
Х. Барендрегт



Ламбда-
исчисление

Его синтаксис
и семантика

«Мир»

STUDIES IN LOGIC
and
THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

volume 103

The Lambda Calculus
Its Syntax and Semantics

H. P. BARENDREGT
Rijksuniversiteit Utrecht
The Netherlands

North-Holland Publishing Company
Amsterdam New York Oxford
1981

Х. Барендрегт
Ламбда-
исчисление
Его синтаксис
и семантика

Перевод с английского
Г. Е. Минца

под редакцией
А. С. Кузичева

МОСКВА «МИР»
1985

Барендрегт Х.

Б 24 Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика: Пер.
с англ. — М.: Мир, 1985. — 606 с.

Монография посвящена классическим и новым результатам в активно развивающемся направлении математической логики, — так называемом ламбда-исчислении. Оно находит применение в теории доказательств, семантике языков программирования, алгебре, топологии, теории категорий. Изложение отличается полнотой и доступностью. Автор книги — известный голландский математик.

Для математиков разных специальностей, преподавателей, аспирантов и студентов университетов.

Б $\frac{1702020000-434}{041(01)-85}$ 10—84, ч. 1

ББК 22.12
517

Редакция литературы по математическим наукам

© North-Holland Publishing
Company, 1981

© Перевод на русский язык,
«Мир», 1985

Предисловие к русскому изданию

Книга профессора Утрехтского университета Х. Барендрегта — первое на русском языке подробное и доступное изложение ламбда-исчисления. Возникнув в основаниях математики, эта система была построена как теория вычислений с естественной бестиповой операционной семантикой. Она стала объектом особенно пристального внимания в информатике после того, как выяснилось, что ламбда-исчисление представляет собой удобную модель, выявляющую многие важные аспекты построения и работы программ, написанных на алгоритмических языках. В предисловии А. П. Ершова к переводу книги П. Хендерсона «Функциональное программирование» (М.: Мир, 1983) прямо говорится, что «ламбда-исчисление... сейчас можно считать не чем иным, как теоретической моделью современного функционального программирования».

Выяснилось, что многие важные понятия программирования (в первую очередь те из них, которые связаны с представлением и передачей параметров) допускают точное описание на языке ламбда-исчисления, причем зачастую это — единственное имеющееся точное описание. Более того, изучение и понимание многих сложных ситуаций сильно облегчается, если уже имеется опыт работы в ламбда-исчислении, где выделены в чистом виде основные идеи и трудности. Дополнительные детали, характеризующие изучаемую конкретную ситуацию, можно добавлять постепенно, и получающаяся составная картина оказывается гораздо более прозрачной, чем глобальное описание.

Нашла приложения и важная модификация ламбда-исчисления, называемая чистой комбинаторной логикой, в которой переменные не используются и применяются комбинации всего двух символов K , S , подчиненных всего двум определяющим равенствам: $(KA)B = A$, $((SA)B)C = (AC)(BC)$.

Такая система возникла в начале 20-х годов и восходит к советскому математику М. И. Шейнфинкелю¹⁾, дальнейшее развитие она получила в трудах Х. Карри, А. Чёрча и др.

¹⁾ См. также обзор С. А. Яновской «Основания математики и математическая логика» (сб. «Математика в СССР за тридцать лет», М.-Л.: 1948, с. 11—45).

Этот метод описания вдохновил, по-видимому, и создателей понятия «алгебраический тип данных», и авторов трансформационного подхода к распознаванию (различных видов) равенства путем сведения рассматриваемых объектов к такой нормальной форме, которая уже не содержит левых частей «характеристических» для данной системы равенств. Трансформации (или редукции), от которых системы получили свое название, состоят в замене левых частей определяющих равенств на правые.

Важность процесса редукции была понята сразу же после введения лямбда-исчисления, так как в применении к лямбда-выражениям этот процесс соответствует процессу вычисления функции или выполнения программы. Однако после серии основополагающих работ 30-х годов, приведших к кристаллизации понятия алгоритма (которое оказалось эквивалентным понятию лямбда-определимой функции) и выявлению его фундаментальных свойств, λ -исчисление отошло в этой области на задний план. Интерес к нему усилился в послевоенные годы, особенно после выявления связи между λ -термами, формальными выводами и различными понятиями реализуемости. Гораздо более широкий круг специалистов и неспециалистов почувствовал нужду в изучении λ -исчисления, после того как Д. Скотт описал в его терминах семантику языков программирования.

О наступившем оживлении научной активности в области λ -исчисления и комбинаторной логики свидетельствуют, в частности, проведение нескольких международных конференций (Суонси (1974 г.), Рим (1975 г.), Суонси (1979 г.)), выход ряда монографий и сборников, а также большое число статей, опубликованных или циркулирующих в виде препринтов. Во многих из этих работ изучаются свойства теоретико-множественных моделей исчисления λ -конверсии, предложенных в упомянутой выше работе Д. Скотта. Следует отметить, что близкие результаты, относящиеся к моделям λ -конверсии, были получены Ю. Л. Ершовым. В последние годы разные варианты λ -исчисления получили применение в теории доказательств, обнаружились их связи с алгеброй, топологией, теорией категорий и лингвистикой.

У нас в стране исследования по λ -исчислению и близким вопросам ведутся на кафедре математической логики Московского университета (начатые по инициативе С. А. Яновской и А. А. Маркова), в Новосибирском и Ленинградском научных центрах и в ряде других научных коллективов. Однако на русском языке полностью отсутствует монографическая литература, вводящая в теорию λ -конверсии и комбинаторную логику.

Все это делает весьма своевременным появление монографии Х. Барендрегта. Эта монография, являясь, с одной стороны, почти энциклопедически полным изложением новых результатов, известных только по журнальным публикациям, является, с другой стороны, введением в предмет, в котором находит свое

место и классический материал, часто переосмысленный с новых позиций. Это достигнуто за счет оригинального построения книги. Сначала конспективно излагаются с подробными мотивировками и примерами основные понятия и результаты, что позволяет читателю сформировать общую картину, а во второй половине книги приводятся доказательства и определения «второго слоя». Более того, даже в конспективной части не все разделы взаимозависимы, так что читатель, заинтересованный в знакомстве лишь с некоторыми из них, имеет такую возможность.

Можно надеяться, что издание книги Х. Барендрегта будет способствовать как развитию исследований в области оснований математики и математической логики, связанных с лямбда-исчислением, так и повышению уровня программистов (а может быть, и программирования).

Автор значительно переработал некоторые разделы книги для русского издания, внес изменения, уточнения, написал добавления и предисловие. Редактор и переводчик пользуются случаем выразить ему благодарность.

А. С. Кузичев,
Г. Е. Минц

Предисловие автора к русскому изданию

Читатели этого издания получают значительно улучшенное изложение вопросов, связанных с семантикой лямбда-исчисления. В английском издании понятия лямбда-алгебры и лямбда-модели вводятся корректным, но несколько утомительным способом. Недавние исследования коллег позволили мне полностью переписать гл. 5, подведя категорное основание под оба вида моделей лямбда-исчисления.

Кроме того, в это издание внесены исправления и сделаны добавления в конце книги.

Так как книга написана скорее в систематическом, чем в дидактическом стиле, я намечу возможный порядок изложения (или чтения) содержащегося в ней материала. Совсем небольшой курс состоит из §§ 2.1, 3.1, 3.2, гл. 6, §§ 1.2, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4. Этот материал дает представление о рекурсивной силе языка и содержит как теоретико-модельное (посредством модели D_A), так и синтаксическое (через теорему Чёрча — Россера) доказательства непротиворечивости.

К этому базисному курсу можно добавить сначала §§ 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 8.3, 10.1, 11.1, 11.2, 13.1, 13.2, 18.1, 18.2, где рассматривается теория комбинаторов, разрешимость, бёмовские деревья, специальные понятия редукции и модели P_ω и D_∞ .

Затем можно добавить §§ 10.2, 10.3, 14.1, 14.3, 16.1, 16.2, 19.1, 19.2, которые подводят к анализу значений термов в моделях.

Другие подборки по своему вкусу читатель может найти с помощью последних разделов глав 2, 3, 4 и 5, содержащих обзор оставшейся части книги. Автору больше всего нравятся следующие: §§ 13.4, 15.3, 17.1, 20.4, а также 9.4, 10.4, 17.2 и гл. 21, хотя последние несколько более техничны.

Я благодарю Г. Е. Минца, который перевел английский текст на русский язык, А. С. Кузичева — научного редактора перевода и Г. М. Цукерман — издательского редактора книги.

Х. Барендрегт

Апрель 1983 г.

Музыка — это некая таинственная математика,
элементы которой подобны бесконечности

Клод Дебюсси

Эта книга посвящается
двум женщинам:

Долли Барендрегт-Кессинг

и
Марии Монтессори.

Первая дала мне жизнь
и показала пример
добросовестности.
Вторая учила меня, не поучая,
и привила мне стремление
к истине

Предисловие

Бестиповое лямбда-исчисление было введено около 1930 года, в расчете на то, что оно станет основанием логики и математики. Из-за появления парадоксов эта цель, однако, не была достигнута. Тем не менее, непротиворечивая часть этой системы составила весьма удачную теорию вычислений. Она дала важный толчок развитию теории рекурсии, а в последнее время — и информатике. Более того, несмотря на парадоксы, все еще сохраняется возможность использовать лямбда-исчисление в качестве нового основания логики. Этой проблеме в последнее время снова уделяется много внимания.

В результате лямбда-исчисление выросло в теорию, заслуживающую самостоятельного изучения. Предметом, которому посвящена эта книга, является *чистое* лямбда-исчисление. Книга по-видимому, будет полезна и читателям, интересующимся приложениями, ибо приложения лямбда-исчисления имеют обычно скорее эвристический, чем непосредственный характер. В частности, конструкции лямбда-исчисления воспитывают интуицию, позволяющую ориентироваться в семантике языков программирования. Эта книга написана для логиков, математиков, специалистов по информатике и философов.

Благодарности. Эта книга была написана по предложению Анне Трулстра, одного из редакторов серии *Studies in Logic*. Эйнар Фредрикссон из издательства «Норс-Холланд» проявлял терпение даже после того, как минул срок сдачи рукописи.

В 1974/1975 году с Яном Бергстрой, Яном Виллемом Клопом и Генри Волькеном мы вели очень продуктивный семинар.

Весьма полезными для меня были несколько бесед с Гордоном Плоткиным и Даной Скоттом. Ян Виллем Клоп был всегда готов обсуждать со мной лямбда-исчисление. Не все его идеи, имеющие отношение к рассматриваемым вопросам, попали в эту книгу; им посвящена монография Клопа [1980]. Прочли части рукописи и высказали критические комментарии следующие математики: Марьянджол Дедзани, Роджер Хиндли, Карст Койманс, Жан-Жак Леви, Джузеппе Лонго, Герд Мичке, Альберт Виссер и Крис Уодсворт.

Я особенно благодарен Джозефу Куинси, который прочел всю рукопись и внес много предложений, улучшивших как английский язык книги, так и ее математический стиль, Адриану Резусу, подготовившему указатели и библиографию, а также Яну Виллему Клопу, который чертил схемы.

Основная часть книги написана в Утрехтском университете, где благодаря Дирку ван Далену создана превосходная рабочая обстановка. Дополнительную поддержку оказали Нидерландская организация содействия прогрессу чистой науки (Z. W. O.), Институт математических исследований Цюрихской политехнической школы и, наконец, Математический институт в Обервольфахе (ФРГ), где я завершил рукопись.

Прежде чем издать эту книгу, ее надо было напечатать на машинке. Девяносто процентов этой работы проделала До Брейгель-Вольграфф (которая печатала быстрее, чем я был способен писать); оставшиеся десять процентов напечатали Анс, Элвин, Джок, Марианна, Ренске, Синеке и Софи. Я благодарен им от всего сердца.

Утрехт, Нидерланды
Февраль 1980 года

Хенк Барендрегт

Добавление при корректуре

Основную часть первой корректуры я читал в Конье (Италия) в горном пансионе Марьянджолы Дедзани-Чанкальини. Вместе с Симонеттой Ронки делла Рокка они создали мне прекрасные условия для работы.

Август 1980 г.

Х. Б.

Во время чтения второй корректуры Карст Койманс продолжал успешно охотиться за ошибками и предложил несколько улучшений.

Декабрь 1980 г.

Х. Б.

Указания читателю

Требуемая подготовка

Эта книга по существу не требует предварительной подготовки. Лишь временами нужны элементарные сведения из логики первого порядка, топологии, теории множеств, теории рекурсии и теории категорий. Если потребуется, читатель может найти эти сведения в следующих книгах.

Логика первого порядка: Эндертон [1972], Барвайз [1977a].

Общая топология: Келли [1955].

Теория множеств: Халмош [1960], Ван Дален и др. [1978], Келли [1955].

Теория рекурсии: Роджерс [1967].

Теория категорий: Арбиб и Мейнс [1975], Маклейн [1972].

Обозначения

В этой книге используются следующие обозначения.

$\mathbb{N}$ множество натуральных чисел.
 $P(\mathbb{N})$ или $P\omega$ множество всех подмножеств $\mathbb{N}$.
 $\lambda x. \dots$ (металамбда-абстракция) — теоретико-множественная функция f , такая, что $f(x) = \dots$ для всех x (например, $(\lambda x. x^2 + 1)(3) = 10$).
 $\mu x. \dots$ наименьшее $x \in \mathbb{N}$, такое, что ...
 Seq множество кодов конечных последовательностей (при какой-либо стандартной их кодировке натуральными числами). Иными словами,

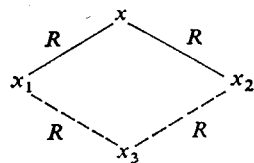
$$\text{Seq} = \{\langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Если $\alpha = \langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \text{Seq}$, то $\text{lh}(\alpha) = k$. Условимся, что $\langle \rangle \in \text{Seq}$ и $\text{lh}(\langle \rangle) = 0$. Если $\alpha = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$, $\beta = \langle m_1, \dots, m_q \rangle$, то $\alpha * \beta = \langle n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q \rangle$ и $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда $p \leq q$ и $n_i = m_i$ для $1 \leq i \leq p$. Мы пишем $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$, но $\beta \leq \alpha$ неверно.

Логические связки — это $\neg$ (не), $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\Rightarrow$ (влечет), $\Leftrightarrow$ (тогда и только тогда, когда; т. и. т. т., когда), $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует). Они используются обычно в неформальном метаязыке. $\exists! x$ означает, что существует единственный x .

Некоторые «теоретико-категорные» картинки часто используются для краткой записи утверждений. Если, например, R —

бинарное отношение на множестве X , то схема



выражает следующее предложение:

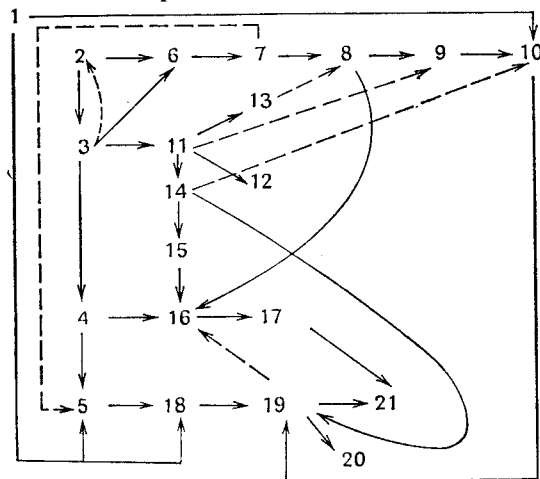
$$\forall x, x_1, x_2 \in X [xRx_1 \wedge xRx_2 \Rightarrow \exists x_3 \in X [x_1Rx_3 \wedge x_2Rx_3]].$$

Остальные обозначения будут самоочевидными.

Изложение материала

Основные вопросы чистого лямбда-исчисления — это *конверсия, редукция, теории и модели*. Они систематически рассматриваются в основных частях этой книги. Кроме этого имеется вводная часть, содержащая введение в каждую из остальных: глава i (последний параграф которой дает общий обзор) является для $2 \leq i \leq 5$ введением в часть i . Глава 1 содержит общее введение и сведения из менее известной теории полных частичных упорядочений.

Приводимая ниже таблица примерно показывает зависимости отдельных глав друг от друга. Пунктирная стрелка означает, что некоторые результаты более поздней главы сформулированы без доказательства в более ранней.



(Я надеюсь, что читателю будет проще разобраться в книге, чем в этой диаграмме.)

Каждая глава заканчивается параграфом, содержащим упражнения. Наиболее трудные из них помечены звездочкой (*).

Часть I

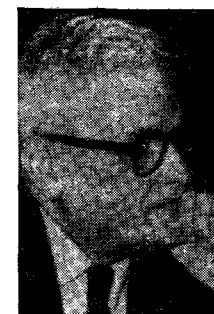
На пути к теории



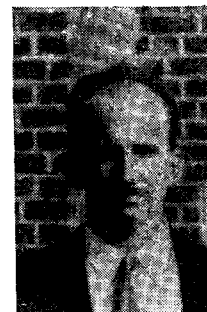
Шейнфинкель (1922)
(предоставлено
миссис Н. Курант)



Карри (1963)



Чёрч (1965)



Россер
(фотография
Т. Хирано, 1935)



Клини
(фотография
Т. Хирано, 1935)



Тьюринг (1951)

Глава 1

Введение

1.1. Аспекты лямбда-исчисления

Лямбда-исчисление — это бестиповая теория, рассматривающая функции как *правила*, а не как графики. Понятие «функции как закона или правила» кажется старомодным и подразумевает переход от аргумента к значению, процесс, закодированный некоторым определением. Приписываемая обычно Дирихле мысль о том, что функции можно рассматривать как графики, т. е. множества, состоящие из пар аргумент — значение, была важным вкладом в математику. Тем не менее лямбда-исчисление снова рассматривает функции как правила, чтобы подчеркнуть их *вычислительные* аспекты.

Функции как правила рассматриваются в полной общности. Например, мы можем считать, что функции заданы определениями на обычном русском языке и применяются к аргументам, также описанным по-русски. Конкретнее, рассмотрим функции, заданные программами для машин и применяемые к другим таким программам. В обоих случаях перед нами бестиповая структура, где объекты изучения являются одновременно и функциями, и аргументами. Это — отправная точка *бестипового* λ -исчисления. В частности, функция может применяться к самой себе. При обычном понимании функции в математике (скажем, в теории множеств Цермело — Френкеля) это невозможно (из-за аксиомы фундирования). (См. также упр. 18.5.30.)

Имеются три аспекта λ -исчисления.

I. Основания математики.

II. Вычисления.

III. Чистое лямбда-исчисление.

Эти аспекты будут описаны ниже. Иная точка зрения на основания лямбда-исчисления выражена в работах Скотта [1975b], [1980] и [1980a].

I. Основания математики и лямбда-исчисление

Создатели лямбда-исчисления и близкой к нему теории комбинаторной логики преследовали две цели.

(1) Разработать общую теорию функций (охватывающую, например, формульные преобразования).

(2) Расширить эту теорию, введя в нее логические понятия, дающие основания логике и (частично) математике.

Первая из этих задач выделялась Шейнфинкелем и Карри, создателями комбинаторной логики, и неявно содержалась в работах Чёрча, который создал λ -исчисление.

К сожалению, все попытки дать основания математике окончились неудачей. Первоначальная система Чёрча [1932/33] оказалась противоречивой, как показали Клини и Россер [1935]. Широко известная противоречивая теория Фреге [1893], [1903] по существу содержит λ -исчисление, как отметил Акцель [1980]. Поэтому обнаружение ее противоречивости было в действительности еще одной неудачей.

Карри [1930] предложил непротиворечивую теорию, отвечающую первой из двух упомянутых выше целей (чистую комбинаторную логику), но логическая часть его теории слишком слаба для того, чтобы служить адекватным основанием логики.

После открытия парадокса Клини — Россера Чёрч разочаровался в своей программе в области оснований. Книга Чёрча [1941] содержит непротиворечивую (в силу теоремы Чёрча — Россера) подтеорию его первоначальной системы, имеющую дело только с функциональной частью. Эта теория и есть λ -исчисление.

С другой стороны, Карри не желал «бежать от парадоксов». Он предложил расширить чистую комбинаторную логику так называемыми иллативными понятиями, чтобы достичь второй из упомянутых целей и дать вместе с тем анализ парадоксов; см. Карри и др. [1958], [1972]. Хотя программа Карри не была выполнена, удалось все же достигнуть некоторого прогресса: см. Фитч [1974], Скотт [1975a], Селдин [1976/77] и Акцель [1980].

Имеются и другие направления в основаниях математики, родственные λ -исчислению. Феферман [1975], [1980] развивает систему, основанную на функции частичной аппликации (применения функции к аргументу), в качестве основания конструктивной математики. Лежащие в ее основе множества частичных функций родственны равномерно рефлексивным структурам Вагнера [1969] и Стронга [1968] (см. также Барендрегт [1975]). Остается открытым вопрос о соотношении между этими структурами и моделями λ -исчисления, в которых аппликация всегда определена. (См. добавление 1 в конце книги.)

Имеются связи между λ -исчислением, теорией доказательств и теорией категорий. В этом контексте, однако, используется типовое λ -исчисление; см. приложение А, в частности § А.3.

II. Вычисления и лямбда-исчисление

Теория рекурсии

Часть λ -исчисления, оперирующая только с функциями, оказалась весьма полезной. Используя эту теорию, Чёрч предложил формализацию понятия эффективной вычислимости с помощью λ -определимости. Клини [1936] показал, что λ -определимость эквивалентна рекурсивности по Гёделю — Эрбрану, а тем временем Чёрч сформулировал свой тезис (утверждающий, что рекурсивность является точной формализацией эффективной вычислимости). Тьюринг [1936], [1937] провел анализ механической вычислимости и показал, что получившееся понятие (вычислимость по Тьюрингу) эквивалентно λ -вычислимости.

После обнаружения парадоксов Клини перевел на новый язык результаты о λ -определимости и получил несколько фундаментальных теорем теории рекурсии (см. Кроссли [1975], с. 4—7). Теорема о перечислении частично рекурсивных функций, s - m - n -теорема и теорема о рекурсии своими корнями уходят в λ -исчисление.

Информатика

Развитие ЭВМ в последние десятилетия вызвало интенсивное развитие языков программирования. λ -исчисление имеет ряд общих черт с языками программирования и их реализацией. Например, связанные переменные λ -исчисления соответствуют формальным параметрам процедуры, а бестиповой аспект соответствует тому, что в машине программа неотличима от своих данных: и то и другое — последовательности битов.

Анализ, проведенный Тьюрингом, показывает, что, несмотря на свой очень простой синтаксис, λ -исчисление способно изобразить все механически вычисляемые функции. Поэтому на λ -исчисление можно смотреть как на парадигматический язык программирования. Отсюда, конечно, не следует, что мы должны писать на нем настоящие программы. Подразумевается лишь, что многие проблемы, возникающие в программировании, особенно в связи с вызовами процедур, предстают в λ -исчислении в чистом виде. Их изучение может принести пользу при проектировании и анализе языков программирования.

Например, ряд языков программирования обладает (быть может, без прямого намерения своих создателей) чертами, навеянными λ -исчислением. В Алголе 60, Алголе 68, Паскале процедуры могут быть аргументами процедур. В Лиспе, кроме того, процедура может быть результатом работы процедуры. Язык GEDANKEN, описанный Рейнольдсом [1970], непосредственно основан на λ -исчислении. О связях между λ -исчислением и языками программирования говорится у Маккарти [1962],

Ландина [1965], [1966], [1966a], Морриса [1968], Рейнольдса [1970], Гордона [1973] и Бёрджа [1978].

Ввиду сходства λ -исчисления с некоторыми языками программирования идеи семантики первого могут применяться к последним.

Ландин [1965] построил семантику Алгола, переводя этот язык в λ -исчисление и описав *операционную семантику* для последнего. Семантика такого рода затрагивается также в работах Вегнера [1972], Оллонгрена [1975], Плоткина [1975], О'Доннелла [1977] и Бёрджа [1978].

Тем временем возникла потребность в *денотационной семантике* языков программирования (которая выражала бы функциональный смысл программы). Аналогичная проблема в чистом виде возникла в λ -исчислении. Ввиду бестипового характера этой теории было неясно, как строить модели для нее. Желательно было иметь множество X , в которое вкладывалось бы его функциональное пространство $X \rightarrow X$; этого, однако, невозможно достичь по мощностным соображениям. Эту трудность преодолел в 1969 г. Скотт, который построил модели λ -исчисления, урезав $X \rightarrow X$ до множества *непрерывных* (в надлежащей топологии) функций на X . Только после этого стало понятно, как строить денотационную семантику языков программирования. Это произошло благодаря тому, что методом Скотта можно также придать смысл двум важным конструкциям языков программирования — рекурсии (наименьшие неподвижные точки) и типам данных (целые числа, списки, массивы и т. д.). См. Скотт и Стрейчи [1971], Милн и Стрейчи [1976], Стой [1977] и Гордон [1979].

Какого рода вычисления хорошо описываются λ -исчислением? Берри показал, что они, по существу, должны быть последовательными — см. теорему 14.4.8. Невозможность работы с параллельными вычислениями кажется на первый взгляд серьезным ограничением. Это, однако, не совсем так, ибо большинство языков программирования также не допускает параллельных процессов. С другой стороны, в подходе Скотта — Стрейчи к семантике имеется естественная ниша для функций вроде «параллельного или»

$f(x, y) = \text{если } x \text{ или } y \text{ определено и истинно,}$
то истина, иначе не определено.

Поэтому и в семантике λ -исчисления имеется ниша для этого вида параллельности. См. также Плоткин [1977].

III. Чистое лямбда-исчисление

В этой книге λ -исчисление изучается само по себе, а не в связи с приложениями, описанными выше.

Формальное (бестиповое) λ -исчисление — теория, обозначаемая через λ , — изучает функции и их аппликативное поведение в отличие, например, от теории категорий, где функции изучаются в связи с их композицией. Поэтому *аппликация* (применение функции к аргументу) — исходная операция системы λ . Функция f в применении к аргументу a обозначается через fa . Операция, дополнительная к аппликации, называется *абстракцией*. Пусть t ($\equiv t(x)$) — выражение, содержащее, быть может, переменную x . Тогда $\lambda x.t(x)$ — это такая функция f , которая сопоставляет аргументу a значение $t(a)$. Иными словами, имеет место

$$(\beta) \quad (\lambda x.t(x))a = t(a).$$

Рассмотрение аппликации и абстракции только для одноместных функций основано на наблюдении Шейнфинкеля [1924]. Он заметил, что функции нескольких переменных можно свести к одноместным функциям. Например, если $f(x, y)$ — двухместная функция, то полагаем $f_x = \lambda y.f(x, y)$ и $a = \lambda x.f_x$. Тогда имеем $(ax)y = f_x y = f(x, y)$.

Это — важный принцип λ -исчисления. Он соответствует равенству

$$X^Y \times Z = (X^Y)^Z$$

в категории множеств. Это равенство имеет место во всех декартово замкнутых категориях, и почти все модели λ -исчисления являются в действительности объектами такой категории.

Термы теории λ (λ -термы) составляют множество Λ и строятся из переменных с помощью аппликации и абстракции. Предложения теории λ — это равенства между λ -термами, а ее единственная математическая аксиома — это схема (β) . [Однако следует произвести некоторые тривиальные отождествления вроде $\lambda x.x = \lambda y.y$.]

Как мы уже сказали, λ -исчисление изучает функции как правила. Из-за этого интенционального характера теории центральное место в ней занимают λ -термы — лингвистические средства описания изучаемых функций. Теория λ отождествляет некоторые из этих термов (так называемые *конвертируемые* термы). Существенно, однако, что основной интерес представляет не теория λ сама по себе. Она является лишь средством порождения основных объектов — *термов с точностью до конвертируемости*. Только после их введения начинается настоящее λ -исчисление — изучение этих объектов с применением всевозможных математических средств.

Следующие вопросы показывают, как изучаются эти объекты.

(1) Какого рода функции (на термах) определены (с помощью термов)?

(2) Пусть M, N — неконвертируемые термы. Разумно ли (заявив несколько менее интенциональную позицию) отождествить M и N ?

(3) Каково соответствие между синтаксическим видом термов и их аппликативным поведением?

Приведем некоторые типичные ответы на такие вопросы. Рассмотрим сначала (1).

(i) Если ограничиться натуральными числами, то определены в точности рекурсивные функции (теорема 6.3.13).

(ii) Область значений определимой функции на термах либо бесконечна, либо одноэлементна (теорема 17.1.16).

(iii) Имеется естественная топология на термах — так называемая топология дерева. Все определимые функции непрерывны в этой топологии.

Результат (iii) нетривиален и имеет несколько интересных следствий. Сама топология получается путем сопоставления термам так называемых деревьев Бёма с последующим переносом на термы топологии Скотта, заданной на этих деревьях.

Ко второму вопросу можно подойти либо через доказательство непротиворечивости естественных расширений теории λ , либо через построение моделей $\mathfrak{M}$ для λ и рассмотрение множества равенств, истинных в $\mathfrak{M}$. Теория $\lambda\eta$ (экстенциональное λ -исчисление) получена первым методом. Теория $\mathcal{B}$ (отождествляющая термы с соответствующими деревьями Бёма) и $\mathcal{H}^*$ (единственное максимальное непротиворечивое расширение теории $\mathcal{H}$) получены вторым методом (а именно, $\mathcal{B} = \text{Th}(P\omega)$; $\mathcal{H}^* = \text{Th}(D_\infty)$).

По поводу (3) имеется, например, следующий результат, в котором F обозначает λ -терм.

(iv) Терм F разрешим т.и.т.т., когда он имеет головную нормальную форму (теорема 8.3.14). Здесь синтаксическое понятие головной нормальной формы, т.е. терма F вида $\lambda x_1 \dots x_n. x_i M_1 \dots M_m$, соотносится с разрешимостью, которая определяется в терминах аппликативного поведения: $\forall Q \exists n \exists P_1 \dots P_n (FP_1 \dots P_n = Q)$.

(v) Терм F $\beta\eta$ -обратим т.и.т.т., когда он имеет конечную наследственную перестановку (теорема 21.2.21). Здесь $\beta\eta$ -обратимость означает, что существует λ -терм G , такой что в экстенциональном λ -исчислении выводимо равенство

$$F \circ G = G \circ F = \lambda x.x,$$

где $\circ$ обозначает композицию функций. Конечные наследственные перестановки составляют некоторый синтаксически определенный класс.

Продемонстрировав вопросы и некоторые результаты, мы наметим способ изучения. Имеется определенная связь между чистым λ -исчислением и теорией чисел. Эта связь поверхностна,

так как методы и результаты этих дисциплин различны, однако, несмотря на это, полезно наметить ее, чтобы получить некоторое представление о том, как организовано чистое λ -исчисление.

Если $\mathcal{T}$ — непротиворечивое расширение теории λ , то мы будем обозначать через $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ модель из термов, состоящую из открытых или замкнутых (т. е. не содержащих свободных переменных) λ -термов с точностью до (выводимого равенства в теории) $\mathcal{T}$. Главным объектом изучения является $\mathcal{M}_{\lambda}$ (в теории чисел этой модели соответствует, скажем, кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел). Рассматриваются различные расширения $\mathcal{T} \supseteq \lambda$ и соответствующие модели $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ (в теории чисел — факторкольца

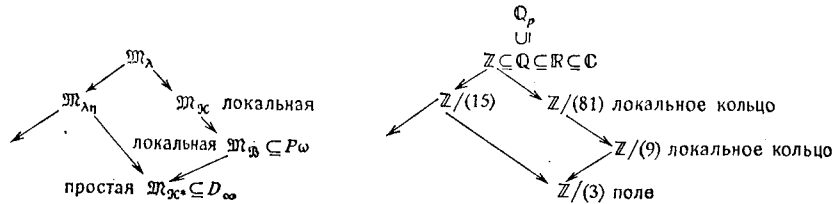


Рис. 1.1.

$\mathbb{Z}/(m)$). Если $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, то имеется канонический гомоморфизм теории $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ на $\mathcal{M}_{\mathcal{T}'}$ (в теории чисел — отображение $\mathbb{Z}/(m) \rightarrow \mathbb{Z}/(m')$, если m делится на m' , т. е. $(m) \subseteq (m')$ в терминах идеалов). Некоторые $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ (например, $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$) просты, т. е. имеют единственный гомоморфный образ (в теории чисел просты $\mathbb{Z}/(p)$ для простых p ; $\mathbb{Z}/(p^k)$ принадлежит иному сорту, это так называемое *локальное кольцо*). В теории чисел поле $\mathbb{Q}$ (рациональных чисел) топологически расширяется как до $\mathbb{R}$ (поля вещественных чисел), так и до $\mathbb{Q}_p$ (p -адического поля). В λ -исчислении аналогично модели $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{T}^*}$ вкладываются в P_{ω} и D_{∞} соответственно, а последние модели строятся с использованием топологических понятий. На рисунке 1.1 изображены некоторые сходные (и различные) черты.

Интересная черта теории чисел состоит в том, что результаты о $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ иногда доказываются с использованием результатов о p -адических числах $\mathbb{Q}_p$ или $\mathbb{C}$ (комплексных числах). Аналогичным образом результаты о λ -термах иногда доказываются с помощью «непрерывных» моделей P_{ω} и D_{∞} ; примером является уже упоминавшаяся теорема 21.2.21. В этом контексте важную роль играют деревья Бёма. Эти деревья, которые могут быть бесконечными, сравнимы с цепными дробями из вещественных чисел. Каждое такое дерево — предел конечных деревьев. На λ -термах можно определить естественную топологию, используя деревья Бёма. Операции λ -исчисления непрерывны в этой

топологии (теорема 14.3.22). Эта теорема о непрерывности имеет несколько приложений. Таким образом, мы согласны с замечанием Скотта о том, что введение моделей и соображений непрерывности превращает нашу теорию действительно в λ -исчисление.

До сих пор мы эскизно очертить содержание частей II, IV и V этой книги. Часть III, где говорится о редукции, имеет иную природу. Эта группа результатов относится к самим λ -термам (т. е. они рассматриваются не с точностью до конвертируемости). Основная цель здесь — дать теоретико-доказательственный анализ конвертируемости и некоторых ее обобщений с помощью теоремы Чёрча — Россера — метода, аналогичного устранению сечения в теории доказательств.

Наконец, мы перечисляем некоторые вопросы, принадлежащие чистому λ -исчислению (или тесно с ним связанные), но не рассматриваемые в этой книге.

(1) Уже упомянутое типовое λ -исчисление. Эта теория довольно сильно отличается от бестиповой теории, см. приложение А. Другие теории типов описаны у Коппо и др. [1980], где имеется библиография.

(2) Связи с теорией рекурсии для высших типов; см. Клини [1961/62].

(3) Ординальные обозначения в λ -исчислении; см. Клини и Чёрч [1937].

(4) Вложение λ -исчисления в логику первого порядка; см. Барендрегт [1973] и Бел [1977].

(5) Оптимальные редукции; см. Леви [1980].

1.2. Полные частично упорядоченные множества и топология Скотта

Этот раздел служит введением в изучение категории полных частично упорядоченных множеств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов. Этот материал понадобится в § 10.2, 14.3 и в части V для построения моделей λ -исчисления. Читатель может пропустить этот раздел при первом чтении и вернуться к нему при необходимости.

Первоначально Скотт определил свою топологию для полных решеток, см. Скотт [1972], Гирц и др. [1980]. Это определение непосредственно обобщается на полные частично упорядоченные множества. Мы будем рассматривать здесь эту более общую ситуацию, так как работа с полными частично упорядоченными множествами имеет ряд преимуществ: имеется естественная интерпретация λ -термов в виде специальных деревьев, которые образуют полное частично упорядоченное множество, но не полную решетку; полных частично упорядоченных множеств больше.

Другая система, в которой можно проводить построение λ -моделей, — это категория f_0 -пространств, введенная Ю. Л. Ершовым [1975], и различные ее подкатегории. У этих категорий то преимущество, что они декартово замкнуты и каждый объект является топологическим пространством, причем топология на произведении является произведением топологий сомножителей, а топология в пространстве функций — топологией поточечной сходимости. Этими свойствами не обладает категория полных частично упорядоченных множеств. Мы тем не менее будем изучать эти последние структуры, так как их несколько проще описывать, чем f_0 -пространства.

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $D = (D, \sqsubseteq)$ — частично упорядоченное множество (сокращенно, ч. у. м.) с рефлексивным отношением $\sqsubseteq$.

(i) Подмножество $X \subseteq D$ называется *направленным*, если $X \neq \emptyset$ и

$$(\forall x, y \in X)(\exists z \in X)[x \sqsubseteq z \text{ и } y \sqsubseteq z].$$

(ii) D называется *полным* (п. ч. у. м.), если

(1) имеется наименьший элемент $\perp \in D$, т. е. имеет место $\forall x \in D (\perp \sqsubseteq x)$; такой элемент $\perp$ называется *дном*;

(2) для любого направленного подмножества $X \subseteq D$ существует точная верхняя грань (супремум) $\sqcup X \in D$.

Полная решетка — это по определению такое ч. у. м. D , в котором *любое* подмножество $X \subseteq D$ имеет супремум. Каждая полная решетка есть п. ч. у. м., так как $\perp = \sqcup \emptyset$.

1.2.2. ПРИМЕРЫ. (i) Пусть X — множество, а $P(X)$ — его множество-степеней, т. е. множество всех подмножеств множества X . Тогда $(P(X), \subseteq)$ — п. ч. у. м. (и даже полная решетка).

(ii) Пусть $\mathbb{T} = (\{\perp, t, f\}, \sqsubseteq)$, причем $\perp \sqsubseteq t$, $\perp \sqsubseteq f$ (и нет никаких других соотношений для $\sqsubseteq$). Тогда $\mathbb{T}$ — п. ч. у. м.

1.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(D, \sqsubseteq)$ — п. ч. у. м. *Топология Скотта* на D определяется следующим образом.

Множество $O \subseteq D$ считается *открытым*, если

(1) $x \in O \wedge x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in O$;

(2) $\sqcup X \in O$, где $X \subseteq D$ и X направленно $\Rightarrow X \cap O \neq \emptyset$.

Очевидно, что $\emptyset$ и D открыты и что открытость сохраняется при произвольных объединениях. Если множества O_1 и O_2 открыты, то $O_1 \cap O_2$ оказывается открытым из-за того, что X в посылке условия (2) направленно. Поэтому определение 1.2.3 действительно вводит топологию.

Если не оговорено противное, то п. ч. у. м. всегда будет наделено топологией Скотта. В дальнейшем в этом разделе символы $D = (D, \sqsubseteq)$, $D' = (D', \sqsubseteq')$, ... будут обозначать п. ч. у. м.

1.2.4. ЛЕММА. Пусть $U_x = \{z \in D \mid z \not\sqsubseteq x\}$. Тогда U_x открыто.

Доказывается без труда. $\square$

1.2.5. СЛЕДСТВИЕ. D является T_0 -пространством, но в общем случае не T_1 -пространством.

Доказательство. Пусть $x, y \in D$ и $x \neq y$. Пусть для определенности $x \not\sqsubseteq y$. Тогда $x \in U_y$, $y \notin U_y$ и U_y открыто. Следовательно, D принадлежит классу T_0 .

Если $x \sqsubseteq y$, то любая окрестность элемента x содержит y . Поэтому D не обязательно принадлежит классу T_1 . $\square$

Приводимая ниже характеристика непрерывных функций — главная причина введения топологии Скотта.

1.2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Рассмотрим отображение $f: D \rightarrow D'$. Оно непрерывно тогда и только тогда, когда $f(\sqcup X) = \sqcup f(X)$ для всех направленных подмножеств $X \subseteq D$, где $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ и второй супремум берется в D' .

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть функция f непрерывна. Допустим, что $x \sqsubseteq y$, и покажем, что $f(x) \sqsubseteq' f(y)$. Если это не так, то $f(x) \in U_{f(y)}$, так что $x \in f^{-1}(U_{f(y)})$, а последнее множество открыто. Поэтому $y \in f^{-1}(U_{f(y)})$, т. е. $f(y) \in U_{f(y)}$, и получается противоречие. Это рассуждение показывает, что f монотонна. Значит, имеет место $\forall x \in X (f(\sqcup X) \sqsubseteq' f(x))$, откуда $f(\sqcup X) \sqsubseteq' \sqcup f(X)$. Соотношение $f(\sqcup X) \not\sqsubseteq' \sqcup f(X)$ влечет $f(\sqcup X) \in U_{\sqcup f(X)}$, откуда можно получить противоречие тем же способом, что и выше, используя соотношение (2) из определения открытого множества.

$(\Leftarrow)$ В этом случае снова получается, что функция f монотонна. Действительно, $x \sqsubseteq y$ влечет $y = x \sqcup y$, откуда $f(y) = f(x) \sqcup f(y)$, так что $f(x) \sqsubseteq' f(y)$. Поэтому если $O \subseteq D'$ открыто, то открыто и $f^{-1}(O) \subseteq D$. Например, если для направленного подмножества $X \subseteq D$ имеет место $\sqcup X \in f^{-1}(O)$, то $f(\sqcup X) = \sqcup f(X) \in O$; но $f(X)$ направленно, следовательно, $f(X) \cap O \neq \emptyset$, откуда получается $X \cap f^{-1}(O) \neq \emptyset$. $\square$

1.2.7. СЛЕДСТВИЕ. Непрерывные отображения п. ч. у. м. всегда монотонны. $\square$

Прямое произведение двух п. ч. у. м. можно снова считать п. ч. у. м.

1.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для данных D, D' определим частичное упорядочение их декартова произведения $D \times D'$ соотношением

$$\langle x, x' \rangle \sqsubseteq \langle y, y' \rangle \text{ т. и т. т., когда } x \sqsubseteq y \text{ и } x' \sqsubseteq' y'.$$

Тогда $D \times D'$ — п. ч. у. м. и для направленного подмножества $X \subseteq D \times D'$ имеет место

$$\sqcup X = \langle \sqcup X_0, \sqcup X_1 \rangle,$$

где

$$X_0 = \{x \in D \mid \exists x' \in D' (\langle x, x' \rangle \in X)\}$$

и

$$X_1 = \{x' \in D' \mid \exists x \in D (\langle x, x' \rangle \in X)\}.$$

Доказательство. Это предложение устанавливается легко. $\langle \perp, \perp' \rangle$ — дно произведения $D \times D'$. Далее замечаем, что если множество $X \subseteq D \times D'$ направленно, то направлены также X_0, X_1 . $\square$

Следующее утверждение несколько неожиданно.

Факт. Топология на $D \times D'$ не является в общем случае произведением топологий, имевшихся на D и D' ; см. упр. 1.3.12. См. также предложение 1.2.27.

1.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны D, D' . Положим по определению

$$[D \rightarrow D'] = \{f: D \rightarrow D' \mid f \text{ непрерывна}\}.$$

Введем на множестве $[D \rightarrow D']$ поточечное частичное упорядочение

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D (f(x) \sqsubseteq' g(x)).$$

Очевидно, что $[D \rightarrow D']$ превращается в частично упорядоченное множество.

1.2.10. ЛЕММА. Пусть $\{f_i\}_i \subseteq [D \rightarrow D']$ — направленное семейство отображений. Положим

$$\hat{f}(x) = \bigsqcup_i f_i(x).$$

Тогда $\hat{f}$ корректно определено и непрерывно.

Доказательство. Из направленности семейства $\{f_i\}_i$ следует, что при каждом x множество $\{f_i(x)\}_i$ направленно и, значит, $\hat{f}$ существует. Далее, для направленного $X \subseteq D$ имеем

$$\hat{f}(\bigsqcup X) = \bigsqcup_i \bigsqcup_{x \in X} f_i(x) = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_i f_i(x) = \bigsqcup \hat{f}(X). \quad \square$$

1.2.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $[D \rightarrow D']$ — п. ч. у. м., где супремум направленного множества $F \subseteq [D \rightarrow D']$ определяется соотношением

$$(\bigsqcup F)(x) = \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}.$$

Доказательство. $\lambda x. \perp'$ — наименьший элемент множества $[D \rightarrow D']$. По лемме 1.2.10 отображение $\lambda x. \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$ непрерывно. Очевидно, что оно является супремумом множества F . $\square$

1.2.12. ЛЕММА. Пусть $f: D \times D' \rightarrow D''$. Тогда f непрерывно (по совокупности аргументов) в том и только том случае, когда

оно непрерывно по каждому из аргументов в отдельности, т. е. в том и только том случае, когда $\lambda x. f(x, x'_0)$ и $\lambda x'. f(x_0, x')$ непрерывны для всех x_0, x'_0 .

