $X \vee Y$ — логической суммой, и такое обозначение в логике является даже более употребительным. Дело в том, что, в отличие от

[1] Следует заметить, что употребленное здесь сокращенное обозначение экв не принадлежит к нашим логическим символам.

алгебры, здесь имеет место еще *второй дистрибутивный закон*:

$$X \& (Y \vee Z) \text{ экв } (X \& Y) \vee (X \& Z). \qquad (7)$$

В качестве примера, поясняющего второй закон дистрибутивности, может служить следующее предсказание погоды: «Сегодня идет дождь, и завтра ясно или послезавтра ясно». То же самое утверждение может быть выражено так: «Сегодня идет дождь, и завтра ясно, или сегодня идет дождь и послезавтра ясно».

Так как в логике относительно употребления слов «сумма» и «произведение» существует неопределенность, то мы, вообще говоря, по возможности будем избегать этих выражений. Мы называем $X \& Y$ *конъюнкцией* X и Y, $X \vee Y$ — *дизъюнкцией* X и Y. Для $X \rightarrow Y$ употребительно название *импликация*.

В силу закона коммутативности и ассоциативности многочленные конъюнкции или дизъюнкции можно писать без скобок. Кроме того, для дальнейшего уменьшения количества скобок мы устанавливаем, что $\vee$ *связывает теснее, чем* &, а &, в свою очередь, теснее, чем $\rightarrow$ и $\sim$. Знак $\vee$ можно не ставить точно так же, как в алгебре не ставят знака умножения $\cdot$.

Для упрощения конъюнкций и дизъюнкций существенны следующие эквивалентности:

$$X \& X \text{ экв } X, \qquad (8)$$

$$X \vee X \text{ экв } X. \qquad (9)$$

Таким образом, в конъюнкции или дизъюнкции, в которой некоторый член встречается несколько раз, можно писать таковой только один раз. Точно так же следующие эквивалентности дают возможность заменять сложные комбинации высказываний более простыми:

$$X \& \mathfrak{R} \text{ экв } X, \qquad (10)$$

$$X \& \mathfrak{F} \text{ экв } \mathfrak{F}. \qquad (11)$$

Из (10) следует, что истинный конъюнктивный член всегда может быть отброшен; из (11) — что конъюнкция означает ложь, если в ней встречается ложное высказывание.

Соответствующее положение дел мы имеем и в отношении дизъюнкции:

$$X \vee \mathfrak{R} \text{ экв } \mathfrak{R}, \qquad (12)$$

$$X \vee \mathfrak{F} \text{ экв } X. \qquad (13)$$

Дизъюнкция истинна, если она содержит истинный член. В дизъюнкции ложный член может быть отброшен.

Для импликации мы также имеем подобные соотношения:

$$\mathfrak{R} \rightarrow X \text{ экв } X, \qquad (14)$$

$$\mathfrak{F} \rightarrow X \text{ экв } R. \qquad (15)$$

Импликация с истинным предыдущим членом эквивалентна ее последующему члену. Импликация с ложным предыдущим членом всегда представляет собой истинное высказывание.

Наконец, для отношения равнозначности мы имеем:

$$X \sim \mathfrak{R} \text{ экв } X, \qquad (16)$$

$$X \sim \mathfrak{F} \text{ экв } \overline{X}. \qquad (17)$$

Для связи отрицания с & и $\vee$ получаем следующее важное соотношение:

$$\overline{X \& Y} \text{ экв } \overline{X} \vee \overline{Y}. \qquad (18)$$

Пусть, например, X означает утверждение: «Треугольник $\triangle$ прямоугольный», а Y: «Треугольник $\triangle$ равнобедренный». Связи $X \& Y$ соответствует тогда высказывание: «Треугольник $\triangle$ прямоугольный и треугольник $\triangle$ равнобедренный». Контрадикторной противоположностью этого является следующее высказывание: «Треугольник $\triangle$ не прямоугольный или треугольник $\triangle$ не равнобедренный», и это высказывание выражается $\overline{X} \vee \overline{Y}$.

Также имеем:

$$\overline{X \vee Y} \text{ экв } \overline{X} \& \overline{Y}. \qquad (19)$$

Например, пусть при испытании по математике требуется, чтобы кандидат был сведущ по крайней мере в одной из областей: арифметике или геометрии. Пусть X обозначает высказывание: «Кандидат знает арифметику», Y обозначает: «Кандидат знает геометрию». Кандидат удовлетворяет требованию экзамена, если $X \vee Y$ истинно. Наоборот, если кандидат проваливается на испытании, т. е. перед нами отрицание для $X \vee Y$, то это означает: «Кандидат не знает арифметики, и он не знает геометрии», что выражается через $\overline{X} \& \overline{Y}$.

Другие эквивалентности получаем, привлекая знаки $\rightarrow$ и $\sim$.

Так как высказывание $X \rightarrow Y$ означает, что одновременно не может быть X истинным и Y ложным, то имеем:

$$X \rightarrow Y \text{ экв } \overline{X \& \overline{Y}}. \tag{20}$$

Используя (18), можно $\overline{X \& \overline{Y}}$ писать также в виде $\overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}$ и, согласно (1), — в виде $\overline{X} \vee Y$. Таким образом, имеем также:

$$X \rightarrow Y \text{ экв } \overline{X} \vee Y. \tag{21}$$

Если возьмем в этой эквивалентности $\overline{X}$ вместо X и используем то, что $\overline{\overline{X}}$ экв X, то получим новое соотношение

$$X \vee Y \text{ экв } \overline{X} \rightarrow Y. \tag{22}$$

Согласно (20), имеем $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ экв $\overline{\overline{Y} \& \overline{\overline{X}}}$. В силу (1) вместо правой части можно поставить $\overline{\overline{Y} \& X}$, в силу (2) $\overline{X \& \overline{Y}}$ и в силу (20) $X \rightarrow Y$. Таким образом, получаем:

$$X \rightarrow Y \text{ экв } \overline{Y} \rightarrow \overline{X}. \tag{23}$$

Далее, если справедливы оба высказывания $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$, то это значит, что не могут быть одновременно X истинным и Y ложным, и также невозможно, чтобы одновременно Y было истинным и X ложным. Таким образом, высказывание $(X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)$ означает, что X и Y оба имеют одинаковое значение истинности или ложности. Другими словами, имеем эквивалентность:

$$X \sim Y \text{ экв } (X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X). \tag{24}$$

Из определения связи $\sim$ непосредственно получаем, что

$$X \sim Y \text{ экв } Y \sim X, \tag{25}$$

$$X \sim Y \text{ экв } \overline{X} \sim \overline{Y}. \tag{26}$$

Дальше из (19) и (18) получаем (отрицая обе стороны эквивалентности и принимая во внимание, что, согласно (1), двойное отрицание может быть отброшено):

$$X \vee Y \text{ экв } \overline{\overline{X} \& \overline{Y}}, \tag{27}$$

$$X \& Y \text{ экв } \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} \tag{28}$$

Из этих эквивалентностей обнаруживается *множественность выражений одних и тех же сложных высказываний с помощью введенных знаков*. Это наталкивает на вопрос: не являются ли *некоторые из основных логических связей излишними*? Ответ утвердителен. Прежде всего из (24) видим, что можно обойтись без знака $\sim$, так как связь $X \sim Y$ может быть выражена знаками $\rightarrow$ и &. Затем, из (20) и (27) следует, что знаки $\rightarrow$ и $\vee$ также заменимы и что таким образом можно обойтись знаками & и —. Точно так же из (21) и (28) следует, что можно ограничиться знаками $\vee$ и —. Равным образом оказывается достаточно знаков $\rightarrow$ и —, ибо, согласно (28), можно выразить сначала знак & через $\vee$ и —, а затем, согласно (22), знак $\vee$ с помощью $\rightarrow$ и —.

Знаки $\rightarrow$ и — брал в качестве основных (т. е. при употреблении и других символов) Фреге; знаки $\vee$ и — брал Рэссел. Естественнее всего исходить из представления через & и $\overline{}$, как это имеет место в учении о суждении у Брентано. Особо целесообразным является употребление трех знаков: &, $\vee$, $\overline{}$, так как в силу эквивалентностей (2) — (6) при этом получается особенно простая вычислительная трактовка логических выражений.

С помощью знаков $\sim$ и $\overline{}$ не могут быть выражены все связи. Так, уже $X \& Y$ не может быть выражено с помощью этих знаков. Для доказательства допустим сначала, что как основные используются только высказывания X и Y. Рассмотрим затем восемь высказываний:

$$X;\ Y;\ \overline{X};\ \overline{Y};\ X \sim X;\ X \sim \overline{X};\ X \sim Y;\ X \sim \overline{Y}.$$

Если отрицать одно из этих высказываний или соединить два из них знаком $\sim$, то получим снова высказывание, которое эквивалентно одному из этих восьми. Например: $(X \sim Y) \sim Y$ экв X; $(X \sim Y) \sim (X \sim Y)$ экв $X \sim X$ и т. д. Так как основные высказывания X и Y имеются сами среди этих восьми высказываний, то каждое высказывание, которое образуется из X и Y путем применения только знаков $\sim$ и $\overline{}$, эквивалентно одному из этих восьми высказываний. Но $X \& Y$ не является эквивалентным ни одному из них. — Если бы существовало эквивалентное $X \& Y$ и образуемое лишь при помощи знаков $\sim$, $\overline{}$ сложное высказывание, содержащее еще основные высказывания $Z, U, \ldots, T$, то эквивалентность должна была бы сохраниться и при замене всех букв $Z, U, \ldots, T$ на X. Но таким образом мы возвращаемся к прежнему случаю.

При представлении сложных высказываний без отрицания нельзя обойтись. Например, невозможно выразить $\overline{X}$ без применения отрицания. Действительно, все выражения, содержащие неопределенный знак X и образованные путем применения &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, представляют только такие высказывания, которые истинны, когда X истинно, между тем как значение истинности $\overline{X}$ противоположно значению X.

Следует отметить, что связь $\vee$ может быть выражена при помощи только знака $\rightarrow$, без применения отрицания. В самом деле, существует эквивалентность:

$$X \vee Y \text{ экв } (X \rightarrow Y) \rightarrow Y.$$

Для $X \& Y$ подобное представление невозможно.

В качестве курьеза следует упомянуть, что можно обойтись также одним единственным логическим знаком, как это показал Шеффер. Он использовал в качестве единственной связи X/Y, словами: «X и Y несовместны». X/X тогда равнозначно с $\overline{X}$. $X/X\ /\ Y/Y$ эквивалентно $\overline{X}/\overline{Y}$, т. е. $X \vee Y$. А раз знаки $\vee$ и $\overline{}$ могут быть выражены при помощи штриха Шеффера, то другие основные связи также можно выразить с его помощью.

Упомянем еще следующие эквивалентности, важные для представления отношения равнозначности:

$$X \sim Y \text{ экв } \overline{X} \vee Y \ \& \overline{Y} \vee X, \qquad (29)$$

$$X \sim Y \text{ экв } (X \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y}). \qquad (30)$$

(29) следует из эквивалентности (24), в которой, согласно (21), знак $\rightarrow$ заменяем знаками $\vee$ и $\overline{}$. (30) получаем непосредственно из определения $\sim$.

§ 3. Нормальная форма для логических выражений

До сих пор мы видели, как можно из определенных основных высказываний, которые мы обозначаем буквами $X, Y, Z, \ldots$, образовать новые высказывания при помощи однократного или многократного применения основных связей &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $\overline{}$. Эквивалентности, установленные в предыдущем параграфе, учат нас, что для содержательно равнозначных связей основных высказываний существует известная множественность выражений, причем от одного из этих выражений можно переходить к любому другому. Существенно отметить, что *каждое сложное высказывание путем эквивалентного преобразования можно привести к известной нор-*

мальной форме; эта нормальная форма состоит из некоторой конъюнкции дизъюнкций, в которых каждый дизъюнктивный член является либо основным высказыванием, либо его отрицанием.

На основании установленных эквивалентностей вводим следующие правила преобразования выражений:

а1) *Со знаками & и $\vee$ можно оперировать как в алгебре, пользуясь ассоциативным, коммутативным и дистрибутивным законами:*

а2) $\overline{\overline{X}}$ *можно заменить на* X.

а3) $\overline{X\&Y}$ *можно заменить выражением* $\overline{X}\vee\overline{Y}$, *а* $\overline{X\vee Y}$ — *выражением* $\overline{X}\& Y$.

а4) $X\rightarrow Y$ *можно заменить выражением* $\overline{X}\vee Y$, *а* $X\sim Y$ — *выражением* $\overline{X}Y\&\overline{Y}X$[1].

Здесь всегда имеется в виду обратимость замены.

Преобразование происходит следующим образом: сначала заменяем, пользуясь правилом а4), каждое выражение эквивалентным ему, не содержащим больше знаков $\rightarrow$ и $\sim$. Выражение, возникшее таким образом, строится путем применения трех знаков &, $\vee$, —. Затем, с помощью последовательного применения правила а3) всегда можем достичь того, что черточки отрицаний сдвинутся дальше вниз и, наконец, окажутся только над основными высказываниями. Например, из

$$\overline{(XY\&\overline{Y})\vee(Z\&Y)}$$

сначала получаем

$$\overline{(XY\&\overline{Y})}\&\overline{(Z\&Y)},$$

затем, при вторичном применении а3):

$$\overline{XY}\vee\overline{\overline{Y}}\&\overline{Z}\vee\overline{Y}$$

и, наконец,

$$(\overline{X}\&\overline{Y})\overline{Y}\&\overline{Z}\overline{Y}.$$

[1] Здесь и часто дальше мы применяем для удобства упомянутый выше способ записи, при котором знак $\vee$ не пишется.

Возникшее выражение образовано из отрицаемых и неотрицаемых основных высказываний, связанных знаками & и $\vee$. Теперь применяем закон дистрибутивности. Таким образом, в нашем примере получаем:

$$\overline{X}\overline{\overline{Y}}\&\overline{Y}\overline{\overline{Y}}\&\overline{Z}\overline{Y}.$$

Наконец, если мы заменим по а2) $\overline{\overline{X}}$ на X, $\overline{\overline{\overline{X}}}$ на $\overline{X}$ и т. д., то выражение будет приведено к нормальной форме.

В качестве второго примера рассмотрим выражение

$$(X\rightarrow Y)\sim(\overline{Y}\rightarrow\overline{X}).$$

Если здесь, согласно а4), устраним сначала знак $\rightarrow$, то получим:

$$\overline{X}Y\sim\overline{\overline{Y}}\,\overline{X}.$$

$\overline{\overline{Y}}$ заменяем буквой Y:

$$\overline{X}Y\sim Y\overline{X}.$$

После вторичного применения а4) получаем:

$$\overline{(\overline{X}Y)}\,Y\overline{X}\&\overline{(Y\overline{X})}\,\overline{X}Y,$$

$$(\overline{\overline{X}}\&\overline{Y})Y\overline{X}\&(\overline{Y}\&\overline{\overline{X}})\,\overline{X}Y\ \text{[по а3)]}.$$

$\overline{\overline{X}}$ заменяем буквой X:

$$(X\&\overline{Y})Y\overline{X}\&(\overline{Y}\&X)\,\overline{X}Y$$

Затем, применяя закон дистрибутивности, получаем:

$$XY\overline{X}\&\overline{Y}Y\overline{X}\&\overline{Y}\,\overline{X}Y\&XXY.$$

Это и есть нормальное выражение для $(X\rightarrow Y)\sim$ $\sim(\overline{Y}\rightarrow\overline{X})$.

Следует отметить, что нормальное выражение, соответствующее некоторому сложному высказыванию, определяется не однозначным образом. Например, с одной стороны, согласно (29) высказыванию $X\sim Y$ соответствует нормальное выражение $\overline{X}Y\&\overline{Y}X$. С другой стороны, применяя к правой части (30) закон дистрибутивности, получаем:

$$X\overline{X} \,\&\, X\overline{Y} \,\&\, Y\overline{X} \,\&\, Y\overline{Y}.$$

§ 4. Характеристика всегда-истинных сложных высказываний

Истинность или ложность сложного высказывания, построенного определенным образом из основных высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с применением логических знаков $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $\overline{\ }$, зависит от того, как распределены истинность и ложность среди основных высказываний. Истинность или ложность сложного высказывания не изменится, если некоторое выражение, представляющее собой часть данного высказывания, заменяется равнозначным ему выражением. Отсюда следует, между прочим, что в нашем исчислении знак $\sim$ играет роль, подобную роли знака $=$ в алгебре.

Первой задачей логики является: *найти такие связи высказываний, которые всегда-истинны, т. е. истинны независимо от того, представляют ли основные высказывания истинные или ложные утверждения.*

Так как мы можем каждому логическому выражению привести в соответствие эквивалентное ему выражение в нормальной форме, то для ответа на этот вопрос нужно *решить* (*entscheiden*), *когда выражение в нормальной форме представляет собой всегда-истинное высказывание*. Это выяснение происходит с помощью следующих легко оправдываемых правил:

в1) $X\overline{X}$ всегда истинно.

в2) Если X истинно, а Y означает произвольное высказывание, то XY также является истинным.

в3) Если X и Y истинны, то $X \,\&\, Y$ также истинно.

Эти правила следует понимать в том смысле, что на место X и Y можно подставлять любые высказывания или комбинации высказываний.

В соответствии с правилами в1), в2), в3) и а1) всегда-истинными оказываются все выражения, которые *в нормальной форме характеризуются тем, что в каждой дизъюнкции по меньшей мере одно основное высказывание встречается одновременно с его отрицанием.* Что подобное выражение представляет собой истинное высказывание при любых значениях основных высказываний, следует и непосредственно из определения отрицания и связей «и» и «или». Но это и единственные выражения, которые всегда истинны. Ибо если в каком-нибудь конъюнктивном члене некоторой нормальной формы, имеющем, конечно, форму дизъюнкции, каждое основное высказывание содержится в качестве либо только неотрицаемого, либо только отрицаемого множителя, то эту дизъюнкцию можно превратить в ложное высказывание, если подставить на место неотрицаемых знаков высказываний ложные высказывания, а на место отрицаемых — истинные. Тогда один конъюнктивный член данной нормальной формы выразит ложное высказывание, а поэтому и все выражение в целом будет представлять ложное высказывание независимо от того, что подставлено на место еще не определенных знаков высказываний.

Покажем на нескольких примерах, как, пользуясь этим методом, обнаруживают всегда-истинность высказываний.

1. $X \sim X$.

Преобразуя согласно правилу а4), получаем:

$$\overline{X}X \,\&\, \overline{X}X.$$

Последнее выражение в нормальной форме содержит в каждом конъюнктивном члене основное высказывание и противоположное ему; следовательно, оно истинно.

2. $X \,\&\, Y \rightarrow X$.

Преобразуя, получаем:

$$\overline{X \,\&\, Y} \vee X \quad [\text{по а4})],$$

$$\overline{X}\overline{Y}X \quad [\text{по а3})].$$

Последняя дизъюнкция содержит X и $\overline{X}$; следовательно, она истинна.

3. $(X \,\&\, (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y$.

Получаем:

$$\overline{X \,\&\, \overline{X}\,\overline{Y}} \vee Y \quad \text{[двукратным применением а4)]},$$

$$\overline{X}\,(\overline{\overline{X}} \,\&\, \overline{Y})\,Y \quad \text{[по а3)]},$$

$$\overline{X}\,\overline{\overline{X}}Y \,\&\, \overline{X}\,\overline{Y}Y \quad \text{[по а1)]},$$

$$\overline{X}XY \,\&\, \overline{X}\,\overline{Y}Y \quad \text{[по а2)]}.$$

Первая дизъюнкция содержит X и $\overline{X}$, а вторая — Y и $\overline{Y}$. Таким образом, сложное высказывание $(X \,\&\, (X \to Y)) \to Y$ является всегда-истинным.

§ 5. Принцип двойственности

Одно существенное замечание, характеризующее наше исчисление, связано с правилом а3). Из этого правила следует, что *для выражения, которое образуется из основных высказываний и их отрицаний с помощью только конъюнктивной и дизъюнктивной связей, противоположное ему получается путем обмена местами знаков & и $\vee$ и замены основных высказываний их отрицаниями*.

Мы можем использовать это следующим образом. Пусть установлена всегда-истинность некоторого выражения вида $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, или, как мы иногда будем говорить, логического уравнения. (Мы употребляем немецкие буквы для обозначения сложных высказываний, точный формальный вид которых остается неопределенным, а также иногда для сокращения.) Так как $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ равнозначно с $\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$, то мы получаем снова истинное выражение, отрицая обе части уравнения. Если обе части уравнения образованы из основных высказываний и их отрицаний путем применения только конъюнкций и дизъюнкций, то мы можем применить указанное выше правило. Мы получаем при этом формулу, которая возникает из первоначального уравнения $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ посредством обмена местами знаков & и $\vee$ и замены основных высказываний противоположными им. Так как это уравнение всегда истинно, то мы можем заменить в нем каждое основное высказывание противоположным. Этим мы устраняем выполненную нами предварительно замену основных высказываний их отрицаниями.

Таким образом, получается следующий *принцип двойственности: из всегда-истинной формулы $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, обе стороны которой образованы из основных высказываний и их отрицаний путем использования конъюнктивной и дизъюнктивной связей, получаем снова истинное уравнение, меняя местами знаки & и $\vee$.*

Так,

$$X\,(Y \,\&\, Z) \sim XY \,\&\, XZ$$

всегда истинно. Это формула первого закона дистрибутивности. Из нее по принципу двойственности получаем формулу:

$$X \,\&\, YZ \sim (X \,\&\, Y)\,(X \,\&\, Z),$$

которая также истинна и выражает второй закон дистрибутивности.

Точно так же истинной формуле:

$$(X \,\&\, \overline{X})\,Y \sim Y$$

согласно принципу двойственности соответствует истинная формула:

$$X\overline{X} \,\&\, Y \sim Y.$$

§ 6. Дизъюнктивная нормальная форма для логических выражений

Правило образования отрицания можно применить с большой пользой для дела. Мы видели, что каждое логическое выражение может быть приведено к нормальной форме. Эта нормальная форма состоит из конъюнкции дизъюнкций, где каждый дизъюнктивный член представляет собой отрицаемое или неотрицаемое основное высказывание. Преобразование выражения к нормальной форме происходит путем применения правил а1) — а4). — Наряду с указанной формой существует еще *вторая нормальная форма*, которая состоит из дизъюнкции конъюнкций. Каждый конъюнктивный член является отрицаемым или неотрицаемым основным высказыванием. Мы называем эту нормальную форму «*дизъюнктивной*», а ранее установленную в отличие — «*конъюнктивной*».

Преобразование выражения к дизъюнктивной нормальной форме происходит следующим образом: отрицаем первоначальное выражение и приводим его к конъюнктивной нормальной форме, а затем вновь отрицаем полученное выражение согласно нашему правилу. Можно воспользоваться и тем обстоятельством, что по отношению к правилам а1)—а4) конъюнкция и дизъюнкция вполне двойственны.

Подобно тому, как из конъюнктивной нормальной формы можно вычитать, является ли некоторое выражение всегда-истинным или нет, так с помощью дизъюнктивной нормальной формы можно установить, является ли оно всегда-ложным. Последнее имеет место в том и только в том случае, если каждый дизъюнктивный член одновременно с каким-нибудь основным высказыванием содержит и противоположное ему высказывание.

Доказательство этого получим сразу, если учтем, что отрицание дизъюнктивной нормальной формы выражается конъюнктивной нормальной формой, а также, что формула в том и только в том случае всегда ложна, когда противоположная ей формула всегда истинна.

В качестве примера применения дизъюнктивной нормальной формы рассмотрим сложное высказывание:

$$\overline{X}Y \& \overline{Y}Z \& X \& \overline{Z}.$$

Применяя второй закон дистрибутивности, получаем нормальную форму:

$$(\overline{X} \& \overline{Y} \& X \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& Z \& X \& \overline{Z}) \vee$$
$$(Y \& \overline{Y} \& X \& \overline{Z}) \vee (Y \& Z \& X \& \overline{Z}).$$

Здесь каждый дизъюнктивный член содержит какое-нибудь основное высказывание вместе с его отрицанием: первые два X и $\overline{X}$, третий Y и $\overline{Y}$ и четвертый Z и $\overline{Z}$. Таким образом, высказывание

$$\overline{X}Y \& \overline{Y}Z \& X \& \overline{Z}$$

является всегда ложным.

Дизъюнктивная нормальная форма имеет преимущество особой обозримости. Отдельные дизъюнктивные члены выражают различные возможности, при наличии которых данное сложное высказывание является истинным. Так, дизъюнктивная нормальная форма для выражения $X \sim Y$ будет $(X \& Y)$ $(\overline{X} \& \overline{Y})$, а это дает возможность установить, что если $X \sim Y$ должно быть истинным, то X и Y должны быть либо оба истинны, либо оба ложны.

§ 7. Многообразие сложных высказываний, которые могут быть образованы из данных основных высказываний

Еще одно важное замечание об исчислении относится к многообразию высказываний, которые могут быть образованы с помощью комбинации конечного числа основных высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Мы будем при этом рассматривать как различные только такие высказывания, которые логически не эквивалентны. В этом предположении указанное многообразие состоит лишь из конечного числа высказываний.

Как мы ранее упомянули, высказывание, образованное из $X_1, X_2, \ldots, X_n$, эквивалентно другому того же рода высказыванию в том и только в том случае, если оба высказывания для любых значений $X_1, \ldots, X_n$ имеют одинаковое значение истины или лжи. Мы имеем прежде всего 2^n возможных распределений истинности или ложности основных высказываний, так как каждое отдельное высказывание X_1, $X_2, \ldots, X_n$ может быть как истинным, так и ложным. Составленное из $X_1, X_2, \ldots, X_n$ высказывание определяется теперь тем, что для каждого из 2^n случаев устанавливается, истинно ли оно в этом случае или ложно. Существует поэтому точно $2^{(2^n)}$ различных высказываний, которые могут быть образованы из $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

4 различных высказывания, образуемых с помощью одного только X, суть:

$$X; \quad \overline{X}; \quad X \vee \overline{X}; \quad X \,\&\, \overline{X}.$$

16 различных высказываний, которые могут быть образованы из X и Y суть:

$$X; \quad Y; \quad X \,\&\, Y; \quad X \vee Y; \quad X \to Y; \quad Y \to X;$$

$$X \sim Y; \quad X \vee \overline{X}$$

и их отрицания:

$$\overline{X}; \quad \overline{Y}; \quad \overline{X} \vee \overline{Y}; \quad \overline{X} \,\&\, \overline{Y}; \quad X \,\&\, \overline{Y}; \quad Y \,\&\, \overline{X};$$

$$X \sim \overline{Y}; \quad X \,\&\, \overline{X}$$

Среди $2^{(2^n)}$ высказываний два занимают особое положение: именно, всегда-истинное высказывание, которое выражается, например, в виде $X_1 \vee \overline{X_1}$ (или в виде $X_1 \sim X_1$), и всегда ложное, которое можно выразить в виде $X_1 \,\&\, \overline{X}_1$.

Формальный обзор различных высказываний, которые могут быть образованы из $X_1, X_2, \ldots, X_n$, получаем с помощью следующего предложения:

Каждое выражение, образованное из основных высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$, эквивалентно некоторой конъюнкции из части множества всех членов развернутого по первому дистрибутивному закону выражения:

$$(X_1 \,\&\, \overline{X}_1) \vee (X_2 \,\&\, \overline{X}_2) \vee \ldots \vee (X_n \,\&\, \overline{X}_n).$$

Исключением являются только всегда-истинные выражения. Однако можно и их не исключать, если несобственную частичную конъюнкцию, которую мы получим, не беря ни одного члена, рассматривать как всегда-истинное высказывание. Конъюнктивные

члены приведенного выше, но развернутого выражения Шредер называет *конституентами* от $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Доказательство этого утверждения получаем следующим образом: сначала выражение, образованное из $X_1, \ldots, X_n$, приводим к конъюнктивной нормальной форме. Так как значение истинности или ложности высказывания остается неизменным, если отбросить истинный конъюнктивный член, то можно не записывать те конъюнктивные члены, в которых вместе с X содержится $\overline{X}$. Если, далее, используем правило, позволяющее вместо $X \vee X$ писать X, то каждый из еще остающихся конъюнктивных членов становится дизъюнкцией только различных членов ряда

$$X_1, \ldots, X_n, \quad \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n.$$

Если в некоторой дизъюнкции отсутствует как X_i, так и $\overline{X}_i$, то мы можем эту дизъюнкцию расширить, приписав к ней всегда-ложный член $(X_i \,\&\, \overline{X}_i)$ и применив первый дистрибутивный закон, что не изменяет истинности или ложности высказывания. В результате каждый конъюнктивный член для любого i будет содержать или X_i, или $\overline{X}_i$. Затем нам остается лишь из конъюнктивных членов, которые отличаются только различным расположением своих связанных знаком $\vee$ членов, написать только один. Тогда выражение принимает желаемую форму.

Таким образом, мы получим для каждого высказывания, образованного из $X_1, X_2, \ldots, X_n$, выражение в *«совершенной» конъюнктивной нормальной форме.*

Эта нормальная форма (с точностью до порядка конъюнктивных или дизъюнктивных членов) однозначна в том смысле, что два эквивалентных сложных высказывания выражаются одной и той же нормальной формой. Действительно, существует для $X_1, \ldots, X_n$ точно $2^{(2^n)}$ *различных* выражений в нормальной форме, т. е. столько же, сколько можно образовать различных высказываний из

$$X_1, X_2, \ldots, X_n.$$

Указанная совершенная нормальная форма может быть использована различным образом. Она может послужить прежде всего для отыскания при случае *более простого представления* для данного сложного высказывания. С этой целью приводят выражение к совершенной нормальной форме и упрощают его затем, применяя в соответствующих случаях следующее *правило исключения*:

$$X\mathfrak{A} \,\&\, \overline{X}\mathfrak{A}, \quad \text{то есть } (X \,\&\, \overline{X}) \vee \mathfrak{A}$$

эквивалентно $\mathfrak{A}$.

В качестве примера рассмотрим сложное высказывание $A \,\&\, AB$. Чтобы получить разложение по A и B, заменяем конъюнктивный член A формулой $A \vee (B \,\&\, \overline{B})$ и раскрываем скобки по первому дистрибутивному закону. Если напишем встречающийся дважды член AB только один раз, то получим совершенную нормальную форму:

$$AB \,\&\, A\overline{B}.$$

Если здесь вынесем за скобки общий множитель A, то получим $A(B \,\&\, \overline{B})$ и, по указанному правилу исключения, A. Таким образом, A является самым простым выражением формулы $A \,\&\, AB$.

В качестве второго примера рассмотрим выражение $A \,\&\, \overline{A}B$. Нормальная форма здесь имеет вид:

$$AB \,\&\, A\overline{B} \,\&\, \overline{A}B.$$

Здесь можно объединить первый со вторым и первый с третьим члены. Чтобы осуществить оба исключения, первый член пишем дважды:

$$(AB \,\&\, A\overline{B}) \,\&\, (AB \,\&\, \overline{A}B).$$

В результате исключения получаем $A \,\&\, B$.

Заметим далее, что использованная совершенная нормальная форма дает возможность решить вопрос: *выразимо ли некоторое высказывание, составленное из основных высказываний* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *без применения знака отрицания*? Оно выразимо так в том и только в том случае, если в совершенной нормальной форме рассматриваемого высказывания отсутствует конъюнктивный член $\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n$. В самом деле, если имеем некоторое высказывание, которое построено из $X_1, X_2, \ldots, X_n$ без применения знака отрицания, то это высказывание истинно всегда, когда вместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подставляются истинные высказывания. Высказывание же, которое содержит в качестве конъюнктивного члена

$$\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n,$$

этим свойством не обладает. Таким образом, указанное условие необходимо. С другой стороны, оно достаточно, ибо каждый член совершенной нормальной формы, не равный $\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n$, можно выразить без отрицания. Например, пишем:

$$X_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3 \ldots \overline{X}_n \quad \text{в виде} \quad (X_2 \,\&\, X_3 \,\&\, \ldots \,\&\, X_n) \rightarrow X_1,$$

$$X_1 \overline{X}_2 X_3 \overline{X}_4 X_5 \overline{X}_6 \ldots$$

в виде

$$(X_2 \,\&\, X_4 \,\&\, X_6 \,\&\, \ldots) \rightarrow X_1 \vee X_3 \vee X_5 \vee \ldots \quad \text{и т. д.}$$

Вследствие этого ровно половина из $2^{(2^n)}$ высказываний, которые могут быть образованы из

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

выражаются без отрицания.

§ 8. Дополнительные замечания к проблеме всегда-истинности и выполнимости

Установленную в предыдущем параграфе совершенную нормальную форму для выражения, которое состоит из основных высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$, мы будем также называть кратко *разложением выражения по* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Пусть теперь нам дано некоторое сложное высказывание, в котором содержатся, кроме $X_1, X_2, \ldots, X_n$, еще основные высказывания $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. И в этом случае мы можем говорить в известном смысле о разложении по $X_1, \ldots, X_n$. А именно, можно представить выражение в виде *конъюнкции, у которой каждый конъюнктивный член является дизъюнкцией выражения, зависящего только от $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, и одной из конституент от $X_1, X_2, \ldots, X_n$.*

Доказательство очень простое. Достаточно лишь разложить выражение по всем имеющимся основным высказываниям, т. е. по $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$, и соединить вместе члены, содержащие одинаковые по отношению к $X_1, X_2, \ldots, X_n$ конституенты.

Такое разложение по $X_1, X_2, \ldots, X_n$ может оказаться полезным. Мы видели, что разрешимость вопроса о *всегда-истинности некоторого выражения*, т. е. задача, в которой для данного логического выражения требуется установить с помощью определенного конечного приема, является ли оно всегда-истинным или нет, в исчислении высказываний полностью решена. Ответ на этот вопрос получаем с помощью преобразования выражения к конъюнктивной нормальной форме. Двойственной к проблеме всегда-истинности является проблема *выполнимости*, т. е. задача решить [1], является ли данное логическое выражение всегда-ложным или же существуют высказывания, которые удовлетворяют ему, т. е. для которых оно истинно. Решение этой проблемы можно осуществить путем приведения выражения к дизъюнктивной нормальной форме или же путем приведения отрицания этого выражения к конъюнктивной нормальной форме. К этим проблемам всегда-истинности, соответственно выполнимости, теперь присоединяются еще другие подобные же вопросы.

Пусть мы имеем некоторое выражение, в котором встречаются основные высказывания $X_1, \ldots, X_n$,

[1] Посредством некоторого регулярного приема.—*Прим. ред.*

$Y_1, \ldots, Y_m$. Здесь $Y_1, \ldots, Y_m$ пусть обозначают определенные постоянные высказывания. Возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, чтобы при любом выборе высказываний X все выражение было истинным? И еще вопрос: каким условиям должны удовлетворять

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m,$$

чтобы выражение было всегда ложным?

При ответе на эти вопросы мы принимаем для простоты n равным 2. При произвольном n решение протекает вполне аналогичным образом. Пусть разложение выражения по X_1 и X_2 будет:

$$\text{(A)} \quad \Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m)\, X_1 X_2 \mathbin{\&} \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)\, X_1 \overline{X}_2 \mathbin{\&}$$
$$\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m)\, \overline{X}_1 X_2 \mathbin{\&} \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m)\, \overline{X}_1 \overline{X}_2.$$

Мы можем предположить, что все 4 члена действительно встречаются в разложении. Если, например, член с $X_1\overline{X}_2$ отсутствует, то можно присоединить выражение $\Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)\, X_1\overline{X}_2$, в котором $\Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)$ — какое-нибудь всегда-истинное сложное высказывание.

Мы утверждаем теперь: *для того чтобы формула* (A) *для любых X_1 и X_2 была истинной, необходимо и достаточно, чтобы было истинным высказывание:*

$$\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) \mathbin{\&} \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) \mathbin{\&}$$
$$\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \mathbin{\&} \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m).$$

Ясно, что это условие является достаточным. Но это условие и необходимо, ибо если бы, например, $\Phi_3(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ не было истинным, то мы могли бы заменить X_1 истинным высказыванием, а X_2 — ложным высказыванием. Тогда (A) стало бы эквивалентным $\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m)$, т. е. не истинным.

Соответственным образом получаем решение двойственной проблемы. Выражение (A) в том и только в том случае выполнимо для $X_1, \ldots, X_n$, если

$Y_1, \ldots, Y_m$ так подобраны, что справедливо

$$\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) \vee$$
$$\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m).$$

§ 9. Систематический обзор всех следствий из данных посылок

В § 4 мы получили метод, который дает нам возможность находить все сложные высказывания, являющиеся истинными в силу чисто логических оснований, и для данного сложного высказывания решить, принадлежит оно к этому роду или нет. Теперь возникает *следующая задача: из данных посылок (аксиом) вывести все следствия, поскольку это возможно сделать, рассматривая высказывания лишь как нерасчлененные целые.*

Предположим, что нам дано определенное конечное число аксиом $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ [1]. На вопрос о том, представляет ли собою некоторое другое определенное сложное высказывание $\mathfrak{C}$ логическое следствие из этих аксиом, можно вполне ответить с помощью прежних средств. Это высказывание будет логическим следствием аксиом в том и только в том случае, если

$$(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n) \to \mathfrak{C}$$

является всегда-истинной логической формулой. Например, заключению от A и $A \to B$ к B соответствует всегда-истинность формулы:

$$(A \& (A \to B)) \to B.$$

Однако мы не имеем еще систематического обзора всех следствий, которые можно извлечь. Получить таковой мы можем лишь с помощью совершенной конъюнктивной нормальной формы.

Пусть в наших аксиомах встречаются основные высказывания $X_1, \ldots, X_n$. Мы представляем себе все аксиомы соединенными знаком & и возникшее таким образом сложное высказывание разложенным по $X_1, \ldots, X_n$. Возьмем теперь какую-нибудь конституенту от $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которая не встречается в качестве конъюнктивного члена в этой совершенной нормальной форме. Путем подходящей замены $X_1, \ldots, X_n$ истинными, соответственно ложными, высказываниями, можно превратить эту конституенту в дизъюнкцию сплошь ложных высказываний, т. е. в ложное высказывание. С другой стороны, благодаря этой замене наша совершенная нормальная форма переходит в истинное высказывание, ибо каждый из ее конъюнктивных членов отличается от взятой нами конституенты тем, что по крайней мере в одном месте некоторый дизъюнктивный член заменен ему противоположным. Таким образом, взятая нами конституента не является логическим следствием из аксиом. Отсюда следует, что каждое следствие из аксиом в совершенной нормальной форме содержит только такие конституенты, которые имелись уже в разложении посылки.

[1] Относительно употребления немецких букв см. § 5.

Используя это соображение, получаем следующий общий прием вывода следствий из системы аксиом.

Все аксиомы связываем знаком & и для выражения, возникшего таким образом, образуем совершенную конъюнктивную нормальную форму. После этого можем, выбирая любые конъюнктивные члены и связывая их знаками &, получать так все следствия из аксиом в совершенной нормальной форме. Используя упомянутое на стр. 40 правило исключения, можем получить затем, при случае, более простую запись следствия.

В приведенном примере, где в качестве аксиом взяты A и $A \to B$, этот метод выглядит следующим образом.

Сначала $A \& (A \to B)$ разлагаем по A и B:

$$A \& (A \to B) \text{ экв } A \& \overline{A}B,$$
$$A \& \overline{A}B \text{ экв } A(B \& \overline{B}) \& \overline{A}B,$$
$$A(B \& \overline{B}) \& \overline{A}B \text{ экв } AB \& A\overline{B} \& \overline{A}B.$$

$AB \& A\overline{B} \& \overline{A}B$ представляет совершенную нормальную форму для этих аксиом. Выражение $AB \& \bar{A}B$ экв $(A \& \bar{A})\, B$ экв B является, таким образом, следствием из аксиом.

Другие следствия, которые еще можно получить из A и $A \to B$, суть:

$$AB;\ \ A\bar{B};\ \ \bar{A}B;\ \ AB \& A\bar{B} \text{ экв } A\,(B \& \bar{B}) \text{ экв } A;$$

$$A\bar{B} \& \bar{A}B \text{ экв } A \sim B$$

и, естественно,

$$AB \& A\bar{B} \& \bar{A}B \text{ экв } A \& B.$$

Если желаем получить следствия, которые содержат еще некоторое другое высказывание C, не встречающееся в аксиомах, то следует разлагать посылку не по A и B, а по A, B, C.

Возьмем другой пример. Пусть мы имеем две аксиомы: $A \sim B$, $B \sim C$. Сначала мы пишем аксиомы в нормальной форме:

$$\bar{A}B \& \bar{B}A;\ \ \bar{B}C \& \bar{C}B.$$

Если разложить посылку по A, B и C, то получим:

$$AB\bar{C} \& A\bar{B}C \& A\bar{B}\bar{C} \& \bar{A}BC \& \bar{A}B\bar{C} \& \bar{A}\bar{B}C.$$

Одним из следствий является здесь, например:

$$AB\bar{C} \& A\bar{B}\bar{C} \& \bar{A}BC \& \bar{A}\bar{B}C.$$

Преобразуем его в:

$$A\bar{C}\,(B \& \bar{B}) \& \bar{A}C\,(B \& \bar{B})$$

и затем в:

$$A\bar{C} \& \bar{A}C, \quad \text{т. е.} \quad A \sim C.$$

Приведем еще два примера применения подобных заключений.

Пусть A означает высказывание: «Каждое действительное число есть алгебраическое число». B означает: «Множество действительных чисел счетно». В математике доказывается, что:

во-первых: $A \to B$, т. е. «Если каждое действительное число есть алгебраическое число, то множество действительных чисел счетно»;

во-вторых: $\bar{B}$, т. е. «Множество действительных чисел несчетно».

Посылкой здесь является:

$$\bar{A}B \& \bar{B},$$

или в развернутом виде:

$$\bar{A}B \& A\bar{B} \& \bar{A}\bar{B}.$$

Одним из следствий является здесь

$$\bar{A}B \& \bar{A}\bar{B} \text{ экв } \bar{A}\,(B \& \bar{B}) \text{ экв } \bar{A},$$

т. е. получаем:

«Не каждое действительное число есть алгебраическое число». Это заключение о существовании трансцендентных чисел.

Во втором примере пусть высказывания A, B, C означают следующее:

A: «Теорема о сложении скоростей истинна».

B: «В системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью».

C: «На земле свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью».

Тут прежде всего имеем математическое предложение: $(A \& B) \to \bar{C}$, т. е. «Если теорема сложения скоростей истинна и если в системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, то на земле скорость распространения света не по всем направлениям одинакова».

Затем мы заимствуем из физического опыта, что B и C истинны. Таким образом, мы имеем аксиомы:

$$(A \& B) \to \bar{C};\ \ B;\ \ C.$$

В конъюнктивной нормальной форме посылка имеет вид:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \& B \& C$$

и в развернутой форме:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \mathbin{\&} BAC \mathbin{\&} BA\bar{C} \mathbin{\&} B\bar{A}C \mathbin{\&} B\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} CA\bar{B} \mathbin{\&} C\bar{A}\bar{B}.$$

В качестве следствия здесь получается

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \mathbin{\&} B\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} B\bar{A}C \mathbin{\&} \bar{B}\bar{A}C.$$

Преобразовывая, получаем:

$$(\bar{B} \mathbin{\&} B)\,\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} \bar{B})\,\bar{A}C,$$

$$\bar{A}\bar{C} \mathbin{\&} \bar{A}C,$$

$$(\bar{C} \mathbin{\&} C)\,\bar{A},$$

$$\bar{A}.$$

Таким образом, получаем следствие, что предложение о сложении скоростей неверно.

Из любых двух противоречащих друг другу аксиом можно вывести любое предложение. В самом деле, если имеем A и $\bar{A}$ как аксиомы, а B—какое-нибудь другое высказывание, то, разлагая посылку $A \mathbin{\&} \bar{A}$ по A и B, получаем:

$$AB \mathbin{\&} A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B \mathbin{\&} \bar{A}\bar{B}.$$

Отсюда следует:

$$AB \mathbin{\&} \bar{A}B, \quad \text{т. е. } B.$$

Указанный метод позволяет нам вывести все следствия из данных аксиом или, другими словами, найти все сложные высказывания, которые *слабее*, чем данное. Можно теперь поставить обратный вопрос: какие сложные высказывания *сильнее* данного, т. е. из каких посылок оно получается в качестве следствия? Решение этой проблемы получаем способом, подобным предыдущему: сначала следствие разлагаем по всем основным высказываниям, т. е. приводим его к совершенной нормальной форме. Затем берем какие-нибудь не встречающиеся в этом разложении конституенты, присоединяем их знаком & к следствию и таким образом получаем все возможные посылки.

§ 10. Аксиомы исчисления высказываний

Аксиоматическая форма для теории исчисления высказываний получается посредством выбора из всегда-истинных сложных высказываний некоторых и задания формальных правил, по которым можно вывести из выбранных все остальные всегда-истинные формулы. В логическом исчислении эти правила играют ту же роль, какую играет в математических и физических теориях логический вывод. Причина того, что логический вывод не может быть здесь использован обычным содержательным образом, кроется в том, что сами логические способы заключения составляют предмет нашего исследования.

Мы проводим различие между логическими основными формулами (аксиомами) и основными правилами вывода истинных формул. В качестве основных формул мы вводим следующие четыре:

a) $X \vee X \rightarrow X$.

b) $X \rightarrow X \vee Y$.

c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

Первая аксиома означает, что высказывание истинно, если дизъюнкция этого высказывания с самим собою истинна; вторая аксиома является не чем иным, как упомянутым на стр. 32 правилом в2); третья аксиома постулирует коммутативность дизъюнкции; четвертая аксиома выражает, что в случае истинности импликации $X \rightarrow Y$ можно оба ее члена связать дизъюнктивно с любым высказыванием Z.

Впрочем, знаком $\rightarrow$ мы пользуемся только как сокращением. $X \rightarrow Y$ должно быть более удобным способом записи для $\bar{X} \vee Y$. Например, аксиома а) без сокращения записывается так: $\bar{X} \vee \bar{X} \vee X$.

Для получения новых формул, как из положенных в основу исходных формул, так и из уже выведенных формул, мы имеем следующие два правила:

α) Правило подстановки

Вместо переменного высказывания (т. е. вместо большой латинской буквы) *можно везде, где эта буква встречается, подставить одну и ту же формулу исчисления высказываний.*

β) Схема заключения

Из двух формул $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *получаем новую формулу* $\mathfrak{B}$.

В ближайшем параграфе мы подробно разъясним употребление обоих правил для получения новых формул из уже выведенных формул или аксиом. Здесь мы сделаем еще несколько замечаний общего характера относительно аксиоматики исчисления высказываний вообще.

При установлении системы аксиом мы пользовались только связями $\vee$ и $^{-}$. Это соответствует ранее установленному факту, что упомянутые две связи являются достаточными для выражения всех сложных высказываний. Ради удобства мы, правда, применяем также знаки $\to$, &, $\sim$. Однако формулы, в которых употребляются эти знаки, следует понимать при этом лишь как сокращенную запись для формул, содержащих только знаки $\vee$ и $^{-}$. Так, мы рассматриваем формулу $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ как сокращение для $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ — для $\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}$ и $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ — для $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$, т. е. для $\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}} \vee \overline{\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{A}}$ [ср. эквивалентности (21), (28), (24) в § 2].

Использованная нами система аксиом была установлена в основном Уэйтхедом и Рэсселом (в 1-м издании Principia Mathematica). Этими авторами была использована еще аксиома

$$X \vee (Y \vee Z) \to Y \vee (X \vee Z),$$

выражающая ассоциативность дизъюнктивной связи;

в дальнейшем было доказано, однако, что эта аксиома не нужна[1].

Так как связей & и $^{-}$, равно как и связей $\to$ и $^{-}$, также достаточно для выражения всех сложных высказываний, то в основу системы можно положить и аксиомы, в которых используются только & и $^{-}$ или только $\to$ и $^{-}$. В настоящее время проявляют особый интерес к системам аксиом последнего рода, в которых, следовательно, за основу принимаются только *импликация* и *отрицание*. Первая из систем аксиом этого рода, в которых, помимо того, в качестве правил вывода применяются наши правила α) и β), была установлена еще Фреге[2]. Она состоит из следующих шести аксиом:

1. $X \to (Y \to X)$,
2. $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,
3. $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to (X \to Z))$,
4. $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$,
5. $\overline{\overline{X}} \to X$,
6. $X \to \overline{\overline{X}}$.

Эту систему аксиом Фреге можно заменить, как показал Лукашевич, следующей более простой системой, состоящей только из трех аксиом:

1. $X \to (Y \to X)$,
2. $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,
3. $(\overline{X} \to \overline{Y}) \to (Y \to X)$.

Можно даже положить в основу системы только

[1] *Bernays, P.*: Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica. Math. Z. Bd. 25 (1926).

[2] *Frege, G.*, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, 1879.

одну единственную исходную формулу, образованную с помощью импликации и отрицания[1].

Никȯ первый установил систему аксиом исчисления высказываний, в которой используется только *штрих Шеффера* X / Y, упоминавшийся нами ранее[2]. Эта система употребляет в качестве единственной исходной формулы:

$$[X / (Y / Z)] / \{[U / (U / U)] / [(V / Y) / ((X / V) / (X / V))]\}.$$

Вместо нашей схемы заключения β) здесь используется правило: из двух формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} / (\mathfrak{B} / \mathfrak{C})$ получается новая формула $\mathfrak{C}$.

При случае также заслуживает предпочтения такая система аксиом исчисления высказываний, в которой с самого начала вводятся одновременно все основные связи; именно, в том случае, когда требуется по возможности более ясно выразить роль, которая выпадает на каждую из этих основных связей в логическом заключении. Система аксиом, установленная с такой точки зрения, дана Гильбертом и Бернайсом[3].

Впрочем, и в наших правилах a1)—a4), b1)—b3) (§ 3 и § 4) также содержится аксиоматика исчисления высказываний. Здесь речь идет о системе с единственной исходной формулой $X \vee \overline{X}$ и 6 правилами вывода новых формул.

Наконец, мы упомянем еще занимающее особое место «исчисление натурального заключения», «Kalkül des natürlichen Schlißens»[4], установленное Генценом и

[1] *Lukasiewicz, J.* u. *A. Tarski*: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. (C. R. Soc. Sci., Varsovie, Bd. 23, Klasse III, Warschau, 1930).

[2] *Nicod, J. G. P.*: A reduction in the number of the primitive propositions of logic. Proc. Camb. Phil. Soc. Ed. 19 (1917). Кроме того, ср. также W. V. Quine: A note on Nicod's postulate, Mind 41.

[3] *Hilbert, D.* u. *P. Bernays*. Grundlagen der Mathematik I, s 66.

[4] *Gentzen, G.*: Untersuchungen über das logische Schließen I и II. Math. Z. Bd. 39 (1934). Подобные же идеи независимо развивает Яшковский. См. S. Jaskowski: On the rules of suppositions in formal logic. Studia logica Nr. 1 (1934).

возникшее из стремления уподобить больше, чем до сих пор, формальный вывод формул содержательному способу доказательства, обычному, например, в математике. Это исчисление не содержит никаких логических аксиом, но только фигуры заключений, которые указывают, какие следствия могут быть непосредственно получены из данных посылок, или доставляют формулы, в которых устранена зависимость от посылок.

§ 11. Примеры вывода формул из аксиом

Теперь мы возвратимся к нашей системе аксиом, состоящей из основных формул a)—d) и правил вывода α) и β).

Дадим ряд примеров строго формального вывода формул из аксиом. На этом мы задержимся несколько дольше, так как опыт показывает, что начинающему обычно особенно трудно сохранить чисто формальную точку зрения.

При выводе формул целесообразно некоторые особенно часто встречающиеся операции сформулировать в виде *производных правил*. Такие правила раз навсегда предвосхищают конечный результат соответствующего формального перехода, доказательство же правила состоит в том, что дается общий метод, позволяющий осуществить этот переход в каждом отдельном случае, пользуясь основными правилами.

Правило I: *Если $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ — доказуемая формула, то доказуема также формула $\mathfrak{A}$.*

Доказательство получается непосредственно из аксиомы a). В результате подстановки в a) получаем:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}.$$

Так как $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ доказуема, то схема заключения дает нам далее формулу $\mathfrak{A}$.

Правило II. *Если $\mathfrak{A}$ — доказуемая формула, а $\mathfrak{B}$ — любая другая, то формула $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ является также доказуемой.*

Это правило получается из аксиомы b) таким же образом, как правило I из а).

Точно так же аксиомам с), d) соответствуют правила III и IV, как и вообще каждой формуле, которая выражает отношение следования, принадлежит и соответствующее правило.

Правило III: *Если* $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ — *доказуемая формула, то доказуема также формула* $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

Правило IV: *Если* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — *доказуемая формула и* $\mathfrak{C}$ — *какая-нибудь другая формула, то формула* $\mathfrak{C}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}\mathfrak{B}$ *является также доказуемой.*

Формула (*1*):

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow [(Z \rightarrow X) \rightarrow (Z \rightarrow Y)].$$

Доказательство: Формулу $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\overline{Z}X \rightarrow ZY)$ получаем из аксиомы d), заменяя в ней Z на $\overline{Z}$. Но эта формула будет совпадать с формулой (1), если мы заменим в ней сокращение $\rightarrow$ его значением.

Правило V: *Если формулы* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ *доказуемы, то формула* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ *также доказуема.*

Это правило соответствует формуле (1). Оно доказывается следующим образом: в (1) подставляем вместо X, Y, Z, соответственно, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ и дважды применяем схему заключения.

Формула (*2*): $\overline{X} \vee X$.

Доказательство: $X \rightarrow X \vee X$ [через подстановку X на место Y в b)]

$X \vee X \rightarrow X$ [по а)],

$X \rightarrow X$ [по правилу V].

Последняя формула представляет собой сокращенную запись формулы $\overline{X} \vee X$.

Формула (*3*): $X \vee \overline{X}$.

Эту формулу получаем из (2), применяя правило III.

Формула (*4*): $X \rightarrow \overline{\overline{X}}$.

Доказательство: (4) есть сокращение для формулы $\overline{X}\overline{\overline{X}}$, которую получаем из (3), если подставим $\overline{X}$ на место X.

Формула (*5*): $\overline{\overline{X}} \rightarrow X$.

Доказательство: $\overline{X} \rightarrow \overline{\overline{\overline{X}}}$ [через подстановку в (4)],

$X\overline{X} \rightarrow X\overline{\overline{\overline{X}}}$ [по правилу IV],

$X\overline{\overline{\overline{X}}}$ [в силу (3) и правила β)],

$\overline{\overline{\overline{X}}}X$ [по правилу III].

Это и есть формула (5).

Формула (*6*): $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\overline{Y} \rightarrow \overline{X})$.

Доказательство: $Y \rightarrow \overline{\overline{Y}}$ [формула (4)],

$\overline{X}Y \rightarrow \overline{X}\overline{\overline{Y}}$ [правило IV],

$\overline{X}\overline{\overline{Y}} \rightarrow \overline{\overline{Y}}\overline{X}$ [подстановка в с)],

$\overline{X}Y \rightarrow \overline{\overline{Y}}\overline{X}$ [правило V].

Это и есть искомая формула.

Правило VI: *Если выражение* $\mathfrak{A}$ *входит составной частью в сложное высказывание, которое, с целью выразить это обстоятельство, мы обозначим* $\Phi(\mathfrak{A})$, *и если формулы* $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ *доказуемы, то формулы* $\Phi(\mathfrak{A}) \rightarrow \Phi(\mathfrak{B})$ *и* $\Phi(\mathfrak{B}) \rightarrow \Phi(\mathfrak{A})$ *также доказуемы.* — Впрочем, формулой $\mathfrak{A}$ и всем выражением Φ в целом еще не определено однозначно, что должно означать $\Phi(\mathfrak{A})$. Так, выражение $X \rightarrow XY$ можно обозначить через $\Phi(X)$ в трех смыслах, так как за $\Phi(\mathfrak{A})$ можно принять каждое из трех выражений: $\mathfrak{A} \rightarrow XY$, $X \rightarrow \mathfrak{A}Y$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}Y$. Правило VI пригодно для каждого из таких возможных определений $\Phi(\mathfrak{A})$.

Это правило может быть выражено также следующим образом: *два выражения, находящиеся в отношении взаимного следования, могут быть подставлены одно вместо другого в доказуемую формулу.*

Доказательство: Достаточно доказать правило для того случая, когда $\mathfrak{A}$ встречается в $\Phi(\mathfrak{A})$ только один раз и $\Phi(\mathfrak{A})$ имеет одну из форм $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Общее правило получаем путем многократного применения этого простого правила, строя Φ, начиная изнутри. Именно, для каждого частичного выражения Φ' из Φ получаем последовательно:

$$\Phi'(\mathfrak{B}) \to \Phi'(\mathfrak{A}) \text{ и } \Phi'(\mathfrak{A}) \to \Phi'(\mathfrak{B}).$$

Допустим, следовательно, что $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ уже доказаны. Тогда мы докажем:

$$\alpha)\ \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}} \text{ и } \overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}.$$

Мы получаем обе эти формулы, доказывая сначала путем подстановки в формулу (6):

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$$

и

$$(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}),$$

а затем используя то, что $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ уже доказаны.

$\beta)$ $\mathfrak{C}\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\mathfrak{A}$.

Обе формулы получаем из $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, соответственно, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, применяя правило IV.

$\gamma)$ $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}\mathfrak{C}$; $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

Этот случай можно свести к β), применяя несколько раз аксиому c) и правило V.

В качестве применения правила VI и аксиомы c) получаем *коммутативность дизъюнкции*. Действительно, так как путем подстановки в c) получаем:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$

то в каждом сложном высказывании дизъюнкцию $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ всегда можно заменить дизъюнкцией $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$, и наоборот.

Из формул (4) и (5) и правила VI получаем аналогично, что $\mathfrak{A}$ можно заменить на $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, и наоборот.

Формула (*7*): $\overline{X \& Y} \to \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Доказательство: $X \& Y$ является сокращенной записью для $\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$. Формулу $\overline{\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}} \to \overline{X}\,\overline{Y}$ получаем путем подстановки из $\overline{\overline{X}} \to X$.

Точно так же из $X \to \overline{\overline{X}}$ получаем формулу:

Формула (*8*): $\overline{X} \vee \overline{Y} \to \overline{X \& Y}$.

Формула (*9*): $\overline{X \vee Y} \to \overline{X} \& \overline{Y}$.

Формула (*10*): $\overline{X} \& \overline{Y} \to \overline{X \vee Y}$.

Доказательство: Формулы (9) и (10) без сокращения записываются так:

$$\overline{X \vee Y} \to \overline{\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}} \text{ и } \overline{\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}} \to \overline{X \vee Y}.$$

Они возникают из $\overline{X \vee Y} \to \overline{X \vee Y}$ путем замены, согласно правилу VI, в правой части, соотв. в левой части, X на $\overline{\overline{X}}$ и Y на $\overline{\overline{Y}}$.

Формулы (7), (8) и (9), (10) дают нам, в связи с правилом VI, прежнее правило a3) (стр. 30).