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $g = \lambda x. f(x, x'_0)$. Тогда для направленного подмножества $X \subseteq D$

$$\begin{aligned} g(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X, x'_0) = f(\bigsqcup \{(x, x'_0) \mid x \in X\}) = \\ &= \bigsqcup \{f(x, x'_0) \mid x \in X\} \text{ (так как функция } f \\ &\text{ непрерывна и мно-} \\ &\text{жество } \{(x, x'_0) \mid x \in X\} \\ &\text{направленное)} = \\ &= \bigsqcup g(X). \end{aligned}$$

Следовательно, g непрерывна. Отображение $\lambda x'. f(x_0, x')$ рассматривается аналогично.

($\Leftarrow$) Пусть множество $X \subseteq D \times D'$ направленно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f(\bigsqcup X) &= f(\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1) = \\ &= \bigsqcup_{x \in X_0} f(x, \bigsqcup X_1) \text{ (по предположению)} = \\ &= \bigsqcup_{x \in X_0} \bigsqcup_{x' \in X_1} f(x, x') = \\ &= \bigsqcup_{(x, x') \in X} f(x, x') \text{ (так как } X \text{ направленно)} = \bigsqcup f(X), \end{aligned}$$

так что f непрерывна. $\square$

1.2.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (о непрерывности аппликации). Определим аппликацию (операцию применения функции к аргументу)

$$\text{Ap}: [D \rightarrow D'] \times D \rightarrow D',$$

полагая $\text{Ap}(f, x) = f(x)$. Тогда отображение Ap непрерывно (в топологии Скотта на произведении $[D \rightarrow D'] \times D$).

Доказательство. Отображение $\lambda x. f(x) = f$ непрерывно. Пусть $h = \lambda f. f(x)$. Тогда для направленного множества $F \subseteq [D \rightarrow D']$ имеем

$$\begin{aligned} h(\bigsqcup F) &= (\bigsqcup F)(x) = \\ &= \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\} \text{ (в силу предложения 1.2.11)} = \\ &= \bigsqcup \{h(f) \mid f \in F\} = \bigsqcup h(F). \end{aligned}$$

Следовательно, h непрерывно. Теперь применяется лемма 1.2.12. $\square$

1.2.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (о непрерывности абстракции). Пусть $\hat{f} \in [D \times D' \rightarrow D'']$. Положим $\hat{f}(x) = \lambda y \in D' f(x, y)$. Тогда

- (i) $\hat{f}$ непрерывна, т. е. $\hat{f} \in [D \rightarrow [D' \rightarrow D'']]$;
- (ii) $\lambda f. \hat{f}: [D \times D' \rightarrow D''] \rightarrow [D \rightarrow [D' \rightarrow D'']]$ непрерывна.

Доказательство. (i) Пусть $X \subseteq D$ направленно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bigsqcup X) &= \lambda y. f(\bigsqcup X, y) = \lambda y. \bigsqcup_{x \in X} f(x, y) = \\ &= \bigsqcup_{x \in X} (\lambda y. f(x, y)) \text{ (в силу предложения 1.2.11)} = \\ &= \bigsqcup \hat{f}(X). \end{aligned}$$

(ii) Пусть $L = \lambda f. \hat{f}$, и пусть множество $F \subseteq [D \times D' \rightarrow D'']$ направленно. Тогда

$$\begin{aligned} L(\bigsqcup F) &= \lambda x. \lambda y. (\bigsqcup F)(x, y) = \lambda x. \lambda y. \bigsqcup_{f \in F} f(x, y) = \\ &= \bigsqcup_{f \in F} \lambda x. \lambda y. f(x, y) = \bigsqcup L(F). \quad \square \end{aligned}$$

1.2.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ¹⁾. Через **СРО** обозначим категорию, объектами которой являются п. ч. у. м., а морфизмами — непрерывные отображения.

1.2.16. ТЕОРЕМА. **СРО** — декартово замкнутая категория.

Доказательство. Легко показать, что $D \times D'$ — произведение в категории **СРО**. Далее, одноэлементное п. ч. у. м. — терминальный объект. В силу предложений 1.2.13 и 1.2.14 для каждого $f: D \times D' \rightarrow D''$ существует единственное $\hat{f}: D \rightarrow [D' \rightarrow D'']$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} D \times D' & \xrightarrow{f} & D'' \\ \downarrow \hat{f} \times \text{id}_{D'} & \searrow \text{Ap} & \\ [D' \rightarrow D''] \times D' & & \end{array}$$

коммутативна. Это и есть нужное соотношение присоединенности.

Следующая теорема (для полных решеток) принадлежит Тарскому [1955], см. также Кнастер [1928].

1.2.17. ТЕОРЕМА (теорема о неподвижной точке для п. ч. у. м.).

(i) Любое отображение $f \in [D \rightarrow D]$ имеет неподвижную точку.

(ii) Кроме того, существует отображение $\text{Fix} \in [[D \rightarrow D] \rightarrow D]$, такое, что для любого $f \in [D \rightarrow D]$ объект $\text{Fix}(f)$ является наименьшей неподвижной точкой.

¹⁾ **СРО** — первые буквы слов complete partial order. — Прим. перев.

Доказательство. (i) Из $\perp \in f(\perp)$ по монотонности следует, что $f(\perp) \in f(f(\perp)) = f^2(\perp)$, откуда $f^2(\perp) \in f^3(\perp)$ и т. д. Поэтому существует

$$x_f = \bigsqcup_n f^n(\perp).$$

Теперь в силу непрерывности имеем

$$f(x_f) = \bigsqcup_n f^{n+1}(\perp) = x_f,$$

т. е. x_f — неподвижная точка отображения f .

(ii) Заметим прежде всего, что элемент x_f , построенный в (i), является наименьшей неподвижной точкой отображения f . Действительно, из $f(y) = y$ следует по монотонности, что

$$f^n(\perp) \subseteq f^n(y) = y,$$

откуда

$$x_f = \bigsqcup_n f^n(\perp) \subseteq y.$$

Теперь положим по определению

$$\text{Fix} = \lambda f. x_f = \lambda f. \bigsqcup_n f^n(\perp).$$

Тогда в силу предложения 1.2.13 и леммы 1.2.10 операция Fix непрерывна. $\square$

Теперь покажем, что в **СРО** существуют проективные пределы.

1.2.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $D_0, D_1, \dots$ — счетная последовательность п. ч. у. м., и пусть $f_i \in [D_{i+1} \rightarrow D_i]$.

(i) Последовательность (D_i, f_i) называется проективной (или обратной) системой п. ч. у. м.

(ii) Проективный (или обратный) предел системы (D_i, f_i) (обозначаемый через $\varprojlim (D_i, f_i)$) — это ч. у. м. $(D_\infty, \subseteq_\infty)$, где

$$D_\infty = \{ \langle x_0, x_1, \dots \rangle \mid \forall i (x_i \in D_i \wedge f_i(x_{i+1}) = x_i) \}$$

и

$$\langle x \rangle \subseteq_\infty \langle y \rangle \text{ т. н. т. т., когда } \forall i (x_i \subseteq y_i) \text{ (в } D_i).$$

Замечания. (i) Бесконечная последовательность $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$ отождествляется, как обычно, с отображением $x: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_i D_i$.

таким, что $x(i) = x_i \in D_i$ для всех i .

(ii) Вместо $\varprojlim (D_i, f_i)$ мы часто будем писать $\varprojlim D_i$.

1.2.19. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть (D_i, f_i) — проективная система. Тогда $\varprojlim (D_i, f_i)$ — п. ч. у. м., в котором

$$\bigsqcup X = \lambda i. \bigsqcup \{x(i) \mid x \in X\}$$

для направленных $X \subseteq \varprojlim D_i$.

Доказательство. Если X направленно, то $\{x(i) | x \in X\}$ направленно для каждого i . Положим

$$y_i = \sqcup \{x(i) | x \in X\}.$$

Тогда в силу непрерывности отображений f_i имеем

$$f_i(y_{i+1}) = \sqcup f_i \{x(i+1) | x \in X\} = \sqcup \{x(i) | x \in X\} = y_i.$$

Поэтому $\langle y_0, y_1, \dots \rangle \in \lim_{\leftarrow} D_i$. Очевидно, что это супремум множества X . $\square$

1.2.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — п. ч. у. м., и пусть $X \subseteq D$.

(i) Отображение $f \in [D \rightarrow D]$ называется *ретракцией* множества D на X , если $X = \text{Range}(f)$ (т. е. X есть множество значений f) и $f = f \circ f$.

(ii) Множество X называется *ретрактом* множества D , если имеется ретракция D на X .

1.2.21. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — п. ч. у. м. с ретрактом X . Тогда X — п. ч. у. м., направленные подмножества которого имеют в X те же супреумы, что и в D , и топология которого является топологией подпространства.

Доказательство. Пусть $f: D \rightarrow X$ — ретракция. Пусть $Y \subseteq X$ направленно. Тогда Y направленно и как подмножество множества D и в D существует $\sqcup Y = y$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\sqcup Y) = \sqcup f(Y) \text{ (так как } f \text{ непрерывна)} = \\ &= \sqcup Y \text{ (так как } Y \subseteq X) = y. \end{aligned}$$

Поэтому $y \in X$ и очевидным образом является супремумом множества Y в X . $\square$

1.2.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $x \in D$ называется *компактным*, если для любого направленного подмножества $X \subseteq D$

$$x \in \sqcup X \Rightarrow x \in x_0 \text{ для некоторого } x_0 \in X.$$

(ii) П. ч. у. м. D называется *алгебраическим*, если для любого $x \in D$ множество $\{y \in x | y \text{ компактен}\}$ направленно и выполнено равенство

$$x = \sqcup \{y \in x | y \text{ компактен}\}.$$

1.2.23. ПРИМЕР. Пусть $D = (P\omega, \subseteq)$. Тогда $x \in D$ компактен в том и только том случае, когда x конечен. Поэтому D — алгебраическое п. ч. у. м.

1.2.24. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — алгебраическое п. ч. у. м. и $f: D \rightarrow D$. Тогда f непрерывна в том и только том случае, когда $f(x) = \sqcup \{f(e) | e \in x, e \text{ компактен}\}$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть f непрерывна. Тогда $f(x) = f(\sqcup \{e \in x | e \text{ компактен}\}) = \sqcup \{f(e) | e \in x, e \text{ компактен}\}$

в силу предложения 1.2.6.

$(\Leftarrow)$ Заметим сначала, что f монотонна. Если $x \subseteq y$, то

$$\{e \in x | e \text{ компактен}\} \subseteq \{e \in y | e \text{ компактен}\},$$

откуда

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqcup \{f(e) | e \in x, e \text{ компактен}\} = \\ &= \sqcup \{f(e) | e \in y, e \text{ компактен}\} = f(y). \end{aligned}$$

Пусть теперь $X \subseteq D$ направленно. Тогда

$$\begin{aligned} f(\sqcup X) &= \sqcup \{f(e) | e \in \sqcup X, e \text{ компактен}\} = \\ &= \sqcup \{f(x) | x \in X\} \text{ (в силу компактности)} = \\ &= f(\sqcup X) \text{ (в силу монотонности)}. \end{aligned}$$

Поэтому $f(\sqcup X) = \sqcup f(X)$. Остается только применить предложение 1.2.6. $\square$

1.2.25. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — алгебраическое п. ч. у. м. Положим $O_e = \{x \in D | e \in x\}$. Тогда семейство $\{O_e | e \text{ компактен}\}$ является базисом топологии на D .

Доказательство. В силу компактности элемента e множество O_e удовлетворяет второму условию открытости по Скотту. Первое условие выполняется тривиальным образом.

Пусть теперь O открыто и $x \in O$. Так как $x = \sqcup \{e \in x | e \text{ компактен}\}$ является супремумом направленного множества, то

$$\exists e \in x (e \in O, e \text{ компактен}),$$

откуда получается $x \in O_e \subseteq O$. Поэтому каждое открытое множество O есть объединение базисных открытых множеств. $\square$

1.2.26. ЛЕММА. Пусть D, D' — п. ч. у. м.

(i) $(x, y) \in D \times D'$ компактен $\Leftrightarrow x$ и y компактны.

(ii) D и D' алгебраические $\Rightarrow D \times D'$ алгебраическое.

Нетрудное доказательство этого утверждения составляет упражнение 1.3.9. $\square$

Легко показать, что из открытости множества $O \subseteq D \times D'$ в произведении топологий Скотта на D и D' следует его открытость по Скотту в произведении $D \times D'$. Обратное утверждение не имеет места в общем случае, см. упр. 1.3.12. Однако для произведений алгебраических п. ч. у. м. обе топологии на $D \times D'$ совпадают.

1.2.27. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D, D' — алгебраические п. ч. у. м. Тогда топология Скотта на $D \times D'$ совпадает с произведением топологий Скотта на D и D' .

Доказательство. П. ч. у. м. $D \times D'$ является алгебраическим по лемме 1.2.26. Следовательно, в силу предложения 1.2.25 семейство

$$\{O(e, f) \mid e, f \text{ компактны}\}$$

является базисом топологии Скотта на $D \times D'$. Но $O(e, f) = O_e \times O_f$. Следовательно, каждое открытое по Скотту подмножество п. ч. у. м. $D \times D'$ есть объединение открытых в топологии произведения множеств и потому само открыто в топологии произведения. $\square$

Таким образом, поскольку мы работаем преимущественно с алгебраическими п. ч. у. м., у нас не будет возникать недоразумений с выбором топологии на $D \times D'$. Ср. упр. 1.3.16.

Некоторые естественным образом возникающие п. ч. у. м. имеют дополнительные приятные свойства.

1.2.28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — п. ч. у. м.

(i) Подмножество $X \subseteq D$ называется *совместным*, если $\forall x, y \in X \exists z \in D [x \sqsubseteq z \text{ и } y \sqsubseteq z]$.

(ii) D *когерентно*, если любое совместное подмножество $X \subseteq D$ имеет супремум.

1.2.29. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $x, y \in D$. Тогда говорят, что x находится на пути вниз от y (и пишут $x \ll y$), если y принадлежит топологической внутренности множества $\{z \mid x \sqsubseteq z\}$.

(ii) *Непрерывная решетка* — это по определению полная решетка, в которой $x = \bigcup \{z \mid z \ll x\}$ для любого x .

(iii) *Алгебраическая решетка* — это полная решетка, которая является алгебраической как п. ч. у. м.

В упражнении 1.3.7 показано, что алгебраическая решетка всегда непрерывна. Обширная информация о непрерывных решетках имеется в монографии Гирца и др. [1980].

Ниже приводятся важные примеры конкретных п. ч. у. м.

1.2.30. ПРИМЕРЫ. (i) Пусть $P(X)$ — множество-степень множества X , частично упорядоченное по включению.

(ii) Частичное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ — это отображение φ , такое что $\text{Dom}(\varphi) \subseteq X$. Запись $\varphi(x) \downarrow$ для $x \in X$ означает, что $\varphi(x)$ определено, т. е. $x \in \text{Dom}(\varphi)$. Аналогично, $\varphi(x) \uparrow$ означает, что $\varphi(x)$ не определено, т. е. $x \notin \text{Dom}(\varphi)$. Положим

$$X \rightarrow Y = \{\varphi \mid \varphi \text{ — частичное отображение из } X \text{ в } Y\}.$$

Частичные функции как множества упорядоченных пар частично упорядочены по включению. Очевидно, что $(X \rightarrow Y, \subseteq)$ — п. ч. у. м.

1.2.31. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $P(X)$ — алгебраическая решетка, причем ее элемент A компактен тогда и только тогда, когда множество A конечно.

(ii) $X \rightarrow Y$ — когерентное алгебраическое п. ч. у. м., причем его элемент φ компактен тогда и только тогда, когда φ конечно (как множество упорядоченных пар).

Нетрудное доказательство составляет упр. 1.3.10. $\square$

1.3. Упражнения

1.3.1. Показать, что подмножество $\{z \mid x \sqsubseteq z\}$ в п. ч. у. м. не обязательно открыто.

1.3.2. Пусть $X \subseteq D \times D'$. Показать, что в общем случае

$$X_0, X_1 \text{ направлены} \not\Rightarrow X \text{ направленно},$$

где X_0, X_1 определены в предложении 1.2.8.

1.3.3. Пусть $f: D \rightarrow D'$.

(i) Показать, что в общем случае

$$f \text{ монотонна} \not\Rightarrow f \text{ непрерывна}.$$

(ii) Показать, что, опустив п. (2) в определении топологии Скотта на п. ч. у. м., мы все еще будем иметь топологию, в которой

$$f \text{ монотонна} \Leftrightarrow f \text{ непрерывна}.$$

1.3.4. Пусть $e \in D, e' \in D'$ компактны. Положим по определению $f_{e, e'}(x) = e$ если $e \sqsubseteq x$, то e' , иначе $\perp$. Показать, что $f_{e, e'} \in [D \rightarrow D']$ компактно.

1.3.5. (i) Показать, что для $x \in D$

$$x \text{ компактен} \Leftrightarrow \{z \mid x \sqsubseteq z\} \text{ открыто}.$$

(ii) Показать, что алгебраическая решетка всегда является непрерывной решеткой.

1.3.6. Пусть f, g — ретракции множества D . Будем записывать соотношение $f = f \circ g = g \circ f$ в виде $f \leq g$. Показать, что $\leq$ — частичный порядок. Следует ли $f \leq g$ из $\text{Range}(f) \subseteq \text{Range}(g)$?

1.3.7. Показать, что

$$\begin{aligned} \text{алгебраические решетки} &\subseteq \text{непрерывные решетки} \subseteq \\ &\subseteq \text{полные решетки} \subseteq \\ &\subseteq \text{п. ч. у. м.}, \end{aligned}$$

причем включения собственные.

1.3.8. Показать, что в полной решетке D точная нижняя грань (инфимум) $\bigwedge X$ существует для любого $X \subseteq D$.

1.3.9. Доказать лемму 1.2.26.

1.3.10. Доказать предложение 1.2.31.

Следующие два упражнения принадлежат Хайланду.

1.3.11. Если X — топологическое пространство, то $\mathcal{O}(X)$ будет обозначать совокупность открытых в X множеств, частично упорядоченных отношением $\subseteq$.

Для п. ч. у. м. D обозначим через TD топологическое пространство, состоящее из D с топологией Скотта. Будем писать $\mathcal{O}(D)$ вместо $\mathcal{O}(TD)$.

Обозначим через $\mathbf{0}$ полную решетку $\{\perp, \top\}$ из двух элементов с соотношением $\perp \sqsubseteq \top$.

- (i) Показать, что $\mathcal{O}(X)$ — полная решетка. Что такое Π ?
 (ii) Показать, что $\mathcal{O}(D) \cong [D \rightarrow 0]$, где $\cong$ обозначает изоморфизм.
 (iii) Показать, что для компактного $K \subseteq X$ множество

$$\mathcal{U}_K = \{O \in \mathcal{O}(X) \mid K \subseteq O\}$$

открыто в топологии Скотта на $\mathcal{O}(X)$.

- (iv) Пусть D — полная решетка и $D' = \mathcal{O}(D)$. Показать, что $\in$ -отношение

$$\mathcal{E} = \{ \langle d, O \rangle \in D \times D' \mid d \in O \}$$

открыто по Скотту в $D \times D'$.

1.3.12*. Доказать, что в общем случае (см. упр. 1.3.9)

$$TD \times TD' \neq T(D \times D').$$

[Указания. Рассмотрим $\mathbb{N}$ с дискретной топологией, и пусть $B = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — бэровское пространство с топологией произведения. Возьмем $D = \mathcal{O}(B)$, $D' = \mathcal{O}(D)$. Рассмотрим множество $\mathcal{E}$, введенное в предыдущем упражнении. Допустим, чтобы прийти к противоречию, что $\mathcal{E}$ открыто в $TD \times TD'$.

Для любого $f \in \mathbb{B}$ множество $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_{\{f\}}$ открыто по Скотту в D в силу предыдущего упражнения. Рассмотрим произвольные $f \in O \in D$. Тогда $\langle O, \mathcal{U}_f \rangle \in \mathcal{E}$, откуда в силу нашего допущения получаем

$$\langle O, \mathcal{U}_f \rangle \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{E}$$

для некоторого $\mathcal{W}_0$, открытого в D' , и $\mathcal{U}_0$, открытого в D .]

- (i) Показать, что

$$f \in O \in \mathcal{U}_0, \quad (1)$$

$$\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U} \in D' \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{W}_0, \quad (2)$$

$$\mathcal{U} \in \mathcal{W}_0 \Rightarrow \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}. \quad (3)$$

- (ii) Доказать, что

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists O' \in \mathcal{U}_0) (\exists g \in \mathbb{B}) [f \in O' \wedge g \notin O' \wedge \bar{f}(n) = \bar{g}(n)]$$

(где $\bar{f}(n)$ обозначает код последовательности $\langle f(0), \dots, f(n-1) \rangle$).

[Указание. Введем обозначение $O_\alpha = \{g \in \mathbb{B} \mid \exists n (\bar{g}(n) = \alpha)\}$, где α — код последовательности. В силу (1) для достаточно больших m верно $f \in O_{\bar{f}(m)} \subseteq O$. Тогда, введя обозначения $\alpha = \bar{f}(m)$ и заметив, что

$$O = (O - O_\alpha) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} O_{\alpha * i} \in \mathcal{U}_0,$$

можно использовать тот факт, что $\mathcal{U}_0$ открыто по Скотту в D .]

- (iii) Построить последовательность $g_n \in \mathbb{B}$, такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$ и

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists O_n \in \mathcal{U}_0) [f \in O_n \wedge g_0, \dots, g_n \notin O_n].$$

- (iv) Получить из (i) и (ii), что

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_{g_i} \in \mathcal{W}_0, \text{ но } \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_{g_i} \notin \mathcal{W}_0,$$

в противоречие с тем, что $\mathcal{W}_0$ открыто в D' по Скотту.]

1.3.13. (i) Пусть $e, e' \in D$ компактны. Показать, что если существует $e \sqcup e'$, то он тоже компактен.

(ii) Показать, что $e \sqcup e'$ не обязательно существует даже в алгебраическом п. ч. у. м.

- (iii) Показать, что в полной решетке D элемент $e \in D$ компактен тогда и только тогда, когда для всех $X \subseteq D$

$$e \in \bigcup X \Rightarrow e \in \bigcup X_0 \text{ для некоторого конечного } X_0 \subseteq X.$$

1.3.14. Обобщается ли теория непрерывных решеток на непрерывные п. ч. у. м?

1.3.15. Пусть $(X, \sqsubseteq)$ — когерентное алгебраическое п. ч. у. м. Показать, что множество компактных элементов из X плотно в X .

1.3.16. (i). Показать, что если D, D' — компактные п. ч. у. м., то $[D \rightarrow D']$ компактно. [Указание. Использовать упражнение 1.3.4.] Получить отсюда, что алгебраические п. ч. у. м. образуют декартово замкнутую категорию.

(ii) Если D, D' — когерентные алгебраические п. ч. у. м., то топология Скотта на $[D \rightarrow D']$ совпадает с топологией произведения (точнее, с ее следом на D'^D).

(iii) Показать, что когерентные алгебраические п. ч. у. м. образуют декартово замкнутую категорию.

1.3.17* (Скотт [1972]). Пусть D — непрерывная решетка. Показать, что D — инъективное топологическое пространство, т. е. для любого топологического пространства Y и любого его подпространства X любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow D$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\bar{f}: Y \rightarrow D$.

1.3.18. Определим $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ соотношением

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Показать, что f непрерывна по каждому из своих аргументов в отдельности, но не по совокупности аргументов.

Глава 2

Конверсия

2.1. Лямбда-термы и конверсия

Основной объект изучения в λ -исчислении — это множества лямбда-термов, рассматриваемых с точностью до конвертируемости. Эти понятия будут введены в данном разделе.

2.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Лямбда-термы будут словами в следующем алфавите:

$v_0, v_1, \dots$ переменные,
 λ абстрактор,
 $(,)$ скобки.

(ii) Множество Λ лямбда-термов (или, что то же, λ -термов) индуктивно¹⁾ определяется следующим образом:

- (1) $x \in \Lambda$;
- (2) $M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$;
- (3) $M, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$,

где x в (1) и (2) — произвольная переменная.

2.1.2. Соглашения о записи. (i) $M, N, L, \dots$ обозначают произвольные λ -термы.

(ii) $x, y, z, \dots$ обозначают произвольные переменные.

(iii) Внешние скобки не пишутся.

(iv) Символ $\equiv$ обозначает графическое равенство (т. е. полное совпадение синтаксических объектов).

Вводимые ниже обозначения будут часто использоваться. Они навеяны принадлежащей Шейнфинкелю редукцией функций нескольких переменных к функциям одной переменной.

2.1.3. Обозначения. (i) Пусть $\vec{x} \equiv x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$\lambda x_1 \dots x_n. M \equiv \lambda \vec{x}. M \equiv \lambda x_1 (\lambda x_2 (\dots (\lambda x_n (M)) \dots)).$$

(ii) Пусть $\vec{N} = N_1, \dots, N_n$. Тогда

$$MN_1 \dots N_n \equiv M\vec{N} \equiv (\dots ((MN_1)N_2) \dots N_n) \quad (\text{группировка влево}).$$

¹⁾ В любом индуктивном определении будет подразумеваться, что определяемый класс — наименьший удовлетворяющий рассматриваемым условиям.

(iii) Через $\|M\|$ обозначается длина выражения M , т. е. количество символов в M .

Примеры. Следующие выражения являются λ -термами:

- (i) xx ,
- (ii) $\lambda x.xx$,
- (iii) $\lambda xy.yx (\equiv \lambda x(\lambda y(yx)))$,
- (iv) $\lambda xy.yx(\lambda z.z) (\equiv \lambda x(\lambda y((yx)(\lambda z.z))))$.

Не всегда обязательно разворачивать термы вроде (iii), (iv) так, чтобы они не содержали сокращений. Как только будет доказана лемма 2.1.23, аппликативное поведение таких термов станет непосредственно очевидным.

Основным отношением эквивалентности для λ -термов является *конвертируемость*. Это отношение порождается некоторыми аксиомами, для описания которых понадобится оператор подстановки. $M[x := N]$ обозначает результат подстановки выражения N вместо переменной x в выражение M . Как и в случае логики предикатов (или программирования), при определении этой операции нужны некоторые предосторожности во избежание коллизий свободных и связанных переменных. Мы отложим на время описание этих предосторожностей.

2.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формулами теории λ будут равенства $M = N$, где $M, N \in \Lambda$. Она аксиоматизируется следующими аксиомами и правилами.

- (I) $(\lambda x.M)N = M[x := N]$ (β -конверсия),
- (II. 1) $M = M$,
- (II. 2) $M = N \Rightarrow N = M$,
- (II. 3) $M = N, N = L \Rightarrow M = L$,
- (II. 4) $M = N \Rightarrow MZ = NZ$,
- (II. 5) $M = N \Rightarrow ZM = ZN$,
- (II. 6) $M = N \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N$ (правило ξ).

Доказуемость равенства $M = N$ в λ записывается в виде $\lambda \vdash M = N$, а часто и просто в виде $M = N$. Если $\lambda \vdash M = N$, то M и N называются (*взаимо*)конвертируемыми. Отметим, что $M \equiv N \Rightarrow M = N$, но не наоборот.

Названия « β -конверсия» и «правило ξ » сложились исторически. Теория λ появляется в литературе под различными именами:

λ -исчисление,
 $\lambda\beta$ -исчисление,
 λK -исчисление,
 $\lambda K\beta$ -исчисление.

Символ K служит для того, чтобы отличить λ от ограниченной теории λI , которая вводится в § 2.2.

Отметим, что λ свободна от логики — это эквациональная теория. Логические связи и кванторы будут использоваться в неформальном метаязыке при описании свойств теории λ . Например, суждения

$$\forall M (\lambda x.x)M = M, \\ M = N \Rightarrow MM = NN \wedge MN = NM$$

означают соответственно

$$(\forall M \in \Lambda) \quad \lambda \vdash (\lambda x.x)M = M, \\ \lambda \vdash M = N \Rightarrow \lambda \vdash MM = NN \text{ и } \lambda \vdash MN = NM.$$

Следующая весьма полезная теорема иллюстрирует богатые дедуктивные возможности λ .

2.1.5. ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ. $\forall F \exists X (FX = X)$.

Доказательство. Пусть $W \equiv \lambda x.F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x.F(xx))W = F(WW) = FX. \quad \square$$

Некоторые синтаксические понятия и обозначения

2.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что переменная x входит свободно в λ -терм M , если x не находится в области действия символа λx ; в противном случае говорят, что x входит в M связано.

Например, переменная x (дважды) входит в терм $M \equiv x(\lambda y.xy)$ свободно, а y входит туда связано. Переменная может входить в данный λ -терм и свободно, и связано; примером является y в терме $y(\lambda y.y)$.

В этом отношении λx имеет те же связывающие свойства, что и $\forall x$ в логике предикатов или $\int_0^1 \dots dx$ в интегральном исчислении.

2.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество $FV(M)$ свободных переменных терма M можно индуктивно определить следующим образом:

$$FV(x) = \{x\}, \\ FV(\lambda x.M) = FV(M) - \{x\}, \\ FV(MN) = FV(M) \cup FV(N).$$

(ii) M называется замкнутым термом или комбинатором, если $FV(M) = \emptyset$.

(iii) $\Lambda^0 = \{M \in \Lambda \mid M \text{ замкнут}\}$.

(iv) $\Lambda^0(\vec{x}) = \{M \in \Lambda \mid FV(M) \subseteq \{\vec{x}\}\}$.

(v) Замыкание терма $M \in \Lambda$ есть по определению $\lambda \vec{x}.M$, где $\{\vec{x}\} = FV(M)$.

Например, $\lambda xy.xy \in \Lambda^0$; $\lambda xy.xyz \in \Lambda^0(z)$.

Отметим, что замыкание терма M зависит от порядка переменных в $\vec{x}$.

2.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Говорят, что M есть подтерм терма N (и пишут $M \subset N$), если $M \in \text{Sub}(N)$, где совокупность $\text{Sub}(N)$ подтермов N индуктивно определяется следующим образом:

$$\text{Sub}(x) = x, \\ \text{Sub}(\lambda x.N_1) = \text{Sub}(N_1) \cup \{\lambda x.N_1\}, \\ \text{Sub}(N_1N_2) = \text{Sub}(N_1) \cup \text{Sub}(N_2) \cup \{N_1N_2\}.$$

(ii) Подтерм может входить в данный терм несколько раз. Например, в $M \equiv \lambda x.x! (x!)$ имеется два вхождения подтерма $! \equiv \lambda y.y$.

(iii) Пусть N_1, N_2 — два вхождения подтермов в M . Тогда говорят, что N_1, N_2 дизъюнкты, если они не имеют общих вхождений символов.

(iv) Вхождение N подтерма в терм M называется активным, если оно происходит от вхождения вида (NZ) для некоторого Z ; в противном случае оно называется пассивным.

ПРИМЕР. (i) Пусть $M \equiv \lambda x.xy(\lambda z.y)$. Тогда $xy \subset M$, но $z \not\subset M$ и $y(\lambda z.y) \not\subset M$, так как $M \equiv \lambda x.((xy)(\lambda z.y))$.

(ii) Вхождения x и $(\lambda z.y)$ в M дизъюнкты. Дизъюнкты также первое вхождение y и $(\lambda z.y)$.

(iii) x и xy — активные подтермы M , а $y, \lambda z.y$ — пассивные.

2.1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $F, M \in \Lambda$. Тогда

$$(i) F^0 M \equiv M; F^{n+1} M \equiv F(F^n M), \\ (ii) FM^{\sim 0} \equiv F; FM^{\sim n+1} \equiv FM^{\sim n} M.$$

Термы, рассматриваемые с точностью до замены связанных переменных

Мы покажем сейчас, что при подстановке необходимы некоторые предосторожности.

2.1.10. Софизм. $\forall MN (M = N)$.

Доказательство. Пусть $F \equiv \lambda xy.yx$. Тогда для любых M, N имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x(\lambda y.yx))M)N = (\lambda y.yM)N = NM.$$

В частности, $Fyx = xy$. Но

$$Fyx = ((\lambda x(\lambda y.yx))y)x = (\lambda y.yy)x = xx.$$

Следовательно, $xy = xx$. Отсюда нетрудно вывести любое равенство. См. упр. 2.4.2 (iii). $\square$

Разоблачение софизма. Кажущееся противоречие возникло из-за шага

$$(\lambda x (\lambda y. yx)) y = \lambda y. yy.$$

Свободная переменная y становится связанной после подстановки вместо x в терм $\lambda y. yx$. Этого не следует допускать. В логике предикатов эту ситуацию описывают фразой « y не свободен для (подстановки вместо) x в $\lambda y. yx$ », а в программировании — фразой «происходит смешение локальных и глобальных переменных». $\square$

В 2.1.11—2.1.14 будет описан метод обхода этой трудности, использующий приводимые ниже принципы. Подробности приведены в приложении С.

(1) Отождествляем два терма, если их можно преобразовать друг в друга переименованием связанных переменных.

(2) Рассматриваем λ -терм как представитель своего класса эквивалентности.

(3) Интерпретируем подстановку $M[x := N]$ как операцию на классах эквивалентности термов M и N . Эту операцию можно выполнить на представителях при условии, что связанные переменные называются правильно, т. е. в соответствии с приводимым ниже соглашением о переменных.

2.1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) *Заменой связанных переменных* в терме M называется замена подтерма $\lambda x. N$ в M на $\lambda y. N[x := y]$ при условии, что y (вообще) не входит в N . (Так как y — новая переменная, подстановка $N[x := y]$ не таит никакой опасности.)

(ii) Говорят, что терм M α -конгруэнтен терму N (и пишут $M \equiv_{\alpha} N$), если N получается из M серией замен связанных переменных.

Например,

$$\lambda x. xy \equiv_{\alpha} \lambda z. zy \not\equiv_{\alpha} \lambda y. yy,$$

$$\lambda x. x (\lambda x. x) \equiv_{\alpha} \lambda x'. x' (\lambda x. x) \equiv_{\alpha} \lambda x'. x' (\lambda x''. x'').$$

У Чёрча [1941] переименование (т. е. замена) связанных переменных было встроено в правила конверсии. Там теория λ была расширена схемой аксиом

$$\lambda x. M = \lambda y. M[x := y] \quad (\alpha\text{-конверсия}),$$

где y не входит в M ни свободно, ни связано.

Мы предпочитаем отождествлять α -конгруэнтные термы на синтаксическом уровне.

2.1.12. Соглашение. α -конгруэнтные термы отождествляются. Поэтому мы пишем теперь $\lambda x. x \equiv \lambda y. y$ и т. д.

2.1.13. Соглашение о (употреблении) переменных. Если в определенном математическом контексте (определении, доказательстве) встречаются термы $M_1, \dots, M_n$, то подразумевается, что связанные переменные в них выбраны так, чтобы они были отличны от свободных переменных.

Примеры использования соглашения о переменных.

(1) Это соглашение неявно использовалось уже в доказательстве теоремы 2.1.5 (о неподвижной точке). В определении $W \equiv \lambda x. F(xx)$ существенно условие $x \notin FV(F)$.

(2) Пусть $K \equiv \lambda xy. x$. Тогда $KM \equiv (\lambda x (\lambda y. x)) M = \lambda y. M$. Отсюда

$$(*) \quad \forall M (KM = \lambda y. M).$$

Но $Ky \neq \lambda y. y$. Это имеет место из-за того, что в силу соглашения о переменных соотношение $(*)$ понимается как

$$\forall M (KM = \lambda y. M), \quad \text{где } y \notin FV(M).$$

Следовательно, ввиду отождествления конгруэнтных термов, имеет место $Ky = \lambda y'. y$.

2.1.14. Вывод. Используя соглашения 2.1.12 и 2.1.13, можно работать с λ -термами «наивно».

Это значит, что подстановку и другие операции над термами можно выполнять, не задаваясь вопросом, допустимы ли они. Этот вывод будет доказан в приложении С.

Подстановка

2.1.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Результат подстановки терма N вместо всех свободных вхождений переменной x в M (обозначаемый через $M[x := N]$) определяется следующим образом:

$$x[x := N] \equiv N;$$

$$y[x := N] \equiv y, \text{ если } x \neq y;$$

$$(\lambda y. M_1)[x := N] \equiv \lambda y. (M_1[x := N]);$$

$$(M_1 M_2)[x := N] \equiv (M_1[x := N]) (M_2[x := N]).$$

В третьем пункте не нужно специально оговаривать условие « $y \neq x$ и $y \notin FV(N)$ ». Оно выполняется в силу соглашения о переменных.

2.1.16. Лемма о подстановке. Если $x \neq y$ и $x \notin FV(L)$, то

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]].$$

Доказательство проводится индукцией по построению терма M . Случай 1. M — переменная.

Случай 1.1. $M \equiv x$. Тогда левая и правая части доказываемого утверждения равны $N[y := L]$, так как $x \neq y$.

Случай 1.2. $M \equiv y$. Тогда обе части равны L , так как из $x \notin FV(L)$ следует $L[x := \dots] \equiv L$.

Случай 1.3. $M \equiv z \neq x, y$. Тогда обе части равны z .

Случай 2. $M \equiv \lambda z.M_1$. В силу соглашения о переменных мы можем предположить, что $z \neq x, y$ и z не входит свободно в N, L . Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] &\equiv \lambda z.M_1[x := N][y := L] \equiv \\ &\equiv \lambda z.M_1[y := L][x := N[y := L]] \equiv \\ &\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]]. \end{aligned}$$

Случай 3. $M \equiv M_1M_2$. Тогда доказываемое утверждение снова следует из предположения индукции. $\square$

- 2.1.17. Предложение. (i) $M = M' \Rightarrow M[x := N] = M'[x := N]$.
(ii) $N = N' \Rightarrow M[x := N] = M[x := N']$.
(iii) $M = M', N = N' \Rightarrow M[x := N] = M'[x := N']$.

Доказательство. Пункт (i) устанавливается индукцией по длине доказательства равенства $M = M'$. Так как этот метод доказательства будет использоваться часто, мы приведем все подробности. В дальнейшем эти подробности будут предоставляться читателю.

Случай 1. $M = M'$ — аксиома вида $(\lambda y.A)B = A[y := B]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y.A[x := N])(B[x := N]) \equiv \\ &\equiv A[x := N][y := B[x := N]] \equiv \\ &\equiv A[y := B][x := N] \equiv M'[x := N] \end{aligned}$$

в силу леммы 2.1.16 (о подстановке). Заметим, что $y \neq x$, $y \notin FV(N)$ в силу соглашения о переменных.

Случай 2. $M = M'$ — аксиома из-за того, что $M \equiv M'$. Тогда нужный результат получается непосредственно.

Случай 3. $M = M'$ имеет вид $ZM_1 = ZM'_1$ и получается непосредственно из $M_1 = M'_1$. Имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv Z[x := N]M_1[x := N] \equiv \\ &\equiv Z[x := N]M'_1[x := N] \text{ (по предположению индукции)} \equiv \\ &\equiv M'[x := N]. \end{aligned}$$

Остальные правила вывода рассматриваются аналогично.

Дадим другое доказательство пункта (i).

$$M = M' \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda x.M)N = (\lambda x.M')N \Rightarrow M[x := N] = M'[x := N].$$

- (ii) Надо применить индукцию по построению терма M .
(iii) В силу (i) и (ii) имеем

$$M[x := N] = M'[x := N] = M'[x := N']. \quad \square$$

Верно ли следующее утверждение?

$$N = N' \Rightarrow \lambda x.x(\lambda y.N) = \lambda x.x(\lambda y.N').$$

Ответ: оно верно, но не следует непосредственно из предложения 2.1.17(ii), так как терм $(\lambda x.x(\lambda y.N))$ нельзя записать в виде $(\lambda x.x(\lambda y.z))[z := N]$, если одна из переменных x, y свободна в N . Поэтому полезно следующее понятие контекста.

2.1.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Контекстом называется терм $C[]$ с дырами в нем. Более формальное определение выглядит следующим образом.

x — контекст;

$[]$ — контекст;

если $C_1[]$ и $C_2[]$ — контексты, то $C_1[]C_2[]$ и $\lambda x.C_1[]$ тоже контексты.

(ii) Если $C[]$ — контекст и $M \in \Lambda$, то $C[M]$ обозначает результат помещения M в дыры контекста $C[]$. При этом действия свободные переменные из M могут стать связанными в $C[M]$.

Пример. $C[] \equiv \lambda x.x(\lambda y.[])$ — контекст. Если $M \equiv xy$, то $C[M] \equiv \lambda x.x(\lambda y.xy)$.

Контексты не рассматриваются с точностью до α -конгруэнтности. Существенное свойство контекста $C[]$ состоит в том, что свободные переменные терма M могут стать связанными в $C[M]$. Мы будем писать $C[] \in \Lambda$ вместо того, чтобы говорить, что $C[]$ — контекст.

2.1.19. Предложение. Пусть $C[] \in \Lambda$. Тогда

$$N = N' \Rightarrow C[N] = C[N'].$$

Доказательство. Используем индукцию по построению контекста $C[]$.

2.1.20. Лемма. (i) $\forall C[] \forall \vec{x} \exists F \forall M \in \Lambda^0(\vec{x})(C[M] = F(\lambda \vec{x}.M))$.

(ii) $\forall C[] \forall M \exists \vec{x} \exists F(C[M] = F(\lambda \vec{x}.M))$.

Доказательство. (i) Используем индукцию по построению $C[M]$.

(ii) следует из (i). $\square$

Иногда нужна одновременная подстановка.

2.1.21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\vec{N} = N_1, \dots, N_m$; $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$. Тогда говорят, что $\vec{N}$ согласован с $\vec{x}$, если $m = n$ и переменные из $\vec{x}$ не входят в $FV(\vec{N})$.

(ii) Пусть $\vec{N} = N_1, \dots, N_m$; $\vec{L} = L_1, \dots, L_n$. Тогда скажем, что

$$\vec{N} = \vec{L}, \text{ если } n = m \text{ и } N_i = L_i \text{ для } 1 \leq i \leq n$$

Аналогично определяется отношение $\vec{N} \equiv \vec{L}$.

(iii) Пусть $\vec{N}$ согласован с $\vec{x} \equiv x_1, \dots, x_n$. Тогда полагаем

$$M[\vec{x} := \vec{N}] \equiv M[x_1 \equiv N_1] \dots [x_n \equiv N_n].$$

[Здесь необходимо, чтобы переменные из $\vec{x}$ не входили в $FV(\vec{N})$. Иное определение приводится в упр. 2.4.8.]

(iv) Пусть $M \equiv \Lambda$. Как и в логике предикатов, мы иногда записываем $M \equiv M(\vec{x})$, чтобы изобразить подстановку.

Если $M \equiv M(\vec{x})$ и $\vec{N}$ согласован с $\vec{x}$, то $M(\vec{N}) \equiv M[\vec{x} := \vec{N}]$.

2.1.22. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\vec{N}_i$ согласованы с $\vec{x}$. Тогда

$$M_1(\vec{x}) = M_2(\vec{x}) \wedge \vec{N}_1 = \vec{N}_2 \Rightarrow M_1(\vec{N}_1) = M_2(\vec{N}_2).$$

Доказательство получается ссылкой на предложение 2.1.17 (iii). $\square$

Комбинаторная полнота

2.1.23. ЛЕММА. Пусть $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$. Тогда $(\lambda \vec{x}. M) \vec{x} = M$.

Доказательство. При $n = 1$ имеем

$$(\lambda x_1. M) x_1 = M[x_1 := x_1] \equiv M.$$

Если $n = 2$, то

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x}. M) \vec{x} &\equiv ((\lambda x_1. (\lambda x_2. M)) x_1) x_2 = \\ &= (\lambda x_2. M) x_2 \text{ (в силу случая } n = 1 \text{ для } \lambda x_2. M) = M. \end{aligned}$$

Общий случай получается аналогично индукцией по n . $\square$

2.1.24. СЛЕДСТВИЕ (комбинаторная полнота). Пусть $M \equiv M(\vec{x})$. Тогда

- (i) $\exists F(\vec{F}\vec{x} = M(\vec{x}))$;
- (ii) $\exists F \forall \vec{N}(\vec{F}\vec{N} = M(\vec{N}))$, если $\vec{N}$ согласован с $\vec{x}$;
- (iii) в (i), (ii) можно взять $F \equiv \lambda \vec{x}. M$.

Доказательство. Для доказательства используем предыдущую лемму и предложение 2.1.22. $\square$

Пример. $\exists F \forall MN(FMN = \lambda z. zNM)$. Действительно, положим

$$F \equiv \lambda xy. (\lambda z. zyx) \equiv \lambda xyz. zyx.$$

Особенно важны три комбинатора.

2.1.25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$I \equiv \lambda x. x, \quad K \equiv \lambda xy. x,$$

$$S \equiv \lambda xyz. xz(yz).$$

2.1.26. СЛЕДСТВИЕ. Для всех $M, N, L \in \Lambda$

- (i) $IM = M$,
- (ii) $KMN = M$,
- (iii) $SMNL = ML(NL)$.

Доказательство получается с помощью следствия 2.1.24. $\square$

В § 8.1 будет показано, что I, K, S порождают множество Λ^0 с помощью аппликации. Заметим, что $SKK = I$, а следовательно, K, S порождают Λ^0 .

Экстенциональность

Лямбда-термы обозначают процессы. Различные термы могут обозначать один и тот же процесс. Например, $\lambda x. Mx$ и M дают один и тот же результат MN в применении к терму N . Поэтому вводится следующее правило.

2.1.27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Экстенциональность — это следующее правило вывода:

$$Mx = Nx \Rightarrow M = N \quad (\text{ext}),$$

где $x \notin FV(MN)$.

(ii) Теория λ , расширенная этим правилом, обозначается через $\lambda + \text{ext}$.

Возникает вопрос: что можно доказать в $\lambda + \text{ext}$, но не в λ ? Мы уже видели один пример — $\lambda x. Mx = M$. Ниже показано, что это — по существу единственное различие.

2.1.28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим следующую схему аксиом η :

$$\lambda x. Mx = M \quad (\eta\text{-конверсия}),$$

где $x \notin FV(M)$. Пусть $\lambda\eta$ — это теория λ , расширенная схемой η .

2.1.29. ТЕОРЕМА (Карри). Теории $\lambda + \text{ext}$ и $\lambda\eta$ эквивалентны.

Доказательство. Покажем сначала, что $\lambda + \text{ext} \vdash \eta$. Действительно, $(\lambda x.Mx)x = Mx$. Следовательно, если $x \notin FV(M)$, то по правилу ext имеем $\lambda x.Mx = M$.

Обратно, теория $\lambda\eta$ замкнута относительно правила ext . Пусть $Mx = Nx$, где $x \notin FV(MN)$. Тогда по правилу ξ имеем $\lambda x.Mx = \lambda x.Nx$. Отсюда $M = N$ по схеме η . $\square$

Заметим, что правило ξ играет существенную роль при установлении эквивалентности между $\lambda + \text{ext}$ и $\lambda\eta$. Поэтому ξ иногда называется правилом *слабой экстенциональности*.

Экстенциональное λ -исчисление обычно обозначается через $\lambda\eta$. В литературе встречаются и другие названия:

- $\lambda\eta$ -исчисление,
- $\lambda\beta\eta$ -исчисление,
- $\lambda K\eta$ -исчисление,
- $\lambda K\beta\eta$ -исчисление.

Одна из причин рассмотрения системы $\lambda\eta$ состоит в том, что она обладает определенным свойством полноты — см. теорему 2.1.40.

Непротиворечивость

Так как теория λ свободна от логики, непротиворечивость нужно понимать следующим образом.

2.1.30. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) *Равенство* — это формула вида $M = N$, где $M, N \in \Lambda$; такое равенство *замкнуто*, если $M, N \in \Lambda^0$.

(ii) Пусть $\mathcal{T}$ — формальная теория, формулами которой являются равенства. Тогда говорят, что $\mathcal{T}$ *непротиворечива* (и пишут $\text{Con}(\mathcal{T})$), если в $\mathcal{T}$ доказуемо не любое замкнутое равенство. В противном случае говорят, что $\mathcal{T}$ *противоречива*.

(iii) Если $\mathcal{T}$ — множество равенств, то $\lambda + \mathcal{T}$ обозначает теорию, получаемую из λ добавлением всех равенств из $\mathcal{T}$ в качестве аксиом. Говорят, что $\mathcal{T}$ *непротиворечиво* (и пишут $\text{Con}(\mathcal{T})$), если имеет место $\text{Con}(\lambda + \mathcal{T})$.

Читателя, возможно, беспокоит софизм 2.1.10. Кроме того, доказательство теоремы 2.1.5 о неподвижной точке представляет собой, по существу, диагональное рассуждение того типа, который часто приводит к противоречиям. Поэтому неочевидно, что теория λ непротиворечива.

Понятие редукции, которое будет введено в гл. 3, окажется мощным теоретико-доказательственным инструментом изучения теории λ и некоторых ее расширений. Используя его, мы можем доказать следующее утверждение.

2.1.31. ФАКТ. Теории λ и $\lambda\eta$ непротиворечивы.

Доказательство. См. теоремы 3.2.10(ii) и 3.3.11(ii), а также следствие 2.1.38. $\square$

Теория λ , расширенная всего одной аксиомой, может стать противоречивой.

2.1.32. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда говорят, что M и N *несравнимы*, и пишут $M \# N$, если $\neg \text{Con}(M = N)$.

2.1.33. ПРИМЕР. $K \neq S$.

Доказательство. Рассуждаем в $\lambda + K = S$. Для $X, Y, Z \in \Lambda$ имеем $KXYZ = SXYZ$, откуда $XZ = XZ(YZ)$. Возьмем $X = Z = I$. Тогда для всех $Y \in \Lambda$ имеем $I = YI$. Взяв $Y = KM$ для произвольного M , получаем $I = M$ для любого M . Поэтому $\lambda + K = S \vdash M = I = N$ для любых M, N , иными словами, мы получили $\neg \text{Con}(K = S)$. $\square$

Нормальные формы

Рассмотрим терм вроде $(\lambda x.xa)I$. Такой терм можно «вычислить» и получить Ia , а это дает a .

Терм a называется *нормальной формой*, так как он не «вычисляется» дальше. Это понятие уточняется следующим образом.

2.1.34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda$.

(i) M есть *β -нормальная форма* (сокращенно β -н. ф. или просто н. ф.), если M не имеет подтермов вида $(\lambda x.R)S$.

(ii) M *имеет* н. ф., если существует терм N , такой что $N = M$ и N есть β -н. ф.

Если M есть н. ф., то говорят также, что M *находится в* н. ф.

ПРИМЕРЫ. (i) I находится в н. ф.

(ii) KI имеет н. ф. (а именно, $\lambda y.I$).

(iii) Пусть $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$. Тогда Ω не имеет н. ф., что будет доказано в гл. 3.

В экстенциональной теории $\lambda\eta$ понятие н. ф. несколько иное, так как там имеются новые термы вроде $\lambda x.ax$, которые «хотят, чтобы их вычислили».

2.1.35. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda$.

(i) M есть $\beta\eta$ -н. ф., если M не имеет подтермов вида $(\lambda x.P)Q$ или $(\lambda x.Rx)$, где $x \notin FV(R)$.

(ii) M имеет $\beta\eta$ -н. ф., если

$$\exists N[\lambda\eta \vdash M = N \text{ и } N \text{ есть } \beta\eta\text{-н. ф.}].$$

ПРИМЕРЫ. (i) K, S — это $\beta\eta$ -н. ф.

(ii) $\lambda x.x(\lambda z.xz)$ не есть $\beta\eta$ -н. ф., но имеет $\beta\eta$ -н. ф. — терм $\lambda x.xx$.

2.1.36. Факт (Карри и др. [1972]). M имеет $\beta\eta$ -н. ф. $\Leftrightarrow M$ имеет β -н. ф.

Доказательство. См. следствие 15.1.5. $\square$

Нормальные формы и непротиворечивость связаны следующим образом.

2.1.37. Факт. (i) Если M, N — различные β -н. ф., то

$$\lambda \nvdash M = N.$$

(ii) Аналогичное утверждение о доказуемости равенств $\beta\eta$ -н. ф. в $\lambda\eta$.

Доказательство. Применяем теоремы 3.2.10, 3.3.11 и предложения 3.2.1, 3.3.2. $\square$

2.1.38. Следствие. Теории λ и $\lambda\eta$ непротиворечивы.

Доказательство. Из факта 2.1.37 получаем $\lambda\eta \nvdash K = S$, так как термы K и S находятся в $\beta\eta$ -н. ф. $\square$

С другой стороны, имеет место следующее утверждение.

2.1.39. Факт (Бём [1968]). Если M, N — различные $\beta\eta$ -н. ф., то $M \neq N$.

Доказательство. См. следствие 10.4.3. $\square$

Отсюда следует, что теория $\lambda\eta$ полна по Гильберту — Посту (ср. определение 4.1.22) для термов, имеющих н. ф..

2.1.40. ТЕОРЕМА. Допустим, что M, N имеют н. ф.. Тогда либо $\lambda\eta \vdash M = N$, либо теория $\lambda\eta + M = N$ противоречива.

Доказательство. В силу факта 2.1.36 термы M и N имеют $\beta\eta$ -н. ф., которые мы обозначим через M', N' .

Случай 1. $M' = N'$. Тогда

$$\lambda\eta \vdash M = M' = N' = N.$$

Случай 2. $M' \neq N'$. Тогда в силу факта 2.1.39 мы имеем $\neg \text{Con}(M' = N')$, откуда $\neg \text{Con}(\lambda\eta + M = N)$. $\square$

2.2. Некоторые варианты теории λ

В этом разделе рассматриваются два варианта теории λ — комбинаторная логика и λ -исчисление. Аппарат этих систем изложен соответственно в гл. 7 и 9. Кроме того, обсуждается вопрос об «осмысленности» термов.

Комбинаторная логика

Независимо от λ -исчисления М. И. Шейнфинкель [1924] и Карри [1930] начали разработку родственной теории — комбинаторной логики.

Карри разрабатывал комбинаторную логику с намерением обеспечить новые основания математики. Его теория делится на две части: *чистая комбинаторная логика* занимается понятиями вроде подстановки и других формульных преобразований, а *иллативная комбинаторная логика* — логическими понятиями, такими, как импликация, квантификация, равенство и типы.

Как было упомянуто выше, Чёрч ставил аналогичную цель в связи с расширенным вариантом теории λ . После того как было показано, что предложенная им система противоречива, Чёрч оставил свою программу. Карри старался быть осторожнее со своими теориями и хотел получить доказательства непротиворечивости во всех случаях, когда это возможно. Это было сделано для нескольких систем комбинаторной логики (см. приложение В). Однако эти системы очень слабы и потому не подходят на роль оснований математики. Несмотря на это, возникшие теории имеют ряд интересных аспектов.

Эта книга не охватывает иллативных теорий. Они кратко обсуждаются в приложении В. Чистая комбинаторная логика рассматривается в гл. 7. Допуская некоторую нестрогость, мы часто будем опускать эпитет «чистая».

Отправной точкой этой теории является то обстоятельство, что общая схема комбинаторной полноты — следствие 2.1.24 — получается из двух своих частных случаев. Достаточно предположить, что имеются объекты K и S , удовлетворяющие равенствам

$$(*) \quad KMN = M, \quad SMNL = ML(NL)$$

для всех M, N и L . Комбинаторная логика CL — это формальная эквивалентная теория с единственной операцией — аппликацией, примитивными константами K, S и аксиомами (*). При наличии правила экстенциональности теории CL и λ становятся эквивалентными.

В CL не обязательно иметь операцию, связывающую переменные. Абстракцию можно определить через K и S . Это имеет несколько важных приложений к самому λ -исчислению. Например, терм $E \in \Lambda^0$, который перечисляет все замкнутые λ -термы, строится с помощью CL . Далее, теоретико-доказательственный анализ зачастую легче провести для расширений CL , чем для расширений λ . Это особенно полезно при наличии экстенциональности, так как тогда теории оказываются эквивалентными.

В λ -исчислении термы K, S удовлетворяют равенствам (*). Наметим, как с помощью этих термов можно определить абстракцию в Λ .

2.2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В λ выводимы следующие равенства:

- (i) $I = SKK$.
- (ii) (a) $\lambda x.x = I$;
- (b) $\lambda x.M = KM$, если $x \notin FV(M)$;
- (c) $\lambda x.MN = S(\lambda x.M)(\lambda x.N)$.

Доказательство. (i) $SKK = \lambda c.Kc(Kc) = \lambda c.c = I$;

- (ii) (b) $KM = \lambda x.M$ при $x \notin FV(M)$;
- (c) $S(\lambda x.M)(\lambda x.N) = \lambda x.(\lambda x.M)x((\lambda x.N)x) = \lambda x.MN$. $\square$

Таким образом, из каждого терма, принадлежащего множеству Λ , можно устранить λ путем постепенной замены с помощью K , S . Пример:

$$\lambda xy.yx \equiv \lambda x(\lambda y(yx)) = \lambda x(SI(Kx)) = S(K(SI))(S(KK)I) = \\ = S(K(S(SKK)))(S(KK)(SKK)).$$

Используя этот метод, можно определить стандартные переводы λ -термов в язык CL и обратно. Эти переводы не составляют, однако, изоморфизма между этими двумя теориями. λ -термы обладают тонкой структурой, которая не видна в соответствующих CL -термах. Например,

$$\lambda \vdash SKK = SKS = I, \text{ но } CL \not\vdash SKK = SKS.$$

Карри сумел построить конечное множество A_β , состоящее из равенств между CL -термами и такое, что теории $CL + A_\beta$ и λ эквивалентны при стандартном переводе. Аналогичным образом имеется множество $A_{\beta\eta}$, такое, что теория $CL + A_{\beta\eta}$ эквивалентна $\lambda\eta$. См. § 7.3.

λI -исчисление

Чёрч [1941] первоначально определил ограниченный класс λ -термов.

2.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество λI -термов (обозначаемое через Λ_I) вводится следующим индуктивным определением:

$$x \in \Lambda_I;$$

$$M \in \Lambda_I, x \in FV(M) \Rightarrow \lambda x.M \in \Lambda_I;$$

$$M, N \in \Lambda_I \Rightarrow (MN) \in \Lambda_I.$$

(ii) Теория λI (или λI -исчисление) состоит из равенств между λI -термами, доказуемых с помощью аксиом и правил теории λ , ограниченных термами из Λ_I .

Чтобы подчеркнуть отличие от λI , теория λ иногда обозначается через λK , а множество Λ — через Λ_K . Действительно, существенное различие между Λ_I и Λ_K заключается в терме K :

он лежит в $\Lambda_K - \Lambda_I$ и в действительности все λK -термы определяются через λI -термы и K .

В литературе встречаются следующие названия теории λI :

λI -исчисление,
 λ/β -исчисление.

Аналогичным образом, теорию $\lambda I\eta$, эквивалентную $\lambda I + ext$, обозначают следующим образом:

$\lambda I\eta$ -исчисление,
 $\lambda/\beta\eta$ -исчисление.

В книге Карри и др. [1958], гл. 3, § 3, упоминаются следующие доводы, приписываемые Чёрчу, в пользу предпочтения λI -исчисления λK -исчислению.

(1) То, что Чёрч хотел сделать с помощью λ -исчисления, может быть сделано с помощью λI -варианта. Это касается, например, представления (частично) рекурсивных функций.

(2) Если мы, подобно Чёрчу, считаем значимым только термы, имеющие н. ф.¹⁾, то значимые λK -термы могут иметь незначимые части (например, $KI\Omega$ имеет подтерм Ω без н. ф.). Это не так для λI -термов.

2.2.3. ФАКТ. Пусть $M \in \Lambda_I$ и $N \subset M$. Тогда

$$M \text{ имеет н. ф.} \Rightarrow N \text{ имеет н. ф.}$$

Доказательство. См. следствие 9.1.6. $\square$

(3) K -исчисление может приводить к противоречиям.

Обсудим эти три положения.

Мнение (1) можно объяснить существованием нескольких аппроксимаций оператора K , определяемых в λI -исчислении. Прежде всего имеется комбинатор $K_1 \in \Lambda_I^0$, такой, что $K_1 x c_n = x$ для всех цифр $c_n \equiv \lambda fz.f^n z$. Можно взять, например, $K_1 \equiv \lambda xy.y \parallel x$. Далее, следствие 9.4.24 показывает, что для любого конечного множества $\mathcal{N}$ термов в н. ф.

$$\exists K_{\mathcal{N}} \in \Lambda_I^0 \forall M \forall N \in \mathcal{N} (K_{\mathcal{N}} MN = M).$$

Такой комбинатор $K_{\mathcal{N}}$ называется *локальным K для $\mathcal{N}$* .

Однако тот факт, что все рекурсивные (а следовательно, в силу тезиса Чёрча все вычислимые) процессы могут быть представлены в λI -исчислении, имеет лишь ограниченную ценность. Представление в λI не всегда максимально эффективно, так как λI -вычисление выражения $0 \cdot 2^{100}$ должно сначала вычислить 2^{100} и лишь потом может умножить результат на 0. В λK -исчислении

¹⁾ В нескольких случаях (например, [1973], с. 159, 165) Скотт выражал несогласие с этой точкой зрения. Ниже будет показано, что взгляды Скотта и Чёрча можно тем не менее примирить.

0.2^{100} может сразу редуцироваться к 0. Далее, в λK некоторая программа (например, KI) может успешно обрабатывать другой кусок программы (например, Ω), даже если этот последний не будет иметь значения, если его выполнять. Поэтому довод (2) работает скорее в пользу полного λK -исчисления.

Что касается довода (3), то мы знаем, что теория λK непротиворечива. Чёрч, вероятно, имел в виду следующее. Если мы считаем все термы, не имеющие н.ф., незначимыми, то их естественно отождествить. Это непротиворечиво в λI -исчислении (см. теорему 16.1.13), но не в λK -исчислении.

2.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T} = \{M = N \mid M, N \in \Lambda_K \text{ и не имеют н.ф.}\}$. Тогда $\neg \text{Con}(\mathcal{T})$.

Доказательство. Пусть $M \equiv \lambda x.x K \Omega$, $N \equiv \lambda x.x S \Omega$. Тогда $M = N \in \mathcal{T}$. Следовательно, $\mathcal{T} \vdash K = MK = NK = S$. Так как $K \neq S$ в силу примера 2.1.33, мы получаем, что $\neg \text{Con}(\mathcal{T})$. $\square$

Однако мы приведем ниже доводы в пользу того, что не все термы без н.ф. следует считать бессмысленными в λK -исчислении.

По всем этим соображениям мы называем λK -исчисление просто λ -исчислением. Поэтому, если не оговорено противное, λ -исчисление обозначает λK -исчисление. Несмотря на это, Λ_I — интересное подмножество множества Λ_K . Кроме того, имеются приложения λI -исчисления к полной теории. См., например, лемму 17.2.16.

Представление рекурсивных функций

В λ -исчислении некоторая последовательность $\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \dots$, состоящая из термов в н.ф., избрана в качестве представления натуральных чисел. Эти λ -термы называются цифрами. Понятие определимости функций будет сформулировано для такой цифровой системы.

2.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда говорят, что f λ -определима, если для некоторого $F \in \Lambda^0$ и для всех $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ имеет место $F \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner = \ulcorner f(n_1, \dots, n_k) \urcorner$.

2.2.6. ФАКТ (Клини [1936]). Пусть $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда f определима $\Leftrightarrow f$ рекурсивна.

Доказательство. См. теорему 6.3.13 для λK и теорему 9.2.16 для λI . $\square$

Чтобы представлять частичную функцию λ -термом, мы должны выбрать представление для «не определено». Вопрос вот в чем. Если F должен λ -определять частичную функцию f , то каково должно быть $F \ulcorner n \urcorner$, когда $f(n)$ не определено? Клас-

сическое решение, предложенное Чёрчем [1941], с. 29, состоит в том, чтобы представлять неопределенное значение термами, не имеющими н.ф.

2.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\varphi: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ — частичная функция. Тогда говорят, что φ λ -определима, если для некоторого терма $F \in \Lambda^0$ и для всех $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ имеем

$$F \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner = \ulcorner m \urcorner, \text{ если } \varphi(\vec{n}) = m;$$

$$F \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner \text{ не имеет н.ф., если } \varphi(\vec{n}) \text{ не определено.}$$

Это определение имеет, по крайней мере для λK -исчисления, следующие недостатки.

(а) Наличие н.ф. не сохраняется при переводах λ и CL друг в друга. Поэтому не удастся доказать сразу, что если некоторый класс частичных функций можно определить с помощью λ -термов, то это можно сделать и с помощью CL -термов. В действительности у Карри и др. [1972], с. 236, подстрочное примечание 37, даны отдельные обоснования определимости частично рекурсивных функций в λ и в CL .

(б) Понятие нормальной формы слишком синтаксическое. Неясно, например, осмысленно ли оно для элементов моделей λ -исчисления. В действительности Уодсворт доказал следующее утверждение.

2.2.8. ФАКТ. Пусть D_∞ — одна из теоретико-решеточных моделей Скотта для λ -исчисления. Тогда ни для какого подмножества $\mathcal{N} \subseteq D_\infty$ не имеет место утверждение

$$M \text{ имеет н.ф.} \Leftrightarrow [M]^{D_\infty} \in \mathcal{N},$$

где $[M]$ обозначает значение M в D_∞ .

Доказательство. См. упр. 19.4.2. $\square$

Недостаток, упомянутый в п. (а), является в действительности еще одним аспектом синтаксичности понятия н.ф.

(с) Нам хочется отождествить термы с синтаксическим значением «не определено». Это, однако, невозможно в силу предложения 2.2.4.

(д) Частичные λ -определимые функции замкнуты относительно композиции, но не интенциональным образом. Иными словами, терм, λ -определяющий композицию, не обязательно является композицией термов, λ -определяющих компоненты.

2.2.9. ПРИМЕР. Пусть $f(n) = 0$ и $g(n)$ не определено для всех n . Тогда $f(g(n))$ не определено для всех n . Пусть теперь f и g λ -определены термами $F \equiv K \ulcorner 0 \urcorner$ и $G \equiv K \Omega$ соответственно. Но тогда терм

$$F \circ G \equiv \lambda x.F(Gx) = \lambda x.\ulcorner 0 \urcorner$$

не определяет функцию $f \circ g$.

Все упомянутые трудности возникают из-за отождествления не определено $\Leftrightarrow$ нет н. ф.

В следующем подпункте предлагается иной подход.

Разрешимые и неразрешимые термы

Мы введем один собственный подкласс класса термов, не имеющих н. ф. Элементы этого класса называются неразрешимыми термами. Предлагается, чтобы именно эти термы представляли понятие «не определено». Это было сделано впервые Барендрегтом [1971]. Уодсворт [1971] независимо ввел класс термов, «не имеющих головной нормальной формы». Он привел доводы в пользу того, что элементы этого класса должны рассматриваться как бессмысленные термы λK -исчисления.

2.2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda^0$. Тогда M называется разрешимым, если

$$\exists n \exists N_1 \dots N_n \in \Lambda (MN_1 \dots N_n = I).$$

(ii) Произвольный терм $M \in \Lambda$ называется разрешимым, если разрешимо замыкание M , т. е. терм $\lambda \vec{x}. M$, где $\vec{x} = FV(M)$.

(iii) Терм $M \in \Lambda$ неразрешим, если он не является разрешимым.

В этом определении можно всюду взять $\Lambda = \Lambda_K$ или $\Lambda = \Lambda_I$. В первом случае говорят о K -разрешимости, во втором — об I -разрешимости. Если из контекста ясно, какое из этих двух понятий имеется в виду, то говорят просто о разрешимости. Обычно это будет K -разрешимость.

ПРИМЕРЫ. (i) S I -разрешим: $SHI = I$.

(ii) $xI\Omega$ K -разрешим: $(\lambda x.xI\Omega)K = I$.

(iii) Ω I - и K -неразрешим.

2.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) M является головной нормальной формой (г. н. ф.), если M имеет вид $\lambda \vec{x}. y\vec{N}$.

(ii) M имеет г. н. ф., если $\exists N (M = N$ и N является г. н. ф.).

ПРИМЕР. Терм $\lambda x.xI\Omega$ не имеет нормальной формы, но имеет г. н. ф. $\lambda x.x\Omega$. Нетрудно показать, что каждая н. ф. есть г. н. ф.

2.2.12. ФАКТ. (i) (Уодсворт) В λK -исчислении

M неразрешим $\Leftrightarrow M$ не имеет головной нормальной формы.

(ii) (Барендрегт) В λI -исчислении

M неразрешим $\Leftrightarrow M$ не имеет нормальной формы.

Доказательство. (i) следует из теоремы 8.3.14; (ii) вытекает из следствия 9.4.21. $\square$

Ниже для λ -термов предлагается следующее отождествление: «не определено» (или «бессмысленно») $\Leftrightarrow$ неразрешимо.

Вместе с фактом 2.2.12 это примиряет позиции Чёрча и Скотта. Чёрч имел в виду λI -исчисление, следовательно,

бессмысленно $\Leftrightarrow$ неразрешимо $\Leftrightarrow$ нет н. ф.

Скотт, с другой стороны, рассматривал λK -исчисление, следовательно,

бессмысленно $\Leftrightarrow$ неразрешимо $\Leftrightarrow$ нет г. н. ф. $\Leftrightarrow$ нет н. ф.

Оказывается возможным λ -определить частично рекурсивные функции, когда неопределенность представляется неразрешимостью. Это позволяет избежать упомянутых выше трудностей, возникающих, когда используются ненормализуемые термы (определение 2.2.7).

(a) (Не)разрешимость сохраняется при стандартных переводах λ и CL друг в друга, см. предложение 8.3.22. Это понятие не меняется и после того, как к теории добавляется экстенциональность, см. предложение 15.1.7.

(b) Понятие «(не)разрешимость» — не синтаксическое. Оно относится к аппликативному поведению терма и потому осмыслено также и в моделях λ -исчисления.

Действительно, образами неразрешимых термов в моделях Скотта D_∞ и графической модели P_ω являются соответственно элементы $\perp$ и $\emptyset$. Далее, разрешимость — полезный инструмент анализа структуры моделей D_∞ и P_ω , см. главу 19.

(c) И в λI -, и в λK -исчислении можно непротиворечиво отождествить все неразрешимые термы, см. § 16.1.

(d) λ -определяющий терм для композиции можно найти равномерно по λ -определяющим термам сомножителей (с помощью некоторой обобщенной композиции).

Поэтому доказательство λ -определимости частично рекурсивных функций может быть построено таким образом, что определение μ -рекурсивной частичной функции преобразуется в λ -терм, определяющий эту функцию. Этот интенциональный аспект был бы утрачен, если бы частично рекурсивная функция f выражалась сначала в нормальной форме Клини

$$f(\vec{n}) = U(\mu m T(e, \vec{n}, m)) \text{ для некоторого } e,$$

а затем терм, определяющий f , строился с помощью термов, определяющих U и T .

Крайзель [1971], с. 177, 178, подчеркивал в связи с так называемым «сверхтезисом», что тезис Чёрча выражает меньше, чем мы знаем. Когда мы говорим, что все частично рекурсивные функции λ -определимы, мы говорим только о результатах вычисления, о графиках. Мы подразумеваем однако, что λ -термы

соответствуют нашим процедурам определения этих функций. Таким образом, для μ -рекурсивных и λ -определимых функций эквивалентность доказана не только в смысле тезиса Чёрча, но и в смысле свёрхтезиса.

В общем случае свидетельством в пользу свёрхтезиса Чёрча служат доказательства эквивалентности между различными формализациями понятия эффективной вычислимости. См. Роджерс [1967], с. 37, основной результат III.

Это обсуждение дает веские аргументы в пользу отождествления неразрешимых термов с неопределенными. Завершающий аргумент — следующее свойство генеричности.

2.2.13. Факт. Пусть M неразрешим, а N — н. ф. Тогда

$$C[M] = N \Rightarrow \forall X (C[X] = N).$$

Доказательство. См. предложение 14.3.24. $\square$

Поэтому мы предлагаем принять следующий эвристический принцип.

2.2.14. Неразрешимые термы следует считать представителями понятия неопределенности.

Ввиду факта 2.2.12 (i) отсюда следует предложение Уодсворта [1971] отождествлять в λ -исчислении термы без г. н. ф. с неопределенными термами.

2.3. Обзор части II

Гл.6. Классическое лямбда-исчисление

Здесь рассматриваются λ -термы с точностью до (доказуемости в) λ , а иногда с точностью до $\lambda\eta$.

6.1. Комбинаторы неподвижной точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Терм $Y \in \Lambda^0$ называется комбинатором неподвижной точки, если

$$\forall F (YF = F(YF)).$$

Существование таких термов является следствием теоремы 2.1.5 о неподвижной точке. Следующее утверждение получается из комбинаторной полноты и теоремы о неподвижной точке.

ТЕОРЕМА. $\forall M \in \Lambda^0 (\vec{x}, y) \exists F \forall \vec{A} (F\vec{A} = M(\vec{A}, F)).$

6.2. Стандартные комбинаторы

Определяются комбинаторы, представляющие истинностные значения ($T \equiv \lambda xy.x = K$, $F \equiv \lambda xy.y = KI$), спаривающую операцию ($[M, N] \equiv \lambda z.zMN$), цифры ($\ulcorner 0 \urcorner \equiv I$, $\ulcorner n + 1 \urcorner \equiv [F, \ulcorner n \urcorner]$).

Терм $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ будет играть в последующих главах роль стандартной «неопределенности».

6.3. Лямбда-определимость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Скажем, что f λ -определима, если

$$\exists F (\forall n \in \mathbb{N}) (F \ulcorner n \urcorner = \ulcorner f(n) \urcorner).$$

ТЕОРЕМА. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда

$$f \text{ } \lambda\text{-определима} \Leftrightarrow f \text{ рекурсивна.}$$

6.4. Цифровые системы

Определение цифр в § 6.2 было выбрано так, чтобы облегчить доказательство λ -определимости рекурсивных функций. Определяется несколько других цифровых систем, на которых может быть представлен этот класс функций. Сюда входит система Чёрча, в которой $n \equiv \lambda f x.f^n(x)$.

6.5. Еще о неподвижных точках; гёделевские номера

Строятся некоторые новые комбинаторы неподвижной точки.

МНОГОМЕСТНАЯ ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ.

$$\forall F_1 \dots F_n \exists X_1 \dots X_n (X_1 = F_1 \vec{X} \wedge \dots \wedge X_n = F_n \vec{X}).$$

Пусть $\ulcorner X \urcorner$ — цифра, соответствующая гёделевскому номеру выражения X .

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ. $\forall F \exists X (F \ulcorner X \urcorner = X).$

6.6. Результаты о неразрешимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$ замкнуто относительно равенства, если

$$M \in \mathcal{A}, M = N \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ — дизъюнктные непустые множества, замкнутые относительно равенства. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (после перехода к гёделевским номерам) рекурсивно неотделимы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть множество $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$ замкнуто относительно равенства и нетривиально (т. е. отлично от $\emptyset$ и Λ). Тогда $\mathcal{A}$ не рекурсивно.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $\{M \mid M \text{ имеет н. ф.}\}$ рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

СЛЕДСТВИЕ. Теория λ не имеет рекурсивных моделей.

6.7. Отступление: рефлексивные предложения и теорема о рекурсии

И то и другое истолковывается как приложение теоремы о неподвижной точке.

6.8. Упражнения

Гл.7. Теория комбинаторов

7.1. Комбинаторная логика

Комбинаторная логика (**CL**) — это формальная теория с примитивными термами **K**, **S** и аппликацией в качестве примитивной операции (абстракции нет).

Аксиомы теории **CL** — это равенства

$$KPQ = P, \quad SPQR = PR(QR).$$

Устанавливается, что в **CL** можно определить абстрактор λ^* , такой, что имеет место β -конверсия. Отсюда следует, что все замкнутые λ -термы можно определить через **K**, **S** $\in \Lambda$, используя только аппликацию.

7.2. Редукции для **CL**

Доказуемое в **CL** равенство можно породить с помощью понятия редукции, удовлетворяющего теореме Чёрча — Россера.

7.3. Соотношение между **CL** и λ

Применение определимой в **CL** абстракции λ^* дает канонический метод перевода λ -термов в **CL**-термы и обратно. Имеется конечное множество A_β равенств между **CL**-термами, такое, что λ и **CL** + A_β становятся эквивалентными. Аналогичным образом, имеется конечное множество аксиом $A_{\beta\eta}$, такое, что теории

$$\lambda\eta, \lambda + ext, CL + ext, CL + A_{\beta\eta}$$

эквивалентны.

7.4. Упражнения

Гл.8. Классическое лямбда-исчисление (продолжение)

8.1. Базисы и перечисления

Устанавливается, что Λ^0 порождается термами **K**, **S** с использованием аппликации. Множество Λ^0 можно породить даже с помощью одного единственного элемента.

Строится терм $E \in \Lambda^0$, перечисляющий множество Λ^0 , т. е. такой, что

$$(\forall M \in \Lambda^0) (\exists n \in \mathbb{N}) (E \uparrow n \uparrow = M).$$

8.2. Равномерность; бесконечные последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $M_0, M_1, \dots \in \Lambda$ называется *равномерной*, если $(\exists M \in \Lambda) (\forall n \in \mathbb{N}) (M \uparrow n \uparrow = M_n)$. Определяется внутреннее кодирование равномерных бесконечных последовательностей λ -термов.

8.3. Разрешимость; головные нормальные формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Терм $M \in \Lambda^0$ называется *разрешимым*, если $\exists \vec{N} (M\vec{N} = I)$.

(ii) Терм M имеет *головную нормальную форму*, если он конвертируем в терм вида $\lambda \vec{x}. y \vec{N}$.

ТЕОРЕМА. В λK -исчислении

$$M \text{ разрешим} \iff M \text{ имеет г. н. ф.}$$

8.4. Лямбда-определимость частичных функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частичная функция $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *λ -определимой*, если для некоторого терма $F \in \Lambda^0$

$$F \uparrow n \uparrow = \begin{cases} \uparrow \psi(n) \uparrow, & \text{если } \psi(n) \text{ определено,} \\ \text{неразрешимо} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. ψ λ -определима т. и т. т., когда она частично рекурсивна.

8.5. Упражнения

Гл. 9. λI -исчисление

Это — теория ограниченного класса λI -термов с точностью до конвертируемости.

9.1. Общие соображения

ТЕОРЕМА. λK консервативна над λI .

ТЕОРЕМА. Терм $M \in \Lambda_I$ имеет н. ф. т. и т. т., когда каждый подтерм M имеет н. ф.

Несколько понятий, относящихся к Λ_K , переносятся на Λ_I . Например, терм $M \in \Lambda_I^0$ называется *I-разрешимым*, если

$$(\exists \vec{N} \in \Lambda_I) (M\vec{N} = I).$$

9.2. Определимость

Доказывается, что частично рекурсивные функции можно λ -определить также и с помощью λI -термов.

9.3. Комбинаторы

Вводится теория CL_I , соответствующая теории λI в том же смысле, в котором CL соответствует λ .

9.4. Разрешимость

Анализируется понятие I -разрешимости.

ТЕОРЕМА. Терм M I -разрешим $\Leftrightarrow M$ имеет н. ф.

Метод, примененный в этом доказательстве, позволяет показать, что существует λI -терм K^* , который локально действует как K . Точнее,

(+) $K^*MN = M$ для всех M и всех $N \in \mathcal{N}$,

где $\mathcal{N}$ — некоторое данное конечное множество нормальных форм. Построение терма K^* может быть сделано неперидикативным: можно потребовать, чтобы равенство (+) выполнялось для всех термов из множества $\mathcal{N}$, содержащего K^* и некоторые термы, содержащие K^* в качестве подтерма.

9.5. Упражнения

Гл.10. Деревья Бёма

10.1. Основные факты

Для каждого терма $M \in \Lambda$ строится некоторое дерево $BT(M)$ — так называемое *дерево Бёма* (для) терма M . Дерево $BT(M)$ может быть конечным или бесконечным; его можно сравнить с цепной дробью вещественного числа. Существенные черты вычислительного поведения терма M могут быть считаны с $BT(M)$.

Множество всевозможных деревьев (не обязательно являющихся деревьями Бёма для какого-то терма) обозначается через $\mathfrak{B}$.

Даны условия того, чтобы элемент множества $\mathfrak{B}$ был деревом Бёма некоторого $\lambda(I)$ -терма.

10.2. Сравнение деревьев Бёма. Топология деревьев на Λ

На множестве $\mathfrak{B}$ вводят частичный порядок, полагая $A \subseteq B$, если A получается из B вычеркиванием каких-то поддеревьев.

Предложение. $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ — алгебраическое п. ч. у. м.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топология деревьев на Λ — это наименьшая топология, в которой непрерывно отображение $BT: \Lambda \rightarrow \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ имеет топологию Скотта. (В § 14.3 будет доказано, что операции λ -исчисления непрерывны в топологии деревьев.)

На $\mathfrak{B}$ определяется отношение, похожее на η -редукцию. С помощью композиции отношений $\subseteq$ и $\rightarrow_\eta$ на $\mathfrak{B}$ получаются некоторые другие отношения. В гл. 19 доказывается, что они соответствуют неравенству в моделях D_∞ и $P\omega$.

10.3. Техника выворачивания по Бёму

Для данного дерева A и его поддерва A' разработан метод изоляции A' от A . В общем случае он оставляет некоторые следы на A' .

10.4. Отделимость термов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F} = M_1, \dots, M_n$ — конечная последовательность замкнутых термов. Тогда $\mathcal{F}$ *отделима*, если $\forall N_1, \dots, N_n \exists F (FM_1 = N_1 \wedge \dots \wedge FM_n = N_n)$.

Дана характеристика отделимости таких последовательностей $\mathcal{F}$.

Следствие. Пусть $\mathcal{F} = M_1, \dots, M_n \in \Lambda^0$ и M_i имеют различные $\beta\eta$ -н. ф. Тогда $\mathcal{F}$ *отделима*.

10.5. Отделимость в λI -исчислении

Символика отделимости переносится на λI -исчисление.

ТЕОРЕМА. Пусть термы, входящие в последовательность $\mathcal{F} = M_1, \dots, M_n$, замкнуты. Тогда $\mathcal{F}$ *отделима* в λI -исчислении в том и только том случае, когда $M_1, \dots, M_n$ имеют различные $\beta\eta$ -н. ф.

10.6. Упражнения

Этим завершается обзор части II.

2.4. Упражнения

2.4.1. Показать, что следующие термы имеют н. ф.:

- (i) $(\lambda y. yyy) (\lambda ab. a) I (SS)$;
- (ii) $(\lambda yz. zy) ((\lambda x. xxx) (\lambda x. xxx)) (\lambda w. I)$;
- (iii) $SSSSSS$;
- (iv)* $S(SS)(SS)(SS)SS$,

2.4.2. Показать, что

(i) $I \neq K$;

(ii) $I \neq S$;

(iii) $xy \neq xx$.

2.4.3. Построить замкнутые термы $M_0, M_1, \dots$, такие, что $M_i \neq M_j$ для всех $i \neq j$.

2.4.4. Показать, что аппликация не ассоциативна, точнее $x(yz) \neq (xy)z$.

2.4.5. (К. Е. Шаап). Пусть $X \equiv SI$. Показать, что $XXXX = X(X(XX))$.

Имеет ли место $X^n X = XX \sim^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$?

2.4.6. Показать, что $\neg \exists F \forall MN (F(MN) = M)$. [Указание. Показать, что $F(xy) \neq x$.]

2.4.7. Показать, что $\exists M \forall N (MN = MM)$. [Указание. Применить теорему о неподвижной точке.]

2.4.8. Пусть $M \in \Lambda$, $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ и $\vec{N} = N_1, \dots, N_n$. Если некоторые из переменных x входят в $FV(\vec{N})$, то $M[\vec{x} := \vec{N}]$ (одновременная подстановка) определяется следующим образом:

$$y[\vec{x} := \vec{N}] = N_i, \quad \text{если } y = x_i \in \{\vec{x}\},$$

$$y[\vec{x} := \vec{N}] = y, \quad \text{если } y \notin \{\vec{x}\},$$

$$(M_1 M_2)[-] = M_1[-] M_2[-],$$

$$(\lambda y. M_1)[-] = \lambda y. M_1[-].$$

Показать, что предложение 2.1.22 и следствие 2.1.24 остаются справедливыми.

2.4.9. Показать, что $(\lambda y. (\lambda x. M))N = \lambda x. ((\lambda y. M)N)$.

2.4.10. (i) Построить терм $M \in \Lambda^0$, такой, что $M = MS$.

(ii) Построить терм M , такой, что $MISS = MS$. [Указание. Использовать теорему о неподвижной точке.]

2.4.11. Построить $F \in \Lambda$, такой, что $FI = x$ и $FK = y$. [Указание. Использовать доказательство из упражнения 2.4.2 (i).]

2.4.12 (Якопини). Пусть $\omega_2 = \lambda x. xxx$ и $\Omega_3 = \omega_3 \omega_3$. Показать, что

(i) $I \neq \omega_3$.

(ii) $I \neq \Omega_3$.

2.4.13. Показать, что для всех термов M , начинающихся с λ , имеет место равенство $\lambda x. Mx = M$.

2.4.14. Пусть $M = \lambda x. x(\lambda y. yu)(\lambda y. yu)$. Показать, что M I -разрешим.

Глава 3

Редукция

В определяющем равенстве для λ -абстракции имеется определенная асимметрия. Утверждение

$$(\lambda x. x^2 + 1)3 = 10$$

можно интерпретировать как «10 — результат вычисления выражения $(\lambda x. x^2 + 1)3$ », но не наоборот (т. е. при таком чтении нельзя переставить правую и левую части равенства). Мы будем выражать этот вычислительный аспект записью

$$(\lambda x. x^2 + 1)3 \rightarrow 10,$$

которая читается следующим образом: « $(\lambda x. x^2 + 1)3$ редуцируется (или сводится) к 10».

В дополнение к своему концептуальному аспекту, редукция полезна и при анализе конвертируемости. Теорема Чёрча — Россера утверждает, что если два терма взаимно конвертируемы, то они оба редуцируются к одному и тому же терму. Во многих случаях неконвертируемость двух термов удается установить, показав, что они не редуцируются к одному и тому же терму.

3.1. Понятия редукции

Отношение конвертируемости на множестве Λ , введенное в § 2.1, — не единственное отношение равенства, которое можно анализировать с помощью понятия редукции. Поэтому мы введем это понятие в общей постановке.

3.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Бинарное отношение R на множестве Λ называется *совместимым* (с операциями λ -исчисления), если

$$(M, M') \in R \Rightarrow (ZM, ZM') \in R, (MZ, M'Z) \in R$$

$$\text{и } (\lambda x. M, \lambda x. M') \in R$$

для всех $M, M', Z \in \Lambda$.

(ii) Отношение равенства (или конгруэнтности) на Λ — это совместимое отношение эквивалентности.

(iii) Отношение редукции на Λ — это совместимое рефлексивное и транзитивное отношение.

Отметим, что отношение $R \subset \Lambda^2$ совместимо т. и т. т., когда

$$(M, M') \in R \Rightarrow (C[M], C[M']) \in R$$

для всех $M, M' \in \Lambda$ и всех контекстов $C[]$ с одной дырой.

3.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Понятие редукции на Λ — это просто бинарное отношение R на Λ .

(ii) Если R_1, R_2 — понятия редукции, то $R_1 R_2$ означает $R_1 \cup R_2$.

Многие важные примеры понятий редукции заданы графиками частично рекурсивных функций на Λ . Это, например, верно для классического понятия редукции β .

3.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\beta = \{((\lambda x.M) N, M[x := N]) \mid M, N \in \Lambda\}$.

3.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $>—$ — бинарное отношение на множестве X , то *рефлексивное замыкание* отношения $>—$ (обозначаемое через $>—=$) — это наименьшее рефлексивное отношение, содержащее R . *Транзитивное замыкание* (обозначаемое через $>—^*$) и *совместимое замыкание* (для него не вводится обозначения) определяются аналогично.

3.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть R — понятие редукции на Λ .

(i) R порождает бинарные отношения

$\rightarrow_R$ — одношаговая R -редукция,

$\twoheadrightarrow_R$ — R -редукция,

$=_R$ — R -равенство (называемое также R -конвертируемостью),

индуктивно определяемые следующим образом. $\rightarrow_R$ — это совместимое замыкание R :

- (1) $(M, N) \in R \Rightarrow M \rightarrow_R N$,
- (2) $M \rightarrow_R N \Rightarrow ZM \rightarrow_R ZN$,
- (3) $M \rightarrow_R N \Rightarrow MZ \rightarrow_R NZ$,
- (4) $M \rightarrow_R N \Rightarrow \lambda x.M \rightarrow_R \lambda x.N$.

$\twoheadrightarrow_R$ — рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\rightarrow_R$:

- (1) $M \rightarrow_R N \Rightarrow M \twoheadrightarrow_R N$,
- (2) $M \twoheadrightarrow_R M$,
- (3) $M \twoheadrightarrow_R N, N \twoheadrightarrow_R L \Rightarrow M \twoheadrightarrow_R L$.

$=_R$ — отношение эквивалентности, порожденное отношением $\twoheadrightarrow_R$:

- (1) $M \twoheadrightarrow_R N \Rightarrow M =_R N$,
- (2) $M =_R N \Rightarrow N =_R M$,
- (3) $M =_R N, N =_R L \Rightarrow M =_R L$,

(ii) Чтение введенных обозначений.

$M \twoheadrightarrow_R N$: терм M R -редуцируется к терму N (или N есть R -редукт терма M);

$M \rightarrow_R N$: терм M R -редуцируется к терму N за один шаг;

$M =_R N$: M R -редуцируется к N или M R -конвертируем к N .

Отношения $\rightarrow_R, \twoheadrightarrow_R$ и $=_R$ вводятся индуктивно, поэтому и их свойства можно доказывать индуктивно.