Дальнейшим применением правила VI является следующее: так как согласно аксиоме a) имеет место $X \vee X \to X$ и так как из аксиомы b) в результате подстановки получаем формулу $X \to X \vee X$, то выражение вида $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ всегда можно заменять на $\mathfrak{A}$, и наоборот.

Формула (*11*): $X \& Y \to Y \& X$.

Доказательство: $\overline{\overline{X}\,\overline{Y}} \to \overline{\overline{Y}\,\overline{X}}$ получаем из $\overline{\overline{X}\,\overline{Y}} \to \overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$, используя правило о коммутативности дизъюнктивной связи.

Формула (*12*): $X \& Y \to X$.

Доказательство: $\overline{X} \to X\overline{Y}$ [по аксиоме b)],

$$\overline{\overline{X}\,\overline{Y}} \to \overline{\overline{X}} \text{ [по формуле (6)]},$$

$$X \& Y \to \overline{\overline{X}}.$$

$$X \& Y \to X.$$

Формула (*13*): $X \& Y \to Y$.

Доказательство получаем из (11) и (12).

Формула (*14*): $X(YZ) \to Y(XZ)$.

Доказательство: $Z \to XZ$ [из аксиомы b) путем перестановки дизъюнктивных членов],

$YZ \to Y(XZ)$ [правило IV],

$X(YZ) \to X(Y(XZ))$ [правило IV],

$X(YZ) \to (Y(XZ))X$* [коммутативность дизъюнкции],

$X \to ZX$ [из аксиомы b) путем перестановки дизъюнктивных членов],

$XZ \to Y(XZ)$ [подстановка в предыдущую формулу],

$X \to Y(XZ)$ [правило V],

$(Y(XZ))X \to (Y(XZ))(Y(XZ))$ [правило IV],

$(Y(XZ))X \to Y(XZ)$** (замена $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$).

Из (*) и (**) получаем по правилу V:

$$X(YZ) \to Y(XZ).$$

Формула (*15*): $X(YZ) \to (XY)Z$.

Доказательство: $X(YZ) \to X(ZY)$ [закон коммутативности],

$X(ZY) \to Z(XY)$ [формула (14)],

$X(YZ) \to Z(XY)$ [правило V].

Отсюда, применяя закон коммутативности, получаем формулу (15).

Формула (*16*): $(XY)Z \to X(YZ)$.

Доказательство: $Z(YX) \to (ZY)X$ [подстановка в (15)].

Применяя закон коммутативности, можно $Z(YX)$ заменить на $(XY)Z$, а $(ZY)X$ на $X(YZ)$.

На основании формул (15) и (16) и правила VI заключаем, что не только последовательность дизъюнктивных членов, но и их сочетания в группы можно по произволу изменять. Таким образом, мы вывели *ассоциативный закон* для дизъюнктивной связи.

Формула (*17*): $X \& (Y \& Z) \to (X \& Y) \& Z$,

$$(X \& Y) \& Z \to X \& (Y \& Z).$$

Доказательство: $X \& (Y \& Z)$ является сокращением для $\overline{\overline{X}\;\overline{\overline{Y}\,\overline{Z}}}$, а $(X \& Y) \& Z$ для $\overline{\overline{\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}}\;\overline{Z}}$. Однако оба выражения, согласно нашим предшествующим правилам, эквивалентны и по произволу могут заменять друг друга.

Формула (*18*): $X \to (Y \to X \& Y)$.

Доказательство: $(\overline{X}\,\overline{Y})\,\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$ [подстановка в (3)].

Иначе сочетая дизъюнктивные члены, получаем $\overline{X}(\overline{Y}\,\overline{\overline{X}\,\overline{Y}})$.

Это и есть искомая формула.

Правило VII: $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ *может быть заменено на* $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$ или на $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}$.

Доказательство сразу получается из наших правил, если заменить сокращения $\to$ и $\&$ их значениями.

Правило VIII: $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ можно заменить на $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Доказательство: $\overline{\mathfrak{A}}(\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})$ можно заменить на $(\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{A}})\mathfrak{B}$ или на $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$.

Формула (*19*): $X(Y \& Z) \to XY \& XZ$.

Доказательство: $Y \& Z \to Y$ [формула (12)].

$X(Y \& Z) \to XY$ [правило IV].

Точно так же получаем из формулы (13)

$$X(Y \& Z) \to XZ,$$

$$XY \to (XZ \to XY \,\&\, XZ)$$ [формула (18)],

$$X(Y \,\&\, Z) \to (XZ \to XY \,\&\, XZ)$$ [по правилу V],

$$XZ \to (X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ)$$ [по правилу VII],

$$X(Y \,\&\, Z) \to (X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ)$$ [правило V],

$$X(Y \,\&\, Z) \to XY \,\&\, XZ$$ [правило VIII].

Формула *(20)*: $XY \,\&\, XZ \to X(Y \,\&\, Z)$.

Доказательство: $Y \to (Z \to Y \,\&\, Z)$ [формула (18)],

$(Z \to Y \,\&\, Z) \to (XZ \to X(Y \,\&\, Z))$ [аксиома d)],

$Y \to (XZ \to X(Y \,\&\, Z))$ [правило V],

$XZ \to (Y \to X(Y \,\&\, Z))$ [правило VII],

$(Y \to X(Y \,\&\, Z)) \to [XY \to X(X(Y \,\&\, Z))]$ [подстановка в аксиому d)],

$XZ \to [XY \to X(X(Y \,\&\, Z))]$ [правило V],

$X(X(Y \,\&\, Z))$ можно заменить на $(XX)(Y \,\&\, Z)$ и затем на $X(Y \,\&\, Z)$.

$$XZ \to (XY \to X(Y \,\&\, Z)).$$

Отсюда, согласно правилу VII, получаем формулу (20).

Формулы (19) и (20) вместе с правилом VI дают доказательство закона дистрибутивности.

Дальнейший вывод формул и правил оказывается ненужным. Действительно, мы обнаружили, что правила a1)—a4), в1)—в3), которые мы раньше установили, выводятся из аксиом как производные правила. Отсюда следует, что все выводы, которые мы сделали раньше на основе этих правил, например те, которые касались принципа двойственности и нормальной формы, могут быть получены также аксиоматически. Поэтому не нужно каждый раз возвращаться к аксиомам, чтобы установить доказуемость некоторой формулы. Ибо формула исчисления высказываний доказуема из аксиом в том и только в том случае, когда в принадлежащей ей конъюнктивной нормальной форме каждая дизъюнкция содержит два члена, из которых один является противоположностью другого.

§ 12. Непротиворечивость системы аксиом

Аксиоматическое построение исчисления высказываний дает возможность ставить в исчислении высказываний такие вопросы, которые присущи аксиоматическому методу. Важнейшими из них являются: *непротиворечивость*, *независимость* и *полнота* системы аксиом. Сначала мы рассмотрим вопрос о непротиворечивости аксиом.

Вопрос о непротиворечивости может быть здесь поставлен в переносном смысле. Мы называем аксиомы непротиворечивыми, если невозможно с помощью исчисления вывести два сложных высказывания, находящиеся друг к другу в отношении противоположности, т. е. получающиеся из пары высказываний X, $\overline{X}$, если в каждое из них вместо X подставить одно и то же выражение.

Это определение непротиворечивости делает необходимым следующее пояснение. Здесь как будто выдвигается на первый план по сравнению с остальными один определенный логический принцип: закон противоречия. В действительности же дело обстоит так, что появление формального противоречия, то есть доказуемость двух формул $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, осудило бы все исчисление на бессмысленность; ибо мы уже раньше заметили, что если доказуемы два высказывания вида $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$, то доказуемо и каждое другое высказывание. Непротиворечивость исчисления в смысле нашего определения, таким образом, равнозначна с тем, что не каждая формула доказуема.

Чтобы установить непротиворечивость исчисления, мы поступаем следующим образом.

Будем понимать знаки высказываний $X, Y, Z, \ldots$ как арифметические переменные, для которых в рассмотрение входят только значения: 0, 1. $X \vee Y$ мы истолковываем как арифметическое произведение, а $\overline{X}$ определяем так: $\overline{0}$ равно 1 и $\overline{1}$ равно 0. На основании такой интерпретации каждое сложное высказывание представляет собой некоторую арифметическую функцию основных высказываний, которая может принимать только значения 0 или 1. Если эта функция тождественно равна нулю, то для краткости мы будем говорить и о самом символическом выражении, что оно тождественно равно 0.

Это истолкование дает возможность указать теперь некоторое общее свойство всех тех формул, которые могут быть выведены из наших аксиом. А именно, для любой, из подлежащих рассмотрению, системы значений переменных выводимые из аксиом формулы в нашем арифметическом истолковании дают значение 0, т. е. тождественно равны 0.

Этим свойством, прежде всего, обладают аксиомы a) — d); мы устанавливаем это следующим образом.

Путем испытаний убеждаемся, что $\overline{X} \vee X$ всегда имеет значение 0. Отсюда следует, что и $\overline{X \vee X} \vee X$ [аксиома a)] также всегда равно 0, потому что $X \vee X$ имеет то же самое значение, что и X. — Далее, $\overline{X}(XY)$ [аксиома b)] имеет то же самое значение, что и $(\overline{X} \vee X)Y$, в силу ассоциативности арифметического произведения. Оно, следовательно, всегда равно 0, так как $0 \vee Y$ равно 0. Так как $Y \vee X$ всегда имеет то же значение, что и $X \vee Y$, то $\overline{X \vee Y} \vee (Y \vee X)$, как частный случай для $\overline{X} \vee X$, всегда равно 0. Таким образом, формула c) всегда имеет значение 0. Наконец, убеждаемся в истинности сказанного и по отношению к формуле d): действительно, при $Z = 0$ один сомножитель $= 0$, при $Z = 1$ выражение $Z \vee X$ имеет то же значение, что и X, а $Z \vee Y$ — то же значение, что и Y; итак, в случае $Z = 1$ формула в целом оказывается имеющей то же самое значение, что и $\overline{\overline{X}Y}\,\overline{X}Y$, что снова есть частный случай для $\overline{X}X$.

Таким образом, все четыре аксиомы действительно обладают указанным свойством. При использовании обоих подлежащих рассмотрению правил, применяемых нами для вывода новых формул, а именно правила подстановки и схемы заключения, это свойство всегда сохраняется. В самом деле, что касается первого правила, то ясно, что путем подстановки некоторого выражения вместо переменного запас значений для этого переменного во всяком случае не может быть расширен. И если мы с помощью второго правила из двух формул $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ выводим формулу $\mathfrak{B}$, то свойство давать всегда значение 0 переносится с обеих этих формул на выведенную формулу; ибо так как формула $\mathfrak{A}$ дает всегда значение 0, то $\overline{\mathfrak{A}}$ всегда имеет значение 1; таким образом, $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ имеет то же самое значение, что и $\mathfrak{B}$, а поэтому $\mathfrak{B}$ так же, как $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$, всегда имеет значение 0.

Мы видим, что действительно с помощью нашего исчисления получаются только такие формулы, которые при арифметическом истолковании дают всегда значение 0. Но установив это, мы фактически заканчиваем наше доказательство. В самом деле, две формулы, которые возникают из X и $\overline{X}$ заменой X оба раза тем же самым сложным высказыванием, очевидно, не могут обе обладать свойством всегда быть равными 0; если одна из них всегда имеет значение 0, то другая всегда имеет значение 1.

§ 13. Независимость и полнота системы

К вопросу непротиворечивости, на который в отношении нашей системы аксиом мы могли ответить утвердительно, примыкает другой вопрос: являются ли все аксиомы *независимыми* друг от друга, или же без той или другой из этих аксиом можно обойтись[1].

Ответ гласит, что наша система аксиом действительно удовлетворяет требованию независимости.

---

[1] Этот вопрос о независимости системы аксиом также решен в цитированной на стр. 51 работе: *Bernays P.*, Axiomatische Untersuchung...

Сначала мы покажем, что формула a) $\overline{X\vee X}\vee X$ не может быть выведена из остальных аксиом, и притом если даже мы присоединим в качестве аксиомы формулу $\bar{X}\vee X$; таким образом, мы одновременно докажем, что формула a) не может быть заменена в нашей системе аксиом более простой формулой $\bar{X}X$. Для других аксиом доказательство независимости также проведено в расширенном смысле, т. е. одновременно будет показано, что соответствующая аксиома не может быть заменена аксиомой $\bar{X}\vee X$.

Доказательство снова выполняется с помощью некоторой арифметической интерпретации. Мы берем в качестве значений для переменных $X, Y, Z, \ldots$ классы вычетов 0, 1, 2 по модулю 4. Знак «$\vee$» пусть снова означает обычное умножение, а $\bar{X}$ определяем следующим образом: $\bar{0}$ означает 1, $\bar{1}$ означает 0, $\bar{2}$ означает 2.

Можно проверить теперь, что формулы $\bar{X}\vee X$, b), c), d) при указанном истолковании переменных выражают *всегда* вычет 0, и это свойство переносится при применении обоих правил на все формулы, выведенные из этих 4 формул. Мы это устанавливаем таким же способом, как и при доказательстве непротиворечивости. Поэтому, если бы формула a) могла быть выведена из b), c), d) и $\bar{X}\vee X$ с помощью наших правил, то выражение $\overline{XX}\vee X$ для каждого допустимого значения X должно было бы дать вычет 0. Однако этого мы не имеем. В самом деле, если мы подставим вместо X значение 2, то получим:

$$\overline{2\vee 2}\vee 2=\bar{0}\vee 2=1\vee 2=2,$$

т. е. не нулевое значение.

Независимость аксиомы b) $\bar{X}\vee(X\vee Y)$ от остальных аксиом и формулы $\bar{X}\vee X$ мы покажем следующим образом. Снова X, Y, Z рассматриваем как переменные, которые могут принимать значения 0, 1, 2, 3.

Но теперь мы определяем связь $\vee$ для этих переменных через:

$$0\vee 0=0\vee 1=0\vee 2=0\vee 3=0;\quad 1\vee 1=1\vee 2=1\vee 3=1;$$
$$2\vee 2=2;\quad 3\vee 3=3;\quad 2\vee 3=2$$

и через требование, чтобы для этой связи выполнялся закон коммутативности; далее, под $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ понимаем, соответственно, 1, 0, 3, 2. Какие бы значения переменных мы теперь ни выбрали, формулы a), c), d) и $\bar{X}\vee X$ всегда дают значение 0 или 2. Это свойство сохраняется для всех формул, которые выводятся с помощью обоих правил из a), c), d) и $\bar{X}\vee X$. Между тем выражение $\bar{X}(XY)$ имеет значение 1, если берем $X=2$ и $Y=1$.

Аналогично доказывается независимость аксиомы c): $\overline{XY}(YX)$. Полагаем: $\bar{0}$ равным 1, $\bar{1}$ равным 0, $\bar{2}$ равным 0, $\bar{3}$ равным 2. Затем определяем

$$0\vee 0=0\vee 1=0\vee 2=0\vee 3=1\vee 0=2\vee 0=3\vee 0=0;$$
$$1\vee 1=1;\quad 1\vee 2=2\vee 1=2;\quad 1\vee 3=3\vee 1=3;$$
$$2\vee 3=0;\quad 3\vee 2=3;\quad 2\vee 2=2;\quad 3\vee 3=3.$$

Легко показать, что формулы a), b), d) и $\bar{X}\vee X$ при любой замене больших латинских букв числами 0, 1, 2, 3 получают значение 0 и что это свойство сохраняется при выводе новых формул. Напротив, c) получает значение 3, если X заменяем числом 2, а Y числом 3. Это доказательство независимости дает нам возможность сделать еще следующее заключение: ассоциативный закон

$$\overline{X(YZ)}((XY)Z)$$

не может быть доказан без использования аксиомы c). В самом деле, если в этой формуле заменяем X значением 3, Y значением 2, Z значением 3, то получаем:

$$\overline{3\vee(2\vee 3)}\vee((3\vee 2)\vee 3)=\bar{0}\vee 3=1\vee 3=3.$$

Таким образом, ассоциативный закон является также независимым от аксиом a), b) и d).

Остается еще показать независимость аксиомы d) от остальных аксиом. Это можно сделать с помощью следующей системы определений.

Пусть переменные X, Y, Z могут принимать значения 0, 1, 2, 3, причем:

$$\bar{0}=1,\quad \bar{1}=0,\quad \bar{2}=3,\quad \bar{3}=0,$$

$$0\vee 0=0\vee 1=1\vee 0=0\vee 2=2\vee 0=0\vee 3=$$
$$=3\vee 0=2\vee 3=3\vee 2=0.$$

$$1\vee 1=1,\quad 1\vee 2=2\vee 1=2,\quad 1\vee 3=3\vee 1=3.$$
$$2\vee 2=2,\quad 3\vee 3=3.$$

Тогда формулы a), b), c) и $\bar{X}\vee X$, а также и все выведенные из них формулы всегда получают значение 0. Однако d) получает значение 2, если $X=3$, $Y=1$ и $Z=2$.

Мы показали, таким образом, *независимость аксиом* a) — d). Рассмотрим теперь вопрос о *полноте*. Полнота некоторой системы аксиом может быть определена двояким образом. Во-первых, можно под этим понимать, что все истинные формулы некоторой содержательно характеризуемой области могут быть получены из данной системы аксиом. Но понятие полноты можно также понимать более строго, так что некоторая система аксиом называется полной только в том случае, если присоединение к ней какой-нибудь до этого не выводимой формулы всегда приводит к противоречию.

Полнота в первом смысле означала бы здесь, что из аксиом a) — d) можно вывести все всегда-истинные формулы исчисления высказываний. Она, как мы уже видели, имеет место.

Однако мы имеем здесь полноту и в более строгом смысле. Можно убедиться в этом следующим образом: пусть $\mathfrak{A}$ — какая-нибудь формула, не доказуемая из аксиом. Пусть $\mathfrak{B}$ — соответствующее ей выражение в конъюнктивной нормальной форме. Так как $\mathfrak{B}$ так же, как и $\mathfrak{A}$, не может быть доказано, то среди конъюнктивных членов $\mathfrak{B}$ должна найтись дизъюнкция $\mathfrak{C}$, у которой никакие два члена не являются противоположностями друг для друга. Если в $\mathfrak{C}$ вместо каждого неотрицаемого знака высказывания подставить X, а вместо каждого отрицаемого $\bar{X}$, то получим дизъюнкцию вида $X\vee \bar{X}\vee X\vee \cdots \vee X$, которая, согласно правилам исчисления высказываний, эквивалентна X. Если мы постулируем теперь $\mathfrak{A}$ в качестве истинной формулы, то и $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{C}$, и, наконец, X оказываются, в свою очередь, истинными формулами. Но ведь мы можем подставить $\bar{X}$ на место X и получить противоречие. Итак, оказывается, что система рассмотренных аксиом полна.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ИСЧИСЛЕНИЕ КЛАССОВ
(одноместное исчисление предикатов)

Та форма логического исчисления, с которой мы до сих пор имели дело, является достаточной для точного выражения логических связей, в которых высказывания выступают как нераздельное целое. Однако не может быть и речи о том, чтобы мы вообще могли обойтись в логике одним только исчислением высказываний. С его помощью не могут быть переданы даже те простые виды заключений, которые в традиционной логике принято обозначать терминами: «barbara», «celarent», «darii» и т. д. Например, напрасной была бы попытка отыскать формальное представление для логической связи, которая выражается тремя предложениями:

«Все люди смертны;
Кай — человек;
следовательно, Кай смертен».

Причина этого в том, что при заключениях такого рода речь идет не только о высказываниях как целом, но играет существенную роль внутренняя логическая структура высказываний, выражающаяся словесно соотношением между субъектом и предикатом. Эти соображения побуждают нас изменить исчисление или, по крайней мере, его содержательное истолкование.

§ 1. Содержательное переистолкование символики исчисления высказываний

Мы употребляем в измененном исчислении те же логические знаки, что и в исчислении высказываний. Однако под $X, Y, Z, \ldots$ должны теперь пониматься не целые высказывания, а предикаты. Например, X

может быть обозначением для предиката «смертен» или «делится» или «имеет причину». Слово «предикат» употребляется здесь в обычном в философии смысле; мы понимаем под ним то, что дает возможность охарактеризовать ближе *один* субъект. Однако в дальнейшей части этой книги, именно в третьей и четвертой ее главах, термин «предикат» будет употребляться и в более широком смысле, на котором нам здесь нет необходимости останавливаться более подробно. Там мы будем иметь дело с предикатами от нескольких субъектов. Поэтому предикаты в обычном смысле, которые в этой главе только и имеются в виду, мы называем более точно одноместными предикатами, но в последующем изложении эпитет «одноместный» большей частью опускаем.

Если X — какой-либо предикат, например, «красив», то под $\overline{X}$ нужно понимать противоположный предикат «некрасив». Если обозначить буквами X и Y, соответственно, предикаты: «преходящий», «обладает познанием», то $X \& Y$ является символом для предиката «преходящий и обладает познанием», а $X \vee Y$ — символом для предиката «преходящий или обладает познанием». Другие логические знаки мы можем снова использовать как сокращения.

Взятые сами по себе предикаты ни истинны, ни ложны. Поэтому, если утверждают о какой-нибудь формуле X или $X \vee Y$, что она истинна, то это должно иметь иной смысл, чем до сих пор. Теперь мы будем под этим понимать, что предикат X или $X \vee Y$ выполняется для *всех* предметов.

Этим устанавливается истолкование всех знаков в одноместном исчислении предикатов. Все формулы получают смысл *всеобщих суждений*. Чтобы выразить обычные всеобщие суждения, например: «Все люди смертны», можно сначала высказать такое суждение в форме: «Все предметы суть не люди или смертны». Если ввести затем для предиката «человек» знак X, для предиката «смертен» — знак Y, то символическое выражение нашего суждения получается в виде:

$\overline{X} \vee Y$. Соответственно, отрицательное всеобщее суждение, например: «Никакой человек не совершенен», выражается формулой: $\overline{X} \vee \overline{Y}$, где X, Y означают, соответственно, предикаты: «человек», «совершенен». Точная интерпретация формулы $\overline{X} \vee \overline{Y}$ гласит: «Все предметы не люди или не совершенны».

Мы можем теперь снова искать всегда-истинные формулы, т. е. такие формулы, которые при подстановке любых предикатов на место переменных $X, Y, \ldots$ дают предикат, принадлежащий всем предметам. Легко обнаружить, что *при новой интерпретации исчисления система всегда-истинных формул точно та же, что и в исчислении высказываний.*

Именно, в первую очередь, снова имеют место эквивалентности a1) — a4), которые дают возможность осуществить преобразование выражений к конъюнктивной нормальной форме. Затем легко убеждаемся, что формула, приведенная к нормальной форме, тогда и только тогда всегда-истинна, когда каждый конъюнктивный член содержит дизъюнкцию $X \vee \overline{X}$. Таким образом можно полностью сохранить формальный аппарат исчисления высказываний; нужно только дать формулам другое истолкование.

Наряду с первоначальным истолкованием и истолкованием в смысле исчисления предикатов, для формул исчисления высказываний существует еще и *третья интерпретация*. Однако по сравнению с исчислением предикатов здесь речь идет не об еще одном введении новых логических соотношений, а лишь о другом способе представления фактов, выразимых с помощью исчисления предикатов, обладающем некоторыми преимуществами с точки зрения наглядности. Это изменение представления состоит в том, что вместо определения предикатов по *содержанию* мы характеризуем их по *объему*. Каждому предикату соответствует определенный «класс» [1] предметов,

[1] В математике вместо выражения «класс» обычно употребляют слово «множество».

содержащий все предметы, для которых этот предикат имеет силу. При этом, конечно, не исключается и случай класса, не содержащего вообще никаких предметов. Теперь мы примем классы за объекты исчисления, которое при такой интерпретации мы называем «*исчислением классов*».

Под $\overline{X}$ следует понимать класс, который состоит из всех предметов, не входящих в класс X. $X \& Y$ обозначает пересечение обоих классов X и Y, $X \vee Y$ — сумму классов. $X \rightarrow Y$ и $X \sim Y$ могут, как и раньше, рассматриваться как сокращения для $\overline{X} \vee Y$, соответственно для $\overline{X} \vee \overline{Y} \& Y \vee X$. Если говорят, что формула X истинна, то под этим следует понимать, что X есть такой класс, который состоит из всех предметов. При таких определениях все правила исчисления предикатов справедливы без изменения и для исчисления классов. Согласно этой интерпретации, истинность формулы $X \rightarrow Y$ означает, что класс, соответствующий X, является подклассом класса, определенного через Y; формула $X \sim Y$ истинна в том и только в том случае, если классы X и Y тождественны.

Общее суждение «Все люди смертны» в исчислении классов может быть сформулировано так:

«Объединенный класс, образованный из класса не-людей и класса смертных, охватывает все предметы».

Его формальное выражение оказывается тем же самым, что и в исчислении предикатов.

§ 2. Объединение исчисления классов с исчислением высказываний

Заключения традиционной логики не могут быть все формализованы в исчислении предикатов, так как отсутствует возможность представления *частных суждений. Это представление получаем только путем соединения исчисления высказываний с исчислением предикатов или исчислением классов.* Мы достигаем этого объединения на основе того соображения, что соотношения исчисления предикатов сами представляют собой высказывания, которые могут быть подчинены правилам исчисления высказываний. Эта мысль приводит нас к установлению *комбинированного исчисления*, в котором логические знаки &, $\vee$, $\overline{}$ употребляются как для связывания высказываний, так и для связывания предикатов.

Однако в таком случае возникла бы немедленно неясность, как понимать высказывание $\overline{X}$. Означает ли оно, что предикат X не распространяется ни на одну вещь, или же оно означает: неверно, что X распространяется на все вещи. Например, если X обозначает предикат «красивый», то $\overline{X}$ при первом истолковании нужно было бы читать так: «все вещи некрасивы», а при втором: «не все вещи красивы». Мы можем устранить эту трудность, помещая предикаты между двумя вертикальными чертами. $|X\vee Y|$ тогда будет означать: предикат $X\vee Y$ распространяется на все вещи, а $|X|\vee|Y|$ будет означать: предикат X распространяется на все вещи или предикат Y распространяется на все вещи. Два высказывания, дававшие нам только что повод для смешивания, различаются теперь так: $|\overline{X}|$ и $\overline{|X|}$. При помощи комбинированного исчисления мы можем теперь выразить *частные высказывания*. Например, высказывание «Некоторые числа нечетны» можно преобразовать следующим образом: «Неверно, что все числа четны».—Если обозначим предикат «число» буквой X, а предикат «четное» через Y, то сначала записываем высказывание «Все числа четны» символически в виде $|\overline{X}\vee Y|$. Противоположное этому высказывание выразится поэтому через $\overline{|\overline{X}\vee Y|}$. Вообще, $\overline{|\overline{X}\vee Y|}$ обозначает высказывание: существуют вещи, для которых одновременно имеют место X и Y.

В комбинированном исчислении к предыдущим всегда-истинным формулам прибавляется ряд новых.

Подобного рода формулами, например, являются:

$$\{|X\to Y|\,\&\,|Y\to Z|\}\to|X\to Z|,$$
$$|X|\,\&\,|Y|\sim|X\,\&\,Y|.$$

Исходя из соображений, приведенных в конце следующего параграфа, мы отказываемся от систематического построения и исследования этих формул.

§ 3. Систематический вывод традиционных аристотелевых умозаключений

После того как наше исчисление получило необходимое дополнение, мы применим его к учению о логических умозаключениях. Речь идет о том, чтобы выяснить, как выражаются классические аристотелевы фигуры умозаключения в нашем комбинированном исчислении и как можно систематизировать и обосновать их с точки зрения этого исчисления.

Подлежащие рассмотрению умозаключения обладают следующими характеристическими свойствами: они состоят из трех предложений, из которых третье (заключение) представляет собой логическое следствие двух первых (посылок). Каждое из трех предложений имеет одну из четырех форм:

«Все A суть B» (общее утвердительное суждение).

«Некоторые A суть B» (частное утвердительное суждение).

«Никакое A не есть B» (общее отрицательное суждение).

«Некоторые A не суть B» (частное отрицательное суждение).

Для краткого обозначения этих четырех форм обычно употребляют гласные *a*, *i*, *e*, *o* (в указанной последовательности). В качестве общего знака для этих четырех видов суждений нам будет служить символ AB.

В трех предложениях умозаключения выступают всего три понятия: *понятие субъекта* (S), *понятие предиката* (P) и *среднее понятие* (M); притом заключение имеет форму SP, а из посылок первая содержит понятия M и P, а вторая M и S. В соответствии с этим получаем следующие четыре «фигуры» умозаключений[1]:

$$\begin{array}{cccc} MP & PM & MP & PM \\ \underline{SM} & \underline{SM} & \underline{MS} & \underline{MS} \\ SP & SP & SP & SP \end{array}$$

Так как для каждой из четырех фигур существуют четыре возможности для каждого из трех предложений умозаключения в зависимости от принадлежности его к одной из четырех форм суждений *a*, *i*, *e*, *o*, то с чисто комбинаторной точки зрения были бы мыслимы 256 различных видов умозаключений. Однако число возможностей существенно ограничивается тем обстоятельством, что заключение должно следовать из посылок. Аристотелева логика учит, что допустимы 19 различных видов умозаключений. Для этих видов ввели трехсложные отличительные слова, гласные которых указывают по порядку формы суждений, к которым принадлежат три предложения умозаключения. При таком способе наименования получаем следующий перечень:

1-я фигура	*2-я фигура*	*3-я фигура*	*4-я фигура*
barbara	cesare	datisi	calemes
celarent	camestres	feriso	fresison
darii	festino	disamis	dimatis
ferio	baroco	bocardo	bamalip
		darapti	fesapo
		felapton	

Проверим теперь с помощью исчисления предикатов эту совокупность умозаключений: действительно

[1] Следует заметить, что фиксирование последовательности S и P в заключительном предложении не является ограничением общности, так как фигура умозаключения с PS в качестве заключения всегда может быть получена из одной из названных четырех фигур путем простого изменения обозначения и перестановки посылок.

ли она содержит все подлежащие учету виды умозаключений и удовлетворяют ли все перечисленные их разновидности требованию логической убедительности. Для этого мы прежде всего выразим символически четыре формы *a*, *i*, *e*, *o* суждения AB. Если мы обозначим буквами X, Y предикаты: «есть A», «есть B», то такими символическими выражениями будут:

$$|\bar{X} \vee Y|;\ \overline{|\bar{X} \vee \bar{Y}|};\ |\bar{X} \vee \bar{Y}|;\ \overline{|\bar{X} \vee Y|}.$$

Из этого способа записи немедленно получаются традиционные правила *противоположности* (*opposition*) и *обращения*, относящиеся к рассмотренным формам суждения. Действительно, из этих четырех суждений последнее выражено как противоположность первого, а второе — как противоположность третьего. Далее, обе средние формулы симметричны относительно X и Y, так что суждение «Некоторые A суть B» оказывается равнозначным с «Некоторые B суть A», и точно так же суждение «Никакое A не есть B» — равнозначным с «Никакое B не есть A». Напротив, для форм *a* и *o* такое обращение невозможно.

Теперь мы применим этот способ выражения четырых форм суждения к умозаключениям, введя для предикатов: «есть S», «есть M», «есть P» знаки X, Y, Z. Тогда каждое умозаключение состоит из трех формул. Первая посылка выражается одной из четырех форм:

$$|\bar{Y} \vee Z|;\ |\bar{Y} \vee \bar{Z}|;\ |\bar{Z} \vee Y|;\ |\bar{Z} \vee \bar{Y}|,$$

соответственно, ее логической противоположностью. Для второй посылки имеем соответственно одну из форм:

$$|\bar{Y} \vee X|;\ |\bar{Y} \vee \bar{X}|;\ |\bar{X} \vee Y|;\ |\bar{X} \vee \bar{Y}|,$$

или ее противоположность. В заключении имеем, отрицаемую или неотрицаемую, одну из двух форм:

$$|\bar{X} \vee \bar{Z}|;\ |\bar{X} \vee Z|.$$

(Заметим, что X, Y и Z могут выступать неотрицаемыми только как второй член связи.)

К этим формальным условиям присоединяется еще требование, чтобы третья формула была следствием обеих первых в том смысле, что при подстановке определенных предикатов вместо X, Y, Z обе первые формулы не могут выполняться без того, чтобы то же самое не имело места также для третьей формулы.

Теперь нужно исследовать, как благодаря этому требованию ограничивается многообразие допустимых комбинаций формул.

Для этого рассмотрения полезно заметить, что мы можем, ничего не меняя в истинности формулы, поменять местами два члена, связанные через $\vee$. Далее, не существенен порядок следования посылок, и при той общности, которой должен обладать заключительный вывод, неважно, обозначить ли некоторый предикат через U или $\bar{U}$. На основании этих соображений мы можем каждую пару посылок привести к одной из следующих шести нормальных форм:

$$\begin{array}{llllll}
\text{I.} & |\bar{U}\vee\bar{V}| & \text{III.} & \overline{|U\vee V|} & \text{V.} & \overline{|\bar{U}\vee\bar{V}|} \\
 & |\bar{V}\vee\bar{W}| & & |\bar{V}\vee\bar{W}| & & \overline{|\bar{V}\vee\bar{W}|} \\
\text{II.} & |\bar{U}\vee\bar{V}| & \text{IV.} & \overline{|\bar{U}\vee\bar{V}|} & \text{VI.} & \overline{|\bar{U}\vee\bar{V}|} \\
 & |V\vee\bar{W}| & & |V\vee\bar{W}| & & \overline{|V\vee\bar{W}|}
\end{array}$$

Заключение принимает одну из форм (отрицаемую или неотрицаемую):

$$|\bar{U}\vee\bar{W}|;\ |\bar{U}\vee W|;\ |U\vee\bar{W}|;\ |U\vee W|.$$

От нового способа записи возвращаемся к прежнему тем, что вместо V подставляем Y или $\bar{Y}$; отождествляем, далее, U, W или же W, U с одной из пар: X, Z; $X, \bar{Z}$; $\bar{X}, Z$; $\bar{X}, \bar{Z}$ и рассматриваем затем все возможные перестановки дизъюнктивных членов, которые (при подходящей последовательности посылок) приводят к одной из формально допустимых трехформульных систем.

Если мы проверим теперь эти шесть пар посылок I—VI с точки зрения того, что может из них следовать, то найдем, прежде всего, что из I, IV, V нельзя получить умозаключения желаемого рода.

Действительно, I. выполняется при совершенно произвольных U, W, если предикат V не может быть приписан никакой вещи. IV. выполняется в том случае, когда V истинно для всех вещей, при единственном условии, что U выполняется хотя бы для одной вещи, а V. выполняется для произвольных U и W, объемы которых не пусты, если V истинно для всех вещей.

Посылки VI. также не дают никакого надлежащего заключения. Ибо для того, чтобы удовлетворить им подходящим выбором V, достаточно, чтобы U и W имели место каждый хотя бы для одной вещи. Указанные условия, однако, совместимы с ложностью всякого из рассматриваемых заключений.

Вследствие этого для наших умозаключений подлежат рассмотрению только случаи II и III. Обе посылки II. $|U\vee\bar{V}|$ и $|V\vee\bar{W}|$, если ввести сокращение $\longrightarrow$ и использовать первую из формул, приведенных на стр. 73, непосредственно дают соотношение $|\bar{U}\vee\bar{W}|$. Но это и есть самое сильное следствие, которое можно извлечь из обеих посылок, так как при истинности соотношения $|\bar{U}\vee\bar{W}|$ обе посылки удовлетворяются, если V положить равным W.

В III. первая посылка $\overline{|\bar{U}\vee\bar{V}|}$ обозначает, что существуют вещи (т. е., по крайней мере, одна вещь), для которых одновременно выполняются U и V. Вторая посылка $|\bar{V}\vee\bar{W}|$ означает, что каждая вещь, которая обладает свойством V, обладает также свойством $\bar{W}$. Отсюда следует, что существуют вещи, для которых выполняются одновременно U и $\bar{W}$, или что формула $\overline{|\bar{U}\vee W|}$ истинна.

Обратно, если формула $\overline{|\bar{U}\vee W|}$ истинна, то посылки III. удовлетворяются, когда V полагают равным W.

Таким образом, получается, что все умозаключения, рассмотренные нами, могут быть сведены к двум главным формам, а именно:

$$(A)\quad \begin{array}{c}|\overline{U}\vee\overline{V}|\\ |V\vee\overline{W}|\\ \hline |\overline{U}\vee W|\end{array}\qquad\qquad (B)\quad \begin{array}{c}\overline{|\overline{U}\vee V|}\\ |\overline{V}\vee\overline{W}|\\ \hline \overline{|\overline{U}\vee W|}\end{array}$$

Теперь нужно еще от двух главных форм посредством различных допустимых преобразований перейти снова к прежним выражениям, с помощью которых мы можем распознавать различные аристотелевы виды умозаключений. При этом мы должны учитывать формальные ограничения при умозаключениях, согласно которым неотрицаемые предикаты X, Y, Z встречаются только на втором месте в дизъюнкции, а Y никогда не встречается в заключительном предложении. Далее, следует иметь в виду, что в главной форме (A) перестановка U и W не дает никаких новых видов умозаключений.

Итак, мы получаем все способы умозаключения, происходящие из главной формы (A), при помощи подстановок:

$$U=X,\quad V=Y,\quad W=Z;$$
$$U=X,\quad V=\overline{Y},\quad W=Z;$$
$$U=X,\quad V=\overline{Y},\quad W=\overline{Z}.$$

Первая из этих подстановок (при соответствующем выборе порядка посылок и членов дизъюнкции) приводит к умозаключениям *camestres* и *calen.es*, вторая — к *celarent* и *cesare*, третья — к *barbara*.

Для главной формы (B) мы получаем различные виды умозаключений из подстановок:

$$U=X,\ V=Y,\ W=Z;\qquad U=X,\ V=Y,\ W=\overline{Z};$$
$$U=X,\ V=\overline{Y},\ W=Z;\qquad U=Z,\ V=Y,\ W=\overline{X};$$
$$U=Z,\ V=Y,\ W=\overline{X}.$$

Первая подстановка приводит к умозаключениям *ferio*, *festino*, *feriso*, *fresison*; вторая — к *darii* и *datisi*, третья — к *baroco*, четвертая — к *disamis* и *dimatis*, пятая — к *bocardo*.

Приведенные соображения показывают нам, что существуют 15 различных форм умозаключений желаемого вида. Все они принадлежат к аристотелевым умозаключениям, так что классический перечень форм умозаключений исчерпывает все возможные случаи. Однако нашим методом мы не воспроизводим всех аристотелевых способов умозаключения. В полученном перечне отсутствуют четыре вида умозаключений: *darapti*, *bamalip*, *felapton*, *fesapo*. Это расхождение происходит от того, что ставшее традиционным со времен Аристотеля истолкование положительных всеобщих предложений («Все A суть B») не вполне согласуется с нашей интерпретацией формул вида $|\overline{X}\vee Y|$. Именно, по Аристотелю, высказывание «Все A суть B» считается истинным лишь, если существуют предметы, которые суть A. Наше отклонение от Аристотеля в этом пункте оправдывается потребностями математических применений логики, где класть в основу аристотелево понимание было бы нецелесообразно.

Мы ограничиваемся этими замечаниями в отношении исчисления предикатов и классов. Правда, можно указать ряд интересных постановок вопросов; например, можно спросить, какие формулы комбинированного исчисления представляют собой всегда-истинные высказывания. От более детального рассмотрения этих проблем мы, однако, отказываемся, так как они формулируются и исследуются в более общей связи в следующей главе. Например, вопрос о всегда-истинных формулах комбинированного исчисления решается полностью в § 12 следующей главы. Мы отказываемся также от аксиоматического изложения одноместного исчисления предикатов[1]. Исчисление классов, или

[1] Полная система аксиом комбинированного исчисления и одновременно интересное расширение исчисления классов

одноместное исчисление предикатов, вообще представляет собой только подготовку к рассматриваемому ниже исчислению предикатов в широком смысле и после его введения становится излишним, так что в дальнейшем у нас не будет надобности возвращаться к рассмотрениям, затронутым в настоящей главе. Напротив, исчисление высказываний остается неотъемлемой основой всех дальнейших исследований.

даны *Вайсбергом*: M. *Wajsberg*, Ein erweiterter Klassenkalkül. Mh. Math. Physik. Bd. **40** (1932) [см. также соответствующее исправление в Mh. Math. Physik. Bd. **42** (1935) *S.* 242]. Вопрос о всегда-истинных высказываниях комбинированного исчисления, рассмотренный также в этой работе, разрешен был уже другим способом в работах *Лёвенгейма, Сколема* и *Бемана*, которые упомянуты в § 12 следующей главы. Ср. особенно изложение *Бемана* в Math. Ann. Bd. **86** (1922).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

УЗКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Недостаточность предшествующего исчисления

Комбинированное исчисление сделало возможным более систематическое рассмотрение логических вопросов, чем содержательная традиционная логика. Однако, с другой стороны, можно сказать, что в отношении возможности вывода логических следствий комбинированное исчисление, по существу, совпадает с аристотелевым. Самые сложные заключения, которые возможны в комбинированном исчислении, могут быть получены также путем многократного применения аристотелевых фигур заключения.

По мнению старых логиков, разделявшемуся и Кантом, логика вообще исчерпывалась аристотелевым учением о заключении. Кант говорит[1]:

«Замечательно, что логика до сих пор не могла также сделать ни одного шага вперед и, по-видимому, имеет совершенно замкнутый, законченный характер».

В действительности же формализм Аристотеля оказывается недостаточным уже для самых простых логических связей. В частности, он принципиально недостаточен при рассмотрении логических основ математики. Именно, он отказывается служить повсюду, где необходимо символически отобразить ***соотношение между несколькими предметами.***

Поясним это на простом примере. Рассмотрим предложение: «Если B лежит между A и C, то B лежит также между C и A». В обычном исчислении высказываний мы, правда, можем записать это в форме $X \to Y$;

[1] В предисловии ко 2-му изд. «Критики чистого разума». (Пер. Н. Лосского, второе изд., 1915, стр. 9.) (*Прим. пер.*)

то же самое представление получает это предложение в одноместном исчислении предикатов, ибо в последнем оно может быть сформулировано следующим образом: «Если упорядоченная тройка точек обладает свойством, что вторая точка лежит между первой и третьей, то она также обладает свойством, что вторая точка лежит между третьей и первой». Однако такое представление никак не выражает логически существенного в этом утверждении, а именно симметрии соотношения «между» относительно A и C. Поэтому это представление нельзя использовать для целей вывода из рассмотренного предложения вытекающих из него математических следствий. Положение не изменится и если мы применим способ выражения комбинированного исчисления.

Для пояснения существующего здесь положения вещей приведем еще один пример, не относящийся уже к математике. Утверждение «Если существует сын, то существует отец» является, конечно, логически само собой разумеющимся, а от удовлетворяющего нас логического исчисления мы можем требовать, чтобы оно выявляло такого рода само собой разумеющиеся истины, в том смысле, чтобы утверждаемая связь с помощью символического представления могла быть получена как следствие из простых логических принципов. Однако в исчислении, которым мы до сих пор занимались, об этом не может быть и речи. Правда, мы можем (применяя комбинированное исчисление) выразить символически рассмотренное утверждение с помощью формулы: $\overline{|\overline{\overline{X}}|} \rightarrow \overline{|\overline{\overline{Y}}|}$, где X, Y означают, соответственно, предикаты: «сын», «отец». Однако эта формула, разумеется, не может помочь нам доказать истинность нашего утверждения, так как при другой подстановке вместо X и Y она может выразить и ложные предложения. В формуле не выражено то, на чем покоится логическая связь между предыдущим и последующим предложениями, а именно, что предикаты «быть сыном» и «быть отцом» содержат отношение одного

предмета к другому. Подобное же положение вещей имеет место почти во всех более сложных суждениях.

§ 2. Методические принципы исчисления предикатов

Поскольку предшествующее исчисление оказалось недостаточным, мы вынуждены искать другую логическую символику. Поэтому мы возвращаемся еще раз к тому месту наших рассмотрений, в котором мы впервые вышли за пределы исчисления высказываний. Решающим шагом является здесь разделение высказывания на субъект и предикат. Это разложение мы, однако, не полностью использовали, поскольку при выражении высказываний мы явно обозначили только предикаты, но не субъекты. Причина этой ограниченности символики заключается в том, что в отношении формализма мы исходили из исчисления высказываний. Если же мы откажемся от точки зрения, которая исходит только из исчисления высказываний, то при выражении высказывания вполне естественно предметы (*индивидуумы*) отделить от приписанных им свойств (*предикатов*) и затем оба точно обозначить.

Мы делаем это таким образом: для символического выражения предикатов мы применяем ***функциональные знаки с пустыми местами***, причем в пустые места подставляются обозначения предметов. Например, можно обозначить функциональным знаком $P(\ )$ предикат: «есть простое число». Тогда $P(5)$ выражает высказывание: «5 есть простое число». Если $M(\ )$ обозначает предикат «быть человеком», то M(Кай) означает: «Кай есть человек». Дальше, если отношение меньшего к большему выражаем функциональным знаком с двумя пустыми местами $<(,)$, то $<(2,3)$ символически выражает высказывание: «2 меньше 3». Точно так же высказывание «B лежит между A и C» выражается в виде $Z(A,B,C)$.

Все математические формулы представляют собой подобные соотношения между двумя или несколькими величинами. Например, формуле: $x+y=z$ соответствует трехчленный предикат $S(x,y,z)$. Истинность выражения $S(x,y,z)$ означает, что x, y, z связаны соотношением $x+y=z$ [1].

К высказываниям, выраженным новым способом, мы можем применять связи исчисления высказываний. Например, отрицание высказывания $P(5)$ выражается так $\overline{P(5)}$. Формула

$$<(2,3)\&<(3,7)\rightarrow <(2,7)$$

выражает высказывание: «Если 2 меньше 3 и 3 меньше 7, то 2 меньше 7».

Отсутствует еще символическое выражение для *всеобщих высказываний*. Чтобы получить его, введем, по примеру математики, наряду со знаками для определенных предметов (имен собственных) еще переменные x, y, z,..., которыми также можем заполнять пустые места знаков функций. *Определенное* заполнение пустого места называется *значением соответствующей переменной*.

Значения переменной ограничены вообще определенными видами предметов, определяемыми смыслом знака функции. Например, основное соотношение элементарной геометрии на плоскости: «Точка x лежит на прямой y» выражается функциональным знаком с двумя аргументами $L(x, y)$. В качестве значений для x здесь входят в рассмотрение только точки, а для y только прямые.

Если в пустые места логических функций вставляем определенные значения аргументов (т. е. имена собственные индивидуумов), то получаем *определенные высказывания*, которые могут быть истинными или ложными. Если же пустые места знаков функций заполнены переменными, то этим первоначально не выражается никакое определенное суждение; налицо лишь символическое выражение, зависящее от соответствующих переменных. Но подобно тому как в алгебре мы пишем буквенные формулы, указывающие, что для любых численных значений, которые подставляют на место переменных, возникающее числовое равенство является истинным, мы можем так же поступать и в логическом исчислении. Формула:

$$<(x, y)\&<(y, z))\rightarrow <(x, z)$$

означает тогда, что для любой тройки x, y, z, для которой выполняются соотношения $<(x,y)$ и $<(y,z)$, выполняется и соотношение $<(x,z)$.

Одновременно с этим мы получаем возможность выражать всеобщие суждения. Однако для того, чтобы иметь возможность применять всеобщность вместе с отрицанием и логическими связями $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, мы нуждаемся в *особом «знаке общности»*. Иначе мы не знали бы, означает ли $\overline{P(x)}$: «Для всех x имеет место $\overline{P(x)}$», или: «Неверно, что для всех x истинно высказывание $P(x)$». Это выражение всеобщих суждений мы будем получать, помещая переменную величину, принадлежащую к соответствующей логической функции, в скобках перед знаком функции.

Таким образом, $(x)A(x)$ означает: для всех x имеет место $A(x)$. Указанные суждения, которые дают повод к смешению, различаются тогда следующим образом: $(x)\overline{P(x)}$ и $\overline{(x)P(x)}$. Из соображений симметрии для выражения *частных* суждений мы вводим одновременно особый *«знак существования»*. $(Ex)A(x)$ выражает суждение: «Существует x, для которого выполняется $A(x)$».

Для выражения знаков общности и существования мы пользуемся также общим названием *«квантор»*[1].

Переменное, относящееся к знаку общности или существования, называем *«связанным переменным»*. Оно играет роль, аналогичную роли переменной интеграции

[1] До сих пор было обычным в логике называть предикатами только функции с одним пустым местом; функции с несколькими пустыми местами называли отношениями. Мы употребляем здесь слово предикат в самом общем смысле.

[1] Автор употребляет здесь название «скобочный знак» (Klammerzeichen). Мы заменили его более употребительным термином *квантор*. (*Прим. пер.*)

в математике; в частности, обозначение этого переменного не имеет значения. В отличие от связанных переменных другие переменные мы называем *«свободными переменными»*.

Что касается способа записи, то следует заметить, что формула, перед которой стоит знак общности или существования, ставится в скобки в том случае, если она содержит один из знаков &, $\vee$, $\rightarrow$ и не объединена уже чертой отрицания. Кроме того, для удобства обозрения мы принимаем следующие соглашения:

вместо $\overline{A(x)}$ пишем проще $\overline{A}(x)$,

вместо $\overline{(x)A(x)}$ — $\overline{(x)}A(x)$

и вместо $\overline{(Ex)A(x)}$ — $(\overline{Ex})A(x)$.

Из самого смысла знаков общности и существования получаем следующие эквивалентности:

$$(Ex)\,A(x) \text{ äq } \overline{(x)}\,\overline{A}(x),$$
$$(Ex)\,\overline{A}(x) \text{ äq } \overline{(x)}\,A(x),$$
$$(\overline{Ex})\,A(x) \text{ äq } (x)\,\overline{A}(x),$$
$$(\overline{Ex})\,\overline{A}(x) \text{ äq } (x)\,A(x).$$

На основании этих содержательных соотношений можно заменять знак существования знаком общности, и наоборот. В символике исчисления предикатов мы могли бы обойтись, таким образом, тремя связями. Необходимы только знак отрицания, далее, один из трех символов &, $\vee$, $\rightarrow$ и, наконец, один из двух знаков (x), (Ex).

До сих пор мы рассматривали только появляющиеся отдельно знаки общности и существования. Мы приходим к существенно новым логическим образованиям, если используем то обстоятельство, что знаки общности и существования могут употребляться комбинированно. Подобная комбинация возможна уже в том случае, когда мы используем только предикаты с одним

пустым местом; особую роль она играет при наличии многочленных предикатов. Например, для двучленного предиката $A(x, y)$ мы имеем следующие простейшие формы составления:

$$(x)\,(y)\,A(x, y)$$

«для всех x и для всех y имеет место отношение $A(x, y)$»;

$$(Ex)\,(Ey)\,A(x, y)$$

«существуют некоторое x и некоторое y, для которых имеет место $A(x, y)$»;

$$(x)\,(Ey)\,A(x, y)$$

«для каждого x существует некоторое y, такое, что имеет место $A(x, y)$»;

$$(Ex)\,(y)\,A(x, y)$$

«существует некоторое x, которое к каждому y находится в отношении $A(x, y)$».

Чтобы сделать смысл всего соединения более ясным, мы могли бы здесь каждый раз добавлять еще одну скобку и писать, например, так:

$$(x)\,[(y)\,A(x, y)]$$

и

$$(x)\,[(Ey)\,A(x, y)].$$

Но так как и без того нет повода к недоразумению, то скобки мы обычно опускаем. Допуская комбинации трех и большего числа кванторов, мы получаем, соответственно, большее многообразие сочетаний знаков общности и существования.

Из нашего понимания знака общности вытекает, что в выражении $(x)\,(y)\,A(x, y)$ знаки общности могут быть переставлены без изменения смысла высказывания. То же самое имеет место для обоих знаков существования в выражении:

$$(Ex)\,(Ey)\,A(x, y).$$

Напротив, в выражении $(x)(Ey)A(x, y)$ порядок следования знаков (x), (Ey) играет существенную роль.

Например, выражение:

$$(x)(Ey) < (x, y)$$

(если переменные x, y относятся к действительным числам, как области их определения) представляет собой *истинное* предложение, а именно: «Для каждого числа x существует число y такое, что x меньше y», т. е. «для каждого числа существует большее».

Однако, если мы переставим здесь знаки (x) и (Ey), то получим $(Ey)(x) < (x, y)$, а это — выражение *ложного* предложения, именно: «Существует число y, которое больше любого числа x». Таким образом, благодаря перестановке знаков (x) и (Ey) получается совершенно другое высказывание.

Логическое соотношение при этом таково, что на основании формулы (которая позже будет выведена):

$$(Ey)(x)A(x, y) \rightarrow (x)(Ey)A(x, y),$$

из истинного предложения вида $(Ey)(x)A(x, y)$ можно заключить к $(x)(Ey)A(x, y)$, но не наоборот.

§ 3. Предварительные замечания об употреблении исчисления предикатов

Прежде чем приступить к систематическому изложению правил, необходимых для применения исчисления, рассмотрим несколько примеров, которые послужат нам для того, чтобы освоиться с символикой.

Прежде всего мы покажем, как можно символически выразить в исчислении предикатов *аксиомы, при помощи которых формулируются основные свойства натурального ряда чисел*. Эти аксиомы гласят:

1. *Для каждого числа существует одно и только одно непосредственно следующее.*

2. *Не существует числа, за которым непосредственно следует 1,*

3. *Для каждого числа, отличного от 1, существует одно и только одно непосредственно предшествующее.*

В этих предложениях встречаются в качестве индивидуальных предикатов отношения непосредственного следования и различия чисел. Отношение различия выступает не только в выражении «отличное от 1», но и неявно в выражении «только одно число»; ибо утверждение, что существует «только одно» число известного свойства означает, что не существует двух таких различных чисел. Различие есть отрицание арифметического равенства.

Поэтому мы вводим предикаты:

$$= (x, y) \quad («x \text{ равно } y»)$$

и $F(x, y)$ («y непосредственно следует за x») и можем при помощи этих обозначений представить приведенные выше аксиомы следующим образом:

1. $(x)(Ey)\{F(x, y) \& (z)(F(x, z) \rightarrow = (y, z))\}$,

т. е. «для всякого x существует некоторое y, которое непосредственно следует за x и которое равно всякому z, непосредственно следующему за x».

2. $\overline{(Ex)}\, F(x, 1)$,

т. е. «не существует x, за которым 1 непосредственно следует».

3. $(x)\{\overline{=(x, 1)} \rightarrow (Ey)\ [F(y, x) \& (z)\ (F(z, x) \rightarrow = (y, z))]\}$, т. е. «для всякого x, которое отличается от 1, существует y, за которым x непосредственно следует и которое равно всякому z, за которым непосредственно следует x».

Поясним далее на нескольких простых примерах метод *доказательства* в исчислении предикатов. Начнем с предложения, недоказуемость которого в исчислении второй главы явилась одним из фактов, показавших нам недостаточность прежнего исчисления. Предложение это гласило: «Если существует сын, то существует отец». Первоначальное символическое выражение этого утверждения в исчислении предикатов имеет вид

$$(Ex)\ S(x) \to (Ex)\ V(x),$$

причем $S(x)$ означает «x есть сын», а $V(x)$—«x есть отец». Доказательство этого предложения возможно лишь, если мы разложим далее встречающиеся в нем предикаты. В понятии сына содержится, с одной стороны, предикат «мужчина», с другой — отношение ребенка к родителям; в понятии отца — отношение к жене и ребенку.

Если мы введем, в соответствии с этим, вместо «x есть мужчина» знак $M(x)$ и выразим предикат «x и y — родители z» (или, точнее: «x и y, как муж и жена, имеют ребенка z») при помощи символа $K(x, y, z)$, то мы можем определить $S(x)$ так:

$$M(x) \,\&\, (Eu)(Ev)\, K(u, v, x)$$

(«x есть сын» означает «x есть мужчина, и существуют u и v такие, что u в качестве мужа и v в качестве жены являются родителями x»).

Точно так же $V(x)$ определяется:

$$(Ey)(Ez)\, K(x, y, z)$$

(«x есть отец» означает: «существуют y и z такие, что x и y, как муж и жена, являются родителями z»).

Если мы вставим полученные выражения для $S(x)$ и $V(x)$, то рассмотренное утверждение будет иметь вид:

$$(Ex)\,[M(x) \,\&\, (Eu)(Ev)\, K(u, v, x)] \to$$
$$(Ex)(Ey)(Ez)\, K(x, y, z).$$

Эта формула выражает отношение следования между двумя высказываниями, и для доказательства, которое мы ищем, вопрос сводится к тому, чтобы прийти от первого из этих высказываний ко второму через ряд заключений, из которых каждое обосновано в исчислении. При этом мы применяем привычный для нас

в исчислении высказываний и, конечно, законный в исчислении предикатов принцип, согласно которому из двух отношений между высказываниями $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ всегда можно заключить $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$.

Прежде всего, в исчислении предикатов для любых F и G имеет место соотношение:

$$(Ex)\,(F(x) \,\&\, G(x)) \to (Ex)\, G(x),$$

соответствующее формуле $X \,\&\, Y \to Y$ исчисления высказываний.

Если выражение $(Eu)(Ev)\, K(u, v, x)$, являющееся некоторым предикатом от x, для сокращения мы обозначим через $N(x)$, то получим:

$$S(x)\ \text{äq}\ M(x) \,\&\, N(x).$$

Вышеупомянутый способ заключения дает тогда:

$$(Ex)\, S(x) \to (Ex)\, N(x)$$

или, при подстановке выражения для $N(x)$:

$$(Ex)\, S(x) \to (Ex)(Eu)(Ev)\, K(u, v, x).$$

Но существует общее предложение этого исчисления, согласно которому можно изменить порядок следующих друг за другом без перерыва знаков существования. Для двух знаков существования мы уже упоминали это предложение; общее предложение получается посредством его повторного применения. Если мы произведем эту перестановку, то получим вместо последней формулы:

$$(Ex)\, S(x) \to (Eu)(Ev)(Ex)\, K(u, v, x).$$

Но это и есть наше утверждение, с тем лишь различием, что переменные, стоящие после знака следования $\to$, иначе названы.

Другим примером может служить предложение:

«Если существует действие, то существует и причина».

Прежде всего мы представляем это утверждение в форме:

$$(Ex)\, W(x) \to (Ex)\, U(x):$$

$W(x)$ означает «x есть действие», а $U(x)$ «x есть причина». Теперь мы снова разлагаем предикаты U и W, вводя двуместный предикат «x вызывает y», который мы обозначим через $K(x, y)$. При этом для $U(x)$ и $W(x)$ получаются определяющие выражения:

$$U(x) \text{ äq } (Ex)\,K(x, y),$$

$$W(x) \text{ äq } (Ey)\,K(y, x).$$

Подставляя эти выражения, мы приводим наше утверждение к форме:

$$(Ex)(Ey)\,K(y, x) \to (Ex)(Ey)\,K(x, y),$$

или, частично переименовывая переменные:

$$(Ey)(Ex)\,K(x, y) \to (Ex)(Ey)\,K(x, y).$$

Эта формула есть непосредственное следствие предложения о перестановке знаков существования.