3.1.6. ЛЕММА. Все отношения $\rightarrow_R, \twoheadrightarrow_R$ и $=_R$ совместимы. Поэтому $\twoheadrightarrow_R$ — отношение редукции, а $=_R$ — отношение равенства.

Доказательство. Утверждение, касающееся отношения $\rightarrow_R$, непосредственно очевидно. Утверждение об отношениях $\twoheadrightarrow_R$ и $=_R$ получается индукцией по порождению этих отношений. Такого рода доказательства встречаются часто. Обычно мы будем опускать подробности, но на этот раз явно выпишем доказательство для отношения $\twoheadrightarrow_R$.

Случай 1. $M \twoheadrightarrow_R N$ получается из $M \rightarrow_R N$. Тогда в силу результата, уже установленного для $\rightarrow_R$, мы имеем $C[M] \rightarrow_R C[N]$ и, следовательно, $C[M] \twoheadrightarrow_R C[N]$.

Случай 2. $M \twoheadrightarrow_R N$ получается из $M \equiv N$. Тогда $C[M] \twoheadrightarrow_R C[N]$ имеет место тривиальным образом.

Случай 3. $M \twoheadrightarrow_R N$ — непосредственное следствие соотношений $M \twoheadrightarrow_R L$ и $L \twoheadrightarrow_R N$. По предположению индукции имеем $C[M] \twoheadrightarrow_R C[L]$ и $C[L] \twoheadrightarrow_R C[N]$. Поэтому $C[M] \twoheadrightarrow_R C[N]$. $\square$

3.1.7. Замечания. (i) Из совместимости отношения $\twoheadrightarrow_R$ получается (индукцией по построению терма M), что

$$N \twoheadrightarrow_R N' \Rightarrow M[x := N] \twoheadrightarrow_R M[x := N'].$$

Для отношения $\rightarrow_R$ это в общем случае не имеет места, так как N, N' могут быть подставлены вместо нескольких вхождений x в M .

(ii) Понятие совместимого отношения можно непосредственно обобщить на любое множество X , на котором заданы некоторые операции. Тогда можно говорить о равенстве и отношениях редукции. В частности, это будет сделано, когда нужно будет определить отношения редукции и равенства на комбинаторных термах или некоторых обобщенных λ -термах (таких, как помеченные λ -термы).

(iii) Понятия редукции будут обозначаться жирными буквами, например β, η, Ω . Производные от них отношения будут изображаться с помощью соответствующих светлых букв, например $\rightarrow_\beta, \twoheadrightarrow_\beta$ и т. д.

ПРИМЕР. $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)(z) \rightarrow_\beta (\lambda y.y)(\lambda y.y)z \twoheadrightarrow_\beta (\lambda y.y)z \rightarrow_\beta z$.

Следовательно,

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \rightarrow_{\beta} z,$$

а если нас интересует только равенство, мы ослабляем это до

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z =_{\beta} z.$$

В оставшейся части этого пункта R обозначает произвольное понятие редукции на Λ .

Понятия редукции часто вводят с помощью следующей конструкции: «Определим R следующими правилами свертывания

$R: M \rightarrow N$ при условии, что ...».

Это означает, что $R = \{(M, N) \mid \dots\}$. Например, β -редукция вводится следующим правилом свертывания:

$$\beta: (\lambda x.M)N \rightarrow M[x := N].$$

3.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) R -редекс — это терм M , такой, что $(M, N) \in R$ для некоторого терма N . В этом случае терм N называется R -сверткой терма M .

(ii) Терм M называется R -нормальной формой (R -н. ф.), если M не содержит R -редексов (в качестве подтермов).

(iii) Терм N называется R -н. ф. терма M , если N есть R -н. ф. и $M =_R N$. В этом случае говорят, что M имеет н. ф. N .

Процесс перехода от редекса к его свертке называется сворачиванием. Вместо выражения « M есть R -н. ф.» часто говорят « M находится в R -н. ф.», представляя себе машину, достигшую своего окончательного состояния.

ПРИМЕР. $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$ есть β -редекс. Поэтому $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z$ не находится в β -н. ф. Однако этот терм имеет β -н. ф., а именно терм z .

3.1.9. ЛЕММА

$$M \rightarrow_R N \Leftrightarrow M \equiv C[P], N \equiv C[Q] \text{ и } (P, Q) \in R$$

для некоторых $P, Q \in \Lambda$ и контекста $C[]$ с одной дырой.

Доказательство получается из определения $\rightarrow_R$. $\square$

3.1.10. СЛЕДСТВИЕ. Пусть M есть R -н. ф. Тогда

(i) ни для какого N не имеет места $M \rightarrow_R N$;

(ii) $M \rightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N$.

Доказательство. (i) получается непосредственно из предыдущей леммы и определения R -н. ф.

(ii) получается из (i), так как отношение $\rightarrow_R$ — рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\rightarrow$. $\square$

В общем случае из $\forall N [M \rightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N]$ не следует, что M находится в R -н. ф. Достаточно взять $R = \beta$ и $M \equiv \Omega$.

3.1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $>$ — бинарное отношение на множестве Λ . Тогда говорят, что $>$ обладает свойством ромба (и пишут $> \models \Diamond$), если

$$\forall M, M_1, M_2 [M > M_1 \wedge M > M_2 \Rightarrow \exists M_3 [M_1 > M_3 \wedge M_2 > M_3]],$$

см. рис. 3.1.

(ii) Говорят, что понятие редукции R обладает свойством Чёрча — Россера (CR), если $\rightarrow_R$ обладает свойством ромба.

3.1.12. ТЕОРЕМА. Если R обладает свойством CR, то

$$M =_R N \Rightarrow \exists Z [M \rightarrow_R Z \wedge N \rightarrow_R Z].$$

Доказательство. Применим индукцию по определению отношения $=_R$. Если $M =_R N$ непосредственно получается из $M \rightarrow_R N$, то берем $Z \equiv N$. Если $M =_R N$ непосредственно получается из $N =_R M$, то Z можно найти по предположению индукции. Если $M =_R N$ непосредственно получается из $M =_R L$,

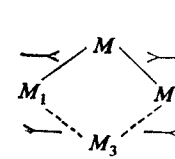


Рис. 3.1

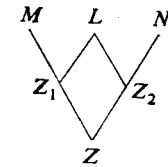


Рис. 3.2

$L =_R N$, то Z находится по предположению индукции и допущению, что $\rightarrow_R$ обладает свойством ромба; см. рис. 3.2. $\square$

3.1.13. СЛЕДСТВИЕ. Пусть R обладает свойством CR. Тогда

(i) если N есть R -н. ф. терма M , то $M \rightarrow_R N$;

(ii) терм M может иметь не более одной R -н. ф.

Доказательство. (i) Пусть $M =_R N$ и N есть R -н. ф. По теореме 3.1.12 имеем $M \rightarrow_R Z$ и $N \rightarrow_R Z$ для некоторого Z . Но так как N есть R -н. ф., то $Z \equiv N$ в силу следствия 3.1.10 (ii). Поэтому $M \rightarrow_R N$.

(ii) Допустим, что N_1, N_2 — две R -н. ф. терма M . Тогда $N_1 =_R N_2 (= M)$. По теореме 3.1.12 имеем $N_1 \rightarrow_R Z, N_2 \rightarrow_R Z$ для некоторого Z . Но тогда следствие 3.1.10 (ii) дает $N_1 \equiv Z \equiv N_2$. $\square$

В следующем пункте будет показано, что β обладает свойством CR.

Отметим, что соотношение

$$N \rightarrow_R N' \Rightarrow M[x := N] \rightarrow_R M[x := N']$$

имеет место для любого R , а соотношение

$$M \twoheadrightarrow_R M' \Rightarrow M[x := N] \twoheadrightarrow_R M'[x := N]$$

имеет место не всегда.

Поэтому полезно вводимое ниже понятие.

3.1.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бинарное отношение R на множестве Λ называется *подстановочным*, если для любых $M, N, L \in \Lambda$ и любой переменной x имеет место

$$(M, N) \in R \Rightarrow (M[x := L], N[x := L]) \in R.$$

3.1.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если отношение R подстановочно, то подстановочны и отношения $\rightarrow_R, \twoheadrightarrow_R$ и $=_R$.

Доказательство. Применяем индукцию по определению отношений $\rightarrow_R, \twoheadrightarrow_R, =_R$. $\square$

3.1.16. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Отношение β подстановочно.

Доказательство. Пусть $(M, N) \in \beta$. Тогда $M \equiv (\lambda y. P) Q$ и $N \equiv P[y := Q]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} M[x := L] &\equiv (\lambda y. (P[x := L]))(Q[x := L]), \\ N[x := L] &\equiv P[y := Q][x := L] \equiv \\ &\equiv P[x := L][y := Q[x := L]] \end{aligned}$$

по лемме о подстановке 2.1.16 и соглашению о переменных 2.1.13. Отсюда следует, что $(M[x := L], N[x := L]) \in \beta$. $\square$

3.1.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть Δ — вхождение подтерма в M , т. е. $M \equiv C[\Delta]$. Мы пишем

$$M \xrightarrow{\Delta}_R N,$$

если Δ есть R -редекс со сверткой Δ' и $N \equiv C[\Delta']$.

(ii) R -редукция (или R -редукционная цепочка) — это конечная или бесконечная последовательность вида

$$M_0 \xrightarrow{\Delta_0}_R M_1 \xrightarrow{\Delta_1}_R M_2 \xrightarrow{\Delta_2}_R \dots$$

3.1.18. СОГЛАШЕНИЯ. (i) $\sigma, \tau, \dots$ обозначают редукции.

(ii) Редукция σ из определения 3.1.17 (ii) *начинается* с M_0 . Если в σ имеется последний член M_n , то σ *оканчивается* термом M_n . В этом случае говорят также, что σ — *редукционная цепочка из M_0 в M_n* (или редукция терма M_0 к M_n). Если $n = 0$ то σ называется *пустой редукцией* и обозначается через $\emptyset$: $M_0 \xrightarrow{\emptyset}_R M_0$. Если $n \neq 0$, то говорят, что σ — *собственная редукция*, и пишут $(\sigma): M_0 \xrightarrow{\neq \emptyset}_R M_n$.

(iii) Иногда в записи редукции не указывают $\Delta_0, \Delta_1, \dots$

(iv) Мы часто пишем $\sigma: M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots$, чтобы указать, что σ есть цепочка $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots$

(v) Если $\sigma: M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ и $\tau: M_n \rightarrow \dots \rightarrow M_m$, то

$$\sigma \vdash \tau: M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow \dots \rightarrow M_m.$$

(vi) Если Δ — вхождение в терм M R -редекса, имеющего свертку Δ' , то через (Δ) обозначается одношаговая редукция $M \xrightarrow{\Delta}_R N$. Иными словами,

$$(\Delta): C[\Delta] \xrightarrow{\Delta}_R C[\Delta'].$$

(vii) Если σ есть R -редукция, то $\|\sigma\|$ обозначает ее *длину*, т. е. количество $\rightarrow_R$ -шагов в ней. Заметим, что $\|\sigma\| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

3.1.19. ПРИМЕРЫ. (i) Пусть Δ есть R -редекс со сверткой Δ' , и пусть $M \equiv (\lambda x. xx)\Delta$. Тогда имеем

$$M \xrightarrow{\Delta}_R (\lambda x. xx)\Delta', \quad M \xrightarrow{M}_\beta \Delta\Delta.$$

(ii) Пусть $\omega_3 = \lambda x. xxx$. Тогда следующая цепочка является бесконечной β -редукцией:

$$\omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3}_\beta \omega_3 \omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3}_\beta \omega_3 \omega_3 \omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3}_\beta \dots$$

(iii) В примерах (i) и (ii) мы можем восстановить по M и N терм Δ , используемый в редукции $M \xrightarrow{\Delta}_R N$. Следующий пример, принадлежащий Леви, показывает, что это не всегда имеет место.

$$l(lx) \xrightarrow{l x}_\beta l x, \quad l(lx) \xrightarrow{l(lx)}_\beta l x.$$

Для любого $M \in \Lambda$ можно изобразить все R -редукты терма M связанными дугами, представляющими $\rightarrow_R$. Эти объекты называются «псевдодиграфами» у Харари [1969] и «направленными мультиграфами» у Боллобаша [1979]. Мы будем называть их просто графами.

3.1.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. R -(редукционный) *граф* терма M (обозначаемый через $G_R(M)$) — это множество

$$\{N \in |M \twoheadrightarrow_R N\},$$

направленное отношением $\rightarrow_R$: если несколько различных редексов порождают отношение $M_0 \rightarrow_R M_1$, то столько же дуг связывают M_0 с M_1 в $G_R(M)$.

Наконец, понятие разрешимости релятивизируется к понятию редукции R .

3.1.27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Терм $M \in \Lambda^0$ называется R -разрешимым, если $(\exists \vec{P} \in \Lambda) (M\vec{P} =_R I)$.

(ii) Терм $M \in \Lambda$ называется R -разрешимым, если R -разрешим некоторый замкнутый подстановочный частный случай терма M .

3.2. Бета-редукция

В этом пункте будет более подробно изучено понятие редукции β . Это понятие весьма полезно, так как, с одной стороны,

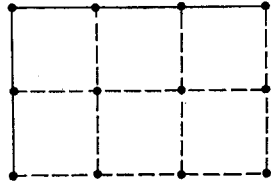


Рис. 3.4.

оно характеризует доказуемость в λ , а с другой — обладает свойством Чёрча — Россера.

3.2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $M =_\beta N \Leftrightarrow \lambda \vdash M = N$.

Доказательство. ($\Leftarrow$). Применяем индукцию по длине доказательства равенства $M = N$.

($\Rightarrow$). Доказываем индукцией по определениям упоминаемых ниже отношений, что

$$M \rightarrow_\beta N \Rightarrow \lambda \vdash M = N, \quad M \rightarrow_\beta N \Rightarrow \lambda \vdash M = N, \\ M =_\beta N \Rightarrow \lambda \vdash M = N. \quad \square$$

Теперь мы дадим доказательство того, что β обладает свойством CR. Это довольно короткое доказательство принадлежит У. Тейту и П. Мартин-Лефу. Несколько менее короткое, но более наглядное доказательство будет дано в § 11.1. Пункты 11.2 и 14.2 содержат другие концептуально важные доказательства теоремы Чёрча — Россера.

3.2.2. ЛЕММА. Пусть $>$ — бинарное отношение на некотором множестве, и пусть $>^*$ — его транзитивное замыкание. Тогда

$$> \models \Diamond \Rightarrow >^* \models \Diamond.$$

Доказательство использует простой обход диаграмм, подсказываемый рис. 3.4.

Теперь будет определено бинарное отношение $\rightarrow$ на множестве Λ , такое, что (1) отношение $\rightarrow$ обладает свойством ромба и (2) транзитивное замыкание отношения $\rightarrow$ есть $\rightarrow_\beta$. После этого из леммы 3.2.2 будет следовать, что $\rightarrow_\beta$ обладает свойством ромба, т. е. β обладает свойством CR.

3.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дадим следующее индуктивное определение отношения $\rightarrow$ на множестве Λ :

$$M \rightarrow M;$$

$$M \rightarrow M' \Rightarrow \lambda x. M \rightarrow \lambda x. M';$$

$$M \rightarrow M', N \rightarrow N' \Rightarrow MN \rightarrow M'N';$$

$$M \rightarrow M', N \rightarrow N' \Rightarrow (\lambda x. M) N \rightarrow M'[x := N'].$$

3.2.4. ЛЕММА. Если $M \rightarrow M'$ и $N \rightarrow N'$, то

$$M[x := N] \rightarrow M'[x := N'].$$

Доказательство. Применяем индукцию по определению отношения $M \rightarrow M'$.

Случай 1. $M \rightarrow M'$ имеет вид $M \rightarrow M$. Тогда мы должны показать, что $M[x := N] \rightarrow M[x := N']$. Это получается индукцией по построению терма M , согласно следующей таблице.

M	лев. часть	прав. часть	комментарий
x	N	N'	в порядке
y	y	y	в порядке
PQ	$P [] Q []$	$P [] Q []$	применить предположение индукции
$\lambda y. P$	$\lambda y. P []$	$\lambda y. P []$	то же

Случай 2. $M \rightarrow M'$ имеет вид $\lambda y. P \rightarrow \lambda y. P'$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow P'$. По предположению индукции имеем $P[x := N] \rightarrow P'[x := N']$. Но тогда $\lambda y. P[x := N] \rightarrow \lambda y. P'[x := N']$, т. е. $M[x := N] \rightarrow M'[x := N']$.

Случай 3. $M \rightarrow_1 M'$ имеет вид $PQ \rightarrow_1 P'Q'$ и является непосредственным следствием соотношений $P \rightarrow_1 P'$, $Q \rightarrow_1 Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv P[x := N]Q[x := N] \rightarrow_1 \\ &\rightarrow_1 P'[x := N']Q'[x := N'] \text{ (по предположению индукции)} \equiv \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

Случай 4. $M \rightarrow_1 M'$ есть $(\lambda y.P)Q \rightarrow_1 P'[y := Q']$ и является непосредственным следствием соотношений $P \rightarrow_1 P'$, $Q \rightarrow_1 Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y.P[x := N])(Q[x := N]) \rightarrow_1 \\ &\rightarrow_1 P'[x := N'] [y := Q'[x := N']] \text{ (по предположению индукции)} \equiv \\ &\equiv P'[y := Q'] [x := N'] \text{ (по лемме о подстановке 2.1.16)} \equiv \\ &\equiv M'[x := N']. \quad \square \end{aligned}$$

3.2.5. ЛЕММА. (i) $\lambda x.M \rightarrow_1 N$ влечет $N \equiv \lambda x.M'$, где $M \rightarrow_1 M'$.

(ii) $MN \rightarrow_1 L$ влечет либо

$$L \equiv M'N', \text{ где } M \rightarrow_1 M', N \rightarrow_1 N',$$

либо

$$M \equiv \lambda x.P, L \equiv P'[x := N'], \text{ где } P \rightarrow_1 P', N \rightarrow_1 N'.$$

Доказательство получается нетрудной индукцией по определению отношения $\rightarrow_1$. $\square$

3.2.6. ЛЕММА. $\rightarrow_1$ обладает свойством ромба.

Доказательство. Применяя индукцию по определению отношения $M \rightarrow_1 M_1$, мы покажем, что из соотношения $M \rightarrow_1 M_2$ следует существование M_3 , такого, что $M \rightarrow_1 M_3$, $M_2 \rightarrow_1 M_3$.

Случай 1. $M \rightarrow_1 M_1$ получено из $M \equiv M_1$. Тогда можно взять $M_3 \equiv M_2$.

Случай 2. $M \rightarrow_1 M_1$ имеет вид $(\lambda x.P)Q \rightarrow_1 P'[x := Q']$ и является непосредственным следствием соотношений $P \rightarrow_1 P'$ и $Q \rightarrow_1 Q'$. В силу леммы 3.2.5 возможны только следующие два подслучая.

Подслучай 2.1. $M_2 \equiv (\lambda x.P'')Q''$, где $P \rightarrow_1 P''$, $Q \rightarrow_1 Q''$. По предположению индукции найдутся термы P''' , Q''' , такие, что имеют место $P' \rightarrow_1 P'''$, $P'' \rightarrow_1 P'''$ и аналогичные соотношения для Q' , Q'' , Q''' . Тогда в силу леммы 3.2.4 можно взять $M_3 \equiv P'''[x := Q''']$.

Подслучай 2.2. $M_2 \equiv P''[x := Q'']$, где $P \rightarrow_1 P''$, $Q \rightarrow_1 Q''$. Тогда, используя предположение индукции, можно снова взять $M_3 \equiv P'''[x := Q''']$.

Случай 3. $M \rightarrow_1 M_1$ имеет вид $PQ \rightarrow_1 P'Q'$ и является непосредственным следствием соотношений $P \rightarrow_1 P'$, $Q \rightarrow_1 Q'$. Снова возможны два подслучая.

Подслучай 3.1. $M_2 \equiv P''Q''$, где $P \rightarrow_1 P''$, $Q \rightarrow_1 Q''$. Тогда, используя очевидным образом индукционное предположение, можно взять $M_3 \equiv P'''Q'''$.

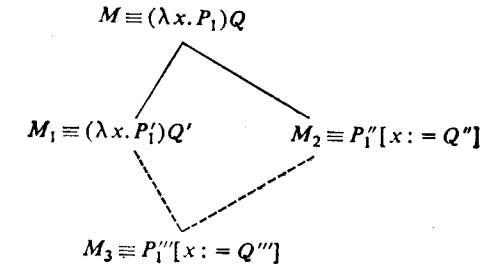


Рис. 3.5.

Подслучай 3.2. $P \equiv (\lambda x.P_1)$, $M_2 \equiv P_1'[x := Q'']$ и $P_1 \rightarrow_1 P_1'$, $Q \rightarrow_1 Q''$. По лемме 3.2.5 находим $P' \equiv \lambda x.P_1'$, такой, что $P_1 \rightarrow_1 P_1'$. Используя очевидным образом предположение индукции, можно взять $M_3 \equiv P_1'''[x := Q''']$; см. рис. 3.5.

Случай 4. $M \rightarrow_1 M_1$ имеет вид $\lambda x.P \rightarrow_1 \lambda x.P'$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow_1 P'$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x.P''$. По предположению индукции можно взять $M_3 \equiv \lambda x.P'''$. $\square$

3.2.7. ЛЕММА. Отношение $\rightarrow_\beta$ есть транзитивное замыкание отношения $\rightarrow_1$.

Доказательство. Заметим, что (для отношений, рассматриваемых как множества пар)

$$\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_1^* \subseteq \rightarrow_\beta.$$

Так как отношение $\rightarrow_\beta$ есть транзитивное замыкание отношения $\rightarrow_\beta$, то тем более это так для $\rightarrow_\beta$ и $\rightarrow_\beta$.

Следующее утверждение — знаменитая теорема Чёрча — Россера.

3.2.8. ТЕОРЕМА (Чёрч и Россер).

- (i) β обладает свойством CR.
- (ii) $M =_\beta N \Rightarrow \exists Z [M \rightarrow_\beta Z \wedge N \rightarrow_\beta Z]$.

Доказательство. (i) следует из лемм 3.2.2, 3.2.6 и 3.2.7.

(ii) следует из (i) и теоремы 3.1.12. $\square$

3.2.9. СЛЕДСТВИЕ. (i) Если терм N является β -н. ф. терма M , то $M \rightarrow_\beta N$.

(ii) Терм M может иметь не более одной β -н. ф.

Доказательство. Применяем следствие 3.1.13. $\square$

Мы получаем, например, что терм $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ не имеет β -н. ф. Действительно, единственная возможная редукционная цепочка имеет вид

$$\Omega \rightarrow_\beta \Omega \rightarrow_\beta \dots,$$

и так как Ω не находится в β -н. ф., он не имеет ее вообще.

Мы часто будем применять следствие 3.2.9 аналогичным образом.

3.2.10. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $M, N \in \beta\text{-NF}$ — различные термы. Тогда $M \neq_\beta N$.

(ii) Теория λ непротиворечива.

Доказательство. (i) Если $M =_\beta N$, то M имеет две различные н. ф. — сам M и N .

(ii) В силу предложения 3.2.1 мы имеем $\lambda \not\vdash M = N$ для M, N , удовлетворяющих условию из (i). $\square$

3.2.11. СОГЛАШЕНИЕ. Понятие редукции β будет использоваться на протяжении всей книги. Поэтому для упрощения записи мы часто будем опускать индекс β . Иными словами, вместо

$$\rightarrow_\beta, \rightarrow_\beta, =_\beta, G_\beta(M), \beta\text{-NF}, \beta\text{-}\infty(M) \text{ и } \beta\text{-разрешимо}$$

мы будем писать

$$\rightarrow, \rightarrow, =, G(M), \text{NF}, \infty(M) \text{ и разрешимо.}$$

В этих обозначениях мы имеем

$$\lambda \vdash M = N \Leftrightarrow M = N,$$

что корректно, так как нам вообще хотелось бы не писать префикс $\lambda \vdash$. Новое понятие разрешимости совпадает со старым в силу предложения 3.2.1.

Однако запись $\in_\beta$ не будет заменена на $\in$ по очевидным причинам.

3.3. η -редукция

Другое важное понятие редукции таково.

3.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) η : $\lambda x.Mx \rightarrow M$ при условии, что $x \notin \text{FV}(M)$, иными словами,

$$\eta = \{(\lambda x.Mx, M) \mid x \notin \text{FV}(M)\}.$$

(ii) $\beta\eta = \beta \cup \eta$.

Смысл введения $\beta\eta$ -редукции заключается в том, что она аксиоматизирует доказуемое равенство в экстенциональном λ -исчислении и обладает свойством CR.

3.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow \lambda\eta \vdash M = N \Leftrightarrow \lambda + \text{ext} \vdash M = N$.

Доказательство. По теореме 2.1.29 достаточно доказать лишь первую эквивалентность.

($\Leftarrow$) Применяем индукцию по длине доказательства.

($\Rightarrow$) Очевидно, что $M \rightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow \lambda\eta \vdash M = N$. Теперь нужный результат следует из того, что $=_{\beta\eta}$ — это отношение равенства, порожаемое отношением $\rightarrow_{\beta\eta}$, а доказуемость в $\lambda\eta$ есть отношение равенства. $\square$

3.3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Отношение η подстановочно.

Доказательство. Очевидно, что $(\lambda x.Mx, M) \in \eta \Rightarrow (\lambda x.M'x, M') \in \eta$, где $M' \equiv M[y := N]$, так как по соглашению о переменных $x \notin \text{FV}(N)$. $\square$

Чтобы показать, что $\beta\eta$ обладает свойством CR, мы применим метод Хиндли [1964] и Розена [1973].

3.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $>_1$ и $>_2$ — два бинарных отношения на множестве X . Тогда говорят, что $>_1$ и $>_2$ коммутируют, если

$$(\forall x, x_1, x_2 \in X)[x >_1 x_1 \wedge x >_2 x_2 \Rightarrow (\exists x_3 \in X)[x_1 >_2 x_3 \wedge x_2 >_1 x_3]],$$

см. рис. 3.6.

Заметим, что соотношение $> \vdash \Diamond$ имеет место т. и т. т., когда $>$ коммутирует само с собой.

3.3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (лемма Хиндли — Розена). (i) Пусть $\succ_1$ и $\succ_2$ — два бинарных отношения на множестве X . Допустим, что выполнены следующие условия:

- (1) $\succ_1 \models \Diamond$, $\succ_2 \models \Diamond$,
- (2) $\succ_1$ коммутирует с $\succ_2$.

Тогда $(\succ_1 \cup \succ_2)^* \models \Diamond$.

(ii) Пусть R_1, R_2 — два понятия редукции. Допустим, что

- (1) R_1, R_2 обладают свойством CR;
- (2) $\rightarrow_{R_1}$ коммутирует с $\rightarrow_{R_2}$.

Тогда $R_1 R_2$ обладает свойством CR.

Доказательство получается путем обхода диаграммы, подсказываемого рис. 3.7.

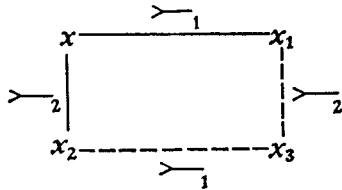


Рис. 3.6

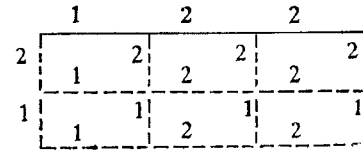
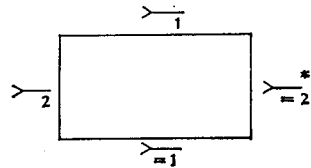


Рис. 3.7

(ii) следует из (i), так как $\rightarrow_{R_1 R_2} = (\rightarrow_{R_1} \cup \rightarrow_{R_2})^*$. $\square$

3.3.6. ЛЕММА. Пусть $\succ_1, \succ_2$ — два бинарных отношения на множестве X . Допустим, что



Тогда $\succ_1$ и $\succ_2$ коммутируют.

Доказательство получается простым обходом диаграммы. $\square$

3.3.7. ЛЕММА. Отношение η обладает свойством CR.

Доказательство. Отметим, что $\rightarrow_\eta = (\rightarrow_\eta)^*$. Поэтому в силу леммы 3.2.2 достаточно будет доказать, что $\rightarrow_\eta$ обла-

дает свойством ромба. В этом доказательстве $\rightarrow$ будет обозначать $\rightarrow_\eta$.

С помощью индукции по определению отношения $M \rightarrow M_1$ мы покажем сейчас, что из $M \rightarrow M_2$ следует существование общего $\rightarrow$ -редукта M_3 термов M_1 и M_2 .

Если $M_1 \equiv M$, то можно взять $M_3 \equiv M_2$. Если $M_2 \equiv M$ или $M_2 \equiv M_1$, то можно взять $M_3 \equiv M_1$. Поэтому мы будем предполагать, что $M_1 \not\equiv M$, $M_2 \not\equiv M$, $M_2 \not\equiv M_1$.

Случай 1. $M \rightarrow M_1$ имеет вид $\lambda x.Px \rightarrow P$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x.P'x$, где $P \rightarrow P'$. Берем $M_3 \equiv P'$.

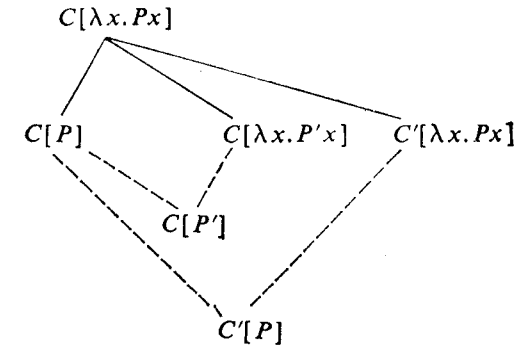


Рис. 3.8

Случай 2. $M \rightarrow M_1$ есть $ZP \rightarrow ZP'$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow P'$.

Подслучай 2.1. $M_2 \equiv Z'P$ и $Z \rightarrow Z'$. Берем $M_3 \equiv Z'P'$.

Подслучай 2.2. $M_2 \equiv ZP''$ и $P \rightarrow P''$. По предположению индукции найдется P''' , такой, что $P' \rightarrow P'''$, $P'' \rightarrow P'''$. Теперь берем $M_3 \equiv ZP'''$.

Случай 3. $M \rightarrow M_1$ есть $PZ \rightarrow P'Z$. Этот случай рассматривается так же, как случай 2.

Случай 4. $M \rightarrow M_1$ есть $\lambda x.P \rightarrow \lambda x.P'$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow P'$.

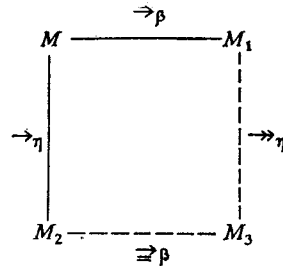
Подслучай 4.1. $M_2 \equiv \lambda x.P''$ и $P \rightarrow P''$. Берем $M_3 \equiv \lambda x.P'''$, где P''' находится по предположению индукции.

Подслучай 4.2. $P \equiv P_0x$, $M_2 \equiv P_0$. Тогда $P' \equiv PP'_0x$, и мы можем взять $M_3 \equiv P'_0$. $\square$

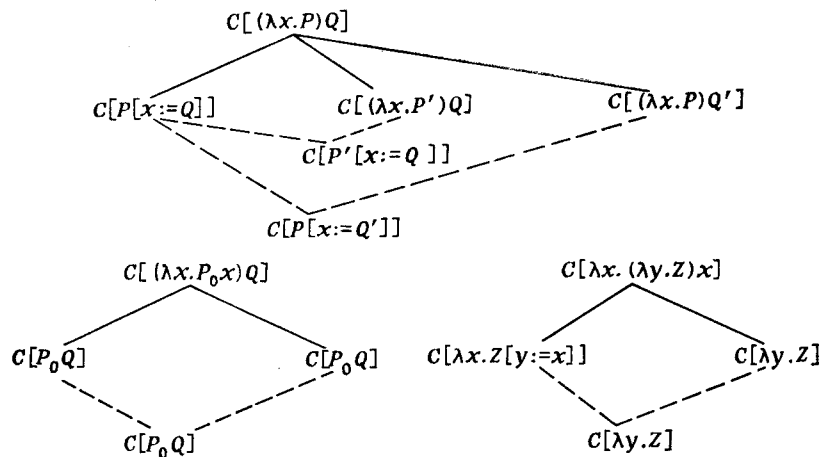
Другое доказательство. Все, написанное выше, прекрасно, но что происходит в действительности, можно увидеть на рис. 3.8.

3.3.8. ЛЕММА. $\rightarrow_\beta$ коммутирует с $\rightarrow_\eta$.

Доказательство. В силу леммы 3.3.6 достаточно показать следующее:



И снова происходящее в действительности можно увидеть на следующих трех рисунках.



Следующее утверждение было впервые установлено в книге Карри и Фейса [1958] с помощью более сложного доказательства.

3.3.9. ТЕОРЕМА (свойство Чёрча — Россера для $\beta\eta$ -редукции).

(i) Понятие редукции $\beta\eta$ обладает свойством CR.

(ii) $M =_{\beta\eta} M \Rightarrow \exists Z [M \rightarrow_{\beta\eta} Z \wedge N \rightarrow_{\beta\eta} Z]$.

Доказательство. (i) следует из лемм 3.3.7, 3.3.8 и предложения 3.3.5.

(ii) получается из следствия 3.1.12. $\square$

3.3.10. Следствие. (i) Если терм N есть $\beta\eta$ -н. ф. терма M , то $M \rightarrow_{\beta\eta} N$.

(ii) Терм M имеет не более одной $\beta\eta$ -н. ф.

Доказательство получается с помощью следствия 3.1.13. $\square$

Следствие 15.1.5, которое будет доказано позже, утверждает, что

M имеет β -н. ф. $\Leftrightarrow M$ имеет $\beta\eta$ -н. ф.

3.3.11. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $M, N \in \beta\eta\text{-NF}$ — различные термы. Тогда $M \neq_{\beta\eta} N$.

(ii) Теория $\lambda + \text{ext}$ непротиворечива.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.10. $\square$

Напомним, что в силу следствия 10.4.3 для двух различных $M, N \in \beta\eta\text{-NF}$ мы имеем даже $M \# N$.

Следующее утверждение настолько очевидно, что зачастую его даже не формулируют явно: в процессе $\beta\eta$ -редукции не создаются свободные переменные.

3.3.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $M \rightarrow_{\beta\eta} N$. Тогда

$x \in \text{FV}(N) \Rightarrow x \in \text{FV}(M)$.

Доказательство. Применяем индукцию по определению отношения $\rightarrow_{\beta\eta}$. $\square$

3.4. Обзор части III

В главах 11, 12 и 13 рассматриваются главным образом β -редукция и λ -термы. В главе 14 изучается редукция на множестве так называемых помеченных λ -термов. Результаты применяются как к самой β -редукции, так и к анализу нескольких λ -моделей в части V. В главе 15 с целью анализа λ -теорий, отличных от λ , изучаются другие понятия редукции.

Гл. 11. Фундаментальные теоремы

11.1. Теорема Чёрча — Россера

Хотя теорема Чёрча — Россера уже была доказана в § 3.2, здесь будет дано более прозрачное доказательство. Построенный для этого аппарат используется в оставшейся части главы.

11.2. Конечность разверток

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M — терм, а $\mathcal{F}$ — некоторое множество редексов в M . Развертка терма M (относительно множества $\mathcal{F}$) — это редукция, начинающаяся с M , в которой сворачиваются только редексы из $\mathcal{F}$ и их «остатки».

ТЕОРЕМА. Для M и $\mathcal{F}$ с указанными свойствами все развертки M конечны. Все максимальные развертки терма M оканчиваются одним и тем же термом.

С использованием этой теоремы дается новое доказательство теоремы Чёрча — Россера. В действительности доказательства из § 3.2 и § 11.1 — частные случаи этого нового доказательства.

11.3. Теорема о консервативности для λ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. I -редекс — это терм $(\lambda x.M)N$, такой, что $x \in FV(M)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $M \xrightarrow{\Delta} N$, где Δ есть I -редекс. Тогда $\infty(M) \Rightarrow \infty(N)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если λ -терм имеет н. ф., то и каждый его под-терм имеет н. ф.

11.4. Стандартизация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Редукция $\sigma: M \rightarrow N$ называется *стандартной*, если сворачивания делаются слева направо, т. е. редекс никогда не сворачивается, если он — остаток редекса, расположенного левее некоторого уже свернутого редекса. Например, редукция

$$I((\lambda y.yu)a) \rightarrow I(aa) \rightarrow aa$$

не является стандартной, в то время как редукция

$$I((\lambda y.yu)a) \rightarrow (\lambda y.yu)a \rightarrow aa$$

стандартна.

ТЕОРЕМА. Если $M \rightarrow N$, то имеется стандартная редукция M к N .

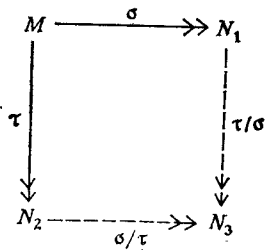
Дано короткое доказательство этой теоремы с использованием § 11.2.

11.5. Упражнения

Гл. 12. Сильно эквивалентные редукции

12.1. Редукционные диаграммы

ТЕОРЕМА. Имеется канонический способ получения по данным $\sigma: M \rightarrow N_1$, $\tau: M \rightarrow N_2$ редукций τ/σ и σ/τ , таких, что

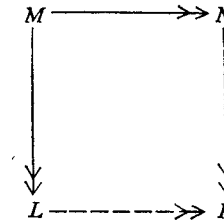


Редукция τ/σ (соответственно σ/τ) называется *проекцией редукции τ вдоль σ* (соответственно σ вдоль τ).

12.2. Сильные варианты CR и FD!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\sigma: M \rightarrow N$, $\tau: M \rightarrow N$. Говорят, что σ *сильно эквивалентна* τ (и пишут $\sigma \cong \tau$), если $\sigma/\tau = \tau/\sigma = \emptyset$ (пустая редукция).

ТЕОРЕМА.



и обе редукции M к P сильно эквивалентны.

ТЕОРЕМА. Пусть дан терм M и зафиксировано множество $\mathcal{F}$ его подредексов. Тогда все максимальные развертки терма M сильно эквивалентны.

12.3. Сильный вариант теоремы стандартизации

ТЕОРЕМА. Пусть $\sigma: M \rightarrow N$. Тогда имеется единственная стандартная редукция $\sigma_s \cong \sigma$.

12.4. Упражнения

Гл. 13. Редукционные стратегии

13.1. Классификация стратегий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) *Редукционная стратегия* — это отображение $F: \Lambda \rightarrow \Lambda$, такое, что $M \rightarrow F(M)$ для любого $M \in \Lambda$.

(ii) F — *одношаговая стратегия*, если $M \rightarrow F(M)$ для любого M , не находящегося в н. ф.

(iii) Стратегия F *рекурсивна* (соответственно *эффективна*), если F рекурсивна (соответственно легко вычисляется) после подходящего кодирования термов натуральными числами.

13.2. Эффективные нормализующие и кофинальные стратегии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегия F называется *нормализующей*, если M имеет н. ф. $\Rightarrow \exists n (F^n(M)$ имеет н. ф.).

ТЕОРЕМА. Существует эффективная нормализующая одношаговая стратегия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегия F кофинальна, если для всех $M, N \in \Lambda$ имеет место

$$M \rightarrow N \Rightarrow \exists n (N \rightarrow F^n(M)),$$

т. е. $\{F^n(M) \mid n \in \mathbb{N}\}$ кофинально в $(G(M), \rightarrow)$.

ТЕОРЕМА. Существует эффективная кофинальная стратегия.

13.3. Рекурсивная CR-стратегия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. CR-стратегия — это стратегия F , для которой

$$M = N \Rightarrow \exists n, m (F^n(M) \equiv F^m(N)).$$

ТЕОРЕМА. Существует эффективная CR-стратегия.

13.4. Эффективная зацикливающая стратегия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегия F называется зацикливающей, если

$$\infty(M) \Rightarrow M \xrightarrow{\neq \phi} F(M) \xrightarrow{\neq \phi} F^2(M) \xrightarrow{\neq \phi} \dots$$

— бесконечная редукционная цепочка.

ТЕОРЕМА. Существует эффективная зацикливающая стратегия.

13.5. Оптимальные стратегии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть F, G — нормализующие стратегии. Говорят, что G t -лучше, чем F , если

$$(\forall M \in {}_{\beta}NF) (\mu n[F^n(M) \text{ есть н. ф.}] \geq \mu n[G^n(M) \text{ есть н. ф.}]),$$

но обратная импликация не имеет места.

(ii) Одношаговая стратегия F t -оптимальна, если она нормализующая и невозможна одношаговая стратегия G , t -лучшая, чем F .

ТЕОРЕМА. Невозможна рекурсивная t -оптимальная одношаговая стратегия.

13.6. Упражнения

Гл.14. Помеченная редукция

14.1. Сильная нормализация

Множество помеченных λ -термов получается добавлением константы $\perp$ и меток $\in \mathbb{N}$ к определению обычных λ -термов. Помеченная редукция отличается от обычной λ -редукции толь-

ко тем, что метки убывают, а редексы с меткой 0 сворачиваются следующим образом: $(\lambda x.M)^0 N \rightarrow (M[x := \perp])^0$.

ТЕОРЕМА. Все помеченные редукции, начинающиеся термом M , заканчиваются.

14.2. Приложения

Использование результатов § 14.1 позволяет дать очень короткие доказательства свойств CR, FD и теорем о стандартизации. Доказывается и несколько новых результатов.

14.3. Непрерывность

Следующая теорема имеет несколько приложений. Она доказывается с использованием теоремы о сильной нормализации для помеченной редукции.

ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ. Определим $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$, полагая $f(M) = C[M]$ для некоторого контекста $C[\]$. Тогда f непрерывна в топологии деревьев на Λ .

14.4. Последовательность вычислений и устойчивость

Доказывается, что вычисления в λ -исчислении — существенно последовательные. Отсюда вытекает такой результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $P \approx Q$ т. и т. т., когда $BT(P) = BT(Q)$. Пусть $\exists M_{ij}, P_i \forall M$

$$FMM_{12}M_{13} \approx P_1, \quad FM_{21}MM_{23} \approx P_2, \quad FM_{31}M_{32}M \approx P_3.$$

Тогда

$$\forall M_1M_2M_3 (FM_1M_2M_3 \approx P_1 (\approx P_2 \approx P_3)).$$

Если предположить еще, что P_1, P_2, P_3 находятся в н. ф., то $\approx$ можно заменить на $=_{\beta}$.

14.5. Упражнения

Гл.15. Другие понятия редукции

15.1. $\beta\eta$ -редукция

ТЕОРЕМА. $M \in \Lambda$ имеет β -н. ф. т. и т. т., когда M имеет $\beta\eta$ -н. ф.

СЛЕДСТВИЕ. Терм M β -разрешим т. и т. т., когда M $\beta\eta$ -разрешим.

ТЕОРЕМА (об откладывании η -редукции). Если $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, то для некоторого терма L

$$M \rightarrow_{\beta} L \rightarrow_{\eta} N.$$

15.2. $\beta\eta\Omega$ -редукция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ω -редукция определяется правилом свертывания

$$\Omega: M \rightarrow \Omega, \text{ если } M \text{ неразрешим и } \neq \Omega.$$

ТЕОРЕМА. $\beta\eta\Omega$ -редукция обладает свойством CR.

ТЕОРЕМА. $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} N \Rightarrow \exists L_1, L_2 (M \twoheadrightarrow_{\beta} L_1 \twoheadrightarrow_{\Omega} L_2 \twoheadrightarrow_{\eta} N)$.

ТЕОРЕМА. Пусть σ — кофинальная редукционная цепочка в графе $G_{\beta}(M)$, такая, что бесконечно много термов из σ находятся в $\eta\Omega$ -н. ф. Тогда σ кофинальна в $G_{\beta\eta\Omega}(M)$.

15.3. Дельта-редукция

Дельта-редукция — это не одно конкретное понятие редукции, а целый их набор. Они вводятся для того, чтобы стали определены некоторые внешние функции ϕ на множестве Λ . Это достигается добавлением новой константы δ и постулированием соотношения

$$\delta(M) \rightarrow \phi(M).$$

Вот типичный пример.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Добавим в определение множества Λ константу δ_c . Определим на расширенном множестве термов следующее понятие редукции:

$$\delta_c: \begin{cases} \delta_c MM \rightarrow T, \text{ если } M \text{ замкнут и находится в } \beta\delta_c\text{-н. ф.}, \\ \delta_c MN \rightarrow F, \text{ если } M, N \text{ замкнуты, различны и находятся в } \beta\delta_c\text{-н. ф.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. $\beta\delta_c$ обладает свойством CR.

Некоторые понятия дельта-редукции неожиданным образом не обладают свойством CR.

ТЕОРЕМА. Добавим в определение множества Λ константы δ, ϵ . Определим на расширенном множестве термов понятие редукции с помощью дополнительного соотношения

$$\delta: \delta MM \rightarrow \epsilon.$$

Тогда $\beta\delta$ не обладает свойством CR.