Упомянутое выше различие между $(Ex)\,(y)\,A(x, y)$ и $(y)\,(Ex)\,A(x, y)$ может быть проиллюстрировано также на примере *равномерной и обыкновенной сходимости*. Пусть мы имеем какую-нибудь определенную последовательность однозначных арифметических функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots,$ определенных (как мы это примем для простоты) для всех действительных значений x. Высказывание, что эта последовательность функций для каждого значения x сходится к 0, в нашей символике может быть сформулировано так:

$$(x)(z)\{<(0, z) \to (Ey)(n)[<(y, n) \to <(|f_n(x)|, z)]\}$$

(«для произвольного x существует, при всяком z, большем, чем 0, такое y, что для всех n, больших y, выполняется неравенство $|f_n(x)| < z$»). При этом переменные y и n отнесены к целым числам, как роду предметов, между тем как x и z относятся к роду действительных чисел.

Утверждение, что последовательность функций равномерно сходится к 0 для всех значений x, символически выражается так:

$$(z)\{<(0, z) \to (Ey)(x)(n)[<(y, n) \to <(|f_n(x)|, z)]\}$$

(«для всякого z, большего, чем 0, существует такое y, что для всех x и для всех n, больших y, выполняется неравенство

$$|f_n(x)| < z\text{»}).$$

Различие обоих утверждений находит свое выражение в различном положении знака общности (x).

§ 4. Точное установление обозначений в исчислении предикатов

В качестве подготовки к систематическому изложению исчисления предикатов мы приведем сначала полный обзор использованных обозначений.

Встречающиеся в исчислении предикатов знаки являются прежде всего знаками для *переменных* различных родов. Знаками для переменных всегда служат большие или малые латинские буквы. Мы различаем:

1. *Переменные высказывания:* $X, Y, Z, \ldots$

2. *Переменные предметы* (индивидуальные переменные): $x, y, z, \ldots$

3. *Переменные предикаты:* $F(.)$, $G(.,.)$, $H(.,.,.), \ldots$

При этом переменные предикаты с различным числом пустых мест всегда считаются различными переменными, даже если у них одна и та же большая латинская буква.

Поясним теперь, что́ мы будем понимать под *формулой* исчисления предикатов.

Прежде всего, предварительно мы можем сказать, что под формулой мы понимаем выражение, построенное осмысленным образом из упомянутых знаков для переменных с помощью знаков $\&$, $\vee$, $\overline{}$, $\to$, $\sim$, связывающих высказывания, и знаков общности и существования. Но соблюдение аксиоматической точки зрения, которую мы изложим в следующем параграфе и при которой доказательства проводятся по чисто формальным правилам, не прибегая к истолкованию логических знаков, делает необходимым характеризовать выражения, называемые формулами, только путем описания их формального построения и избегать определений через неуточненные понятия вроде «осмысленный».

Что касается вида формул, то мы прежде всего предполагаем, что в них при известных условиях встречаются предметные переменные—малые латинские буквы—и принадлежащие им знаки общности и существования. Если в какой-нибудь формуле, наряду с предметной переменной, которой служит, например, x, одновременно встречается принадлежащий ей знак общности или существования, — в данном случае, следовательно, (x) или (Ex),—то соответствующая переменная внутри формулы называется *связанной*, в противном случае — *свободной*.

Мы будем теперь понимать под *формулами* те и только те комбинации знаков нашего исчисления, которые оказываются таковыми в силу конечного числа применений следующих правил:

1. Переменное высказывание есть формула.

2. Предикатные переменные, в которых пустые места заполнены предметными переменными, суть формулы.

3. Если какая-нибудь комбинация знаков $\mathfrak{A}$ есть формула, то и $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула.

4. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — какие-нибудь формулы, причем одна и та же предметная переменная не встречается связанной внутри одной формулы и свободной внутри другой, то и $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ суть формулы.

5. Если $\mathfrak{A}(x)$ означает какую-нибудь формулу, в которой переменная x выступает в качестве свободной переменной, то и $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ и $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$ суть формулы. То же самое справедливо соответственно для других свободных переменных.

Мы подчеркиваем, что согласно приведенному определению одна и та же переменная не встречается в формуле одновременно в свободной и в связанной форме.

Для *экономии скобок* введем следующие соглашения: знаки $\to$, $\vee$, $\&$, $\sim$ разделяют выражения сильнее, чем знаки общности и существования. Например, $(x)\,F(x) \,\&\, A$ является более простым способом записи для $((x)\,F(x)) \,\&\, A$. Прежнее соглашение, что $\&$ связывает теснее, чем $\to$ и $\sim$, а $\vee$ еще теснее, чем $\&$, остается в силе. Далее, ко всякому встречающемуся в формуле знаку общности или существования принадлежит определенная часть формулы, к которой он относится. Эту часть мы будем называть *областью действия* соответствующего знака. Так, в формуле:

$$(x)\,(F(x) \to (Ey)\,G(y))$$

область действия знака (x) простирается до конца формулы, в формуле же:

$$(x)\,F(x) \to (Ey)\,G(y)$$

лишь до знака $\to$. Дальнейшего уменьшения количества скобок мы достигаем с помощью следующего правила: если несколько знаков общности или существования следуют непосредственно друг за другом, не будучи разделены скобками, то это всегда нужно понимать так, что их области действия простираются до одного и того же места. Например:

$$(x)\,(Ey)\,(z)\,(H(x, y, z) \,\&\, K(y, z)) \,\&\, L(u)$$

есть более простой способ записи для

$$(x)\,\{(Ey)\,[(z)\,(H(x, y, z) \,\&\, K(y, z))]\} \,\&\, L(u).$$

Во избежание ошибок, мы поясним еще употребление *больших немецких букв*, на котором мы вкратце останавливались уже раньше в применении к исчислению высказываний (гл. I, § 5). Эти буквы не являются знаками нашего языка формул, и принципиально без них вообще можно обойтись. Они служат лишь для того, чтобы облечь в краткую форму содержательные сообщения об исчислении. При таких сообщениях мы обозначаем через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... любые формулы, точный формальный вид которых остается неопределенным. Так, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ заменяет любую импликацию, например, $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)$ или $(x) F(x) \rightarrow (x) G(x)$. Через $\mathfrak{A}(x)$ мы обозначаем любую формулу, содержащую свободную переменную x; точно так же через $\mathfrak{A}(x, y)$—формулу, в которой встречаются свободные переменные x и y, и т. д.

§ 5. Аксиомы исчисления предикатов

Мы перейдем теперь, подобно тому как прежде мы это сделали для исчисления высказываний, к установлению системы аксиом для исчисления предикатов, из которой остальные истинные высказывания этого исчисления могут быть получены по определенным правилам.

Установление аксиом и правил вывода, естественно, происходит в соответствии с содержательной интерпретацией формул. Однако вывод «истинных» формул, получаемых из аксиом, согласно аксиоматической точке зрения, должен происходить чисто формально, так, что мы совсем не заботимся о смысле выражаемых формулами высказываний, а учитываем только содержащиеся в правилах предписания. Только при интерпретации полученных с помощью формальных операций результатов мы должны принять во внимание значение знаков нашего исчисления.

Это содержательное истолкование происходит следующим образом. Мы представляем себе положенной в основу область индивидуумов, к которой относятся предметные переменные и знаки общности и существования. Эта область остается неопределенной; мы только предполагаем, что она содержит по крайней мере один индивидуум. Формула исчисления предикатов лишь в том случае называется всегда-истинной, или, как мы говорим также, *общезначимой* (allgemeingültig), если, независимо от того, какой была выбрана область индивидуумов, при всякой произвольной подстановке каких-нибудь определенных высказываний, определенных предметов области индивидуумов и определенных для этой области индивидуумов предикатов

на место переменных высказываний, свободных предметных переменных и предикатных переменных формула каждый раз переходит в истинное высказывание. Общезначимые формулы исчисления предикатов мы называем также *тождественными формулами*.

Приведем теперь соответственную систему аксиом. В качестве основных логических формул мы имеем, прежде всего, аксиомы исчисления высказываний, которые ради простоты мы даем в той же самой форме, как и раньше:

a) $X \vee X \rightarrow X$,
b) $X \rightarrow X \vee Y$,
c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$,
d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$

($\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ попрежнему следует понимать как сокращенную запись для $\bar{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$).

К этим аксиомам мы присоединяем теперь в качестве второй группы две *аксиомы* для *«все»* и *«существует»*:

e) $(x) F(x) \rightarrow F(y)$,
f) $F(y) \rightarrow (Ex) F(x)$.

Первая из этих аксиом означает: «Если предикат F выполняется для всех x, то он выполняется также для любого y».

Вторая формула читается так: «Если предикат F выполняется для какого-нибудь y, то существует x, для которого выполняется F».

Для получения новых формул из основных логических формул, равно как из уже выведенных формул, мы имеем следующие правила.

α) Правила подстановки

α1) В формуле переменную, обозначающую высказывание, можно заменить любой формулой при условии, что эта замена происходит одновременно во всех местах, в которых встречается данная переменная, обозначающая высказывание, и что при этом вообще снова получается формула в смысле определения, приведенного в предыдущем параграфе. Кроме того, замена допустима лишь в том случае, если подставляемая формула не содержит предметной переменной, встречающейся в исходной формуле в связанном виде.

$\alpha 2$) Свободная предметная переменная может быть заменена другой предметной переменной при условии, что замена происходит одновременно на всех местах, в которых встречается эта свободная предметная переменная. Подставленная переменная не должна, кроме того, встречаться где-либо связанной в первоначальной формуле.

$\alpha 3$) Предикатная переменная с n пустыми местами при определенных условиях может быть заменена формулой, содержащей по меньшей мере n свободных предметных переменных. Пусть F есть эта предикатная переменная с n пустыми местами, а $\mathfrak{A}$ формула, в которой F должно быть заменено. Мы выбираем из предметных переменных, встречающихся в формуле, которая должна быть подставлена на место F, какие-нибудь n, упорядоченные произвольным образом; пусть это будут, например, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В соответствии с этим обозначим подставляемую формулу через $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Подстановка допустима теперь лишь в том случае, если остальные свободные предметные переменные, которые еще могут присутствовать в $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не встречаются в формуле $\mathfrak{A}$ в качестве связанных переменных и если в результате подстановки мы вообще снова получаем формулу. Подстановка происходит следующим образом: в каждом отдельном случае встречи предикатной переменной F в $\mathfrak{A}$ пустые места этой переменной заполнены какими-нибудь предметными переменными, которые мы (только на данный момент) обозначим через $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Эти $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ не должны быть обязательно все различными, некоторые из этих переменных могут быть и одинаковыми. Мы заменяем теперь в соответствующем месте $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ на $\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, т.е. на формулу, получающуюся из $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ путем замены переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ всюду, где они встречаются, соответственно на $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Аналогичная замена происходит в каждом отдельном случае встречи F.

β) Схема заключения

Из двух формул вида $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ получаем новую формулу $\mathfrak{B}$.

γ) Схема для «все» и «существует»

$\gamma 1$) Пусть мы вывели формулу $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, у которой часть, стоящая после знака $\to$, содержит свободную переменную x, в то время как в $\mathfrak{A}$ переменная x не встречается. Тогда получаем в качестве новой выведенной формулы $\mathfrak{A} \to (x)\,\mathfrak{B}(x)$.

$\gamma 2$) При тех же самых условиях относительно вида $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}(x)$ получаем из формулы $\mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}$ новую формулу $(Ex)\,\mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}$ [1].

δ) Правило переименования связанных переменных

Связанную предметную переменную, встречающуюся в формуле, можно заменять другой связанной переменной. Эту замену следует производить одновременно во всех местах области действия и в соответствующем знаке общности или существования. При этом предполагается, что после такой замены вообще снова получается формула. Если переменная, которая должна быть заменена, встречается одновременно в нескольких кванторах (с различными областями действия), то замену следует производить только относительно одной области.

[1] Использованная здесь система аксиом для «все» и «существует», которая выражается формулами e), f), а также правилами γ, была предложена Бернайсом.

§ 6. Система тождественных формул

Теперь посмотрим, как с помощью приведенных основных логических формул и правил вывода строится вся система *общезначимых* или, как мы говорим также, *тождественных* формул исчисления предикатов.

С одной частичной системой этих формул мы уже знакомы, именно с той частью, в которой встречаются только переменные высказывания. Для этой частичной системы мы раньше вывели формулы (1) – (20) и правила I—VIII. Мы называем эту частичную систему системой *тождественных формул исчисления высказываний.*

Прежде всего, на различных примерах мы изложим метод, которому нужно следовать при выводе формул. Затем, как и раньше в исчислении высказываний, мы получим еще и новые правила вывода. При этом используются выведенные раньше формулы и правила исчисления высказываний.

П р а в и л о γ': *Пусть мы доказали некоторую формулу* $\mathfrak{A}(x)$, *которая содержит свободную переменную* x. *В таком случае доказуема также формула* $(x)\,\mathfrak{A}(x)$.

Доказательство: Из $\mathfrak{A}(x)$, применяя правила II и III, получаем:

$$\overline{X \vee \overline{X}} \vee \mathfrak{A}(x),$$

$\overline{X \vee \overline{X}} \vee (x)\,\mathfrak{A}(x)$ [(по правилу γ)],

$X \vee \overline{X}$ [формула (3)],

$(x)\,\mathfrak{A}(x)$ (схема заключения).

П р а в и л о δ': Все свободные и связанные предметные переменные, встречающиеся в формуле, можно заменять другими переменными, если только следить за тем, чтобы в местах, в которых стояли одинаковые переменные, и после замены оказались одинаковые переменные, и в местах, в которых находились различные переменные, после замены оказались также различные переменные.

Доказательство получаем, применяя несколько раз правила $\alpha 2$) и δ). Например, из основной формулы e) получаем формулу $(y)\,F(y) \rightarrow F(x)$ следующим образом:

$(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$,

$(x)\,F(x) \rightarrow F(z)$ (по правилу $\alpha 2$),

$(y)\,F(y) \rightarrow F(z)$ (по правилу δ),

$(y)\,F(y) \rightarrow F(x)$ (по правилу $\alpha 2$).

Из правила δ' следует, что правило γ) остается в силе, если в формулировке этого правила вместо x употреблять всегда y или какое-нибудь другое переменное.

Формула *(21)*: $(x)\,(F(x) \vee \overline{F}(x))$.

Доказательство: $X \vee \overline{X}$ [формула (3)],

$F(x) \vee \overline{F}(x)$ (посредством подстановки),

$(x)\,(F(x) \vee \overline{F}(x))$ (по правилу γ').

Формула *(22)*: $(x)\,F(x) \rightarrow (Ex)\,F(x)$.

Доказательство: $(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$ [аксиома e)],

$F(y) \rightarrow (Ex)\,F(x)$ [аксиома f)],

$(x)\,F(x) \rightarrow (Ex)\,F(x)$ (правило V).

Формула *(23)*: $(x)\,(A \vee F(x)) \rightarrow A \vee (x)\,F(x)$.

Доказательство: $(y)\,(A \vee F(y)) \rightarrow A \vee F(x)$ [подстановка в аксиому e) и правило δ'],

$(y)\,(A \vee F(y)) \rightarrow \overline{A} \vee F(x)$ (замена A на $\overline{\overline{A}}$).

Используя сокращение $\rightarrow$, мы можем написать также:

$(y)\,(A \vee F(y)) \rightarrow (\overline{A} \rightarrow F(x))$,

$[(y)\,(A \vee F(y))\,\&\,\overline{A}] \rightarrow F(x)$ (по правилу VII),

$[(y)\,(A \vee F(y))\,\&\,\overline{A}] \rightarrow (x)\,F(x)$ [правило γ];

с помощью правила VII и правила δ мы преобразуем это выражение в

$$(x)(A \vee F(x)) \rightarrow A \vee (x) F(x).$$

Формула *(24)*: $(x)(A \rightarrow F(x)) \rightarrow (A \rightarrow (x) F(x))$.

Доказательство: Эта формула получается из предшествующей посредством подстановки $\bar{A}$ на место A.

Правило *IX*: *Если формула* $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(x))$ *доказуема, то доказуема и формула* $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow (x)\mathfrak{C}(x))$. При этом $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не должны содержать переменной x.

Это правило является расширением правила $\gamma 1$). Вместо двух посылок можно взять также любое другое конечное число посылок. При этом доказательство вполне аналогично таковому для настоящего случая.

Доказательство: $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(x))$,

$$\mathfrak{A} \rightarrow (x)(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(x)) \quad \text{[правило } \gamma)].$$

Отсюда, применяя формулу (24) и правило V, получаем искомую формулу.

Формула *(25)*: $A \rightarrow (x)(A \vee F(x))$.

Доказательство: $A \rightarrow A \vee B$ [аксиома (b)].

$A \rightarrow A \vee F(x)$ (посредством подстановки),

$A \rightarrow (x)(A \vee F(x))$ [по правилу γ)].

Формула *(26)*: $(x)(A \vee F(x)) \sim A \vee (x) F(x)$.

Доказательство: Так как формула (23) доказана, то достаточно показать правильность обращения: $A \vee (x) F(x) \rightarrow (x)(A \vee F(x))$.

$(y) F(y) \rightarrow F(x)$ [из e) по правилу δ'],

$A \vee (y) F(y) \rightarrow A \vee F(x)$ (по правилу IV),

$A \vee (x) F(x) \rightarrow (x)(A \vee F(x))$ [по правилам γ) и δ)].

Формула *(27)*: $(x)(A \rightarrow F(x)) \sim (A \rightarrow (x) F(x))$.

Доказательство: Эта формула получается из (26) таким же образом, как (24) из (23).

Формула *(28)*: $(x)(A \,\&\, F(x)) \sim A \,\&\, (x) F(x)$.

Доказательство: Сначала мы доказываем:

I. $(x)(A \,\&\, F(x)) \rightarrow A \,\&\, (x) F(x)$.

$(y)(A \,\&\, F(y)) \rightarrow A \,\&\, F(x)$,

$A \,\&\, F(x) \rightarrow F(x)$ [формула (13)],

$(y)(A \,\&\, F(y)) \rightarrow F(x)$ (правило V),

$(x)(A \,\&\, F(x)) \rightarrow (x) F(x)$ [правила γ) и δ)],

$A \,\&\, F(x) \rightarrow A$,

$(x)(A \,\&\, F(x)) \rightarrow A$ [правила V и δ)].

Путем использования формулы исчисления высказываний

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \,\&\, Z))$$

и двукратного применения схемы заключения мы получаем затем из последней и предпредпоследней формул формулу I.

II. $A \,\&\, (x) F(x) \rightarrow (x)(A \,\&\, F(x))$,

$(y) F(y) \rightarrow F(x)$.

Отсюда получаем согласно исчислению высказываний:

$A \,\&\, (y) F(y) \rightarrow A \,\&\, F(x)$,

$A \,\&\, (x) F(x) \rightarrow (x)(A \,\&\, F(x))$ [правила γ) и δ)].

Из формул I и II получается искомая формула.

Формула *(29)*: $(x)(y) F(x, y) \sim (y)(x) F(x, y)$.

Доказательство: $(z)(u) F(z, u) \rightarrow (u) F(x, u)$ [подстановка в аксиому e) и правило δ'],

$(u) F(x, u) \rightarrow F(x, y)$ [подстановка в аксиому e) и правило δ'],

$(z)(u) F(z, u) \rightarrow F(x, y)$ (по правилу V),

$(z)(u) F(z, u) \rightarrow (x) F(x, y)$ [правило γ)],

$(x)(y) F(x, y) \rightarrow (y)(x) F(x, y)$ [правила γ) и δ)].

Так же получается $(y)(x) F(x, y) \rightarrow (x)(y) F(x, y)$, а поэтому и (29).

Формула *(30)*: $(x)(F(x) \,\&\, G(x)) \sim (x) F(x) \,\&\, (x) G(x)$.

Доказательство: Сначала докажем:

a) $(x)(F(x) \& G(x)) \rightarrow (x)F(x) \& (x)G(x)$.

$$(y)(F(y) \& G(y)) \rightarrow F(x) \& G(x),$$
$$F(x) \& G(x) \rightarrow F(x),$$
$$F(x) \& G(x) \rightarrow G(x),$$
$$(y)(F(y) \& G(y)) \rightarrow F(x) \quad \text{(по правилу V)},$$
$$(y)(F(y) \& G(y)) \rightarrow G(x) \quad \text{(по правилу V)}.$$

По правилам γ) и δ) последние две формулы можно преобразовать в $(x)(F(x) \& G(x)) \rightarrow (x)F(x)$,
$$(x)(F(x) \& G(x)) \rightarrow (x)G(x).$$

Из обеих вместе получаем затем:

$$(x)(F(x) \& G(x)) \rightarrow (x)F(x) \& (x)G(x).$$

b) Доказательство формулы $(x)F(x) \& (x)G(x) \rightarrow (x)(F(x) \& G(x))$:

$$(y)F(y) \rightarrow F(x),$$
$$(y)G(y) \rightarrow G(x),$$
$$(y)F(y) \& (y)G(y) \rightarrow F(x) \& G(x),$$
$$(x)F(x) \& (x)G(x) \rightarrow (x)(F(x) \& G(x)) \quad \text{[правила γ) и δ)]}.$$

Из a) и b) получаем искомую формулу.

Формула *(31):* $(x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow ((x)F(x) \rightarrow (x)G(x))$.

Доказательство: $(y)(F(y) \rightarrow G(y)) \rightarrow (F(x) \rightarrow G(x))$,
$$F(x) \rightarrow ((y)(F(y) \rightarrow G(y)) \rightarrow G(x)) \quad \text{(по правилу VII)},$$
$$(y)F(y) \rightarrow F(x),$$
$$(y)F(y) \rightarrow ((y)(F(y) \rightarrow G(y)) \rightarrow G(x)) \quad \text{(правило V)},$$
$$(y)F(y) \& (y)(F(y) \rightarrow G(y)) \rightarrow G(x) \quad \text{(правило VII)},$$
$$(x)F(x) \& (x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (x)G(x) \quad \text{[правила γ) и δ)]},$$
$$(x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow ((x)F(x) \rightarrow (x)G(x)) \quad \text{(правило VII)}.$$

Формула *(32):* $(x)(F(x) \sim G(x)) \rightarrow ((x)F(x) \sim (x)G(x))$.

Доказательство: $(x)(F(x) \sim G(x))$ есть сокращение для $(x)[(F(x) \rightarrow G(x)) \& (G(x) \rightarrow F(x))]$.

Путем подстановки в формулу (30) получаем:
$$(x)[(F(x) \rightarrow G(x)) \& (G(x) \rightarrow F(x))] \sim (x)(F(x) \rightarrow G(x)) \& (x)(G(x) \rightarrow F(x)).$$

По формуле (31):
$$(x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow ((x)F(x) \rightarrow (x)G(x)),$$
$$(x)(G(x) \rightarrow F(x)) \rightarrow ((x)G(x) \rightarrow (x)F(x)).$$

Мы имеем, таким образом, три формулы вида:
$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \& \mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{E}),$$
$$\mathfrak{C} \rightarrow (\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{D}).$$

Отсюда можно вывести $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{D} \sim \mathfrak{E})$. Но это и есть наше утверждение, если мы заменим $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ их значениями.

Формула *(33):*

a) $(Ex)F(x) \sim \overline{(x)}\,\overline{F}(x)$,

b) $(Ex)\overline{F}(x) \sim \overline{(x)}\,F(x)$,

c) $\overline{(Ex)}\,\overline{F}(x) \sim (x)F(x)$,

d) $\overline{(Ex)}\,F(x) \sim (x)\overline{F}(x)$.

Доказательство (33а):
$$(y)\overline{F}(y) \rightarrow \overline{F}(x),$$
$$\overline{\overline{F}}(x) \rightarrow \overline{(y)}\,\overline{F}(y) \quad \text{[по формуле (6)]},$$
$$F(x) \rightarrow \overline{(y)}\,\overline{F}(y) \quad \text{[замена } \overline{\overline{F}}(x) \text{ на } F(x)\text{]},$$
$$(Ex)F(x) \rightarrow \overline{(x)}\,\overline{F}(x) \quad \text{[по правилам γ) и δ)]}.$$

Это есть наполовину формула (33а).
$$F(x) \rightarrow (Ey)F(y) \quad \text{[из аксиомы } f)\text{]},$$
$$\overline{(Ey)}\,F(y) \rightarrow \overline{F}(x) \quad \text{[по формуле (6)]},$$

$(\overline{Ex})\, F(x) \to (x)\, \overline{F}(x)$ [правила γ) и δ)],

$(\overline{x})\, \overline{F}(x) \to (\overline{\overline{Ex}})\, F(x)$ [по формуле (6)],

$(\overline{x})\, \overline{F}(x) \to (Ex)\, F(x)$ [замена $(\overline{\overline{Ex}})\, F(x)$ на $(Ex)\, F(x)$].
Это вторая половина (33a).

Доказательство (33b): $A \sim \overline{\overline{A}}$:

$$F(x) \sim \overline{\overline{F}}(x) \text{ (путем подстановки)},$$

$$(x)\,(F(x) \sim \overline{\overline{F}}(x)) \qquad [\text{правило } \gamma')].$$

Используя формулу (32), получаем отсюда:

$$(x)\, F(x) \sim (x)\, \overline{\overline{F}}(x),$$

$(\overline{x})\, F(x) \sim (\overline{x})\, \overline{\overline{F}}(x)$ [путем использования $(X \sim Y) \to (\overline{X} \sim \overline{Y})$, (ср. формулу (26), стр. 27).

Путем подстановки в (33a) получаем:

$$(Ex)\, F(x) \sim (\overline{x})\, \overline{\overline{F}}(x),$$

следовательно:

$$(\overline{x})\, F(x) \sim (Ex)\, \overline{F}(x).$$

Это и есть формула (33b).

Из (33a) и (33b) получаем также формулы (33d) и (33c), так как из $\mathfrak{A} \sim \overline{\mathfrak{B}}$ можно получить $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{B}$.

Формула *(34):*

$$(x)\,(F(x) \to G(x)) \to ((Ex)\, F(x) \to (Ex)\, G(x)).$$

Доказательство: Из формулы исчисления высказываний

$$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$$

получаем путем подстановки

$$(F(x) \to G(x)) \to (\overline{G}(x) \to \overline{F}(x)),$$

$(x)\,\{(F(x) \to G(x)) \to (\overline{G}(x) \to \overline{F}(x))\}$ [по правилу γ')].

Из последней формулы получаем, используя формулу (31):

$$(x)\,\{F(x) \to G(x)\} \to (x)\,\{\overline{G}(x) \to \overline{F}(x)\}.$$

При вторичном использовании формулы (31) и правила V получаем отсюда:

$$(x)\,(F(x) \to G(x)) \to ((x)\, \overline{G}(x) \to (x)\, \overline{F}(x)).$$

В этой формуле выражение $(x)\, \overline{G}(x) \to (x)\, \overline{F}(x)$ может быть преобразовано, путем использования формулы (6), в $(\overline{x})\, \overline{F}(x) \to (x)\, \overline{G}(x)$. Так как $(\overline{x})\, \overline{F}(x) \sim (Ex)\, F(x)$, $(\overline{x})\overline{G}(x) \sim (Ex)\, G(x)$, то искомая формула доказана.

Формуле (34) соответствует следующее правило: Если $\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)$ доказуема, то можно вывести также $(Ex)\, \mathfrak{A}(x) \to (Ex)\, \mathfrak{B}(x)$.

Именно, из $\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)$ по правилу γ' получаем:

$$(x)\,(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x))$$

и, используя (34), $(Ex)\, \mathfrak{A}(x) \to (Ex)\, \mathfrak{B}(x)$.

Точно же так, как из (31) выводится формула (32), получаем из (34) формулу:

$$(34') \qquad (x)\,(F(x) \sim G(x)) \to ((Ex)\, F(x) \sim (Ex)\, G(x)).$$

Формула *(35):* $(x)\,(F(x) \to A) \sim ((Ex)\, F(x) \to A)$.

Доказательство: $(x)\,(F(x) \to A)$ есть сокращение для $(x)\,(\overline{F}(x) \vee A)$.

Далее имеет место формула:

$$(x)\,(\overline{F}(x) \vee A) \sim (x)\, \overline{F}(x) \vee A,$$

которая доказывается подобно формуле (26).

$$(x)\, \overline{F}(x) \sim (\overline{Ex})\, F(x),$$

$$(x)\, \overline{F}(x) \vee A \sim (\overline{Ex})\, F(x) \vee A.$$

Если теперь снова напишем сокращение $\to$, то получим (35).

Формула *(36):* $(Ex)\ (y)\, F(x, y) \to (y)\,(Ex)\, F(x, y)$.

Это уже упоминавшаяся прежде формула перестановки, о которой было также отмечено, что отношение следования справедливо в ней только в одну сторону.

Доказательство: $F(x, y) \rightarrow (Ez)\, F(z, y)$

[подстановка в аксиому *f*) и правило δ'],

$(y)\,(F(x, y) \rightarrow (Ez)\, F(z, y))$ [правило γ'].

Используя формулу (31), получаем:

$$(y)\, F(x, y) \rightarrow (y)\,(Ez)\, F(z, y),$$

$(Ex)\,(y)\, F(x, y) \rightarrow (y)\,(Ex)\, F(x, y)$ [по правилам γ) и δ)].

§ 7. Правило замены; образование противоположности для некоторой формулы

После того, как мы вывели ряд тождественных формул, остановимся еще на некоторых общих правилах, особенно важных для получения обзора всей системы тождественных формул.

В качестве первого правила мы имеем некоторое расширение правила VI. Последнее гласило, что высказывания, которые находятся во взаимном отношении следования и, таким образом, являются эквивалентными, могут быть заменены друг другом. Мы расширим это правило замены следующим образом.

Правило X: Пусть $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u)$ и $\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ какие-нибудь формулы, которые содержат свободные переменные $x, y, \ldots, u$ и никаких других свободных переменных не имеют. Пусть, далее, $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ доказуемая формула. Если имеем теперь некоторую формулу $\mathfrak{C}$, в которой в качестве составной ее части один или несколько раз фигурирует $\mathfrak{A}(\ldots)$ с какими-нибудь переменными вместо $x, y, \ldots, u$, и если $\mathfrak{D}$ есть формула, получающаяся из $\mathfrak{C}$ путем замены в ней $\mathfrak{A}(\ldots)$ в некоторых или во всех местах на $\mathfrak{B}(\ldots)$ в смысле нашего правила α3), то $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$ является также доказуемой формулой.

Так как правило VI мы уже имеем, то достаточно показать, что по обеим сторонам эквивалентности $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$, перед $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u)$ и перед $\mathfrak{B}(x, y, \ldots u)$ можно поставить одинаковые кванторы, (т. е., например, можно написать:

$$(Ex)\,(y)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)\,(y)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)).$$

Достаточно показать это для одного квантора. Итак, покажем, что в наших предположениях формулы:

$$(x)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (x)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u),$$

$$(Ex)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u)$$

доказуемы.

Из $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ получаем по правилу γ':

$$(x)\,(\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)).$$

Затем, используя формулу (32), имеем:

$$(x)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (x)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$$

и, точно так же, на основании формулы (34'):

$$(Ex)\,\mathfrak{A}(x, \ldots, u) \sim (Ex)\,\mathfrak{B}(x, \ldots, u).$$

В качестве дальнейшего результата к этому примыкает правило образования противоположности для формулы.

Правило *XI. Из некоторой формулы, в которой не встречается сокращений* $\rightarrow$ *и* $\sim$, *противоположная ей формула образуется следующим образом: во-первых, знаки всеобщности заменяются знаками существования, и наоборот; во-вторых, знаки* & *и* $\vee$ *заменяются друг другом; в-третьих, знаки высказываний и знаки предикатов заменяются их отрицаниями.*

Доказательство этого предложения происходит следующим образом.

Для случая, когда соответствующая формула не содержит знаков общности и существования, мы уже доказали это предложение в исчислении высказываний. Используя его теперь и рассматривая комбинацию из кванторов и их области действия как неразрывное целое, мы всегда можем достичь того, что отрицание всего выражения будет перенесено на самые наружные кванторы. Если все выражение стояло под одним квантором, то это уже с самого начала имеет место. Из формул (33) получаем далее:

$$\overline{(x)}\,\mathfrak{A}(x) \sim (Ex)\,\overline{\mathfrak{A}}(x),$$

$$\overline{(Ex)}\,\mathfrak{A}(x) \sim (x)\,\overline{\mathfrak{A}}(x).$$

Используя эти эквивалентности, мы можем передвинуть отрицание с квантора на область его действия. С этими областями действия мы поступаем затем так же, как и со всем выражением, пока, наконец, не дойдем повсюду до знаков высказываний или предикатов.

Описанный метод преобразования поясним примером.

Пусть требуется получить соответствующее нашей теореме представление для формулы[1]:

$$\overline{(x)(Ey)(\overline{F}(x, y) \vee (Ez)\,G(x, y, z))}.$$

Из формул (33) сначала следует, что:

$$\overline{(x)}(Ey)(\overline{F}(x, y) \vee (Ez)\,G(x, y, z)) \sim (Ex)\,\overline{(Ey)}(\overline{F}(x, y) \vee (Ez)\,G(x, y, z)).$$

Дальше получаем эквивалентное выражение:

$$(Ex)(y)\,\overline{\overline{F}(x, y) \vee (Ez)\,G(x, y, z)}.$$

Применяя частный случай нашего предложения, относящийся к исчислению высказываний, и правило X, получаем:

$$(Ex)(y)(F(x, y)\,\&\,\overline{(Ez)}\,G(x, y, z))$$

и, наконец,

$$(Ex)(y)(F(x, y)\,\&\,(z)\,\overline{G}(x, y, z)).$$

Это и есть в точности соответствующее нашему правилу представление.

§ 8. Расширенный принцип двойственности; нормальные формы

Из правила XI предыдущего параграфа можно вывести *принцип двойственности*, который мы можем понимать, как расширение принципа двойственности,

[1] Черта сверху над формулой—это знак ее отрицания. (*Прим ред.*)

выведенного прежде для исчисления высказываний. Этот принцип гласит:

Из доказуемой формулы, имеющей форму импликации или уравнения, в членах которой не встречаются знаки $\rightarrow$ и $\sim$, получается снова доказуемая формула, если заменить повсюду знаки общности одноименными знаками существования и наоборот, и, кроме того, обменять друг на друга знаки & и $\vee$. В случае импликации нужно еще, помимо этого, переставить оба ее члена.

Доказательство: Если $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ есть доказуемая формула, то $\overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$ также доказуема; вместе с формулой $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ доказуема и формула $\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$. Преобразуем теперь $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ по правилу XI предыдущего параграфа. Мы взаимно обмениваем, следовательно, друг на друга знаки общности и существования, равно как и знаки & и $\vee$, и заменяем знаки для высказываний и предикатов их отрицаниями. Однако, так как речь идет о доказуемой формуле, то последняя замена может быть снова снята путем замены, по правилу подстановки, всех знаков высказываний и предикатов их отрицаниями.

Расширенный принцип двойственности дает нам сразу большое число тождественных формул, получаемых посредством такого дуального преобразования из ранее выведенных формул. Упомянем здесь важнейшие[1].

Формула (26'): $(Ex)(A\,\&\,F(x)) \sim A\,\&\,(Ex)\,F(x)$.

Формула (28'): $(Ex)(A \vee F(x)) \sim A \vee (Ex)\,F(x)$.

Формула (29'): $(Ex)(Ey)\,F(x, y) \sim (Ey)(Ex)\,F(x, y)$.

Формула (30'): $(Ex)(F(x) \vee G(x)) \sim (Ex)\,F(x) \vee (Ex)\,G(x)$.

Формулы (29) и (29'), в связи с правилом X, дают нам следующее правило:

П р а в и л о *XII*: *Формула переходит в эквивалентную, если переставить в ней по произволу два или несколько непосредственно следующих друг за другом знаков*

[1] Нумерация формул выбрана так, чтобы она указывала, из какой ранее доказанной тождественной формулы получается, по принципу двойственности, соответствующая формула.

общности, имеющих одинаковую область действия. Соответствующее правило справедливо и для знаков существования.

При рассмотрении исчисления высказываний было показано, что все сложные высказывания можно привести к общей нормальной форме. Мы можем представить сложные высказывания либо как конъюнкцию простых дизъюнкций, либо как дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Определенная *нормальная форма* существует и в исчислении предикатов. *А именно, можно каждое выражение заменить таким, в котором все встречающиеся кванторы стоят неотрицаемыми в начале, не будучи отделены скобками, так что все их области действия простираются до конца формулы*[1]. *Для этой нормальной формы употребительно название «предваренной (pränexe) нормальной формы».*

Преимущество этого нормального представления основано на том, что выражение, стоящее за кванторами, вполне может рассматриваться, как принадлежащее исчислению высказываний. Приведение к нормальной форме происходит следующим образом.

Прежде всего мы заменяем в рассматриваемом выражении сокращения $\rightarrow$ и $\sim$ их значениями. Применяя затем несколько раз правило XI предыдущего параграфа, мы легко достигнем того, что отрицания окажутся стоящими только над переменными высказываниями и переменными предикатами. После этого мы меняем обозначения связанных переменных таким образом, чтобы все кванторы принадлежали различным переменным. Вместо

$$(x)\,F(x) \vee (x)\,G(x)$$

мы пишем, следовательно:

$$(x)\,F(x) \vee (y)\,G(y)$$

и т. д.

[1] Как и в исчислении высказываний, этот способ представления отнюдь не однозначен.

Из возникшего таким образом логического выражения мы получаем нормальную форму, ставя в начало формулы все кванторы в той последовательности, в которой они встречаются в формуле, а все остальное оставляя без изменения. Области действия всех кванторов будут тогда простираться до конца формулы.

Допустимость последнего преобразования доказывается следующим образом. Пусть справедливость этого преобразования уже доказана для случая, когда рассматриваемое выражение содержит меньшее число кванторов. Если кванторы отсутствуют, то наше утверждение тривиально. Если все выражение стоит под одним квантором, то утверждение вытекает из предположения: в таком случае мы должны сделать преобразование лишь для области действия этого квантора, содержащей уже меньшее число кванторов. В противном случае мы берем первый квантор нашего выражения. Он сам не находится в области действия какого-нибудь другого квантора. Применяя выведенные формулы:

$$A \vee (x)\,F(x) \sim (x)\,(A \vee F(x)),$$
$$(x)\,F(x) \vee A \sim (x)\,(F(x) \vee A),$$
$$A \,\&\, (x)\,F(x) \sim (x)\,(A \,\&\, F(x)),$$
$$(x)\,F(x) \,\&\, A \sim (x)\,(F(x) \,\&\, A),$$

или соответствующие формулы для знака существования, мы можем достичь того, что этот квантор передвинется в начало формулы, а область его действия будет простираться на всю формулу. Таким образом, мы приходим к предыдущему случаю, и справедливость преобразования этим доказана вообще.

Предваренная нормальная форма обладает тем преимуществом, что при общих исследованиях в исчислении предикатов благодаря ей круг подлежащих рассмотрению формул может быть значительно ограничен. Все же остается слишком много возможностей для различных видов стоящей в начале формулы комбинации знаков общности и существования, которую мы будем называть *приставкой* формулы. В этом отношении интересен результат Сколема [1], являющийся некоторым уточнением предложения о предваренной нормальной форме. Предложение Сколема гласит (в формулировке, которая нам здесь понадобится):

Для каждой формулы исчисления предикатов можно указать другую формулу, имеющую не просто предваренную нормальную форму, но специально такую, что всякий знак существования предшествует всякому знаку общности; причем эта новая формула выводима или невыводима одновременно с данной формулой из нашей системы аксиом исчисления предикатов.

В дальнейшем мы будем называть формулу в предваренной нормальной форме, в которой ни один знак существования не следует за знаком общности, формулой в нормальной форме Сколема. Для доказательства предложения нам достаточно рассмотреть только формулы, имеющие предваренную нормальную форму. Мы можем допустить, далее, что наша формула не содержит свободных предметных переменных. В самом деле, если бы таковые имелись, то достаточно было бы (в силу аксиомы e) и правила γ') рассмотреть формулу, получающуюся из заданной, если связать все ее свободные переменные знаками общности, поместив последние в начале формулы. Под степенью подобного рода формулы мы будем понимать число знаков общности, за которыми следуют еще знаки существования. Тогда достаточно показать, что для каждой формулы в предваренной нормальной форме, но не в форме Сколема, можно указать такую другую формулу, которая в смысле выводимости равносильна первой, но степень которой ниже степени первоначальной формулы. Мы можем, далее, допустить, что приставка рассматриваемой формулы начинается со знака существования. Действительно, если формула, которую мы обозначим через $\mathfrak{A}$, начинается со знака общности, то мы берем предметную переменную, не встречающуюся в $\mathfrak{A}$, например u, и удовлетворяющую аналогичному требованию предикатную переменную, например G, и заменяем $\mathfrak{A}$ формулой:

[1] *Skolem, Th.*, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathemathischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse, 1920, № 4.

$$(Eu)(\mathfrak{A} \mathbin{\&} G(u) \vee \overline{G}(u)),$$

которая, как легко обнаружить, в смысле выводимости равносильна $\mathfrak{A}$, так как в области действия (Eu) к $\mathfrak{A}$ прибавлен истинный конъюнктивный член. Формула $(Eu)(\mathfrak{A} \mathbin{\&} G(u) \vee \overline{G}(u))$ может быть затем приведена к предваренной нормальной форме так, чтобы в приставке на первом месте стоял знак существования.

Итак, наша формула начинается с $n\,(n \geqq 1)$ знаков существования, за которыми следует по крайней мере один знак общности. Она имеет поэтому форму:

$$\text{(I)} \qquad (Ex_1)\ldots(Ex_n)(y)\,\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y).$$

Здесь $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ формула в предваренной нормальной форме, которая в качестве свободных предметных переменных содержит только $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. Пусть H — предикатная переменная с $n+1$ пустыми местами, которая не встречается в $\mathfrak{B}$. Мы образуем формулу:

$$\text{(II)}\ (Ex_1)\ldots(Ex_n)\,[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \mathbin{\&} \overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y)) \vee (z)\,H(x_1, \ldots, x_n, z)].$$

Эта формула выводима в том случае, когда (I) выводима, и наоборот. В самом деле, если мы заменим в (II) H через $\mathfrak{B}$ по правилу $\alpha 3$), то получим:

$$(Ex_1)\ldots(Ex_n)\,[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n, y)) \vee (z)\,\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, z)].$$

После этого мы можем отбросить часть, представляющую ложное высказывание, т. е.:

$$(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Вывод (II) из (I) несколько сложнее. Прежде всего, путем переименования связанных переменных мы получаем из формулы (31):

$$(y)(F(y) \to G(y)) \to ((y)F(y) \to (y)G(y)).$$

По правилам исчисления высказываний формулу:

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$$

можно преобразовать в

$$\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{C}$$

(правило VII). В данном случае мы получаем:

$$(y)F(y) \to (Ey)(F(y) \& \overline{G(y)}) \vee (y)G(y),$$

если, кроме правила образования противоположности, мы используем еще, что $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ является сокращением для $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$. В этой формуле $F(y)$ заменяем на $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$, а $G(y)$ — на $H(x_1, \ldots, x_n, y)$. Получаем:

$$(y)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \to (Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \& \overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y)) \vee (y)H(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Применяя затем несколько раз правило, сформулированное в конце доказательства формулы (34), получаем:

$$(Ex_1) \ldots (Ex_n)(y)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \to (Ex_1) \ldots (Ex_n) [(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots x_n, y) \& \overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y)) \vee (y)H(x_1, \ldots, x_n, y)].$$

Если учесть, что по предположению посылка (I) уже выведена, то схема заключения и правило переименования δ) дают формулу (II).

После этого мы приводим формулу (II) к предваренной нормальной форме. Это можно сделать так: приставку начинаем с $(Ex_1) \ldots (Ex_n)(Ey)$, затем ставим знаки общности и существования, содержащиеся в выражении $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$, не меняя их порядка следования, и в заключение—знак общности (z). Так как

степень получающейся формулы на единицу ниже, чем степень (I), то предложение о нормальной форме Сколема, таким образом, доказано.

§ 9. Непротиворечивость и независимость системы аксиом

Метод арифметической интерпретации, с помощью которого мы ранее установили непротиворечивость и независимость аксиом a)—d), дает нам возможность выяснить вопрос о *непротиворечивости*, в ранее выясненном смысле, также и для всей системы *аксиом исчисления предикатов*. Для этой цели мы должны распространить арифметическую интерпретацию, которая была установлена только для переменных высказываний, на неиспользованные еще знаки. Это делается следующим образом.

Мы действуем со знаками предикатов так же, как со знаками высказываний, рассматривая те и другие как арифметические переменные, которые могут принимать только значения 0 и 1. При этом мы не обращаем внимания на то, как в знаках предикатов заполняются пустые места. Кванторы всюду отбрасываем. Связь $\vee$ опять рассматриваем как арифметическое произведение; под $\overline{0}$ понимаем 1, а под $\overline{1}$ понимаем 0.

При этих определениях оказывается прежде всего, что все аксиомы, включая e) и f), при таком арифметическом истолковании всегда имеют значение 0. Если, далее, одна или несколько формул имеют всегда значение 0, то легко убедиться, что всякая другая формула, выведенная из данных по нашим правилам, также всегда имеет значение 0. С другой стороны, так как два выражения, из которых одно является отрицанием другого, не могут одновременно иметь значение 0, то отсюда следует, что среди формул, которые могут быть выведены из наших аксиом, никакие две не могут находиться в отношении противоположности друг к другу. Таким образом, условие непротиворечивости выполнено.

Впрочем, значение результата этого доказательства непротиворечивости наших аксиом не следует переоценивать. В самом деле, приведенное доказательство непротиворечивости содержательно сводится к допущению, что положенная в основу область индивидуумов состоит только из одного единственного элемента и, значит, является конечной. Это отнюдь не дает нам гарантии, что при символическом введении содержательно бесспорных посылок система доказуемых формул останется непротиворечивой. Например, остается открытым вопрос, не станет ли при присоединении математических аксиом доказуемой в нашем исчислении всякая произвольная формула. Эта проблема, решение которой имеет центральное значение для математики, по трудности не может даже сравниться с рассмотренным нами вопросом. Математические аксиомы как раз предполагают бесконечную область индивидуумов, а с понятием бесконечности связаны трудности и парадоксы, играющие роль в вопросах оснований математики. Чтобы иметь возможность с успехом взяться за разрешение этой проблемы, Гильберт счел даже необходимым создать особую теорию. Изложение этой теории, которая, конечно, использует результаты математической логики, в рамках этой книги невозможно. По всем вопросам на ее счет мы отсылаем к книге *Гильберта* и *Бернайса*[1].

Но возвратимся к нашей системе аксиом. Мы докажем теперь *независимость аксиом этой системы*, показав, что при получении тождественных формул исчисления предикатов нельзя отбросить ни одну из аксиом a)—f) и ни одно из правил $\alpha 1)-\alpha 3)$, $\beta)$, $\gamma)$ δ,)[2].

[1] *Hilbert D.* u. *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, I, Berlin, 1934.

[2] Доказательство независимости было дано (уже после появления I издания настоящей книги) Мак-Кинзи. Ср. J. C. C. McKinsey, On the independence of Hilbert and Ackermann's postulates for the calculus of propositional functions. Amer. J. Math. Bd. 58. Более простые доказательства (до сих пор неопубликованные) сообщены нам господами Бернайсом и Арнольдом Шмидтом. Доказательства, приведенные в тексте, воспроизводят ход мысли Бернайса.

В нижеследующих доказательствах независимости мы используем уже установленную непротиворечивость исчисления.

Прежде всего мы покажем, что никакая из аксиом a) – d) не является лишней, т. е. что невозможно получить какую-нибудь из этих аксиом из остальных с помощью правил вывода. При этом мы используем доказанный ранее факт (гл. I, § 13), что в чистом исчислении высказываний никакая из этих аксиом не является излишней и притом даже в случае присоединения в качестве дополнительной аксиомы еще $X \rightarrow X$, т. е. $\overline{X} \vee X$.

Предположим, что какая-нибудь из аксиом a) — d) доказана с помощью остальных аксиом и правил вывода исчисления предикатов. Тогда из формул этого доказательства мы удаляем предикатные и предметные переменные следующим образом: отбрасываем знаки общности и существования, а каждое предикатное переменное с аргументами заменяем переменным высказыванием X. При этом преобразовании e) и f) переходят в формулу $X \rightarrow X$.

Но характер доказательства этим не нарушается. Подстановка по правилам $\alpha 1)$—$\alpha 3)$ превращается в подстановку исчисления высказываний или же в простое повторение. Связь формул через схему заключения не нарушается. Правило $\gamma)$ и правило переименования превращаются в простое повторение. Таким образом, рассматриваемая формула была бы выводима из остальных аксиом a) — d) и $X \rightarrow X$ по правилам исчисления высказываний, что противоречит ранее полученным результатам.

Независимость аксиомы e) мы покажем, доказав, что все формулы, которые могут быть получены без использования этой аксиомы, имеют характерное свойство, отсутствующее у этой аксиомы. Именно, если мы видоизменим формулы, заменяя, начиная с самой внутренней области действия, каждую часть формулы, имеющую вид $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, $(y)\,\mathfrak{A}(y)$ и т. д., на $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, $(y)\,\mathfrak{A}(y) \vee X \vee \overline{X}$ и т. д., то каждая формула, которая может быть получена без использования e), переходит снова в формулу, выводимую в исчислении предикатов, ибо аксиомы a)—d), f) указанным преобразованием не затрагиваются. Связь формул на основе правил подстановки α), схемы заключения, правила $\gamma 2$) и правила переименования δ) не нарушается. В случае схемы $\gamma 1$) конечная формула $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\,\mathfrak{B}(x)$ переходит в формулу вида $\mathfrak{A}' \rightarrow (x)\,\mathfrak{B}'(x) \vee X \vee \overline{X}$, т. е. в выводимую формулу. Между тем формула $(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$ превращается в $(x)\,F(x) \vee X \vee \overline{X} \rightarrow F(y)$, которую заведомо нельзя вывести, так как из нее, в силу истинности посылки, получилось бы $F(y)$ и, далее, через подстановку по правилу $\alpha 3$), $\overline{F}(y)$, т. е. противоречие.

Вполне аналогично доказывается независимость f)[1]. Вместо того, чтобы заменять часть формулы, имеющую вид $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, через $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, будем заменять $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$ на $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)\,\&\,X\,\&\,\overline{X}$. В остальном рассуждения аналогичны предыдущим.

Тем же самым методом устанавливаем и независимость обоих правил $\gamma 1$) и $\gamma 2$). Если мы заменим на этот раз $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ в наших формулах через $(x)\,\mathfrak{A}(x)\,\&\,X\,\&\,\overline{X}$, то все формулы, которые могут быть выведены в исчислении предикатов без использования $\gamma 1$), переходят снова в выводимые формулы. Напротив, формула $(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$, выводимая из всей системы аксиом, переходит в заведомо невыводимую формулу $(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))\,\&\,X\,\&\,\overline{X}$. Отсюда следует, что без правила $\gamma 1$) нельзя обойтись. Путем замены в формулах

[1] Само собой разумеется, что с независимостью аксиомы f) не имеет ничего общего тот факт, что знак существования в системе аксиом принципиально не нужен, так как ведь $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$ можно понимать как сокращение для $\overline{(x)}\,\overline{\mathfrak{A}}(x)$ (ср. с. 86).

частей вида $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$ на $(Ex)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$ получаем аналогично доказательство независимости правила $\gamma 2$), так как при этой замене формула $\overline{(Ex)}(F(x)\,\&\,\overline{F}(x))$ переходит в невыводимую формулу.

Независимость правила $\alpha 1$) следует из того, что без этого правила выводимы только такие формулы с индивидуальными переменными, которые имеют одну из форм

$$(x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(y);\quad \mathfrak{A}(y) \rightarrow (Ex)\,\mathfrak{A}(x);$$
$$(x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (x)\,\mathfrak{A}(x);$$
$$(Ex)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (Ex)\,\mathfrak{A}(x);\quad (Ez)\,((x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(z));$$
$$(Ez)\,(\mathfrak{A}(z) \rightarrow (Ex)\,\mathfrak{A}(x))$$

или же получаются из таких формул путем подстановки на место индивидуальных переменных или путем переименования связанных переменных. Ибо аксиомы e) и f) имеют такую форму, а с помощью правил вывода получаются всегда снова только формулы этого рода. Из этого следует, что, например, формула $(x)\,F(x) \rightarrow (Ex)\,F(x)$ без использования $\alpha 1$) не выводима.

Независимость правила $\alpha 2$) устанавливаем путем следующего преобразования. Во всех формулах у переменных предикатов опускаем те места аргументов, которые заполнены свободными индивидуальными переменными z. Например, $F(x, z)$ переходит в $F(x)$, $G(z)$ — в G. При этом преобразовании каждое доказательство, которое выполняется без использования правила подстановки для индивидуальных переменных, переходит снова в выводимую формулу. Но выводимая формула $(x)\,F(x) \rightarrow F(z)$ при этом преобразовании переходит в заведомо невыводимую формулу $(x)\,F(x) \rightarrow F$ (второе F является здесь переменным высказыванием).

Аналогично доказывается независимость правила переименования δ). То же самое преобразование, которое мы произвели в формулах в отношении свободного индивидуального переменного z, мы производим теперь в отношении связанного индивидуального переменного z. В данном случае нужно еще отбросить знаки (z) и (Ez). При этом опять-таки формула, которая выводима без использования правила переименования, переходит снова в выводимую формулу. Между тем безусловно выводимая формула $(z)\, F(z) \to F(x)$ переходит в заведомо невыводимую формулу $F \to F(x)$.

Чтобы показать независимость правила $\alpha 3$), мы заменяем в формулах каждую часть вида $(x)\, \mathfrak{A}(x)$, $(y)\, \mathfrak{A}(y)$ и т. д., содержащую переменный предикат G, на $(x)\, \mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, $(y)\, \mathfrak{A}(y) \vee X \vee \overline{X}$ и т. д. Тогда каждая формула, которая выводима без использования правила $\alpha 3$), переходит снова в выводимую формулу. Между тем это не выполняется для формулы:

$$(x)\, G(x) \to G(y).$$

Необходимость схемы заключения следует из того, что без нее могут быть выведены только формулы вида $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$. В самом деле, все аксиомы имеют эту форму, и правила, за исключением β), снова дают только формулы этого рода. Таким образом, например, формула $X \vee \overline{X}$ не может быть выведена без использования правила β).

§ 10. Полнота системы аксиом

В первой главе (§ 13) мы подчеркнули, что полноту системы аксиом можно определить двояким образом. Полнота в более строгом смысле слова имеет место в случае, когда присоединение к аксиомам всякой формулы, не выводимой из них, приводит к противоречию. Такой полноты мы теперь не имеем. Чтобы установить неполноту нашей системы аксиом, достаточно только найти формулу, которая при арифметическом истолковании, использовании нами в доказательстве непротиворечивости, тождественно равна нулю, не будучи, однако, следствием из аксиом. Одной из таких формул является:

$$(Ex)\, F(x) \to (x)\, F(x).$$

Что эта формула не следует из аксиом, представляется весьма правдоподобным уже потому, что утверждение, которое она выражает: «Если существует x, для которого истинно $F(x)$, то $F(x)$ истинно для всех x», — заведомо не всегда верно. В самом деле, оно перестает быть верным для произвольных предикатов F, как только область индивидуумов содержит более одного элемента.

Строго формальное доказательство невозможности вывести эту формулу из аксиом проводится следующим образом.

Прежде всего мы задаем способ, с помощью которого превращаем логические формулы в такие, которые содержат только переменные, обозначающие высказывания. С этой целью мы устраняем сначала встречающиеся в формуле свободные переменные, связывая их знаками общности, которые ставим перед всей формулой. Затем мы освобождаемся от кванторов, заменяя всякий раз, — это можно делать, например, начиная снаружи,—

$$(x)\, \mathfrak{A}(x) \text{ на } \mathfrak{A}(1) \,\&\, \mathfrak{A}(2),$$

$$(Ex)\, \mathfrak{A}(x) \text{ на } \mathfrak{A}(1) \vee \mathfrak{A}(2)\,[1].$$

В наших формулах встречаются теперь, наряду с переменными высказываниями, высказывания вида $F(1)$, $F(2)$, $G(1, 2)$, ...

Все эти различные высказывания мы заменяем еще затем (различными) переменными высказываниями.

Мы утверждаем теперь, что каждая формула, выводимая из аксиом, после этого преобразования превращается во всегда-истинное сложное высказывание.

Докажем это сначала для аксиом. Для аксиом a) — d) это ясно, так как такое преобразование их не

[1] 1 и 2 являются здесь именами собственными предметов. Исключение кванторов содержательно сводится, таким образом, к допущению, что область индивидуумов содержит только элементы 1 и 2.

затрагивает. Аксиома $(x)\, F(x) \to F(y)$ преобразуется следующим образом:

$$(y)\,((x)\, F(x) \to F(y)),$$

$$((x)\, F(x) \to F(1))\,\&\,((x)\, F(x) \to F(2)),$$

$$(F(1)\,\&\, F(2) \to F(1))\,\&\,(F(1)\,\&\, F(2) \to F(2)),$$

$$(A \,\&\, B \to A)\,\&\,(A \,\&\, B \to B).$$

Последнее выражение действительно представляет собой истинное сложное высказывание.

Аналогично для аксиомы

$$F(y) \to (Ex)\, F(x)$$

имеем преобразования:

$$(y)\,(F(y) \to (Ex)\, F(x)),$$

$$(F(1) \to (Ex)\, F(x))\,\&\,(F(2) \to (Ex)\, F(x)),$$

$$(F(1) \to F(1) \vee F(2))\,\&\,(F(2) \to F(1) \vee F(2)),$$

$$(A \to A \vee B)\,\&\,(B \to A \vee B),$$

которые также приводят к всегда-истинной формуле. Нам остается еще только показать, что применение правил α), β), γ), δ) не нарушает этого свойства.

Если мы имеем две формулы, вторая из которых получается из первой вследствие применения правил $\alpha 1$) или $\alpha 3$), то после преобразования обе формулы будут связаны правилом подстановки исчисления высказываний или же вторая формула будет конъюнкцией формул, каждая из которых получается из первой в результате применения правила подстановки исчисления высказываний. Правила $\alpha 2$) и δ) превращаются в простые повторения. Схема заключения сохраняет свою форму, если в формулах не встречаются свободные предметные переменные. Если же схема заключения содержит еще свободные предметные переменные, то она может потерять свою форму после того, как мы поставим впереди формул знаки общности. Например, из

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(x)\\ \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)\end{array}}{\mathfrak{B}(x)}$$

получаем новую схему:

$$\frac{\begin{array}{c}(x)\,\mathfrak{A}(x)\\ (x)\,(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x))\end{array}}{(x)\,\mathfrak{B}(x)}.$$

После исключения знаков общности получаем:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(1)\,\&\,\mathfrak{A}(2)\\ (\mathfrak{A}(1) \to \mathfrak{B}(1))\,\&\,(\mathfrak{A}(2) \to \mathfrak{B}(2))\end{array}}{\mathfrak{B}(1)\,\&\,\mathfrak{B}(2)}.$$

Но эта схема также соответствует правилам исчисления высказываний. Аналогично обстоит дело в случае нескольких свободных предметных переменных.