15.4. Упражнения

Этим завершается обзор части III.

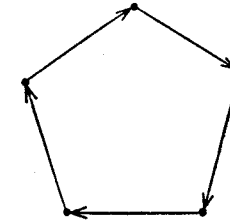
3.5. Упражнения

3.5.1. Нарисовать графы $G(M)$ для следующих термов:

- (i) $M \equiv (\lambda x. \lambda x x) (\lambda x. \lambda x x)$;
- (ii) $M \equiv (\lambda x. \lambda (x x)) (\lambda x. \lambda (x x))$;
- (iii) $M \equiv W I (W I)$, где $W \equiv \lambda x y. x y y$;
- (iv) $M \equiv K I \Omega$;
- (v) $M \equiv \Pi (I I)$.

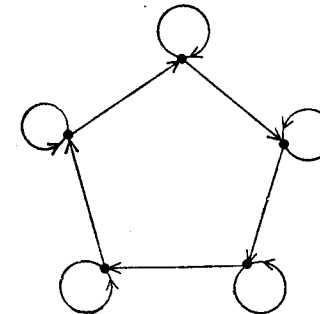
3.5.2. Найти термы, имеющие следующие β -графы:

(i)

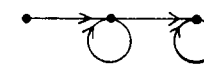
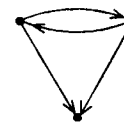


Обобщить на произвольное n .

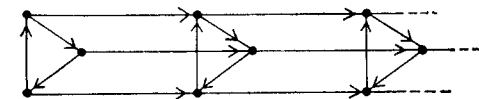
(ii)



(iii)



(iv)



3.5.3. Построить терм M_0 , такой, что

$$M_0 \twoheadrightarrow_{\beta} M_1 \twoheadrightarrow_{\eta} M_2 \twoheadrightarrow_{\beta} M_3 \twoheadrightarrow_{\eta} M_4 \twoheadrightarrow_{\beta} \dots$$

*3.5.4. Пусть $M \equiv (\lambda b x z. z (b b x)) (\lambda b x z. z (b b x)) x$. Построить $G(M)$. Установить, что для каждого n этот граф имеет n -мерный куб в качестве подграфа. [Указание: Систематически вводить сокращения.]

*3.5.5 (Бём). Нарисовать $G(M)$ для следующих графов:

(i) $M \equiv H I H$, где $H \equiv \lambda x y. x (\lambda z. y z y) x$;

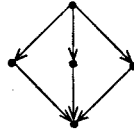
(ii) $M \equiv L L I$, где $L \equiv \lambda x y. x (y y) x$;

(iii) $M \equiv P Q$, где $P \equiv \lambda u. u I u$, $Q \equiv \lambda x y. x y I (x y)$.

*3.5.6. (Виссер). (i) Показать, что имеется (по существу) единственный терм M , для которого $G(M)$ имеет вид



(ii) Показать, что нет терма M , для которого $G(M)$ имел бы вид



[Указание: Рассмотреть относительные положения редексов.]

3.5.7. (i) Показать, что если G_1 и G_2 суть β -графы некоторых термов, то и их декартово произведение является β -графом некоторого терма (определение см., например, у Харари [1969]).

(ii) Если G есть β -граф некоторого терма, то β -графом некоторого терма будет и граф $G \rightarrow K_1$, полученный добавлением одной точки, находящейся ниже любой точки графа G .

3.5.8. Показать, что если $>_1$ и $>_2$ — два коммутирующих бинарных отношения на множестве X , то $>_1$ и $>_2$ коммутируют.

3.5.9. Пусть R — понятие редукции. Показать, что если имеет место R -SN(M) и каждый R -редекс имеет лишь конечное число сверток, то граф $G_R(M)$ конечен.

3.5.10. (Хиндли, Россер, Степлз). (i) Построить пример бинарного отношения $>$ на множестве X , такого, что

(1) $>$ обладает слабым свойством ромба;

(2) $>^*$ не обладает свойством ромба

(ii) Построить отношение, как в п (i), но с дополнительным свойством

(3) множество X конечно.

3.5.11. Будем писать $M \uparrow N$, если $L \rightarrow M$ и $L \rightarrow N$ для некоторого терма L . Доказать, что

(i) $K I K \uparrow K I S$,

(ii) $(\lambda x. a x) b \uparrow (\lambda y. y b) a$,

(iii) $(\lambda x. x c) c \uparrow (\lambda x. x x) c$,

(iv) $(\lambda x. b x) c \uparrow (\lambda x. x) b c$,

(v) $(\lambda x. b x (b x)) c \uparrow (\lambda x. x x) (b c)$,

(vi) $(\lambda x. b x) c \uparrow (\lambda x. x) (b c)$.

*(vii) (Плоткин). $(\lambda x. b x. (b c)) c \not\uparrow (\lambda x. x x) (b c)$.

Получить отсюда, что «перевернутое свойство CR» не имеет места.

3.5.12. (Клоп). Пусть $\mathcal{A} = (X, >_-)$, где $>_-$ есть бинарное отношение. Положим по определению

(1) $x >_- n y$, если $\exists x_1 \dots x_n (x = x_1 >_- x_2 >_- \dots >_- x_n = y)$,

(2) $x >_-^* y$, если $\exists n (x >_- n y)$,

(3) $\mathcal{A} \models \text{WCR}(n, m)$, если

$$\forall x, x_1, x_2 [x >_- n x_1 \wedge x >_- m x_2 \Rightarrow \exists x_3 [x_1 >_-^* x_3 \wedge x_2 >_-^* x_3]].$$

(4) Скажем, что множество $B \subseteq N^2$ замкнуто, если $(n, m) \in B \Rightarrow (m, n) \in B$ и $(n+1, m) \in B \Rightarrow (n, m) \in B$.

(5) $\text{WCR}(\mathcal{A}) = \{(n, m) \mid \mathcal{A} \models \text{WCR}(n, m)\}$.

(i) Показать, что множество $\text{WCR}(\mathcal{A})$ замкнуто и что

$$>_-^* \models \diamond \Leftrightarrow \text{WCR}(\mathcal{A}) = N^2 \Leftrightarrow \text{WCR}(\mathcal{A}) \text{ бесконечно} \Leftrightarrow \forall n ((1, n) \in \text{WCR}(\mathcal{A})).$$

(ii) Пусть $B \subseteq N^2$ — конечное замкнутое множество. Построить пару $\mathcal{A} = (X, >_-)$, такую, что $\text{WCR}(\mathcal{A}) = B$.

3.5.13. Пусть R — понятие редукции, такое, что если N есть R -н.ф. терма M , то $M \rightarrow_R N$. Показать, что любой терм имеет не более одной R -н.ф.

3.5.14. (Д. Иссл, Клоп). Положим по определению

$$\text{SN}_0 = \{M \in \Lambda \mid \text{SN}(M)\},$$

$$\text{SN}_{n+1} = \{M \in \Lambda \mid (\forall \vec{N} \in \text{SN}_n) (M \vec{N} \in \text{SN}_n)\}.$$

Показать, что $\text{SN}_0 \supsetneq \text{SN}_1 = \text{SN}_2 = \dots$.

3.5.15. Пусть R — понятие редукции. Будем писать $x \in_R M$, если

$$(\forall N =_R M) x \in \text{FV}(N).$$

Заметим, что если $x \in_R M$ и $x \notin \text{FV}(N)$, то $M \neq_R N$.

(i) Показать, что если R обладает свойством CR и не создает новых переменных (т. е. $M \rightarrow_R N \Rightarrow \text{FV}(N) \subseteq \text{FV}(M)$), то $x \in_R M$ т. и т.т., когда

$$\forall N [M \rightarrow_R N \Rightarrow x \in \text{FV}(N)]$$

(ii) Пусть $A_x = \lambda p. p p x$, $B_x = A_x A_x$. Показать, что $B_x \neq_{\beta\eta} B_y$ для $x \neq y$.

Глава 4

Теории

4.1. Лямбда-теории

Лямбда-теории — это непротиворечивые расширения λ -исчисления, замкнутые относительно выводимости. Они изучаются и потому, что сами представляют интерес, и ввиду их приложений к обычному λ -исчислению.

Напомним, что (замкнутое) равенство — это формула вида $M = N$ (где $M, N \in \Lambda^0$). Если $\mathcal{T}$ — множество равенств, то теория $\lambda + \mathcal{T}$ получается добавлением равенств из $\mathcal{T}$ в качестве новых аксиом к правилам и аксиомам λ -исчисления.

4.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — множество замкнутых равенств.

(i) Через $\mathcal{T}^+$ обозначается множество замкнутых равенств, доказуемых в теории $\lambda + \mathcal{T}$.

(ii) $\mathcal{T}$ называется λ -теорией, если $\mathcal{T}$ непротиворечиво и $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}$.

В силу следствия 2.1.38 как λ , так и $\lambda\eta$ являются λ -теориями.

4.1.2. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Так как λ содержит правило ξ , любая λ -теория $\mathcal{T}$ замкнута относительно правила ξ и, следовательно, $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash \lambda x.M = \lambda x.N$. Импликация $\Leftarrow$ получается из равенства $(\lambda x.M)x = M$, содержащегося в $\mathcal{T}$.

(ii) В силу (i) принятое в 4.1.1 ограничение замкнутыми равенствами несущественно.

(iii) Очевидно, что $\text{Con}(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \lambda + \mathcal{T} \nvdash \mathbf{T} = \mathbf{F}$. Для λ -исчисления мы имеем $\text{Con}(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \lambda + \mathcal{T} \nvdash \mathbf{I} = \mathbf{S}$; это следует из теоремы Бёма 10.5.31 для λ .

(iv) Каждая λ -теория отождествляется с множеством доказуемых в ней замкнутых равенств. В частности, $\lambda = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \lambda \vdash M = N\}$.

4.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория. Тогда

(i) $\mathcal{T} \vdash M = M' \Rightarrow \mathcal{T} \vdash C[M] = C[M']$,

(ii) $\mathcal{T} \vdash M = M', \mathcal{T} \vdash N = N' \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash M[x := N] = M'[x := N']$.

Доказательство. (i) Применить индукцию по построению $C[\]$.

(ii) Пусть $\mathcal{T} \vdash M = M'$. Тогда в силу (i) имеем $\mathcal{T} \vdash (\lambda x.M)N = (\lambda x.M')N$, откуда

$$\mathcal{T} \vdash M[x := N] = M'[x := N].$$

Если, кроме того, верно $\mathcal{T} \vdash N = N'$, то в силу (i) $\mathcal{T} \vdash M'[x := N] = M'[x := N']$, и доказательство завершено.

4.1.4. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория.

(i) $\mathcal{T} \vdash M = N$ обозначает $\lambda + \mathcal{T} \vdash M = N$. Это записывается также в виде $M =_{\mathcal{T}} N$.

(ii) $\mathcal{T} + M = N$ обозначает $(\mathcal{T} \cup \{M = N\})^+$.

(iii) $\mathcal{T}\eta$ обозначает $(\lambda\eta + \mathcal{T})^+$.

(iv) Если $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_0)^+$, то говорят, что $\mathcal{T}$ аксиоматизировано множеством $\mathcal{T}_0$.

(v) Будем записывать утверждение $(\forall N =_{\mathcal{T}} M)(x \in \text{FV}(N))$ в виде $x \in_{\mathcal{T}} M$; см. упр. 3.5.15.

(vi) $M \in_{\mathcal{T}} \mathcal{X}$ обозначает $(\exists N =_{\mathcal{T}} M)(N \in \mathcal{X})$.

(vii) $1 \equiv \lambda xy.x y$. Это цифра 1 в системе Чёрча.

4.1.5. ЛЕММА. Для любой λ -теории $\mathcal{T}$ имеет место $\mathcal{T}\eta = \mathcal{T} + (\mathbf{I} = \mathbf{I})$.

Доказательство. Очевидно, что $\lambda\eta \vdash \mathbf{I} = \mathbf{I}$, откуда $\mathcal{T}\eta \vdash \mathbf{I} = \mathbf{I}$. Для доказательства обратного включения заметим, что

$$\lambda + (\mathbf{I} = \mathbf{I}) \vdash \lambda y.M y = \mathbf{I} M = \mathbf{I} M = M,$$

если $y \notin \text{FV}(M)$.

Следовательно, $\lambda + (\mathbf{I} = \mathbf{I}) = \lambda\eta$. $\square$

Важная λ -теория получится, если, следуя предложению 2.2.14, мы отождествим все неразрешимые термы.

4.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\mathcal{H}_0 = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ неразрешимы}\}$.

(ii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^+$.

В § 16.1 непротиворечивость систем $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}\eta$ будет доказана с помощью свойства CR для подходящего понятия редукции. В гл. 19 будут даны теоретико-модельные доказательства этих фактов.

Хотя все теории

$$\lambda, \lambda\eta, \mathcal{H}, \mathcal{H}\eta$$

являются λ -теориями, в общем случае импликация

$$\text{Con}(\mathcal{T}) \Rightarrow \text{Con}(\mathcal{T}\eta)$$

не имеет места; см. следствие 15.3.7. Если $\mathcal{T}$ полуосмыслена (это понятие определяется ниже), то импликация все же имеет место; см. следствие 17.1.2

4.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория.

(i) Говорят, что $\mathcal{T}$ *рекурсивно перечислима* (р.п.), если после кодирования равенств натуральными числами $\mathcal{T}$ переходит в рекурсивно перечислимое множество.

(ii) $\mathcal{T}$ *осмысленна*, если $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}$.

(iii) $\mathcal{T}$ *полуосмысленна* (п.о.), если она не содержит равенства между разрешимым и неразрешимым термом.

Очевидно, что λ и $\lambda\eta$ — р.п. теории. Более того, λ и $\lambda\eta$ — п.о. теории. Это будет доказано в § 17.1.

Напомним, что $M \# N$ обозначает $\neg \text{Con}(M = N)$. Выражение $M \#_1 N$ обозначает $\neg \text{Con}(M + M = N)$.

4.1.8. ЛЕММА. (i) Пусть K^∞ — неподвижная точка комбинатора K . Тогда $I \# K^\infty$.

(ii) (Якопини [1975]). Пусть $\omega_3 = \lambda x.xxx$ и $\Omega_3 \equiv \omega_3\omega_3$. Тогда $I \#_1 \Omega_3$.

Доказательство. (i) Заметим сначала, что $K^\infty x = KK^\infty x = K^\infty$. Следовательно,

$$I = K^\infty \vdash M = IM = K^\infty M = K^\infty = K^\infty N = IN = N.$$

(ii) Заметим, что $\Omega_3 \equiv \omega_3\omega_3 = \omega_3\omega_3\omega_3 \equiv \Omega_3\omega_3$. Следовательно,

$$I = \Omega_3 \vdash I = \Omega_3 = \Omega_3\omega_3 = I\omega_3 = \omega_3.$$

Так как I и ω_3 — различные $\beta\eta$ -н. ф., то $I \#_1 \omega_3$ по теореме Бёма для M и теореме 10.5.31. Таким образом, доказательство закончено. $\square$

4.1.9. СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{T}$ осмысленна $\Rightarrow \mathcal{T}$ полуосмысленна.

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{T}$ не является п.о., т. е. для некоторого разрешимого терма M и неразрешимого терма N мы имеем $\mathcal{T} \vdash M = N$. Переходя, если нужно, к замыканиям, мы можем считать, что $M, N \in \Lambda^0$. Следовательно, $M\vec{P} = I$, а $N\vec{P}$ все еще неразрешим для некоторых термов $\vec{P}$. Поэтому

$$\mathcal{H} \vdash N\vec{P} = \square,$$

где $\square$ есть K^∞ или Ω_3 (очевидно, что $\square$ неразрешим). Отсюда следует, что

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T} \vdash I = M\vec{P} = N\vec{P} = \square$$

и потому $\mathcal{T}$ противоречива в силу леммы 4.1.8, что дает противоречие. $\square$

Правила

Правило экстенциональности (*ext*) и правило ξ были введены в гл. 2:

$$\text{ext}: Mx = Nx, \quad x \notin \text{FV}(MN) \Rightarrow M = N.$$

$$\xi: M = N \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N.$$

Следующие правила вводятся для изучения моделей, целиком состоящих из интерпретаций замкнутых термов.

4.1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) ω -правилом называется следующее правило:

$$\omega: (\forall Z \in \Lambda^0) (MZ = NZ) \Rightarrow M = N.$$

(ii) Правило термов — это правило

$$\text{tr}: (\forall Z \in \Lambda^0) (MZ = NZ) \Rightarrow Mx = Nx$$

для произвольной переменной x .

4.1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория.

(i) Говорят, что $\mathcal{T}$ *замкнута относительно ω -правила* (и пишут $\mathcal{T} \vdash \omega$), если

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash MZ = NZ) \Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N.$$

(ii) Аналогично определяется $\mathcal{T} \vdash R$ для других правил R . Отметим, что $\mathcal{T} \vdash \xi$ верно по определению для любой λ -теории $\mathcal{T}$.

(iii) Говорят, что $\mathcal{T}$ *экстенциональна*, если $\mathcal{T} \vdash \text{ext}$.

4.1.12. ЛЕММА. (i) $\mathcal{T} \vdash \omega \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash \text{tr}$ и $\mathcal{T} \vdash \text{ext}$.

(ii) $\mathcal{T} \vdash \text{ext} \Leftrightarrow I = 1 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}\eta$.

Доказательство тривиально. (i) ($\Leftarrow$). Имеем

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash MZ = NZ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash Mx = Nx \text{ (в силу tr, } x \text{ — новая переменная)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N \text{ (в силу ext).}$$

($\Rightarrow$).

$$\text{tr}: (\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash MZ = NZ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N \text{ (в силу } \omega) \Rightarrow \mathcal{T} \vdash Mx = Nx.$$

$$\text{ext}: \mathcal{T} \vdash Mx = Nx \text{ (где } x \text{ — новая переменная)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash MZ = NZ \text{ (для всех } Z \in \Lambda^0 \text{ в силу}$$

$$\text{предложения 4.1.3. (ii))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N \text{ (в силу } \omega).$$

(ii) По лемме 4.1.5 и теореме 2.1.29. $\square$

4.1.13. ОБОЗНАЧЕНИЕ. Для λ -теории $\mathcal{T}$ и правила R обозначим через $\mathcal{T} + R$ или $\mathcal{T}R$ множество

$$\{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \lambda + R + \mathcal{T} \vdash M = N\},$$

понимаемое очевидным образом.

В общем случае $\mathcal{T}R$ не обязано быть λ -теорией: следствие 15.3.7 показывает, что для некоторой λ -теории $\mathcal{T}$ имеет место $\neg \text{Con}(\mathcal{T}\eta)$.

4.1.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть R^0 обозначает правило R , ограниченное замкнутыми термами. Например, ext^0 есть правило

$$Fx = F'x, F, F' \in \Lambda^0 \text{ и } x \notin \text{FV}(FF') \Rightarrow F = F'.$$

4.1.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория. Тогда

- (i) (Хиндли и Лонго [1980]) $\mathcal{T} \vdash \omega^0 \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash \omega$;
- (ii) $\mathcal{T} \vdash \text{tr}^0 \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash \text{tr}$;
- (iii) $\mathcal{T} \vdash \text{ext}^0 \not\Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash \text{ext}$.

Доказательство. (i) Импликация $\Leftarrow$ тривиальна. Докажем $\Rightarrow$. Допустим, что $\mathcal{T} \vdash \omega^0$, и для произвольных $M, N \in \Lambda$ предположим, что

$$(1) \quad (\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash MZ = NZ).$$

$$\begin{aligned} & \text{Пусть } \{\vec{x}\} = \text{FV}(MN). \text{ Тогда } M \equiv M(\vec{x}), N \equiv N(\vec{x}) \text{ и} \\ & (\forall \vec{P} \in \Lambda^0) (\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash M(\vec{P})Z = N(\vec{P})Z) \text{ (в силу (1)) } \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall \vec{P} \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash M(\vec{P}) = N(\vec{P})) \text{ (в силу } \omega^0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall \vec{P} \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash (\lambda \vec{x}. M(\vec{x}))\vec{P} = (\lambda \vec{x}. N(\vec{x}))\vec{P}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathcal{T} \vdash \lambda \vec{x}. M(\vec{x}) = \lambda \vec{x}. N(\vec{x}) \text{ (в силу } \omega^0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N. \end{aligned}$$

(ii) Доказывается аналогично п. (i).

(iii) В упражнении 16.5.2 показано, что $\mathcal{H} \vdash \text{ext}^0$, но $\mathcal{H} \not\vdash \text{ext}$. $\square$

Модели из термов

Хотя модели подробно рассматриваются в гл. 5, полезно ввести уже сейчас так называемые модели из термов. Они состоят из множества (замкнутых) λ -термов, рассматриваемых с точностью до некоторой λ -теории $\mathcal{T}$, и отражают свойства этой теории.

4.1.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Комбинаторная алгебра — это структура

$$\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, k, s \rangle,$$

такая, что $\text{Card}(X) > 1$ и в $\mathfrak{M}$ имеют место равенства $kxy = x$, $sxyz = xz(yz)$.

(ii) Такая структура называется экстенциональной, если $(\forall x(ax = bx)) \Rightarrow a = b$.

4.1.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория.

(i) Модель из открытых термов (или просто модель из термов) для $\mathcal{T}$ — это структура

$$\mathfrak{M}(\mathcal{T}) = \langle \Lambda / \equiv_{\mathcal{T}}, \cdot, [K]_{\mathcal{T}}, [S]_{\mathcal{T}} \rangle,$$

где для $M, N \in \Lambda$ выполняются следующие условия:

$$M \equiv_{\mathcal{T}} N \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash M = N, \quad [M]_{\mathcal{T}} = \{N \in \Lambda \mid M \equiv_{\mathcal{T}} N\},$$

$$\Lambda / \equiv_{\mathcal{T}} = \{[M]_{\mathcal{T}} \mid M \in \Lambda\}, \quad [M]_{\mathcal{T}} \cdot [N]_{\mathcal{T}} = [MN]_{\mathcal{T}}.$$

(ii) Аналогичным образом определяется модель из замкнутых термов

$$\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) = \langle \Lambda^0 / \equiv_{\mathcal{T}}, \cdot, [K]_{\mathcal{T}}, [S]_{\mathcal{T}} \rangle.$$

4.1.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любой λ -теории $\mathcal{T}$ имеют место следующие утверждения:

- (i) $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ и $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ — комбинаторные алгебры.
- (ii) $\mathcal{T} \vdash \text{ext} \Leftrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ экстенциональна.
- (iii) $\mathcal{T} \vdash \omega \Leftrightarrow \mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ экстенциональна.

Доказательство. (i) Замечаем, что $[S]_{\mathcal{T}}, [K]_{\mathcal{T}} \in \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ удовлетворяют аксиомам для s и k . То же верно для $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$.

(ii) $(\Rightarrow)$ Пусть $[F]_{\mathcal{T}}, [F']_{\mathcal{T}} \in \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ и

$$(\forall a \in \mathfrak{M}(\mathcal{T})) ([F]_{\mathcal{T}} a = [F']_{\mathcal{T}} a).$$

В частности, для новой переменной x

$$[F]_{\mathcal{T}} [x]_{\mathcal{T}} = [F']_{\mathcal{T}} [x]_{\mathcal{T}} \Rightarrow [Fx]_{\mathcal{T}} = [F'x]_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} \vdash Fx = F'x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash F = F' \text{ (так как } \mathcal{T} \vdash \text{ext}) \Rightarrow [F]_{\mathcal{T}} = [F']_{\mathcal{T}}.$$

$(\Leftarrow)$. Пусть для некоторой новой переменной x

$$\mathcal{T} \vdash Fx = F'x.$$

Тогда

$$\mathcal{T} \vdash FZ = F'Z \text{ (для всех } Z \in \Lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [F]_{\mathcal{T}} [Z]_{\mathcal{T}} = [F']_{\mathcal{T}} [Z]_{\mathcal{T}} \text{ (для всех } [Z]_{\mathcal{T}} \in \mathfrak{M}(\mathcal{T})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [F]_{\mathcal{T}} = [F']_{\mathcal{T}} \text{ (так как } \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \text{ экстенциональна)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash F = F'.$$

(iii) $(\Rightarrow)$ доказывается так же, как в п. (ii).

$(\Leftarrow)$ Так же как это сделано в п. (ii), можно показать, что $\mathcal{T} \vdash \omega^0$. Но тогда в силу предложения 4.1.15 (i) имеем $\mathcal{T} \vdash \omega$. $\square$

Замечание. В общем случае

$\mathcal{T} \vdash \text{ext} \not\Rightarrow \mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ экстенциональна.

Действительно, в § 17.3 будет доказано, что $\lambda\eta \vdash \text{ext}$, но $\lambda\eta \not\vdash \omega$; ω -правило было введено для изучения этой ситуации.

4.1.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория. Каноническое отображение

$$\varphi_{\mathcal{T}}: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$$

определяется соотношением $\varphi_{\mathcal{T}}(M) = [M]_{\mathcal{T}}$.

(ii) Если $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ суть λ -теории, причем $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, то каноническое отображение

$$\varphi_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}: \mathfrak{M}(\mathcal{T}_1) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T}_2)$$

определяется соотношением $\varphi_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}([M]_{\mathcal{T}_1}) = [M]_{\mathcal{T}_2}$.

(iii) Аналогичным образом определяются канонические отображения

$$\varphi_{\mathcal{T}}^0: \Lambda^0 \rightarrow \mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) \text{ и } \varphi_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}^0: \mathfrak{M}^0(\mathcal{T}_1) \rightarrow \mathfrak{M}^0(\mathcal{T}_2).$$

4.1.20. ЛЕММА. Для каждого из канонических отображений φ, φ^0 имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda^{(0)} & \\ \varphi_{\mathcal{T}_1}^{(0)} \swarrow & & \searrow \varphi_{\mathcal{T}_2}^{(0)} \\ \mathfrak{M}^{(0)}(\mathcal{T}_1) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}^{(0)}} & \mathfrak{M}^{(0)}(\mathcal{T}_2) \end{array}$$

Доказательство тривиально. $\square$

Эти канонические отображения будут использованы для того, чтобы перенести топологии, определенные на $\mathfrak{M}(\lambda)$, в модели из термов.

Лямбда-теории — это в действительности невырожденные отношения конгруэнтности на $\mathfrak{M}(\lambda)$. Следующее замечание показывает, что они ведут себя хуже, чем можно было ожидать.

4.1.21. ЗАМЕЧАНИЕ. Комбинаторные алгебры (включая тривиальную одноэлементную структуру как вырожденный случай) образуют алгебранческое многообразие. Такое многообразие называется *мальцевским*, если для любых двух отношений конгруэнтности $\sim_1, \sim_2$ на структуре рассматриваемого типа имеет место равенство $\sim_1 \cdot \sim_2 = \sim_2 \cdot \sim_1$ (где $\cdot$ обозначает операцию умножения для бинарных отношений). В упр. 16.5.8 показано, что комбинаторные алгебры не образуют мальцевского многообразия.

Полнота теорий

4.1.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эквациональная теория $\mathcal{T}$ называется *полной по Гильберту — Посту* (сокращенно *НР-полной*), если для любого равенства $M = N$ в языке теории $\mathcal{T}$

или $\mathcal{T} \vdash M = N$, или $\mathcal{T} \vdash (M = N)$ противоречива.

Это понятие применимо, в частности, к λ -теориям. НР-полные теории соответствуют максимальным непротиворечивым теориям в теории моделей для логики первого порядка. Отметим, однако, следующее различие. Если $\mathfrak{A}$ — структура первого порядка, то $\text{Th}(\mathfrak{A})$ — максимальная непротиворечивая теория. Но если $\mathfrak{M}$, к примеру, комбинаторная алгебра, то теория

$$\text{Th}(\mathfrak{M}) = \{M = N \mid \mathfrak{M} \models M = N, M, N \in \Lambda^0\}$$

не обязательно НР-полна. Например, $\text{Th}(\mathfrak{M}(\lambda)) = \lambda$, и у этой теории много собственных расширений.

По лемме Цорна любую λ -теорию можно расширить до НР-полной теории. В § 17.2 будет доказано, что $\mathcal{H}$ имеет естественное единственное НР-полное расширение $\mathcal{H}^*$.

4.2. Обзор части IV

Гл. 16. Осмысленные теории

В этой главе рассматриваются λ -теории, отождествляющие все неразрешимые λ -термы.

16.1. Теория $\mathcal{H}$

Непротиворечивость теорий $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}\eta$ устанавливается несколькими способами. Путем релятивизации к λI -исчислению мы получаем непротиворечивость теории

$$\lambda I + \{M = N \mid M, N \in \Lambda_I^0 \text{ не имеют н. ф.}\}.$$

Доказано, что теория $\mathcal{H}$ $\sum_2^0$ -полна.

16.2. Теория $\mathcal{H}^*$

Будет доказано, что $\mathcal{H}$ имеет единственное максимально непротиворечивое расширение $\mathcal{H}^*$. Эта последняя теория Π_2^0 -полна. Кроме того,

$$\mathcal{H}^* \vdash M = N \Leftrightarrow M \simeq_{\eta} N.$$

В λI -исчислении $\mathcal{H}^*$ — это просто $\mathcal{H}\eta$.

16.3. 2* осмысленных теорий

Строится бесконечное множество комбинаторов, независимых над $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что существует континуум осмысленных теорий.

16.4. Теория $\mathcal{B}$

Из теоремы о непрерывности следует непротиворечивость теории $\mathcal{B}$, отождествляющей термы с равными деревьями Бёма.

Приводится следующая общая схема определения λ -теорий. Для данного нетривиального множества $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$, замкнутого относительно равенства, положим

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \forall C [\mid C[M] \in \mathcal{P} \Leftrightarrow C[N] \in \mathcal{P}] \}.$$

Тогда $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ является λ -теорией. Далее, $\mathcal{T}_{\text{sol}} = \mathcal{H}^*$ и $\mathcal{B}\eta \subseteq \mathcal{T}_{\text{NF}} \subseteq \mathcal{H}^*$.

16.5. Упражнения

Гл. 17. Другие лямбда-теории

17.1. Полуосмысленные и р. п. теории

Показано, что полуосмысленные (п.о.) теории ведут себя послушно:

$\mathcal{T}$ — п.о. λ -теория $\Rightarrow \mathcal{T}\eta$ — п.о. λ -теория;

$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ — п.о. λ -теории $\Rightarrow \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ — п.о. λ -теория;

$\mathcal{T}$ п.о. $\Rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ с топологией деревьев не является недискретной.

Для любой р. п. теории $\mathcal{T}$ имеется терм Ω^* , такой, что

$$(\forall M \in \Lambda) \text{Con}(\mathcal{T} + \Omega^* = M).$$

Далее, р. п. теории плотны. Вследствие этого множество вещественных чисел можно вложить в множество λ -теорий, частично упорядоченных отношением $\subseteq$.

С помощью топологии, вводимой на моделях из термов для р. п. теорий, устанавливается, что множество значений любой определимой функции бесконечно или одноэлементно.

17.2. Омега-теории

Показано, что $\mathcal{H}^* \vdash \omega$. Другое доказательство непротиворечивости теории $\lambda\omega$ получается с помощью ординального анализа. В качестве следствия получаем, что

$$\lambda\omega \vdash M = I \Rightarrow \lambda\eta \vdash M = I.$$

17.3. Частичная корректность ω -правила в $\lambda\eta$

Показано, что ω -правило для термов M, N имеет место в $\lambda\eta$ при условии, что M или N не является $\beta\eta$ -универсальным генератором. В $\mathcal{H}\eta$ ω -правило для M, N имеет место, если M или N имеет $\beta\Omega$ -н.ф.

17.4. ω -правило и теория $\mathcal{H}\eta$

ω -правило в общем случае не имеет места в $\lambda\eta$ или $\mathcal{H}\eta$, а правило термов — в λ или $\mathcal{H}$.

Показано, что имеется терм Π , представляющий в $\mathcal{H}\omega$ квантор всеобщности по $\mathbb{N}$:

$$[(\forall n \in \mathbb{N}) (\mathcal{H}\omega \vdash Fn = F'n)] \Leftrightarrow \mathcal{H}\omega \vdash \Pi F = \Pi F'.$$

Приводятся доводы в пользу гипотезы о Π_1^1 -полноте теории $\mathcal{H}\omega$.

17.5. Упражнения

Этим завершается обзор главы IV.

4.3. Упражнения

4.3.1. Показать, что $\lambda x.x \neq \lambda x.xxx$.

4.3.2 (Виссер). Терм $M \in \Lambda^0$ назовем *легким*, если $(\forall N \in \Lambda^0) \text{Con}(M = N)$. (В предложении 15.3.9 показано, что терм Ω легкий.)

В предположении легкости терма M доказать следующие утверждения:

(i) $(\forall N \in \Lambda^0) (MN \text{ легкий})$;

(ii) M неразрешим.

(iii) $(\forall P_0, \dots, P_n \in \Lambda^0) \text{Con}(M\eta 0 = P_0, \dots, M\eta n = P_n)$.

(iv) Для любой последовательности $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ замкнутых λ -термов имеем $\text{Con}(\{M\eta n = P_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. [Указание. Использовать (iii) и рассуждение с применением компактности.]

(v) $\text{Con}(\{M = N \mid M, N \text{ легкие}\})$.

4.3.3. Пусть $(\lambda)_C$ (соответственно $(\lambda)_I$) — классическая (соответственно интуиционистская) теория первого порядка, термами которой служат элементы Λ , атомарными формулами — равенства, а специальными аксиомами — формулы

$$\neg K = S,$$

$$(\lambda x.M) N = M[x := N],$$

$$(\forall x (M = N)) \rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N.$$

(i) Показать, что $(\lambda)_C$ консервативна над λ , т. е.

$$(\lambda)_C \vdash M = N \Rightarrow \lambda \vdash M = N.$$

[Указание. Воспользоваться тем, что $\mathfrak{M}(\lambda)$ — модель теории $(\lambda)_C$.]

(ii) Пусть TR обозначает правило

$$A(Z) \text{ для всех } Z \in \Lambda^0 \Rightarrow \forall x A(x),$$

где A — любая формула первого порядка. Показать, что теория $(\lambda)_C + TR$ консервативна над $\lambda + tr$.

(iii) Пусть AC обозначает следующую схему (аксиому выбора)

$$\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists z \forall x A(x, zx).$$

Показать, что $(\lambda)_C + AC$ противоречива. [У Барендрегта в [1973] показано, что $(\lambda)_I + AC$ непротиворечива и консервативна над λ .]

(iv) Показать, что $(\lambda)_I + AC \vdash \neg \forall x (x = I \vee x \neq I)$.

4.3.4. Показать, что $\neg \exists M \forall N \text{Con}(\mathcal{H} + M = N)$.

Глава 5

Модели

В бестиповом λ -исчислении объекты служат как аргументами, так и функциями, которые применяются к этим аргументам. Поэтому хотелось бы, чтобы семантика для λ -исчисления состояла из области D , такой, что ее пространство функций D^D изоморфно D . По теореме Кантора это невозможно.

В 1969 году Д. Скотт справился с этой проблемой, ограничив D^D до множества функций, непрерывных в некоторой удобной топологии на D . Учитывая введенное Шейнфинкелем отождествление $D^{D \times D}$ с $(D^D)^D$, естественно работать с таким классом топологических пространств, который образует декартово замкнутую категорию (д.з.к). Поэтому Скотт работал в категории *полных решеток* с непрерывными отображениями и построил объект D_∞ , изоморфный $D_\infty^{D_\infty}$, получив, таким образом, экстенсionalную модель λ -исчисления. Позднее обнаружилось, что для построения модели λ -исчисления достаточно иметь в декартово замкнутой категории объект D , такой, что D^D есть ретракт объекта D . Примером этого является графическая модель P_ω .

Интерес представляют и некоторые другие родственные декартово замкнутые категории. Прежде всего у *непрерывных решеток* имеется более естественная связь между решеточной и топологической структурами. Например, для них топология произведения есть произведение топологий сомножителей, что в общем случае не имеет места для полных решеток. Затем имеются *полные частично упорядоченные множества* (п.ч.у.м.), а их больше, чем полных решеток. Модель $\mathbb{T}^\omega$, построенная Плотниковым [1978], есть п.ч.у.м., но не полная решетка. Другая полезная категория, введенная Ершовым [1975], — это категория *f_0 -пространств*. У этих объектов то преимущество, что они не обязаны быть полными; например, множество рекурсивно перечислимых множеств, частично упорядоченных по включению, является f_0 -пространством. Скотт [1982] дает другое интересное описание этой категории.

Прошло некоторое время после того, как Скотт описал свои модели, пока было достигнуто согласие по поводу того, каково должно быть общее понятие модели λ -исчисления. История вопроса изложена у Койманса [1982]. Сейчас рассматривают два

вида моделей — λ -алгебры и λ -модели. λ -алгебры удовлетворяют всем доказуемым равенствам λ -исчисления и образуют эквациональный класс (аксиоматизируемый равенствами $kxy = x$, $sxyz = xz(yz)$ и пятью комбинаторными аксиомами, предложенными Карри). Поэтому λ -алгебры замкнуты относительно перехода к подструктурам и гомоморфным образам. λ -модели удовлетворяют не только всем доказуемым равенствам, но и аксиоме слабой экстенциональности

$$\forall x (M = N) \rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N.$$

Оказывается, что λ -модели можно описать аксиомами первого порядка, но не равенствами. В действительности λ -модели не замкнуты ни относительно перехода к подструктурам, ни относительно перехода к гомоморфным образам.

Наряду с описанием λ -алгебр и λ -моделей на языке первого порядка имеются как синтаксическое, так и категорное описание этих классов. Синтаксическое описание удобно при вычислении интерпретаций термов в модели. Категорное описание λ -алгебр довольно естественно и объединяет эти два понятия модели. Оно состоит из декартова замкнутой категории $\mathcal{C}$ вместе с так называемым рефлексивным объектом $U \in \mathcal{C}$, для которого U^U есть ретракт U , т. е. имеются морфизмы $F: U \rightarrow U^U$ и $G: U^U \rightarrow U$, такие что $F \circ G = \text{id}_{U^U}$. Как показано у Койманса [1982], в этом контексте можно сказать, что λ -модель — это λ -алгебра, возникающая из категории $\mathcal{C}$ с объектом U , имеющим «достаточно много точек».

Используя категорное определение модели λ -исчисления, Скотт [1980] сделал следующие философские замечания.

1. Модели бестипового λ -исчисления возникают из д.з.к. с рефлексивным объектом. Сами д.з.к. соответствуют *типовому* λ -исчислению. (Эти связи неоднократно подчеркивал Ламбек. См., например, Ламбек [1980].) Поэтому типовое λ -исчисление первично, а бестиповая теория вторична.

2. Пусть $\mathcal{C}$ — д.з.к. с рефлексивным объектом U . По лемме Йонеды категорию $\mathcal{C}$ можно вложить в топос $D = \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$. Используя семантику Крипке — Жуаяля, мы видим, что в D объект U^U является полным пространством функций на U и потому U удовлетворяет аксиоме слабой экстенциональности в D . За это приходится платить переходом к интуиционистской логике, так как классическая логика неполна относительно интерпретации Крипке — Жуаяля.

Некоторые комментарии. Что касается замечания 1, то имеются, конечно, красивые результаты о типовом λ -исчислении, например у Стетмена [1980], [1982]. Мы, однако, не согласны с выводом Скотта о первичности типового λ -исчисления

по сравнению с бестиповой теорией. Во всяком случае это не верно с точки зрения вычислимости: типовое λ -исчисление (даже в присутствии рекурсора) способно представить лишь собственное подмножество множества рекурсивных функций, в то время как бестиповая теория представляет их все. В связи с замечанием 2 очень интересно предложение Скотта осуществить старую мечту Чёрча и Карри — изоморфизм $U^U \cong U$ — внутри топоса. λ -алгебры заслуживают изучения, хотя они не всегда слабо экстенциональны. Они оказываются, например, предполными нумерованными множествами в смысле Ершова, см. Виссер [1980]. Теперь внутри подходящего топоса эти структуры можно считать состоящими из настоящих функций.

5.1. Комбинаторные алгебры

5.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ называется *аппликативной структурой*, если $\cdot$ есть бинарная операция на множестве X .

Такая структура *экстенциональна*, если для любых $a, b \in X$

$$(\forall x \in X) (a \cdot x = b \cdot x) \Rightarrow a = b.$$

Обозначения. (i) Как и в обычной алгебре, выражение $a \cdot b$ записывается в виде ab . Если $\vec{b} = b_1, \dots, b_n$, то по определению $a\vec{b} = ab_1 \dots b_n = (\dots((ab_1)b_2) \dots b_n)$.

(ii) Если $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$, то мы пишем $a \in \mathfrak{M}$ вместо $a \in X$.

5.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — аппликативная структура.

(i) Множество *термов над* $\mathfrak{M}$, обозначаемое через $\mathfrak{T}(\mathfrak{M})$, интуитивно определяется следующим образом.

$$v_0, v_1, v_2, \dots \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M}) \text{ (переменные),}$$

$$a \in \mathfrak{M} \Rightarrow c_a \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M}) \text{ (константы),}$$

$$A, B \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M}) \Rightarrow (AB) \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M}).$$

Обозначения. $A, B, \dots$ обозначают произвольные термы из $\mathfrak{T}(\mathfrak{M})$, а $x, y, \dots$ — произвольные переменные.

(ii) *Оценка* в $\mathfrak{M}$ — это отображение ρ : переменные $\rightarrow \mathfrak{M}$. Для оценки ρ в аппликативной структуре $\mathfrak{M}$ *интерпретация* терма $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ в $\mathfrak{M}$ при оценке ρ (обозначаемая через $\llbracket A \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}}$ или $\llbracket A \rrbracket_\rho$, или $\llbracket A \rrbracket^{\mathfrak{M}}$, если $\mathfrak{M}$ или ρ ясно из контекста) индуктивно определяется обычным образом:

$$\llbracket x \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}} = \rho(x); \quad \llbracket c_a \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}} = a;$$

$$\llbracket AB \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}} = \llbracket A \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}} \llbracket B \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}}.$$

(iii) Говорят, что равенство $A = B$ *истинно в* $\mathfrak{M}$ *при оценке* ρ (и пишут $\mathfrak{M}, \rho \models A = B$), если $\llbracket A \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}} = \llbracket B \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}}$.

(iv) Говорят, что равенство $A = B$ истинно в $\mathfrak{M}$ (и пишут $\mathfrak{M} \models A = B$), если $\mathfrak{M}, \rho \models A = B$ имеет место при любой оценке ρ .

(v) Отношение $\models$ используется также применительно к любым формулам первого порядка над $\mathfrak{M}$. Оно определяется в этом случае обычным образом.

Через $FV(A)$ обозначается множество (свободных) переменных терма A . Очевидно, что интерпретация $[A]_\rho$ зависит только от значений ρ на множестве $FV(A)$. В частности, для замкнутых A (т. е. в случае $FV(A) = \emptyset$) интерпретация $[A]_\rho$ не зависит от ρ , и ее можно обозначать посредством $[A]$.

5.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Карри). Аппликативная структура $\mathfrak{M}$ комбинаторно полна, если для любого терма $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ и переменных $x_1, \dots, x_n$, таких, что $FV(A) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, мы имеем в $\mathfrak{M}$

$$\exists f \forall x_1, \dots, x_n (fx_1 \dots x_n = A).$$

Заметим, что экстенциональная аппликативная структура комбинаторно полна тогда и только тогда, когда для всех $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$

$$\exists ! f \forall \vec{x} (f\vec{x} = A(\vec{x})).$$

5.1.4. ОБОЗНАЧЕНИЯ. (i) Пусть ρ — оценка в $\mathfrak{M}$, и пусть $a \in \mathfrak{M}$. Тогда через $\rho(x := a)$ обозначается оценка ρ' , такая что

$$\rho'(x) = a, \rho'(y) = \rho(y), \text{ если } y \neq x.$$

(ii) Если переменные $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ попарно различны и $\vec{a} = a_1, \dots, a_n$, то по определению

$$\rho(\vec{x} := \vec{a}) = \rho(x_1 := a_1) \dots (x_n := a_n).$$

(iii) $A[x := B]$ обозначает результат подстановки терма B вместо x в A .

5.1.5. ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{M}$ — аппликативная структура и $A, A', B, B' \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$. Тогда

$$(i) \llbracket A[x := B] \rrbracket_\rho = \llbracket A \rrbracket_{\rho(x := \llbracket B \rrbracket_\rho)},$$

$$(ii) \mathfrak{M} \models A = A' \wedge B = B' \Rightarrow \mathfrak{M} \models A[x := B] = A'[x := B'].$$

Доказательство. (i) доказывается индукцией по построению A .