Остается, наконец, правило γ). Выражение

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)$$

переходит (если $\mathfrak{A}$ не содержит свободных переменных) с помощью нашего преобразования в

$$(x)\,(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)),$$

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(1))\,\&\,(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(2))$$

и т. д. $\mathfrak{A} \to (x)\, \mathfrak{B}(x)$ превращается в

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(1)\,\&\,\mathfrak{B}(2).$$

Но, по правилам исчисления высказываний, обе формулы эквивалентны. Так же обстоит дело в случае, когда $\mathfrak{A}$ содержит еще свободные переменные. То же верно для правила γ), поскольку оно касается присоединения знака существования.

Таким образом, мы действительно доказали, что всякая формула, выводимая из аксиом, с помощью нашего преобразования переходит во всегда-истинное сложное высказывание. Между тем формула

$$(Ex)\, F(x) \to (x)\, F(x)$$

этого свойства не имеет, так как преобразование ее дает последовательно:

$$F(1) \vee F(2) \to F(1) \,\&\, F(2),$$
$$A \vee B \to A \,\&\, B,$$

а это не всегда истинная формула исчисления высказываний.

Итак, мы показали, что наша система аксиом не полна в более строгом смысле слова. Возникает вопрос, имеет ли здесь место полнота в другом смысле, также упомянутом на стр. 66, т. е. нельзя ли из этой системы аксиом вывести все тождественные — в смысле нашего определения в начале § 5 этой главы — формулы исчисления предикатов. Полнота в этом смысле действительно имеет место. Доказательство ее было дано К. Геделем; в последующем мы придерживаемся его изложения[1].

Согласно соображениям в конце § 8, каждой формуле исчисления предикатов можно привести в соответствие некоторую формулу в нормальной форме Сколема, которая выводима или не выводима одновременно с данной. Поэтому мы можем ограничиться установлением того, что все тождественные формулы в нормальной форме Сколема выводимы.

Пусть
$$(Ex_1)\ldots(Ex\ )(y_1)\ldots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$
есть подобного рода формула.

Прежде всего мы замечаем, что k-группы $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, образованные из неограниченного ряда предметных переменных $x_0, x_1, x_2 \ldots$, можно перенумеровать, упорядочивая их обычным способом по возрастающей сумме индексов $(i_1 + i_2 + \ldots + i_k)$, а при той же сумме индексов — лексикографически. Таким образом, ряд начинается с групп $(x_0, x_0, \ldots, x_0)$; $(x_0, x_0, \ldots, x_1)$; $(x_0, x_0, \ldots, x_1, x_0)$;... Обозначим n-ую из этих k-групп через $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k})$. Будем понимать, далее, под $\mathfrak{B}_n$ формулу:

$$\mathfrak{A}(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}; x_{(n-1)l+1}, x_{(n-1)l+2,\ldots,} x_{nl}).$$

[1] *Gödel, K.*, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Physik, Bd. 37 (1930).

При этом мы замечаем, что предметные переменные, стоящие в этой формуле после точки с запятой, отличаются от тех, которые стоят перед этим знаком, а также от всех переменных, встречающихся в формулах $\mathfrak{B}_p$ $(p < n)$. Напротив, все переменные $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ уже встречаются в формулах $\mathfrak{B}_p$ $(p < n)$. Будем понимать, далее, под $\mathfrak{C}_n$ дизъюнкцию $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_n$, под $\mathfrak{D}_n$ — формулу, получающуюся из $\mathfrak{C}_n$ в результате присоединения впереди $\mathfrak{C}_n$ всех знаков общности, соответствующих свободным переменным. Каждой формуле $\mathfrak{C}_n$ мы приводим теперь в соответствие некоторую формулу исчисления высказываний. А именно, мы заменяем элементарные составные части этой формулы (которыми, помимо переменных высказываний, служат предикатные переменные с предметными переменными в качестве аргументов) переменными высказываниями, причем вместо одинаковых элементов ставим одинаковые переменные высказывания, а вместо различных — различные же переменные высказывания. Отнесенную таким образом к $\mathfrak{C}_n$ формулу исчисления высказываний назовем $\mathfrak{E}_n$. Очевидно, формула $\mathfrak{E}_n$ такова, что $\mathfrak{C}_n$ можно получить из $\mathfrak{E}_n$, применяя правило подстановки $\alpha 1$).

Мы имеем теперь следующую альтернативу:

1. Существует такое n, что $\mathfrak{E}_n$ является тождественной формулой исчисления высказываний.

2. Ни для какого n $\mathfrak{E}_n$ не является тождественной формулой исчисления высказываний.

Мы докажем:

(A) В случае 1. формула
$$(Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$
выводима из системы аксиом исчисления предикатов.

(B) В случае 2. указанная формула не является тождественной, так как можно указать предикаты, определенные в области натуральных чисел, которые, будучи подставлены в формулу вместо переменных предикатов, превращают ее в ложное высказывание.

Из этих предложений, которые еще должны быть доказаны, получаем в качестве следствий:

Каждая тождественная формула исчисления предикатов является в то же время и выводимой формулой, т. е. наша система аксиом, состоящая из основных формул a)—f) *и правил* α1)—α3), β), γ), δ), *обладает свойством полноты.*

Если некоторая формула является всегда-истинной в области натуральных чисел (или в какой-либо другой счетной бесконечной области индивидуумов), т. е. если при любой замене предикатных переменных индивидуальными теоретико-числовыми предикатами и свободных предметных переменных определенными числами она всегда переходит в истинное высказывание, то эта формула всегда-истинна для любой области индивидуумов, т. е. является тождественной.

Последнее — важное — предложение, которое получается здесь в качестве побочного результата, может быть получено само по себе проще; оно впервые было доказано *Лёвенгеймом* [1].

Приведем теперь доказательства утверждений (A) и (B). Прежде всего покажем истинность (A). Итак, пусть для какого-нибудь n $\mathfrak{E}_n$ является тождественной формулой. Так как $\mathfrak{C}_n$ получается из $\mathfrak{E}_n$ в результате подстановки по правилу α1) и, далее, $\mathfrak{D}_n$ получается из $\mathfrak{C}_n$ по правилу γ), то достаточно показать, что для каждого n:

$$\mathfrak{D}_n \to (Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots$$
$$\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;\ y_1,\dots,y_l)$$

является выводимой формулой исчисления предикатов.

[1] *Löwenheim, L.*, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann. Bd. 76 (1915). Существенное упрощение метода доказательства мы находим в работе *Сколема*, упомянутой в конце § 8 этой главы.

Мы покажем это с помощью индукции по n. $\mathfrak{D}_1$ имеет форму:

$$(x_0)(x_1)\dots(x_l)\,\mathfrak{A}(x_0,\dots,x_0;\ x_1,\dots,x_l).$$

Используя несколько раз аксиому f) и правило V, мы можем вывести формулу:

$$(y_1)\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(z_1,\dots,z_k;\ y_1,\dots,y_l)\to$$
$$(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;\ y_1,\dots,y_l).$$

Отсюда с помощью подстановки получим:

$$(y_1)\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_0,\dots,x_0;\ y_1,\dots,y_l)\to$$
$$\to(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;\ y_1,\dots,y_l)$$

и затем по правилу γ2) и формуле (22):

$$\mathfrak{D}_1\to(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;\ y_1,\dots,y_l).$$

Пусть, далее, уже доказана формула:

$$\mathfrak{D}_{n-1}\to(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots$$
$$\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;\ y_1,\dots,y_l).$$

$\mathfrak{D}_n$ имеет форму:

$$(x_0)(x_1)\dots(x_{nl})\,\mathfrak{C}_n;\quad \text{т. е. } (x_0)\dots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1}\lor\mathfrak{B}_n)$$

или, точнее:

$$(x_0)(x_1)\dots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1}$$
$$\lor\,\mathfrak{A}(x_{n1},\dots,x_{nk};\ x_{(n-1)l+1},\dots,x_{nl})).$$

Мы уже прежде отметили, что переменные $x_{(n-1)l+1},\dots,x_{nl}$ в $\mathfrak{C}_{n-1}$ не входят; поэтому, используя формулу (26), получим выводимую формулу:

$$\mathfrak{D}_n\to(x_0)(x_1)\dots(x_{(n-1)l})(\mathfrak{C}_{n-1}\lor(y_1)\dots(y_l)\,\mathfrak{A}(x_{n1},\dots,$$
$$x_{nk};\ y_1,\dots,y_l)).$$

Формула

$$(x)(F(x)\lor G(x))\to(x)F(x)\lor(Ey)G(y)$$

выводима. Она получается из формулы (34), если в ней F заменить на $\overline{F}$ и принять во внимание, что знак $\rightarrow$ представляет собой лишь сокращение. Используя несколько раз эту последнюю формулу, получаем далее:

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow (x_0)(x_1) \ldots (x_{(n-1)\,l})\, \mathfrak{E}_{n-1} \vee (Ex_1) \ldots$$
$$\ldots (Ex_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x\ ; y_1, \ldots, y_l),$$

т. е.

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{D}_{n-1} \vee (Ex_1) \ldots (Ex_k)(y_1) \ldots$$
$$\ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Затем, в силу:

$$\mathfrak{D}_{n-1} \rightarrow (Ex_1) \ldots (Ex_k)(y_1) \ldots$$
$$\ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

легко получим

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow (Ex_1) \ldots (Ex_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Таким образом, индукция является полной.

Теперь докажем (В). Допустим, что никакое $\mathfrak{E}_n$ не является тождественной формулой исчисления высказываний. Для удобства последующих рассмотрений целесообразно формулам исчисления высказываний $\mathfrak{E}_n$ придать некоторую специальную форму. $\mathfrak{E}_n$ получается из $\mathfrak{E}_n$ в результате замены первоначальных элементов, которые представляют собой переменные предикаты с аргументами из ряда $x_0, x_1, x_2, \ldots$, переменными высказываниями. Эту замену мы будем осуществлять следующим образом: $F(x_0)$ будем заменять переменным высказыванием F_0, $F(x_1)$ — высказыванием F_1, $G(x_1, x_2, x_3)$ — высказыванием $G_{1,2,3}$ и т. д. Тогда в каждой формуле $\mathfrak{E}_{n+1}$ будут встречаться все переменные высказывания из $\mathfrak{E}_n$, а также еще и другие. Всю совокупность переменных высказываний, встречающихся в $\mathfrak{E}_n$, мы мыслим себе перенумерованными каким-нибудь образом, так что имеет смысл говорить о первом, втором и т. д. переменных высказываниях. Эта нумерация может происходить, например, таким

образом: сначала нумеруем высказывания из $\mathfrak{E}_1$ в какой-либо последовательности, затем нумеруем те новые переменные высказывания, которые появляются в $\mathfrak{E}_2$, и т. д.

Так как никакая из формул $\mathfrak{E}_n$ не является тождественной формулой исчисления высказываний, то мы можем переменные высказывания, имеющиеся в некотором $\mathfrak{E}_n$, заменить значениями «истина», «ложь» таким образом, что $\mathfrak{E}_n$ превратится в ложное высказывание. Мы будем говорить тогда, примыкая к терминологии, использованной прежде в исчислении высказываний, о выполняющей системе для формулы $\overline{\mathfrak{E}}_n$. Для каждого $\overline{\mathfrak{E}}_n$ существует, понятно, только конечное число различных выполняющих систем; однако в целом их бесконечно много, так как выполняющие системы, которые относятся к формулам $\overline{\mathfrak{E}}_n$ с различными индексами, считаются, конечно, различными.

Затем мы приводим в соответствие каждому из бесконечного множества переменных высказываний однозначным образом одно из двух значений: «истину» или «ложь». Если первое переменное высказывание в бесконечном множестве выполняющих систем замещается значением «истина», то этой переменной ставим в соответствие значение «истина», в противном случае — значение «ложь». Мы рассматриваем далее только те выполняющие системы, в которых первое переменное высказывание замещено отнесенным ему таким образом значением. Если в них второе переменное высказывание встречается бесконечное число раз со значением «истина», то мы относим к нему это значение, в противном случае — значение «ложь». Подобным же образом устанавливаем значения для последующих переменных высказываний, рассматривая каждый раз только те выполняющие системы, у которых предшествующие переменные высказывания имеют уже установленные значения.

Если заменим теперь переменные высказывания приведенными им в соответствие значениями, то все $\mathfrak{C}_n$ одновременно превратятся в ложные высказывания. Мы определяем затем некоторые теоретико-числовые предикаты, которые должны учитываться в качестве подстановок для предикатных переменных, содержащихся в $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$. Если, например, встречается предикатное переменное $F(\,,\,)$ с тремя пустыми местами, то в наших $\mathfrak{C}_n$ мы имели переменные высказывания F_{i_1, i_2, i_3}. Мы определяем теперь соответствующий теоретико-числовой предикат Φ таким образом, чтобы $\Phi(p, q, r)$ для любых натуральных чисел всегда имело то значение, которое было приведено в соответствие $F_{p, q, r}$. Таким образом, каждому предикатному переменному приводится в соответствие некоторый индивидуальный теоретико-числовой предикат с тем же самым числом пустых мест. Если мы примем теперь в

$$(Ex_1) \ldots (Ex_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

за область индивидуумов натуральные числа и подставим вместо предикатных переменных определенные выше теоретико-числовые предикаты, то легко обнаружить, что формула превращается в ложное высказывание или, другими словами, что

$$(x_1) \ldots (x_k)(Ey_1) \ldots (Ey_l)\, \overline{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

становится истинным высказыванием. В самом деле, если мы возьмем, например, n-ю k-группу натуральных чисел, которую мы обозначали выше $(n_1, \ldots, n_k)$, то

$$\overline{\mathfrak{A}}(n_1, \ldots, n_k; (n-1)l+1, \ldots, nl)$$

после замены предикатных переменных получает оценку истинности, противоположную той, которую имеет последняя частичная дизъюнкция $\mathfrak{C}_n$ при замещении переменных высказываний приведенными им в соответствие оценками истинности, т. е. значение истины. Так как то же самое имеет место для каж-

дой k-группы, то

$$(x_1) \ldots (x_k)(Ey_1) \ldots (Ey_l)\, \overline{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

истинно для указанной области индивидуумов. Таким образом доказано также (B).

§ 11. Вывод следствий из данных посылок; связь с тождественными формулами

До сих пор мы использовали исчисление предикатов только для вывода тождественных формул. При этом посылки наших заключений, основные формулы d) — f), сами были тоже чисто логической природы. Теперь мы продемонстрируем на нескольких примерах общий метод формального доказательства средствами исчисления предикатов, который до установления наших аксиом мы могли лишь приблизительно описать.

При этом речь идет о выводе заключений из каких-либо посылок, которые уже не имеют чисто логической природы.

В посылках будут теперь встречаться не только переменные, но и *индивидуальные предикаты*, а также *индивидуальные предметы*. В качестве знаков для индивидуальных предикатов мы используем либо *большие греческие буквы*, либо комбинацию *больших латинских букв со следующими за ними маленькими латинскими буквами*, например *St*, *Ms*, *Dsc*, и т. д., или же, для математических предикатов, известные из математики знаки соотношений, вроде $<$, $>$, $=$, и т. д. Понятие формулы, введенное в § 4, должно быть при этом соответствующим образом расширено.

Формальное доказательство происходит следующим образом: записываем символически посылки заключений и присоединяем их в качестве основных формул (аксиом) к логическим основным формулам a) — f), вместе с которыми они образуют исходные формулы для формальных операций, которые должны выполняться согласно правилам вывода α), β), γ), δ), При содержательном истолковании формул следует иметь в виду, что предметные переменные вообще не относятся больше к какой-то остающейся неопределенной области индивидуумов; напротив, род посылок, как правило, более точно характеризует, состоит ли эта область из целых чисел, действительных чисел, точек некоторой плоскости или каких-либо других вещей. Может случиться также, что приходится иметь дело с несколькими областями индивидуумов, как это имеет место во втором из приведенных ниже примеров. В этом случае мы нуждаемся в нескольких родах предметных переменных. Тогда предикатные переменные следует различать также по роду их аргументов. Аксиомы e) и f) можно при этом выписать столько раз, сколько имеется родов предметов. Получающегося благодаря этому усложнения исчисления предикатов можно, однако, избежать, так как всегда возможно — мы покажем это при рассмотрении второго из следующих примеров — свести случай нескольких областей индивидуумов к случаю одной единственной области.

Приведем сначала несколько простых примеров.

Для первого примера рассмотрим заключение, в котором в качестве одной из посылок фигурирует единичное суждение. С заключением этого рода мы имеем дело в известном школьном примере:

«Все люди смертны; Кай человек, следовательно, Кай смертен».

В этом предложении встречаются три индивидуальных обозначения. Словам «человек», «смертный» соответствуют два предиката $Ms(x)$ и $St(x)$, для которых общим родом предметов может считаться род живых существ. Третьим индивидуальным знаком служит собственное имя «Кай». Посылки, записанные в виде формул, гласят:

$$(x)\,(Ms\,(x) \to St\,(x)),$$

$$Ms\,(\text{Кай}).$$

Путем подстановки в формулу:

$$(x)\,F\,(x) \to F\,(y)$$

получаем:

$$(x)\,(Ms\,(x) \to St\,(x)) \to (Ms\,(y) \to St\,(y))$$

и далее:

$$(x)\,(Ms\,(x) \to St\,(x)) \to (Ms\,(\text{Кай}) \to St\,(\text{Кай})),$$

$$Ms\,(\text{Кай}) \to St\,(\text{Кай}) \qquad [\text{правило } \beta)],$$

$$St\,(\text{Кай}). \qquad [\text{правило } \beta)].$$

Но последняя формула есть символическое выражение нашего заключительного предложения «Кай смертен».

Следующие два примера заимствуем из области математических выводов. Сначала займемся таким геометрическим заключением:

Посылка: «*Через две различные точки проходит самое большее одна прямая*».

Утверждение: «*Две различные прямые имеют не более одной общей точки*».

Здесь встречаются следующие предикаты. Прежде всего отношение $\Lambda\,(x, y)$ «x лежит на y». Тут первое пустое место относится к роду точек, а второе — к роду прямых. Далее, встречается предикат различия, т. е. отрицание предиката тождества $\equiv(x, y)$. Пустые места этого предиката могут относиться как к точкам, так и к прямым; разумеется, нужно рассматривать утверждение о тождестве точки с прямой всегда как ложное. Для большей четкости мы будем обозначать аргументы, относящиеся к роду точек, маленькими буквами, а те, которые относятся к прямым, большими латинскими буквами [1].

Собственные имена для индивидуумов здесь отсут-

[1] Смешения с переменными высказываниями здесь быть не может.

ствуют. Символическое выражение посылки таково:

$$(x)(y)\{\overline{\equiv}(x, y) \to \overline{(EG)}(EH)[\overline{\equiv}(G, H) \& \Delta(x, G) \& \Delta(x, H) \& \Delta(y, G) \& \Delta(y, H)]\}.$$

Утверждение записывается:

$$(G)(H)\{\overline{\equiv}(G, H) \to \overline{(Ex)}(Ey)[\overline{\equiv}(x, y) \& \Delta(x, G) \& \Delta(x, H) \& \Delta(y, G) \& \Delta(y, H)]\}.$$

Если для сокращения мы напишем $\mathfrak{A}(x, y, G, H)$ вместо

$$\Delta(x, G) \& \Delta(y, G) \& \Delta(x, H) \& \Delta(y, H)$$

и используем определение знака $\to$, то посылка и утверждение представятся следующим образом:

$$(x)(y)\{\equiv(x, y) \vee \overline{(EG)}(EH)[\overline{\equiv}(G, H) \& \mathfrak{A}(x, y, G, H)]\},$$

соответственно

$$(G)(H)\{\equiv(G, H) \vee \overline{(Ex)}(Ey)[\overline{\equiv}(x, y) \& \mathfrak{A}(x, y, G, H)]\}.$$

Согласно приведенному в § 8 правилу образования противоположности мы можем преобразовать эти два выражения в:

$$(x)(y)\{\equiv(x, y) \vee (G)(H)[\equiv(G, H) \vee \overline{\mathfrak{A}}(x, y, G, H)]\},$$

$$(G)(H)\{\equiv(G, H) \vee (x)(y)[\equiv(x, y) \vee \overline{\mathfrak{A}}(x, y, G, H)]\}.$$

Приводя теперь оба выражения к нормальной форме, мы получим:

$$(x)(y)(G)(H)\{\equiv(x, y) \vee (\equiv(G, H) \vee \overline{\mathfrak{A}}(x, y, G, H))\},$$

$$(G)(H)(x)(y)\{\equiv(G, H) \vee (\equiv(x, y) \vee \overline{\mathfrak{A}}(x, y, G, H))\}.$$

Из этих представлений непосредственно видно, что утверждение может быть выведено из посылки. В самом деле, формула для посылки переходит в формулу для утверждения, если применить к дизъюнкциям ассоциативный и коммутативный законы, а к знакам общности — правило перестановки. Одновременно мы

обнаруживаем, что и, наоборот, из истинности утверждения можно заключить об истинности посылки.

Одновременного появления двух областей индивидуумов можно избежать следующим образом (обобщение на любой случай не нуждается в особом пояснении). Мы мыслим себе положенной в основу одну единственную область индивидуумов, которая состоит из точек и прямых, и вводим два индивидуальных предиката: $\Pi(x)$, т. е. x есть точка, и $\Gamma(x)$, т. е. x есть прямая. Тогда посылку в нашем примере можно записать следующим образом:

$$(x)(y)\{(\Pi(x) \& \Pi(y) \& \overline{\equiv}(x, y)) \to \overline{(Ez)}(Eu)[\Gamma(z) \& \Gamma(u) \& \& \overline{\equiv}(z, u) \& \Delta(x, z) \& \Delta(x, u) \& \Delta(y, z) \& \Delta(y, u)]\}.$$

Соответствующим образом можно выразить и утверждение.

В качестве второго примера математического вывода докажем *предложение о транзитивности отношения меньшего к большему*. Это предложение, представление которого формулой:

$$<(x, y) \& <(y, z) \to <(x, z)$$

нам уже знакомо, мы будем понимать здесь в смысле, какой оно имеет в учении о величинах. Мы будем представлять себе пустые места предиката $<(x, y)$ отнесенными к определенному роду величин (например, к длинам отрезков или *положительным* действительным числам) и будем рассматривать этот предикат как производный от понятия сложения. Для трехчленного предиката x, сложенное с y, дает z (или, написав арифметически, $x+y=z$) мы введем знак $\Phi(x, y, z)$. С помощью этого предиката можно определить $<(x, y)$ так:

$$(Eu)\Phi(x, u, y).$$

(«Существует u, которое, будучи прибавлено к x, дает y».)

Если мы подставим это определение в наше утверждение, то последнее примет следующий вид:

$$[(Eu)\,\Phi(x, u, y) \,\&\, (Eu)\,\Phi(y, u, z)] \rightarrow (Eu)\,\Phi(x, u, z).$$

В этой форме можно доказать рассматриваемое предложение, если в основу сложения величин положить следующие две посылки:

1. «Две величины всегда могут быть сложены», т. е.

$$(Ez)\,\Phi(x, y, z).$$

2. «Для сложения величин имеет место ассоциативный закон:

$$x + (y + z) = (x + y) + z»,$$

т. е.:

$$[\Phi(x, y, u) \,\&\, \Phi(y, z, v) \,\&\, \Phi(u, z, w)] \rightarrow \Phi(x, v, w).$$

Обе посылки представлены в нормальной форме с применением свободных переменных. Если мы и утверждение приведем к нормальной форме, то оно примет следующий вид:

$$(u)(v)(Ew)\,(\overline{\Phi}(x, u, y) \vee \overline{\Phi}(y, v, z) \vee \Phi(x, w, z)).$$

Вместо этого можно также написать:

$$(u)(v)(Ew)\,(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z) \rightarrow \Phi(x, w, z)).$$

Эта формула может быть выведена из наших посылок следующим образом:

Переименовывая переменные, мы преобразуем наши посылки в:

1. $(Ew)\,\Phi(u, v, w)$
2. $(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(u, v, w) \,\&\, \Phi(y, v, z)) \rightarrow \Phi(x, w, z).$

Если мы применим ко второй посылке правило VII (стр. 59), то можем преобразовать ее в:

$$\Phi(u, v, w) \rightarrow [(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z)) \rightarrow \Phi(x, w, z)].$$

Используя правило, соответствующее формуле (34), можно отсюда вывести:

$$(Ew)\,\Phi(u, v, w) \rightarrow$$
$$(Ew)\,[(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z)) \rightarrow \Phi(x, w, z)].$$

Так как $(Ew)\,\Phi(u, v, w)$ было принято за истину, то получаем далее:

$$(Ew)\,(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z) \rightarrow \Phi(x, w, z)).$$

Ставя спереди, по правилу γ', знаки всеобщности (u) и (v), получим наше утверждение.

Разъясненный в этом параграфе метод формального проведения доказательства, исходя из посылок, которые не являются логическими тождествами, применим, главным образом, когда для какой-либо научной области нужно установить основные законы или аксиомы и вывести из них остальные предложения в качестве следствий. Можно даже сказать, что понятие системы аксиом только теперь получило точную формулировку, ибо к полной аксиоматике относится не только установление аксиом, взятых сами по себе, но и точное указание логических средств, дающих возможность доказательства новых предложений, исходя из аксиом. Вопроса о том, можно ли путем формального вывода получить также каждое предложение, которое содержательно представляет собой следствие из аксиом, мы коснемся в конце этого параграфа.

Системы аксиом, поскольку они вообще могут быть формализованы в рамках рассмотренного здесь узкого исчисления предикатов, можно подразделить на два класса. Под системой аксиом первой ступени мы понимаем такую, в которой отдельные аксиомы не содержат переменных предикатов, а содержат только индивидуальные предикаты. (Здесь и в дальнейшем под аксиомами мы понимаем только такие исходные формулы, которые характерны для соответствующей области, а не логические основные формулы § 5, составляющие неотъемлемую часть каждой системы аксиом.) Если в аксиомах имеются и переменные предикаты, то мы будем говорить о *системе аксиом второй ступени*. Исключение из этого подразделения делается только для аксиом тождества. Если мы снова употребим для предиката тождества знак $\equiv$, то аксиомы эти имеют следующий вид:

$$\equiv(x, x),$$
$$\equiv(x, y) \to (F(x) \to F(y)).$$

(В содержательной аксиоматике эти аксиомы большей частью опускаются, так как они имеют чисто логическую природу. Ср. гл. 4, § 1.) Во второй аксиоме встречается переменный предикат. Несмотря на это, мы все еще причисляем системы аксиом, в которых переменные предикаты имеются только в аксиомах тождества, к первой ступени. Причина этого в том, что вторая аксиома тождества, поскольку она употребляется только в соответствующей системе аксиом, всегда может быть заменена аксиомами без переменных предикатов. Именно, вместо этой аксиомы можно взять аксиомы, которые получаются из нее, если подставить вместо F по правилу $\alpha 3$) индивидуальные предикаты, встречающиеся в этой системе аксиом, и, кроме того, сформулировать в качестве аксиом симметрию и транзитивность тождества. Например, если мы имеем в системе аксиом индивидуальные предикаты $\Phi(\ )$ и $\Psi(,)$, то аксиомы тождества выглядят так:

$$\equiv(x, x)$$
$$\equiv(x, y) \to \equiv(y, x)$$
$$(\equiv(x, y) \mathbin{\&} \equiv(y, z)) \to \equiv(x, z)$$
$$\equiv(x, y) \to (\Phi(x) \to \Phi(y))$$
$$\equiv(x, y) \to (\Psi(x, z) \to \Psi(y, z))$$
$$\equiv(x, y) \to (\Psi(z, x) \to \Psi(z, y))$$

и соответственно в других случаях. От строгого доказательства утверждаемой заменяемости мы здесь отказываемся.

Ко второй ступени принадлежит, например, система аксиом Пеано для натуральных чисел, так как формулировка аксиомы полной индукции делает необходимым употребление переменного предиката, затем система аксиом теории множеств в первоначальной формулировке Цермело, вследствие появления переменного предиката в аксиоме выбора. К первой ступени принадлежит, между прочим, гильбертовская система аксиом геометрии, если оставить в стороне аксиомы непрерывности. Аксиомы теории групп также принадлежат к первой ступени.

В качестве основной проблемы тут естественно возникает вопрос, возможно ли, имея какое-нибудь определенное предложение данной научной области, установить, является ли оно следствием из аксиом или нет.

Мы покажем, что эту проблему можно свести к проблеме чистого исчисления предикатов, т. е. к обоснованному в § 5 исчислению, содержащему только индивидуальные и предикатные переменные. А именно, вопрос о логической зависимости предложения от системы аксиом можно свести к другому вопросу: является ли некоторая соответствующая формула чистого исчисления предикатов тождественной формулой или нет. Однако это имеет место только в случае, если система аксиом принадлежит первой ступени. Мы объясним доказательство этого на конкретном примере.

При исследовании логических отношений зависимости между различными группами аксиом геометрии особенно важным и интересным является обнаружение того обстоятельства, что частный случай теоремы Паскаля, который играет существенную роль в обосновании учения о пропорциях без применения аксиомы непрерывности, не может быть выведен только из аксиом связи, расположения и аксиомы о параллельных. Речь идет о том, чтобы показать, что независимость теоремы Паскаля от упомянутых аксиом равносильна невыводимости некоторой формулы чистого исчисления предикатов.

Для этого нам нужно прежде всего выразить в нашем исчислении подлежащие рассмотрению аксиомы, равно как и упомянутую специальную теорему

Паскаля, и притом так, чтобы речь шла только об одном роде вещей. Для того чтобы избежать появления нескольких областей индивидуумов, мы воспользуемся не тем, всегда применимым, методом, который был упомянут прежде, а другим, специально приспособленным к нашему примеру. Для этого достаточно только вместо основного отношения между точками и прямыми («точка x лежит на прямой y» или «точки x, y определяют прямую z») ввести отношение между тремя точками $Ger(x, y, z)$ («x, y и z лежат на одной прямой»). Точно так же вместо основных отношений между точками и плоскостями возьмем отношение между четырьмя точками $Eb(x, y, z, u)$ («x, y, z, u лежат в одной плоскости»).

К этим двум предикатам мы должны еще присоединить отношение тождества $\equiv(x, y)$, а также отношение «между» $Zw(x, y, z)$ («x лежит между y и z»).

С помощью четырех введенных отношений можно теперь представить логическими формулами все встречающиеся в нашей проблеме аксиомы, а также предложение Паскаля. При этом существенно, что мы обходимся в этих формулах без свободных предметных переменных, ставя повсюду впереди знаки общности. Например, аксиома: «Через две точки проходит только одна единственная прямая» выражается формулой:

$$(x)(y)(u)(v)\{[Ger(x, y, u) \& Ger[x, y, v) \& \overline{\equiv}(x, y) \& \overline{\equiv}(u, v)] \rightarrow Ger(x, u, v)\},$$

в словесной форме: «если x, y и u лежат на одной прямой, x, y и v лежат на одной прямой и если, далее, x отлично от y, а u от v, то x, u и v лежат на одной прямой». Аксиома: «Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку, отличную от первой», выражается формулой

$$(x)(y)(z)(u)(v)(w)(p)\{[Eb(x, y, z, p) \& Eb(u, v, w, p)] \rightarrow (Eq)(\overline{\equiv}(p, q) \& Eb(x, y, z, q) \& Eb(u, v, w, q))\}$$

Аксиоме, существенной для расположения на плоскости: «Если прямая, лежащая в плоскости треугольника и не проходящая через его вершину, пересекает одну сторону этого треугольника, то она пересекает и какую-нибудь другую его сторону», соответствует следующая формула:

$$(x)(y)(z)(u)(v)\{[Eb(x, y, z, u) \& \overline{Ger}(x, y, z) \& Zw(v, x, y) \& \overline{Ger}(x, y, u) \& \overline{Ger}(z, u, v)] \rightarrow (Ew)[Ger(u, v, w) \& (Zw(w, x, z) \vee Zw(w, y, z))]\}.$$

При введении отношения «Ger» и «Eb» следует иметь в виду, что для них свойства симметричности должны быть сформулированы в качестве аксиом. Таким образом, мы должны ввести формулу:

$$(x)(y)(z)\{Ger(x, y, z) \rightarrow (Ger(x, z, y) \& Ger(y, x, z))\}$$

и соответствующую для Eb. *Свойства отношения тождества* также следует сформулировать в виде аксиом:

$$(x)(y)(\equiv(x, y) \rightarrow \equiv(y, x)),$$

$$(x)\equiv(x, x),$$

$$(x)(y)(z)\{\equiv(x, z) \& \equiv(y, z) \rightarrow \equiv(x, y)\},$$

$$(x)(y)(z)(u)\{(\equiv(x, u) \& Ger(x, y, z)) \rightarrow Ger(u, y, z)\},$$

$$(x)(y)(z)(u)(v)\{(\equiv(x, v) \& Eb(x, y, z, u)) \rightarrow Eb(v, y, z, u)\},$$

$$(x)(y)(u)(z)\{(\equiv(x, y) \& Zw(x, u, z)) \rightarrow Zw(y, u, z)\},$$

$$(x)(y)(u)(z)\{(\equiv(x, y) \& Zw(u, x, z)) \rightarrow Zw(u, y, z)\}.$$

Четыре последние формулы выражают, что в каждом встречающемся отношении тождественные предметы могут замещать друг друга.

Мы мыслим себе затем все аксиомы, записанные в виде формул, связанными знаком & в одну единственную формулу. Эта формула представляет собой совокупное условие, которому подчинены предикаты «$\equiv$», «Ger», «Zw» «Eb» или, как выражаются иногда в аксиоматике, она содержит неявное определение этих предикатов. Будем записывать сокращенно эту формулу в виде:

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb).$$

Частное предложение Паскаля при обычном способе выражения формулируется следующим образом: пусть ABC и $A'B'C'$ соответственно по три точки на двух пересекающихся прямых. Пусть все указанные точки отличны от точки пересечения этих прямых. Тогда, если BC' параллельна CB' и CA' параллельна AC', то и AB' параллельна BA'. Это предложение в свою очередь можно выразить с помощью логической формулы, в которой из предикатов содержатся только $\equiv$ и Ger. Обозначим эту формулу через $\mathfrak{P}(\equiv, Ger)$.

Утверждение, о котором идет речь, говорит, что из

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb)$$

нельзя вывести

$$\mathfrak{P}(\equiv, Ger).$$

В этом утверждении содержательно-геометрическое истолкование $\equiv$, Ger, Zw, Eb уже не играет роли. Ибо, в соответствии с аксиоматической точкой зрения, при доказательстве предложения из геометрических аксиом нельзя использовать ничего, относящегося к введенным основным понятиям, что не было бы явно сформулировано в аксиомах.

Поэтому мы можем совершенно исключить эти предикаты и на их место поставить четыре переменных предиката, естественно, с соответствующим числом аргументов:

$$F(x, y);\quad G(x, y, z);\quad H(x, y, z);\quad K(x, y, z, u).$$

Доказуемость предложения Паскаля означала бы, что для всяких четырех таких предикатов F, G, H, K, для которых

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K)$$

истинно, $\mathfrak{P}(F, G)$ тоже истинно и что, следовательно,

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K) \rightarrow \mathfrak{P}(F, G)$$

есть тождественная формула. Нужно, следовательно, установить, что это не имеет места.

Таким же образом для каждого другого геометрического предложения можно указать соответствующую формулу исчисления предикатов, такую, что предложение тогда и только тогда представляет собой следствие из аксиом, когда эта логическая формула является тождественной. Точно так же и вопросы *о непротиворечивости* можно поставить в связь с тождественностью определенных формул. Например, вопрос: являются ли геометрические аксиомы, собранные в формуле

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb),$$

логически совместными друг с другом, оказывается равнозначным с другим вопросом: является ли формула

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K)$$

не тождественной.

Мы можем, далее, сказать, что *каждое следствие некоторой системы аксиом первой ступени может быть получено также с помощью процесса формального вывода, освещенного в начале этого параграфа.* Ибо тождественная формула, выражающая логическую зависимость предложения от аксиом, согласно § 10 есть в то же время и доказуемая формула. После подстановки специальных предикатов вместо переменных в эту формулу схема заключения дает самое предложение.

Наши последние замечания об эквивалентности зависимости предложения от некоторой системы аксиом с тождественной истинностью некоторой определенной формулы исчисления предикатов относятся, как мы уже упомянули, только к системам аксиом первой ступени. Но и для систем аксиом второй ступени имеют место аналогичные соотношения. Только тождественная формула, о которой при этом идет речь, уже не может быть выражена средствами узкого исчисления предикатов; она принадлежит к расширенному исчислению предикатов, которое должно быть рассмотрено в четвертой главе.

§ 12. Проблема разрешимости

Из соображений предыдущего параграфа становится ясной принципиальная важность проблемы, относящейся к выяснению для данной формулы исчисления предикатов вопроса: является ли она тождественной формулой или нет? Согласно определению, данному в § 5, тождественность некоторой формулы означает то же самое, что и общезначимость этой формулы для каждой области индивидуумов. Поэтому говорят также о *проблеме общезначимости формулы*. Точнее было бы говорить не просто об общезначимости, а об общезначимости для каждой области индивидуумов. Тождественные формулы исчисления предикатов, согласно выводам § 10, являются именно теми формулами, которые могут быть выведены из системы аксиомы § 5. Для решения проблемы общезначимости этот факт не может оказать нам помощи, так как мы не имеем никакого общего критерия выводимости формулы.

Формула чистого исчисления предикатов, т. е. формула, в которой нет никаких индивидуальных знаков, называется *выполнимой* в некоторой области индивидуумов, если можно заменить переменные высказывания значениями «истина» и «ложь», переменные предикаты — какими-либо специальными предикатами, определенными в соответствующей области индивидуумов, и свободные предметные переменные — индивидуальными предметами таким образом, чтобы формула перешла в истинное высказывание. Если о некоторой формуле говорят просто, что она выполнима, то при этом имеют в виду, что вообще существует область индивидуумов, в которой имеет место выполнимость. Если формула $\mathfrak{A}$ в какой-нибудь области индивидуумов не общезначима, то, очевидно, $\overline{\mathfrak{A}}$ в соответствующей области выполнима, и наоборот. Аналогично простая общезначимость формулы $\mathfrak{A}$ и выполнимость $\overline{\mathfrak{A}}$ находятся в отношении утверждения и отрицания.

Обе проблемы *общезначимости* и *выполнимости*, эквивалентные друг другу, называют также обычно одним общим именем: *проблемой разрешимости* (Entscheidungsproblem) узкого исчисления предикатов. На основании замечаний, сделанных в § 11, мы вправе считать ее *главной проблемой математической логики*.

Поясним на нескольких примерах понятия общезначимости и выполнимости. Например, общезначимы все формулы, которые мы можем вывести из логических аксиом, в частности, формулы (21) — (36) § 6. Естественно, все общезначимые формулы также выполнимы. Формула

$$(Ex)\,F(x)$$

хотя не общезначима, но выполнима. Ведь достаточно только при произвольно выбранной области индивидуумов взять вместо F предикат: «быть тождественным с самим собой». Такой предикат выполняется не только для одного предмета, но даже для всех предметов. Отсюда следует, что выполнима также формула

$$(x)\,F(x).$$

Далее, выполнима формула

$$(x)\,\overline{F}(x, x)\,\&\,(x)\,(Ey)\,F(x, y).$$

Для ее выполнения достаточно взять в качестве области индивидуумов целые числа, а вместо $F(x, y)$ подставить предикат $x < y$. Невыполнима, например, формула

$$(Ex)\,(y)\,(F(x, x)\,\&\,\overline{F}(x, y)),$$

ибо ее отрицание

$$(x)\,(Ey)\,(\overline{F}(x, x) \vee F(x, y))$$

есть тождественная формула. Действительно, для каждого x существует y требуемого рода, ибо мы можем взять y равным самому x.

Проблеме разрешимости можно также дать еще *более строгую формулировку*. Некоторая формула, вообще выполнимая, не должна еще в силу этого быть выполнимой в каждой области индивидуумов. Например, формула

$$(Ex)(Ey)(F(x) \& \overline{F}(y)),$$

конечно, выполнима. Достаточно только взять в качестве области индивидуумов область, состоящую из 0 и 1, а в качестве подстановки для F — предикат «$x=0$». Существуют тогда x и y такие, что $x=0$ и $y \neq 0$, именно 0 и 1. Однако эта формула невыполнима в области индивидуумов, состоящей из одного единственного элемента, так как предикат не может одновременно для одной и той же вещи выполняться и не выполняться. Точно так же противоположная вышеупомянутой формула

$$(x)(y)(\overline{F}(x) \vee F(y))$$

общезначима, если существует только один предмет в области индивидуумов; в противном же случае — нет.

Если для формулы в некоторой области индивидуумов имеет место выполнимость или общезначимость, то то же самое имеет место и в каждой другой области индивидуумов с тем же количественным (кардинальным) числом их, как это легко получается с помощью взаимно-однозначного отображения областей друг на друга. Поэтому за исключением формул общезначимых (соответственно выполнимых) в любой области индивидуумов, а также формул, ни для какой области не обладающих этим свойством, *постулирование общезначимости* (*соответственно выполнимости*) *некоторой логической формулы является эквивалентным высказыванию о числе индивидуумов*. Проблему разрешимости можно считать решенной в самом широком смысле, если имеется метод, который для каждой данной формулы дает возможность решить вопрос: *для каких областей индивидуумов она общезначима* (*соответственно выполнима*) *и для каких нет?*

Что касается отношения друг к другу обеих формулировок проблемы разрешимости, то уже в § 10 было получено на этот счет одно замечательное предложение.

Если некоторая формула общезначима в счетно-бесконечной области, то она общезначима вообще и, следовательно, является тождественной формулой.

Сформулированное для выполнимости, это предложение гласило бы:

Если некоторая формула вообще выполнима, то выполнимость имеет место и в счетно-бесконечной области индивидуумов.

В качестве (правда, значительно более тривиального) дополнения этого предложения мы имеем далее:

Если некоторая формула выполнима в какой-нибудь области индивидуумов, то она выполнима также в каждой области с бо́льшим числом индивидуумов.

Именно, определение предикатов, выполняющих формулу в некоторой области (I), легко можно так расширить, что выполнимость будет иметь место и в области индивидуумов (I'), которая содержит (I) в качестве своей части. Для этого мы выбираем из области (I) какой-либо элемент α и распространяем определение предикатов на область (I'), рассматривая все элементы из (I'), которые не принадлежат к (I), как тождественные с α. Например, если мы имеем предикат Φ с n пустыми местами, выполняющийся в области (I), то соответствующий предикат Ψ определяется в (I') следующим образом: для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из (I') имеет место:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \Phi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n).$$

При этом $\mathfrak{x}_i$ тождественно с x_i в том случае, когда x_i принадлежит к (I); в противном случае оно равно α. Из способа, каким определены предикаты, получается затем — на чем мы здесь не будем в деталях останавливаться — выполнимость в области (I').

Для случая, когда область индивидуумов содержит определенное конечное число индивидуумов, вопрос об общезначимости (соответственно выполнимости) всегда может быть решен.

В самом деле, в этом случае знаки общности могут быть заменены конечными конъюнкциями высказываний, а знаки существования—конечными дизъюнкциями высказываний, и вопрос об общезначимости (соответственно выполнимости) формулы в данной конечной области сводится к вопросу об общезначимости (соответственно выполнимости) некоторой формулы исчисления высказываний.

Следующий пример сделает это более ясным. Пусть нужно исследовать вопрос о выполнимости формулы

$$(Ex)(y)(F(x, x) \& \overline{F}(x, y))$$

в области, состоящей из двух элементов. Если мы обозначим элементы этой области через 0 и 1, то каждая формула вида $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ в этой области будет равнозначна с $\mathfrak{A}(0) \vee \mathfrak{A}(1)$, а каждая формула вида $(x)\mathfrak{A}(x)$—с $\mathfrak{A}(0) \& \mathfrak{A}(1)$. Поэтому нашу формулу можно заменить сначала формулой:

$$(y)(F(0, 0) \& \overline{F}(0, y)) \vee (y)(F(1, 1) \& \overline{F}(1, y))$$

и затем формулой:

$$(F(0, 0) \& \overline{F}(0, 0) \& F(0, 0) \& \overline{F}(0, 1)) \vee (F(1, 1) \& F(1, 0) \& F(1, 1) \& \overline{F}(1, 1)).$$

После этого вопрос сводится к такой замене $F(0, 0)$, $F(0, 1)$ и т. д. истинными и ложными высказываниями, при которой выражение в целом получило бы значение «истинно». Другими словами, выполнимость формулы в области с двумя элементами сводится к выполнимости формулы исчисления высказываний:

$$(A \& \overline{A} \& A \& \overline{B}) \vee (C \& \overline{D} \& C \& \overline{C}).$$

Из последних предложений вытекает следующее: *Если для данной формулы удается показать, что она вообще может быть выполнена тогда и только тогда, когда имеет место выполнимость в некоторой области с определенным конечным числом k индивидуумов, то проблема выполнимости решена для всех областей индивидуумов.*

Ибо прежде всего можно установить, имеется ли выполнимость в области с k индивидуумами. Если это не имеет места, то формула не выполнима ни в какой области. Если же ее можно выполнить в этой области, то это можно сделать и во всех областях с бо́льшим числом индивидуумов. Нам остается в таком случае исследовать еще только выполнимость в областях с $1, 2, \ldots, k-1$ элементами, которую также можно установить.

Отметим тут же, что таким образом нельзя достичь общего решения проблемы разрешимости. *Именно, существуют формулы, которые не выполнимы ни в какой конечной области индивидуумов, но выполнимы в области с бесконечным числом элементов.* К числу таких формул принадлежит, например:

$$(x)(Ey)F(x, y) \& (x)\overline{F}(x, x) \& (x)(y)(z)((F(x, y) \& F(y, z) \rightarrow F(x, z)).$$

Эта формула выполняется, например, в области натуральных чисел предикатом $x < y$. Напротив, допущение выполнимости в области с конечным числом индивидуумов сразу же приводит к противоречию. Допустим, что Φ — выполняющий предикат. В силу истинности $(x)(Ey)\Phi(x, y)$ в таком случае существовала бы сколь угодно продолжаемая цепь элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что всегда имеет место $\Phi(a_i, a_{i+1})$. Но в силу предположенной конечности области индивидуумов, при этом существовали бы i и k $(k > i)$ такие, что a_i и a_k означают один и тот же элемент. Из

$$(x)(y)(z)(\Phi(x, y) \& \Phi(y, z) \rightarrow \Phi(x, z))$$

мы получили бы тогда $\overline{\Phi}(a_i, a_i)$, между тем как должно быть $(x)\overline{\Phi}(x, x)$.

В то время как проблема разрешимости в исчислении высказываний легко решалась, например, путем использования конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной формы (ср. гл. I, § 6, а также гл. I, § 8), проблема разрешимости в исчислении предикатов представляет собой очень трудную и в целом отнюдь не решенную проблему. Определенные причины, на которых мы подробнее остановимся ниже, заставляют даже считать безнадежными попытки ее полного решения. Но ввиду центрального значения проблемы большой интерес представляют попытки дать решение хотя бы для возможно более широких классов формул. Излагаем важнейшие результаты, полученные в этом направлении.

Во всех дальнейших рассмотрениях мы считаем, что все формулы, которыми мы оперируем, не содержат уже никаких свободных предметных переменных. Прежде чем приступить к рассмотрению частных случаев решения проблемы разрешимости, остановимся на некоторых предложениях общего характера, которые находятся в связи с проблемой разрешимости. Некоторые из этих предложений мы отметили уже в § 8; именно, предложения о *предваренной нормальной форме* и *нормальной форме Сколема*. Они имеют то преимущество, что при рассмотрениях вопросов общезначимости или выполнимости формул последние можно представить в специальной нормированной или редуцированной форме без ущерба для общности рассмотрений. Поэтому говорят также *о предложениях редукции*. Например, предложение Сколема утверждает (если мы сформулируем его здесь для выполнимости), что для каждой данной формулы исчисления предикатов можно указать другую с приставкой в форме

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n),$$

которая относительно выполнимости равнозначна первой. Мы можем поэтому при решении проблемы выполнимости ограничиться формулами, приставки которых имеют указанную форму.

Дальнейшие предложения этого рода относятся или также к редуцированию формул к таковым с определенными приставками, или к редуцированию числа аргументов у имеющихся предикатных переменных и т. д. Из многочисленных результатов в этом направлении мы упомянем только следующие.

Для каждой формулы можно указать равнозначную ей в отношении выполнимости, в которой встречаются только одноместные и двуместные предикатные переменные[1]. Можно, далее, ограничиться даже такими формулами, в которых встречается только один единственный двуместный переменный предикат и, кроме того, приставка имеет форму[2]:

$$(Ex_1)\ldots(Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez)(u_1)\ldots(u_n).$$

При решении проблемы выполнимости можно, далее, ограничиться формулами, приставки которых имеют форму[3]:

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)\ldots(Ey_n).$$

Наконец, при решении проблемы выполнимости достаточно рассмотреть формулы, приставки которых имеют форму[4]:

$$(Ex)(y)(Ez)(u_1)\ldots(u_n).$$

Интересующихся доказательством этих предложений отошлем к цитированным оригинальным работам[5].

---

[1] *Löwenheim, L.*, Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. An. Bd. 76 (1915).

[2] *Kalmar, L.*, Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. Comp. Math. Bd. 4 (1936).

[3] *Gödel, K.*, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Physik. Bd. 40 (1933).

[4] *Ackermann, W.*, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 112 (1936).

[5] Дальнейшие предложения редукции находим в работах: *Pepis, J.*, Beiträge zur Reductionstheorie des logischen Entscheidungsproblems. Acta Lit. Szeged. Bd. 8 (1936); *Skolem, Th.*, Einige Reductionen des Entscheidungsproblems. Avh. Vid. Akad. Oslo, I. Mat.-nat. Klasse, 1936, Nr. 6.

Расскажем теперь о важнейших частных случаях, в которых удалось решить проблему разрешимости. Эти частные случаи образуют некоторую параллель с вышеупомянутыми предложениями редуцируемости. Предложению, что для каждой формулы исчисления предикатов можно указать равнозначную в отношении выполнимости, в которой встречаются только одноместные и двуместные предикатные переменные, соответствует предложение, что проблема решена *для области формул, которые содержат только одноместные предикатные переменные*. Точно так же предложениям, которые по отношению к проблеме разрешимости предпринимают редукцию формул к таковым с определенными приставками, соответствует тот факт, что для определенных классов приставок удалось также достигнуть решения проблемы разрешимости. Принципиальную возможность решения в области одноместных предикатов установил впервые Лёвенгейм[1]. Более простые доказательства были предложены Сколемом[2] и Беманом[3]. Указанные доказательства по своему значению выходят за пределы области узкого исчисления предикатов, так как они решают проблему разрешимости, поскольку встречаются только одноместные предикаты, и для исчисления предикатов второй ступени, которое подлежит рассмотрению в четвертой главе, где мы и возвратимся к этому.

В следующих рассуждениях нам удобнее иметь дело с проблемой общезначимости. Мы можем убедиться в разрешимости формул узкого исчисления

[1] *Löwenheim, L.*, Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. An. Bd. 76 (1915).

[2] *Skolem, Th.*, Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktation- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Vid. Skrifter I. Mat.-nat. Klasse, 1919, Nr. 3.

[3] *Behmann, H.*, Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. Bd. 86 (1922).

Особенно ясное изложение исчисления одноместных предикатов мы находим в книге: *Hilbert—Bernays*, Grundlagen der Mathematik I (ср. особенно § 5, стр. 194—195).

предикатов, которые содержат только одноместные переменные предикаты, следующим элементарным путем. Пусть дана некоторая формула из указанной области.

Пусть k — число различных предикатных знаков $A, B, \ldots, K$, встречающихся в рассматриваемой формуле. Мы утверждаем: *если формула общезначима во всех случаях, когда область индивидуумов состоит самое большее из 2^k предметов, то она вообще общезначима.*

Для доказательства мы допустим, что рассматриваемая формула для некоторой системы индивидуумов, большей, чем 2^k, при замене переменных предикатов $A, B, \ldots, K$ определенными предикатами $A_0, B_0, \ldots, K_0$, выражает ложное высказывание. В таком случае мы выведем из этого высказывания другое ложное высказывание, которое также получается путем специализации рассматриваемой формулы и относится самое большее к системе 2^k индивидуумов.

Мы подразделим предметы, к которым относится данное ложное высказывание (с предикатами $A_0, B_0, \ldots, K_0$), на классы, причисляя два предмета a, b к одному и тому же классу, если высказывания

$$A_0(a),\ B_0(a),\ \ldots,\ K_0(a)$$

равнозначны соответственно с

$$A_0(b),\ B_0(b),\ \ldots,\ K_0(b),$$

т. е.

$$\begin{gathered} A_0(a) \text{ равнозначно с } A_0(b), \\ B_0(a) \text{ равнозначно с } B_0(b), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_0(a) \text{ равнозначно с } K_0(b). \end{gathered}$$

В результате мы получим самое большее 2^k классов. В самом деле, для предмета a выражение $A_0(a)$ может быть только истинным или ложным; то же самое и для $B_0(a)$ и т. д. В целом существует, следовательно, только 2^k возможностей для распределения истинности или ложности среди высказываний

$$A_0(a),\ B_0(a), \ldots, K_0(a),$$

и если для двух предметов это распределение совпадает, то они принадлежат к одному классу.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ различные классы, которые мы таким образом получаем, причем, как указано, $n \leqq 2^k$. Возьмем теперь совокупность классов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ в качестве новой системы предметов. По отношению к этим предметам определим k предикатов $A_1, B_1, \ldots, K_1$ следующим образом: A_1 выполняется для класса α_ρ $(\rho = 1, \ldots, n)$ тогда и только тогда, когда A_0 выполняется для предметов, принадлежащих первоначально к α_ρ. Соответственно определяются $B_1, \ldots, K_1$.

Если затем в произвольном высказывании, образованном с помощью логических знаков из предикатов $A_0, B_0, \ldots, K_0$, заменим A_0 на A_1, B_0 на $B_1, \ldots, K_0$ на K_1, возьмем в качестве значений переменных вместо первоначальных предметов классы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и заменим каждый определенный предмет, встречающийся в данном случае в высказывании, классом, к которому он принадлежит, то высказывание переходит в равнозначное с ним.

Истинность этого утверждения непосредственно очевидна, если соответствующее высказывание не содержит знаков общности и существования. Для общего доказательства представим себе высказывание записанным в нормальной форме и от истинности нашего утверждения для m стоящих впереди кванторов заключим к истинности его для $m+1$ кванторов.

Из этого предложения, в частности, следует, что то ложное высказывание, которое, согласно нашему предположению, возникает из данной формулы после замены переменных предикатов $A, B, \ldots, K$ предикатами $A_0, B_0, \ldots, K_0$, снова переходит в ложное высказывание, если мы заменим предикаты $A_0, B_0, \ldots, K_0$ на $A_1, B_1, \ldots, K_1$ и возьмем в качестве значений переменных классы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Поэтому достаточно решить вопрос о всегда-истинности только для случая, когда имеется самое большее 2^k предметов, т. е. число их конечно. В этом же случае, как мы видели, проблема разрешимости решается конечным приемом.

Если мы теперь снова рассмотрим формулы, в которых встречаются произвольные переменные предикаты, то можем легко указать разрешающий прием для общезначимости формул, у которых *приставка состоит только из знаков общности или только из знаков существования, или у которых все знаки общности предшествуют всем знакам существования.*

Прежде всего рассмотрим формулу первого рода, т. е. формулу вида

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

у которой $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ больше не содержит знаков общности или существования. *Эта формула тогда и только тогда общезначима, когда она общезначима в области, содержащей m индивидуумов.*

В самом деле, если бы в некоторой области с числом индивидуумов, превосходящим m, формула не была общезначимой, то в этой области существовали бы элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и специальные предикаты такие, что выражение

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

представляло бы собой ложную формулу. Однако в этом случае, как непосредственно видно, не было бы общезначимости в области $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Формула

$$(Ex_1)\ldots(Ex_m)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m),$$

у которой приставка состоит только из знаков существования, общезначима, если имеется общезначимость в области только с одним индивидуумом.

Действительно, если вышеупомянутая формула не общезначима, то, во всяком случае, не общезначима и формула

$$(Ex)\mathfrak{A}(x, x, \ldots, x),$$

которая ведь представляет собой более сильное утверждение. Таким образом, существует в некоторой области элемент a и специальные предикаты такие, что $\mathfrak{A}(a, \ldots, a)$ превращается в ложную формулу. Мы не имели бы в таком случае общезначимости и в этой области с одним нашим элементом a.

Так же просто можно показать, что формулы

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

у которых все знаки общности идут раньше знаков существования, общезначимы, если имеется общезначимость в области с m индивидуумами. Именно, мы образуем дизъюнкцию всех возможных формул

$$\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}),$$

которые получаются из $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ при какой-нибудь замене $y_1, \ldots, y_n$ переменными из ряда $x_1, \ldots, x_m$. Обозначим эту дизъюнкцию через $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$. Очевидно, для области из m индивидуумов из общезначимости

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

следует общезначимость для

$$(x_1)\ldots(x_m)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m),$$

а значит, и общезначимость

$$(x_1)\ldots(x_m)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$$

вообще. Но так как $(x_1)\ldots(x_m)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$ представляет собой более сильное высказывание, чем

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

то наше утверждение доказано [1].

[1] Последние из упомянутых частных случаев проблемы разрешимости были окончательно решены в работе *Bernays P.* und *Schönfinkel M.* Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 99 (1928).

(Бернайс и Шейнфинкель, К проблеме разрешимости математической логики.)

Из числа других решенных частных случаев проблемы разрешимости, в которых, впрочем, приходят к цели уже не такими простыми средствами, упомянем еще следующий. Для формул, приставка которых имеет форму

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(z_1)\ldots(z_n),$$

также можно решить вопрос об общезначимости [1]. И в этом случае решение вопроса об общезначимости вообще может быть сведено к решению вопроса об общезначимости для определенной конечной области индивидуумов. Однако этими типами приставок исчерпываются случаи, когда таким путем удается решить вопросы об общезначимости. Для всех других приставок можно указать формулы, которые общезначимы во всех областях с конечным числом индивидуумов, однако не общезначимы в области с бесконечно многими индивидуумами [2].

Что касается общего решения проблемы разрешимости, то поиски такового после исследований, которые предпринял Черч, примыкая к работам Геделя, следует рассматривать как безнадежные [3]. На изложе-

[1] Ср. *Gödel, K.*, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls (предварит. изл. в Erg. Wien. math. Koll. Bd. 2 (1932). *Kalmar, L.*, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten. Math. Ann. Bd. 108 (1932). *Schütte, K.*, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 109 (1934).—Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. Math. Ann. Bd. 110 (1934). Для случая, когда вышеупомянутая приставка содержит не два, а только один знак существования, решение получено уже раньше *Аккерманом* и *Сколемом*. Ср. *Ackermann, W.*, Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke. Math. Ann. Bd. 100 (1928); *Skolem, Th.*, Über die mathematische Logik. Norsk. mat. Tidskr. Bd. 10 (1928). Частный случай этого рода был уже рассмотрен в работе, указанной в предыдущем примечании.