(ii) По предположению $\llbracket A \rrbracket_\rho = \llbracket A' \rrbracket_\rho$ и $\llbracket B \rrbracket_\rho = \llbracket B' \rrbracket_\rho$ для всех ρ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \llbracket A[x := B] \rrbracket_\rho &= A_{\rho(x := \llbracket B \rrbracket_\rho)} \text{ (в силу (i))} \\ &= \llbracket A' \rrbracket_{\rho(x := \llbracket B' \rrbracket_\rho)} = \llbracket A'[x := B'] \rrbracket_\rho, \end{aligned}$$

и все доказано. $\square$

5.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ — аппликативная структура и $\varphi: X^n \rightarrow X$ — отображение.

(i) φ называется *представимым над $\mathfrak{M}$* , если

$$\exists f \in X \forall \vec{a} \in X^n (f\vec{a} = \varphi(\vec{a})).$$

(ii) φ называется *алгебраическим над $\mathfrak{M}$* , если имеется терм $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$, такой что $FV(A) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ и

$$(1) \quad \forall \vec{a} (\varphi(\vec{a}) = [A]_{\rho(\vec{x} := \vec{a})}).$$

(Очевидно, что истинность соотношения (1) не зависит от ρ .)

Комбинаторная полнота означает, что все алгебраические функции представимы. Обратное утверждение тривиально. Шейнфинкель показал, что комбинаторная полнота следует из двух своих частных случаев.

5.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комбинаторная алгебра — это аппликативная структура $\mathfrak{M} = (X, \cdot, k, s)$ с двумя выделенными элементами k, s , удовлетворяющими равенствам

$$kxy = x, \quad sxyz = xz(yz).$$

5.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра.

(i) Расширим $\mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ константами K и S , обозначающими, соответственно, k и s . Затем положим $I = SKK$.

(ii) Для термов $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ и переменных x индуктивно определим $\lambda^*x.A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ следующим образом:

$$\lambda^*x.x = I,$$

$$\lambda^*x.P = KP, \text{ если } P \text{ не содержит } x,$$

$$\lambda^*x.PQ = S(\lambda^*x.P)(\lambda^*x.Q).$$

(iii) Пусть $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$. Тогда полагаем $\lambda^*\vec{x}.A = (\lambda^*x_1 \dots (\lambda^*x_n.A) \dots)$.

5.1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $FV(\lambda^*x.A) = FV(A) - \{x\}$.

(ii) $(\lambda^*x.A)x = A$ в любой комбинаторной алгебре.

(iii) $(\lambda^*\vec{x}.A)\vec{x} = A$ в любой комбинаторной алгебре.

Доказательство. (i), (ii) устанавливаются индукцией по построению терма A . Заметим, что верны равенства $Ix = SKKx = Kx(Kx) = x$.

(iii) следует из (ii). $\square$

5.1.10. ТЕОРЕМА. Аппликативная структура $\mathfrak{M}$ комбинаторно полна тогда и только тогда, когда она может быть расширена до комбинаторной алгебры (путем выбора k, s). Следовательно, любая комбинаторная алгебра комбинаторно полна.

Доказательство получается с помощью предложения 5.1.9 (iii). $\square$

5.1.11. Замечания. (i) Отметим, что комбинаторная алгебра $\mathfrak{M} = (X, \cdot, k, s)$ нетривиальна (т. е. $\text{Card}(\mathfrak{M}) > 1$) тогда и только тогда, когда $k \neq s$. Действительно, $k = s$ влечет $a = s(ki)(ka)z = = k(ki)(ka)z = i$ для всех a , так что $\mathfrak{M}$ тривиальна.

(ii) При рассмотрении комбинаторных алгебр мы обычно молчаливо подразумеваем, что они нетривиальны.

5.1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}_i = (X_i, \cdot_i, k_i, s_i)$, $i = 1, 2$, — две комбинаторные алгебры.

(i) отображение $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ является гомоморфизмом (в этом случае пишут $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$), если φ сохраняет аппликацию (применение функции к аргументу) и константы k, s , т. е. $\varphi(x \cdot_1 y) = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)$, $\varphi(k_1) = k_2$ и $\varphi(s_1) = s_2$.

(ii) $\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$, если $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ для некоторого φ .

(iii) $\mathfrak{M}_1$ вложима в $\mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M}_1 \hookrightarrow \mathfrak{M}_2$), если $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ для некоторого инъективного φ . $\mathfrak{M}_1$ — подструктура $\mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$), если $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$, где φ — тождественное отображение.

(iv) $\mathfrak{M}_1$ изоморфна $\mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$), если $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ для некоторого взаимно однозначного φ .

5.1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\mathcal{E}$ — множество термов комбинаторной логики, т. е. аппликативных термов, построенных только из переменных и констант K, S ; $\mathcal{E}^0 = \{P \in \mathcal{E} \mid \text{FV}(P) = \emptyset\}$.

(ii) Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра. Тогда

$$\text{Th}(\mathfrak{M}) = \{P = Q \mid \mathfrak{M} \models P = Q, P, Q \in \mathcal{E}^0\}.$$

5.1.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$. Тогда для $P, Q \in \mathcal{E}(\mathfrak{M}_1)$

(i) $\varphi(\llbracket P \rrbracket_{\mathfrak{M}_1}^{\mathfrak{M}_1}) = \llbracket \varphi(P) \rrbracket_{\mathfrak{M}_2}^{\mathfrak{M}_2}$, где $\varphi(P)$ получается из P заменой констант c_a на $c_{\varphi(a)}$.

(ii) $\mathfrak{M}_1 \models P = Q \Rightarrow \mathfrak{M}_2 \models \varphi(P) = \varphi(Q)$, если $P, Q \in \mathcal{E}^0$ или φ сюръективен.

(iii) $\text{Th}(\mathfrak{M}_1) \subseteq \text{Th}(\mathfrak{M}_2)$.

(iv) $\text{Th}(\mathfrak{M}_1) = \text{Th}(\mathfrak{M}_2)$, если φ инъективен.

Доказательство. (i) устанавливается индукцией по построению терма $P \in \mathcal{E}(\mathfrak{M})$.

(ii) $\mathfrak{M}_1 \models P = Q \Rightarrow \llbracket P \rrbracket_{\mathfrak{M}_1} = \llbracket Q \rrbracket_{\mathfrak{M}_1}$ для всех $\rho \Rightarrow$

$$\Rightarrow \llbracket P \rrbracket_{\varphi(\rho)} = \llbracket Q \rrbracket_{\varphi(\rho)} \text{ для всех } \rho \text{ (в силу (i))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \llbracket P \rrbracket_{\rho'} = \llbracket Q \rrbracket_{\rho'} \text{ для всех } \rho' \text{ (если } \varphi \text{ сюръективен)}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M}_2 \models P = Q.$$

Если $P, Q \in \mathcal{E}^0$, то их значения не зависят от ρ .

(iii) В силу (ii).

(iv) Аналогично (ii). $\square$

Аксиомы комбинаторных алгебр порождены не алгебраическими соотношениями, а анализом рекурсивных процессов. Следующее утверждение показывает, что эти структуры — патологические с алгебраической точки зрения.

5.1.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Нетривиальные комбинаторные алгебры

- (i) некоммукативны,
- (ii) неассоциативны,
- (iii) неконечны,
- (iv) нерекурсивны.

Доказательство. (i) Допустим, что $ik = ki$. Тогда $k = ik = ki$, откуда $a = kab = kiab = ib = b$ для всех a, b , так что алгебра тривиальна.

(ii) Аналогичным образом тривиальность следует из $(ki)i = = k(ii)$.

(iii) Положим по определению $k_1 = k$, $k_{n+1} = kk_n$. Тогда все элементы $k_1, k_2, \dots$ различны.

(iv) См. упр. 7.4.14 (iii). $\square$

5.2. Лямбда-алгебры и лямбда-модели

Так как в комбинаторной алгебре $\mathfrak{M}$ можно смоделировать абстракцию с помощью k и s , оказывается возможным интерпретировать в $\mathfrak{M}$ λ -термы.

Обозначения. Пусть C — некоторое множество констант. Обозначим через $\Lambda(C)$ множество λ -термов, возможно содержащих константы из C . Аксиомы и правила λ -исчисления очевидным образом обобщаются на равенства $M = N$, где $M, N \in \Lambda(C)$. Для таких M, N мы также будем употреблять запись $\lambda \vdash M = N$. Если $\mathfrak{M}$ — аппликативная структура, то $\Lambda(\mathfrak{M})$ есть по определению $\Lambda(\{c_a \mid a \in \mathfrak{M}\})$.

5.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра.

(i) Введем отображения

$$CL: \Lambda(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{M}),$$

$$\lambda: \mathcal{E}(\mathfrak{M}) \rightarrow \Lambda(\mathfrak{M}),$$

используя обозначения $M_{CL} \equiv CL(M)$, $A_\lambda \equiv \lambda(A)$:

$$x_{CL} = x, \quad x_\lambda = x,$$

$$c_{CL} = c, \quad K_\lambda = \lambda xy.x,$$

$$(MN)_{CL} = M_{CL}N_{CL}, \quad S_\lambda = \lambda xyz.xz(yz),$$

$$(\lambda x.M)_{CL} = \lambda^*x.M_{CL}, \quad c_\lambda = c,$$

$$(AB)_\lambda = A_\lambda B_\lambda.$$

(ii) Для $M, N \in \Lambda(\mathfrak{M})$ полагаем по определению

$$\llbracket M \rrbracket_{\rho}^{\mathfrak{M}} = \llbracket M_{CL} \rrbracket_{\rho}^{\mathfrak{M}},$$

$$\mathfrak{M}, \rho \models M = N \Leftrightarrow \llbracket M \rrbracket_{\rho}^{\mathfrak{M}} = \llbracket N \rrbracket_{\rho}^{\mathfrak{M}},$$

$$\mathfrak{M} \models M = N \Leftrightarrow \mathfrak{M}, \rho \models M = N \text{ для всех } \rho.$$

Если $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра и $a \in \mathfrak{M}$, то мы пишем, например, $\lambda x.xa$ вместо $\llbracket \lambda x.xc_a \rrbracket^{\mathfrak{M}}$.

Не все равенства, доказуемые в λ -исчислении, истинны в комбинаторной алгебре. Если, например, $\mathfrak{M}$ — модель из термов для CL , то

$$\mathfrak{M} \not\models \lambda z.(\lambda x.x)z = \lambda z.z,$$

так как $(\lambda z.(\lambda x.x)z)_{CL} = S(KI)I$ и $(\lambda z.z)_{CL} = I$, однако $\lambda \vdash \lambda z.(\lambda x.x)z = \lambda z.z$.

5.2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Комбинаторная алгебра $\mathfrak{M}$ называется λ -алгеброй, если

$$\lambda \vdash A_{\lambda} = B_{\lambda} \Rightarrow \mathfrak{M} \models A = B$$

для любых $A, B \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$.

(ii) Гомоморфизм λ -алгебр — это просто гомоморфизм комбинаторных алгебр.

5.2.3. ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра. $\mathfrak{M}$ является λ -алгеброй т. и т. т., когда для всех $M, N \in \Lambda(\mathfrak{M})$

(i) $\lambda \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N$;

(ii) $\mathfrak{M} \models K_{\lambda, CL} = K$, $\mathfrak{M} \models S_{\lambda, CL} = S$.

(Мы пишем $A_{\lambda, CL}$ вместо $(A_{\lambda})_{CL}$ и т. д.).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Заметим прежде всего, что индукция по построению терма $M \in \Lambda(\mathfrak{M})$ дает $\lambda \vdash M_{CL, \lambda} = M$. Отсюда получаем следующее.

$$1. \lambda \vdash M = N \Rightarrow \lambda \vdash M_{CL, \lambda} = N_{CL, \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M} \models M_{CL} = N_{CL} \text{ (так как } \mathfrak{M} \text{ есть } \lambda\text{-алгебра)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N \text{ (по определению отношения } \models \text{)}.$$

2. Кроме того, для всех $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ мы имеем $\lambda \vdash A_{\lambda, CL, \lambda} = A_{\lambda}$. Поэтому $\mathfrak{M} \models A_{\lambda, CL} = A$.

($\Leftarrow$) Заметим сначала, что индукция по построению терма $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ дает с помощью пункта 2 из ($\Rightarrow$), что $\mathfrak{M} \models A_{\lambda, CL} = A$. Следовательно,

$$\lambda \vdash A_{\lambda} = B_{\lambda} \Rightarrow \mathfrak{M} \models A_{\lambda, CL} = B_{\lambda, CL} \text{ (в силу 1)} \Rightarrow \mathfrak{M} \models A = B. \square$$

5.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Если $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$, то

$$\varphi \llbracket M \rrbracket_{\rho}^{\mathfrak{M}_1} = \llbracket \varphi(M) \rrbracket_{\varphi(\rho)}^{\mathfrak{M}_2} \text{ для } M \in \Lambda(\mathfrak{M}_1).$$

В частности, $\varphi \llbracket M \rrbracket^{\mathfrak{M}_1} = \llbracket M \rrbracket^{\mathfrak{M}_2}$ для $M \in \Lambda^0$.

(ii) Пусть $\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$. Тогда $\text{Th}(\mathfrak{M}_1) \subseteq \text{Th}(\mathfrak{M}_2)$. Поэтому если $\mathfrak{M}_1$ есть λ -алгебра, то и $\mathfrak{M}_2$ является λ -алгеброй.

(iii) $\mathfrak{M}_1 \hookrightarrow \mathfrak{M}_2 \Rightarrow \text{Th}(\mathfrak{M}_1) = \text{Th}(\mathfrak{M}_2)$.

Доказательство. Все эти утверждения следуют из предложения 5.1.14. $\square$

Класс λ -алгебр можно аксиоматизировать, используя принадлежащие Карри комбинаторные аксиомы A_{β} .

5.2.5. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра. $\mathfrak{M}$ является λ -алгеброй тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему множеству равенств, которое обозначается через A_{β} :

$$(A.1) K = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK)),$$

$$(A.2) S = S(S(KS)(S(K(S(KS))))(S(K(S(KK)))S)))(K(K(SKK))),$$

$$(A.3) S(S(KS)(S(KK)(S(KS)K)))(KK) = S(KK),$$

$$(A.4) S(KS)(S(KK)) = S(KK)(S(S(KS)(S(KK)(SKK)))(K(SKK))),$$

$$(A.5) S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS))) = S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS)))S))))(KS).$$

Доказательство. Из теоремы 7.3.10 и следствия 7.3.15 вытекает, что теории λ и $CL + A_{\beta}$ эквивалентны в том смысле, что

$$\lambda \vdash A_{\lambda} = B_{\lambda} \Leftrightarrow CL + A_{\beta} \vdash A = B. \square$$

λ -алгебры появляются обычно как подструктуры более естественного класса моделей λ -исчисления — так называемых лямбда-моделей. Для этих структур имеется равномерный метод нахождения элементов, представляющих алгебраические функции, не зависящий от способа, которым эти функции заданы (в виде термов) — ср. теорему 5.5.8.

5.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра. Она называется *слабо экстенсиейальной*, если

$$\mathfrak{M} \models \forall x(A = B) \rightarrow \lambda x.A = \lambda x.B$$

для любых $A, B \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$. (Иногда мы будем обозначать это так: $\mathfrak{M} \models \text{с.э.}$)

Условие слабой экстенсиейальности имеет синтаксический характер. Майер [1980] и Скотт [1980] заменяют его следующим образом.

5.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) В произвольной комбинаторной алгебре положим по определению $1 = S(KI)$.

(ii) λ -модель — это λ -алгебра $\mathfrak{M}$, в которой имеет место следующая аксиома Майера — Скотта

$$\forall x(ax = bx) \rightarrow 1a = 1b.$$

5.2.8. ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра. Тогда в ней

- (i) $1ab = ab$;
- если, кроме того, $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра, то
- (ii) $1 = \lambda xy.xy$, а следовательно, $1a = \lambda y.ay$;
- (iii) $1(\lambda x.A) = \lambda x.A$ для всех $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$;
- (iv) $11 = 1$.

Доказательство. (i) $1ab = S(KI)ab = KIb(ab) = ab$.

(ii) $1 = S(KI) = (\lambda xyz.xz(yz))(KI) = \lambda yz.KIz(yz) = \lambda yz.yz$.

(iii) $1(\lambda x.A) = \lambda x.(\lambda x.A)x = \lambda x.A$ (в силу (ii)).

(iv) следует из (iii) и (ii). $\square$

5.2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\mathfrak{M}$ есть λ -модель $\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ — слабо экстенциональная λ -алгебра.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{M}$ слабо экстенциональна. Тогда

$\forall x(ax = bx) \Rightarrow \lambda x.ax = \lambda x.bx \Rightarrow 1a = 1b$ по лемме 5.2.8 (ii).

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{M}$ есть λ -модель. Тогда

$\forall x(A = B) \Rightarrow \forall x((\lambda x.A)x = (\lambda x.B)x) \Rightarrow 1(\lambda x.A) = 1(\lambda x.B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda x.A = \lambda x.B$ по лемме 5.2.8 (iii). $\square$

5.2.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра. Тогда

$\mathfrak{M}$ экстенциональна $\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ слабо экстенциональна
и удовлетворяет равенству $I = 1$

Доказательство. ($\Rightarrow$) $A = B \Rightarrow (\lambda x.A)x = (\lambda x.B)x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda x.A = \lambda x.B$ в силу экстенциональности. Далее $Ixy = xy =$
 $= 1xy$, откуда получаем $I = 1$, дважды применяя экстенциональность.

($\Leftarrow$) В силу 5.2.9 $\mathfrak{M}$ является λ -моделью. Отсюда

$\forall x(ax = bx) \Rightarrow 1a = 1b \Rightarrow a = b$, так как $1 = I$. $\square$

Экстенциональная комбинаторная алгебра автоматически является λ -алгеброй. Это следует из того, что $\lambda \vdash A_\lambda = B_\lambda \Rightarrow$
 $\Rightarrow CL + ext \vdash A = B$, см. теорему 7.3.14.

Модели из термов, внутренности

5.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория.

(i) Положим по определению

$M =_{\mathcal{T}} N \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash M = N$; это отношение конгруэнтности на Λ ;

$[M]_{\mathcal{T}} = \{N \in \Lambda \mid M =_{\mathcal{T}} N\}$;

$\Lambda/\mathcal{T} = \{[M]_{\mathcal{T}} \mid M \in \Lambda\}$;

$[M]_{\mathcal{T}} \cdot [N]_{\mathcal{T}} = [MN]_{\mathcal{T}}$; эта операция корректно определена.

Модель из открытых термов (для) теории $\mathcal{T}$ есть множество

$$\mathfrak{M}(\mathcal{T}) = \langle \Lambda/\mathcal{T}, \cdot, [K]_{\mathcal{T}}, [S]_{\mathcal{T}} \rangle.$$

(ii) Ограничивая все отношения и операции замкнутыми термами, мы определяем модель из замкнутых термов для $\mathcal{T}$, полагая

$$\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) = \langle \Lambda^0/\mathcal{T}, \cdot, [K]_{\mathcal{T}}^0, [S]_{\mathcal{T}}^0 \rangle.$$

Очевидно, что если $\mathcal{T}$ непротиворечива, т. е. если в ней доказуемо не всякое равенство, то $\mathcal{T} \not\vdash K = S$, так что $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ и $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ нетривиальны. В частности, нетривиальны $\mathfrak{M}(\lambda)$ и $\mathfrak{M}^0(\lambda)$, так как из теоремы Чёрча — Россера следует, что теория λ непротиворечива.

5.2.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — расширение λ -исчисления, и пусть $\mathfrak{M}$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ или $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$.

(i) Для терма M , такого, что $FV(M) = \{x_1, \dots, x_n\}$, и оценки ρ , такой, что $\rho(x_i) = [P_i]_{\mathcal{T}}^{(0)}$,

$$[M]_{\rho}^{\mathfrak{M}} = [M[\vec{x} := \vec{P}]]_{\mathcal{T}}^{(0)},$$

где $[\vec{x} := \vec{P}]$ обозначает одновременную подстановку; см. упр. 2.4.8.

(ii) $\mathcal{T} \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N$.

(iii) $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models M = N$ при условии, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ или M, N замкнуты.

Доказательство. (i) С помощью индукции по построению терма $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ показываем, что $[A]_{\rho} = [A_{\lambda}[\vec{x} := \vec{P}]]$, и используем $\mathcal{T} \vdash M_{CL, \lambda} = M$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathcal{T} \vdash M = N &\Rightarrow \forall \vec{P}(\mathcal{T} \vdash M[\vec{x} := \vec{P}] = N[\vec{x} := \vec{P}]) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall \vec{P}([M[\vec{x} := \vec{P}]]_{\mathcal{T}} = [N[\vec{x} := \vec{P}]]_{\mathcal{T}}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall \rho([M]_{\rho} = [N]_{\rho}) \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N. \end{aligned}$$

(iii) Для случая $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ положим $\rho_0(x) = [x]_{\mathcal{T}}$. Тогда $\mathfrak{M} \models M = N \Rightarrow [M]_{\rho_0} = [N]_{\rho_0} \Rightarrow [M]_{\mathcal{T}} = [N]_{\mathcal{T}}$ (в силу (i)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N. \quad \square$$

Для случая, когда M и N замкнуты, имеем

$$\mathfrak{M} \models M = N \Rightarrow [M]_{\rho_0} = [N]_{\rho_0} \Rightarrow [M]_{\mathcal{T}} = [N]_{\mathcal{T}} \text{ (в силу (i))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash M = N. \quad \square$$

5.2.13. СЛЕДСТВИЕ. (i) $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ есть λ -алгебра.

(ii) $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ есть λ -модель.

Доказательство. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$.

(i) получается из 5.2.12 (ii) леммы 5.2.3 и того, что $\mathcal{T} \vdash \vdash K_{\lambda, GL} = K_{\lambda, CL} = S$.

(ii) $\mathfrak{M} \models \forall x(ax = bx) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x([M]x = [N]x)P$ (где $a = [M]$ и $b = [N]$) $\Rightarrow \mathfrak{M} \models [M]z = [N]z$ (для произвольной новой переменной z) $\Rightarrow \mathcal{T} \vdash Mz = Nz \Rightarrow \mathcal{T} \vdash \lambda z.Mz = \lambda z.Nz \Rightarrow \mathcal{T} \vdash 1M = 1N \Rightarrow \mathfrak{M} \models 1a = 1b$ (здесь $1 = S(KI)$). $\square$

Замечания. (i) (Якопини [1975]) В общем случае $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ не является λ -моделью. Рассмотрим теорию $\mathcal{T} \ni \lambda$ с единственной дополнительной аксиомой $\{\Omega KZ = \Omega SZ \mid Z \in \Lambda^0\}$, где $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$. Тогда $\forall Z \in \Lambda^0(T \vdash \Omega KZ = \Omega SZ)$, а следовательно, $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) \models \forall x(\Omega Kx = \Omega Sx)$. Но $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) \not\models 1(\Omega K) = 1(\Omega S)$, так как в противном случае имело бы место $\mathcal{T} \vdash \Omega Kx = \Omega Sx$, а это не так.

(ii) Плоткин [1974] показал (см. следствие 20.1.2 (i)), что даже $\mathfrak{M}^0(\lambda)$ и $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$ не являются λ -моделями.

(iii) Из (i) следует, что предложение 5.2.12 (iii) не имеет места для $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ в общем случае. Чтобы убедиться в этом, можно взять $M \equiv \Omega Kx$, $N \equiv \Omega Sx$.

5.2.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{A}$ — комбинаторная алгебра.

(i) Внутренность алгебры $\mathfrak{A}$ (обозначаемая через $\mathfrak{A}^0$) — это подструктура в $\mathfrak{A}$, порожденная элементами k, s .

(ii) $\mathfrak{A}$ называется жесткой, если $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}$.

Заметим, что сточностью до изоморфизма $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ — внутренность алгебры $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$.

5.2.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая λ -алгебра.

(i) $\mathfrak{M}^0(\text{Th}(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}^0$.

(ii) Положим $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{M = N \mid M, N \in \mathcal{T}(\mathfrak{A}) \text{ замкнуты и } \mathfrak{A} \models M = N\}$. Тогда $\mathfrak{M}^0(\text{Th}(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}$.

Доказательство. (i) Полагая $\varphi([M]_{\text{Th}(\mathfrak{A})}) = \llbracket M \rrbracket^{\mathfrak{A}}$, получаем корректно определенный изоморфизм на $\mathfrak{A}^0$.

(ii) доказывается аналогично. $\square$

Отсюда следует, что все λ -алгебры возникают как подструктуры некоторой λ -модели.

5.2.16. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) (Барендрегт и Койманс [1980]) Любая λ -алгебра может быть вложена в λ -модель.

(ii) (Майер [1982]) Любая λ -алгебра — изоморфный образ некоторой λ -модели.

Доказательство. (i) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}^0(\text{Th}(\mathfrak{A})) \subset \mathfrak{M}(\text{Th}(\mathfrak{A}))$.

(ii) В дополнение к п. (i) имеем $\mathfrak{M}(\text{Th}(\mathfrak{A})) \rightarrow \mathfrak{M}^0(\text{Th}(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}$, где вложение осуществляется сюръективным отображением, заменяющим любую свободную переменную на константу, например K . $\square$

Следующее утверждение доказано у Барендрегта и Койманса [1980]. Здесь мы формулируем этот результат без доказательства.

5.2.17. ТЕОРЕМА. (i) Имеется λ -модель, не вложимая в экстенциональную λ -модель.

(ii) Имеется комбинаторно полная аппликативная структура, которую невозможно превратить в λ -алгебру (выбором k, s).

(iii) Имеется λ -алгебра, которую невозможно превратить в λ -модель (меняя k, s).

(iv) Имеется λ -модель, которую невозможно превратить в экстенциональную (обрушивая ее).

Модели из термов позволяют провести следующие доказательства нескольких результатов о полноте.

5.2.18. ТЕОРЕМА. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда

(i) $\lambda \vdash M = N \Leftrightarrow$ равенство $M = N$ истинно во всех λ -моделях (или λ -алгебрах).

(ii) Пусть $\mathcal{T}$ — расширение λ -исчисления. Тогда $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow$ равенство $M = N$ истинно во всех λ -моделях, удовлетворяющих $\mathcal{T}$.

(iii) Пусть $(\lambda)_c$ — теория, основанная на классическом исчислении первого порядка с равенством, аксиомами которой являются замыкания всеобщности следующих равенств:

$$Kxy = x, Sxyz = xz(yz), K \neq S, \forall x(ax = bx) \rightarrow 1a = 1b, A_\beta.$$

Тогда

$$\lambda_c \vdash M = N \Leftrightarrow \lambda \vdash M = N.$$

Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ верна по лемме 5.2.3. Импликация $(\Leftarrow)$ получается следующим образом. Если равенство $M = N$ истинно во всех λ -моделях, то оно истинно в $\mathfrak{M}(\lambda)$. Следовательно, $\lambda \vdash M = N$ по предложению 5.2.12 (iii).

(ii) доказывается аналогично.

(iii) $(\Rightarrow)$ Заметим, что $\mathfrak{M}(\lambda) \models (\lambda)_c$. Поэтому

$$(\lambda)_c \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M}(\lambda) \models M = N \Rightarrow \lambda \vdash M = N.$$

$(\Leftarrow)$. Очевидно. $\square$

Модели и правила

Пусть R — одно из правил для λ -исчисления, рассмотренных в § 4.1. Тогда R имеет вид $R_1 \Rightarrow R_2$, где R_2 — всегда равенство, а R_1 — либо равенство (как в *ext*), либо множество равенств (как в ω).

Имеются два способа, которыми λ -алгебра $\mathfrak{M}$ может «удовлетворять» такому правилу R .

(1) $\text{Th}(\mathfrak{M})$ может быть замкнута относительно правила R ;
 (2) $\mathfrak{M}$ может удовлетворять, говоря приблизительно, аксиоме, соответствующей правилу R («приблизительность» возникает из-за того, что не всегда непосредственно очевидно, какова точная формулировка соответствующей аксиомы).

В первом случае мы пишем $\mathfrak{M} \models R$ -правило, во втором — $\mathfrak{M} \models R$ -аксиома.

5.2.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $R = R_1 \Rightarrow R_2$ — одно из правил ext , ω , ξ , tr . Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая λ -алгебра.

(i) Скажем, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет R -правилу (и будем писать $\mathfrak{M} \models R$ -прав.), если $\mathfrak{M} \models R_1 \Rightarrow \mathfrak{M} \models R_2$.

(ii) Отношение « $\mathfrak{M}$ удовлетворяет R -аксиоме» (записываемое $\mathfrak{M} \models R$ -акс.) определяется отдельно для каждого из правил

$$\mathfrak{M} \models \text{ext-акс.} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x (Mx = Nx)) \rightarrow M = N,$$

$$\mathfrak{M} \models \xi\text{-акс.} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x (M = N)) \rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N,$$

$$\mathfrak{M} \models \omega\text{-акс.} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x \in \mathfrak{M}^0 (Mx = Nx)) \rightarrow M = N,$$

где последнее равенство понимается очевидным образом,

$$\mathfrak{M} \models \text{tr-акс.} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x \in \mathfrak{M}^0 (Mx = Nx)) \rightarrow \forall x (Mx = Nx).$$

В приведенных выше определениях термы $M, N \in \Lambda$ произвольны, а в первом и двух последних случаях подразумевается, что $x \notin \text{FV}(MN)$.

(iii) Отношение « $\mathfrak{M}$ удовлетворяет R^0 -аксиоме» и « $\mathfrak{M}$ удовлетворяет R^0 -правилу» определяются аналогично, но вместо всех термов рассматриваются лишь замкнутые.

Заметим, что ξ -аксиома выражает слабую экстенциональность, а ξ -правило — ξ -экстенциональность.

5.2.20. ФАКТ. (i) $\mathfrak{M} \models R$ -акс. $\Rightarrow \mathfrak{M} \models R$ -правило, но обратное не обязательно имеет место.

(ii) $\mathfrak{M}^0 \models R$ -акс. $\Leftrightarrow \mathfrak{M}^0 \models R$ -прав. Поэтому для жестких моделей мы пишем просто $\mathfrak{M} \models R$.

(iii) $\mathfrak{M}^0 \models R \Leftrightarrow \mathfrak{M}^0 \models R^0$.

(iv) $\mathfrak{M} \models R$ -акс. не влечет соотношения $\mathfrak{M}^0 \models R$ и не следует из него.

Доказательство. (i) ($\Rightarrow$) тривиально. ($\Leftarrow$) Возьмем $\mathfrak{M} = D_\infty$, $R = \omega$. См. упражнение 19.4.6.

(ii) ($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{M}^0 \models R$ -прав. и R -акс. $= R_1 \Rightarrow R_2$. Чтобы показать, что $\mathfrak{M}^0 \models R$ -акс., допустим, что $\mathfrak{M}^0, \rho \models R_1$. Пусть $R_{1,2}$ обозначает результат подстановки в R_1 вместо x термов, соответствующих $\rho(x)$. Тогда $\mathfrak{M}^0 \models R_1^*$, откуда $\mathfrak{M}^0 \models R_2^*$, т. е. $\mathfrak{M}^0, \rho \models R_2$. Поэтому $\forall \rho (\mathfrak{M}^0, \rho \models R_1 \rightarrow R_2)$, т. е. $\mathfrak{M}^0 \models R$ -акс.

(iii) тривиально.

(iv) ($\nRightarrow$) Возьмем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\lambda, \eta)$, $R = \text{ext}$. См. теорему 20.1.1.
 ($\Leftarrow$) Возьмем $R = \text{ext}$. См. упражнение 20.6.3. $\square$

5.2.21. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая λ -алгебра. Тогда

(i) $\mathfrak{M} \models \text{ext-акс.} \Leftrightarrow \mathfrak{M}$ экстенциональна;

(ii) $\mathfrak{M} \models \xi\text{-акс.} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \xi\text{-прав.} (\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \text{слабая экстенциональность});$

(iii) $\mathfrak{M} \models \omega\text{-прав.} \Leftrightarrow \mathfrak{M}^0 \models \omega \Leftrightarrow \mathfrak{M}^0$ экстенциональна.

Доказательство. (i) тривиально.

(ii) устанавливается с помощью следствия 5.2.23.

(iii) $\mathfrak{M} \models \omega\text{-прав.} \Rightarrow \mathfrak{M}^0 \models \omega \Rightarrow \mathfrak{M}^0 \models \omega^0 \Rightarrow \mathfrak{M} \models \omega^0\text{-прав.} \Rightarrow \mathfrak{M} \models \omega\text{-прав.}$ в силу доказательства теоремы 4.1.15 (i). $\square$

5.2.22. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория и R — одно из правил. Тогда

$$\mathcal{T} \vdash R \Leftrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R\text{-прав.} \Leftrightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R\text{-акс.}$$

Доказательство. Пусть $R = R_1 \Rightarrow R_2$, и допустим, что $\mathcal{T} \vdash R$. Тогда

$$\mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R_1 \Rightarrow \mathcal{T} \vdash R_1 \text{ (по теореме 5.2.12 (ii))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \vdash R_2 \text{ (по предположению)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R_2.$$

Поэтому $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R$ -прав. Аналогичным образом устанавливается, что $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R$ -прав. $\Rightarrow \mathcal{T} \vdash R$. Доказательство того, что $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R$ -прав. тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models R$ -акс., аналогично доказательству факта 5.2.20 (ii). $\square$

5.2.23. СЛЕДСТВИЕ. (i) Если $\mathcal{T}$ — экстенциональная λ -теория, то $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — экстенциональная λ -модель.

(ii) Если $\mathcal{T} \vdash \omega$, то $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ — экстенциональная λ -модель.

Доказательство получается применением предложений 5.2.21 и 5.2.22. $\square$

5.3. Синтаксические модели

В этом разделе будет дано синтаксическое описание λ -алгебр и λ -моделей, эквивалентное описанию на языке первого порядка, данному в § 5.2. В некоторых случаях, например для фильтровой модели Барендрегта и др. [1983], это синтаксическое описание удобнее, чем определение на языке первого порядка. Этот метод предложен Хиндли и Лонго [1980].

5.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot \rangle$ — аппликативная структура.

(i) Через $\text{Val}(\mathfrak{M})$ обозначается множество всех оценок в $\mathfrak{M}$.

(ii) Синтаксическая интерпретация в $\mathfrak{M}$ — это отображение $I: \Lambda(\mathfrak{M}) \times \text{Val}(\mathfrak{M}) \rightarrow X$, удовлетворяющее следующим условиям, в формулировках которых $I(M, \rho)$ обозначается через $\llbracket M \rrbracket_\rho$.

1. $\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x)$.
2. $\llbracket c_a \rrbracket_\rho = a$.
3. $\llbracket PQ \rrbracket_\rho = \llbracket P \rrbracket_\rho \cdot \llbracket Q \rrbracket_\rho$.
4. $\llbracket \lambda x. P \rrbracket_\rho \cdot a = \llbracket P \rrbracket_{\rho(x := a)}$.
5. $\rho \vdash \text{FV}(M) = \rho' \vdash \text{FV}(M) \Rightarrow \llbracket M \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_{\rho'}$.

Отметим, что в силу соглашения о переименовании переменных из условия 4 вытекает, что для $y \notin \text{FV}(M(x))$ выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned} 4'. \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho(x := a)} &= \llbracket \lambda x. M(x) \rrbracket_\rho a = \\ &= \llbracket \lambda y. M(y) \rrbracket_\rho a = \\ &= \llbracket M(y) \rrbracket_{\rho(y := a)}. \end{aligned}$$

(iii) Синтаксическая аппликативная структура — это тройка $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, [] \rangle$, где $[]$ — синтаксическая интерпретация в $\mathfrak{M}$.

5.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — синтаксическая аппликативная структура.

(i) Понятие истинности в $\mathfrak{M}$ определяется обычным образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, \rho \models M = N &\Leftrightarrow \llbracket M \rrbracket_\rho = \llbracket N \rrbracket_\rho, \\ \mathfrak{M} \models M = N &\Leftrightarrow \forall \rho (\mathfrak{M}, \rho \models M = N) \end{aligned}$$

и распространяется обычным образом на формулы первого порядка над λ -исчислением.

(ii) $\mathfrak{M}$ — синтаксическая λ -алгебра, если $\lambda \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N$.

(iii) $\mathfrak{M}$ — синтаксическая λ -модель, если выполнено следующее условие:

$$(\S) \quad \mathfrak{M} \models \forall x (M = N) \rightarrow \lambda x. M = \lambda x. N,$$

$$\text{т. е. } \forall a (\llbracket M \rrbracket_{\rho(x := a)} = \llbracket N \rrbracket_{\rho(x := a)}) \Rightarrow \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = \llbracket \lambda x. N \rrbracket_\rho.$$

5.3.3. ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{M}$ — синтаксическая λ -модель. Рассмотрим утверждение

$$\varphi(M, N) \equiv \forall \rho \llbracket M[x := N] \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_{\rho(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)}.$$

Тогда для любых $M, N \in \Lambda(\mathfrak{M})$

- (i) $z \notin \text{FV}(M) \Rightarrow \varphi(M, z)$;
- (ii) $\varphi(M, N) \Rightarrow \varphi(\lambda y. M, N)$;
- (iii) $\varphi(M, N)$.

Доказательство. (i) Полагая $M \equiv M(x)$, получаем

$$\llbracket M(z) \rrbracket_\rho = \llbracket M(z) \rrbracket_{\rho(z := \rho(z))} = \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho(x := \rho(z))}$$

в силу 4'.

(ii). Допустим сначала, что $x \notin \text{FV}(N)$. В силу соглашения о переименовании переменных можно считать, что $y \neq x$, $y \notin \text{FV}(N)$. Тогда для $\rho^* = \rho(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)$ и произвольного $a \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} \llbracket M[x := N] \rrbracket_{\rho^*(y := a)} &= \llbracket M[x := N] \rrbracket_{\rho(y := a)} = \\ &= \llbracket M \rrbracket_{\rho(y := a)(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)} \quad (\text{так как } \varphi(M, N)) = \\ &= \llbracket M \rrbracket_{\rho^*(y := a)} \end{aligned}$$

(отметим, что $\llbracket N \rrbracket_\rho = \llbracket N \rrbracket_{\rho(y := a)}$). Поэтому в силу условия (§)

$$\llbracket \lambda y. M[x := N] \rrbracket_{\rho^*} = \llbracket \lambda y. M \rrbracket_{\rho^*},$$

откуда

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda y. M[x := N] \rrbracket_\rho &= \llbracket \lambda y. M[x := N] \rrbracket_{\rho^*} = \\ &= \llbracket \lambda y. M \rrbracket_{\rho(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)}. \end{aligned}$$

Если $x \in \text{FV}(N)$, то обозначим через z произвольную новую переменную. Для $\tilde{M} \equiv \lambda y. M$ мы имеем

$$\begin{aligned} \llbracket \tilde{M}[x := N] \rrbracket_\rho &= \llbracket \tilde{M}[x := z][z := N] \rrbracket_\rho = \\ &= \llbracket \tilde{M}[x := z] \rrbracket_{\rho(z := \llbracket N \rrbracket_\rho)} = \\ &= \llbracket \tilde{M} \rrbracket_{\rho(z := \llbracket N \rrbracket_\rho)(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)} \quad (\text{в силу (i)}) = \\ &= \llbracket \tilde{M} \rrbracket_{\rho(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)}. \end{aligned}$$

(iii) Теперь $\varphi(M, N)$ получается простой индукцией по построению терма M . $\square$

5.3.4. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{M}$ — синтаксическая λ -модель. Тогда $\lambda \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N$,

т. е. $\mathfrak{M}$ — синтаксическая λ -алгебра.

Доказательство проводится индукцией по длине доказательства равенства $M = N$ в λ -исчислении.

Аксиома $(\lambda x. M) N = M[x := N]$ корректна, т. е. истинна в $\mathfrak{M}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \llbracket (\lambda x. M) N \rrbracket_\rho &= \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho \llbracket N \rrbracket_\rho \quad (\text{в силу 3}) = \\ &= \llbracket M \rrbracket_{\rho(x := \llbracket N \rrbracket_\rho)} \quad (\text{в силу 4}) = \\ &= \llbracket M[x := N] \rrbracket_\rho \quad (\text{в силу леммы 5.3.3 (iii)}). \end{aligned}$$

Корректность правила $M = N \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N$ следует из условия (ξ). Остальные правила тривиальны. $\square$

5.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гомоморфизм одной синтаксической λ -алгебры в другую — это отображение $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$, такое, что $\llbracket M \rrbracket_\rho = \llbracket \varphi(M) \rrbracket_{\varphi \circ \rho}^2$, где в $\varphi(M)$ константы c_a заменены на $c_{\varphi(a)}$, для любого терма $M \in \Lambda(\mathfrak{M})$.

5.3.6. ТЕОРЕМА. Категория синтаксических λ -алгебр и их гомоморфизмов изоморфна категории λ -алгебр и их гомоморфизмов. При этом изоморфизме синтаксические λ -модели соответствуют в точности λ -моделям.

Доказательство легкое. Для синтаксической λ -алгебры $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, [\] \rangle$ положим по определению $F\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, [K], [S] \rangle$, а для $\varphi: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ положим $F\varphi = \varphi: F\mathfrak{M}_1 \rightarrow F\mathfrak{M}_2$. Тогда $\llbracket M \rrbracket_\rho^{F\mathfrak{M}} = \llbracket M \rrbracket_\rho^{\mathfrak{M}}$ для $M \in \Lambda(\mathfrak{M})$. Обратно, для λ -алгебры $\mathfrak{A} = \langle X, \cdot, k, s \rangle$ положим по определению $G\mathfrak{A} = \langle X, \cdot, [\]^{\mathfrak{A}} \rangle$ и $G\varphi = \varphi$ точно так же, как и раньше. Тогда F вместе с обратным к нему отображением G дает требуемый изоморфизм. $\square$

5.3.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду теоремы 5.3.6 мы говорим, что $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, [\] \rangle$ является λ -алгеброй (λ -моделью) также и в том случае, когда $\mathfrak{M}$ является синтаксической λ -алгеброй (λ -моделью).

5.3.8. СОГЛАШЕНИЕ. Работая в λ -алгебре $\mathfrak{M}$, мы допускаем некоторые вольности при записи равенств, верных в $\mathfrak{M}$. Например для $a \in \mathfrak{M}$ мы пишем

$$(\lambda x.xx)a = aa$$

вместо формальной записи $\llbracket \lambda x.xx \rrbracket a = aa$.

5.4. Модели в конкретных декартово замкнутых категориях

В этом разделе будет изложена система понятий, в рамках которой Скотт построил свои несинтаксические λ -модели. Мы будем использовать категорию п.ч.у.м. (полных частичных упорядоченных множеств), хотя применяемый метод работает для произвольных конкретных декартово замкнутых категорий.

Напомним, что если D есть п.ч.у.м., то $[D \rightarrow D]$ обозначает множество непрерывных отображений со структурой п.ч.у.м., индуцированной поточечным упорядочением: $f \leq g$ тогда и только тогда, когда $fx \leq gx$ для любого x .

5.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. П.ч.у.м. D называется *рефлексивным*, если $[D \rightarrow D]$ есть ретракт D , т. е. имеются непрерывные отображения

$$F: D \rightarrow [D \rightarrow D], \quad G: [D \rightarrow D] \rightarrow D,$$

такие, что $F \circ G = \text{id}_{[D \rightarrow D]}$.

Будет показано, что любое рефлексивное п.ч.у.м. естественным образом определяет λ -модель.

5.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — рефлексивное п.ч.у.м. и F, G — отображения, упоминаемые в определении рефлексивности. (В этом случае мы будем говорить, что D рефлексивно через F и G .)

(i) Для $x, y \in D$ положим по определению

$$x.y = F(x)(y).$$

(ii) Пусть ρ — оценка в D . Введем интерпретацию $\llbracket \]_\rho: \Lambda \rightarrow D$ следующим индуктивным определением:

$$\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x);$$

$$\llbracket c_a \rrbracket_\rho = a;$$

$$\llbracket MN \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\rho . \llbracket N \rrbracket_\rho;$$

$$\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho = G(\lambda d. \llbracket M \rrbracket_{\rho(x := d)}).$$

5.4.3. ЛЕММА. Функция $\lambda d. \llbracket M \rrbracket_{\rho(x := d)}$ непрерывна, следовательно, $\llbracket \lambda x.M \rrbracket_\rho$ корректно определено.

Доказательство проводится индукцией по построению терма M . Мы покажем, что для всех ρ значение $\llbracket M \rrbracket_{\rho(x := d)}$ непрерывно зависит от d . Единственный нетривиальный случай возникает, когда $M \equiv \lambda y.P$. Тогда

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda y.P \rrbracket_{\rho(x := a)} &= G(\lambda e. \llbracket P \rrbracket_{\rho(x := d)(y := e)}) = \\ &= G(\lambda e. f(d, e)) = g(d), \end{aligned}$$

где обозначения $f(d, e)$ и $g(d)$ имеют очевидный смысл. По предположению индукции функция f непрерывна по каждой из переменных d, e в отдельности, следовательно, по лемме 1.2.12 она непрерывна. Отсюда в силу предложения 1.2.14 (i) и непрерывности G получаем, что отображение $g = G \circ f$ непрерывно. $\square$

5.4.4. ТЕОРЕМА. Пусть D — рефлексивное (через F, G) п.ч.у.м., и пусть $\mathfrak{M} = (D, \cdot, [\])$. Тогда

(i) $\mathfrak{M}$ есть λ -модель;

(ii) представимые функции — это в точности непрерывные функции;

(iii) $\mathfrak{M}$ экстенциональна тогда и только тогда, когда $G \circ F = \text{id}_D$, т. е. $G = F^{-1}$ и $D \cong [D \rightarrow D]$ (через F, G).