[2] Ср. первую из упомянутых в предыдущем примечании работу *K. Schütte*.

[3] *Church, A.*, An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. Bd. 58 (1936). A note on the Entscheidungsproblem, Correction to a note on the Entscheidungsproblem. J. Symb. Logic. Bd. 1 (1936).

нии этих исследований в рамках данной книги мы не можем останавливаться. Отметим только, что общий разрешающий метод должен был бы состоять в некотором рекурсивном приеме для отдельных формул, который каждой формуле относит окончательно значение «истинно» или «ложно». Но существование такого рекурсивного приема отрицается работой Черча; во всяком случае, необходимые рекурсии не подпадают под установленный Черчем общий тип рекурсии, с помощью которого содержательно несколько неопределенное понятие рекурсии получило известное формальное уточнение.

Чтобы избежать недоразумений, следует отметить, что невозможность найти всеобщий разрешающий метод не означает, что можно указать определенные формулы, неразрешимость вопроса об общезначимости которых можно было бы доказать. Предположение существования подобного доказательства немедленно приводит к противоречию. Из такого доказательства получилось бы доказательство того, что эта формула не выводима из системы аксиом § 5. Однако, пользуясь предложением полноты § 10, в таком случае можно было бы доказать выполнимость отрицания этой формулы. Но таким образом вопрос об общезначимости был бы решен и притом в отрицательном смысле. Таким образом, во всяком случае задача расширять область тех формул, для которых решается проблема разрешимости, остается и в дальнейшем ценной и значительной.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

РАСШИРЕННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Исчисление предикатов второй ступени

К первому расширению узкого исчисления предикатов, или, как его еще называют, исчисления предикатов первой ступени, мы приходим, учитывая то обстоятельство, что формализм узкого исчисления явно не завершен. Так, мы можем, правда, выразить, что некоторая формула для всех значений встречающихся в ней переменных предикатов выражает истинное высказывание, но мы не можем выразить утверждение, противоположное этому. В самом деле, если мы поставим черту отрицания над всей формулой, то это будет означать, что формула для всех значений переменных предикатов должна выражать ложное высказывание. Однако возможно, что некоторая формула представляет утверждение, про которое нельзя сказать ни что оно истинно для всех значений переменных предикатов, ни что оно ложно для всех значений переменных предикатов. Например, формула $(x) F(x)$, конечно, ни для какой области индивидуумов не общезначима; но также не является общезначимой и формула $\overline{(x) F(x)}$. Чтобы выразить, что $(x) F(x)$ не общезначима, мы должны были бы располагать знаком существования для предикатов. Вполне естественным представляется поэтому такое расширение исчисления предикатов первой ступени, при котором мы *применяем знаки общности и существования также в связи с переменными высказываниями и переменными предикатами и различаем свободные и связанные переменные подобного рода.*

Понятие логической формулы, сформулированное в § 4, подвергается в таком случае соответствующему расширению. Мы приходим к *исчислению предикатов второй ступени.*

Поясним несколькими примерами получающееся таким образом расширение возможностей выражения. Формула

$$(P)(x)(P(x) \vee \overline{P}(x))$$

высказывает, что $(x)\ (P(x) \vee \overline{P}(x))$ выполняется для каждого предиката P. Формула

$$(A)(F)((x)(A \rightarrow F(x)) \sim (A \rightarrow (x) F(x)))$$

выражает, что отношение между высказываниями и предикатами, определенное через

$$(x)(A \rightarrow F(x)) \sim (A \rightarrow (x) F(x)),$$

выполняется для любых высказываний и предикатов.

Подобного же рода случай возникает при *символической формулировке принципа полной индукции*. Содержание этого принципа можно выразить следующим образом:

«Если некоторый предикат выполняется для числа 1, и если при выполнении предиката каким либо числом он выполняется и непосредственно следующим числом, то этот предикат выполняется каждым числом».

Если мы введем знак $\mathrm{Seq}(x, y)$ для отношения числа к непосредственно следующему, то этот принцип мы можем выразить формулой:

$$\{P(1) \,\&\, (x)(y)[P(x) \,\&\, \mathrm{Seq}(x, y) \rightarrow P(y)]\} \rightarrow (x) P(x),$$

постулируя ее в качестве истинной.

Если мы хотим еще явно выразить самим способом записи, что эта формула должна выполняться для всех предикатов P, то следует перед формулой поставить знак всеобщности (P).

Дальнейший характерный случай представляет собой *определение тождества*. Отношение тождества можно, по определению, свести к основным логическим отношениям, считая x тождественным с y, если каждый предикат, выполняющийся для x, выполняется также для y, и обратно. В смысле этого разъяснения знак тождества $\equiv(x, y)$ можно понимать как

сокращение для выражения

$$(F)(F(x) \sim F(y)).$$

В приведенных случаях употребление знака общности хотя и очень естественно, но все же не неизбежно. Однако существуют случаи, когда употребление знака общности необходимо, если не желать отказаться от важных возможностей выражения.

Если пожелать, например, выразить, что каждый предикат $R(x, y)$, эквивалентный тождеству, обладает свойством симметрии, то приходится записать это следующим образом:

$$(R)\{(x)(y)[R(x, y) \sim (F)(F(x) \sim F(y))] \rightarrow (x)(y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x))\}.$$

Здесь знак общности (F) нельзя отбросить, не изменяя смысла высказывания.

Как уже выше упомянуто, без знака общности нельзя обойтись и когда об определенном выражении нужно сказать, что не для всех значений встречающихся в нем переменных предикатов оно является истинной формулой. Например, чтобы выразить, что $(x)(y) F(x, y)$ не является общезначимой формулой, мы можем применить формулу

$$(\overline{F})(x)(y) F(x, y)$$

или также равнозначную ей

$$(EF)(Ex)(Ey) \overline{F}(x, y).$$

Такое же положение вещей имеет место для многих предложений логики, содержащих утверждения общего характера о высказываниях и предикатах; это применимо, например, к предложению, что для каждого высказывания X существует высказывание Y такого рода, что из обоих высказываний по крайней мере одно, но и только одно, истинно (т. е. к предложению о существовании противоположности для высказывания). В расширенной символике оно получает выражение

$$(X)(EY)(X \vee Y \,\&\, \overline{X \,\&\, Y}).$$

Между тем посредством прежней символики это предложение не могло бы быть передано.

Расширение символики дает нам также возможность формулировать символически такие проблемы и их решения, которые раньше требовали обстоятельного содержательного описания. Я напомню, например, рассуждения, которые мы применили в § 8 главы I. Полученные там результаты можно выразить следующими формулами:

$$(X)(A_1X \& A_2\overline{X}) \sim A_1 \& A_2,$$

$$(EX)(A_1X \& A_2\overline{X}) \sim A_1 \vee A_2.$$

Эти формулы *дают правило, позволяющее заменить выражение, содержащее кванторы для переменных высказываний, эквивалентным выражением, в котором эти кванторы уже не встречаются*. Именно, надо последовательно разворачивать выражение по переменным, принадлежащим самим внутренним кванторам, отбрасывая затем всякий раз эти кванторы по правилу исключения, выраженному в наших формулах. Например, из

$$(X_1)(X_2)(A_1X_1X_2 \& A_2X_1\overline{X}_2 \& A_3\overline{X}_1X_2 \& A_4\overline{X}_1\overline{X}_2)$$

получаем, прежде всего, исключением квантора (X_2)

$$(X_1)((A_1 \& A_2)X_1 \& (A_3 \& A_4)\overline{X}_1))$$

и дальше

$$A_1 \& A_2 \& A_3 \& A_4.$$

Это *правило исключения*, которое мы теперь можем сформулировать символически, дает нам возможность решать вопрос об истинности (соответственно ложности) формул, в которых содержатся только переменные высказывания и принадлежащие им кванторы. Например, в вышеупомянутой формуле

$$(X)(EY)(XY \& \overline{X \& Y})$$

мы прежде всего развертываем выражение $XY \& \overline{X \& Y}$ по Y. Получим

$$(X)(EY)(XY \& \overline{X}Y).$$

Исключение самого внутреннего квантора дает

$$(X)(X\overline{X}).$$

Но выражение $X\overline{X}$ является общезначимым, поэтому формула $(X)(EY)(XY \& \overline{X \& Y})$ истинна.

Проблема разрешимости для узкого исчисления предикатов в обоих ее пониманиях получает теперь свою символическую формулировку. Например, общезначимости (соответственно выполнимости) формулы

$$(Ex)(y)(F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee G(x, y))$$

в некоторой области индивидуумов соответствует в расширенном исчислении справедливость формулы

$$(F)(G)(Ex)(y)(F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee G(x, y)),$$

соответственно формулы:

$$(EF)(EG)(Ex)(y)(F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee G(x, y))$$

для этой области.

При интерпретации логических формул мы всегда можем положить в основу формулы, не содержащие вообще никаких свободных переменных. Действительно, в каждой формуле со свободными переменными можно устранить последние, поставив впереди формулы соответствующие знаки общности. Поэтому в исчислении второй ступени не может быть и речи об общезначимости или выполнимости формул в прежнем смысле. Все же при помощи одной только символики смысл формул еще не устанавливается однозначно, так как мы еще не знаем, какая область индивидуумов должна быть положена в основу. Например, формула

$$(EF)(Ex)(Ey)(F(x) \& \overline{F}(y))$$

выражает ложное высказывание, если область индивидуумов состоит только из одного элемента; во всех же остальных случаях она представляет истинное высказывание.

По

будем

вольно

истин

также

общез

дуумов

те фор

индиви

выраж

некото

выполн

цания.

К т

ственн

а такж

как и

для пр

являют

являют

(EF)

К в

мулы,

узкого

соответ

тов; од

купнос

также

Есте

ли и зд

нии пр

гически

тождест

последо

емы аксиом для тож

едикатов второй сту-

как показал К. Гедель,

мул и правил вывода

формулы, которые

же для большинства

ать достаточной сле-

е основные формулы

исления предикатов,

вывода нужно иметь

теперь расширено.

можем присоединить

вида

(G).

которая содержит сво-

и не содержит G;

ается из $\mathfrak{A}(F)$, если

вместо F в формулу

ть в качестве основ-

(F).

це основные формулы,

юмой выбора теории

ул есть

$y) \ (F\ (x,y)\ \&\ G(X,Y)]$

$z) \rightarrow \equiv (y, z)]\}$.

ся в следующем. Пре-

х вообще существует

одит в соответствие

основная формула

можно выбрать одно

idbare Sätze der Principia

Mh. Math. Physik. Bd. 38

из приведенных ему в соответствие значений таким образом, что соответствие будет однозначным. F выражает такое однозначное соответствие.

Пусть, далее, $\mathfrak{A}(x, F(\cdot, \ldots))$ — формула, содержащая свободное предметное переменное x и свободный переменный предикат F с n пустыми местами. Пусть $\mathfrak{A}(x, G(x, \ldots))$ означает формулу, которая получается из $\mathfrak{A}(x, F(\ldots))$ в результате замены, по правилу $\alpha 3$), каждой части $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ нашего выражения на $G(x, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, причем G обозначает переменную с $n+1$ пустыми местами. Тогда мы можем принять в качестве основной и формулу

$$\mathfrak{h}) \qquad (x)(EF)\mathfrak{A}(x, F(\ldots)) \rightarrow (EG)(x)\mathfrak{A}(x, G(x, \ldots)).$$

Истинность этой формулы мы можем усмотреть следующим образом. Если для каждого x существует F такое, что выполняется $\mathfrak{A}(x, F(\ldots))$, то мы можем для каждого x выбрать одно из этих F, которое мы обозначим F^x. Если мы теперь определим G так, что выполняется

$$(x)(y_1)(y_2)\ldots(y_n)(G(x, y_1, \ldots, y_n) \sim F^x(y_1, \ldots, y_n)),$$

то получим G вида, постулированного основной формулой $\mathfrak{h}$).

Правила вывода остаются теми же самыми, что и правила узкого исчисления предикатов; только теперь правила $\gamma 1$), $\gamma 2$), δ) следует так расширить, чтобы они относились также и к переменным предикатам.

Из этой системы получается (на чем мы здесь не будем подробно останавливаться), что результаты, которые мы прежде вывели для узкого исчисления предикатов, могут быть, в соответствии со смыслом, распространены и на новые формулы. Например, предложение о предваренной нормальной форме, принцип двойственности, предложение об образовании противоположности для формулы остаются и теперь истинными. Точно так же каждой формуле узкого исчисления предикатов, которая содержит индивиду-

альные переменные, можно привести в соответствие класс формул, в которых содержатся переменные предикаты. Например, тому факту, что

$$(x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow ((Ex)F(x) \rightarrow (Ex)G(x))$$

[формула (34)] была выводимой формулой, теперь соответствует выводимость каждой формулы вида

$$(F)(\mathfrak{A}(F) \rightarrow \mathfrak{B}(F)) \rightarrow ((EF)\mathfrak{A}(F) \rightarrow (EF)\mathfrak{B}(F)).$$

Для вывода достаточно только повторить, с соответствующим видоизменением, доказательство формулы (34). То же самое относится и ко всем другим формулам узкого исчисления предикатов.

Под *проблемой разрешимости* второй ступени мы понимаем проблему: для данной формулы исчисления решить вопрос, представляет ли она тождественную формулу или нет. При более строгой формулировке следовало бы решить, для каких областей индивидуумов формула выражает истинное высказывание и для каких нет. Так как проблема разрешимости второй ступени включает в себя такую же проблему первой ступени, то не приходится и думать об общем решении проблемы разрешимости второй ступени.

Единственный важный частный результат заключается в том (если не говорить о случаях, которые относятся к области узкого исчисления предикатов и были там решены), что решение удалось провести полностью для области формул, которые содержат только *одноместные* предикаты. Доказательство этого приведено в работах *Лёвенгейма*, *Сколема* и *Бемана*, упомянутых уже в § 12 предыдущей главы. При этом решение проблемы разрешимости получено в строгом смысле. Что касается подробного изложения разрешающего алгоритма, мы укажем на особенно ясно построенную работу Бемана. Здесь же ограничимся краткой характеристикой использованного метода. Решение проблемы разрешимости в области одноместных предикатов основано на решении *проблемы исключения* для этой области. Под проблемой исключения мы понимаем вообще следующее. Пусть дана формула $\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$, которая, кроме свободных переменных предикатов $F, G_1, \ldots, G_m$ и кроме свободных индивидуальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, содержит еще, быть может, связанные индивидуальные переменные, но не содержит связанных переменных предикатов. Мы спрашиваем, нельзя ли указать формулу $\mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$, также не содержащую связанных переменных предикатов, такую что

$$(F)\,\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \sim \mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

или, что означает то же самое:

$$(EF)\,\overline{\mathfrak{A}}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \sim \overline{\mathfrak{B}}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

является тождественной формулой второй ступени. Если это имеет место, то в каждой формуле можно составную часть:

$$(F)\,\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k),$$

соответственно

$$(EF)\,\overline{\mathfrak{A}}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots x_k).$$

заменять на $\mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$, соответственно на $\overline{\mathfrak{B}}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$. Таким образом, мы можем переменный предикат F исключить из подобного рода формулы.

Отношение этого к проблеме разрешимости вполне понятно. Если я имею формулу исчисления предикатов, для которой мне нужно найти решение, то я, прежде всего, уничтожаю свободные переменные предикаты, помещая в начале формулы соответствующие знаки общности, и могу затем, если предположить проблему исключения решенной, исключить переменные предикаты один за другим, начиная с внутреннего, так что в качестве окончательного результата я получаю либо значение «истинно» или «ложно», либо же наложенное на область индивидуумов числовое условие.

Редуцирование формул путем исключения станет понятнее на примере формулы

$$(F)\{(Ex)\,F(x) \vee (EG)\,[(x)\,(G(x) \sim \overline{F}(x))\ \&\ (x)\,G(x)]\}.$$

Прежде всего мы замечаем, что формула

$$(EF)\,(x)\,(A(x) \vee F(x)\ \&\ B(x) \vee \overline{F}(x)) \sim (x)\,(A(x) \vee B(x)),$$

содержащая один из основных результатов, относящихся к исключению, является тождественной формулой, так как левую часть этой эквивалентности можно преобразовать в

$$(EF)\,(x)\,\{(\overline{F}(x) \rightarrow A(x))\ \&\ (F(x) \rightarrow B(x))\}.$$

Используя эту формулу, мы можем в нашей исходной формуле исключить переменный предикат G. Именно, мы можем составную часть формулы, образующую область действия для (EG),

$$(x)\,(G(x) \sim \overline{F}(x))\ \&\ (x)\,G(x)$$

[формула (29), гл. I, § 2; формула 30, гл. III, § 6], заменить на

$$(x)\,(G(x) \vee F(x)\ \&\ \overline{G}(x) \vee \overline{F}(x)\ \&\ G(x))$$

или же на

$$(x)\,(G(x)\ \&\ \overline{F}(x) \vee \overline{G}(x))$$

и дальше на

$$(x)\,[(F(x)\ \&\ \overline{F}(x)) \vee G(x)\ \&\ \overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)].$$

Согласно вышеупомянутой основной формуле исключения, имеем

$$(EG)\,(x)\,[(F(x)\ \&\ \overline{F}(x)) \vee G(x)\ \&\ \overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)] \sim (x)\,[(F(x)\ \&\ \overline{F}(x)) \vee \overline{F}(x)].$$

Выражение

$$(x)\,[(F(x)\ \&\ \overline{F}(x)) \vee \overline{F}(x)]$$

в последней формуле можно заменить на $(x)\overline{F}(x)$. Таким образом, наша исходная формула

$$(F)\{(Ex)F(x) \lor (EG)[(x)(G(x) \sim \overline{F}(x)) \& (x)G(x)]\}$$

после исключения переменного предиката G переходит в

$$(F)\{(Ex)F(x) \lor (x)\overline{F}(x)\}.$$

Из этой формулы, у которой область действия квантора (F) имеет форму $\mathfrak{A} \lor \overline{\mathfrak{A}}$, непосредственно видно, что наша исходная формула является тождественной.

Выше мы уже отметили, что при наличии лишь одноместных предикатов проблему разрешимости можно полностью решить. Так как метод исключения является единственным методом более общего значения из применяющихся к проблеме разрешимости, то естественно сделать попытку отыскать способ исключения, применимый и при допущении дву- и многоместных предикатов. Для некоторых формул специальной структуры действительно удается осуществить такое исключение. Многочисленные частные результаты такого рода мы находим в III томе «Лекций по алгебре логики» Шредера (*Ernst Schröder*. «Vorlesungen über die Algebra der Logik»). Но, к сожалению, оказалось, что можно указать формулы, для которых уже не существует результата исключения в определенном выше смысле; таким образом, проблема исключения вообще должна получить более общую формулировку[1]. Отношения к проблеме разрешимости становятся тогда более запутанными.

§ 2. Введение предикатов от предикатов. Логическая трактовка понятия количества

Для содержательной установки, которую мы до сих пор клали в основу логического исчисления предикатов, было существенным, что мы строго отделяли высказывания и предикаты от предметов, рассматриваемых как значения аргументов для предикатов. Однако ничто нам теперь не препятствует рассматривать *сами предикаты и высказывания как предметы, которые служат аргументами предикатов.*

[1] Ср. *Ackerman, W.* Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 110 (1934). Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 111 (1935).

Рассмотрим, например, логическое выражение вида $(x)(A \to F(x))$. Его можно понимать как предикат $P(A, F)$, первое пустое место которого занято высказыванием A, а второе пустое место — одноместным предикатом F.

Ложное высказывание A находится к каждому F в отношении $P(A, F)$; истинное высказывание только к таким F, для которых $(x)F(x)$ имеет место.

Другими примерами служат свойства *рефлексивности, симметричности и транзитивности* двуместных предикатов. Этим свойствам соответствуют три предиката: $\mathrm{Ref}(R)$, $\mathrm{Sym}(R)$ и $\mathrm{Tr}(R)$, аргументом R которых является предикат с двумя пустыми местами. Символически эти три свойства выражаются следующим образом:

$$\mathrm{Ref}\ (R): (x)R(x, x),$$
$$\mathrm{Sym}(R): (x)(y)(R(x, y) \to R(y, x)),$$
$$\mathrm{Tr}\ (R): (x)(y)(z)(R(x, y) \& R(y, z) \to R(x, z)).$$

Предикат $\equiv(x, y)$ (x тождественно с y) обладает всеми тремя свойствами; предикат же $<(x, y)$ обладает только свойством транзитивности. Таким образом, формулы $\mathrm{Ref}(\equiv)$, $\mathrm{Sym}(\equiv)$, $\mathrm{Tr}(\equiv)$, $\mathrm{Tr}(<)$ представляют истинные высказывания, а формулы $\mathrm{Ref}(<)$ и $\mathrm{Sym}(<)$ — ложные высказывания.

Двуместным предикатом предикатов является *«эквивалентность»* $\mathrm{Aeq}(F, G)$, которая определяется выражением $(x)(F(x) \sim G(x))$; она состоит в том, что предикаты F и G истинны (соответственно ложны) для одних и тех же значений аргументов. Другими двуместными предикатами предикатов являются: *несовместимость* $\mathrm{Unv}\ (F, G)$ и *импликация* $\mathrm{Imp}\ (F, G)$, которые символически определяются через:

$$(x)(F(x) \vee \bar{G}(x)),$$

$$(x)(F(x) \rightarrow G(x)).$$

При таком понимании мы, правда, еще не получаем расширения символики, так как приведенные предикаты предикатов могут быть выражены средствами предшествующего исчисления, и такие формулы, как Ref (R), Sym (R) и т. д., следует понимать лишь как сокращения. Расширение наступает лишь тогда, когда вводятся переменные для предикатов от предикатов, частными значениями которых являются приведенные индивидуальные предикаты.

В дальнейшем подобные переменные мы будем применять сначала только в отдельных случаях, так как систематическое построение вновь расширенного исчисления будет осуществлено несколько дальше. Однако уже в этом и в следующем параграфе мы увидим, какие преимущества связаны с введением предикатов от предикатов.

Первое важное применение получается при логическом исследовании понятия количества. Количество не есть предмет в собственном смысле слова; оно является свойством. Индивидуумами, которым некоторое количественное число присуще как их свойство, не могут быть сами пересчитываемые вещи, так как каждая вещь только одна, так что число, отличное от единицы, вообще не могло бы встретиться. Наоборот, число можно понимать как свойство того понятия, под которое подпадают выбранные индивидуумы. Например, тот факт, что число частей света пять, выражается ведь не так: каждой части света присуще число пять; но свойством предиката «быть частью света» является то, что он выполняется точно для пяти индивидуумов.

Согласно этому, числа выступают в качестве свойств предикатов, и для нашего исчисления *определенное число представляет собой индивидуальный предикат от предикатов*. Значение этого способа выражения чисел основано на том, что предикаты от предикатов, которые образуют числа, могут быть полностью выражены при помощи логической символики. Вследствие этого становится возможным учение о числах включить в логику. Для чисел 0, 1, 2 и т. д., т. е. для предикатов от предикатов $0(F)$, $1(F)$, $2(F)$, приведем здесь их выражения:

$$0(F):\overline{(Ex)}\,F(x).$$

(«Не существует x, для которого выполнялось бы F».)

$$1(F):(Ex)[F(x)\,\&\,(y)(F(y)\rightarrow\equiv(x,y))].$$

(«Существует x, для которого выполняется $F(x)$, и каждое y, которое удовлетворяет $F(y)$, тождественно с этим x».)

$$2(F):(Ex)(Ey)\{\overline{\equiv}(x,y)\,\&\,F(x)\,\&\,F(y)\,\&\,(z)[F(z)\rightarrow \equiv(x,z)\vee\equiv(y,z)]\}.$$

(«Существуют два различных x и y, для которых выполняется F, и каждое z, которое удовлетворяет $F(z)$, тождественно с x или с y».)

Равночисленность двух предикатов F и G можно понимать как индивидуальный предикат от предикатов Glz (F, G). Так как равночисленность F и G означает, что предметы, подпадающие под F, и предметы, подпадающие под G, могут быть взаимно-однозначно отнесены друг к другу, то Glz (F, G) можно определить следующим выражением:

$$(ER)\{(x)[F(x)\rightarrow(Ey)(R(x,y)\,\&\,G(y))]\,\&\,(y)[G(y)\rightarrow (Ex)(R(x,y)\,\&\,F(x))]\,\&\,(x)(y)(z)[(R(x,y)\,\&\,R(x,z)\rightarrow \equiv(y,z)\,\&\,(R(x,z)\,\&\,R(y,z)\rightarrow\equiv(x,y))]\}.$$

Сложение чисел можно свести к дизъюнкции предикатов. Именно, если F и G несовместные предикаты и предикату F принадлежит число m, а предикату G — число n, то предикату $F\vee G$ соответствует число $m+n$.

При таком понимании сложения числовые равенства, вроде

$$1+1=2, \quad 2+3=5,$$

становятся чисто логическими, доказуемыми предложениями. Например, равенство $1+1=2$ выражается чисто логической формулой:

$$(F)(G)([\mathrm{Unv}(F, G) \& 1(F) \& 1(G)] \rightarrow 2(F \vee G));$$

ее тождественный характер становится очевидным, если вместо предиката от предикатов Unv и вместо предикатов от предикатов 1, 2 подставить определяющие их выражения.

С помощью логических вспомогательных средств можно установить и общее понятие числа. Если некоторый предикат от предикатов $\Phi(F)$ должен представлять число, то Φ должно удовлетворять следующим условиям.

Для двух равночисленных предикатов F и G предикат Φ должен одновременно для обоих выполняться или не выполняться. Далее, если два предиката F и G не равночисленны, то Φ может выполняться, самое большее, для одного из этих двух предикатов.

Формально это условие для Φ выражается следующим образом:

$$(F)(G)\{(\Phi(F) \& \Phi(G) \rightarrow \mathrm{Glz}(F, G)) \& [\Phi(F) \& \mathrm{Glz}(F, G) \rightarrow \Phi(G)]\}.$$

Это выражение в целом представляет некоторое свойство предиката от предикатов Φ. Если мы обозначим его сокращенно через $\mathfrak{Z}(\Phi)$, то можем, таким образом, сказать:

Число есть предикат от предикатов Φ, обладающий свойством $\mathfrak{Z}(\Phi)$.

Тут возникает все же трудность, когда мы ставим вопрос об условии, при котором два предиката от предикатов Φ и Ψ, со свойствами $\mathfrak{Z}(\Phi)$ и $\mathfrak{Z}(\Psi)$, определяют одно и то же число. Это условие состоит в том, что $\Phi(P)$ и $\Psi(P)$ для одних и тех же предикатов P истинны и для одних и тех же предикатов ложны, т. е. что имеет место соотношение:

$$(P)(\Phi(P) \sim \Psi(P)).$$

Допустим теперь, что положенная в основу область индивидуумов состоит из конечного числа предметов. Тогда возникает затруднение: все числа, которые больше количества предметов в области индивидуумов, оказываются равными. Например, если это количество меньше 10^{60} и мы возьмем для Φ и Ψ предикаты, которые определяют числа 10^{60} и $10^{60}+1$, то как Ψ, так и Φ не выполняются ни для одного предиката P. Таким образом, соотношение

$$(P)(\Phi(P) \sim \Psi(P))$$

выполнялось бы для Φ и Ψ, т. е. Φ и Ψ выражали бы одно и то же число.

Чтобы устранить это затруднение, необходимо предположить, что область индивидуумов бесконечна. От логического доказательства существования бесконечной совокупности при этом, конечно, отказываемся.

Особенно интересно также, что если положить в основу логическое введение понятия количественного числа, то — при существенном, правда, использовании отмеченной аксиомы бесконечности — теоретико-числовые аксиомы превращаются в логические, доказуемые предложения. Однако мы не можем ближе касаться здесь этого вопроса[1]. Сделанные замечания должны были только правильно осветить нам возможности применения расширенного исчисления.

§ 3. Выражение основных понятий теории множеств в расширенном исчислении

Что между теорией множеств и математической логикой существует тесная связь, уже было обнару-

[1] Подробное и общепонятное изложение этих вопросов см. в книге:

Russell B., Einführung in die mathematische Philosophie. München, 1922.

жено во второй главе. Одни и те же логические формулы по произволу можно было истолковать как отношения между классами или как отношения между одноместными предикатами, причем в обоих истолкованиях речь шла об одних и тех же логических связях. И теперь можно будет понимать выразимые в нашем исчислении логические связи как теоретико-множественные отношения.

Чтобы лучше выяснить эту связь, мы прежде всего рассмотрим ближе отношение множеств к предикатам в узком смысле, т. е. к предикатам с одним пустым местом. Множество либо задается путем перечисления его элементов, либо определяется как система вещей, для которых выполняется определенный предикат. Первый способ определения множества, который возможен только для конечных множеств, не требует, собственно, особого рассмотрения. Действительно, каждое множество, которое получается путем перечисления его элементов, можно определить и с помощью некоторого предиката. Например, множество, состоящее из трех индивидуумов a, b, c, можно задать как множество тех вещей x, для которых выполняется предикат:

$$\equiv(x, a) \vee \equiv(x, b) \vee \equiv(x, c).$$

Мы представляем себе поэтому каждое множество определенным с помощью предиката. При этом мы должны иметь в виду, что хотя каждый предикат однозначно определяет соответствующее ему множество, т. е. множество тех предметов, которым он принадлежит, однако определенному множеству принадлежит не *один* только определяющий предикат; напротив, множество может быть определено различными способами при помощи предикатов. Так, множество равносторонних треугольников является тем же самым, что и множество равноугольных треугольников; или, беря нематематический пример, множество живущих в настоящее время жвачных животных совпадает с множеством живущих в настоящее время парнокопытных.

Чтобы два предиката P и Q определяли одно и то же множество, необходимо и достаточно, чтобы эти предикаты были эквивалентными, иначе говоря, чтобы они удовлетворяли соотношению $\mathrm{Aeq}(P, Q)$, т. е. $(x)(P(x) \sim Q(x))$. В смысле теории множеств предикат от предикатов $\mathrm{Aeq}(P, Q)$ есть, следовательно, не что иное, как тождественность P и Q.

Точно так же, как предикаты понимаются в качестве множеств, можно истолковать одноместный предикат от предикатов $F(P)$ как свойство множеств. Чтобы это истолкование было возможно, необходимо, чтобы выполнимость или невыполнимость F для предиката P однозначно определялась принадлежащим P множеством; а по сделанному выше замечанию, решающее условие для этого заключается в том, чтобы высказывания, которые приводятся в соответствие эквивалентным предикатам при помощи предиката F, были одновременно истинны или одновременно ложны. Таким образом, для предиката F должно выполняться символическое соотношение

$$(P)(Q)\{\mathrm{Aeq}(P, Q) \rightarrow (F(P) \rightarrow F(Q))\},$$

которое мы обозначим сокращенно в виде $\mathfrak{W}(F)$.

Это условие выполняется, например, для предикатов от предикатов, которые представляют числа. На этом свойстве чисел основано то, что они могут также рассматриваться как предикаты от множеств. Представление чисел как свойств множеств, в сравнении с представлением их как свойств предикатов, имеет то преимущество, что неизменность количественного числа при замене предиката эквивалентным здесь само собой разумеется.

Из соотношения между множествами и предикатами получается, далее, связь между множествами множеств и предикатами от предикатов. Каждое множество множеств определяется свойством, которое присуще принадлежащим ему множествам.

Возьмем теперь два предиката от множеств, т. е. два предиката от предикатов $F(P)$ и $G(P)$, которые удовлетворяют условиям $\mathfrak{B}(F)$ и $\mathfrak{B}(G)$. Этим двум предикатам от множеств, F и G, соответствует одно и то же множество множеств, если F и G для одних и тех же множеств выполняются (соответственно не выполняются). Таким образом, соотношение $(P)(F(P) \sim G(P))$ означает, что множества множеств, соответствующие F и G, тождественны.

Теоретико-множественную интерпретацию расширенного исчисления можно распространить также на предикаты с несколькими пустыми местами. Каждый предикат $R(x, y)$ выделяет из множества всех возможных пар (x, y) определенное множество упорядоченных пар, именно, множество тех пар (x, y), для которых выполняется $R(x, y)$. Множества, принадлежащие двум предикатам R_1 и R_2, тождественны, если выполняется соотношение $\mathrm{Aeq}(R_1, R_2)$, т. е. $(x)(y)(R_1(x, y) \sim R_2(x, y))$. Для того чтобы предикат от предикатов $F(R)$ мог быть истолкован как предикат соответствующих множеств, он должен удовлетворять соотношению

$$(R_1)(R_2)\{\mathrm{Aeq}(R_1, R_2) \rightarrow (F(R_1) \rightarrow F(R_2))\}.$$

Соответствующее положение имеет место для предикатов с тремя и больше пустыми местами.

Из этого мы видим, что расширенное исчисление столь же хорошо допускает теоретико-множественную интерпретацию, как и чисто логическую. Учение о числах может быть полностью изложено в смысле теоретико-множественного понимания. Мы уже видели, что предикаты от предикатов, определяющие числа, с таким же успехом можно рассматривать как предикаты от множеств. Далее, уже было указано, что двум предикатам от предикатов $\Phi(P)$ и $\Psi(P)$, которые представляют числа, соответствует одно и то же число в том случае, если между Φ и Ψ существует соотношение

$$(P)(\Phi(P) \sim \Psi(P)).$$

Но отсюда следует, что числа можно понимать так же, как множества множеств. При логическом определении число было предикатом от предикатов, который выполнялся для всех равночисленных предикатов и только для них. Равночисленности предикатов соответствует эквивалентность множеств (эквивалентность, понимаемая здесь в обычном теоретико-множественном смысле). От логического понятия количественного числа можно перейти, таким образом, к теоретико-множественному; согласно этому пониманию, число есть не что иное, как *множество всех множеств, эквивалентных определенному множеству*.

Рассмотрим теперь, как обычные понятия теории множеств выражаются символически в исчислении.

Если $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — определяющие предикаты двух множеств, то *сумма* этих множеств задается предикатом $P_1(x) \vee P_2(x)$.

$P_1(x) \& P_2(x)$ представляет *пересечение* P_1 и P_2. Множество P_1 содержится в P_2, или P_1 есть *подмножество множества* P_2, если $(x)(P_1(x) \rightarrow P_2(x))$ является истинным утверждением. Два множества P_1 и P_2 *эквивалентны*, если элементы обоих множеств могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие друг с другом. Символическое выражение этого такое же, как для равночисленности предикатов.

Выражение

$$(x)(y)(z)([R(x, y) \& R(x, z) \rightarrow \equiv(y, z)] \& [R(x, z) \& R(y, z) \rightarrow \equiv(x, y)]),$$

или сокращенно $\mathrm{Eind}(R)$, означает, что отношение $R(x, y)$, если оно имеет место, является взаимно-однозначным. Тогда символическое выражение (теоретико-множественной) эквивалентности P_1 и P_2 таково:

$$(ER)\{(x)[P_1(x) \rightarrow (Ey)(R(x, y) \& P_2(y))] \& (y)[P_2(y) \rightarrow (Ex)(R(x, y) \& P_1(x))] \& \mathrm{Eind}(R)\}.$$

Множество всех подмножеств данного множества, определенного через D, представляется индивидуальным предикатом от предикатов $\mathrm{Te}(P)$ (или лучше $\mathrm{Te}(P, D)$. Каждый предикат P, для которого выполняется $Te(P)$, должен обладать тем свойством, что все его элементы являются также элементами D. И обратно, для каждого предиката P с этим свойством должно также выполняться $Te(P)$. Поэтому $Te(P)$ определяется выражением

$$(x)(P(x) \rightarrow D(x)).$$

Пусть, далее, $F(P)$ представляет какое-нибудь множество. Элементы x *объединения множеств этого множества множеств* (теоретико-множественной суммы этого множества множеств) можно охарактеризовать тем, что они являются элементами по крайней мере одного из множеств, определяемых такими предикатами P, для которых выполняется $F(P)$. Согласно этому, для объединения множеств получаем определяющее выражение

$$(EP)(F(P) \& P(x)).$$

Элементы *пересечения множества множеств* характеризуются тем, что они являются элементами каждого множества P, для которого выполняется $F(P)$. Согласно этому, пересечение представляется в виде:

$$(P)(F(P) \rightarrow P(x)).$$

Множество P называется *упорядоченным*, если для элементов P определен предикат R от двух переменных, не рефлексивный, но транзитивный, и который для произвольных отличных друг от друга x и y выполняется либо для пары (x, y), либо для пары (y, x). «Множество P упорядочено предикатом R» символически выражается согласно этому так:

$$(x)(y)(z)\{[P(x) \& P(y) \& P(z)] \rightarrow$$
$$[\overline{R}(x, x) \& (\equiv(x, y) \vee R(x, y) \vee$$
$$R(y, x)) \& (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))]\}.$$

Мы обозначим эту формулу кратко $\mathfrak{O}(P, R)$.

Множество P называется *вполне упорядоченным* предикатом R, если

$$\mathfrak{O}(P, R) \& (Q)\{(x)(Q(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow$$
$$(Ey)[Q(y) \& (z)(Q(z) \rightarrow \equiv(y, z) \vee R(y, z))]\}$$

есть истинное высказывание.

Соответствующим образом можно выразить символически в исчислении все остальные понятия, употребляемые в теории множеств.

§ 4. Логические парадоксы

В предыдущих параграфах мы видели, какие новые возможности выражения получаются при введении предикатов от предикатов. Каждая формула, которая содержит свободный переменный предикат F, может рассматриваться как индивидуальный предикат от предикатов. Но в таком случае можно ввести дальше переменные для предикатов от предикатов. Формула, которая содержит свободную переменную такого рода, представляет индивидуальный предикат, аргументами которого служат предикаты от предикатов, и т. д. Такое построение можно продолжать как угодно далеко.

В таком случае, кроме предметов нашей области индивидуумов, предметами в расширенном смысле могут служить также предикаты, предикаты от предикатов и т. д. Возникает вопрос, нельзя ли попросту объединить эти предметы в расширенном смысле в одну единую область индивидуумов, чтобы можно было говорить не только об индивидуальных предикатах, предикатах от подобного рода предикатов и т. д., но и просто о предикатах, а также, чтобы каждый предикат, определенный для новой области индивидуумов, в свою очередь, сам принадлежал этой же области индивидуумов. В этом случае должно было бы иметь смысл и приписывание предиката самому себе как аргументу. Столь же обще следовало бы трактовать понятие предиката от предикатов и т. д.

Тот способ, при помощи которого мы, исходя из узкого исчисления предикатов, поднимались к более высоким предикатам, не дает нам для подобного образа действий никакого руководства. Ибо в рассуждениях предыдущего параграфа мы всегда имели дело с предикатами от индивидуумов, предикатами от таких предикатов от индивидуумов и т. д. Но, пожалуй, подобное общее понятие предиката соответствует неточному разговорному языку[1]. И вот, оказывается, что такая логическая система не удовлетворяет даже постулату непротиворечивости. Появляющимся здесь противоречиям, так называемым *парадоксам*, к которым приходят, впрочем, и независимо от употребления логической символики, можно, в соответствии с двойным истолкованием исчисления предикатов, придать либо более логическое в собственном смысле слова, либо же теоретико-множественное истолкование. Разберем здесь некоторые из этих противоречий.

Пусть $P(F)$ — предикат от предикатов. Так как само P является предикатом, то выражение $P(P)$ представляет собой высказывание, которое может быть истинным или ложным. Пример предиката от предикатов, для которого $P(P)$ выражает истинное высказывание, дает отрицание предиката $0(F)$ («F не выполняется ни для одного предмета»), т. е. функция $\overline{0}(F)$, которая определяется выражением $(Ex)F(x)$. $\overline{0}(\overline{0})$ есть сокращение для $(EF)\overline{0}(F)$, взамен чего, в свою очередь, можно написать $(EF)(Ex)F(x)$. Эта формула действительно выражает истинное суждение, а именно предложение: «Существуют предикат F и предмет x такие, что $F(x)$ выполняется».

Напротив, $0(0)$ есть ложное высказывание. Именно, согласно определению 0, получаем:

$$0(0) \sim \overline{(EF)}(0(F)) \sim \overline{(EF)}\,\overline{(Ex)}F(x) \sim (F)(Ex)F(x).$$

Эта формула представляет ложное высказывание,

[1] При теоретико-множественном истолковании исчисления такое понимание соответствует наивной теории множеств.

утверждающее, что каждый предикат выполняется по крайней мере для одного предмета.

Итак, мы можем понимать выражение $P(P)$ как предикат от P. Этот предикат выражает свойство предиката быть присущим самому себе. Мы обозначим этот предикат от предикатов через $Pd(P)$ (читать: «P предикабельно»). Так как Pd, а, следовательно, и $\overline{Pd}$, само является предикатом от предикатов, то и выражения $Pd(Pd)$ и $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ имеют смысл. Но в таком случае одно из двух: либо $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ истинно, иными словами, предикат от предикатов $\overline{Pd}$ выполняется для самого себя и, значит, $Pd(\overline{Pd})$ истинно; либо же $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ ложно, тогда предикат от предикатов $\overline{Pd}$ не выполняется для самого себя, т. е. $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ истинно. Мы получаем, следовательно, что:

$$Pd(\overline{Pd}) \sim \overline{Pd}(\overline{Pd}).$$

Но это противоречие, ибо логическое выражение никогда не может быть эквивалентным своей противоположности.

Впервые этот парадокс был открыт *Рэсселем*. Он может быть выражен также на языке теории множеств. Здесь предикату от предикатов $\overline{Pd}$ соответствует множество всех тех множеств, которые не содержат самих себя в качестве элемента. Это множество противоречиво по своему понятию, ибо, согласно его определению, оно входит в число своих собственных элементов тогда и только тогда, когда оно не входит в их число.

Второй парадокс, который мы рассмотрим, был известен уже греческим философам. Его простейшая формулировка такова: Пусть некто говорит «я лгу» или, подробнее, «я высказываю сейчас ложное предложение»; это предложение истинно, поскольку оно ложно, и ложно, поскольку оно истинно.

Мы несколько уточним формулировку этого парадокса. Пусть $\mathfrak{P}$ является названием определенного лица, а t — сокращенное обозначение определенного интервала времени. В течение этого промежутка времени t пусть $\mathfrak{P}$ высказывает предложение: «Все, что $\mathfrak{P}$ утверждает в промежуток времени t, ложь» и в течение времени t больше ничего не говорит. Это допущение во всяком случае не противоречиво, так как его можно преднамеренно осуществить на самом деле. Чтобы выразить его в логической символике, обозначим высказывание, произнесенное $\mathfrak{P}$, буквой $\mathfrak{A}$, и используем знак предиката $\mathrm{Bh}(X)$ со следующим значением: «$\mathfrak{P}$ утверждает X в промежуток времени t», где значениями аргумента X могут быть любые высказывания.

С помощью этого знака мы можем, прежде всего, высказывание $\mathfrak{A}$ передать формулой:

$$(X)(\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X});$$

а наше предположение, что $\mathfrak{P}$ в промежуток времени t высказывает предложение $\mathfrak{A}$ и не говорит больше ничего, выражается двумя формулами:

$$\mathrm{Bh}(\mathfrak{A}); \ (X)(\mathrm{Bh}(X) \to \equiv(\mathfrak{A}, X)).$$

Теперь мы можем получить противоречие следующим образом. В истинную формулу $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ вместо второго члена подставляем выражение $(X)(\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X})$, которое ведь является символическим выражением высказывания $\mathfrak{A}$. Получаем:

$$\mathfrak{A} \to (X)(\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X}).$$

По правилам исчисления, знак всеобщности (X) здесь можно отбросить.

$$\mathfrak{A} \to (\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X}).$$

Отсюда путем подстановки получаем:

$$\mathfrak{A} \to (\mathrm{Bh}(\mathfrak{A}) \to \overline{\mathfrak{A}}).$$

Так как посылки можно переставить, то эту формулу можно заменить такой:

$$\mathrm{Bh}(\mathfrak{A}) \to (\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}).$$

В силу того, что $\mathrm{Bh}(\mathfrak{A})$ — истинная формула, получаем:

$$\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}.$$

С другой стороны, можно доказать также $\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$. Ибо, прежде всего, имеем:

$$\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{(X)}(\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X})$$

или же:

$$\overline{\mathfrak{A}} \to (EX)(\mathrm{Bh}(X) \,\&\, X).$$

Затем из предположенной в качестве истинной формулы:

$$(X)(\mathrm{Bh}(X) \to \equiv(\mathfrak{A}, X))$$

выводим формулу:

$$(X)(\mathrm{Bh}(X) \,\&\, X \to \equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X)$$

и из нее дальше получаем:

$$(EX)(\mathrm{Bh}(X) \,\&\, X) \to (EX)(\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X),$$

так что, наконец, имеем:

$$\overline{\mathfrak{A}} \to (EX)(\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X).$$

Из значения тождества следует, что

$$\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X \to \mathfrak{A}$$

истинная формула.
По правилу γ), получаем из нее:

$$(EX)(\equiv \mathfrak{A}, X) \,\&\, X) \to \mathfrak{A}.$$

Эта формула вместе с полученной перед этим дает:

$$\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}.$$

Но из доказанных формул $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$ следует, что как $\mathfrak{A}$, так и $\overline{\mathfrak{A}}$ — истинные формулы, так что мы действительно пришли к противоречию.

Приведем еще третий парадокс, встречающийся в разнообразных оформлениях. Выразим его в следующей простой форме: всякое обозначение какого-нибудь числа, происходит ли оно через сообщение условного знака или указание определяющего свойства, требует известной затраты времени. Поэтому на протяжении конечного промежутка времени конечное количество людей могут обозначить только конечное число чисел. Но, с другой стороны, существует бесконечно много чисел. Следовательно, в XX столетии живущие на Земле люди заведомо не обозначат всех чисел. Среди не обозначенных в XX столетии чисел имеется наименьшее. Но ведь это число все же обозначено в XX столетии, так как я определил его, указав его свойство быть наименьшим числом, не обозначенным в XX столетии. Таким образом, получается, что существует число, которое оказывается как обозначенным, так и не обозначенным.

Чтобы эту аргументацию, имея в виду намерение выразить ее в нашем исчислении, несколько уточнить, мы заменим понятие обозначения более узким понятием. Мы будем рассматривать только такие обозначения числа, которые осуществляются в смысле нашей логической символики путем записи выражения для определяющего число предиката. При этом под предикатом, определяющим число x, мы понимаем такой предикат, который выполняется для числа x, но ни для чего больше не подходит[1]. Таким образом, мы приходим к следующей формулировке парадокса.

Пусть $\mathrm{Scr}(P)$ означает свойство предиката P, состоящее в том, что среди записанных в XX столетии выражений логической символики по крайней мере одно является выражением для P. Знак $<(x, y)$ используем, как и прежде, для предиката «x меньше, чем y»; но пустые места этого предиката пусть относятся к положительным целым числам.

Затем введем для выражения

$$P(x) \& (y)(P(y) \to \equiv(x, y)),$$

[1] Что числа можно истолковать как предикаты от предикатов, для настоящей аргументации не имеет значения.

которое означает, что x определено предикатом P, сокращенное обозначение $\mathrm{Df}(P, x)$. В качестве сокращенного обозначения для

$$(EP)(\mathrm{Df}(P, x) \& \mathrm{Scr}(P))$$

используем символ $\mathrm{Dsc}(x)$.

$\mathrm{Dsc}(x)$ означает, следовательно: «Среди символических выражений, записанных в XX столетии, по крайней мере одно представляет предикат, определяющий x, или, говоря кратко: «x по меньшей мере один раз символически определено в XX столетии». Наконец, для выражения

$$\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \& (y)(<(y, x) \to \mathrm{Dsc}(y))$$

используем знак $\mathrm{Mds}(x)$; таким образом, $\mathrm{Mds}(x)$ означает: «x имеет свойство быть наименьшим числом, символически не определенным в XX столетии».

В качестве аксиом мы вводим следующие формулы: прежде всего выражения для основных свойств отношения $<(x, y)$:

$$(x)\overline{<(x, x)}$$

$$(x)(y)(z)(<(x, y) \& <(y, z) \to <(x, z)),$$

$$(x)(y)(\equiv(x, y) \vee <(x, y) \vee <(y, x)),$$

$$(Ex)P(x) \to (Ex)[P(x) \& (y)(<(y, x) \to \overline{P}(y))].$$

Первые три из этих четырех аксиом означают, что отношение $<(x, y)$ *упорядочивает* целые числа, а последнее, что оно их *вполне упорядочивает*. Затем в качестве аксиом мы имеем символическое выражение для того факта, что не все числа могут быть определены символически в XX столетии

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x),$$

и, наконец, формулу $\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$, которая означает, что выражение для $\mathrm{Mds}(x)$ записано в XX столетии, и которая, следовательно, представляет истинное утверждение, так как прежде мы действительно записали выражение для $\mathrm{Mds}(x)$.

Теперь можно провести следующее формальное заключение. В формулу

$$(Ex)\,P(x) \rightarrow (Ex)\,[P(x)\,\&\,(y)\,(<(y,\ x) \rightarrow \overline{P}(y))]$$

вместо P подставляем $\overline{\mathrm{Dsc}}$:

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \rightarrow (Ex)\,[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,(y)\,(<(y,x) \rightarrow \mathrm{Dsc}(y))].$$

Так как $(Ex)\,\overline{\mathrm{Dsc}}(x)$ истинно, то получаем:

$$(Ex)\,[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,(y)\,(<(y,x) \rightarrow \mathrm{Dsc}(y))];$$

или же, применяя сокращение $\mathrm{Mds}(x)$,

$$(Ex)\,\mathrm{Mds}(x).$$

В силу определения Mds, имеет место соотношение

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \overline{\mathrm{Dsc}}(x).$$

Далее, используя установленные аксиомы, можно вывести формулу

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \mathrm{Mds}(x)\,\&\,(y)\ \ (\mathrm{Mds}(y) \rightarrow \equiv(x,y)),$$

т. е.

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x).$$

Из взятых вместе последней формулы и третьей с конца получаем:

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},\ x).$$

Соответствующее формуле (34) правило дает далее:

$$(Ex)\,\mathrm{Mds}(x) \rightarrow (Ex)\,(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},\ x)).$$

Так как $(Ex)\,\mathrm{Mds}(x)$ доказана, то схема заключения дает:

$$(Ex)\,(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},\ x)).$$

Если присоединим формулу $\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$, принятую в качестве аксиомы, то получим:

$$(Ex)\,\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)\,\&\,\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\}.$$

В силу аксиомы f), имеем формулу:

$$F(Q) \rightarrow (EP)\,F(P).$$

Заменяя здесь Q на Mds, а $F(P)$ на $(Ex)\,\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(P,x)\,\&\,\mathrm{Scr}(P)\}$, получим:

$$(Ex)\,\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)\,\&\,\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\} \rightarrow$$
$$(EP)\,(Ex)\,\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(P,\ x)\,\&\,\mathrm{Scr}(P)\};$$

а так как посылка является доказанной формулой, то имеем:

$$(EP)\,(Ex)\,\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Df}(P,x)\,\&\,\mathrm{Scr}(P)\}.$$

Переставляя кванторы и используя формулу

$$(EP)\,(A\,\&\,F(P)) \sim A\,\&\,(EP)\,F(P),$$

получаем:

$$(Ex)\,\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,(EP)\,(\mathrm{Df}(P,x)\,\&\,\mathrm{Scr}(P))\}.$$

При применении сокращения Dsc это выражение переходит в

$$(Ex)\,(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\,\&\,\mathrm{Dsc}(x)).$$

С другой стороны, можно также вывести формулу

$$(x)\,(\mathrm{Dsc}(x) \vee \overline{\mathrm{Dsc}}(x)),$$

ибо эта формула получается из (21) подстановкой.

Но, в силу принципа двойственности, две последние формулы противоположны друг другу. Мы получили, таким образом, противоречие.

С этими различными противоречиями мы не можем разделаться, приняв просто как факт доказуемость некоторых противоречащих друг другу высказываний. Ибо, как только мы допустим какие-нибудь два противоположных друг другу выражения $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ в качестве истинных, все исчисление, как уже раньше замечено, лишится смысла.

Посмотрим теперь, какие следствия для построения нашего исчисления получаются из этих парадоксов. Первый парадокс показывает ясно, что мы не можем употреблять лишенное различий понятие предиката, описанное в начале этого параграфа, так как его допущение привело бы к противоречию в самом исчислении предикатов. Два других парадокса имеют иной характер; они приведены здесь лишь ради полноты. Парадоксы эти свидетельствуют только о несовместности некоторых утверждений. В первом случае это были:

$$\mathrm{Bh}[(X)(\mathrm{Bh}(X)\rightarrow\overline{X})] \text{ и } (X)[\mathrm{Bh}(X)\rightarrow \equiv (X, (Y)(\mathrm{Bh}(Y)\rightarrow\overline{Y}))],$$

а во втором случае:

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Dsc}}\,(x),\ \mathrm{Scr}\,(\mathrm{Mds})$$

и

$$(P)\{(Ex)P(x)\rightarrow(Ex)[P(x)\,\&\,(y)(<(y,x)\rightarrow P(y))]\}.$$

Никакое из этих утверждений не является логическим тождеством. Парадоксы этого второго рода, для которых употребительно название «*семантических*», не затрагивают, следовательно, нашего исчисления, так как оно не в состоянии выразить их чисто логический характер. Более того, мы должны были использовать для их частичной формализации содержательные способы мышления. Нам не приходится поэтому для нашего исчисления предикатов извлекать какие-либо следствия из противоречий последнего рода, и мы не будем поэтому останавливаться на них подробнее [1].

§ 5. Ступенчатое исчисление

Мы теперь приступим к систематическому построению исчисления, расширенного посредством введения более высоких предикатов. Соображения предыдущего параграфа показали нам, что мы не можем употреблять лишенного различий понятия предиката, но должны различать предикаты по роду их аргументов. В нашем

[1] Более новую трактовку семантических парадоксов см., например, *Tarski, A.*, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia Philosophica. Leopoli, 1935.

исчислении это находит свое выражение в том, что мы можем употреблять общую предикатную переменную только для предикатов одного и того же рода.

Мы имеем прежде всего индивидуальные предикаты и притом различные виды или типы таковых по числу их аргументов. Эти предикаты называются *предикатами первой ступени*. Под *предикатом второй ступени* мы понимаем предикат, пустые места которого заняты индивидуумами или предикатами первой ступени, причем по крайней мере один раз должен встречаться в качестве аргумента предикат первой ступени. Виды или типы предикатов второй ступени различаются по числу и роду их пустых мест. Соответствующим образом приходим дальше к предикатам третьей, четвертой ступени и т. д. Для индивидуальных переменных мы применяем снова маленькие латинские буквы, а для переменных предикатов — большие латинские буквы. Для каждого вводимого переменного предиката заранее должен быть точно указан его тип, так как правила подстановки формулируются так, что вместо переменного подставляются только такие предикаты, тип которых совпадает с типом этого переменного.

Чтобы кратко обозначить тип переменного предиката, мы можем воспользоваться простой символикой. Тип индивидуального переменного мы обозначим буквой i. Если мы имеем переменный предикат с n пустыми местами, которым принадлежат аргументы типов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то тип этого переменного предиката мы будем обозначать через $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Например, $((i, i), i)$ будет обозначать тип двуместного предиката второй ступени, на место первого аргумента которого можно подставлять двуместный индивидуальный предикат, а на место второго — индивидуум. Предикаты, упомянутые в § 2 этой главы, имеют: Sym — тип $((i, i))$, $0(F)$ — тип $((i))$, $\mathfrak{Z}(\Phi)$ — тип $(((i)))$, Imp — тип $((i), (i))$ и т. д.

Это ступенчатое построение предикатов и исчисление, основанное на нем, ввели в логику *Уайтхед* и

Рэссел в своем фундаментальном произведении «Principia Mathematica». Наряду с описанным различием типов предикатов, так называемой *простой теорией типов*, авторы пользовались еще более тонким подразделением предикатов, *разветвленной теорией типов*. Согласно этой последней, недопустимо, например, причислять все одноместные индивидуальные предикаты к одному и тому же типу; индивидуальные предикаты должны различаться в зависимости от способа их определения. Например, индивидуальный предикат, определяемый при помощи каких-либо знаков общности или существования для предикатов, имеет более высокий тип, чем индивидуальный предикат простейшего порядка, который *Уайтхед* и *Рэссел* называют «предикативным» индивидуальным предикатом. Эта разветвленная теория типов была установлена, принимая во внимание семантические парадоксы. Но она не нужна, так как этот вид противоречий, как мы видели, не затрагивает расширенного исчисления предикатов. Кроме того, эта теория приводит к большому числу затруднений, на которых и мы останавливались ближе в первом издании этой книги. У нас нет больше побудительных мотивов заниматься подробнее этой теорией, поскольку непротиворечиво, как это совсем нетрудно установить, уже простое ступенчатое исчисление.

Приступая теперь к детальному построению ступенчатого исчисления, мы встречаемся еще с некоторой трудностью, относящейся к способу записи. То обстоятельство, что предикат выполняется для определенных аргументов, мы всегда выражали до сих пор, помещая в скобке, следующей за знаком предиката, отделенные друг от друга запятыми аргументы. Поскольку пустые места переменных предикатов заполняются только переменными, этот способ записи достаточен и теперь. Однако дело обстоит иначе, если в пустые места подставляются специальные предикаты. Пусть, например, F — переменный предикат типа $((i))$, пустое место которого предназначается, следовательно, для

одноместных индивидуальных предикатов. Пусть, далее, G — переменная для двуместных индивидуальных предикатов. Из G можно образовать следующие предикаты переменного x: $G(x, x)$, $G(x, y)$, $G(y, x)$, причем оба последних предиката содержат параметр y. Мы не располагаем пока возможностью выразить прямо, что F выполняется для какого-либо из этих предикатов. Ибо если бы мы написали, например, $F(G)$, то невозможно было бы установить, какой именно одноместный предикат подразумевается под G. Проще всего это сделать при помощи описания. Введем H как переменный предикат типа (i). Тогда мы можем использовать формулы

$$(EH)(F(H) \& (x)(H(x) \sim G(x, x)))$$
$$(EH)(F(H) \& (x)(H(x) \sim G(x, y)))$$
$$(EH)(F(H) \& (x)(H(x) \sim G(y, x)))$$

или же формулы

$$(H)((x)(H(x) \sim G(x, x)) \rightarrow F(H))$$
$$(H)((x)(H(x) \sim G(x, y)) \rightarrow F(H))$$
$$(H)((x)(H(x) \sim G(y, x)) \rightarrow F(H)),$$

чтобы восполнить отсутствующую возможность выразить выполнение F для трех вышеупомянутых предикатов.

Можно, впрочем, построить формализм и не прибегая к подобным описаниям. Преимущество этого в том, что сохраняется правило подстановки для переменных предикатов [аналогичное правилу α 3) узкого исчисления предикатов], и аксиоматическое построение ступенчатого исчисления может протекать вполне аналогично обычному построению узкого исчисления предикатов. При этом мы должны, однако, пойти на усложнение способа записи. В вышеупомянутом случае мы можем поступить так: присоединить к переменному F индивидуальное переменное, например x, в качестве индекса. Тогда мы имеем в

$$F_x(G(x, x));\ F_x(G(x, y));\ F_x(G(y, x))$$

символические выражения для трех вышеупомянутых высказываний. Переменная x в этих трех формулах является связанной переменной и поэтому может быть заменена другой переменной того же рода. Например, формулы

$$F_z(G(z, z));\quad F_z(G(z, y));\quad F_z(G(y, z))$$

равнозначны вышеприведенным формулам.

Если мы хотим провести вообще этот способ записи с индексом, то каждый переменный предикат второй и более высокой ступени должен получить некоторый индекс. Пусть F — подобного рода n-местная переменная. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — переменные, рассматриваемые как аргументы F. Если среди них встречаются индивидуальные переменные, то мы их опускаем. Пусть

$$H_{11}, \ldots, H_{1i_1};\ H_{21}, \ldots, H_{2i_2}; \ldots;\ H_{n1}, \ldots, H_{ni_n}$$

переменные, такие, что для всякого $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$ $H_{k1}, \ldots, H_{ki_k}$ подлежат рассмотрению в качестве аргументов в G_k. Тогда F получает индекс

$$F_{H_{11}, \ldots, H_{1i_1};\ H_{21}, \ldots, H_{2i_2};\ \ldots;\ H_{n1}, \ldots, H_{ni_n}}.$$

Аналогично поступаем в случае индивидуальных знаков предикатов. Приведем несколько примеров. Вместо $\mathrm{Sym}(R)$ мы должны были бы теперь писать $\mathrm{Sym}_{xy} R(x,y)$, вместо $\mathrm{Imp}(F, G)$ — $\mathrm{Imp}_{xy}(F(x), G(y))$. Вместо формулы $\mathfrak{Z}(\Phi)$, рассмотренной в § 2, нам нужно было бы теперь написать $\mathfrak{Z}_F \Phi(F)$, причем F имеет тип (i). Мы видим отсюда, что способ записи с индексами значительно отягощает формализм. Для дальнейшего мы положим поэтому в основу более простой способ записи и только при случае будем ссылаться на индексный способ записи.

Обратимся теперь к вопросу о системе аксиом для тождественных формул. Для этого прежде всего необходимо определить понятие формулы. Это можно осуществить таким же образом, как мы сделали раньше для узкого исчисления предикатов с помощью правил 1) — 5) § 4, гл. III. Мы должны только иметь в виду, что теперь мы имеем больше разновидностей переменных. Что касается самой системы аксиом, то во всяком случае нельзя указать такой системы, которая давала бы все без исключения тождественные формулы[1]. Все же следующая система аксиом и при более сложных способах заключений, которые употребительны, например, в математическом анализе (ср. рассмотрения следующего параграфа), едва ли откажется служить. Эта система по существу является только обобщением системы аксиом, введенной прежде для узкого исчисления предикатов.

Эта система образуется следующим образом:

I. Прежде всего, в качестве основных мы используем снова формулы a)—d) исчисления предикатов, приведенные в гл. III, § 5.

II. Основным формулам e) и f) узкого исчисления предикатов соответствует следующее правило образования основных формул: пусть G и H — переменные какого-либо типа a, F — переменная типа (a). Тогда каждая формула

$$(\mathrm{II}, 1)\qquad (G)\,F(G) \rightarrow F(H)$$

и каждая формула

$$(\mathrm{II}, 2)\qquad F(H) \rightarrow (EG)\,F(G)$$

являются основными. (Случай, когда G имеет тип i, т. е. является индивидуальным переменным, должен быть включен сюда.)

III. Дальше идут, в качестве особой группы для расширенного исчисления предикатов, аксиомы, соот-

[1] Это следует из работы *Геделя*, уже упоминавшейся в § 1 этой главы.

ветствующие аксиоме выбора теории множеств и являющиеся обобщением аксиомы g), установленной нами уже раньше для исчисления второй ступени. Пусть F — переменная какого-либо типа a; G и L — переменные какого-либо типа b; A и H — переменные типа (a, b); T — переменная типа (b). Тогда:

$$\text{(III)}\ (EH)\{(F)\,[(EG)\ A(F,G) \rightarrow (EG)(H(F,G)\ \&\ A(F,G))]\ \&\ (F)\,(G)\,(L)\,[(H(F,G)\ \&\ H(F,L)) \rightarrow (T)\,(T(G) \sim T(L))]\}$$

является основной формулой.

IV. Пусть, далее, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ — переменые типов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, G и H — переменные типа $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и A — переменная типа $((b_1, b_2, \ldots, b_n))$. Тогда:

$$\text{(IV)}\quad (L_1)\ldots(L_n)\,[G(L_1, \ldots, L_n) \sim H(L_1, \ldots, L_n)] \rightarrow (A(G) \rightarrow A(H))$$

является основной формулой. (Эти «аксиомы объемности» (Extensionalität) соответствуют аксиоме определенности (Bestimmtheitsaxiom) теории множеств.)

Правила вывода новых формул аналогичны правилам исчисления предикатов. $\alpha 1$) и β) остаются неизменными. Что касается $\alpha 2$), $\gamma 1$), $\gamma 2$), то, принимая во внимание, что теперь имеется больше типов переменных, эти правила следует соответственно изменить. За счет расширения правила $\alpha 2$) нельзя все же полностью отменить прежнее правило $\alpha 3$). Поэтому к системе основных формул нужно еще добавить следующее.

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — переменные каких-либо типов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, F — переменная типа $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{A}(G_1, \ldots, G_n)$ — формула, которая содержит свободные переменные $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Тогда каждая формула вида

$$\text{(V)}\ (EF)\,(G_1)\ldots(G_n)\,(F(G_1, \ldots, G_n) \sim \mathfrak{A}(G_1, \ldots, G_n))$$

является основной. Эти формулы (V) предназначены для того, чтобы заменять при выводах формулу со свободными переменными, представляющую здесь

всегда некоторый индивидуальный предикат, переменным предикатом.

Пользуясь индексным способом записи, мы можем формулы (V), для которых употребительно наименование аксиомы свертывания (Komprehensionsaxiom), отбросить. К правилам вывода тогда присоединяется обобщение правила $\alpha 3$) узкого исчисления предикатов. Формулы (V) становятся в таком случае доказуемыми.

Другой путь построения ступенчатого исчисления, отличающийся от описанного здесь, состоит в том, что при формальном построении принципиально кладут в основу только одноместные предикаты различных ступеней. Именно, можно, например, по *Куратовскому*[1] рассматривать двуместный индивидуальный предикат как одноместный предикат в области упорядоченных пар (x, y). Упорядоченная пара (x, y) определяется (если мы для удобства положим здесь в основу теоретико-множественный способ выражения) как множество, элементами которого являются только следующие два множества: множество с x в качестве единственного элемента и множество с x и y в качестве единственных элементов. Для определения этих множеств или соответствующих им предикатов необходим только двуместный предикат тождества, который, однако, в свою очередь сводится к одноместным предикатам (ср. § 1 этой главы). Мы не пошли здесь по этому пути в ступенчатом исчислении, потому что при таком построении индивидуальный предикат $F(x, y)$, который обычно принадлежит первой ступени, выступает как предикат сравнительно высокой ступени. Но в остальном ограничение одноместными предикатами дает некоторые формальные преимущества. Непротиворечивость ступенчатого исчисления легко доказывается с помощью некоторого обобщения метода, примененного в § 9, гл. II[2].

[1] *Kuratowski*, C., Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles. Fund. Math. Bd. 2 (1921).

[2] Cp. *Tarski*, A., Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. Mh. Math.

§ 6. Применение ступенчатого исчисления

Ступенчатое исчисление может быть использовано таким же образом, как это было подробно изложено для узкого исчисления предикатов в § 11, гл. III, для вывода следствий из аксиом определенной теории. По сравнению с узким исчислением предикатов мы имеем в этом случае более широкую возможность выражения аксиом и следствий. Поясним на одном примере применение ступенчатого исчисления.

Возьмем для этого *обоснование теории действительных чисел*. Действительные числа будут при этом введены не с помощью собственной системы аксиом, а будут сведены к рациональным числам. Мы принимаем, следовательно, рациональные числа за систему предметов области индивидуумов и мыслим себе введенными подходящие аксиомы для основных арифметических отношений в области рациональных чисел, таких, как сложение, вычитание, отношения больше и меньше, и т. д. В математике употребительны различные способы сведения действительных чисел к рациональным. Например, определяют действительное число с помощью канторовского фундаментального ряда или с помощью бесконечной десятичной, соответственно двоичной дроби. Для установления связи с логикой наиболее подходящим является метод Дедекинда.

По *Дедекинду* мы определяем действительное число как «сечение», т. е. как подразделение рациональных чисел на два класса, со следующими «свойствами сечения»:

1. Каждый из двух классов содержит по меньшей мере *одно* рациональное число.

Physik, Bd. 40 (1933), und *Gentzen, G.*, Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik. Math. Z. Bd. 41. (1936). *Генцен* использует только что упомянутое построение ступенчатого исчисления, при котором употребляются только одноместные предикаты. Перенос его метода на нашу систему аксиом не порождает, однако, никаких особых затруднений.

2. В первом классе не существует наибольшего рационального числа.

3. Если некоторое рациональное число принадлежит к первому классу, то и все рациональные числа, меньшие его, также принадлежат к первому классу.

При подразделении описанного рода мы можем рассматривать всегда только первый из обоих классов и в таком случае имеем дело с множеством рациональных чисел, которое можно представить при помощи определяющего его предиката.

Под действительным числом мы понимаем тогда множество рациональных чисел, для которого существует определяющий предикат P, удовлетворяющий следующим трем условиям:

$$1. \qquad (Ex)\,P(x)\,\&\,(Ex)\,\overline{P}(x)$$

[«Классы, определенные через $P(x)$ и $\overline{P}(x)$, оба не пустые».]

$$2. \qquad (x)\,\{P(x) \rightarrow (Ey)\,(<(x, y)\,\&\,P(y))\}$$

(«Для каждого рационального числа, обладающего свойством P, существует большее, которое также обладает свойством P».)

$$3. \qquad (x)\,\{P(x) \rightarrow (y)\,(<(y, x) \rightarrow P(y))\}.$$

(«Если x обладает свойством P, то и все меньшие рациональные числа y также обладают свойством P».)

Эти три условия вместе—мы можем мыслить их соединенными знаком & — образуют «свойство сечения» предиката. Это свойство предиката мы обозначим через $\mathrm{Sc}(P)$. Два предиката P и Q со свойствами $\mathrm{Sc}(P)$ и $\mathrm{Sc}(Q)$ тогда и только тогда представляют одно и то же действительное число, когда множества, соответствующие P и Q, равны, т. е. если выполняется $\mathrm{Aeq}\,(P, Q)$.

Теперь мы можем, прежде всего, ввести отношение величины между действительными числами. Для двух предикатов P и Q со свойством Sc выражение

$\leqq (P, Q)$ должно быть равнозначным с $\mathrm{Imp}(P, Q)$, т. е. с

$$(x)(P(x) \to Q(x)).$$

Или, в формулах:

$$\mathrm{Sc}(P) \,\&\, \mathrm{Sc}(Q) \to (\mathrm{Imp}(P, Q) \sim \leqq (P, Q)).$$

Тогда высказывание $<(P, Q)$ придется определять через

$$\mathrm{Sc}(P) \,\&\, \mathrm{Sc}(Q) \to (<(P, Q) \sim (\mathrm{Imp}(P, Q) \,\&\, \overline{\mathrm{Aeq}}(P, Q))).$$

Можно доказать средствами исчисления, что оба отношения $\leqq (P, Q)$ и $<(P, Q)$ транзитивны. Равным образом можно вывести все другие свойства, которые характерны для отношения порядка.

Сложение и умножение действительных чисел можно свести к сложению и умножению рациональных. Предикат

$$(Ey)(Ez)(P(y) \,\&\, Q(z) \,\&\, (x = y + z))$$

представляет сумму, а предикат

$$(Ey)(Ez)(P(y) \,\&\, Q(z) \,\&\, (x = y \cdot z))$$

произведение действительных чисел, определенных через P и Q ($x = y + z$ и $x = y \cdot z$ являются здесь трехчленными основными предикатами в области рациональных чисел).

Теперь мы можем обычным способом ввести понятия *ограниченности* и *точной верхней границы* множества действительных чисел. Множество действительных чисел представляется предикатом от предикатов $A(P)$, который удовлетворяет условию:

$$(P)(A(P) \to \mathrm{Sc}(P)) \,\&\, (P)(Q)((A(P) \,\&\, \mathrm{Aeq}(P, Q)) \to A(Q)).$$

То обстоятельство, что множество $A(P)$ действительных чисел ограничено сверху, означает, что существует действительное число, которое больше или равно каждому из чисел множества; в формулах это выражается так:

$$(EP)\{\mathrm{Sc}(P) \,\&\, (Q)(A(Q) \to \leqq (Q, P))\},$$

вместо чего мы для сокращения пишем также $(EP)\,\mathrm{Sch}(P, A)$ или словесно: существует число P, представляющее верхнюю границу множества A.

Мы предполагаем также, что $A(P)$ содержит по крайней мере один элемент, так что имеет место формула:

$$(EP)\, A(P).$$

Теорему о точной верхней границе теперь можно сформулировать следующим образом: *если некоторое множество действительных чисел имеет верхнюю границу, то оно имеет также наименьшую верхнюю границу.*

Математическое доказательство существования точной верхней границы, приведенное к простейшей форме, состоит в том, что для рассматриваемого множества действительных чисел, которое является множеством множеств первой ступени, образуют их теоретико-множественную сумму (объединение). Согласно замечаниям § 3 этой главы, соответствующее $A(P)$ объединение множеств выражается предикатом:

$$(EP)(P(x) \,\&\, A(P)).$$

Мы обозначим этот предикат сокращенно $\mathrm{Vg}(x, A)$.

Таким образом, относительно предиката $\mathrm{Vg}(x, A)$ нужно показать, что он представляет действительное число, которое является точной верхней границей множества A.

Прежде всего мы должны доказать, что множество, определенное выражением $\mathrm{Vg}(x, A)$, вообще является действительным числом.

Можно легко показать сначала, что три свойства, объединенные знаком Sc, имеют место для Vg. Приведем вывод первого свойства.

Из

$$(EP)\, A(P),$$
$$(P)(A(P) \to \mathrm{Sc}(P))$$

заключаем:

$$(EP)(\mathrm{Sc}(P) \,\&\, A(P)).$$

Так как имеет место

$$\mathrm{Sc}(P) \to (Ex)\,P(x),$$

то имеем:

$$(EP)\,((Ex)\,P(x)\,\&\,A(P)).$$

Последнюю формулу можно преобразовать в

$$(Ex)\,(EP)\,(P(x)\,\&\,A(P)),$$

т. е.

$$(Ex)\,\mathrm{Vg}(x, A).$$

Равным образом можно показать:

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Vg}}(x, A), \text{ т. е. } (Ex)\,(\overline{EP})\,(P(x)\,\&\,A(P)).$$

Заметим прежде всего, что эту формулу можно преобразовать к виду:

$$(Ex)\,(P)\,(A(P) \to \overline{P}(x)).$$

В силу предположения об ограниченности множества A, имеем:

$$(EP)\,\{\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\,(A(Q) \to \leqq (Q, P))\}.$$

Далее, имеет место

$$\mathrm{Sc}(P) \to (Ex)\,\overline{P}(x),$$

следовательно:

$$(EP)\,\{(Ex)\,\overline{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\,(A(Q) \to \leqq (Q, P))\}.$$

Из определения $\leqq (Q, P)$ легко получаем:

$$\leqq (Q, P)\,\&\,\mathrm{Sc}(Q)\,\&\,\mathrm{Sc}(P) \to (x)\,(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)).$$

В предпоследней формуле выражение

$$(Q)\,(A(Q) \to \leqq (Q, P))$$

можно заменить на

$$(Q)\,[A(Q) \to (x)\,(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x))]$$

или же на

$$(x)\,(\overline{P}(x) \to (Q)\,(A(Q) \to \overline{Q}(x))).$$

Из формулы

$$(EP)\,\{(Ex)\,\overline{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(x)\,[\overline{P}(x) \to (Q)\,(A(Q) \to \overline{Q}(x))]\}$$

получаем тогда:

$$(Ex)\,(Q)\,(A(Q) \to \overline{Q}(x)),$$

т. е.:

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Vg}}(x, A).$$

Этим для $\mathrm{Vg}(x, A)$ доказано первое свойство сечения.

Аналогичным образом доказываются для $\mathrm{Vg}(x, A)$ свойства 2 и 3 (на стр. 201), так что, следовательно, имеет место $\mathrm{Sc}(\mathrm{Vg})$.

Мы покажем теперь

$$(P)\,(A(P) \to \leqq (P, \mathrm{Vg})),$$

т. е. что действительное число, соответствующее Vg, *есть верхняя граница множества, определенного формулой* $A(P)$.

Если мы подставим вместо Vg и $\leqq$ определяющие выражения, то эта формула переходит в

$$(P)\,(A(P) \to (x)\,[P(x) \to (EQ)\,(Q(x)\,\&\,A(Q))]),$$

а после преобразования — в

$$(P)\,(x)\,((A(P)\,\&\,P(x) \to (EQ)\,(A(Q)\,\&\,Q(x))).$$

Последнее выражение можно рассматривать как формулу, получающуюся в результате применения аксиомы (II, 2), стр. 197.

Остается еще показать, что $\mathrm{Vg}(x, A)$ представляет *наименьшую* верхнюю границу, или, в формулах:

$$(P)\,\{[\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\,(A(Q) \to \leqq (Q, P))] \to \leqq (\mathrm{Vg}, P)\}.$$

Если мы заменим здесь снова все сокращения их определениями, то получим:

$$(P)\,\{[\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\,(A(Q) \to (x)\,(Q(x) \to P(x)))] \to \\ \to (y)\,[(EP')\,(P'(y)\,\&\,A(P')) \to P(y)]\}.$$

Вынося здесь знак общности (x) вперед, мы получаем таким образом:

$$(P)\{[\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(x)(Q)(A(Q)\,\&\,Q(x)\rightarrow P(x))]\rightarrow (y)(EP')(P'(y)\,\&\,A(P')\rightarrow P(y))\}.$$

Эту формулу мы можем вывести с помощью обобщения формулы (22), стр. 101.

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать, что ступенчатое исчисление является подходящим средством для выражения способов заключения в анализе. Полное построение основ математики с помощью ступенчатого исчисления дано *Уайтхедом* и *Рэсселом*[1]; это построение, правда, усложнено без надобности благодаря употреблению разветвленной теории типов, упомянутой в § 4. Однако исключение этой теории из дедукций авторов не представляет никаких особых трудностей.

[1] *Whitehead, A. N.*, and *Russell, B.*, Principia Mathematica, 2 ed., Cambridge, 1925—1927.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I [1]

§ 5. Метод ступенчатого исчисления

Из противоречий, которые мы установили, следует, что наш метод формального оперирования ошибочен. Ошибка эта могла возникнуть лишь из того обстоятельства, что при расширении первоначально установленной для (узкого) функционального исчисления [2] системы аксиом мы действовали недостаточно осторожно.

Чтобы при необходимом исправлении метода занять правильные позиции, вспомним еще раз основное, что сделано нами при расширении исчисления. Мы изложим здесь соображения Уайтхеда и Рэссела.

В первоначальном методе исчисления функций мы приняли систему или несколько систем индивидуумов как заранее данные, и оперирование с переменными (в особенности с кванторами) приобрело свое логическое значение через отношение к таким совокупностям индивидуумов. Расширение же исчисления состояло в том, что мы стали рассматривать и высказывания и предикаты как индивидуумы и, таким образом, допустили символические выражения, логический смысл которых требовал привлечения совокупности высказываний (соответственно функций).

Но в действительности такой способ обращения сомнителен, поскольку при этом именно те выражения, которые получают смысл лишь через отношение к совокупности высказываний (соответственно функций), в свою очередь причисляются к высказываниям или функциям, между тем как, с другой стороны, чтобы

[1] Из первого издания этой книги.

[2] В первом издании предикаты назывались логическими функциями и исчисление предикатов—функциональным исчислением. (*Прим. ред.*)

иметь возможность ссылаться на совокупность высказываний или функций, мы должны рассматривать последнюю как заранее определенную. Здесь перед нами, таким образом, нечто вроде логического круга, и мы имеем основание предполагать, что этот круг является причиной парадоксов.

Таким образом, если мы не хотим отказаться от возможности принимать высказывания и функции за значения аргументов логических функций, возникает задача так преобразовать формальное оперирование с переменными знаками высказываний и функций, чтобы сомнительные образования совокупностей высказываний или функций были исключены.

Преследуя эту мысль, мы приходим к так называемой *теории типов* или *ступенчатому исчислению* Уайтхеда и Рэссела.

В этой теории мы можем различить две разные точки зрения. Первая состоит в том, что все, что может быть подставлено на пустое место функции в качестве аргумента, имеет совершенно иной характер, чем сама функция. Для характеристики функции необходимо указание ее области определения. Согласно нашему принципу, ничто, зависящее от самой функции, не должно в таком случае принадлежать к области ее определения. Таким образом, мы приходим к некоторому соотношению между понятиями, которые Рэссел называет *иерархией типов*. К первому типу принадлежат индивидуумы первоначально данных систем. Ко второму типу принадлежат индивидуальные предикаты. Вообще, к $(n+1)$-му типу принадлежат такие логические функции, все аргументы которых имеют тип $\leq n$ и по меньшей мере один—тип n. На каждое пустое место функции можно подставлять только такие предметы, которые имеют тип соответствующего аргумента. Соответственным образом употребление кванторов также относится лишь к совокупности, имеющей тот же тип.

Кроме этой мысли, Уайтхед и Рэссел используют еще одну, идущую дальше. Действительно, можно сомневаться и в праве общего употребления выражений, вроде: «для всех индивидуальных предикатов», «существует индивидуальный предикат», «для всех высказываний». Возможно, что в определение какого-нибудь индивидуального предиката входит квантор, которому соответствует переменная для индивидуальных предикатов, т. е. иными словами, что индивидуальный предикат определен через отношение к совокупности всех индивидуальных предикатов.

Или рассмотрим другой случай. Предложение «Все высказывания или истинны или ложны» само есть тоже высказывание. Но, с другой стороны, это высказывание определено через отношение к совокупности всех высказываний. Чтобы и здесь избежать круга, предлагается следующий путь.

Мы мыслим себе, прежде всего, что дана определенная область индивидуумов и в ней некоторые основные предикаты. Эти основные функции могут иметь очень наглядную природу. К этой первоначальной области мы применяем узкое функциональное исчисление и получаем, таким образом, *теорию «первой ступени»*. Предикат этой первой ступени является логической функцией одного или нескольких аргументов, которая может быть образована из основных предикатов с помощью логических операций «и», «или», «не», «если—то», «все» и «существует». Само собой разумеется, что операции «все» и «существует» относятся здесь только к первоначальной области индивидуумов. Заполняя пустые места функций первой ступени или помещая перед ними кванторы, мы получаем высказывания первой ступени.

Теперь мы построим теорию второй ступени. Мы рассматриваем функции и высказывания первой ступени как новую область индивидуумов, которую мы присоединяем как следующую область к области первоначальных индивидуумов. Если мы берем за основу расширенную таким образом систему индивидуумов, то мы можем тогда ограничиться областью функций

и высказываний «второй ступени». Отличие от предыдущего состоит теперь в том, что аргументы логических функций, равно как знаки общности и существования, могут относиться не только к первоначальным индивидуумам, но и к предикатам и высказываниям первой ступени.

Подобно переходу от первой ко второй ступени, можно совершить также переход к третьей и к более высоким ступеням.

С помощью этого метода ступенчатого исчисления мы получаем возможность, с одной стороны, сделать всякое встречающееся высказывание, свойство или отношение предметом суждения; с другой стороны, мы оказываемся избавленными от сомнительного оперирования с совокупностями всех высказываний или функций, так как допустимы только такие выражения, которые получаются путем последовательного образования ступеней, и так как для теории определенной ступени совокупность предметов, к которым она относится, ограничена.

Чтобы отобразить в нашей символике различие ступеней, мы снабдим высказывания и функции числовыми индексами. Это обозначение нужно понимать в том смысле, что область значений знака высказываний X_n или знака функции F_n ограничена такими высказываниями или функциями, которые содержатся в теории n-й ступени. От каждого выражения, которое должно представлять высказывание или определенную функцию, мы теперь требуем, чтобы ко всякому встречающемуся в нем знаку высказывания и знаку функции был присоединен индекс. Знак функции получает всегда больший индекс, чем каждый из его аргументов. Знак функции с индексом 1 всегда имеет в качестве аргументов предметы первоначальной области индивидуумов.

Наши аксиомы совпадают с аксиомами узкого функционального исчисления. Нужно только при применении аксиом снабдить переменные, обозначающие высказывания и функции, индексами. Вместо аксиомы (e): $(x) F(x) \to F(y)$ мы имеем правило для аксиом: всякая формула вида:

$$(x) F_n(x) \to F_n(y),$$
$$(A_n) F_m(A_n) \to F_m(B_n) \qquad ((m > n))$$
$$(G_n) F_m(G_n) \to F_m(H_n)$$

может быть принята за аксиому; при этом A_n и B_n — переменные высказывания, а G_n и H_n — переменные функции. Соответствующее справедливо для аксиомы f) и правила γ).

При подстановке нужно следить за тем, чтобы вместо переменных для высказываний и функций подставлялись только такие выражения для высказываний и функций, которые принадлежат к той же или меньшей ступени. При этом индекс выражения определяется следующим образом: если n — наивысший, встречающийся в выражении индекс, то индекс всего выражения равен $n+1$ в том случае, если имеется квантор, принадлежащий переменной с индексом n; в противном случае индекс выражения равен n. В функциональных выражениях определение индекса зависит еще от того, что́ считается аргументом соответствующего выражения. Применяясь к случаю, здесь приходится увеличивать индекс до тех пор, пока он не станет больше индекса всех аргументов. Например, функциональное выражение $F_1(x) \sim G_1(x)$ является предметным предикатом первой ступени, но функцией функций второй ступени. При установлении индекса некоторого выражения к числу встречающихся индексов нужно причислить также все те, которые, может быть, имеются в определении знака, используемого для сокращения.

Таким образом обосновывается новая форма исчисления — *ступенчатое исчисление*, представляющее собой расширение первоначального функционального исчисления, так как последнее заключено в нем в качестве теории первой ступени; но в сравнении с нашим предшествующим расширением функционального исчисления, настоящее расширение существенно ограничивает формальные способы оперирования.

Прежде всего убедимся, что *с помощью ступенчатого исчисления устраняются выступающие в парадоксах противоречия*. Если мы рассмотрим с этой точки зрения три приведенных нами парадокса, то оказывается следующее:

В первом парадоксе отпадает возможность определять применимую ко всем предикатам P функцию $Pd(P)$. Если мы возьмем вместо нее функцию $Pd(P_n)$ с каким-нибудь определенным числовым значением n, то́ она уже не принадлежит больше к теории n-й ступени; то же верно для $\overline{Pd}(P_n)$. Поэтому $\overline{Pd}$ не может рассматриваться в качестве значения аргумента P_n для Pd. Таким образом, выражение $Pd(\overline{Pd})$ вообще не может быть образовано.

Во втором парадоксе выражение

$$(X)(\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X})$$

содержит квантор всеобщности, относящийся к совокупности всех высказываний. Если мы теперь, в соответствии с требованием ступенчатого исчисления, ограничим область изменения X какой-нибудь определенной наивысшей ступенью, приписывая знаку X индекс n, то благодаря этому все высказывание будет определено как выражение $(n+1)$ ступени. В силу этого, в формуле

$$(X_n)\{\mathfrak{A} \to (\mathrm{Bh}(X_n) \to \overline{X}_n)\}$$

выражение $\mathfrak{A}$ не может быть взято в качестве частного значения X_n, так что мы не можем притти к формуле $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$. Выражаясь содержательно: если мы, чтобы не говорить о совокупности всех высказываний, придадим словам лица $\mathfrak{P}$ измененный смысл: «Всякое утверждение первой ступени, которое $\mathfrak{P}$ произносит в промежуток времени t, ложно», то это предложение может быть принято без противоречия за истинное, так как оно уже образует утверждение второй ступени. Аналогично обстоит дело, если в формулировке изречения лица $\mathfrak{P}$ вместо «утверждения первой ступени» сказать: «утверждение самое большее второй ступени» или «утверждение самое большее третьей ступени» и т. д.

В третьем парадоксе в понятии символически определяемого числа фигурирует отношение к совокупности всех предикатов, что в выражении для предиката $\mathrm{Dsc}(x)$ обнаруживается при появлении знака существования (EP). Если мы уточним здесь образование понятий в смысле ступенчатого исчисления и, вместо того чтобы говорить просто о символически определяемом числе, укажем точно, какой наивысшей ступени должно быть определяющее выражение, то не получится никакого противоречия; ибо самое меньшее из чисел, которое в XX столетии не определено выражением самое большее n ступени, определяется, правда, этим своим свойством; но при этом определяющее выражение принадлежит уже $(n+1)$-й ступени.

§ 6. Недостатки ступенчатого исчисления

Мы видим, что с помощью ограничения ступеней наше расширенное исчисление освобождается от противоречий, с которыми оно было сопряжено при неограниченном способе оперирования. Теперь спрашивается, однако, не слишком ли суживается таким образом исчисление. Мы должны, например, требовать от исчисления, чтобы оно давало нам все те способы заключения, которые играют существенную роль для обоснования математики.

В этом отношении нам может показаться подозрительным уже то обстоятельство, что мы наталкиваемся на трудность при нашем *определении тождества*. Действительно, так как в определяющем выражении $(F)(F(x) \sim F(y))$ к знаку функции F должен быть присоединен индекс, то вместо одного отношения тождества мы получаем, в зависимости от выбора индекса, различные предикаты: $\equiv_1(x, y)$, $\equiv_2(x, y)$ и т. д. Это, правда, не вызывает особых сомнений, потому

что все эти различные предикаты для одних и тех же пар значений x, y одновременно выполняются, соотв. не выполняются. Это можно уяснить себе следующим образом:

Прежде всего ясно, что для каждого n из отношения

$$(F_{n+1})(F_{n+1}(x) \sim F_{n+1}(y))$$

следует отношение

$$(F_n)(F_n(x) \sim F_n(y)),$$

так как область значений F_n заключена в области значений F_{n+1}. Можно, следовательно, доказать:

$$\equiv_{n+1}(x, y) \rightarrow \equiv_n(x, y).$$

Спрашивается, справедливо ли и обратное:

$$\equiv_n(x, y) \rightarrow \equiv_{n+1}(x, y).$$

Не внося существенной специализации, мы можем ограничиться случаем $n=1$. Мы можем тогда усмотреть справедливость предложения содержательным путем так: предикат, относящийся к предметам, может оказаться выражением второй ступени лишь благодаря тому, что в нем встречаются кванторы, принадлежащие переменным для высказываний или функций. Для такого предиката можно выбрать форму представления так, чтобы эти кванторы, равно как и те, которые принадлежат предметным переменным, стояли вначале, а за ними следовало выражение, которое, кроме аргумента, подлежащего выражению предиката, содержало бы в качестве аргументов только принадлежащие к стоящим спереди кванторам знаки высказываний и функций и предметные переменные. Выразим, например, этот предикат в форме:

$$(Ez)(F_1)(EG_1)\Phi(F_1, G_1, z, x).$$

Согласно нашему допущению относительно Φ, предикат $\Phi(F_1, G_1, z, x)$ первой ступени, ибо он образован из подобных предикатов с помощью операций &, $\vee$, $\overline{}$, $\rightarrow$. Из $\equiv_1(x, y)$ следовало бы в таком случае:

$$\Phi(F_1, G_1, z, x) \sim \Phi(F_1, G_1, z, y).$$

Так как это справедливо для всякого предиката F_1 и G_1 первой ступени и для всякого z, то мы получаем:

$$(Ez)(F_1)(EG_1)\Phi(F_1, G_1, z, x)$$
$$\sim (Ez)(F_1)(EG_1)\Phi(F_1, G_1, z, y).$$

То же рассуждение можно провести для всякого частного предиката второй ступени. Таким образом получаем:

$$(F_2)(F_2(x) \sim F_2(y)),$$

т. е.: $\equiv_1(x, y) \rightarrow \equiv_2(x, y)$ доказано.

В этом рассуждении есть нечто неудовлетворительное, поскольку оно не ведет к формальному выводу формулы $\equiv_1(x, y) \rightarrow \equiv_2(x, y)$ из аксиом. Но во всяком случае оно все же показывает, что в различении отношений $\equiv_n(x, y)$ еще нет принципиальных затруднений.

Существенные трудности возникают, однако, при попытке выразить в нашем исчислении доказательства теории множеств и анализа. Уже при попытке изложить на языке нашего исчисления канторовское доказательство существования несчетных множеств мы наталкиваемся на подобную трудность. Вместо множества всех множеств целых чисел, составляющего простейший пример несчетного множества, здесь нужно рассматривать множество всех предикатов, относящихся к целым числам, как к предметам. При этом совокупность этих предикатов нужно ограничить, поскольку по смыслу ступенчатого исчисления нельзя говорить просто о множестве всех числовых предикатов. Напротив, для предикатов, которые должны быть элементами рассматриваемого множества, нужно установить наивысшую ступень.

Если n — выбранное число, указывающее ступень, то мы должны иметь дело с множеством всех числовых предикатов, не выше n-й ступени, и речь идет о том, чтобы доказать несчетность этого множества, т. е. показать, что если каким-нибудь образом всякому целому числу однозначно соотнести предикат из этого множества, то среди соотнесенных предикатов во всяком случае окажутся не все предикаты множества.

Желая поступить по образцу канторовского доказательства, мы исходим из допущения, что дано какое-нибудь соответствие требуемого рода, т. е. высказывание $R(x, P_n)$, которое при постоянном числе x выполняется в точности одним предикатом P_n. Рассмотрим тот предикат $Pc(x)$, который тогда и только тогда выполняется для числа x, когда соотнесенный этому числу предикат не выполняется для него. Таким образом, $Pc(x)$ определен формулой:

$$(P_n)(R(x, P_n) \rightarrow \overline{P_n}(x)).$$

Относительно этого предиката мы можем доказать на основе его определения, что он не совпадает ни с одним из соотнесенных числам предикатов. Действительно, если бы Pc соответствовал числу m, то, с одной стороны, должно было бы выполняться $R(m, Pc)$; с другой стороны, вследствие определения $Pc(x)$ и в силу однозначности соответствия тогда должно быть:

$$Pc(m) \sim (R(m, Pc) \rightarrow \overline{Pc}(m)).$$

Из этих двух соотношений получилось бы противоречие:

$$Pc(m) \sim \overline{Pc}(m).$$

После этого, по аналогии с канторовским доказательством, мы должны были бы быть уже у цели. Однако на самом деле мы обнаружили только существование числового предиката, отличного от всех предикатов, отнесенных предикатом R к целым числам, но не доказали, что этот предикат Pc принадлежит нашему множеству; и это требование на самом деле невыполнимо, ибо множество содержит только предикаты n-й ступени, между тем как определяющее выражение для $Pc(x)$

$$(P_n)(R(x, P_n) \rightarrow \overline{P_n}(x))$$

$(n+1)$-й ступени. Вследствие различия ступеней желаемое доказательство, таким образом, не получается.

Вполне аналогично с этим примером и в некоторых других решающих местах обнаруживается, что благодаря выделению ступеней мы теряем возможность отобразить с помощью логического исчисления некоторые математические заключения. В особенности это имеет место для *обоснования теории действительных* чисел. В математике употребительны различные способы введения действительных чисел; действительное число определяется с помощью канторовского фундаментального ряда, бесконечной десятичной или двоичной дроби, дедекиндова сечения. Для присоединения к логике наиболее удобен дедекиндов метод; при этом при разбиениях рациональных чисел, образующих сечение, достаточно всегда рассматривать только класс меньших. Класс или множество рациональных чисел задается определяющим его предикатом. Таким образом, под действительным числом мы будем понимать предикат, обладающий определенным свойством, так называемым «свойством сечения» $\mathrm{Sc}(P)$, причем мы должны следить за тем, чтобы эквивалентные предикаты выражали одно и то же действительное число. Далее, действительные числа должны образовывать определенно ограниченную область предметов; ибо в анализе нам постоянно приходится иметь дело с предложениями о всех действительных числах, равно как о существовании действительных чисел. Мы должны поэтому ограничить предикаты, принимаемые нами для определения действительных чисел, некоторой определенной областью и будем допускать, например, лишь предикаты *первой ступени* для определения действительных чисел. Действительное число является,

таким образом, предикатом первой ступени P_1, удовлетворяющим определенному условию $\mathrm{Sc}(P_1)$.

Сумма и произведение двух действительных чисел могут быть при этом определены соответствующим образом и фактически, в свою очередь, выражены предикатом первой ступени. Однако другой вопрос: получаются ли и более высокие способы заключений математического анализа из нашей логической теории? К числу особенно важных следует причислить *предложение о верхней границе*, утверждающее, что для всякого ограниченного множества действительных чисел существует верхняя граница, т. е. действительное число a, обладающее тем свойством, что всякое число множества $\leqq a$ и что для всякого действительного числа, которое $< a$, существует по меньшей мере одно число множества, большее его. Не вдаваясь в подробную формальную трактовку (мы это сделаем в § 8), нетрудно содержательно уяснить себе, что в определении предиката, представляющего верхнюю границу, должны были бы встречаться знаки общности и существования для предикатов первой ступени; но это значит, что сам этот предикат должен был бы быть второй ступени и, следовательно, вообще он не выражал бы какого-либо действительного числа. Таким образом, мы вообще не можем с помощью нашего исчисления провести доказательство существования верхней границы.

§ 7. Аксиома сводимости

На приведенных примерах обнаружилось, что метод ступенчатого исчисления слишком ограничивает возможности логического вывода; мы попытаемся поэтому так видоизменить это исчисление, чтобы оно получило бо́льшие возможности. Рассмотрим еще раз доказательство существования верхней границы. Невозможность провести доказательство в ступенчатом исчислении проистекает из того обстоятельства, что предикат, который должен был определять верхнюю границу, был выше, чем первой ступени. Доказательство было бы завершено, если бы для подобного предиката существовал эквивалентный предикат первой ступени, так как такой предикат действительно выражал бы действительное число. Аналогично обстоит дело для канторовского доказательства существования несчетных множеств.

Исходя из этого, *Уайтхед и Рэссел* придумали следующий выход из положения: они присоединили к ступенчатому исчислению особый постулат *«аксиому сводимости»* («axiom of reducibility»).

В целях общей формулировки этого постулата мы расширим определенное до сих пор только для предикатов понятие эквивалентности, называя вообще две функции с аргументами одного и того же рода эквивалентными, если они выполняются для одинаковых в точности систем значений аргументов. Далее, мы введем новый термин, называя функциональное выражение *«предикативным»*, если оно имеет самую низкую ступень, совместимую с родом его аргументов, т. е. ту ступень, которая принадлежит выражению, содержащему аргументы рассматриваемого выражения в качестве единственных неопределенных знаков.

Применяя эту терминологию, нашу аксиому можно выразить так:

«Для всякого встречающегося в ступенчатом исчислении функционального выражения существует эквивалентное предикативное выражение».

Как частный случай здесь заключено допущение, что для всякого предиката $P_n(x)$ (с произвольным индексом n), аргумент которого относится к первоначальным предметам исчисления, существует эквивалентный предикат первой ступени; т. е., на языке исчисления, для всякого индекса n формула

$$(P_n)(EP_1)(x)(P_n(x) \sim P_1(x))$$

является истинной.

Можно было бы думать, что вследствие допущения аксиомы сводимости только что исключенные противоречия возникают снова; что это не так, легко выяснить на рассмотренных нами парадоксах.

Что касается первых двух парадоксов, то к ним наш постулат вообще неприменим; к первому потому, что здесь функция $Pd(P_n)$ уже предикативна согласно своему определению; ко второму потому, что наша аксиома касается только функциональных выражений, а не выражений для высказываний. В третьем парадоксе возможно применение нашего постулата. Обусловленное ступенчатым исчислением снятие противоречия основано здесь на том, что ступень функции $\mathrm{Mds}(x)$ на единицу выше индекса функционального знака P, неявно встречающегося в ее определении; это дает нам возможность воспользоваться нашим новым допущением. Мы можем теперь утверждать существование предиката первой ступени, эквивалентного $\mathrm{Mds}(x)$. Но этим не вызывается возвращение прежнего противоречия, ибо, утверждая существование предиката, эквивалентного $\mathrm{Mds}(x)$, мы ведь еще не пишем символического выражения для такого предиката и не можем поэтому предполагать, что функция Scr выполняется для этого предиката, так что отпадает существенное условие для возникновения противоречия.

§ 8. Применение аксиомы сводимости

После того как мы показали, что и при допущении аксиомы сводимости приведенные парадоксы попрежнему исключаются, поясним на нескольких примерах, как благодаря введению этой аксиомы устраняются препятствия, мешающие плодотворному применению ступенчатого исчисления.

В качестве сто́ящего быть отмеченным преимущества, которое мы получаем благодаря допущению этой аксиомы, прежде всего упомянем, что она дает нам возможность строго формально (для каждого значения n) вывести отношение:

$$\equiv_1(x, y) \sim \equiv_n(x, y).$$

Это удается сделать следующим образом.

Сначала покажем следующее: пусть $\Phi(P_n)$ — функциональное выражение, зависящее от P_n, и пусть для него формула

A) $$(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow (\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n))$$

является доказуемой в исчислении. Мы утверждаем тогда, что можно доказать также формулу:

B) $$(P_n)\,\Phi(P_n) \sim (P_1)\,\Phi(P_1).$$

Доказательство. Ставя впереди знак общности (P_1) и используя формулу (34), мы получаем из A):

$$(EP_1)(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow (EP_1)(\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n)).$$

Это выражение, благодаря замене

$$(EP_1)(\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n))$$

эквивалентным выражением

$$(P_1)\,\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n),$$

можно заменить на

$$(EP_1)(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow ((P_1)\,\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n)).$$

Если мы здесь поставим впереди знак общности (P_n) и используем формулу (31), то получим:

$$(P_n)((EP_1)(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow (P_n)((P_1)\,\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n)).$$

Так как формула слева от знака $\rightarrow$ совпадает с выражением аксиомы сводимости, то мы получаем:

$$(P_n)((P_1)\,\Phi(P_1) \rightarrow \Phi(P_n))$$

и отсюда:

C) $$(P_1)\,\Phi(P_1) \rightarrow (P_n)\,\Phi(P_n).$$

С другой стороны, имеем:

$$(P_n)\,\Phi(P_n) \rightarrow \Phi(P_1) \quad \text{(применение аксиомы } e)).$$

D) $$(P_n)\,\Phi(P_n) \rightarrow (P_1)\,\Phi(P_1) \quad \text{(по правилу } \gamma').$$

Из C) и D) получаем B).

Но $P_n(x) \sim P_n(y)$ есть выражение $\Phi(P_n)$, для которого доказуема формула A); ибо из

$$(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow (P_n(x) \sim P_1(x)),$$

$$(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow (P_n(y) \sim P_1(y))$$

мы получаем:

$$(x)(P_n(x) \sim P_1(x)) \rightarrow [(P_1(x) \sim P_1(y)) \rightarrow (P_n(x) \sim P_n(y))].$$

Таким образом, и для этого $\Phi(P)$ имеет место соотношение B), т. е.:

$$(P_n)(P_n(x) \sim P_n(y)) \sim (P_1)(P_1(x) \sim P_1(y))$$

или, иначе написав:

$$\equiv_n(x, y) \sim \equiv_1(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Роль аксиомы сводимости оказывается еще более значительной при *обосновании теории действительных чисел.* Мы уже раньше кратко указали способ выражения дедекиндовской теории в логическом исчислении.

Следуя Дедекинду, мы определяем действительное число как «сечение», т. е. как разбиение рациональных чисел на два класса со следующими «свойствами сечения»:

1. Каждый из обоих классов содержит по меньшей мере *одно* рациональное число.

2. В первом классе не существует наибольшего рационального числа.

3. Если какое-нибудь рациональное число принадлежит к первому классу, то и все меньшие рациональные числа принадлежат к первому классу.

Как уже было раньше упомянуто, при разбиении описанного рода всегда достаточно рассматривать только первый из обоих классов; в таком случае мы имеем дело с множеством рациональных чисел, которое может быть представлено с помощью одного из определяющих его предикатов.

Мы поступаем поэтому следующим образом: принимаем рациональные числа с их основными арифметическими отношениями за систему предметов области индивидуумов.

Под действительным числом мы понимаем в таком случае множество рациональных чисел, для которых существует определяющий предикат P, удовлетворяющий следующим трем условиям:

$$1.\ (Ex)\,P(x)\,\&\,(Ex)\,\overline{P}(x).$$

(«Определенные через $P(x)$ и $\overline{P}(x)$ классы оба не пусты».)

$$2.\ (x)\,\{P(x) \rightarrow (Ey)\,(<x, y)\,\&\,P(y))\}.$$

(«Для всякого рационального числа, обладающего свойством P, существует большее, также обладающее свойством P».)

$$3.\ (x)\,\{P(x) \rightarrow (y)\,(<(y, x) \rightarrow P(y))\}.$$

(«Если x имеет свойство P, то и все меньшие рациональные числа y имеют свойство P».)

Эти три условия, взятые вместе (мы можем их мыслить себе соединенными знаком &), составляют «свойство сечения» предиката. Это свойство предиката мы будем обозначать $\mathrm{Sc}\,(P)$. Два предиката P и Q со свойствами $\mathrm{Sc}\,(P)$ и $\mathrm{Sc}\,(Q)$ тогда и только тогда выражают одно и то же действительное число, когда принадлежащие P и Q множества совпадают, т. е. если выполняется $\mathrm{Aeq}\,(P, Q)$. Чтобы удовлетворить требованию ступенчатого исчисления, мы должны еще установить для определяющих действительные числа предикатов наивысшую ступень. В целях наибольшей простоты мы будем допускать только *предикаты первой ступени* для определения действительных чисел.

Теперь мы установим между действительными числами отношение величины. Для двух предикатов P_1, Q_1, обладающих свойством Sc, выражение $\leqq(P_1, Q_1)$ равнозначно с $\mathrm{Imp}\,(P_1, Q_1)$, т. е. с

$$(x)\,(P_1(x) \rightarrow Q_1(x))$$

или, в виде формулы:

$$\mathrm{Sc}\,(P_1)\,\&\,\mathrm{Sc}\,(Q_1) \rightarrow (\mathrm{Imp}\,(P_1, Q_1) \sim\ \leqq(P_1, Q_1)).$$

Высказывание $<(P_1, Q_1)$ тогда будет определяться выражением:

$$\mathrm{Sc}\,(P_1)\,\&\,\mathrm{Sc}\,(Q_1) \rightarrow (<(P_1, Q_1) \sim (\mathrm{Imp}\,(P_1, Q_1)\,\&\,\overline{\mathrm{Aeq}}\,(P_1, Q_1))).$$

В таком случае можно доказать в исчислении, что оба отношения $\leqq(P_1, Q_1)$ и $<(P_1, Q_1)$ транзитивны. Точно так же можно вывести все остальные свойства, характерные для упорядочивающего отношения.

Сложение и умножение действительных чисел можно свести к сложению и умножению рациональных чисел. Предикат

$$(Ey)\,(Ez)\,(P_1(y)\,\&\,Q_1(z)\,\&\,(x = y + z))$$

выражает сумму, а предикат

$$(Ey)\,(Ez)\,(P_1(y)\,\&\,Q_1(z)\,\&\,(x = y \cdot z))$$

произведение действительных чисел, определенных через P и Q ($x = y + z$ и $x = y \cdot z$ здесь трехчленные основные предикаты в области рациональных чисел).

Мы имеем теперь возможность ввести обычным образом понятия *ограниченности* и *верхней границы* множества действительных чисел. Множество действительных чисел выражается предикатом предикатов $A(P)$, удовлетворяющим условию:

$$(P_1)\,(A\,(P_1) \rightarrow \mathrm{Sc}\,(P_1))\,\&\,(P_1)\,(Q_1)\,((A\,(P_1)\,\&\,\mathrm{Aeq}\,(P_1, Q_1)) \rightarrow A\,(Q_1)).$$

Утверждение, что множество $A(P)$ действительных чисел ограничено сверху, означает, что существует действительное число, большее или равное каждому числу множества; в виде формулы:

$$(EP_1)\{\mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, (Q_1)(A(Q_1) \to \leqq (Q_1, P_1))\},$$

вместо чего мы пишем также кратко $(EP_1)\,\mathrm{Sch}(P_1, A)$, или, словесно: существует число P_1, представляющее верхний предел множества A.

Мы допускаем также, что $A(P_1)$ содержит по меньшей мере один элемент, т. е., что верна формула:

$$(EP_1)\,A(P_1).$$

Значениями аргумента A являются только предикаты первой ступени. Что касается определения наивысшей ступени самой функции A, то эта ступень должна быть выбрана по меньшей мере равной 2, ибо $A(P)$, как функция от предиката, не может быть первой ступени. Но в остальном она остается совершенно произвольной, и мы выберем за индекс A какое-нибудь определенное n. Предложение о верхней границе можно теперь формулировать так: *если множество действительных чисел имеет верхний предел, то оно имеет также наименьший верхний предел.*

Математическое доказательство существования верхней границы, приведенное к простейшей форме, состоит в том, что для рассматриваемого множества действительных чисел, представляющего собой множество множеств первой ступени, образуется множество, являющееся их суммой. Согласно замечаниям § 3 этой главы, соответствующая $A_n(P_1)$ сумма множеств выражается предикатом:

$$(EP_1)(P_1(x) \,\&\, A_n(P_1)).$$

Обозначим этот предикат для краткости через $\mathrm{Vg}(x, A_n)$.

Для предиката $\mathrm{Vg}(x, A_n)$ нужно, следовательно, показать, что он выражает действительное число, представляющее верхнюю границу множества A_n.

Прежде всего мы должны показать, что множество, определенное через $\mathrm{Vg}(x, A_n)$, вообще является действительным числом.

Легко показать, что три свойства, соединенные в Sc, верны для Vg. Выведем первое свойство. Из

$$(EP_1)\,A_n(P_1)$$

$$(P_1)(A_n(P_1) \to \mathrm{Sc}(P_1))$$

мы заключаем:

$$(EP_1)(\mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, A_n(P_1)).$$

Так как верно

$$\mathrm{Sc}(P_1) \to (Ex)\,P_1(x),$$

то мы имеем:

$$(EP_1)((Ex)\,P_1(x) \,\&\, A_n(P_1)).$$

Последнюю формулу можно преобразовать к виду:

$$(Ex)(EP_1)(P_1(x) \,\&\, A_n(P_1)),$$

т. е. получаем:

$$(Ex)\,\mathrm{Vg}(x, A_n).$$

Наряду с этим можно показать

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Vg}}(x, A_n), \quad \text{т. е.} \quad (Ex)\,\overline{(EP_1)}(P_1(x) \,\&\, A_n(P_1)).$$

Эту формулу можно преобразовать сначала к виду:

$$(Ex)(P_1)(A_n(P_1) \to \overline{P}_1(x)).$$

Согласно предположению об ограниченности множества A_n, мы имеем:

$$(EP_1)\{\mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, (Q_1)(A_n(Q_1) \to \leqq (Q_1, P_1))\},$$

Далее, верно:

$$\mathrm{Sc}(P_1) \to (Ex)\,\overline{P}_1(x),$$

таким образом:

$$(EP_1)\{(Ex)\,\overline{P}_1(x) \,\&\, \mathrm{Sc}(P_1) \,\&\, (Q_1)(A_n(Q_1) \to \leqq (Q_1, P_1))\}.$$

Из определения $\leqq (Q_1, P_1)$ легко получаем:

$$\leqq (Q_1, P_1) \,\&\, \mathrm{Sc}\,(Q_1) \,\&\, \mathrm{Sc}\,(P_1) \to (x)\,(\overline{P}_1(x) \to \overline{Q}_1(x)).$$

Выражение

$$(Q_1)\,(A_n(Q_1) \to \leqq (Q_1, P_1))$$

может быть в предпоследней формуле заменено выражением:

$$(Q_1)\,[A_n(Q_1) \to (x)\,(\overline{P}_1(x) \to \overline{Q}_1(x))],$$

или же

$$(x)\,(\overline{P}_1(x) \to (Q_1)\,(A_n(Q_1) \to \overline{Q}_1(x))).$$

Из формулы

$$(EP_1)\,\{(Ex)\,\overline{P}_1(x) \,\&\, \mathrm{Sc}\,(P_1) \,\&\, (x)\,[\overline{P}_1(x) \to (Q_1)\,(A_n(Q_1) \to \overline{Q}_1(x))]\}$$

мы получим тогда:

$$(Ex)\,(Q_1)\,(A_n(Q_1) \to \overline{Q}_1(x)),$$

т. е.

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Vg}}\,(x, A_n).$$

Таким образом, для $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ доказано первое свойство сечения.

Аналогично доказываем для $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ свойства 2. и 3. (см. стр. 224), так что, следовательно, верно $\mathrm{Sc}\,(\mathrm{Vg})$.

Но этим еще не установлено, что $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ представляет собой действительное число. Для этого нужно было бы знать, что принадлежащее предикату $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ множество может быть определено предикатом первой ступени. Но само $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ заведомо не первой ступени, так как в нем встречается квантор (EP_1). Здесь как раз то место, где используется аксиома сводимости. По этой аксиоме имеем:

$$(EP_1)\,(x)\,(P_1(x) \sim \mathrm{Vg}\,(x, A_n)).$$

Таким образом, $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ *определяет действительное число.*

Мы покажем теперь:

$$(P_1)\,(A_n(P_1) \to \leqq (P_1, \mathrm{Vg}\,(x, A_n))),$$

т. е., что действительное число, соответствующее $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$, *является верхним пределом множества, определенного выражением* $A_n(P_1)$.

Если мы подставим теперь вместо Vg и $\leqq$ определяющие выражения, то эта формула превращается в выражение:

$$P_1\,(A_n(P_1) \to (x)\,[P_1(x) \to (EQ_1)\,(Q_1(x) \,\&\, A_n(Q_1))]),$$

а после преобразования — в выражение:

$$(P_1)\,(x)\,(A_n(P_1) \,\&\, P_1(x) \to (EQ_1)\,(A_n(Q_1) \,\&\, Q_1(x))).$$

Последняя форма позволяет увидеть в нашей формуле результат применения аксиомы f).

Остается еще показать, что $\mathrm{Vg}\,(x, A_n)$ является *наименьшим* верхним пределом, или, в виде формулы, что:

$$(P_1)\,\{[\mathrm{Sc}\,(P_1) \,\&\, (Q_1)\,(A_n(Q_1) \to \leqq (Q_1, P_1))] \to \leqq (\mathrm{Vg}, P_1)\}.$$

Если мы здесь снова заменим все сокращения их определениями, то получим:

$$(P_1)\,\{[\mathrm{Sc}\,(P_1) \,\&\, (Q_1)\,(A_n(Q_1) \to (x)\,(Q_1(x) \to P_1(x)))] \to (y)\,[(EP_1')\,(P_1'(y) \,\&\, A_n(P_1')) \to P_1(y)]\}.$$

Знак общности (x) можно сдвинуть здесь вперед; таким образом, получим:

$$(P_1)\,\{[\mathrm{Sc}\,(P_1) \,\&\, (x)\,(Q_1)\,(A_n(Q_1) \,\&\, Q_1(x) \to P_1(x))] \to (y)\,(EP_1')\,(P_1'(y) \,\&\, A_n(P_1') \to P_1(y))\}.$$

Эту формулу мы можем вывести с помощью формулы (22).

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать, что введение аксиомы сводимости является подходящим средством преобразования ступенчатого исчисления в систему, с помощью которой могут быть отображены методы доказательств высшей математики. Полное построение основ математики с помощью ступенчатого исчисления было выполнено *Уайтхедом* и *Рэсселом*[1].

§ 9. Заключительные замечания о ступенчатом исчислении

В этой своей окончательной форме рэсселовская ступенчатая логика представляет собой логический инструмент, пригодный даже при выражении сложных логических связей, какие встречаются в теории действительных чисел. Однако рассмотрим еще раз принципиальную сторону этой логики.

Трудность, приведшая к установлению ступенчатой логики, состояла в том, что понятия «все свойства», «все высказывания», если они употребляются неограниченным образом, содержат порочный круг. Основная мысль ступенчатой логики состояла при этом в следующем: мы положили в основу определенную область индивидуумов и представляли себе данными определенные, относящиеся к предметам этой области, основные свойства и основные отношения. Дальнейшие предикаты получались из них с помощью логических операций. В зависимости от способа их определения, функциям приписывалась определенная ступень. Так как при этом исчисление оказалось недостаточным для приложений, мы помогли себе посредством введения аксиомы сводимости.

Но в чем состоит содержательный смысл этой аксиомы? Она отнюдь не очевидна, как другие правила вывода, которые мы перевели на язык формул исчисления функций. Мы можем сказать еще кое-что не в пользу аксиомы сводимости. При *произвольном* выборе основных свойств и основных соотношений аксиома сводимости, вообще говоря, заведомо не выполняется. Следовательно, речь должна итти о том, чтобы в каждом данном случае дополнить систему основных функций так, чтобы удовлетворить требованию этой аксиомы.

[1] *Whitehead, A. N.* and *Russel, B.*, Principia mathematica.

Конструктивным приемом нельзя достичь подобного дополнения, так как первая ступень, по определению, замкнута относительно операций &, $\vee$, $\rightarrow$, $\overline{}$, (x), (Ex). Таким образом, остается только возможность предположить систему основных предикатов первой ступени в виде некоторой само по себе существующей совокупности, так что их многообразие не зависит ни от фактически данных определений, ни вообще от наших возможностей определения.

Эта область функций первой ступени должна быть настолько обширной, чтобы выполнялась аксиома сводимости. Если мы будем считать предикаты различными лишь постольку, поскольку различны принадлежащие им множества, принимая, следовательно, теоретико-множественное истолкование исчисления, то требование аксиомы сводимости означает: совокупность функций первой ступени должна быть настолько обширна, чтобы заключать уже все функции. Но в таком случае идея ступенчатого исчисления была бы бесполезным усложнением, и можно с самого начала предположить систему всех функций одного и того же типа как существующую саму по себе совокупность. Поэтому из рэсселовских идей сохранилась бы только первая,—что нужно строго различать между индивидуальными функциями, функциями индивидуальных функций и т. д. Собственное же различение ступеней отпало бы. Если мы заранее кладем в основу систему всех индивидуальных предикатов как неизменную совокупность и лишь определяем затем какой-нибудь индивидуальный предикат через отношение ко всем индивидуальным предикатам, то логического круга не получается. Не вводится ведь никакой новый индивидуальный предикат, но лишь более точно обозначается некоторый определенный индивидуальный предикат через отношение ко всем индивидуальным предикатам. По меньшей мере мы имеем здесь дело со случаем, несущественно отличающимся от рэсселовской ступенчатой логики с присоединением аксиомы сводимости. И здесь можно определить предикаты первой ступени и, определяя сначала некоторый предикат второй ступени, брать затем эквивалентный предикат первой ступени.