Доказательство. (i) Проверим условия из определения 5.3.1. Условия 1, 2 и 3 тривиальны. Рассмотрим условие 4.

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda x.P \rrbracket_\rho . a &= G(\lambda d. \llbracket P \rrbracket_{\rho(x := d)} . a) = F(G(\lambda d. \llbracket P \rrbracket_{\rho(x := d)}))(a) = \\ &= (\lambda d. \llbracket P \rrbracket_{\rho(x := d)})(a) = \llbracket P \rrbracket_{\rho(x := a)}. \end{aligned}$$

Условие 5 получается несложной индукцией по построению термина M .

Таким образом, $\mathfrak{M}$ — аппликативная синтаксическая структура. Проверим, что она удовлетворяет условию (5).

$$\begin{aligned} \forall d ([M]_{\rho(x:=d)} &= [N]_{\rho(x:=d)}) \Rightarrow \lambda d. [M]_{\rho(x:=d)} = \\ &= \lambda d. [N]_{\rho(x:=d)} \Rightarrow G(\lambda d. [M]_{\rho(x:=d)}) = G(\lambda d. [N]_{\rho(x:=d)}) \Rightarrow \\ &= [\lambda x. M]_{\rho} = [\lambda x. N]_{\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу замечания 5.3.7 следует, что $\mathfrak{M}$ есть λ -модель.

(ii) Аппликация $\cdot$ (т. е. применение функции к аргументу) непрерывна из-за непрерывности F . Поэтому непрерывны все представимые функции. Обратно, непрерывная функция $f: D \rightarrow D$ представляется объектом $G(f)$. Действительно,

$$G(f)(a) = F(G(f))(a) = f(a).$$

В общем случае непрерывная функция $f: D^n \rightarrow D$ представляется объектом

$$\lambda^a d_1 \dots \lambda^a d_n. f(d_1, \dots, d_n),$$

где

$$\lambda^a d. \dots = G(\lambda d. \dots).$$

(iii) Если $G \circ F = \text{id}$, то

$$\begin{aligned} \forall e (de = d'e) &\Rightarrow \forall e (F(d)(e) = F(d')(e)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(d) = F(d') \Rightarrow d = d', \end{aligned}$$

последнее становится очевидным, если применить G к обеим частям предыдущего равенства.

Поэтому $\mathfrak{M}$ экстенциональна.

Обратно, допустим, что $\mathfrak{M}$ экстенциональна. Пусть $d \in D$ и $d' = G(F(d))$. Тогда для всех $e \in D$

$$d'e = F(d')(e) = F(G(F(d)))(e) = F(d)(e) = de.$$

Следовательно, $d' = d$, т. е. $G \circ F = \text{id}_D$. $\square$

Чтобы дать представление о том, как может быть определено рефлексивное п. ч. у. м., мы опишем модели D_A , введенные Энгелером [1981], как упрощения графической модели $P\omega$, которая будет введена в § 18.1.

5.4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A — множество.

(i) Обозначим через B наименьшее множество, содержащее A и такое, что

$$\beta \subseteq B, \beta \text{ конечно и } b \in B \Rightarrow (\beta, b) \in B.$$

(Будем предполагать, что A не содержит таких пар.)

(ii) Пусть $D_A = P(B)$, т. е. это множество всех подмножеств множества B , частично упорядоченных по включению. Это — п. ч. у. м. (и даже алгебраическая решетка).

(iii) Для $x, y \in D_A$ и $f \in [D_A \rightarrow D_A]$ положим по определению

$$x.y = \{b \in B \mid \exists \beta \subseteq y (\beta, b) \in x\},$$

$$\lambda^a x. f(x) = \{(\beta, b) \in B \mid \beta \text{ конечно } \subseteq B \text{ и } b \in f(\beta)\}.$$

5.4.6. ТЕОРЕМА. D_A становится рефлексивным п. ч. у. м., если положить $F(x) = \lambda y. xy$, $G(f) = \lambda^a x. f(x)$. Поэтому D_A определяет λ -модель.

Доказательство. Непрерывность F и G легко следует из предложений 1.2.24 и 1.2.31 (i). Далее

$$\begin{aligned} F \circ G(f) &= F(\{(\beta, b) \mid b \in f(\beta)\}) = \lambda y. \{b \mid \exists \beta \subseteq y (b \in f(\beta))\} = \\ &= \lambda y. \bigcup \{f(\beta) \mid \beta \subseteq y\} = \\ &= \lambda y. f(y) \text{ (в силу непрерывности } f) = f. \quad \square \end{aligned}$$

Дополнительную информацию о моделях D_A дают упражнения 5.7.7, 18.5.29 и 18.4.31.

5.5. Модели в произвольных декартово замкнутых категориях

В этом разделе будет показано, что в произвольных декартово замкнутых категориях рефлексивные объекты порождают λ -алгебры и каждая λ -алгебра порождается таким образом. Поэтому λ -модели — это λ -алгебры, происходящие из категорий «с достаточным запасом точек». Применяемый метод принадлежит Коймансу [1982] и основан на работах Скотта.

5.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Тожественный морфизм объекта $A \in \mathcal{C}$ обозначается через id_A .

(i) $\mathcal{C}$ называется *декартово замкнутой категорией* (д. з. к.), если выполнены следующие условия.

1. В $\mathcal{C}$ имеется *терминальный объект* T , такой, что для любого объекта $A \in \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $!_A: A \rightarrow T$.

2. Для любых объектов $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ имеется объект $A_1 \times A_2$ (их *декартово произведение*) с морфизмами $p_i: A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$ (*проекциями*), такими что для любых $f_i: C \rightarrow A_i$ ($i = 1, 2$) имеется единственный морфизм $\langle f_1, f_2 \rangle: C \rightarrow A_1 \times A_2$, такой, что $p_i \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_i$; см. рис. 5.1.

Обозначения. Если $g_i: A_i \rightarrow B_i$ ($i = 1, 2$), то $g_1 \times g_2 = \langle g_1 \circ p_1, g_2 \circ p_2 \rangle: A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$, см. рис. 5.1.

3. Для $A, B \in \mathcal{C}$ имеется объект $B^A \in \mathcal{C}$ (*степень*) с морфизмом $\text{ev} = \text{ev}_{A, B}: B^A \times A \rightarrow B$, такой, что для любого $f: C \times A \rightarrow B$ имеется единственный $\Lambda f: C \rightarrow B^A$, удовлетворяющий равенству $f = \text{ev} \circ (\Lambda f \times \text{id}_A)$; см. рис. 5.1.

(ii) Пусть $\mathbb{C}$ имеет терминальный объект T . Точка объекта $A \in \mathbb{C}$ — это морфизм $x: T \rightarrow A$. Множество точек объекта A

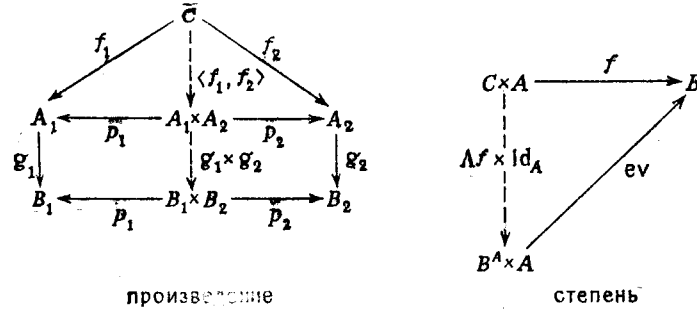


Рис. 5.1

обозначается через $|A|$. Говорят, что объект A имеет достаточно точек, если для любых $f, g: A \rightarrow A$ мы имеем

$$f \neq g \Rightarrow (\exists x \in A) (f \circ x \neq g \circ x).$$

Отсюда следует, что это верно и для любых $f, g: A \rightarrow B$.

Заметим, что в д. з. к. выполнены равенства

$$\Lambda(h \circ g \circ \text{id}_A) = \Lambda(h) \circ g, \quad \langle f, g \rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h \rangle, \\ f \times g \circ \langle h, k \rangle = \langle f \circ h, g \circ k \rangle.$$

5.5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{C}$ — д. з. к. Объект $U \in \mathbb{C}$ называется рефлексивным, если U^U есть ретракт объекта U , т. е. имеются морфизмы $F: U \rightarrow U^U$ и $G: U^U \rightarrow U$, такие, что

$$F \circ G = \text{id}_{U^U}.$$

5.5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{C}$ — д. з. к. с рефлексивным объектом U (и соответствующими ему отображениями F, G). Тогда эти данные следующим образом определяют синтаксическую аппликативную структуру $\mathfrak{M}(\mathbb{C}) (= \mathfrak{M}(\mathbb{C}, U, F, G))$.

(i) Предметная область структуры $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$ есть $|U|$.

(ii) Пусть $\text{Ar}: U^2 \rightarrow U$ — это отображение $\text{ev}_{U, U} \circ F \times \text{id}_U$. Для $f, g: A \rightarrow U$ положим $f \cdot_A g = \text{Ar} \circ \langle f, g \rangle$. В частности $x, y \in |U|$

$$x \cdot y = x \cdot_T y = \text{Ar} \circ \langle x, y \rangle.$$

Как аппликативная структура $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$ совпадает с $\langle |U|, \cdot \rangle$.

(iii) $U^0 = T$, $U^{n+1} = U^n \times U$. Пусть $\Delta = x_1, \dots, x_n$ — последовательность различных переменных. Положим $U^\Delta = U^n$.

(iv) $\pi_i^\Delta: U^\Delta \rightarrow U$ — каноническая проекция на i -ю координату.

(v) Если $f_1, \dots, f_n: A \rightarrow U$, то $\langle f_1, \dots, f_n \rangle: A \rightarrow U^n$ определяется равенствами

$$\langle \rangle = !_A, \quad \langle f_1, \dots, f_{n+1} \rangle = \langle \langle f_1, \dots, f_n \rangle, f_{n+1} \rangle.$$

Очевидно, что $\pi_{x_i}^\Delta \circ \langle f_1, \dots, f_n \rangle = f_i$.

(vi) Пусть $\Gamma = y_1, \dots, y_m$, причем $\{\vec{y}\} \subseteq \{\vec{x}\}$. Положим по определению

$$\Pi_\Gamma^\Delta = \langle \pi_{y_1}^\Delta, \dots, \pi_{y_m}^\Delta \rangle: U^\Delta \rightarrow U^\Gamma.$$

Это — каноническое «уточнение», т. е. аналог отображения $\langle \lambda \langle x_1, \dots, x_n \rangle. \langle y_1, \dots, y_m \rangle \rangle$.

(vii) Для $\{\Delta\} \cong \text{FV}(M)$ мы следующим образом определим индукцией по построению M морфизм $[M]_\Delta: U^\Delta \rightarrow U$ так, чтобы подразумеваемой интерпретацией для $[M(x, y)]_{x, y}$ было $\langle \lambda \langle x, y \rangle. [M(c_x, c_y)] \rangle$:

$$[x]_\Delta = \pi_x^\Delta;$$

$$[c_a]_\Delta = a \circ !_U (для a \in |U|);$$

$$[PQ]_\Delta = [P]_\Delta \cdot [Q]_\Delta;$$

$[\lambda x. P]_\Delta = G \circ \Lambda([P]_\Delta, x)$, где, пользуясь соглашением о переименовании переменных, мы предполагаем, что $x \notin \{\Delta\}$.

(viii) Для оценки ρ в $|U|$ положим

$$\rho^\Delta = \rho^{x_1, \dots, x_n} = \langle \rho(x_1), \dots, \rho(x_n) \rangle,$$

$$[M]_\rho = [M]_\Delta \circ \rho^\Delta, \quad где \Delta = \text{FV}(M).$$

Очевидно, что $[M]_\rho \in |U|$.

(ix) Наконец, обозначим через $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$ структуру $\langle |U|, \cdot, [] \rangle$.

5.5.4. ЛЕММА. (i) Пусть $\{\Delta\} \cong \{\Gamma\} \cong \text{FV}(M)$. Тогда $[M]_\Delta = [M]_\Gamma \circ \Pi_\Gamma^\Delta$.

(ii) Пусть $\{\Delta\} = \{\vec{x}\} \cong \text{FV}(M)$, $\vec{N}$ согласован с $\vec{x}$ и $\{\Gamma\} \cong \text{FV}(\vec{N})$. Тогда

$$[M[\vec{x} := \vec{N}]]_\Gamma = [M]_\Delta \circ \langle [N_1]_\Gamma, \dots, [N_n]_\Gamma \rangle.$$

(iii) Пусть $\{\Delta\} \cong \text{FV}(\lambda x. M)$, $\{\Gamma\} \cong \text{FV}((\lambda x. M)N)$ и $\{\Gamma\} \cong \{\Delta\}$. Тогда

$$[M[x := N]]_\Gamma = [M]_{\Delta, x} \circ \langle \Pi_\Gamma^\Delta, [N]_\Gamma \rangle.$$

Доказательство. (i) и (ii) устанавливаются индукцией по построению терма M . Мы рассмотрим только случай $M \equiv \lambda y. P$.

$$(i) [\lambda y. P]_\Gamma \circ \Pi_\Gamma^\Delta = G \circ \Lambda([P]_\Gamma, y \circ \Pi_\Gamma^\Delta) =$$

$$= G \circ \Lambda([P]_{\Gamma, y} \circ \Pi_\Gamma^\Delta \times \text{id}_U) \quad (\text{в силу 4.2(1)}) =$$

$$= G \circ \Lambda([P]_{\Gamma, y} \circ \Pi_{\Gamma, y}^\Delta) \stackrel{\text{iii}}{=} G \circ \Lambda([P]_{\Delta, y}) = [\lambda y. P]_\Delta.$$

Здесь IH означает «по предположению индукции».

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \llbracket \lambda y. P[x := \vec{N}] \rrbracket_{\Gamma} &= \llbracket \lambda y. P[x, y := \vec{N}, y] \rrbracket_{\Gamma} = \\
 &= G \circ \Lambda(\llbracket P[x, y := \vec{N}, y] \rrbracket_{\Gamma, y}) = \\
 &= \overline{\Pi} G \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, y} \circ \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma, y}, \llbracket y \rrbracket_{\Gamma, y} \rangle) = \\
 &= \overline{\pi} G \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, y} \circ \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \times \text{id}_U \rangle \text{ (см. ниже)} = \\
 &= G \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, y} \circ \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \rangle) = \llbracket \lambda y. P \rrbracket_{\Delta} \circ \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \rangle,
 \end{aligned}$$

где * обосновывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma, y}, \llbracket y \rrbracket_{\Gamma, y} \rangle &\stackrel{(i)}{=} \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \circ \Pi_{\Gamma, y}^{\Gamma, y}, \pi_y^{\Gamma, y} \rangle = \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \circ p_1, \text{id}_U \circ p_2 \rangle = \\
 &= \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \rangle \times \text{id}_U \circ \langle p_1, p_2 \rangle = \langle \llbracket \vec{N} \rrbracket_{\Gamma} \rangle \times \text{id}_U.
 \end{aligned}$$

(iii) Применяем (ii) к $\Delta' \equiv \Delta$, x и Γ , где $\Delta \equiv \vec{y}$ и $M[x := N] \equiv M[\vec{y}, x := \vec{y}, N]$. $\square$

5.5.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda(\mathfrak{M}(\mathbb{C}))$ и $\{\Delta\} \equiv \equiv \text{FV}(MN)$. Тогда

$$\lambda \vdash M = N \Rightarrow [M]_{\Delta} = [N]_{\Delta}.$$

Доказательство. Применяем индукцию по длине доказательства равенства $M = N$. Рассмотрим только наиболее существенную аксиому (β) и правило ω .

Аксиома $(\lambda x.P)Q = P[x := Q]$.

$$\begin{aligned}
 \llbracket (\lambda x.P)Q \rrbracket_{\Delta} &= (G \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x})) \cdot_{U\Delta} \llbracket Q \rrbracket_{\Delta} = \\
 &= \text{ev} \circ \langle F \circ G \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x}), \llbracket Q \rrbracket_{\Delta} \rangle = \\
 &= \text{ev} \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x} \times \text{id} \circ \langle \text{id}, \llbracket Q \rrbracket_{\Delta} \rangle) = \\
 &= \llbracket P \rrbracket_{\Delta, x} \circ \langle \text{id}, \llbracket Q \rrbracket_{\Delta} \rangle = \llbracket P[x := Q] \rrbracket_{\Delta} \text{ (по лемме 5.5.4 (iii)).}
 \end{aligned}$$

Правило $P = Q \Rightarrow \lambda x.P = \lambda x.Q$.

$$\begin{aligned}
 \llbracket P \rrbracket_{\Delta} &= \llbracket Q \rrbracket_{\Delta} \text{ (по предположению индукции)} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \llbracket P \rrbracket_{\Delta} \circ \Pi_{\Delta}^{\Delta, x} = \llbracket Q \rrbracket_{\Delta} \circ \Pi_{\Delta}^{\Delta, x} \Rightarrow \llbracket P \rrbracket_{\Delta, x} = \llbracket Q \rrbracket_{\Delta, x} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \llbracket \lambda x.P \rrbracket_{\Delta} = \llbracket \lambda x.Q \rrbracket_{\Delta}. \quad \square
 \end{aligned}$$

5.5.6. ТЕОРЕМА. Любая д.з.к. $\mathbb{C}$ с рефлексивным объектом U определяет λ -алгебру $\mathfrak{M}(\mathbb{C}) = \langle |U|, \cdot, [\] \rangle$.

Доказательство получается непосредственно из предложения 5.5.5 и определения оценки $[]_{\rho}$. $\square$

5.5.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{C}, U, F, G)$.

- (i) Пусть $\{\Delta\} \equiv \text{FV}(M)$. Тогда $[1M]_{\Delta} = G \circ F \circ [M]_{\Delta}$ в $\mathbb{C}$.
- (ii) U имеет достаточно точек $\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ есть λ -модель.
- (iii) $U \cong U^U$ посредством $F, G \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models 1 = \text{id}$.
- (iv) $U \cong U^U$ посредством F, G и U имеет достаточно точек $\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ экстенциональна.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad [1M]_{\Delta} &= [\lambda y. My]_{\Delta} = G \circ \Lambda(\text{ev} \circ \langle F \circ [M]_{\Delta, y}, \llbracket y \rrbracket_{\Delta, y} \rangle) = \\
 &= G \circ \Lambda(\text{ev} \circ \langle F \circ [M]_{\Delta} \circ \Pi_{\Delta}^{\Delta, y}, \pi_y^{\Delta, y} \rangle) = \\
 &= G \circ \Lambda(\text{ev} \circ \langle F \circ [M]_{\Delta} \circ p_1, p_2 \rangle) = \\
 &= G \circ \Lambda(\text{ev} \circ (F \circ [M]_{\Delta}) \times \text{id}) = \\
 &= G \circ F \circ [M]_{\Delta}.
 \end{aligned}$$

(ii) $(\Rightarrow)$ Пусть U имеет достаточно точек. Тогда это имеет место и для $U^1 (\cong U)$. Теперь для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \mathfrak{M}) ax = bx &\Rightarrow \text{ev} \circ \langle F \circ a, x \rangle = \text{ev} \circ \langle F \circ b, x \rangle \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{ev} \circ (F \circ a) \times \text{id} \circ \langle \text{id}, x \rangle = \text{ev} \circ (F \circ b) \times \text{id} \circ \langle \text{id}, x \rangle \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{ev} \circ (F \circ a) \times \text{id} = \text{ev} \circ (F \circ b) \times \text{id} \text{ (так как } U \text{ имеет}
 \end{aligned}$$

достаточно точек) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1a = 1b \text{ (так как в силу (i) } 1c = G \circ F \circ c = G \circ \Lambda(\text{ev} \circ (F \circ c) \times \text{id}).$$

Следовательно, $\mathfrak{M}$ является λ -моделью.

$(\Leftarrow)$ Предположим, что $\mathfrak{M}$ есть λ -модель, и пусть $f, g: U \rightarrow U$. Тогда

$$(\forall x \in |U|) f \circ x = g \circ x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \forall x \hat{f}.x = \hat{g}.x \text{ (где } \hat{f} = G \circ \Lambda(f \circ p_2) \text{ и верно } \hat{f}.x = f \circ x) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1.\hat{f} = 1.\hat{g} \Rightarrow G \circ F \circ \hat{f} = G \circ F \circ \hat{g} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \Lambda(f \circ p_2) = \Lambda(g \circ p_2) \text{ (так как } F \circ G = \text{id}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f \circ p_2 = g \circ p_2 \Rightarrow f = g.
 \end{aligned}$$

Поэтому U имеет достаточно точек.

(iii) $(\Rightarrow)$ Если $U \cong U^U$ через F, G , то $G \circ F = \text{id}_U$, следовательно, согласно (i), $[1M]_{\Delta} = [M]_{\Delta}$, в частности $[1x]_{\Delta} = [x]_{\Delta}$. Теми же рассуждениями, что и в доказательстве предложения 5.5.5, отсюда получается, что

$$[1]_{\Delta} = [\lambda x. 1x]_{\Delta} = [\lambda x. x]_{\Delta} = [1]_{\Delta},$$

т.е. $\mathfrak{M} \models 1 = \text{id}$.

($\Leftarrow$) Допустим, что $\mathfrak{M} \models 1 = I$. Тогда

$$\begin{aligned} \llbracket 1 \rrbracket &= \llbracket \lambda xy. xy \rrbracket = G \circ \Lambda (\llbracket \lambda y. xy \rrbracket_x) = \\ &= G \circ \Lambda (G \circ F \circ \llbracket x \rrbracket_x) \text{ (в силу (i))} = G \circ \Lambda (G \circ F \circ p_2); \end{aligned}$$

кроме того, $\llbracket I \rrbracket = G \circ \Lambda (p_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} G \circ \Lambda (G \circ F \circ p_2) &= G \circ \Lambda (p_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Lambda (G \circ F \circ p_2) = \Lambda (p_2) \text{ (применяем } F) \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \circ F \circ p_2 = p_2 \text{ (так как } \Lambda h \text{ однозначно определяет } h) \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \circ F = \text{id}_U \text{ (применяем } \langle I, \text{id}_U \rangle). \end{aligned}$$

(iv) В силу предложения 5.2.10 и (ii), (iii). $\square$

Пусть $\mathfrak{A}$ есть λ -алгебра, возникающая из конкретной категории, т. е., грубо говоря, категории, основанной на множествах. Тогда $\mathfrak{A}$ будет λ -моделью и интерпретация в $\mathfrak{A}$ имеет простой вид.

5.5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Д.з.к. $\mathbb{C}$ называется *строго конкретной*, если имеется функтор $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \text{Set}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Φ строгий (т. е. он инъективен на стрелках);
2. Φ полный (т. е. сюръективный) на $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(T, A)$ для $A \in \mathbb{C}$;
3. Φ сохраняет терминальный объект, произведения и проекции;
4. для любых $A, B \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения

$$\Phi(B^A) \subseteq \Phi(B)^{\Phi(A)}, \quad \Phi(\text{ev}_{A,B}) = \text{ev}_{\Phi A, \Phi B} \upharpoonright \Phi(B^A) \times \Phi(A).$$

Отметим, что при выполнении этих условий любой объект в $\mathbb{C}$ имеет достаточно точек. Более того, $\Phi(\Lambda_{\mathbb{C}} f) = \Lambda_{\text{Set}}(\Phi f)$, где $\Lambda_{\text{Set}} g(a_1, \dots, a_n) = \lambda d. g(a_1, \dots, a_n, d)$ для $g: X^n \times Y \rightarrow Z$ в категории Set . Мы будем обозначать через $\{*\}$ терминальный объект этой категории.

Как полные частично упорядоченные множества, так и полные решетки образуют строго конкретные категории.

5.5.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{C}$ — строго конкретная категория с рефлексивным объектом U .

- (i) определим биекцию $\varphi: |U| \rightarrow \Phi(U)$ равенством $\varphi(x) = \Phi(x)(*)$;
- (ii) определим морфизм $\square: \Phi(U^U) \rightarrow \Phi(U)$ равенством $\square = \Phi(G)$;
- (iii) положим $a \cdot b = \Phi(F)(a)(b)$ для $a, b \in \Phi(U)$;
- (iv) положим $\llbracket M \rrbracket_{\varphi}^{\Phi} = \varphi(\llbracket \varphi^{-1}(M) \rrbracket_{\varphi^{-1} \circ \rho}^{\mathbb{C}})$ для $M \in \Lambda(\Phi(U))$;
- (v) положим $\mathfrak{M}^{\Phi} = \langle \Phi(U), \cdot, \llbracket \cdot \rrbracket^{\Phi} \rangle$.

5.5.10. ТЕОРЕМА (Койманс [1982]). (i) Отображение $\llbracket \cdot \rrbracket^{\Phi}$ из определения 5.5.9 удовлетворяет следующим условиям:

1. $\llbracket x \rrbracket_{\rho}^{\Phi} = \rho(x)$;
 2. $\llbracket c_a \rrbracket_{\rho}^{\Phi} = a$ для $a \in \Phi(U)$;
 3. $\llbracket PQ \rrbracket_{\rho}^{\Phi} = \llbracket P \rrbracket_{\rho}^{\Phi} \cdot \llbracket Q \rrbracket_{\rho}^{\Phi}$;
 4. $\llbracket \lambda x. P \rrbracket_{\rho}^{\Phi} = \square(\lambda d. \llbracket P \rrbracket_{\rho(x:=d)}^{\Phi})$.
- (ii) $\mathfrak{M}^{\Phi}$ есть λ -модель, изоморфная $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$.

Доказательство. (i) Установим, например, свойство 4. Положим $\rho_0 = \varphi^{-1} \circ \rho$ и $\Delta = FV(\lambda x. P)$. Тогда

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda x. P \rrbracket_{\rho}^{\Phi} &= \Phi(G \circ \Lambda_{\mathbb{C}}(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x}) \circ \rho_0^{\Delta})(*) \text{ (где мы предположили для простоты, что } \varphi^{-1}(P) = P) = \\ &= \square(\Lambda_{\text{Set}}(\Phi(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x}))(\rho^{\Delta})) = \\ &= \square(\lambda d. \Phi(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x})(\rho(x:=d)^{\Delta} \cdot x)) = \\ &= \square(\lambda d. \Phi(\llbracket P \rrbracket_{\Delta, x} \circ \rho_0(x:=\varphi^{-1}(d))^{\Delta} \cdot x)(*)) = \\ &= \square(\lambda d. \Phi(\llbracket P \rrbracket_{\varphi^{-1} \circ \rho(x:=d)})) = \\ &= \square(\lambda d. \llbracket P \rrbracket_{\rho(x:=d)}^{\Phi}). \end{aligned}$$

(ii) Отображение $\varphi: \mathfrak{M}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}^{\Phi}$ является изоморфизмом в силу определения 5.5.9 (iv). В силу условия 4 отсюда следует, что $\mathfrak{M}^{\Phi}$ является λ -моделью. $\square$

$\mathfrak{M}^{\Phi}$ называется *конкретным вариантом* $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$ (под действием функтора Φ).

Теперь мы докажем, что любая λ -алгебра может быть получена из некоторой д.з.к. с рефлексивным объектом.

5.5.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая λ -алгебра. Оболочка Каруби этой алгебры, обозначаемая через $\mathbb{C}(\mathfrak{A})$, — это категория, определяемая следующим образом. Положим $a \circ b = \lambda x. a(bx)$ для $a, b \in \mathfrak{A}$.

Множество объектов категории: $\{a \in \mathfrak{A} \mid a \circ a = a\}$.

Множество морфизмов: $\text{Hom}(a, b) = \{f \in \mathfrak{A} \mid b \circ f \circ a = f\}$.

Тождественный морфизм: $\text{id}_a = a$.

Композиция морфизмов: $f \circ g$.

Легко проверить, что $\mathbb{C}(\mathfrak{A})$ — действительно категория.

Каруби [1978] определил оболочку для аддитивных категорий, назвав ее «производная псевдоабелева категория». Эта конструкция может быть обобщена на произвольные категории. Затем это понятие следующим образом применяется к λ -алгебре $\mathfrak{A}$. Вводится моноид

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = (\{a \in \mathfrak{A} \mid a = 1a\}, \circ, I),$$

рассматриваемый как категория с единственным объектом, морфизмами которой служат $a \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ со своей композицией.

Нам нужны некоторые обозначения, связанные с λ -исчислением. Пусть $[M, N] = \lambda z.zMN$ — спаривающая функция λ -исчисления с проекциями $\pi_i = \lambda y.y(\lambda a_1 a_2. a_i)$ для $i = 1, 2$. Пусть $[M_1] = M_1$, $[M_1, \dots, M_{n+1}] = [[M_1, \dots, M_n], M_{n+1}]$, и пусть π_i^n — построенные каноническим образом λ -термы, такие, что $\pi_i^n[M_1, \dots, M_n] = M_i$ для $1 \leq i \leq n$. $[\pi_1^1 = I; \pi_{n+1}^{n+1} = \pi_2; \pi_i^{n+1} = \pi_i^n \circ \pi_1$ для $1 \leq i \leq n]$.

5.5.12. Предложение (Скотт, [1980]). (i) $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ — д.з.к.

(ii) I — рефлексивный объект в $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ с соответствующим отображением $F = G = 1$.

Доказательство. (i) 1. Терминальным объектом является $t = \lambda xy.y$. Заметим, что $f: a \rightarrow t \Leftrightarrow f = t$.

2. Произведения. Пусть $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{A})$. Тогда $a_1 \times a_2 = \lambda z.[a_1(\pi_1 z), a_2(\pi_2 z)]$ — декартово произведение с проекциями $p_i^{a_i} = a_i \circ \pi_i$;

$$\langle f, g \rangle = \lambda z.[fz, gz].$$

3. Степени. Для $a, b \in \mathcal{C}(\mathfrak{A})$ положим

$$b^a = \lambda z.b \circ z \circ a, \quad \text{ev}_{a,b} = \lambda z.b(\pi_1 z(a(\pi_2 z))), \quad \Lambda(f) = \lambda xy.f[x, y].$$

Вычисления, показывающие, что все нужные условия выполнены, проводятся непосредственно и предоставляются читателю.

(ii) Заметим, что $I^1 = I$, $1: I \rightarrow I$, $1: I \rightarrow I$ и $1 \circ 1 = 1 = \text{id}_I$. $\square$

5.5.13. Теорема (Койманс [1982]). $\mathfrak{M}(\mathcal{C}(\mathfrak{A}), I, 1, 1) \cong \mathfrak{A}$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{M}(\mathcal{C}(\mathfrak{A}))$ через $\mathfrak{M}$. Индукцией по построению терма $M \in \Lambda$ можно доказать равенство

$$(+)\quad \llbracket M \rrbracket_x^{\mathfrak{M}} = \lambda z.M[x_1, \dots, x_n; \pi_1^n z, \dots, \pi_n^n z].$$

Рассмотрим, например, случай $M \equiv \lambda y.P$.

$$\begin{aligned} \llbracket \lambda y.P \rrbracket_x^{\mathfrak{M}} &= G \circ \Lambda(\llbracket P \rrbracket_{x,y}^{\mathfrak{M}}) = \\ &= 1 \circ \lambda p q. (\lambda z.P[x_1, \dots, x_n, y; \pi_1^{n+1} z, \dots, \pi_{n+1}^{n+1} z][p, q]) = \\ &= \lambda p q. P[x_1, \dots, x_n, y; \pi_1^n p, \dots, \pi_n^n p, q] = \\ &= \lambda p. (\lambda y.P)[x_1, \dots, x_n; \pi_1^n p, \dots, \pi_n^n p] = \\ &= \lambda z.M[x_1, \dots, x_n; \pi_1^n z, \dots, \pi_n^n z]. \end{aligned}$$

Обозначим через $\odot$ операцию применения функции к аргументу в модели $\mathfrak{M}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} a \odot b &= \text{Ap} \circ \langle a, b \rangle = \text{ev}_{I,I} \circ \langle 1 \circ a, b \rangle = \lambda z.\text{ev}_{I,I}[1(az), bz] = \\ &= \lambda z.az(bz) = Sab. \end{aligned}$$

Определим теперь операцию $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{M}$, полагая $\varphi(a) = Ka$. Очевидно, что φ инъективна. Если $x \in |I| = t \rightarrow I$, то x — константа, так что $x = K(xI) = \varphi(xI)$. Поэтому φ сюръективна. Наконец, φ — гомоморфизм. Действительно,

$$1. \varphi(xy) = K(xy) = S(Kx)(Ky) \text{ (так как } \mathfrak{M} \text{ есть } \lambda\text{-алгебра)} = \\ = \varphi(x) \odot \varphi(y),$$

2. $\varphi(K) = KK = \llbracket K \rrbracket^{\mathfrak{M}}$ в силу (+), и аналогичные соотношения имеют место для S .

Поэтому φ — изоморфизм и $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}$. $\square$

Из предыдущего следует, что любая λ -алгебра (λ -модель) может быть получена из д.з.к. с рефлексивным объектом U (имеющим достаточно точек).

Замечания. (i) Нетрудно показать (см. Койманс [1982]), что если $\mathfrak{A}$ есть λ -модель, то любой объект категории $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ имеет достаточно точек.

(ii) В общем случае неверно, что $\mathcal{C}(\mathfrak{M}(\mathcal{C}, U)) \cong \mathcal{C}$. Категория $\mathcal{C}$ может иметь гораздо больше объектов.

Понятие гомоморфизма λ -алгебр допускает категорную характеристику.

5.5.14. Определение. Функтор Φ из одной д.з.к. в другую называется *декартовым*, если он сохраняет терминальный объект, произведения и степени.

5.5.15. Предложение. (i) Пусть $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2$) — д.з.к. с рефлексивными объектами U_i через морфизмы F_i, G_i . Пусть $\Phi: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ — декартов функтор, такой, что $\Phi(U_1) = U_2$, $\Phi(F_1) = F_2$, $\Phi(G_1) = G_2$. Тогда Φ индуцирует гомоморфизм $\Phi^*: \mathfrak{M}(\mathcal{C}_1) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{C}_2)$.

(ii) Если $\varphi: \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ — гомоморфизм, то он индуцирует декартов функтор $\varphi^+: \mathcal{C}(\mathfrak{A}_1) \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{A}_2)$, сохраняющий рефлексивные элементы I и ретракцию 1 . Кроме того, $\varphi^{+*} = \varphi$ с точностью до изоморфизма.

Доказательство. (i) Для $x \in |U_1|$ положим по определению $\Phi^*(x) = \Phi(x) \in |U_2|$. Это — гомоморфизм, так как сохраняются F, G и декартова структура.

(ii) Для объекта $a \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_1)$ положим по определению $\varphi^+(a) = \varphi(a)$, а для морфизма $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathfrak{A}_1)}(a, b)$ положим $\varphi^+(f) = \varphi(f)$. Так как φ сохраняет все замкнутые λ -термы, мы получили декартов функтор, сохраняющий I и 1 . Очевидно, что $\varphi^{+*} = \varphi$ на $\mathfrak{M}(\mathcal{C}(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}$. $\square$

5.6. Другие описания моделей. Категоричные модели

Лямбда-модели были определены как лямбда-алгебры, удовлетворяющие аксиоме Майера — Скотта. Так как комбинаторные аксиомы, описывающие λ -алгебры, трудно обозримы, можно

попробовать упрощать их при наличии этой новой аксиомы. Получающийся результат установлен (независимо) Майером и Скоттом.

5.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем следующие комбинаторные термы:

$$1_1 = 1 = S(KI); \quad 1_{n+1} = S(K1)(S(K1_n)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты 5.6.2, 5.6.3 и 5.6.6(i) сохраняются, если использовать более простое определение $1_1 = 1$, $1_{n+1} = S(K1_n)$.

5.6.2. ЛЕММА. (i) Если $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра, то

$$\mathfrak{M} \models 1_n a b_1 \dots b_n = a b_1 \dots b_n.$$

(ii) Если $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра, то

$$\mathfrak{M} \models 1_n = \lambda a b_1 \dots b_n. a b_1 \dots b_n.$$

Доказательство. Каждый из пунктов (i), (ii) доказывается индукцией по n . Например, в λ -алгебре

$$1_1 = S(KI) = (\lambda x y z. x z (y z))(KI) = \lambda y z. KI z (y z) = \lambda y z. y z. \quad \square$$

5.6.3. ТЕОРЕМА (Майер [1982], Скотт [1980]). Пусть $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, k, s \rangle$. Тогда $\mathfrak{M}$ является λ -алгеброй в том и только том случае, когда она удовлетворяет следующим условиям:

1. $Kxy = x$;
2. $Sxyz = xz(yz)$;
3. $\forall x (ax = bx) \Rightarrow 1a = 1b$;
4. $1_2 K = K$;
5. $1_3 S = S$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $\mathfrak{M}$ — некоторая λ -модель, то соотношения 1, 2, 3 имеют место по определению. Далее, так как $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра, то выполняются и соотношения 4, 5, ибо эти равенства доказуемы в λ .

($\Leftarrow$) Покажем сначала, что для всех $a, b \in \mathfrak{M}$ имеют место равенства $1(Ka) = Ka$ и $1(Sab) = Sab$.

Действительно, $Ka = 1_2 Ka = S(K1)Ka = 1(Ka)$ и аналогично для S .

Так как $\lambda x.A$ всегда имеет вид KP или SPQ , отсюда следует, что

$$(*) \quad 1(\lambda x.A) = \lambda x.A.$$

Это влечет слабую экстенциональность $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \forall x (A = B) &\Rightarrow \forall x ((\lambda x.A)x = (\lambda x.B)x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1(\lambda x.A) = 1(\lambda x.B) \text{ (в силу 3)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda x.A = \lambda x.B \text{ (в силу (*))}. \end{aligned}$$

Остается показать, что $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра. По лемме 5.2.3 достаточно показать, что

- (а) $\lambda \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N$,
- (б) $\mathfrak{M} \models K = K_{\lambda, CL}, \quad \mathfrak{M} \models S = S_{\lambda, CL}$.

Пункт (а) получается теперь индукцией по доказательству равенства $M = N$, причем слабая экстенциональность используется при рассмотрении правила $P = Q \Rightarrow \lambda x.P = \lambda x.Q$.

Пункт (б) мы докажем в несколько шагов.

Шаг 1. $\forall x_1, \dots, x_n (a x_1 \dots x_n = b x_1 \dots x_n) \Rightarrow 1_n a = 1_n b$.

Доказательство получается индукцией по n . Если $n = 1$, то это условие 3.

Если $n = p + 1$, то (обозначая предположение индукции через IH) имеем

$$a x_1 \dots x_{p+1} = b x_1 \dots x_{p+1} \xRightarrow{IH} 1_p (a x_1) = 1_p (b x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(K1_p) a x_1 = S(K1_p) b x_1 \Rightarrow 1(S(K1_p) a) = 1(S(K1_p) b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(K1)(S(K1_p)) a = S(K1)(S(K1_p)) b \Rightarrow 1_{p+1} a = 1_{p+1} b. \quad \square_1$$

Шаг 2. $1(1_n a) = 1_n a$.

Доказательство. Отметим сначала, что $1ax = ax$, откуда $1(1a) = 1a$ в силу условия 3. Поэтому для $n = 1$ все в порядке. Если $n = p + 1$, то $1_n a = 1(\dots)$, откуда

$$1(1_n a) = 1(1 \dots) = 1 \dots = 1_n a. \quad \square_2$$

Шаг 3. $1_n (\lambda x_1 \dots x_n. A) = \lambda x_1 \dots x_n. A$.

Доказательство индукцией по n . Если $n = 1$, то это соотношение (*). Если $n = p + 1$, то

$$\begin{aligned} 1_n (\lambda x_1 \dots x_n. A) x_1 &= S(K1)(S(K1_n)) (\lambda x_1 \dots x_n. A) x_1 = \\ &= 1_n (\lambda x_2 \dots x_n. A) = \lambda x_2 \dots x_n. A \xRightarrow{IH} (\lambda x_1 \dots x_n. A) x_1. \end{aligned}$$

Следовательно, $1(1_n (\lambda x_1 \dots x_n. A)) = 1(\lambda x_1 \dots x_n. A)$ и потому $1_n (\lambda x_1 \dots x_n. A) = \lambda x_1 \dots x_n. A$ в силу (*) и шага 2. $\square_3$

Пусть, наконец, $K' = K_{\lambda, CL} = \lambda x y. x$. Тогда

$Kxy = x = K'xy \Rightarrow 1_2 K = 1_2 K'$ (в силу шага 1) $\Rightarrow K = K'$ (в силу условия 4 и шага 3).

Аналогично получаем $S = \lambda x y z. x z (y z)$. $\square$

Следующее определение Майера [1982] еще более упрощает описание сущности λ -модели.

5.6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Комбинаторная модель — это структура $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, k, s, e \rangle$, удовлетворяющая следующим соотношениям:

- (1) $Kxy = x$;
- (2) $Sxyz = xz(yz)$;

- (3) $exy = xy$;
 (4) $\forall x(ax = bx) \rightarrow ea = eb$.

(ii) Комбинаторная модель называется *устойчивой*, если выполнены также соотношения

- (5) $ee = e$;
 (6) $e_2K = K$;
 (7) $e_3S = S$.

Здесь подразумевается, что $e_1 = e$, $e_{n+1} = S(Ke)(S(Ke_n))$.

5.6.5. ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, k, s, e \rangle$ — комбинаторная модель. Тогда

- (i) $e_{n+1}a = a \Leftrightarrow ea = a \wedge \forall x(e_n(ax) = ax)$.
 (ii) $e_na = a \Leftrightarrow \forall x_1 \dots x_i(e(ax_1 \dots x_i) = ax_1 \dots x_i), 0 \leq i < n$.
 (iii) $\mathfrak{M}$ устойчива $\Leftrightarrow e, k, ka, s, sa, sab$ являются при любых a, b фиксированными точками для e .

Доказательство. (i) $(\Rightarrow)$ По предположению

$$(1) \quad a = S(Ke)(S(Ke_n))a = e(S(Ke_n))a.$$

Отсюда по определению 5.6.4(3) получаем $ax = S(Ke_n)ax = e_n(ax)$, откуда, согласно 5.6.4(4) и (1), $ea = e(S(Ke_n))a = a$.

$(\Leftarrow)$ В любой комбинаторной модели имеет место $ea b = ab$, поэтому

$$(2) \quad e(ea) = ea.$$

Далее, $e_{n+1}a = e(S(Ke_n))a$, откуда в силу (2)

$$(3) \quad e(e_{n+1}a) = e_{n+1}a,$$

но, кроме того, $e_{n+1}ax = e_n(ax) = ax$. Отсюда по определению 5.6.4(4) и предположению имеем $e(e_{n+1}a) = ea = a$. Вместе с (3) это дает $e_{n+1}a = a$.

- (ii) устанавливается индукцией по n с помощью п. (i).
 (iii) $(\Rightarrow)$ Доказательство для Sab :

$$Sab = e_3Sab = e(Sab).$$

Доказательство для Sa :

$$Sa = e_3Sa = S(Ke)(Sa),$$

откуда в силу (4) и (2) следует, что Sa — неподвижная точка для e .

Аналогичным образом получается, что S, Ka и K — неподвижные точки. По предположению e есть неподвижная точка для e .

$(\Leftarrow)$ Имеет место по предположению и (ii). $\square$

5.6.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, k, s, e \rangle$ — устойчивая комбинаторная модель. Тогда $e = 1$ и $\langle X, \cdot, k, s \rangle$ есть λ -модель. Кроме того, элементы k, s однозначно определяются выбором e .

(ii) Если $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot, k, s, e \rangle$ — комбинаторная модель, то $\mathfrak{M}' = \langle X, \cdot, k', s', e' \rangle$, где $k' = e_2k$, $s' = e_3k$ и $e' = ee$ — устойчивая комбинаторная модель.

Доказательство. (i) Заметим, что $xy = 1xy$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} ex &= e(1x) \text{ (по определению 5.6.4 (4))} \\ &= 1x \text{ (по лемме 5.6.5 (iii), так как } 1x = S(KI)x \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ee = e1 \text{ (по определению 5.6.4 (4))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = 1 \text{ в силу устойчивости и леммы 5.6.5 (iii).}$$

Поэтому $\langle X, \cdot, k, s \rangle$ является λ -моделью в силу теоремы 5.6.3. Чтобы установить единственность k, s , допустим, что $\langle X, \cdot, k_0, s_0, e \rangle$ — также устойчивая комбинаторная модель, и покажем, что $k = k_0, s = s_0$. Имеем

$$\begin{aligned} kxy &= x = k_0xy \Rightarrow e(kx) = e(k_0x) \Rightarrow s(ke)kx = s(ke)k_0x \Rightarrow \\ &\Rightarrow e(e(ke)k) = e(s(ke)k_0) \Rightarrow e_2k = e_2k_0 \Rightarrow k = k_0 \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что $s = s_0$.