Спрашивается однако, как при таком понимании обстоит дело с *парадоксами*. Возникновение первого парадокса основано на том, что предикат употребляется в качестве своего собственного аргумента. Подобная подстановка на пустое место функции теперь невозможна, так как функция всегда имеет более высокий тип, чем каждый из ее аргументов.

Оба других парадокса имеют существенно отличный от первого характер. В то время как первый парадокс обнаруживал противоречие в самом функциональном исчислении в той общей форме, в которой оно тогда было сформулировано, оба другие указывают лишь на несовместимость с исчислением некоторых утверждений. В первом случае это были

$$\mathrm{Bh}[(X)(\mathrm{Bh}(X) \to \overline{X})]$$

и

$$(X)[\mathrm{Bh}(X) \to \equiv (X, (Y)(\mathrm{Bh}(Y) \to \overline{Y}))],$$

а во втором случае

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Dsc}}(x), \quad \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$$

и

$$(P)\{(Ex)P(x) \to (Ex)[P(x) \,\&\, (y)(<(y, x) \to P(y)]\}.$$

Ни одно из этих предложений не выражает логического тождества. Таким образом, эти парадоксы вообще не затрагивают нашего исчисления. Поэтому мы не будем ими больше заниматься.

Все же, в самом общем понимании, исчисление, которое мы таким образом получаем, без детального исследования остается еще проблематичным. Твердо обрисованную и замкнутую в себе область формул мы получаем, допуская только переменные, соответствующие индивидуальным предикатам, и соответствующие кванторы. Для этой области может быть поставлена и проблема разрешимости.

ПРИЛОЖЕНИЕ II[1]

Комментарий к § 1 первой главы

Настоящий комментарий имеет целью облегчить чтение книги для читателя, не привыкшего к стилю современной математической литературы. В нем намечаются самые общие контуры исчисления высказываний и содержится подробный разбор содержания первых страниц книги. Естественно, что этот разбор не мог не отразить точки зрения его автора.

Каждому из нас случалось, вероятно, не раз употребить в споре выражение: «Да это же логически следует из ваших собственных слов». Что значит здесь «логически следует»? В каком случае мы можем сказать про одно утверждение, что оно является «логическим следствием» из другого (или других)?—Попытке дать ответ на этот вопрос, уточнению запаса средств, с помощью которых в так называемых точных науках, особенно в математике, из одних предложений выводятся другие, «логически следующие» из них, посвящена, в основном, настоящая книга. Простейшая из задач этого рода рассматривается уже в первой ее главе.

Тут речь идет о наиболее бедном логическом аппарате, достаточном для вывода логических следствий только в самых простых случаях (с которыми, впрочем, нам приходится встречаться и во всех более сложных случаях подобно тому, как в самых сложных областях математики приходится пользоваться арифметическими операциями с натуральными числами 0, 1, 2, 3 и т. д.). Простота этого аппарата основана на том, что мы абстрагируемся от всех логических тонкостей мысли, выражаемых в обычном разговорном и, особенно, литературном языке, и различаем высказывания по одному

[1] Комментарии редактора перевода—С. А. Яновской.

единственному признаку: с точки зрения их *истинности* или *ложности*.

Рассматриваемые с такой точки зрения любые два истинных высказывания, вроде «Дважды два—четыре» или «Наполеон умер 5 мая 1821 года», равно как и любые два ложных высказывания, вроде «Дважды два—пять» или «Снег черен», трактуются как эквивалентные друг другу. Различия между ними выступают лишь в процессе развития логики, связанного всякий раз с выяснением недостаточности уже построенного аппарата, несоответствия используемых им *форм* выражения мысли и способов вывода следствий с *содержанием* научных дисциплин, к которым он должен применяться.

Итак, в исходном пункте логики высказываний лежит подразделение высказываний на истинные и ложные. Авторы совсем не останавливаются при этом на вопросе о том, как именно происходит выяснение истинности или ложности высказываний. С нашей точки зрения, этого нельзя сделать, не опираясь в конечном счете на критерий практики. Ибо истина для нас есть соответствие с реальной (материальной) действительностью, проверяемое на практике. При подразделении высказываний на истинные и ложные в исчислении высказываний, как вообще в классической формальной логике, предполагается еще, что одно и то же высказывание не может быть одновременно как истинным, так и ложным, но должно быть обязательно одним из двух: либо истинным, либо ложным. Метафизики, о которых Энгельс остроумно говорил, что они «мыслят законченными, непосредственными противоположениями» и речь их «состоит из «да—да, нет—нет; что сверх того, то от лукавого», полагали, что все наши высказывания автоматически удовлетворяют этому требованию. Мы хорошо знаем теперь, что на самом деле это не так. «Я вспоминаю,—писал И. В. Сталин еще в 1904 г.,—русских метафизиков 50-х годов прошлого столетия, которые назойливо спрашивали тогдашних диалектиков, полезен или вреден дождь для урожая, и требовали от них «решительного» ответа. Диалектикам нетрудно было доказать, что такая постановка вопроса совершенно не научна, что в разное время различно следует отвечать на такие вопросы, что во время засухи дождь — полезен, а в дождливое время—бесполезен и даже вреден, что, следовательно, требование «решительного» ответа на такой вопрос является явной глупостью».

Чтобы правильно поставить вопрос, уточнить его настолько, чтобы он допускал только один из двух ответов: *да* или *нет*, приходится иногда очень основательно поработать.

В исчислении высказываний исходят из предположения, что имеется уже некоторый запас высказываний, удовлетворяющих этому требованию. Принадлежащие этому запасу высказывания называются *основными* или *элементарными*. Задача, с которой начинается построение исчисления, состоит в установлении некоторых средств, позволяющих, имея какой-нибудь запас элементарных высказываний, построить с его помощью новые высказывания, удовлетворяющие тому же требованию, т. е. либо истинные, либо ложные, и притом только одно из двух. Соответствующие правила исчисления называют иногда поэтому правилами *образования*. Самое исчисление высказываний можно при этом строить двумя различными способами: 1) «формально-дедуктивным», или «аксиоматическим», и 2) «содержательно-алгоритмическим», или «табличным» (иногда говорят «матричным»). Оба они изложены в первой главе, где дано также доказательство эквивалентности обоих построений, на смысле которой мы остановимся в особом примечании. Сейчас охарактеризуем вкратце оба способа.

Предварительно заметим еще, что так как мы совсем не входим пока в содержание высказываний, не отличаем даже друг от друга любых двух истинных (соответственно ложных) высказываний, то всякое элементарное высказывание нам приходится рассматривать как одно нерасчленяемое целое—обозначаемое, соответственно, одной буквой,—которому предполагается отнесенным одно и только одно из двух «значений истинности»: *истина* или *ложь*. Чтобы задать правила, позволяющие образовывать из элементарных высказываний сложные, мы можем поступить теперь двояким способом. При формально-дедуктивном способе забывают вообще, что буквы у нас обозначали высказывания, и исходят из определения *формулы*. С целью получить последнее поступим так.

Перечислим сначала знаки, из которых будут состоять формулы исчисления и которые образуют его «алфавит». Такими знаками служат, во-первых, большие латинские буквы X, Y, Z..., играющие роль переменных в формулах (в «содержательном» построении им соответствуют переменные для высказываний). Кроме переменных и вспомогательных знаков, которыми служат скобки, в формулах будут встречаться еще знаки, играющие роль логических постоянных (констант). Авторы вводят следующие знаки этого рода (для внесения некоторой ясности мы сопоставляем каждому его значение при «содержательном» построении):

1. «—» — знак отрицания,
2. «&» — знак, соответствующий союзу «и»,
3. «$\vee$» — соответствует союзу «или»,
4. «$\rightarrow$» — соответствует выражению «если... то»,
5. «$\sim$»—означает: «равнозначно».

При освещении «содержательного» построения исчисления высказываний мы остановимся на каждом из них в отдельности, пока же сделаем еще одно замечание.

Кроме знаков: X, Y, Z..., $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, в книге употребляются еще готические буквы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$..., знак «экв» и т. п. Этого рода знаки не принадлежат исчислению высказываний. О таких знаках говорят, что они принадлежат не «логике», а «металогике»,

т. е. служат для формулировки правил обращения со знаками «логики», вообще для построения *теории логики*. «Логика» и «металогика» отличаются друг от друга, как наука I, изучающая некоторый предмет, от науки II, изучающей методы науки I.

Теперь мы можем сформулировать *определение формулы исчисления высказываний*:

1. Буквы X, Y, Z,... суть формулы.
2. Если $\mathfrak{A}$ формула, то и $\overline{\mathfrak{A}}$ формула.
3. Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ формулы, то и $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ тоже формулы.

С помощью этого определения мы можем написать сколь угодно много разных формул. Так, поскольку X есть формула, то и $\overline{X}$ формула. Поскольку $\overline{X}$ и Y— формулы, то и $\overline{X}\rightarrow Y$ тоже формула. Так как $\overline{X}$ и $\overline{X}\rightarrow Y$ формулы, то и $\overline{X}\,\&\,(\overline{X}\rightarrow Y)$ тоже формула. Но $\overline{X}\,\&\,(\overline{X}\rightarrow$ не формула и $\overline{X}\,\&\rightarrow(\overline{X}\rightarrow Y)$ тоже не есть формула. Мы не будем останавливаться здесь на правилах, упрощающих внешний вид формулы, например, относящихся к употреблению скобок. Они достаточно ясно изложены в тексте.

Кроме правил *образования*, исчисление содержит еще правила *преобразования*, назначением которых и является как раз получение логических следствий. Как и понятие формулы, их можно сформулировать, не говоря ни слова о высказываниях. В § 10, где речь идет об аксиоматическом построении исчисления высказываний, это так и делается. В дальнейшем выяснится также, какой это имеет смысл и для каких целей может понадобиться. Пока заметим только, что это можно сделать, выбрав несколько формул («аксиом») из запаса формул исчисления и задав правила вывода, позволяющие из выбранных формул получать («доказывать») новые, также играющие роль выделяемых в исчислении. Такой именно способ построения научной теории и называется «аксиоматическим», или «формально-дедуктивным». Авторы могли, конечно, начать с него. Однако при этом было бы совсем неясно, чем объясняется выбор тех или иных аксиом и правил вывода и как охарактеризовать в целом весь получаемый с их помощью запас «доказуемых» формул, выделяемых таким образом из общего запаса всех вообще формул исчисления. Авторы поступили поэтому правильно, начав с «содержательного» построения логики высказываний, в котором буквы X, Y, Z... употребляются именно как высказывания, а логические постоянные $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ определяются содержательно, т. е. как имеющие вполне определенный и притом именно логический смысл. Используемое авторами «алгоритмическое» определение их лучше всего сформулировать с помощью следующих таблиц. Пусть имеем высказывание X, про которое знаем, что оно либо истинно, либо ложно, но и только одно из двух. Обозначим истинность высказывания буквой *и*, ложность его буквой *л*. Тогда высказывание $\overline{X}$ (*не* X) определяется так:

	X	$\overline{X}$
1.	*и*	*л*
2.	*л*	*и*

т. е. если X истинно, то $\overline{X}$ ложно, если X ложно, то $\overline{X}$ истинно. Мы видим, что если X удовлетворяет требованию подчиняться законам классической формальной логики, то и $\overline{X}$ удовлетворяет этому же требованию: в каждом возможном случае оно либо истинно, либо ложно, и ни в одном из них не имеет сразу обоих этих значений.

Если в нашем распоряжении имеются два высказывания X и Y, каждое из которых удовлетворяет основному требованию иметь одно и только одно из двух значений *и*, *л*, то различных возможных случаев уже четыре: когда X истинно, Y может быть как истинным, так и ложным; когда X ложно, для Y опять-таки

остаются две возможности. Мы получаем, таким образом, следующие 4 случая:

	X	Y
1.	*и*	*и*
2.	*и*	*л*
3.	*л*	*и*
4.	*л*	*л*

Чтобы определить знаки &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, т. е. выражения $X \& Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \sim Y$, нам нужно в каждой таблице, определяющей какое-нибудь из этих выражений (α обозначает один из знаков: &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$):

X	Y	$X \alpha Y$
и	*и*	$\square$
и	*л*	$\square$
л	*и*	$\square$
л	*л*	$\square$

поставить в каждой из четырех, пока еще пустых, клеточек одну и только одну из букв *и* и *л*. Очевидно, мы постараемся это сделать так, чтобы вводимые логические связки, позволяющие из элементарных высказываний образовать сложные, максимально соответствовали обычным союзам разговорной речи. Я говорю «максимально соответствовали», потому что в разговорной речи каждое слово, в том числе и союзы, имеет множество разных оттенков, зависящих от контекста, в котором оно употреблено. Все это богатство оттенков здесь мы не можем выразить. Кроме того, мы связаны требованием поставить в каждой клеточке одну и только одну из букв *и* и *л*.

Для союза «и» это удается сделать все же довольно естественно. Соответствующий ему знак & определяется следующей таблицей:

X	Y	$X\&Y$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

т. е. высказывание $X\&Y$ считается истинным в том и только в том случае, когда истинны оба высказывания: и X и Y. Именно так и употребляется обычно этот союз в разговорной речи. Так, когда мы читаем: «Они пошли в сарай *и* легли на сене», то понимаем это именно в том смысле, что верны оба высказывания: 1) «Они пошли в сарай», 2) «Они легли на сене».

С союзом «или» дело обстоит несколько хуже. Прежде всего, бывают разные «или». Когда мы читаем: «Если кто из товарищей опаздывал на молебен, *или* доходили слухи о какой-нибудь проказе гимназистов, *или* видели классную даму поздно вечером с офицером, то он очень волновался, и все говорил, как бы чего не вышло» (Чехов), — то не понимаем этого в том смысле, что какие-нибудь два или даже все три соединенных здесь союзом «или» высказывания не могли быть верны одновременно. Наоборот, во фразе: «Он молчит, а Варенька поет ему «Виют витры», *или* глядит на него задумчиво своими темными глазами, *или* вдруг зальется: «Ха-ха-ха», и еще отчетливее в «А он только да *или* нет — и больше ни звука», или в «Я заметил, что хохлушки только плачут *или* хохочут, среднего же настроения у них не бывает» (там же), «или» уже разделительное. Соединенные здесь этим союзом предложения не могут быть верны одновременно. Не говоря уже о том, что например, в выражениях «*Или*, быть может, меня обманывает зрение?» (Чехов), «Он потерял всякую чувствительность, *или*, другими словами, перестал жить», «или» имеет отличный от обоих

прежних смысл: употребляясь, как в последнем примере, в смысле «то-есть», связывающего два предложения, «или» дает верное сложное предложение как раз в том случае, когда оба связываемые им предложения одновременно истинны.

В исчислении высказываний в качестве основной связки или операции, порождающей из двух высказываний X, Y высказывание $X \vee Y$, выбирается ***не*** разделительное «или», определяемое следующей таблицей:

X	Y	$X \vee Y$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Высказывание $X \vee Y$ ложно, следовательно, в одном единственном случае: когда оба составляющие его высказывания X и Y ложны. Так как высказывание $X\&Y$, наоборот, истинно только в том случае, когда оба: X и Y истинны, то связки $\vee$ и & оказываются двойственными друг другу. Связанный с этим «принцип двойственности», о котором читатель прочтет в тексте, значительно упрощает исчисление. Именно этим и объясняется выбор в нем в качестве основной связки ***не***разделительного «или»[1].

---

[1] Впрочем, и у разделительного «или» имеются некоторые особенности, делающие выбор его в качестве основной связки для определенных целей особенно подходящим. Если заменить в соответствующих таблицах букву «и» («истинно») на «1», а букву «л» («ложно)» на «0», то в арифметике вычетов по модулю 2 разделительному *или* будет соответствовать сложение, а связке & умножение. Так как законы этой арифметики хорошо известны, то получается не только простая, но и привычная для нас техника вычислений. В статье «О технике вычисления предложений в символической логике», Математический сборник, т. 34, вып. 1, 1927 г., И. И. Жегалкин выбирает поэтому в качестве основной связки, наряду с *и*, именно разделительное *или*.

Из этого не следует, однако, будто разделительное «или» нельзя выразить в терминах исчисления высказываний. Используя знаки $\overline{}$, & и $\vee$, это можно сделать, например, так. Если мы говорим, что из двух высказываний X и Y одно и только одно верно, то высказывание наше — обозначим его через $F(X, Y)$ — истинно в двух случаях: 1) когда X истинно, а Y ложно, или 2) когда Y истинно, а X ложно. В остальных двух случаях оно ложно. Иными словами, оно определяется таблицей:

X	Y	$F(X, Y)$
и	*и*	*л*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Но этой же таблицей определяются и высказывания $(X \vee Y)$ $\& \overline{X \& Y}$ или $(X \vee Y) \& (\overline{X} \vee \overline{Y})$. Действительно,

X	Y	$X \vee Y$	$X \& Y$	$\overline{X \& Y}$	$(X \vee Y) \& \overline{X \& Y}$
и	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*л*	*и*	*л*

Мы видим, что колонки для $F(X, Y)$ в верхней таблице и для $(X \vee Y) \& \overline{X \& Y}$ в нижней совпадают. Так как в обеих таблицах совпадают и исходные колонки для X и Y, то наше утверждение доказано. Предоставляем читателю построить аналогичную таблицу, определяющую шаг за шагом

$(X \vee Y) \& (\overline{X} \vee \overline{Y})$, и убедиться таким образом, что и эта формула может служить выражением для разделительного «или».

Наиболее трудным для начинающих и наименее соответствующим употреблению в обычной речи служит определение знака $\longrightarrow$, соответствующего условному предложению: «Если... то». Дело в том, что в разговорной речи только *ложность* условного предложения: «Если X, то Y» определяется через «значения истинности» составляющих его предложений X и Y; *истинность* же этого предложения обычно имеет смысл независимо от наших сведений насчет истинности или ложности предложений X и Y, составляющих сложное предложение: «Если X, то Y». Так, предложение «*Если* Иван и Петр — братья, *то* Иван и Петр — родственники» *истинно*, независимо от того, братья ли Иван и Петр, родственники ли они. Они могут быть не братьями, но родственниками; они могут быть и не братьями и не родственниками, и тем не менее утверждение, что *если* они братья, *то* они родственники, остается верным. Наоборот, чтобы доказать ложность (общего) условного предложения: «*Если* гость имеет вид джентльмена, *то* он не украдет часов с каминной полки», одна из героинь Диккенса прибегает к противоречащему примеру: «Стоит отвернуться, говорит она, и часов нет». Иными словами, предложение X истинно: гость действительно имеет вид джентльмена, а заключение Y: «он не украдет часов с каминной полки», тем не менее ложно. Ложность условного предложения «Если X, то Y» таким образом доказывается с помощью обнаружения, что X истинно, а Y ложно.

Заметим, что из четырех случаев, рассматриваемых в следующей таблице, определяющей сложное высказывание $X \longrightarrow Y$, каждое из предложений X и Y истинно в двух: X — в первом и втором, Y — в первом и третьем. Но условное предложение истинно чаще, чем безусловное. Вполне естественно поэтому, если мы будем считать его истинным не в двух, а в трех различных случаях и определим предложение $X \longrightarrow Y$ как ложное только в уже рассмотренном нами случае, т. е. когда X истинно, а Y ложно. Мы получим, таким образом, следующую таблицу (C):

	X	Y	$X \to Y$
1.	*и*	*и*	$\boxed{\text{и}}$
2.	*и*	*л*	$\boxed{\text{л}}$
3.	*л*	*и*	$\boxed{\text{и}}$
4.	*л*	*л*	$\boxed{\text{и}}$

В обоснование того, что из всех возможных таблиц рассматриваемого нами вида именно эта наилучше соответствует обычному употреблению условного предложения, заметим еще следующее.

Из истинности двух предложений: 1) «X» и 2) «*Если* X, то Y» мы заключаем обычно об истинности предложения «Y». Так, из истинности предложений: 1)«Иван и Петр—братья» и 2) «*Если* Иван и Петр — братья, *то* Иван и Петр — родственники», мы заключаем, что «Иван и Петр—родственники». Такой вид умозаключения в традиционной логике называется *гипотетическим*, или modus ponens. Итак, если предложения X и $X \to Y$—истинны, то истинно и предложение Y. Поищем в составленной нами таблице случаи, когда оба предложения X и $X \to Y$ истинны. Мы увидим, что такой случай только один: в первой строке, и при этом Y тоже истинно. Иными словами, наша таблица устроена так, что в ней соблюдается modus ponens: из истинности обоих предложений X и $X \to Y$ она приводит к заключению об истинности Y.

Допустим теперь, что предложение $X \to Y$ попрежнему истинно, а Y ложно, т. е. в нашем примере «Иван и Петр не родственники». Ясно тогда, что они и не братья, потому что *если бы* они были братьями, *то* были бы и родственниками. Иными словами, из истинности предложения $X \to Y$ и ложности Y мы заключаем в повседневной жизни о ложности X. Посмотрим, отображается ли это нашей таблицей! Для этого мы должны разыскать в ней случаи, когда $X \to Y$ истинно, а Y ложно. Такой случай опять имеется только один: это четвертая строка, и в ней действительно X имеет значение «*л*» («ложно»).

Представим себе теперь, что предложение $X \to Y$ попрежнему истинно, а X ложно,—в нашем примере «Иван и Петр —не братья». Можем ли мы сказать что-нибудь в ответ на вопрос: родственники они или нет? Ясно, что располагая только этими сведениями, мы еще не можем на него ответить: не будучи братьями, они могут как быть, так и не быть родственниками. Поищем опять ответа с помощью нашей таблицы. Теперь у нас $X \to Y$ истинно и X ложно. Но таких случаев в таблице два: в третьей и в четвертой строке, и мы видим, следовательно, что, когда $X \to Y$ истинно, а X ложно, то Y может быть как истинным, так и ложным: Иван и Петр могут как быть, так и не быть родственниками.

Пусть, наконец, истинны оба предложения: $X \to Y$ и Y. В нашем примере, «Иван и Петр родственники». Ясно, что в таком случае мы можем еще не знать, братья они или нет. И опять-таки в нашей таблице, при истинности $X \to Y$ и Y, возможны оба случая: как истинности, так и ложности X (строки 1 и 3).

Приведенным здесь рассуждениям можно было бы придать и более строгую форму доказательства того, что из всех возможных способов табличного определения условного предложения определение с помощью таблицы (C) является наиболее соответствующим законам классической формальной логики. И все же оно не отображает полностью употребления условного предложения в обычной речи. Дело в том, что последнее вообще не может быть формализовано с помощью таблицы, определяющей истинность или ложность сложного предложения «*Если* X, *то* Y» через истинность или ложность составляющих его предложений X и Y. Ведь из нашей таблицы следует, что предложение $X \rightarrow Y$ истинно при всяком Y, когда X ложно; и при всяком X, когда Y истинно. Иными словами, истинны все следующие предложения:

1. «Если 15 делится на 2 и на 3, то 15 делится на 6».
2. «Если 15 делится на 2 и на 3, то 15 *не* делится на 6».
3. «Если 12 делится на 2 и на 3, то 12 делится на 6».
4. «Если 12 не делится на 2 и на 3, то 12 делится на 6».

Вряд ли в обычной речи мы согласимся считать предложения 2. и 4. истинными. Однако из того, что связь, выражаемая через $X \rightarrow Y$, не вполне соответствует условному предложению обычной речи, не следует еще, конечно, будто она вообще не имеет смысла. Не трудно убедиться, составив таблицу для выражения $\overline{X} \vee Y$:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$
и	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*и*	*и*

что эта же связь может быть выражена и без специального знака «$\rightarrow$», т. е. сводится к совместному употреблению отрицания и «$\vee$», причем смутившие нас предложения 2. и 4. прочтутся уже как:

2. : «15 *не* делится на 2 и на 3, *или* 15 *не* делится на 6»,
4. : «12 делится на 2 и на 3, *или* 12 делится на 6».

В связи с принятым нами употреблением союза «или», последние, вероятно, покажутся уже не столь сомнительными. И во всяком случае ясно, что употребление знака «$\rightarrow$» предпочтительнее, чем словесная форма «если.... то», поскольку речь идет только об операции (соответственно связи), выражаемой таблицей (C). Употребляя этот знак в точно установленном нами смысле, мы не рискуем вложить в него какое-нибудь новое содержание, не предусмотренное нашим определением и построенное на ложном предположении, будто выражаемая им связь действительно является полной формализацией условного предложения.

Попытки такой формализации были предприняты Льюисом и его последователями в так называемом исчислении «строгой импликации»[1]. Несмотря на ряд интересных результатов, связанных с исследованием различных предложенных систем «строгой импликации», ни одна из них не может претендовать, однако, на полную формализацию наиболее обычного вида условного предложения, не говоря уже о подлинной формализации «логического следования».

Впрочем, в обычной речи встречаются и формы, очень напоминающие связь «$\rightarrow$» исчисления высказываний. Так, предложение «Если крупные предприниматели не оказывают британским фашистам финансовой поддержки, то дважды два пять» верно именно потому, что мы не можем сомневаться в ложности его посылки.

Итак, в самом исчислении высказываний на языке его терминов нельзя формализовать полностью условное предложение и тем более не следует трактовать формулу $X \rightarrow Y$ как «X логически влечет Y» или «Y логически следует из X», как это иногда делают.

Тем не менее, с помощью связи «$\rightarrow$», хотя и не в самой логике высказываний, а в ее *мета*логике, изучающей структуру формул исчисления высказываний, можно определить достаточное для простейших случаев понятие «логического следствия». Чтобы пояснить, как это делается, заметим, что среди формул исчисления высказываний некоторые оказываются истинными при любых значениях входящих в них переменных. Таковы, например, формулы: $X \rightarrow X, X \vee \overline{X}, \overline{X \& \overline{X}}$. Действительно, из того обстоятельства, что X может иметь одно и только одно из двух «значений истинности», и из определения связок $\overline{}$, $\vee$, &, $\rightarrow$ получаем, как это видно на следующих таблицах:

X	X	$X \rightarrow X$
и	*и*	*и*
л	*л*	*и*

X	$\overline{X}$	$X \vee \overline{X}$
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*

X	$\overline{X}$	$X \& \overline{X}$	$\overline{X \& \overline{X}}$
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*л*	*и*

[1] Связь, выражаемая знаком «$\rightarrow$», иногда называется коротко *импликацией*.

что формулы $X \to X$, $X \vee \overline{X}$, $\overline{X \& \overline{X}}$ соответствуют всегда истинным высказываниям. Каждая из них истинна при любой подстановке вместо X какого-нибудь высказывания, отвечающего требованиям классической формальной логики, т. е. либо истинного, либо ложного, и притом только одного из двух. Такого рода формулы (про которые, ссылаясь на их всегда-истинность, говорят иногда, что они истинны только в силу своей формы, независимо от содержания входящих в них основных высказываний) называются *логическими предложениями, логическими тождествами,* или *законами логики*.

Заметим все же, что написав, например, $X \vee \overline{X}$, мы не высказали еще в действительности никакого утверждения, тем более какой-нибудь истины. Только подставив в эту формулу какое-нибудь высказывание, мы действительно получим предложение. А чтобы оно было истинным, нужно на самом деле убедиться еще в том, что мы имеем дело с высказыванием, предварительно достаточно обработанным, чтобы о нем можно было рассуждать по законам классической формальной логики. Убеждение же этого рода создается лишь, опираясь на *содержание*.

Таким образом, при применении даже простейшей части логического исчисления, наивозможно более абстрагирующейся от содержания рассматриваемых в ней высказываний, последнее нельзя все же полностью сбросить со счета.

Отметим еще, что формула $X \to X$ соответствует обычному «закону тождества», формула $X \vee \overline{X}$—«закону исключенного третьего» и формула $\overline{X \& \overline{X}}$—«закону противоречия». Этими формулами не исчерпывается, конечно, запас всегда-истинных формул, или «законов логики» исчисления высказываний. Их существует бесчисленное множество.

Составив соответствующие таблицы, мы убедимся, например, во всегда-истинности формул:

$$X \to \overline{\overline{X}}, \quad \overline{\overline{X}} \to X,$$
$$X \to (Y \to X), \quad \overline{X} \to (X \to Y),$$
$$(X \& \overline{Y}) \to \overline{X \to Y}$$
$$[X \& (X \to Y)] \to Y,$$
$$(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X}),$$
$$(X \& Y) \to X, \quad X \to (X \vee Y),$$

и многих других, на характеристике запаса которых не будем сейчас останавливаться. Читатель прочтет об этом в тексте книги.

Для упражнения выполним только проверку для формулы $(X \& \overline{Y}) \to \overline{X \to Y}$.

X	Y	$\overline{Y}$	$X\&\overline{Y}$	$X \to Y$	$\overline{X \to Y}$	$(X\&\overline{Y}) \to \overline{X \to Y}$
и	и	л	л	и	л	и
и	л	и	и	л	и	и
л	и	л	л	и	л	и
л	л	и	л	и	л	и

Такую проверку можно выполнить и без подробного выписывания всей таблицы. Наша формула имеет вид $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, где через $\mathfrak{A}$ обозначено $X\&\overline{Y}$, через $\mathfrak{B}$ — $\overline{X \to Y}$. Но выражение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ может быть ложно только, если $\mathfrak{A}$ истинно, а $\mathfrak{B}$ — ложно. Для того же, чтобы $\mathfrak{A}$ было истинным, нужно, чтобы истинными были оба, X и $\overline{Y}$, т. е. X было истинным, а Y ложным. Но в таком случае $X \to Y$ будет ложным, а $\overline{X \to Y}$ истинным. Мы, следовательно, не можем устроить так, чтобы при истинности $\mathfrak{A}$ добиться ложности $\mathfrak{B}$. Значением истинности выражения $(X\&\overline{Y}) \to \overline{X \to Y}$, таким образом, может быть только «истина».

С помощью таких всегда-истинных выражений, или «законов логики», мы и можем определить теперь понятие «логического следствия» для исчисления высказываний. Именно, мы будем говорить, что формула $\mathfrak{B}$ есть логическое следствие из посылок $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$, если выражение $(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \ldots \& \mathfrak{A}_k) \to \mathfrak{B}$ есть всегда-истинная формула исчисления высказываний («закон логики»).

Так как мы проверили уже, что

$$X \& \overline{Y} \to \overline{X \to Y}$$

всегда-истинная формула, то можем сказать, что формула $\overline{X \to Y}$ есть «логическое следствие» из посылок X и $\overline{Y}$.

Но определение «логического следствия» приобретает настоящий интерес не в пределах самого исчисления высказываний, а когда мы переходим к его применениям. Поясним соответствующее определение на примере.

Пусть имеем следующую систему посылок:

1. На основной вопрос философии об отношении между мышлением и бытием существуют только два ответа: материалистический или идеалистический.

2. Материалистический ответ несовместим с идеалистическим.

3. *Если* махисты говорят правду, то их ответ на основной вопрос философии не материалистический и не идеалистический.

Непосредственно очевидно, что логическим следствием отсюда является предложение:

4. Махисты не говорят правды.

Мы увидим сейчас, что предложение 4. *логически следует* из предложений 1.—3. и в смысле исчисления высказываний. С этой целью запишем сначала предложения 1.—4. на «языке», близком к «языку» этого исчисления (такую запись называют иногда логической «формализацией»).

В качестве элементарных выберем высказывания (чтобы показать, что буквы служат здесь не переменными, а обозначают вполне определенные высказывания, мы их будем снабжать звездочками):

X_* : «На основной вопрос философии дается материалистический ответ».

Y_* : «На основной вопрос философии дается идеалистический ответ».

Z_*: «Махисты говорят правду». (Ложность этого утверждения мы и будем сейчас доказывать.)

Тогда наши посылки приобретают вид:

1. $X_* \vee Y_*$
2. $\overline{X_* \& Y_*}$
3. $Z_* \to (\overline{X}_* \& \overline{Y}_*)$.

Заключение же гласит:

4. $\overline{Z}^*$.

Для нашего примера формулировка определения логического следствия будет иметь при этом вид:

Доказать, что заключение 4. есть логическое следствие из посылок 1.-3., это значит показать, что, если мы уничтожим звездочки во всех четырех высказываниях (т. е. будем рассматривать соответствующие им буквы не как постоянные, а как переменные), соединим затем все посылки друг с другом союзами «&» и свяжем полученное таким образом сложное высказывание 1. & 2. & 3. союзом «→» с заключением 4., то получим всегда-истинную формулу исчисления высказываний, или «закон логики».

Иными словами, нам нужно показать, что формула

$$[(X \vee Y) \& \overline{X \& Y} \& (Z \to (\overline{X} \& \overline{Y})] \to \overline{Z} \qquad (\Phi)$$

при *любых* «значениях истинности» входящих в нее букв дает *всегда* значение «истина».

В принципе это не трудно показать с помощью таблицы. Однако таблица должна быть теперь довольно громоздкой. Прежде всего, в ней будет уже 8 различных строк, соответственно числу элементарных высказываний X, Y, Z. Ведь в каждом из четырех возможных для пары X и Y случаев высказывание Z может быть как истинным, так и ложным. Но и столбцов, предшествующих последнему, в котором мы ожидаем увидеть только значения «и», будет достаточно много, в соответствии с числом встречающихся в нашей формуле связок $\vee$, &, $^-$, $\to$.

Во всегда-истинности формулы (Ф) можно, однако, убедиться гораздо проще. Формула эта имеет вид:

$$(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \mathfrak{A}_3) \to \mathfrak{B}.$$

Поэтому она может быть ложной только, если все посылки $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ истинны, а заключение $\mathfrak{B}$ – ложно. Так как $\mathfrak{B}$ означает здесь $\overline{Z}$, то для ложности $\mathfrak{B}$ необходимо поэтому, чтобы Z было истинно. В таком случае $\mathfrak{A}_3$, означающее $Z \to (\overline{X}\&\overline{Y})$, может быть истинно только, если $\overline{X}\&\overline{Y}$ истинно, т. е. если как X, так и Y ложны, что противоречит истинности посылки $\mathfrak{A}_1$, означающей $X \vee Y$. Иными словами, невозможно распределить «значения истинности» элементарных высказываний X, Y, Z так, чтобы сложная формула (Ф) оказалась ложной.

В этом примере наша задача состояла только в проверке того обстоятельства, что заключение действительно является *логическим следствием* из посылок. Гораздо интереснее другая задача: имея некоторое число посылок, получить из них *все* логические следствия (в смысле исчисления высказываний). Или задача: имея некоторый запас констатированных фактов, обозреть *все* (гипотетические) посылки, следствиями которых они могли бы быть. Для исчисления высказываний обе эти задачи решаются полностью (и притом исключительно просто). Читатель найдет их решение в тексте книги. Здесь мы ограничимся еще только примером, демонстрирующим недостаточность исчисления высказываний для доказательства даже самых простых математических предложений.

Теорема о равенстве вертикальных углов α и γ (см. чертеж) доказывается обычно так:

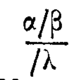
Так как $\alpha+\beta=2d$ (двум прямым углам) и $\beta+\gamma$ тоже $=2d$, и так как по сумме ($2d$) и одному из слагаемых (β) второе определяется однозначно, то $\alpha=\gamma$. Другими словами, мы исходим из посылок:

1. $\alpha+\beta=2d$,
2. $\beta+\gamma=2d$,
3. Если $x+y=a$ и $y+z=a$, то $x=z$,

из которых получаем заключение $\alpha=\gamma$.

Чтобы записать наши посылки и заключение на «языке» исчисления высказываний, мы должны раньше всего выбрать

основные (элементарные) предложения. Таковыми, очевидно, здесь являются:



Черт.

X_* : $\alpha+\beta=2d$,
Y_* : $\beta+\gamma=2d$,
Z_* : $x+y=a$,
U_* : $y+z=a$,
V_* : $x=z$
W_* : $\alpha=\gamma$.

Теперь посылки принимают вид:

1′. X_*,
2′. Y_*,
3′. $(Z_*\&U_*) \to V_*$

Заключение же гласит:

4′. W_*.

И чтобы заключение было логическим следствием из посылок в смысле исчисления высказываний, нужно, чтобы формула

$$[X\&Y\&((Z\&U) \to V)] \to W$$

была всегда-истинной. Достаточно, однако, положить высказывания X, Y, Z, U, V истинными, а W — ложным, чтобы получить «ложь» в качестве значения этой формулы. Итак, заключение не может быть получено из посылок средствами исчисления высказываний. Между тем, если бы мы, воспользовавшись общностью посылки 3.—иными словами, обнаружив, что, кроме переменных высказываний, бывают и переменные, обозначающие предметы (в нашем случае углы), — сделали подстановку угла α на место x, β на место y, γ на место z, $2d$ на место a, то посылка 3. приобрела бы вид:

3*. Если $\alpha+\beta=2d$ и $\beta+\gamma=2d$, то $\alpha=\gamma$.

При формализации нам понадобились бы теперь только высказывания X_*, Y_* и W_*, и наши посылки приобрели бы вид:

1'. X_*,
2'. Y_*,
3'. $(X_*\&Y_*) \to W_*$.

Заключение W_* является действительно логическим следствием из них (в смысле исчисления высказываний), так как формула

$$[X\&Y\&((X\&Y) \to W)] \to W$$

всегда-истинна. (Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить, что из истинности двух формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ в силу нашего определения связки $\to$ следует истинность формулы $\mathfrak{B}$. Поэтому, если посылки X, Y и $(X\&Y) \to W$ истинны, то W уже не может быть ложным.)

Мы видим, таким образом, что из недостаточности исчисления высказываний не следует, что нужно вообще признать негодность последнего и отказаться от него, а следует только, что на нем нельзя остановиться. Его необходимо развить, подойдя ближе к содержанию высказываний и различив даже в элементарных высказываниях входящие в них предметы. Первые шаги такого расширения предпринимаются уже во второй главе.

Комментарий к § 7 первой главы

В предыдущем комментарии мы выяснили, что использованное авторами «содержательное» определение основных связей исчисления высказываний: $-$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\sim$ лучше всего может быть выражено с помощью таблиц, относящих к каждому возможному распределению «значений истинности» элементарных высказываний одно определенное «значение истинности» сложного высказывания. Так, связь $X \rightarrow Y$ определялась таблицей:

X	Y	$X \rightarrow Y$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

Таблица 1.

Такая таблица распадается на две части, левую и правую, разделенные нами двумя вертикальными чертами. В левой части выписаны все возможные распределения значений элементарных высказываний X и Y, в правой — соответствующие значения сложного высказывания $X \rightarrow Y$. Ясно, что ничего по существу не

изменится, если переставить четыре строки этой таблицы. Выбранный нами порядок является словарным (или лексикографическим). Сочетания букв *и* и *л*, стоящие по строчкам, расположены у нас так, как располагают слова в словарях: прежде всего, по алфавиту начальных букв; в случае совпадения начальных букв — по алфавиту вторых букв и т. д. Мы примем словарный порядок в качестве канонического и будем в дальнейшем выписывать все таблицы только в таком порядке. Обратим внимание читателя на то, что для описанного упорядочивания строк таблицы достаточно было бы рассматривать только ее левую часть. Будем теперь рассматривать другие сложные высказывания, образованные из тех же элементарных высказываний X, Y, например $X \& Y$, $X \vee Y$, $X \sim Y$. Таблицы, соответствующие этим высказываниям, будут при нашем условии отличаться только последними столбцами. Поэтому мы можем принять в качестве сокращенной характеристики каждого из наших высказываний, отличающей его от других высказываний, один только этот последний столбец. Высказываниям $X \rightarrow Y$ и $\overline{X} \vee Y$ отвечает один и тот же столбец (и, следовательно, одна и та же таблица). Такие два высказывания мы будем называть *эквивалентными*. Приведенный пример показывает, что один и тот же столбец может соответствовать различным формулам (число таких формул можно было бы, конечно, неограниченно умножать, добавляя, например, формулы $\overline{\overline{X \& Y}}$, $X \vee (X \& Y)$ и т. п.). Однако сразу отнюдь не ясно, для каждого ли столбца можно подобрать хотя бы одну формулу подобного вида. Для того чтобы выяснить этот вопрос, мы составим полную таблицу, в которой выпишем все вообще столбцы, которые можно составить из букв *и* и *л* (см. таблицу 2). Общее число таких столбцов равно 16. Над каждым из них мы надписали по формуле. Читатель легко проверит, что этим формулам действительно отвечают написанные под ними столбцы. Таблица 2 показывает, что в случае двух элементарных

Таблица 2

X	Y	$X\vee\bar X$	$X\vee Y$	$Y\to X$	X	$X\to Y$	Y	$X\sim Y$	$X\,\&\,Y$	$\overline{X\,\&\,Y}$	$\overline{X\sim Y}$	$\bar Y$	$\overline{X\to Y}$	$\bar X$	$\overline{Y\to X}$	$\overline{X\vee Y}$	$\overline{X\vee\bar X}$
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*

высказываний X, Y знаков $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ во всяком случае достаточно, чтобы с их помощью представить формулами все возможные столбцы, образованные из букв *и* и *л*. Однако, если бы в нашем распоряжении не было, например, знака отрицания, мы уже не смогли бы это сделать. Действительно, все формулы, полученные только с помощью связок &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, истинны, когда X и Y оба истинны; в нашей же таблице ровно половина всех столбцов (начиная с 8-го) относит значение «ложь» к случаю, когда X и Y оба истинны. Аналогично, если бы в нашем распоряжении были только знаки $^{-}$ и $\sim$, то, как это выяснено в тексте (см. стр. 9), отнюдь не всякий столбец нашей таблицы 2 можно было бы представить формулой: не существовало бы, например, формулы, соответствующей 8-му столбцу.

До сих пор мы рассматривали только сложные высказывания, образованные из двух элементарных высказываний. Теперь мы переходим к общему случаю сложных высказываний, зависящих от n элементарных высказываний X_1, $X_2, \ldots, X_n$. Каждое такое высказывание определяется таблицей, подобной таблице 1. Единственное отличие состоит в том, что теперь в левой части будет стоять уже не 2, а n столбцов, по числу элементарных высказываний, и соответственно этому увеличится число строк. Мы снова будем упорядочивать эти строки в словарном

порядке и таким образом отнесем каждому сложному высказыванию определенный столбец из букв *и* и *л*. Снова встает вопрос о том, можно ли для каждого такого столбца подобрать формулу, составленную из букв $X_1, X_2, \ldots, X_n$, связанных знаками $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$. Однако прямой путь, которым мы шли в случае двух элементарных высказываний, становится теперь невозможным. Уже для трех элементарных высказываний X, Y, Z написать полностью всю таблицу, аналогичную таблице 2, было бы довольно трудно. Поскольку истинность или ложность каждого из трех элементарных высказываний X, Y, Z может сочетаться как с истинностью, так и с ложностью каждого из остальных, то всех возможных распределений «значений истинности» между элементарными высказываниями, т. е. строк в нашей таблице, будет уже $2^3=8$. Следовательно, в каждом столбце правой части нашей таблицы будет 8 мест, на каждое из которых нужно поставить одну из букв *и* или *л*. Это можно сделать $2^8=2^{(2^3)}=256$ способами и, следовательно, число столбцов в правой части должно быть равно 256[1]. Не имея возможности выписать все эти столбцы, мы приводим часть из них в таблице 3, заменив остальные многоточием.

Обобщая проведенные нами рассуждения, нетрудно сообразить, что если бы элементарных высказываний было не три, а n, то в соответствующей таблице оказалось бы всего $p=2^n$ строк и $2^p=2^{(2^n)}$ столбцов.

---

[1] В пояснение к этому подсчету укажем, что если вообще в нашем распоряжении имеются буквы двух родов (например, *и* и *л*), то общее число всех m-буквенных «слов», которые можно составить из этих букв, равно 2^m. Действительно, если мы составили уже все 4-буквенные «слова», то для получения всех 5-буквенных «слов» достаточно приписать к каждому из 4-буквенных «слов» каждую из двух имеющихся в нашем распоряжении букв. Стало быть, 5-буквенных слов существует вдвое больше, чем 4-буквенных, и вообще k-буквенных слов вдвое больше, чем $k-1$-буквенных. Поскольку однобуквенных слов можно образовать, очевидно, два, то число 2-буквенных равно $2\times2=2^2$, число 3-буквенных $2^2\times2=2^3$ и т. д.

Таблица 3

X	Y	Z	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	…	F_{249}	F_{250}	F_{251}	F_{252}	F_{253}	F_{254}	F_{255}	F_{256}
и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	…	л	л	л	л	л	л	л	л
и	и	л	и	и	и	и	и	и	и	и	…	л	л	л	л	л	л	л	л
и	л	и	и	и	и	и	и	и	и	и	…	л	л	л	л	л	л	л	л
и	л	л	и	и	и	и	и	и	и	и	…	л	л	л	л	л	л	л	л
л	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	…	л	л	л	л	л	л	л	л
л	и	л	и	и	и	и	л	л	л	л	…	и	и	и	и	л	л	л	л
л	л	и	и	и	л	л	и	и	л	л	…	и	и	л	л	и	и	л	л
л	л	л	и	л	и	л	и	л	и	л	…	и	л	и	л	и	л	и	л

Иными словами, из n элементарных высказываний можно составить ровно $2^{(2^n)}$ различных (попарно неэквивалентных) сложных высказываний. Мы хотим каждое из этих высказываний выразить через элементарные высказывания посредством формулы, содержащей знаки $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$. Ясно, что это можно сделать, только указав некоторый общий метод построения таких формул. К изложению такого метода мы теперь и переходим.

Заметим раньше всего, что (а) два высказывания: 1) «X» и 2) «X истинно» — с точки зрения исчисления высказываний эквивалентны. Точно так же (б) эквивалентны оба высказывания: 1) «$\overline{X}$» и 2) «X ложно»[1]. Обратимся теперь для примера к сложному высказыванию F_{251} (таблица 3).

[1] В математической логике, кроме классического случая, где рассматриваются только высказывания либо истинные, либо ложные, и притом только одно из двух, изучаются и случаи

Мы уже знаем, что оно эквивалентно высказыванию: «F_{251} истинно». Но высказывание F_{251} истинно только в двух случаях, соответствующих 6-й и 8-й строкам нашей таблицы, где для F_{251} стоят буквы *и*. При этом 6-я строка (см. таблицу 3) соответствует случаю, когда:

(I) X ложно, и Y истинно, и Z ложно, а 8-я строка — случаю, когда:

(II) X ложно, и Y ложно, и Z ложно.

В силу уже отмеченных нами эквивалентностей (а) и (б) и определения знака «&» случай (I) можно выразить через:

(I′) $\overline{X} \& Y \& \overline{Z}$.

Случай (II) через:

(II′) $\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}$.

Итак, если один из двух случаев (I′) или (II′) имеет место, то высказывание F_{251} истинно. Наоборот, если это высказывание истинно, то имеет место один из случаев (I′) или (II′). Высказывание:

«F_{251} истинно»,

таким образом, эквивалентно высказыванию:

$$(\overline{X} \& Y \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}).$$

Именно это высказывание и может служить, следовательно, выражением для сложного высказывания F_{251}.

Так как в столбце, соответствующем высказыванию F_{249}, буква *и* встречается на трех последних местах (в трех последних строках нашей таблицы), то высказывание F_{249} может быть выражено формулой:

$$(\overline{X} \& Y \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& \overline{Y} \& Z) \vee (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}).$$

так называемых «многозначных логик». В таких логиках высказывания «X» и «X истинно» уже не эквивалентны. Если, например, подразделить все высказывания на: 1) истинные, 2) ложные, 3) бессмысленные (Ленин любил приводить в пример *бессмыслицы* выражение «сапоги всмятку»), то при условии, что высказывание F бессмысленно, утверждение «F истинно» должно быть квалифицировано не как бессмыслица, а как ложь.

Аналогично, высказывание F_{254}, истинное только один раз: когда X ложно, и Y ложно, и Z истинно, выражается формулой

$$\overline{X} \& \overline{Y} \& Z.$$

Мы видим, что для каждого из сложных высказываний, изображаемых столбцами правой части нашей таблицы, за исключением одного единственного всегда ложного F_{256}, существует эквивалентное ему выражение, содержащее только знаки $\overline{}$, & и $\vee$[1] и притом имеющее вполне определенную форму.

Именно, оно представляет собой дизъюнкцию из членов, каждый из которых содержит все элементарные высказывания, снабженные или не снабженные знаками отрицания и соединенные друг с другом знаками &. В каждом дизъюнктивном члене всякое элементарное высказывание встречается при этом только один раз. Такое выражение для сложного высказывания называется его *совершенной нормальной формой*. *Совершенной* потому, что каждое сложное высказывание может быть представлено *в этой форме* одним единственным способом: ведь разным дизъюнктивным членам соответствуют разные строки, в которых для нашего сложного высказывания стоит значение «истинно»; и, следовательно, две формулы описанного нами вида не могут соответствовать двум эквивалентным высказываниям, если они имеют разное число дизъюнктивных членов или если у них имеются

---

[1] Так как с помощью эквивалентностей:

$$X \& Y \text{ экв } \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}},$$

$$X \vee Y \text{ экв } \overline{\overline{X} \& \overline{Y}},$$

$$X \rightarrow Y \text{ экв } \overline{X} \vee Y,$$

любые два из знаков &, $\vee$, $\rightarrow$ можно заменить отрицанием и третьим (см. стр. 27), то ясно, что таким образом будет доказана и достаточность любой из пар: $\overline{}$, &; $\overline{}$, $\vee$;   , $\rightarrow$.

два различных дизъюнктивных члена (с иначе распределенными знаками отрицания над буквами).

До сих пор мы имели дело только с примерами, заимствованными из табл. 3, т. е. со сложными высказываниями, зависящими от трех элементарных высказываний X, Y, Z. Ясно, однако, что наш прием носит совершенно общий характер и может быть распространен на любое число элементарных высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В качестве упражнения запишем в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, через элементарные высказывания X и Y, сложное высказывание $X \longrightarrow Y$. Так как последнее определяется таблицей 1, то таким выражением для него будет:

$$(X \& Y) \vee (\overline{X} \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y}),$$

т. е. формула, выражающая, что в таблице, определяющей сложное высказывание $X \longrightarrow Y$, значение «истинно» встречается в первой, третьей и четвертой строках.

Заметим еще, что высказывание, выраженное с помощью не всех букв $X_1, X_2, \ldots, X_n$, всегда можно записать в виде формулы в совершенной нормальной форме, содержащей все буквы $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Так, высказывание $\overline{Y}$ можно выразить в совершенной нормальной форме через X и Y следующим образом.

В таблице, составленной для элементарных высказываний X и Y, высказывание $\overline{Y}$ соответствует столбцу, содержащему буквы (сверху вниз): *л, и, л, и*. Оно,

X	Y	$\overline{Y}$	X
и	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*

Таблица 4

следсвательно, истинно в случаях, соответствующих второй и четвертой строкам таблицы 4. Выражением его в дизъюнктивной нормальной форме поэтому служит:

$$(X \& \overline{Y}) \vee (\overline{X} \& \overline{Y}).$$

Аналогично высказывание X, выраженное в совершенной нормальной форме, приобретает вид:

$$(X \& Y) \vee (X \& \overline{Y}).$$

Составление таблицы было бы, однако, слишком громоздким приемом решения задачи о приведении произвольной формулы к совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Читатель найдет в тексте книги простой общий прием ее решения. Мы здесь напомним еще только, что среди сложных высказываний есть одно, которое не может быть выражено в такой форме. Это всегда-ложное высказывание.

Однако такое высказывание может быть выражено в двойственной к дизъюнктивной — *конъюнктивной совершенной нормальной форме*, к которой можно притти следующим образом. Столбец, соответствующий в нашей таблице 3, например, сложному высказыванию F_6, можно охарактеризовать и с помощью *полного* перечисления *всех* случаев, когда это высказывание ложно. Так, в нашей таблице 3 высказывание F_6 ложно в случаях, отображенных в шестой и восьмой строках, т. е. противоположное ему высказывание $\overline{F}_6$ истинно в случаях:

$$\overline{X} \& Y \& \overline{Z}$$

или

$$\overline{X} \& Y \& \overline{Z}.$$

Так как выражения «$\overline{F}_6$ истинно» и «$\overline{F}_6$» эквивалентны, то для $\overline{F}_6$ мы получаем дизъюнктивную совершенную

нормальную форму:

$$(\overline{X} \& Y \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}).$$

Образовав же ее противоположность по освещенному в книге правилу де-Моргана, мы получим для сложного высказывания F_6 новое выражение, теперь уже в так называемой *конъюнктивной совершенной нормальной форме*:

$$(X \vee \overline{Y} \vee Z) \& (X \vee Y \vee Z)$$

или, используя принятые авторами соглашения, относящиеся к способам записи формул:

$$X\overline{Y}Z \& XYZ.$$

Ясно, что в этой форме можно записать и всегда-ложное высказывание (которое при этом, очевидно, будет содержать *все* возможные конъюнктивные члены), но, наоборот, нельзя выразить всегда-истинное высказывание.

Подробную характеристику конъюнктивной совершенной нормальной формы, простой способ приведения к ней всякого (кроме всегда-истинного) высказывания, а также отличное от использованного нами доказательство единственности выражения в совершенной нормальной форме читатель найдет в тексте книги. Там же он увидит далее, какую роль играет выражение в конъюнктивной совершенной нормальной форме для решения задачи о нахождении *всех* логических следствий (в смысле исчисления высказываний) из данных посылок, равно как и задачи о нахождении всех возможных посылок, из которых данное выражение может логически следовать (в смысле исчисления высказываний). Отметим также простой и остроумный способ приведения формул исчисления высказываний к совершенной дизъюнктивной нормальной форме, содержащийся в работе И. И. Жегалкина «Арифметизация символической логики», помещенной в «Математическом сборнике», т. 35, вып. 3—4, стр. 311—377 (1928 г.).

Комментарий к §§ 10—13 первой главы

Как уже было отмечено в комментарии к § 1 первой главы, исчисление высказываний можно строить двумя различными способами: 1) содержательно-алгоритмическим, или табличным, и 2) формально-дедуктивным, или аксиоматическим. Аксиоматическому построению посвящены последние четыре параграфа первой главы. В пояснение их ограничимся здесь только самой общей характеристикой задачи такого построения.

Мы уже видели, что в исчислении высказываний основную роль играют всегда-истинные высказывания, или «законы» логики. Именно с их помощью и решается задача получения логических следствий из данных посылок. Далее, каждым двум эквивалентным формулам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответствует *одна* всегда-истинная формула $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Так, паре эквивалентных формул: $X \rightarrow Y$ и $\bar{X} \vee Y$ соответствует формула:

$$X \rightarrow Y \sim \bar{X} \vee Y,$$

паре эквивалентных формул X и $\bar{\bar{X}}$—формула:

$$X \sim \bar{\bar{X}}.$$

Всякой эквивалентности, на основании которой происходит преобразование формул к нормальной и совершенной нормальной форме, соответствует таким образом всегда-истинная формула.

Для целей исчислений высказываний достаточно поэтому указать способ, позволяющий охарактеризовать весь запас всегда-истинных формул этого исчисления. При аксиоматическом построении это делается следующим образом. Из всегда-истинных формул исчисления высказываний выбираются некоторые, принимаемые за аксиомы. Затем задаются правила, позволяющие из выбранных формул «выводить» новые.

Как аксиомы, так и выводимые из них формулы считаются *доказанными*. Задача, которую приходится решать при аксиоматическом построении, состоит в таком выборе аксиом и правил вывода, чтобы запас *доказуемых* формул *аксиоматического* построения совпал с запасом *всегда-истинных* формул *содержательного*. При такой постановке вопроса ясно, что аксиоматическое построение имеет смысл только, если мы располагаем уже содержательным. Но в таком случае, естественно, встает вопрос, для каких целей оно может понадобиться.

Для ответа на этот вопрос заметим, что даже в применении к исчислению высказываний, рассматривающему элементарные высказывания как нерасчленяемые целые, возможно дальнейшее развитие. Последнее и происходит на самом деле и притом даже в двух различных направлениях. При табличном построении переходят от двузначного исчисления, соответствующего классической формальной логике, к различным многозначным, различающим, например, такие характеристики суждений, как *необходимость*, *возможность* и *невозможность* и многие другие. При аксиоматическом построении изменяют или совсем отказываются от некоторых аксиом или правил вывода. При этом оказывается, что для всякого табличного построения всегда существует совершенно адэкватное ему аксиоматическое; однако не всякое аксиоматически построенное исчисление может быть построено и таблично. Так называемая «конструктивная» логика, которую, как показал А. Н. Колмогоров, можно истолковать как *исчисление проблем* и в которой нет «закона исключенного третьего», или различные исчисления «строгой импликации», о которых мы упоминали уже в комментарии к первому параграфу, не допускают, например, адэкватного им табличного построения. Табличное построение невозможно и для так называемого «узкого исчисления предикатов», следующего в настоящей книге за исчислением высказываний и строящегося в ней аксиоматически. Таким образом, аксиоматическое построение является более общим, чем табличное.

Мы назвали табличное построение исчисления высказываний содержательно-алгоритмическим, а аксиоматическое—формально-дедуктивным. Заметим, однако, что и аксиомы можно трактовать *содержательно*, понимая, например, входящие в них буквы $X, Y, Z, \ldots$ как высказывания, а знаки $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ как логические связи между высказываниями. (Кстати, именно в этом смысле аксиомы и должны быть всегда-истинными высказываниями). С другой стороны, при табличном построении мы фактически использовали только то обстоятельство, что каждое из элементарных высказываний может иметь одно и только одно из двух значений: «истинно», «ложно», и что значением зависящего от элементарных сложного высказывания опять-таки может быть одно и только одно из этих двух значений. Поэтому при табличном построении буквы *и* и *л* можно заменить, например, цифрами *0* и *1*, а сложные высказывания, зависящие от n элементарных высказываний $X_1, X_2, \ldots, X_n$, арифметическими функциями от n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, значениями каждого из которых могут быть только 0 и 1 и которые сами должны принимать только эти же значения 0 и 1.[1]

Но если аксиомы можно трактовать и содержательно, то естественно задать вопрос, почему мы говорим о *формально* аксиоматическом построении исчисления. Дело в том, что только при таком построении мы можем записать аксиомы логики, не делая различий между определяемыми с их помощью основными логическими связями и теми же логическими связями, но употребляемыми в самом определении. Читатель увидит более конкретно, в чем тут дело, на приводимом ниже примере формализации содержательного определения логических связей «$\rightarrow$» и «$^{-}$». Здесь мы заметим только, что и при формально-аксиоматическом построении исчисления высказываний нельзя обойтись полностью одним только выписыванием формул, выбранных в качестве аксиом. *Правила вывода* из этих формул новых—доказываемых—формул нельзя сформулировать только на «языке» формул. Их приходится рассказывать на обыкновенном разговорном языке, как это сделано, например, в книге для *правила подстановки* и *правила заключения*. Никакого порочного круга, состоящего в том, что для определения логических связей неявно используются те же логические связи, при этом не получается, так как в правилах этих идет речь не о самих логических связях или высказываниях, а только о соответствующих им знаках, которые к тому же трактуются как материальные объекты, написанные, например, мелом на доске или чернилами на бумаге.

Основной проблемой для аксиоматического построения является, как мы уже отметили, задача отождествить запас *доказуемых* формул с запасом *всегда-истинных*. При этом, если удается достичь того, что *все* всегда-истинные формулы оказываются доказуемыми, то система аксиом и правил вывода называется *полной*. Само по себе этим не предполагается, однако, что доказуемой не может оказаться и какая-нибудь не всегда-истинная формула, т. е., что аксиоматическое построение не шире табличного. Наиболее полным было бы, конечно, такое исчисление, в котором доказуема вообще любая формула. Но такая «логика» была бы никому не нужной, так как с ее помощью можно было бы «обосновать» все, что угодно: любое высказывание и притом вместе с его отрицанием. Вторым требованием, которое должно быть предъявлено к аксиоматическому построению, является поэтому требование, чтобы существовали *недоказуемые* в этом построении формулы. Это

[1] Заметим, что в доказательствах *непротиворечивости* и *независимости* аксиом, которые проделываются с помощью какой-нибудь их *содержательной* интерпретации, авторами используются табличные определения знаков $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, построенные именно как арифметические функции от натуральных чисел, значениями которых, в свою очередь, служат натуральные числа.

требование квалифицируется обычно как *непротиворечивость* исчисления.

Мы не будем здесь останавливаться сколько-нибудь подробно на комплексе вопросов, связанных с *непротиворечивостью* и *полнотою* системы аксиом и правил вывода исчисления высказываний, с которыми читатель ознакомится из текста книги. Обратим только его внимание на понятие «строгой полноты» исчисления и заметим, что, даже положив в основу те же два правила *подстановки* и *заключения* (или «зачеркивания»), которые использованы авторами, можно по-разному выбрать *полную* в определенном выше смысле систему аксиом исчисления высказываний[1].

Так как задача наша состоит при этом в аксиоматическом отображении табличного построения, то, быть может, наиболее естественным было бы использование систем аксиом в духе предлагаемых в одной из работ А. Тарского. Так, таблицу, определяющую сложное высказывание $X \to Y$, можно охарактеризовать такой системой предложений:

1. «*Если* Y истинно, *то* высказывание $X \to Y$ истинно».
2. «*Если* X ложно, *то* высказывание $X \to Y$ истинно».
3. «*Если* X истинно *и* Y ложно, *то* высказывание $X \to Y$ ложно».

Если теперь мы заменим здесь высказывания вида «A истинно» или «A ложно» на «A» и «$\overline{A}$» соответственно; связки «если ... то» и «и» на «$\to$» и «&» соответственно, то получим всегда-истинные, как легко проверить, формулы:

$$1'.\ Y \to (X \to Y),$$

$$2'.\ \overline{X} \to (X \to Y),$$

$$3'.\ X \,\&\, \overline{Y} \to \overline{X \to Y}.$$

Чтобы с помощью этих формул определить входящие в них знаки «$\to$» и «—», нужно еще, конечно, добавить

---

[1] Без правила подстановки обходятся в таких системах, которые, как, например, упомянутое на стр. 52 исчисление Генцена, состоят из одних только правил вывода.

формулы, определяющие отрицание, и постараться выразить третью формулу, не прибегая к знаку &. Этим требованиям можно удовлетворить, например, заметив, что формулу 3′ можно записать в виде эквивалентной ей 3″. $X \to (\overline{Y} \to \overline{X \to Y})$, а отрицание охарактеризовать, сказав:

4. «*Если* X истинно, *то* отрицание X ложно», и так как отрицание X может быть ложно *только* при X истинном, то и наоборот:

5. «*Если* отрицание X ложно, *то* X истинно», чему соответствуют всегда-истинные формулы:

$$4'.\ X \to \overline{\overline{X}}$$

$$5'.\ \overline{\overline{X}} \to X.$$

Но и это еще лишь предварительная наметка. Словесная формулировка предложений 1.—5., правда, такова, что, следуя ей, можно полностью восстановить таблицы, определяющие связку $\to$ и отрицание для двух значений переменных высказываний: «истинно» и «ложно». Но как исключить, например, случай бессмысленных высказываний? И передают ли наши формулы 1′.—5′. (в соединении с правилами вывода) при попытке их табличной интерпретации содержательный смысл соответствующих словесных формулировок? На эти вопросы мы еще не умеем ответить. Написав подобную систему аксиом, нужно поэтому проверить затем, является ли она *полной*, т. е. можно ли на самом деле вывести из нее (в данном случае с помощью правил подстановки и «зачеркивания») *все* всегда-истинные формулы. Заметим, что неполноту системы аксиом проще всего доказать, отыскав всегда-истинную, но *независимую* от аксиом этой системы, т. е. невыводимую в ней формулу. В данном случае таковой является, например, формула

$$(X \to Y) \to ((Y \to Z) \to (X \to Z)).$$

Кроме того, сама по себе не исключена возможность, что мы могли написать какие-нибудь лишние аксиомы,—которые могут быть выведены из остальных по принятым нами правилам. Желательно поэтому проверить и *независимость* аксиом. Мы не имеем возможности останавливаться на этом подробнее, да это и не входит в наши задачи. Мы будем удовлетворены, если нам удалось несколько заинтересовать читателя не только принципиальной стороной решения основных для всякого аксиоматического построения проблем *непротиворечивости, полноты* и *независимости* аксиом, но и техникой подчас довольно трудоемких доказательств этого рода.

Комментарий к §§ 1 и 2 второй главы

Исторически исчисление классов возникло раньше исчисления предложений (или высказываний). Оно было развито уже в работах Буля и Августа де-Моргана сто лет тому назад. В конце прошлого века очень подробное и обстоятельное изложение этого исчисления было дано Эрнстом Шредером в его «Лекциях по алгебре логики», три тома которых содержат соответственно XII+717, XIII+400 и VIII+649 страниц.

В дальнейшем выяснилось, однако, что, с одной стороны, исчисление классов слишком сложно. В нем мы имеем дело сразу с двумя видами операций: одни выполняются над классами, другие над предложениями, утверждающими или отрицающими некоторые отношения между классами. При дальнейшем анализе оказалось поэтому удобным рассмотреть сначала операции с предложениями, не вдаваясь в исследование того, как именно образованы элементарные предложения (составными частями которых уже не являются больше какие-нибудь другие предложения). Исчислению классов начали предпосылать поэтому исчисление предложений как целых. С другой стороны, исчисление классов, выросшее непосредственно на материале традиционной школьной логики, все равно оказалось недостаточным для целей обоснования математики и логической формализации употребляемых в ней пра-

вил вывода. Его заменили поэтому в дальнейшем более сильными исчислениями, о которых идет речь в главах третьей и четвертой, и по отношению к которым оно может рассматриваться, в известной мере, как частный случай.

В курсе логики Гильберта и Аккермана исчисление классов (или одноместных предикатов) поэтому сохранилось лишь как рудимент, имеющий скорее историческое значение и представляющий собою попытку построить исчисление, адэкватное логике Аристотеля [1]. Но именно поэтому вторая глава представляет особый интерес для преподавателей логики. Между тем ей посвящено в оригинале только 10 страниц, исчерпывающих, по существу, значительную часть содержания объемистого труда Шредера. Неудивительно, что изложение местами оказалось слишком кратким и не вполне доступным для не владеющего другими источниками читателя. Последнее объясняется отчасти тем обстоятельством, что авторам хотелось, по-видимому, сделать третью главу независимой от второй; излагать же дважды один и тот же материал казалось нецелесообразным.

Учитывая интересы читателя, не собирающегося специально изучать математическую логику, но желаю-

---

[1] Впрочем, уже в предисловии ко второму изданию авторы отмечают, что само по себе было бы желательно перестроить изложение второй главы. Очевидно, при этом имеется в виду появление ряда работ, посвященных так называемым *булевским алгебрам*, имеющим непосредственное отношение к содержанию этой главы. Заметим, что и эта часть логики в последние годы интенсивно развивается и все теснее связывается с проблемами современной алгебры (особенно теории структур) и топологии. Из логических применений отметим, например, что введение в исчисление классов, кроме обычных операций *пересечения, объединения* и *дополнения*, операции *замыкания* дало возможность построить топологическую интерпретацию не только для классической логики Аристотеля, но и для логического исчисления, не пользующегося законом исключенного третьего (логика Брауэра—Гейтинга), а также для систем так называемой «строгой импликации» и логики модальностей (см. работы *Г. Биркгоффа, Стона, Тарского, Мак Кинзи* и др.).

щего познакомиться с ее элементами и выяснить место в ней традиционной логики, мы даем здесь несколько более популярное изложение материала первых двух параграфов второй главы, не отказываясь иногда от повторений. Нам представляется, что такое изложение должно помочь читателю разобраться в основном содержании второй главы, изложенном в третьем ее параграфе. Места, выделенные петитом, содержат детали, которые могут быть опущены при первом чтении.

Аксиоматическое построение логики высказываний оказалось эквивалентным содержательному (табличному) построению ее, в котором под буквами X, Y, Z,... понимались именно предложения (т. е. высказывания, которые либо истинны, либо ложны, и притом непременно одно из двух), а под знаками «$\overline{}$», «&», «$\vee$» — отрицание и связки, соответствующие, хотя не полностью, союзам «и» и «или» разговорной речи. Однако в аксиоматическом построении мы не пользовались тем, что буквы X, Y, Z,... обозначают именно предложения, а логические константы «$\overline{}$», «&», «$\vee$» и др. — отрицание и связки между предложениями. Построенная аксиоматически система допускает поэтому и другие истолкования входящих в нее символов. Одним из таких является следующее: будем понимать под буквами X, Y, Z,.. не предложения, а предикаты, которые могут быть приписаны со смыслом предметам той или иной области исследований. Так, если речь идет о вещах, имеющих окраску, то предикатами могут быть «белый», «красный», «зеленый» и т. п. Если речь идет о целых числах, то предикатами будут, например: «четное число», «кратное трем», «больше 7», «простое число»[1] и т. п. Будучи приписан произвольному предмету из области, для которой он имеет смысл, предикат порождает предложение: истинное или ложное. Так, приписав предикат «простое число» числу 7, мы

[1] Простым числом называется такое, которое не имеет делителей, отличных от 1 и самого себя.

получим истинное предложение: «7 простое число». Приписав же его числу 15, мы получим ложное предложение «15 простое число». Наоборот, приписав предикат «больше 7» числу 15, мы получим истинное предложение «15 больше 7», приписав же его числу 7, — ложное: «7 больше 7». Заметим, что все рассмотренные здесь предикаты каждым приведенным нами предложением приписываются только одному субъекту. В дальнейшем мы будем называть подобные предикаты «свойствами». Предикаты же, которые порождают предложение (истинное или ложное), только будучи приписаны паре или большему числу субъектов, будут называться «отношениями». Так, «больше»—это отношение, ибо выражение «7 больше» не является предложением. Выражение же «7 больше 3»—предложение и притом истинное. Выражение «5 больше 7»—тоже предложение, но только ложное. Аналогично, выражения: «число 7 *лежит между* числами 5 и 12» и «число 5 *лежит между* числами 7 и 12»—предложения, из которых первое истинное, а второе ложное. Но в отличие от отношения «больше», связывающего два предмета, отношение «лежит между» связывает уже три предмета. По числу субъектов, которым они могут быть со смыслом приписаны одним и тем же предложением (истинным или ложным), предикаты разделяются на одноместные, двуместные, трехместные и т. д.

«Свойства» являются, таким образом, одноместными предикатами. В качестве дальнейших примеров одноместных предикатов приведем еще такие понятия, как «человек», «старец», «слон», «сестра Ирины». Понятие же «сестра» (в смысле отношения родства) является уже двуместным предикатом. Во второй главе рассматриваются только одноместные предикаты. Заметим тут же, что вместо одноместных предикатов для целей этой главы с тем же успехом можно рассматривать соответствующие им *классы* предметов, обладающих выражаемым данным предикатом «свойством», или подпадающих, иначе говоря, под *объем* выражаемого им понятия. Исчисление одноместных предикатов называется поэтому иначе «исчислением классов».

Если понимать теперь под буквами X, Y, Z,... одноместные предикаты, то выражения $\overline{X}$, $X \vee Y$, $X \& Y$ также можно рассматривать как одноместные предикаты или как соответствуюшие им классы предметов. Так, под $\overline{X}$ мы будем понимать общее свойство всех тех предметов, приписывание которым предиката X порождает не истинное, а ложное предложение, или класс всех предметов, которые *не* обладают свойством X. В курсах логики класс предметов, обладающих свойством X, обозначается обычно x. Класс предметов, не обладающих свойством X, называется дополнением к классу x и обозначается иногда: $-x$. Если под X, например, будем понимать предикат «четное число», то $\overline{X}$ будет обозначать предикат «нечетное число», или соответствующий ему класс нечетных чисел.

Под $X \vee Y$ мы будем понимать общее свойство всех тех предметов, которые обладают, по меньшей мере, одним из двух свойств: X *или* Y; или класс предметов, состоящий из всех (различных) элементов обоих классов x и y. Такой класс называется обычно ***суммой*** классов x и y и обозначается: $x+y$, или $x \vee y$. Если под X мы будем понимать предикат «делится на 2», или класс всех четных чисел, а под Y—предикат «делится на 3», или класс всех чисел, кратных трем, то $X \vee Y$ будет предикатом, обозначающим общее свойство чисел, делящихся на 2 или на 3, которому соответствует класс, состоящий из всех четных чисел и всех нечетных чисел, кратных трем.

$X \& Y$ принимается как предикат, соответствующий общему свойству всех предметов, обладающих одновременно обоими свойствами X *и* Y, или соответствующий ему класс предметов, состоящий из тех элементов классов x и y, которые принадлежат одновременно обоим классам. Такой класс называется обычно ***пересечением*** классов x и y и обозначается $x \cdot y$. Из рассмотренных в предыдущем примере предикатов: X («делится на 2») и Y («делится на 3») с помощью связки «&» получается новый предикат $X \& Y$: «делится на 2 и делится на 3», равносильный в арифметике предикату «делится на 6» и определяющий соответствующий ему класс чисел, делящихся как на 2, так и на 3.

Так как знаки «$\rightarrow$» и «$\sim$» рассматриваются авторами лишь как сокращения, т. е. сводятся к уже рассмотренным нами знакам, то мы на них останавливаться не будем.

Нетрудно убедиться теперь, что всегда-истинные формулы исчисления высказываний при таком истолковании обращаются в предикаты, выполняющиеся для всех предметов рассматриваемой области, или в так называемый ***универсальный класс***, который мы будем обозначать в дальнейшем буквой t.

Проверим это, например, для аксиомы

$$\text{a)}\ X \vee X \rightarrow X.$$

С этой целью исключим сначала знак «$\rightarrow$», пользуясь тем, что, по определению, $X \rightarrow Y$ есть сокращение для $\overline{X} \vee Y$. Мы получим:

$$\overline{X \vee X} \vee X$$

Заменим затем в этой формуле предикаты классами и операции над предикатами операциями с классами. Мы получим формулу

$$-(x+x)+x,$$

означающую теперь не предложение (и не предикат), а некоторый класс предметов.

Используя то обстоятельство, что для сложения классов имеет место тождество: $x+x=x$, представляющееся содержательно понятным потому, что класс $x+x$, по определению сложения классов, содержит все те и только те элементы, которые входят по крайней мере в один из двух классов: x или x, мы получаем далее совпадающий с предыдущим класс:

$$-x+x$$

Наконец, так как $-x$ по определению содержит все те предметы нашей области, которые не входят в x, а $-x+x$ есть —в силу определения сложения классов—класс всех тех (и только тех) предметов, которые входят по крайней мере в один из двух классов: $-x$ или x, то

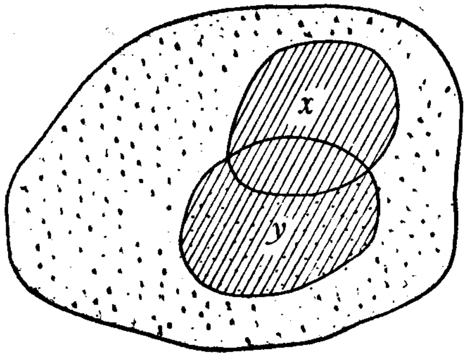
$$-x+x=t.$$

$-x(x+x)+x$ и есть, таким образом, универсальный класс.

Аналогичную проверку для аксиомы

$$\text{b)}\ X \to X \vee Y$$

выполним, иллюстрируя ее посредством кругов Эйлера. Соответствующий этой аксиоме класс $-x+(x+y)$ можно изобразить графически:



Наружный «круг» соответствует здесь универсальному классу t, заполненная точками часть его поверхности — классу $-x$; заштрихованная часть поверхности — классу $x+y$. И ясно, что во всем универсальном классе нет ни одной точки, которая не входила бы по крайней мере в один из двух классов: $-x$ или $x+y$. Суммой их, следовательно, является универсальный класс.

Для строгого доказательства нашего утверждения по отношению ко всем вообще всегда-истинным формулам логики высказываний достаточно заметить, как это и сделано авторами, что определенные нами операции исчисления классов обладают всеми свойствами a1)—a4), которыми характеризуются операции исчисления высказываний.

Так, сложение и пересечение классов обладают *оба* свойствами *коммутативности, ассоциативности* и *дистрибутивности* (одно относительно другого). Дополнение к пересечению двух классов x и y есть сумма их дополнений $-x$ и $-y$, т. е.

$$-(x \cdot y) = -x + (-y)$$

Каждое из этих двух выражений, соединенных знаком равенства, может быть заменено поэтому другим.

Аналогично

$$-(x+y) = -x \cdot (-y).$$

Наконец, дополнение к дополнению x совпадает с x, т. е.

$$-(-x) = x,$$

а знаки «$\to$», «$\sim$» употребляются как сокращения точно так же, как и в исчислении высказываний.

Поэтому формулы исчисления предикатов (или исчисления классов) можно совершенно так же приводить к нормальной форме, как это делается в исчислении высказываний: каждый шаг в процессе приведения будет заменять выражаемый формулой класс совпадающим с ним классом. Но все всегда-истинные формулы исчисления высказываний, будучи приведены к нормальной конъюнктивной форме, представляют собой конъюнкцию, каждый член которой содержит по крайней мере одну пару одинаковых букв, из которых одна снабжена знаком отрицания, а другая — нет, и которые связаны друг с другом знаком «$\vee$», т. е. представляют в сумме универсальный класс. Непосредственным следствием отсюда и является то обстоятельство, что и все всегда-истинные формулы исчисления высказываний в исчислении классов превращаются в формулы, представляющие универсальный класс при любой подстановке в них на место переменных каких-нибудь индивидуальных классов. Наоборот, если хотя бы один член конъюнктивной нормальной формы не содержит одновременно ни одной буквы вместе с ее отрицанием, то существует такая подстановка индивидуальных классов, при которой рассматриваемая формула уже не представляет собой универсального класса.

Если определить операции над классами не содержательно, как мы это сделали, а аксиоматически, положив в основу систему аксиом, непосредственно не совпадающую полностью с правилами a1)—a4), то доказательство того, что в новом истолковании всякая всегда-истинная формула исчисления высказываний превращается всегда в универсальный класс, удобнее провести иначе. Аналогично тому, как это было сделано, опираясь на тождества $x+x=x$ и $-x+x=t$, для аксиомы a), достаточно проверить сначала, опираясь на аксиомы, определяющие операции с классами, что вообще все аксиомы a)—d) исчисления высказываний представляют в нашей интерпретации универсальный класс. А затем показать, что если какие-нибудь формулы представляют универсальный класс, то и формулы, полученные из них по правилам вывода исчисления высказываний, должны также представлять универсальный класс.

Несколько различных способов выбора системы независимых аксиом для исчисления классов, или так называемой алгебры Буля, читатель может найти в статье *Хантингтона (E. V. Huntington*, New sets of independent postulates for the algebra of logic, Trans. Am. Mathem. Soc., t. 35 (1933), стр. 207—304, и исправление ошибки там же, стр. 557—8). Весьма простой из такого рода систем является следующая, приведенная в статье *Lee Byrne*, Two brief formulations of Boolean algebra, Bull. Am. Mathem. Soc., t. 52 (1946), pp. 269—272:

Множество (или область предметов) A называется *булевской алгеброй* относительно операций, обозначаемых через «.» и «—», если выполнены следующие условия:

A_B1: *Если* $x \in A$, то и $(-x) \in A$ (знак «$\in$» читается как «принадлежит» или «является элементом»).

A_B2: *Если* $x \in A$ *и* $y \in A$, *то и* $x \cdot y \in A$[1].

A_B3: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

A_B4: $x \cdot y = y \cdot x$[2].

A_B5: $x \cdot (-y) = z \cdot (-z)$ *равносильно* $x \cdot y = x$.

Равенство $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$ при этом рассматривается как элементарное высказывание. Кроме того, добавляется правило, в силу которого $F(\mathfrak{x}) \sim F(\mathfrak{u})$, если $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$[3].

---

[1] Аксиомы A_B1 и A_B2 выражают иногда иначе, говоря, что множество A *замкнуто* относительно операций «—» и «·». Они соответствуют правилам образования формул, обозначающих предметы (*термов*).

[2] Аксиомами A_B3 и A_B4 выражаются, иными словами, *ассоциативность* и *коммутативность* операции «.»

[3] Исчисление классов получается из этой системы аксиом при истолковании операции «.» как в смысле «&», так, и в смысле «$\vee$». Равенство $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ рассматривается как доказанное.

Мы убедились таким образом, что в новом истолковании всякая всегда-истинная, или (что означает здесь то же самое) доказуемая формула исчисления высказываний превращается всегда в предикат, выполняющийся для всех предметов, или в соответствующий такому предикату универсальный класс. Поэтому вполне естественно поставить в соответствие каждому такому предикату *предложение*, констатирующее это обстоятельство и утверждающее, следовательно, что некоторый предикат выполняется *для всех предметов*, или что соответствующий ему класс совпадает с t. Естественно, далее, сопоставить такое предложение и другим предикатам, заметив, что если, например, такой-то предикат *не* выполняется для всех предметов, то соответствующее предложение, утверждающее его выполнение для всех предметов, ложно. Каждому предикату X при этом будет поставлено в соответствие предложение, которое авторы обозначают $|X|$ и которое утверждает, что предикат X принадлежит *всем предметам* рассматриваемой области. Это предложение может быть как истинным, так и ложным, но если на место X мы подставим в него предикат $\mathfrak{A}$, формально так же образованный из переменных предикатов $X, Y, Z, \ldots$, как какое-нибудь всегда-истинное высказывание из переменных высказываний $X, Y, Z, \ldots$, то предложение $|\mathfrak{A}|$ будет тоже всегда-истинным. Но только теперь уже при произвольных подстановках вместо $X, Y, Z\ldots$ не предложений, а предикатов. Оно будет утверждать именно, что полученный таким образом предикат выполняется *для всех предметов*, —и это будет правдой.

Заметим, что теперь в нашем распоряжении окажется некоторый запас предложений, как истинных, так и ложных, которые не будут уже нерасчлененными целыми, несмотря на то, что не будут составлены из других предложений. Многие из них будут сложными образованиями, составленными, однако, не из элементарных (основных) предложений, а из элементарных предикатов, и, несмотря на свою сложность, являющимися поэтому в целом элементарными предложениями. Так, если X обозначает свойство «женщина» (или «быть женщиной»), а Y—«мужчина» (или «быть мужчиной»), а рассматриваемой областью предметов будут люди, то $|X \vee Y|$ представляет собой предложение (A): «Все люди либо женщины, либо мужчины». В дальнейшем мы увидим, что благодаря их сложности (точнее, опираясь на способ их образования) некоторые элементарные предложения теперь можно будет заменять равносильными им сложными (т. е. составленными из других предложений). Однако в данном случае попытка представить полученное нами предложение в виде дизъюнкции ($Б$): «Все люди—женщины *или* все люди—мужчины», будет явно неудачной. Оба предложения: «Все люди—женщины» и «Все люди —мужчины»,—ложны. Предложение ($Б$) поэтому ложно, между тем как (A) истинно.

Не слишком ли беден, однако, запас истинных элементарных предложений, которые мы можем выразить таким образом? Ведь с их помощью мы можем высказать что-нибудь лишь о *всех* сразу предметах области! В действительности запас этот все же шире, чем может показаться на первый взгляд. Во всяком случае его достаточно, чтобы выразить все общие, как утвердительные, так и отрицательные предложения, т. е. суждения типов A и E традиционной логики. Действительно, такие суждения нетрудно заменить эквивалентными им суждениями о *всех* предметах рассматриваемой области. Поясним это сначала на примерах.

Я хочу сказать: «Все советские женщины уравнены в правах с советскими мужчинами». Могу ли я, не искажая смысла, заменить это высказывание равносильным ему высказыванием о *всех* предметах области,—в данном случае, естественно, о всех людях?—Оказывается, могу. Стоит только заметить, что утверждение мое равносильно высказыванию: «Для *всякого предмета* (или «для всякого человека») верно, что *если* этот предмет есть советская женщина, *то* он уравнен

в правах с советскими мужчинами», чтобы отыскать способ такого выражения. Если мы обозначим индивидуальный (конкретный, данный) предикат «советская женщина» через «$СЖ$», предикат «уравнен в правах с советскими мужчинами» через «$УП$», то сложный предикат «$СЖ \rightarrow УП$», или иначе: «$\overline{СЖ} \vee УП$», будет справедлив уже для всех предметов рассматриваемой области, в данном случае *для всех людей*. Действительно, согласно нашему определению операций «$\overline{\ }$» и «$\vee$» в применении к предикатам, предикат «$\overline{СЖ}$» выполняется для всех предметов, не являющихся «советскими женщинами», предикат же «$\overline{СЖ} \vee УП$»—для всех предметов, либо *не* являющихся «советскими женщинами», либо «уравненных в правах с советскими мужчинами». Но *всякий человек* или не «советская женщина», или, если человек, о котором идет речь,—советская женщина, то он заведомо уравнен в правах с советскими мужчинами».

Аналогично, если я хочу сказать: «Никакое нечетное число не делится на 6» то, обозначив предикат «нечетное число» через «$Нч$», предикат «делится на 6» через «$Дл6$», мы можем заменить это высказывание следующим равносильным ему высказыванием о *всех* числах: $|\overline{Нч} \vee \overline{Дл6}|$, т. е. «всякое число либо четное, либо не делится на 6». Иными словами, *если* оно нечетное, *то* оно уже во всяком случае не делится на 6.

Вообще, всякое суждение типа A: «Все X суть Y» может быть заменено суждением о *всех предметах*, имеющим вид «$|X \rightarrow Y|$», или «$|\overline{X} \vee Y|$», и означающим в новом истолковании, что «Всякий предмет или не-X, или Y», т. е. *если* он обладает свойством X, то обладает и свойством Y. В применении к классам такое суждение записывается обычно в виде «$x \subset y$» и читается «x включен в y», или «x есть подкласс класса y», или «класс x есть часть класса y».

Аналогично, всякое суждение типа E: «Никакое X не есть Y», может быть заменено суждением о *всех предметах*, имеющим вид «$|X \rightarrow \overline{Y}|$», или «$|\overline{X} \vee \overline{Y}|$», и означающим теперь, что «Всякий предмет или не-X, или не-Y» т. е. всякий предмет, обладающий свойством X, не обладает свойством Y. Для классов это можно записать в виде «$x \subset -y$» и прочесть как «x включен в дополнение к y», но такое выражение встречается довольно редко. Обычно это выражают несколько иначе, и мы расскажем сейчас, как именно. Прежде всего заметим, что знак «$\subset$», в отличие от знаков «$.$», «$+$» (или «$\vee$»), не является знаком для операции с классами, порождающей из одних классов другие. Он появляется лишь после того, как сложному классу «$-x+y$» уже поставлено в соответствие утверждение, что он совпадает с универсальным классом, и есть поэтому лишь другое выражение для формулы

$$-x+y=t,$$

выражающей некоторое *отношение* между классами.

Поэтому и говорят обычно, что знак «$\subset$» есть знак не операции, а отношения. Мы можем сказать, что, по определению,

$$x \subset y \sim -x+y=t.$$

Но в таком случае:

$$x \subset -y \sim -x+(-y)=t,$$

или, так как:

$$-x+(-y)=-(x \cdot y),$$

$$x \subset -y \sim -(x \cdot y)=t.$$

Но если дополнение к какому-нибудь классу v совпадает с универсальным классом, то класс v не содержит ни одного элемента или есть, как говорят, *пустой класс*, обозначаемый обычно знаком «0». Так как и, наоборот, пустой класс есть дополнение к универсальному, то последнюю формулу можно записать в виде:

$$x \subset -y \sim x \cdot y=0.$$

Правая часть этой формулы и служит обычно выражением для суждения типа E: «Никакое X не есть Y». Она читается: «пересечение классов x и y пусто».

Ясно, что и суждение типа A можно выразить с помощью знака «0» (а не «t»). Оно примет при этом вид:

$$x \cdot -y=0,$$

означающий, что пересечение x с дополнением к y пусто, т. е. что всякий элемент класса x есть в то же время элемент и класса y.

Мы привели здесь эти дополнительные выражения для суждений типов A и E потому, что они часто встречаются в литературе.

Заметим, что суждения обоих этих типов оказались выразимыми в виде равенства нулю (пустому классу). Выражение их в этом виде обычно предпочитается математиками, привыкшими оперировать с уравнениями. Вообще, элементарные предложения рассматриваемого нами вида удобно выражать с помощью знаков «$=$» или «$\subset$» и специальных знаков «$\cdot$», «$+$», «$-$» для операций с классами потому, что при этом нельзя смешать операции над классами (или предикатами), порождающие новые классы (или предикаты), с операциями над предложениями, порождающими новые предложения. С другой стороны, обозначения авторов (состоящие только в присоединении к знакам исчисления высказываний прямых скобок | |, которые одновременно и (1) указывают на то, что помещенные между ними буквы обозначают не высказывания, а предикаты, знаки же действий — операции над предикатами, и (2) превращают образованный таким образом предикат в соответствующее ему предложение, утверждающее, что этот предикат выполняется *для всех предметов*) имеют то преимущество, что подчеркивают формальное тождество операций над предикатами с операциями над высказываниями.

Преимуществом этим особенно удобно пользоваться при выяснении важного обстоятельства, к которому мы постепенно перейдем. Хотя запас истинных предложений, которые могут быть высказаны при помощи выражений вида $|\mathfrak{A}|$, где $\mathfrak{A}$ обозначает предикат, богаче, чем может показаться на первый взгляд, однако с его помощью нельзя все же выразить даже простые частные предложения типов I: «Некоторые X суть Y» и O: «Некоторые X суть не-Y». Но всякое частное предложение можно рассматривать как отрицание некоторого общего. Так, утверждая, что «некоторые X суть Y», мы отрицаем, что «никакое X не есть Y»; утверждая, что «некоторые X суть не-Y», мы отрицаем, что «все X суть Y». Таким образом, суждение типа I есть отрицание суждения типа E, а суждение типа O—отрицание суждения типа A. Так как суждения типов A и E выражаются равенствами:

$$A:\quad x\cdot -y=0,$$
$$E:\quad x\cdot y\ \ =0.$$

то суждения типов I и O могут быть выражены неравенствами

$$I:\quad x\cdot y\ \ \neq 0,$$
$$O:\quad x\cdot -y\neq 0,$$

Знак «$\neq$» употребляется здесь как отрицание равенства. В символике авторов соответствующие суждения должны быть записаны в виде:

$$I:\quad \overline{|\overline{X}\vee\overline{Y}|},$$
$$O:\quad \overline{|\overline{X}\vee Y|},$$

причем черточки над буквами обозначают операции с предикатами или соответствующими им классами (образование дополнения), а черта над всем выражением—операцию отрицания, примененную к предложению о *всех предметах*, выраженному с помощью вертикальных черточек. Как это и выяснено в § 2 второй главы, нам приходится при этом пользоваться уже комбинированным исчислением, состоящим в применении операций исчисления высказываний к элементарным предложениям, приписывающим предикаты *всем* предметам рассматриваемой области.

При этом обнаруживаются новые обстоятельства, в которых, собственно, и состоит основной смысл введения нового исчисления предикатов, или классов. Именно, оказывается, что, кроме тех из выражений $\mathfrak{A}(X, Y, Z, \ldots)$ исчисления высказываний, которые истинны при подстановке в них произвольных предложений на место переменных $X, Y, Z, \ldots$, и соответствующих им выражений $|\mathfrak{A}(X, Y, Z, \ldots)|$, истинных при подстановке на место переменных $X, Y, Z, \ldots$ произвольных предикатов, всегда-истинными будут и некоторые другие формулы. Применение исчисления высказываний к предложениям специального вида $|\mathfrak{A}|$, порожденным исчислением предикатов, расширяет запас всегда-истинных формул, или «законов» логики. Так, из аксиомы

$$\text{a)}\quad X\vee X\rightarrow X,$$

кроме тривиального следствия из нее же:

$$|X|\vee|X|\rightarrow|X|$$

и всегда-истинного, как мы уже выяснили, для произвольных значений переменного предиката X выражения

$$|X\vee X\rightarrow X|,$$

можно получить всегда-истинную формулу

$$|X\vee X|\rightarrow|X|,$$

где знак «$\vee$» обозначает операцию с предикатами, а знак «$\rightarrow$» связывает предложения. Действительно, она утверждает, что если всякий предмет обладает свойством $X \vee X$ (принадлежит сумме классов x и x), то всякий предмет обладает и свойством X (принадлежит классу x).

Аналогично, из аксиомы

$$\text{b)} \quad X \to X \vee Y,$$

кроме всегда-истинных формул

$$|X| \to |X| \vee |Y|$$

и

$$|X \to X \vee Y|,$$

можно получить еще всегда-истинную формулу

$$|X| \to |X \vee Y|,$$

утверждающую, что если объем предиката X охватывает все предметы, то объем предиката $X \vee Y$, добавляющего к предметам, обладающим свойством X, предметы, обладающие свойством Y, тоже охватывает все предметы. По аналогии с этими двумя примерами мы могли бы построить из аксиомы:

$$\text{c)} \quad X \vee Y \to Y \vee X,$$

кроме само собой разумеющихся $|X| \vee |Y| \to |Y| \vee |X$ и $|X \vee Y \to Y \vee X|$, формулы:

$$|X \vee Y| \to |Y \vee X|,$$
$$|X| \vee |Y| \to |Y \vee X|,$$
$$|X \vee Y| \to |Y| \vee |X|,$$

из которых первые две действительно всегда-истинны, третья же нет. Действительно, если по крайней мере один из двух классов x и y содержит все предметы, то сумма их заведомо охватывает все предметы. Однако если сумма двух классов содержит все предметы, то из этого отнюдь не следует, что по крайней мере один из них содержит все предметы. Верно, например, что все предметы (об окраске которых можно со смыслом говорить) «либо белые, либо не белые». Однако из этого не следует, что из двух предложений:

«Все предметы белые» и «Все предметы не белые» по крайней мере одно верно. Оба ложны.

По тем же причинам, которые приведены авторами в тексте, мы не будем здесь останавливаться подробнее на характеристике запаса всегда-истинных формул комбинированного исчисления. Отметим лишь, что для понимания материала, изложенного в § 3, особенно существенны приводимые авторами формулы:

$$(|X \to Y| \,\&\, |Y \to Z|) \to |X \to Z|$$

(«Если все X суть Y и все Y суть Z, то все X суть Z»),

$$|X \,\&\, Y| \sim |X| \,\&\, |Y|$$

(«Для того, чтобы пересечение классов x и y содержало все предметы рассматриваемой области, необходимо и достаточно, чтобы каждый из классов x и y содержал все предметы области».)

Для исчисления высказываний (и формально совпадающего с ним «чистого», т. е. не комбинированного с исчислением высказываний, исчисления предикатов, или классов), все бесконечное множество всегда-истинных предложений оказалось возможным вывести по определенным правилам из конечного (и даже очень небольшого) числа таких предложений, принятых за аксиомы. И здесь достаточно присоединить к исчислению высказываний, объединенному с «чистым» исчислением предикатов, несколько новых всегда-истинных формул, чтобы получить возможность вывести с их помощью все остальные. Не приводя здесь доказательства этого предложения, продемонстрируем на примере, как при помощи формул:

$$|X| \to |X \vee Y|, \tag{1}$$
$$|X \vee Y| \to |Y \vee X|, \tag{2}$$
$$|X \& Y| \sim |X| \,\&\, |Y|, \tag{3}$$

и расширенных на случай формул нового вида правил подстановки и замены выражения $\mathfrak{A}$ эквивалентным ему выражением $\mathfrak{B}$ можно вывести формулу

$$(|X \to Y| \,\&\, |Y \to Z|) \to |X \to Z|. \tag{4}$$

Прежде всего, по правилам исчисления высказываний (транзитивность знака «$\to$») из (1) и (2) следует

$$|X| \to |Y \vee X| \tag{6}$$

Подставив теперь в (1) $X \to Y$ вместо X, и Z вместо Y, а в (6) $Y \to Z$ вместо X, и $\overline{X}$ вместо Y, мы получим

$$|X \to Y| \to |(X \to Y) \vee Z|, \tag{7}$$

$$|Y \to Z| \to |\overline{X} \vee (Y \to Z)|. \tag{8}$$

По правилам исчисления высказываний из формул (7) и (8) получаем затем формулу:

$$(|X \to Y| \,\&\, |Y \to Z|) \to (|(X \to Y) \vee Z| \,\&\, |\overline{X} \vee (Y \to Z)|). \tag{9}$$

Подстановка в (3) дает, далее:

$$|(X \to Y) \vee Z| \,\&\, |\overline{X} \vee (Y \to Z)| \sim$$
$$\sim |(X \to Y) \vee Z \,\&\, \overline{X} \vee (Y \to Z)|. \tag{10}$$

Но по правилам исчисления предикатов, совпадающим формально с правилами исчисления высказываний:

$$(X \to Y) \vee Z \,\&\, \overline{X} \vee (Y \to Z) \sim \overline{X} \vee Y \angle Z \,\&\, \overline{X} \vee \overline{Y} \angle Z,$$
$$\overline{X} \vee Y \vee Z \,\&\, \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z \sim \overline{X} \vee Z \vee (Y \,\&\, \overline{Y}),$$
$$\overline{X} \vee Z \vee (Y \,\&\, \overline{Y}) \sim \overline{X} \vee Z,$$
$$\overline{X} \angle Z \sim (X \to Z),$$

откуда:

$$|(X \to Y) \vee Z \,\&\, \overline{X} \vee (Y \to Z)| \sim |X \to Z|. \tag{11}$$

Из формул (9), (10) и (11) нужная нам формула (4) следует немедленно по неоднократно уже использованному нами правилу замены выражения $\mathfrak{A}$ эквивалентным ему выражением $\mathfrak{B}$.

Заметим, что приведенная нами выше система аксиом A_B1—5 булевской алгебры, будучи добавлена к исчислению высказываний, представляет уже собой полную систему аксиом для комбинированного исчисления. Покажем для примера, как вывести из нее правило, соответствующее формуле

$$|X \to Y| \to (|Y \to Z| \to |X \to Z|),$$

и называющееся обычно *принципом силлогизма*. Правило это состоит в следующем:

Если доказаны обе формулы:

$$|\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}|, \tag{!}$$

$$|\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}|, \tag{!!}$$

то доказана и формула

$$|\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}|. \tag{!!!}$$

Формулы (!) и (!!), будучи записаны на языке исчисления классов, примут вид

$$\mathfrak{a} \cdot -\mathfrak{b} = 0,\text{ [1]} \tag{!*}$$

$$\mathfrak{b} \cdot -\mathfrak{c} = 0, \tag{!!*}$$

или, в силу аксиомы A_B5,

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}, \tag{!**}$$

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{1} = \mathfrak{b}. \tag{!!**}$$

Подставив, пользуясь свойствами равенства, в первую из этих формул $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ вместо $\mathfrak{b}$ (на основании второй), мы получим $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$, или, в силу аксиомы A_B3, $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$. Но (см. !**) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Последняя полученная нами формула преобразуется поэтому в $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, или в силу аксиомы A_B5, в $\mathfrak{a} \cdot -\mathfrak{c} = 0$. На языке исчисления предикатов это и есть формула $|\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}|$, которую нам нужно было доказать.

В заключение остановимся еще на двух моментах. Во-первых, отметим подчеркнутую авторами разницу между двумя интерпретациями исчисления высказываний: одной, которая получается, когда мы толкуем переменные не как предложения, а как предикаты и, соответственно, знаки «‾», «&», «$\vee$», «$\longrightarrow$», «$\sim$», как порождающие из элементарных предикатов сложные предикаты (а не из элементарных предложений сложные предложения), и другой, которая состоит в замене предикатов классами и операций с предикатами—операциями с классами.

Первая интерпретация порождает предложения специального вида, применение к которым правил исчисления высказываний, благодаря особенностям этих предложений, является источником новых закономерностей, присущих только объединению обеих интерпретаций одного и того же логического формализма, а не каждой из них в отдельности. Так, в частности, благодаря сложности элементарных высказываний вида $|\mathfrak{A}|$, где $\mathfrak{A}$ в свою очередь обозначает сложный предикат вида $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\ldots\&\, \mathfrak{A}_k$, выражение, образованное из $|\mathfrak{A}|$ по правилам исчисления высказыва-

[1] Пользуясь системой аксиом A_B1—5, нетрудно показать, что $z \cdot -z = y - y$, т. е. что $z - z$ есть некоторый постоянный (индивидуальный) класс, который мы обозначим 0.

ний, может быть заменено выражением, элементарными составными частями которого будут уже выражения $|\mathfrak{A}_1|, |\mathfrak{A}_2|, \ldots, |\mathfrak{A}_k|$. Мы получаем, так сказать, возможность, пользуясь сложностью структуры «атома», расчленить его на составные части, из которых образовать новые «атомы». При дальнейшей замене предикатов классами ничего подобного уже не получается. Тут происходит только изменение терминологии:—совершенно точный перевод с одного языка на другой. Суть дела в том, что и в исчислении предикатов два предиката, выполняющиеся для одних и тех же предметов, т. е. имеющие один и тот же объем, могут по существу не различаться: все, что справедливо для одного из них, справедливо и для другого. Между тем потребность различать понятия не только по *объему*, но и по *смыслу*, по *способу* их образования, испытывается повсюду, в том числе и в математике. Так, выражение «X есть равнобедренный треугольник» становится истинным, если на место X мы подставим понятие: «треугольник, имеющий два равных угла». Оно останется истинным, конечно, и если вместо этого понятия мы подставим совпадающее с последним по объему понятие «равнобедренный треугольник»[1]. Тем не менее, вряд ли кто-нибудь согласится считать оба предложения:

(1) «Треугольник, имеющий два равных угла, есть равнобедренный треугольник»,

(2) «Равнобедренный треугольник есть равнобедренный треугольник», вполне заменяющими друг друга.

С «легкой руки» превратившегося в агрессивного реакционера Рэссела в зарубежной литературе распространились утверждения, что все предложения математики носят аналитический характер и сама эта наука является лишь грандиозным собранием тавтологий, основаных на стремлении ограничиться в применении к математике одной только объемной логики.

В настоящее время существует уже довольно много попыток в той или иной мере дополнить «*объемную*»

[1] Т. е. «имеющий две равные стороны».

логику «*смысловой*» (так называемую «*экстенсиональную*»—«*интензиональной*»). В этом отношении некоторый интерес представляют, правда, спорные еще и во всяком случае нуждающиеся в критическом освещении с точки зрения диалектического материализма попытки построения *логики модальностей*, наряду с истиной и ложью различающей категории «необходимости», «возможности» и др.

Заметим, далее, что для самого комбинированного исчисления высказываний и предикатов, или булевской алгебры, также возможны различные интерпретации. Одной из таких является, например, разработанная советским физиком В. И. Шестаковым[1] и получившая широкое применение в работах Института автоматики и телемеханики Академии Наук СССР теория электрических релейно-контактных схем.

Гораздо менее значительной, но все же в некоторой мере любопытной является, например, следующая частичная интерпретация нашего исчисления. Будем понимать под буквами $X, Y, Z, \ldots$ натуральные числа $1, 2, 3, \ldots$; под выражениями «$X \& Y$» и «$X \vee Y$», соответственно, «общий наибольший делитель чисел X и Y» и «общее наименьшее кратное чисел X и Y»; под «$|X \rightarrow Y|$»—высказывание «X делит Y»; под «$|X \sim Y|$»—высказывание «X делит Y и Y делит X». В таком случае формулы

$$|X \& Y \rightarrow X|,$$
$$|X \& Y \rightarrow Y|,$$
$$|X \rightarrow X \vee Y|,$$
$$|Y \rightarrow X \vee Y|$$

[1] *Шестаков В. И.*, Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра A-схем), Ж. Т. Ф., т. XI, вып. 6, 1941.

Шестаков В. И., Об одном символическом исчислении, применимом к теории релейных электрических схем, Уч. записки МГУ, вып. LXXIII, кн. 5-я (математика), 1944, стр. 45—48.

Шестаков В. И., Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами, Известия Академии Наук СССР, серия математическая, т. 10, № 6, 1946, стр. 529—554.

истолкуются, соответственно, так:

«Общий наибольший делитель чисел X и Y делит число X».

«Общий наибольший делитель чисел X и Y делит число Y».

«Число X делит общее наименьшее кратное чисел X и Y».

«Число Y делит общее наименьшее кратное чисел X и Y», и все эти высказывания будут действительно всегда-истинными (при любых возможных здесь значениях переменных X и Y).

Высказывание

$$(X \to Y) \to ((X \to Z) \to (X \to Y \,\&\, Z))$$

при этом нельзя со смыслом поместить все в целом между двумя вертикальными чертами, так как одно предложение не может «делить» другое. Но, расставив черты следующим, вполне естественным для нашей интерпретации, образом:

$$|X \to Y| \to (|X \to Z| \to |X \to Y \,\&\, Z|),$$

мы получим опять всегда-истинное высказывание: «Если X делит Y, то, если X делит Z, X делит общий наибольший делитель Y и Z. Иными словами, всякий *общий* делитель чисел Y и Z есть в то же время делитель их общего *наибольшего* делителя.

Аналогично, двойственное приведенному высказывание

$$|Y \to X| \to (|Z \to X| \to |Y \vee Z \to X|)$$

будет выражать в нашей интерпретации, что общее наименьшее кратное двух делителей одного и того же числа X делит число X.

Мы привели эти различные истолкования (число которых можно было бы увеличить) одних и тех же (формально) выражений исчисления высказываний, чтобы подчеркнуть еще раз, что законы логики не являются произвольными соглашениями, но отвлечены из реальной материальной действительности, соотношения которой отражают. Поскольку речь идет при этом о самых общих соотношениях, применимых, в определенных условиях, к объектам самой разнообразной природы, нет ничего удивительного в том, что в частных случаях, в применении к более специальным предметам или отношениям, мы можем отыскать и более конкретные соотношения, обладающие, тем не менее, той же общей структурой, т. е. подчиняющиеся формально тем же законам.

Еще Эйлер любил пояснять так называемый «принцип силлогизма»: «*Если* все X суть Y и все Y суть Z, *то* все X суть Z», т. е. нашу формулу (4), замечая, что «Если деньги у меня в кошельке, а кошелек в кармане, то деньги в кармане». Аналогичная топологическая (пространственная) интерпретация может быть осуществлена, конечно, и на плоскости, например, с помощью кругов, как это и делается обычно в учебниках логики. Нет ничего удивительного поэтому и в том, что логические формулы допускают даже довольно специальные технические истолкования.

Связь логики с практикой неоспорима. Недаром Ленин говорил, что «практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, *дабы* эти фигуры *могли* получить значение *аксиом*». Конечно, при этом не следует забывать и другого марксистско-ленинского положения, что «истина всегда конкретна» и что поэтому в разных условиях могут иметь силу и разные законы.

Комментарий к § 10 третьей главы

Результат Лёвенгейма особенно интересен потому, что он является первым из целой серии полученных в основном лишь в 30-х годах текущего столетия результатов, выясняющих ограниченность возможностей для логических формализмов. Именно, из него следует немедленно, что средствами узкого исчисления предикатов нельзя определить несчетное бесконечное множество (например, имеющее мощность континуума, т. е. равномощное множеству точек на отрезке от 0 до 1). Действительно, если бы некоторая формула Φ исчисления предикатов могла служить определением бесконечного несчетного множества, то она не выполнялась бы (ни при каких индивидуальных значениях для входящих в нее предикатных переменных) ни в какой счетной области индивидуумов. Но в таком случае $\overline{\Phi}$, наоборот, была бы всегда-истинной в любой счетной области индивидуумов и, значит, в силу теоремы Лёвенгейма, была бы тождественной формулой исчисления предикатов. В силу полноты этого исчисления, присоединение к нему ее отрицания Φ вело бы поэтому к противоречию.

Заметим, что исчисление предикатов, по существу, является лишь переносом на произвольные области индивидуумов законов, справедливых для любых конечных областей. Это и было выяснено на самом деле в начале § 10. Действительно, если для области Q, состоящей из n индивидуумов: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, заменить выражение $(x) F(x)$ на $F(\alpha_1) \& F(\alpha_2) \& \ldots \& F(\alpha_n)$, выражение $(Ex) F(x)$ на $F(\alpha_1) \vee \ldots \vee F(\alpha_n)$, то аксиомы и правила исчисления предикатов превратятся в простые следствия системы аксиом исчисления высказываний. Так, аксиома

$$(x) F(x) \to F(y)$$

обратится в совокупность формул:

$$F(\alpha_1) \& F(\alpha_2) \& \ldots \& F(\alpha_n) \to F(\alpha_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

каждая из которых получается по правилу подстановки из всегда-истинной формулы исчисления высказываний вида:

$$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \to A_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

которую можно рассматривать как обобщение формул $A \to A$, $A \& B \to A$, $A \& B \to B$. Аналогично, правило $\gamma 1$), позволяющее перейти от всякой доказанной формулы вида:

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x),$$

где формула $\mathfrak{A}$ не содержит переменной x, к формуле

$$\mathfrak{A} \to (x) \mathfrak{B}(x),$$

в области Q является непосредственным следствием

из правила исчисления высказываний

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_2 \\ \ldots\ldots \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_n\end{array}}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1 \& \mathfrak{B}_2 \& \ldots \& \mathfrak{B}_n},$$

позволяющего перейти от совокупности n доказанных формул $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ к одной формуле $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_1 \& \ldots \& \mathfrak{B}_n$. [Это правило, в свою очередь, вытекает из обобщения всегда-истинной формулы $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \& C))$.]

Поэтому неудивительно, что все выводимые формулы исчисления предикатов являются всегда-истинными формулами для любой конечной области индивидуумов. Если бы имело место и обратное, т. е. все формулы, всегда-истинные в любой конечной области, были одновременно и выводимыми в исчислении предикатов, то последнее потеряло бы право на существование. Действительно, в таком случае к нему нельзя было бы присоединить определения бесконечной области, т. е. какой-нибудь формулы G, не выполняющейся ни в какой конечной области индивидуумов. Ведь отрицание этой формулы было бы всегда-истинным в любой конечной области индивидуумов и, следовательно, G была бы выводимой формулой исчисления предикатов. Присоединение формулы G приводило бы, таким образом, к противоречию. Можно доказать, однако (см., например, *D. Hilbert* und *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, т. I, §§ 5, 6, стр. 199—207, 209—265), что:

1) если формула Φ, содержащая только предикатные переменные, зависящие от *одного* аргумента, всегда истинна в любой конечной области, то она выводима в исчислении предикатов;

2) в исчислении предикатов существуют всегда-истинные в любой конечной области формулы G, не выводимые в этом исчислении.

Таким образом ясно, что, оставаясь в области логики, имеющей дело, подобно логике Аристотеля, только со *свойствами*, т. е. предикатами, зависящими от одного аргумента, нельзя дать определения бесконечной области индивидуумов, совместного с исчислением предикатов. Наоборот, вводя в рассмотрение *отношения*, т. е. предикаты, зависящие от двух или большего числа аргументов, можно определить такую область, о которой, хотя она и содержит бесконечное число индивидуумов, можно рассуждать по правилам исчисления предикатов, отвлеченным, как мы видели, из изучения конечных областей предметов. Распространенный в математике способ обращения с бесконечными множествами предметов так, как если бы они были конечными и в готовом виде лежали перед нами, подобно списку избирателей на участке, сам по себе оказывается, таким образом, не лишенным смысла. Исчисление же предикатов приобретает право на самостоятельное существование, так как в применении к бесконечным областям его аксиомы и правила вывода перестают быть следствиями из системы аксиом исчисления высказываний.

Однако сформулировать на «языке» исчисления предикатов формулу, которая была бы вообще выполнимой, но не выполнялась бы ни в какой конечной или счетной бесконечной области индивидуумов и могла бы, таким образом, служить определением для несчетной бесконечной области, как мы уже видели, невозможно. Иными словами, о таких свойствах [1] бесконечных множеств, которыми не обладают никакие конечные или счетные множества, нельзя с полной свободой рассуждать по правилам, экстраполированным от оперирования с конечными множествами предметов.

[1] В более общем смысле этого слова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Из числа произведений, вводящих в математическую логику, мы назовем следующие:

Behmann, H., Mathematik und Logik. Leipzig, 1927.

Carnap R., Abriß der Logistik. Wien, 1929.

Couturat, L., L'algèbre de la logique. Paris, 1905. (Существует русский перевод: *Л. Кутюра*, Алгебра логики, с дополнениями С. О. Шатунозского и И. Слешинского.)

Lewis C. I. and *C. H. Langford*, Symbolic Logic. New York, 1932.

Quine W. V., A System of Logistic. Cambridge (Mass.), 1934.

Russell B., Einführung in die mathematische Philosophie. (Немецкий перевод Gumbel'a и Gordon'a). München, 1922.

—и *A. N. Whitehead*, Einführung in die mathematische Logik (die Einleitung der Principia Mathematica) (Немецкий перевод *H. Mokre*). München, Berlin, 1932.

Для *более полного изучения* существенны:

Hilbert D. und *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, т. I. Berlin, 1934. [В настоящее время существует и второй том, содержащий более новые результаты.—*Ред.*].

Whitehead A. N. and *B. Russell*, Principia Mathematica, 2 изд., I т., 1925; II и III т., 1927.

Из числа *более старых* произведений, все еще не утерявших значения, назовем следующие:

Frege G., Begriffsschrift; Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, 1879.

Frege G., Die Grundlagen der Arithmetik; Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, 1884.

— Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Jena, 1893—1903.

Peano G., Notations de logique mathématique, introduction au Formulaire de Mathématiques. Turin, 1894.

Peano G., Formulaire de Mathématiques. 1895—1905.

Peirce C. S., Collected Papers, изданные *C. Hartshorne*, и *P. Weiss* (до настоящего времени появились тт. I—IV).

Schröder E., Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), 3 тома. Leipzig, 1890—1905.

Для ознакомления с *теоретико-множественными вопросами*, находящимися в тесной связи с логикой, укажем на

Fraenkel A., Einleitung in die Mengenlehre, 3-е изд. Berlin, 1928.

Вполне исчерпывающего списка очень разросшейся специальной логической литературы мы не можем дать и отсылаем на этот счет к ценной работе:

Church A., A Bibliography of Symbolic Logic (The Journal of Symbolic Logic, т. I, стр. 121—218), содержащей полный хронологически расположенный список всей литературы по математической лигике, доведенный до 1935 г. (продолжение этого списка см. в The Journal of Symbolic Logic, т. 3, стр. 178—212— *прим. ред.*).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор В. Соколов.
Технический редактор В. Полтев. Корректор Б. Ерусалимский.

Сдано в производство 13/VIII 1947 г. Подписано к печати 27/XI 1947 г. А—10570. Печ. л. 19. Уч.-издат. л. 14,9. Формат 82×108¹/₃₂. Издат. № 99/143. Зак № 738. Тираж 10 000 экз. Цена 14 р. 60 к.

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР, Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОПЕЧАТКИ

Страницы	Напечатано	Должно быть
Стр. 20, строка 2 сверху	X обозначает	$\overline{X}$ обозначает
» 30, » 12 »	$\overline{X} \& Y$	$\overline{X} \& \overline{Y}$
» 38, » 15 »	Y	$\overline{Y}$
» 54, » 7 снизу	$X \vee X$	$\overline{X} \vee X$
» 58, » 1 сверху	$X\overline{Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
» 59, » 15 снизу	$\overline{X\overline{Y}}$	$\overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}}$
» 71, » 12 сверху	$\vee \overline{Y} \& Y$	$\vee\ Y \& \overline{Y}$
» 76, » 15 снизу	III. $\lvert\overline{U \vee V}\rvert$	III. $\lvert\overline{\overline{U} \vee \overline{V}}\rvert$
» 78, » 6 сверху (A)	W	$\overline{W}$
» 92, » 6 »	(Ex)	(Ey)
» 99, » 9 »	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}(x)$
» 105, » 13 »	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{B}$
» 106, » 14 снизу	F	$\overline{F}$
» 107, » 9 сверху	(x)	$\overline{(x)}$
» 110, » 2 »	$(Ex)\,\mathfrak{U}(x)$	$(Ex)\,\overline{\mathfrak{U}}(x)$
» 115, » 8 »	$\vee\ G(u)$	$\vee\ \overline{G}(u)$
» 121, » 9 снизу	переходит снова в выводимую формулу.	переходит снова в доказательство. Так как аксиомы не затрагиваются этим преобразованием, то всякая формула, которая выводима без использования α 2), с помощью этого преобразования переходит снова в выводимую формулу.
» 126, » 12 снизу	(Ex)	(Ex_k)
» 130, » 14 »	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}$
» 137, » 7 »	предиката x, сложенное с y, дает z	предиката «x, сложенное с y, дает z»

Страницы	Напечатано	Должно быть
Стр. 145, » 19 снизу	$\mathfrak{A}$	$\overline{\mathfrak{A}}$
» 150, » 10 »	$F\ (1,0)$	$\overline{F}\ (1,0)$
» 182, » 8 сверху	множество.	множество множеств.
» 192, » 12 »	$\longrightarrow P\ (y)$	$\longrightarrow \overline{P}\ (y)$
» 193—195, всюду где встречается	индивидуальный (ые) предикат(ты)	предметный (ые) предикат (ты)
» 260, строка 5 снизу	$\overline{X \,\&\, \overline{Y}}$	$\overline{\overline{X} \,\&\, \overline{Y}}$
» 262, » 3 »	Y	$\overline{Y}$
» 274, » 7 сверху	X	$\overline{X}$
» 281, » 17 »	уравнен	«уравнен
» 290, » 4 снизу	логики	логикой
» 290, » 5 »	основаных	основанных
» 291, » 10-11 сверху	и предикатов, или булевской алгебры, также	и предикатов также
291, » 12 »	Одной из таких	Отметим также, что одной из интерпретаций булевской алгебры