(ii) Пусть теперь $x \in \{e', k', k'a, s', s'a, s'ab\}$. По лемме 5.6.5 (iii) достаточно показать, что $ex = x$, так как тогда $e'x = eex = ex = x$. Простые вычисления показывают, что $x = ey$ для некоторого y (например, $x = k' = e_2k = s(ke)(s(ke))k = e(s(ke)k)$). Тогда из 5.6.5(2) следует, что $ex = e(ey) = ey = x$. $\square$

Хотя в λ -модели элементы k, s однозначно определяются элементом $1 = s(kI)$, отображение, сохраняющее аппликацию и 1 , не обязательно является гомоморфизмом: достаточно рассмотреть константное отображение $\lambda x.1': \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$.

5.6.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ — комбинаторно полная аппликативная структура. Ее расширение — это комбинаторная алгебра вида $(\mathfrak{M}, k, s) = (X, \cdot, k, s)$.

(ii) $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ называется категоричной λ -моделью (λ -алгеброй, комбинаторной алгеброй), если имеется единственное расширение $(\mathfrak{M}, k, s)$, превращающее $\mathfrak{M}$ в λ -модель (λ -алгебру, комбинаторную алгебру).

(iii) Элемент e называется устойчивым, если $ee = e \wedge eab = ab \wedge \forall x(ax = bx) \rightarrow ea = eb$.

5.6.8. ТЕОРЕМА. (i) Пусть структура $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ комбинаторно полна. Пусть $[X \rightarrow X] = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ представима}\}$. Определим отображение $F: X \rightarrow [X \rightarrow X]$, полагая $F(x)(y) = xy$. Тогда $\mathfrak{M}$

может быть расширена до λ -модели в том и только том случае, когда существует отображение $G: [X \rightarrow X] \rightarrow X$, такое, что

1. $F \circ G = \text{id}_{[X \rightarrow X]}$; 2. $G \circ F \in [X \rightarrow X]$.

(ii) Отображения G , удовлетворяющие соотношениям 1, 2 п. (i), в точности соответствуют устойчивым элементам ε .

(iii) $\mathfrak{M}$ — категоричная λ -модель тогда и только тогда, когда G в п. (i) определено однозначно, тогда и только тогда, когда имеется единственный устойчивый ε .

Доказательство. (i) $(\Rightarrow)$ Допустим, что $(\mathfrak{M}, k, s)$ является λ -моделью. Положим $G(f) = 1a_f$ для какого-нибудь элемента a_f , представляющего f . Это определение корректно: если $ax = f(x) = a'x$ для всех x , то $1a = 1a'$ по аксиоме Майера — Скотта. Очевидным образом $F(1a_f) = F(a_f) = f$, откуда $F \circ G = \text{id}$. Далее, $G \circ F(a) = 1a$, так как a представляет $F(a)$; следовательно, $G \circ F$ представимо.

$(\Leftarrow)$ Пусть $k_0, s_0 \in X$ удовлетворяют аксиомам для k, s . Положим $\varepsilon_0 = G(G \circ F)$. Тогда $(X, \cdot, k_0, s_0, \varepsilon_0)$ — комбинаторная модель. Действительно,

$$\varepsilon_0 ab = G(G \circ F) ab = F(F \circ G(G \circ F)(a))(b) =$$

$$= F(a)(b) \text{ (так как } F \circ G = \text{id}) = ab,$$

$$\forall x (ax = bx) \Rightarrow F(a) = F(b) \Rightarrow G \circ F(a) = G \circ F(b) \Rightarrow \varepsilon_0 a = \varepsilon_0 b,$$

так как ε_0 представляет $G \circ F$.

Отсюда следует в силу предложения 5.6.6 (ii), что $\mathfrak{M}$ можно расширить до λ -модели.

(ii) По аналогии с (i) положим $G_\varepsilon(f) = \varepsilon a_f$ и $\varepsilon_G = G(G \circ F)$. Заметим сначала, что ε_G действительно устойчив: $\varepsilon_G \varepsilon_G = F(\varepsilon_G) \varepsilon_G = F(G(G \circ F))(G(G \circ F)) = \varepsilon_G$.

Далее, $\wedge G_\varepsilon$ и $\wedge \varepsilon_G$ взаимно обратны:

$$G_{\varepsilon_G}(f) = \varepsilon_G a_f = F \circ G(G \circ F)(a_f) = G \circ F(a_f) = G(f);$$

$$\varepsilon_{G_\varepsilon} = G_\varepsilon(G \circ F) = \varepsilon a_{G \circ F} =$$

$$= \varepsilon \varepsilon \text{ (так как } \varepsilon \text{ представляет } G_\varepsilon \circ F: G_\varepsilon \circ F(b) = \varepsilon a_{F(b)} = \varepsilon b) = \varepsilon.$$

(iii) $\mathfrak{M}$ — категоричная λ -модель $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существуют и единственны k, s , превращающие $\mathfrak{M}$ в λ -модель $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существуют и единственны k, s, ε , превращающие $\mathfrak{M}$ в устойчивую комбинаторную модель $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ имеется единственный устойчивый $\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ имеется единственное G , удовлетворяющее 1 и 2 из (i). $\square$

5.7. Обзор части V

Гл.18. Построение моделей

18.1. Графическая модель $P\omega$

ТЕОРЕМА. Пусть отображение $f: P\omega \rightarrow P\omega$ непрерывно в топологии Скотта на п. ч. у. м. $(P\omega, \subseteq)$. Тогда f полностью определяется множеством

$$\text{graph}(f) = \{(n, m) \mid m \in f(e_n)\} \in P\omega,$$

где $e_0, e_1, \dots$ — нумерация конечных элементов множества $P\omega$, и (n, m) — спаривающая функция на $\mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА. Отображение

$$\text{graph}: [P\omega \rightarrow P\omega] \rightarrow P\omega$$

— вложение множества $[P\omega \rightarrow P\omega]$ в $P\omega$ в качестве ретракта. Следовательно, в силу теоремы из § 5.4 можно считать $P\omega$ λ -моделью.

18.2. Модель D_∞

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — п. ч. у. м. Положим по определению $D_0 = D, D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$.

ТЕОРЕМА. Существуют отображения $\psi_n \in [D_{n+1} \rightarrow D_n]$, такие что для проективного предела $D_\infty = \lim_{\leftarrow} D_n$, ψ_n имеет место изоморфизм $D_\infty \cong [D_\infty \rightarrow D_\infty]$.

В частности, в силу § 5.4 D_∞ — экстенциональная λ -модель.

18.3. Модель $\mathfrak{B}$

$\mathfrak{B}$ — множество деревьев бёмовского типа, рассматриваемое как п. ч. у. м.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $A, B \in \mathfrak{B}$ положим $A \cdot B = \bigcup_n \text{BT}(M_A^n M_B^n)$, где M_A^n — терм, соответствующий n -й аппроксимации A .

ТЕОРЕМА. Операция $A \cdot B$ корректно определена и непрерывна на $\mathfrak{B}$, причем $\text{BT}(MN) = \text{BT}(M) \cdot \text{BT}(N)$.

ТЕОРЕМА. $(\mathfrak{B}, \cdot)$ — это λ -модель, такая, что для всех $M, N \in \Lambda$

$$\mathfrak{B} \models M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N).$$

18.4. Упражнения

Гл.19. Локальная структура моделей

19.1. Локальная структура модели $P\omega$

ТЕОРЕМА (теорема характеристики для $P\omega$).

$$P\omega \models M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N),$$

$$P\omega \models M \subseteq N \Leftrightarrow \text{BT}(M)^{\eta} \subseteq \text{BT}(N).$$

Основным инструментом при доказательстве этого утверждения является следующая теорема аппроксимации, утверждающая фактически, что отображение интерпретации $[\]_P: \Lambda \rightarrow P\omega$ непрерывно (в топологии Скотта на $P\omega$ и топологии деревьев на Λ).

ТЕОРЕМА. Если $M \in \Lambda$, то $M = \bigcup_k M^{(k)}$ в $P\omega$.

19.2. Локальная структура модели D_{∞}

ТЕОРЕМА (теорема характеристики для D_{∞}).

$$D_{\infty} \models M = N \Leftrightarrow M = N \in \mathcal{H}^* \Leftrightarrow \text{BT}(M) = \eta \text{BT}(N) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \infty \eta \text{BT}(M) = \infty \eta \text{BT}(N),$$

$$D_{\infty} \models M \subseteq N \Leftrightarrow \text{BT}(M)^{\eta} \subseteq \eta \text{BT}(N) \Leftrightarrow \infty \eta \text{BT}(M) \subseteq \infty \eta \text{BT}(N).$$

И снова основным инструментом является (приводимая ниже) теорема аппроксимации.

ТЕОРЕМА. В D_{∞} имеет место равенство $M = \bigsqcup_k M^{(k)}$.

Из теоремы аппроксимации получается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. $D_{\infty} \models \omega$; в частности, внутренность D_{∞}^0 модели D_{∞} экстенциональна.

19.3. Непрерывные λ -модели

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывная λ -модель — это структура $\mathfrak{M} = (X, \cdot, \lambda)$, которая является как п. ч. у. м., так и λ -моделью, причем операция $\cdot$ непрерывна и имеет место теорема аппроксимации.

ТЕОРЕМА. $P\omega$, D_{∞} и $\mathfrak{B}$ — непрерывные λ -модели.

ТЕОРЕМА. Если $\mathfrak{M}$ — непрерывная λ -модель, то

$$\text{BT}(M) = \text{BT}(N) \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{M}$ — непрерывная λ -модель и $Y \in \Lambda$ — комбинатор неподвижной точки. Тогда Y представляет в $\mathfrak{M}$ оператор наименьшей неподвижной точки для п. ч. у. м. $\mathfrak{M}$.

19.4. Упражнения

Гл.20. Глобальная структура моделей

20.1. Экстенциональность, категоричность

ТЕОРЕМА. (i) Модель $\mathfrak{M}(\lambda\eta)$ экстенциональна, а модель $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$ — нет.

$\mathfrak{M}(\lambda)$ слабо экстенциональна, а $\mathfrak{M}^0(\lambda)$ — нет.

(ii) Справедливы аналогичные утверждения, получающиеся заменой λ на $\mathcal{H}$ или $\mathcal{B}$ в (i).

ТЕОРЕМА. (i) Ни $P\omega$, ни $P\omega^0$ не экстенциональны.

(ii) Как D_{∞} , так и D_{∞}^0 экстенциональны.

ТЕОРЕМА. λ -модель $P\omega$ категорична, а D_{∞} не категорична. $P\omega$ не является категоричной комбинаторной алгеброй

20.2. Свойство области

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы говорим, что λ -алгебра $\mathfrak{M}$ дискриминирует области, если область значений любой определимой функции на $\mathfrak{M}$ бесконечна или одноэлементна.

ТЕОРЕМА. (i) Любая открытая модель из термов $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ дискриминирует области.

(ii) Если теория $\mathcal{T}$ рекурсивно перечислима, то $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ дискриминирует области.

(iii) Если $\mathfrak{M}$ — непрерывная λ -модель, то $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^0$ дискриминируют области.

20.3. Результаты о неопределимости

ТЕОРЕМА (неопределимость дискриминатора δ , введенного Чёрчем). Невозможен терм $\delta \in \Lambda$, такой, что для всех замкнутых н. ф.

$$\delta MN = \begin{cases} T, & \text{если } M \equiv N, \\ F, & \text{если } M \not\equiv N. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. Определимое отображение на $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ (или, в случае рекурсивно перечислимой теории $\mathcal{T}$, на $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$), значениями которого являются (не обязательно все) цифры, постоянно.

20.4. Локальная и глобальная представимость

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. (i) Отображение $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ локально представимо, если для любого $b \in \mathfrak{M}$ представима функция ψ_b , определяемая соотношением $\psi_b(a) = \varphi(a) \cdot b$.

(ii) λ -алгебра $\mathfrak{M}$ называется *богатой*, если любое локально представимое отображение $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ является представимым.

ТЕОРЕМА. $\mathfrak{M}$ богата $\Rightarrow \mathfrak{M}$ экстенциональна.

ТЕОРЕМА. $\mathfrak{M}(\lambda\eta)$, $\mathfrak{M}(\mathcal{H}\eta)$ и D_∞ богаты.

ТЕОРЕМА. Если $\mathfrak{M}$ — жесткая и является моделью теории $\mathcal{B}$, то $\mathfrak{M}$ не богата.

20.5. Топология деревьев на моделях

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель из открытых (или замкнутых) термов. Топология деревьев на $\mathfrak{M}$ — это наиболее сильная топология, в которой непрерывно отображение $[\]: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}$ (где Λ имеет топологию деревьев).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель из открытых или замкнутых термов.

(i) $\mathfrak{M}$ полуосмысленна $\Rightarrow \mathfrak{M}$ не является неметрической.

(ii) Если $\mathfrak{M}$ полуосмысленна, то для любого $M \in \Lambda$

M неразрешим $\Rightarrow$ единственная окрестность M

в $\mathfrak{M}$ — все пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ или $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T} = \lambda, \lambda\eta, \mathcal{H}, \mathcal{H}\eta, \mathcal{B}$ или $\mathcal{B}\eta$. Тогда для любого $M \in \Lambda$

M имеет н. ф. $\Rightarrow M$ изолирован в $\mathfrak{M}$.

20.6. Упражнения

Гл. 21. Комбинаторные группы

21.1. Комбинаторные полугруппы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — λ -алгебра, такая, что $1 = 1$. Тогда по определению

(i) $S(\mathfrak{M})$ есть моноид $(\{1a \mid a \in \mathfrak{M}\} \circ, 1)$;

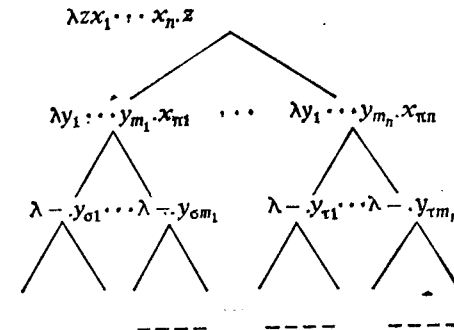
(ii) $G(\mathfrak{M})$ есть подгруппа моноида $S(\mathfrak{M})$, состоящая из обратимых элементов;

(iii) если $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория, то $S(\mathcal{T}) = S(\mathfrak{M}(\mathcal{T}))$, $G(\mathcal{T}) = G(\mathfrak{M}(\mathcal{T}))$.

ТЕОРЕМА. $S^0(\lambda\eta) = S(\mathfrak{M}^0(\lambda\eta))$ — рекурсивно представленная группа с двумя порождающими элементами и неразрешимой проблемой тождества слов.

21.2. Характеризация обратимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дерево $A \in \mathcal{B}$ называется *наследственной перестановкой* ($\mathcal{HP}$), если A имеет вид



где π, σ, τ — перестановки, а числа $n, m_1, \dots, m_n, \dots$ произвольны. Это дерево может быть конечным или бесконечным. Если дерево конечно, то A называется *конечной* наследственной перестановкой ($\mathcal{FHP}$).

ТЕОРЕМА. (i) $M \in S(\lambda\eta)$ обратим $\Leftrightarrow \text{BT}(M)$ есть $\mathcal{FHP}$.

(ii) $M \in S(\mathcal{H}^*)$ обратим $\Leftrightarrow \text{BT}(M)$ есть $\mathcal{HP}$.

СЛЕДСТВИЕ. (i) $G(\lambda\eta) = G(\lambda\omega) = G(\mathcal{H}\eta) = G(\mathcal{H}\omega)$.

(ii) $G(\mathcal{H}^*) \cong G(\lambda\eta)$.

21.3. Группы $G(\lambda\eta)$ и $G(\mathcal{H}^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Через S_ω обозначим группу перестановок множества $\mathbb{N}$, сдвигающих лишь конечное множество чисел.

(ii) Если G — группа, то G^ω — ее слабая бесконечная степень, т. е. множество последовательностей, у которых почти все координаты совпадают с единичным элементом.

(iii) Для группы G обозначим через $G^\omega \otimes S_\omega$ полупрямое произведение G^ω и S_ω , где $\pi \in S_\omega$ действует на элементы группы G^ω очевидным образом: $\langle x_0, x_1, \dots \rangle^\pi = \langle x_{\pi 0}, x_{\pi 1}, \dots \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $G_0 = \{e\}$ — тривиальная группа. Положим по определению $G_{n+1} = G_n^\omega \otimes S_\omega$. Имеются очевидные отображения $f_n: G_n \rightarrow G_{n+1}$ и $g_n: G_{n+1} \rightarrow G_n$. Введем следующие обозначения.

(ii) $\vec{G} = \varinjlim (G_n, f_n)$, $\check{G} = \varprojlim (G_n, g_n)$.

$\check{G}^r$ — рекурсивный проетивный предел, состоящий из всех рекурсивных (при некотором кодировании) последовательностей $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$, таких, что $g_n(x_{n+1}) = x_n$.

ТЕОРЕМА. $G(\lambda\eta) \cong \vec{G}$, $G(\mathcal{H}^*) \cong \check{G}^r$, $G(D_\infty) \cong \check{G}$.

21.4. Упражнения

Этим завершается обзор части V.

5.8. Упражнения

5.8.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра. Показать, что в $\mathfrak{M}$

(i) $\exists a \forall xy (axxy = xuy)$,

(ii) $\exists a \forall xy (axxy = xaa)$.

5.8.2 (Баррендрегт и Койманс [1980]). Определить комбинаторную алгебру $\mathfrak{M}(CL)$. Показать, что эту структуру нельзя превратить в λ -алгебру.

5.8.3 (Койманс). Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ — произвольные λ -алгебры. Построить категорное произведение $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ и показать, что $\text{Th}(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2) = \text{Th}(\mathfrak{M}_1) \cap \text{Th}(\mathfrak{M}_2)$.

5.8.4 (Г. Волькен). Пусть $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ — аппликативная структура, а $\mathfrak{F} = \bigcup_n \mathfrak{F}_n$ — семейство функций, такое, что $(\forall f \in \mathfrak{F}_n) f: X^n \rightarrow X$.

$\mathfrak{F}$ называется комбинаторным семейством на $\mathfrak{M}$, если выполнены следующие условия:

1. $\mathfrak{F}$ содержит все алгебраические функции на $\mathfrak{M}$;

2. $(\forall f \in \mathfrak{F}_{k+1}) (\exists g \in \mathfrak{F}_k) \forall xy (g(\vec{y}).x = f(\vec{y}, x))$.

$\mathfrak{F}$ называется λ -семейством на $\mathfrak{M}$, если выполнены следующие условия:

1. $\mathfrak{F}$ содержит все алгебраические функции на $\mathfrak{M}$ и замкнуто относительно подстановки констант (т.е. если $f \in \mathfrak{F}_2$, а $a \in X$, то $\lambda y.f(a, y) \in \mathfrak{F}_1$).

2. Имеется отображение $G: \mathfrak{F}_1 \rightarrow X$, такое, что $(\forall f \in \mathfrak{F}_1) \forall x (G(f).x = f(x))$

3. $(\forall f \in \mathfrak{F}_{k+1}) (\lambda \vec{y}.G(\lambda x.f(\vec{y}, x))) \in \mathfrak{F}_k$.

(i) Показать, что на $\mathfrak{M}$ т.и.т.т. существует комбинаторное семейство, когда $\mathfrak{M}$ можно расширить до комбинаторной алгебры.

(ii) Показать, что на $\mathfrak{M}$ т.и.т.т. существует λ -семейство, когда $\mathfrak{M}$ можно расширить до λ -модели.

5.8.5. (Ф. Хонзелл). Воспользуемся следующим утверждением (которое будет доказано в упражнении 6.8.15):

(*) Любую конечную аппликативную структуру можно вложить в любую комбинаторную алгебру.

Показать, что любую аппликативную структуру можно вложить в некоторую экстенциональную λ -модель. [Указание. Использовать (*) и теорему о компактности для логики первого порядка].

См. также упр. 18.4.29 и 18.4.31.

5.8.6 (Ф. Хонзелл). Пусть D — п.ч.у.м. с $\text{Card}(D) = \aleph_0$.

Показать, что $\text{Card}([D \rightarrow D]) = 2^{\aleph_0}$. Поэтому невозможно счетное рефлексивное п.ч.у.м. [Указание. Рассмотреть следующие 4 случая.

1) $\exists x \in D$ (x не компактен);

2. $\forall x \in D$ (x компактен);

2.1. Отношение $\sqsubseteq$ не фундировано;

2.2. Отношение $\sqsubseteq$ фундировано;

2.2.1. $(\forall x \in D) (\{y \mid y \sqsubseteq x\}$ конечно),

2.2.2. $(\exists x \in D) (\{y \mid y \sqsubseteq x\}$ бесконечно).

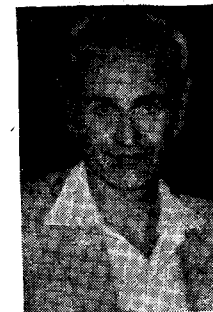
В случае 1 пусть $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \dots$, причем $x_n = x$. Воспользоваться тем, что $D_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — непрерывная решетка и потому инъективна; см. упр. 1.3.17.]

5.8.7. (i) Вычислить $\llbracket M \rrbracket^{DA}$ для $M = I, K, S, \Omega$.

(ii) (Лонго [1983]). Для $f \in [D_A \rightarrow D_A]$ положим $\lambda^A x.f(x) = (\lambda^G x.f(x)) \cup \{A\}$. Показать, что $\lambda^A x.f(x)$ также представляет функцию f .

Часть II

Конверсия



Бём (1967)

Дедзани-Чанкальини
(фотография
Я. Клопа, 1978)

Глава 6

Классическое ламбда-исчисление

В этой главе изучается множество Λ с точностью до β -конвертируемости. В силу соглашения 3.2.11 это отношение конгруэнтности обозначается через $=$. Аналогичным образом β -редукция обозначается через $\rightarrow$.

Основные из рассматриваемых вопросов — это теоремы о неподвижной точке, введение цифр и представление рекурсивных функций на них.

6.1. Комбинаторы неподвижной точки

Теорема 2.1.5 о неподвижной точке — один из основных результатов λ -исчисления. Читатель, возможно, заметил одну особенность в доказательстве этой теоремы. Чтобы установить, что $FX = X$, мы начинаем с термина X и редуцируем его к FX , а не наоборот.

6.1.1. ТЕОРЕМА. $\forall F \exists X (X \rightarrow FX)$.

Доказательство. Положим $W \equiv \lambda x. F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда

$$X \equiv (\lambda x. F(xx)) W \rightarrow F(WW) \equiv FX. \quad \square$$

Это объясняет, почему нас озадачивают родственные конструкции в гёделевском рефлексивном предложении или в теореме о рекурсии; см. § 6.7 ниже.

Из доказательства теоремы 2.1.5 видно, что неподвижные точки можно находить равномерно.

6.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комбинатор неподвижной точки — это терм M , такой, что $\forall F (MF = F(MF))$, т. е. MF — неподвижная точка для F .

6.1.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $Y \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))$. Тогда Y — комбинатор неподвижной точки.

Доказательство. Пусть $W \equiv \lambda x. F(xx)$. Тогда

$$YF = WW = F(WW) = F(YF). \quad \square$$

Терм Y называется *парадоксальным комбинатором Карри*. Заметим, что $Yf \rightarrow f(YF)$ не имеет места. Поэтому полезны следующие обозначения.

6.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Тьюринг [1937a]). Пусть $A \equiv \lambda x y. y (xx y)$. Положим $\Theta \equiv AA$.

6.1.5. СЛЕДСТВИЕ. $\Theta F \rightarrow F(\Theta F)$.

Доказательство. $\Theta F \equiv AA F \rightarrow F(AAF) \equiv F(\Theta F)$. $\square$

Следующий пример показывает, как можно использовать теорему о неподвижной точке.

Задача. Построить F , такой, что

$$(1) \quad Fxy = Fyx F.$$

Решение. (1) следует из равенства $F \equiv \lambda x y. Fyx F$, а оно вытекает из $F \equiv (\lambda f x y. f y x f) F$. Теперь положим $F \equiv Y (\lambda f x y. f y x f)$, и все в порядке. $\square$

В общем случае имеем следующее

6.1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $C \equiv C(f, \vec{x})$ — терм. Тогда

$$(i) \quad \exists F \forall \vec{N} (F\vec{N} = C(F, \vec{N})),$$

$$(ii) \quad \exists F \forall \vec{N} (F\vec{N} \rightarrow C(F, \vec{N})).$$

Доказательство. Положим $F \equiv Y (\lambda f \vec{x}. C(f, \vec{x}))$ или, еще лучше, $F \equiv \Theta (\lambda f \vec{x}. C(f, \vec{x}))$. $\square$

Дополнительная информация о неподвижных точках имеется в § 6.5.

6.2. Стандартные комбинаторы

В § 2.1. были определены комбинаторы I , K , S . В этом пункте вводятся другие термы и важные операции над термами.

6.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\Omega \equiv \omega \omega$, где $\omega \equiv \lambda x. xx$. Заметим, что терм Ω не находится в н.ф. и редуцируется только к самому себе. Поэтому в силу следствия 3.2.9 Ω не имеет н.ф. В действительности Ω — простейший терм, не имеющий н.ф. Заметим еще, что $YI = \Omega$.

6.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (истинностные значения).

$$T \equiv \lambda x y. x, \quad F \equiv \lambda x y. y.$$

Отсюда имеем $TMN \rightarrow M$, $FMN \rightarrow N$. Заметим, что $T \equiv K$, $F \leftarrow KI$.

6.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (условное выражение). Пусть B (от *boolean*) — некоторый терм. Тогда выражение

если B , то M , иначе N

обозначает терм BMN . Если $B = \mathbf{T}$ (соответственно $B = \mathbf{F}$), то это выражение равно M (соответственно N). Если B отличен от $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$, то BMN может быть произвольным.

Как и в случае арифметики или теории множеств, в λ -исчислении можно определить упорядоченные пары. Следующее определение принадлежит Чёрчу.

6.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (спаривание).

$$[M, N] \equiv \lambda z. zMN, \quad (M)_0 \equiv MT, \quad (M)_1 \equiv MF.$$

Отсюда

$$([M_0, M_1])_i \rightarrow M_i, \quad i = 0, 1.$$

Это спаривание не удовлетворяет обычному ограничению сюръективности: соотношение $[(M)_0, (M)_1] = M$ не имеет места в общем случае. В действительности сюръективного спаривания вообще не существует — см. упр. 15.4.4 и Барендрегт [1974].

n -ки можно определить двумя способами. Первый — индуктивный с использованием операции $[\ , \]$.

6.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (конечных последовательностей).

$$[M] = M, \quad [M_0, \dots, M_{n+1}] = [M_0, [M_1, \dots, M_{n+1}]].$$

Результат более прямого определения будет обозначен через $\langle M_0, \dots, M_n \rangle$.

6.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\langle M_0, \dots, M_n \rangle \equiv \lambda z. zM_0 \dots M_n$.

• Легко построить функции-проекции для введенных кодировок.

6.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \pi_i^n &\equiv \lambda x. xF^{~i}T, \quad 0 \leq i < n, \\ \pi_n^n &\equiv \lambda x. xF^{~n}. \\ \text{(ii)} \quad U_i^n &\equiv \lambda x_0 \dots x_n. x_i, \quad 0 \leq i < n, \\ P_i^n &\equiv \lambda x. xU_i^n. \end{aligned}$$

Отсюда индукцией по n получаем, что для всех $i \leq n$

$$\pi_i^n [M_0, \dots, M_n] \rightarrow M_i,$$

а также

$$P_i^n \langle M_0, \dots, M_n \rangle \rightarrow M_i.$$

6.2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (композиция). $M \circ N \equiv \lambda x. M(Nx)$.

В λ -исчислении можно определить различные системы цифр (т. е. представлений натуральных чисел λ -термами). Удобным

оказывается следующее представление (другие системы см. в § 6.4).

6.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (цифры). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ терм $\ulcorner n \urcorner$ определяется следующим образом:

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv \mathbf{I}, \quad \ulcorner n + 1 \urcorner \equiv [F, \ulcorner n \urcorner].$$

Заметим, что цифры представляют собой попарно различные нормальные формы.

6.2.10. ЛЕММА (предшествование, следование, проверка на ноль). Имеются термы S^+ , P^- , $\mathbf{Zero}$, такие, что

$$S^+ \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n + 1 \urcorner, \quad P^- \ulcorner n + 1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner,$$

$$\mathbf{Zero} \ulcorner 0 \urcorner = \mathbf{T}, \quad \mathbf{Zero} \ulcorner n + 1 \urcorner = \mathbf{F}.$$

Доказательство. Положим

$$S^+ \equiv \lambda x. [F, x], \quad P^- \equiv \lambda x. xF, \quad \mathbf{Zero} \equiv \lambda x. xT.$$

Тогда доказываемые равенства получаются легко. $\square$

6.2.11. ОБОЗНАЧЕНИЯ. $M^+ \equiv (S^+M)$, $M^- \equiv (P^-M)$.

Отметим, что $\ulcorner 0 \urcorner^- = \mathbf{F}$.

Заметим, что в силу комбинаторной полноты все операции над термами, введенные в этом пункте, определимы. Например, терм P , такой, что

$$\forall M, N (PMN = [M, N]),$$

— это $P \equiv \lambda xy. (\lambda z. zxy) \equiv \lambda x y z. zxy$.

6.3. Лямбда-определимость

λ -исчисление представляет определенный класс (частичных) функций на натуральных числах. В силу классического результата Клини это в точности класс (частично) рекурсивных функций. В настоящем пункте рассматриваются всюду определенные функции. Мы следуем идее Тьюринга [1937a] об использовании комбинатора неподвижной точки для представления примитивной рекурсии и минимизации. Первоначальное доказательство Клини было несколько более сложным, так как построения проводились в λI -исчислении, см. § 9.2.

Числовая функция — это произвольное отображение $\varphi: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$.

6.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть φ — числовая функция от p аргументов. Тогда φ называется λ -определимой, если

$$(*) \quad (\forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}) (F \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, \dots, n_p) \urcorner)$$

для некоторого $F \in \Lambda$,

Если выполняется (*), то говорят, что φ λ -определяется термом F . Так как цифры находятся в н. ф., из теоремы Чёрча — Россера следует, что если F λ -определяет функцию φ , то

$$F \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner \Rightarrow \ulcorner \varphi(n_1, \dots, n_p) \urcorner.$$

Обозначения. Если $\vec{n} = n_1, \dots, n_p$, то полагаем

$$\ulcorner \vec{n} \urcorner \equiv \ulcorner n_1 \urcorner, \dots, \ulcorner n_p \urcorner.$$

В этих обозначениях (*) принимает вид

$$(\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^p) (F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner \varphi(\vec{n}) \urcorner).$$

Мы докажем, что для числовой функции φ

$$\varphi \text{ } \lambda\text{-определима} \Leftrightarrow \varphi \text{ рекурсивна.}$$

В § 8.4. понятие λ -определимости будет обобщено на частичные числовые функции. Тогда для частичных числовых функций мы сможем доказать, что

$$\varphi \text{ } \lambda\text{-определима} \Leftrightarrow \varphi \text{ частично рекурсивна.}$$

6.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Исходные функции* — это числовые функции U_i^p , S^+ , Z , определяемые следующим образом:

$$U_i^p(n_0, \dots, n_p) = n_i, \quad 0 \leq i \leq p; \quad S^+(n) = n + 1, \quad Z(n) = 0.$$

Пусть $P(n)$ — числовое отношение. Через $\mu m[P(m)]$ обозначается, как обычно, наименьшее число m , для которого верно $P(m)$, если такое число существует; в противном случае $\mu m[P(m)]$ не определено.

6.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс числовых функций.

(i) Говорят, что $\mathcal{A}$ замкнут относительно композиции, если из $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m \in \mathcal{A}$ следует, что функция φ , определенная равенством

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n})),$$

также принадлежит $\mathcal{A}$.

(ii) Говорят, что $\mathcal{A}$ замкнут относительно примитивной рекурсии, если для любых $\chi, \psi \in \mathcal{A}$ функция φ , определенная равенствами

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}), \quad \varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n}),$$

также принадлежит $\mathcal{A}$.

(iii) Говорят, что $\mathcal{A}$ замкнут относительно минимизации, если для любой $\chi \in \mathcal{A}$, такой, что

$$\forall \vec{n} \exists m (\chi(\vec{n}, m) = 0),$$

функция φ , определенная равенством

$$\varphi(\vec{n}) = \mu t [\chi(\vec{n}, t) = 0],$$

также принадлежит $\mathcal{A}$.

6.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс $\mathcal{R}$ рекурсивных функций — это наименьший класс числовых функций, содержащий все исходные функции и замкнутый относительно композиции, примитивной рекурсии и минимизации.

6.3.5. ЛЕММА. *Исходные функции λ -определимы.*

Доказательство. Определяющие термы таковы:

$$U_i^p \equiv \lambda x_0 \dots x_p. x_i, \quad S^+ \equiv \lambda x. [F, x], \quad Z \equiv \lambda x. \ulcorner 0 \urcorner. \quad \square$$

6.3.6. ЛЕММА. *λ -определимые функции замкнуты относительно композиции.*

Доказательство. Пусть функции $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m$ λ -определяются термами $G, H_1, \dots, H_m$ соответственно. Тогда функция

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n}))$$

λ -определяется термом

$$F \equiv \lambda \vec{x}. G(H_1 \vec{x}) \dots (H_m \vec{x}). \quad \square$$

6.3.7. ЛЕММА. *λ -определимые функции замкнуты относительно примитивной рекурсии.*

Доказательство. Пусть φ определена равенствами

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}), \quad \varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n}),$$

где χ и ψ λ -определены термами G и H соответственно. Интуитивный алгоритм вычисления $\varphi(k, \vec{n})$ таков.

Проверяем, верно ли $k = 0$.

Если да, то выдаем ответ $\chi(\vec{n})$;

если нет, то вычисляем $\psi(\varphi(k-1, \vec{n}), k-1, \vec{n})$.

Поэтому рассмотрим терм F , такой, что

$$Fxy = \text{если Zero } x, \text{ то } Gy, \text{ иначе } H(Fx^{-y})x^{-y}.$$

Терм с этим свойством существует в силу предложения 6.1.6 и определения 6.2.3. С помощью индукции по k отсюда получается $F \ulcorner k \urcorner \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner \varphi(k, \vec{n}) \urcorner$, т. е. функция φ λ -определяется термом F . $\square$

6.3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Чтобы представить минимизацию, определим для $P \in \Lambda$ следующие термы:

$$H_P \equiv \Theta(\lambda hz. \text{если } Pz, \text{ то } z, \text{ иначе } hz^+), \quad \mu P \equiv H_P \Gamma 0 \Gamma.$$

6.3.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть терм $P \in \Lambda$ таков, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$P \Gamma n \Gamma = T \text{ или } P \Gamma n \Gamma = F.$$

Тогда

(i) $H_P z \rightarrow \text{если } Pz, \text{ то } z, \text{ иначе } H_P z^+$.

(ii) Если $\exists n P \Gamma n \Gamma = T$, то положим $m = \mu n [P \Gamma n \Gamma = T]$.

В этом случае $\mu P = \Gamma m \Gamma$.

Доказательство. (i) Достаточно применить следствие 6.1.5.

(ii) В силу (i)

$$(1) P \Gamma n \Gamma = T \Rightarrow H_P \Gamma n \Gamma = \Gamma n \Gamma,$$

$$(2) P \Gamma n \Gamma = F \Rightarrow H_P \Gamma n \Gamma = H_P \Gamma n + 1 \Gamma.$$

Если $m = \mu n [P \Gamma n \Gamma = T]$, то

$$(\forall k < m) (P \Gamma k \Gamma = F) \text{ и } P \Gamma m \Gamma = T.$$

Следовательно, в силу (2)

$$H_P \Gamma 0 \Gamma = H_P \Gamma 1 \Gamma = \dots = H_P \Gamma m \Gamma$$

и в силу (1) получаем $H_P \Gamma m \Gamma = \Gamma m \Gamma$. Итак, $\mu P = H_P \Gamma 0 \Gamma = \Gamma m \Gamma$. $\square$

6.3.10. ЛЕММА. λ -определимые функции замкнуты относительно минимизации.

Доказательство. Пусть $\varphi(\vec{n}) = \mu t [\chi(\vec{n}, t) = 0]$, где функция χ λ -определена некоторым термом G . Определим теперь F так, чтобы выполнялось равенство

$$F\vec{x} = \mu [\lambda y. \text{Zero}(G\vec{x}y)].$$

В силу предложения 6.3.9(ii) терм F λ -определяет φ . $\square$

6.3.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Все рекурсивные функции λ -определимы.

Доказательство. Применяем 6.3.5, 6.3.6, 6.3.7 и 6.3.10. $\square$

6.3.12. ЛЕММА. Пусть функция φ λ -определяется термом F . Тогда для любых $\vec{n}, m \in \mathbb{N}$

$$\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow F \Gamma \vec{n} \Gamma = \Gamma m \Gamma.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) тривиально следует из определения.

($\Leftarrow$) Допустим, что $F \Gamma \vec{n} \Gamma = \Gamma m \Gamma$. Тогда $\Gamma n \varphi(\vec{n}) \Gamma = \Gamma m \Gamma$. Так как цифры — это различные нормальные формы, из теоремы Чёрча — Россера следует, что $\varphi(\vec{n}) = m$. $\square$

6.3.13. ТЕОРЕМА (Клини). λ -определимые числовые функции — это в точности рекурсивные функции.

Доказательство. Если функция φ рекурсивна, то она λ -определима по предложению 6.3.11. Если φ λ -определима и F — это λ -определяющий ее терм, то по лемме 6.3.12

$$\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow \lambda \vdash F \Gamma \vec{n} \Gamma = \Gamma m \Gamma.$$

Так как λ рекурсивно аксиоматизирована, множество, определяемое правой частью последней эквивалентности, рекурсивно перечислимо. Поэтому график функции φ рекурсивно перечислим, а следовательно, φ рекурсивна. $\square$

6.3.14. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^k$ — отношение. Тогда оно рекурсивно в том и только том случае, когда найдется терм F , такой, что

$$(*) \quad F \Gamma \vec{n} \Gamma = T \Leftrightarrow R(\vec{n}), \quad F \Gamma \vec{n} \Gamma = F \Leftrightarrow \neg R(\vec{n}).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть K_R — характеристическая функция отношения R , т. е.

$$K_R(\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow R(\vec{n}), \quad K_R(\vec{n}) = 1 \Leftrightarrow \neg R(\vec{n}).$$

Тогда K_R рекурсивна и, следовательно, λ -определима некоторым термом, который мы обозначим через H . Теперь берем $F\vec{x} = \text{Zero}(H\vec{x})$.

($\Leftarrow$) Из посылки следует, что R и $\neg R$ рекурсивно перечислимы, а значит, оба они рекурсивны. $\square$

Если имеет место (*), то говорят, что терм F λ -определяет отношение R .

6.4. Цифровые системы

Для доказательства теоремы 6.3.13 нужно лишь несколько свойств цифр.

6.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Цифровая система — это последовательность

$$d = d_0, d_1, \dots,$$

состоящая из замкнутых термов и такая, что для некоторых λ -термов S_d^+ и Zero_d

$$S_d^+ d_n = d_{n+1}, \quad \text{Zero}_d d_0 = T, \quad \text{Zero}_d d_{n+1} = F$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Термы S_d^+ и Zero_d называются *функцией следования и тестом на нуль для d* .

(ii) d называется *нормальной цифровой системой*, если каждый из термов d_n имеет н. ф.

(iii) Система $s = \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \dots$ с функцией следования S^+ называется *стандартной цифровой системой*.

Обозначения. Любая цифровая система d очевидным образом определяется термами d_0 и S_d^+ . Поэтому мы пишем $d = (d_0, S_d^+)$.

6.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть d — цифровая система.

(i) Числовая функция $\varphi: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ λ -определима относительно d , если

$$\exists F (\forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}) (F d_{n_1} \dots d_{n_p} = d_{\varphi(n_1, \dots, n_p)}).$$

(ii) Система d *адекватна*, если все рекурсивные функции λ -определимы относительно d .

6.4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть d — цифровая система. Тогда она адекватна в том и только том случае, когда

$$\exists P_d^- (\forall n \in \mathbb{N}) (P_d^- d_{n+1} = d_n).$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ верно по определению. $(\Leftarrow)$ доказывается так же, как в предложении 6.3.11. $\square$

Функция P_d^- с описанным свойством называется *функцией предшествования для d* . Таким образом, последовательность $d = d_0, d_1, \dots$ является адекватной цифровой системой т. и т. т., когда для d имеются функция предшествования, тест на нуль и функция следования.

Стандартная числовая система была выбрана именно таким образом для того, чтобы легче было представить рекурсивные функции. В приводимой ниже системе c , принадлежащей Чёрчу, каждая цифра c_n более тесно связана с числом n : терм c_n — это оператор n -кратной итерации. Поэтому некоторые конкретные числовые функции имеют простые λ -определяющие термы относительно c , см. упр. 6.8.6. В § 9.2 термы $c_1, c_2, \dots$ будут частью адекватной системы для λ -исчисления.

6.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (цифры по Чёрчу). $c = c_0, c_1, \dots$, где $c_n = \lambda f x. f^n(x)$. Пусть $S_c^+ \equiv \lambda abc. b(abc)$. Тогда очевидно, что S_c^+ — функция следования для c . Отметим, что $c_1 \equiv \lambda xy. xy \equiv 1$.

6.4.5. ЛЕММА. Имеются термы $H, H^{-1} \in \Lambda$, такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$H \ulcorner n \urcorner = c_n, \quad H^{-1} c_n = \ulcorner n \urcorner.$$

Доказательство. Применяя предложение 6.1.6, положим

$$Hx \equiv \text{Если } \text{Zero } x, \text{ то } c_0, \text{ иначе } S_c^+(Hx^-);$$

$$H^{-1}x \equiv xS^+ \ulcorner 0 \urcorner.$$

Тогда легко получаются нужные равенства. $\square$

6.4.6. СЛЕДСТВИЕ. c — адекватная цифровая система.

Доказательство. Положим

$$\text{Zero}_c \equiv \text{Zero} \circ H^{-1}, \quad P_c^- \equiv H \circ P^- \circ H^{-1}$$

и используем предложение 6.4.3. $\square$

Еще несколько цифровых систем описано в упражнениях.

6.5. Еще о неподвижных точках; гёделевские номера

Будет приведено два доказательства следующей ниже теоремы. Второе из них более симметрично и легче обобщается на n -кратный случай.

6.5.1. ТЕОРЕМА О ДВОЙНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ.

$$\forall F, G \exists A, B [A = FAB \wedge B = GAB].$$

Первое доказательство. Положим

$$A_b \equiv \Theta(\lambda a. Fab), \quad B_0 \equiv \Theta(\lambda b. GA_b b), \quad A_0 \equiv A_{B_0}.$$

Тогда

$$A_0 \equiv A_{B_0} \rightarrow FAB_0 B_0 \equiv FA_0 B_0, \quad B_0 \rightarrow GA_{B_0} B_0 \equiv GA_0 B_0. \quad \square$$

Второе доказательство. Положим

$$X \equiv \Theta(\lambda x. [F(x)_0(x)_1, G(x)_0(x)_1]), \quad A \equiv (X)_0, \quad B \equiv (X)_1.$$

Тогда

$$X \rightarrow [F(X)_0(X)_1, G(X)_0(X)_1],$$

откуда

$$A \equiv (X)_0 \rightarrow F(X)_0(X)_1 \equiv FAB$$

и аналогично

$$B \rightarrow GAB, \quad \square$$

6.5.2. ТЕОРЕМА О КРАТНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

$$\forall F_1, \dots, F_n \exists X_1, \dots, X_n (X_1 = F_1 X_1 \dots X_n \wedge \dots \wedge X_n = F_n X_1 \dots X_n).$$

Доказательство аналогично второму доказательству теоремы 6.5.1; следует использовать $\lambda x_1 \dots x_n. \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. $\square$

Существует много комбинаторов неподвижной точки, отличных от Y и Θ . Следующий результат получен независимо Бёмом и ван дер Меєм.

6.5.3. ЛЕММА. Пусть $G \equiv \lambda y f.f(yf) = S!$. Терм $M \in \Lambda$ является комбинатором неподвижной точки т. и т. т., когда $M = GM$, т. е. т. и т. т., когда M есть неподвижная точка для G .

Доказательство. Если $M = GM$, то для всех F

$$MF = GMF = F(MF),$$

т. е. M — комбинатор неподвижной точки. Обратно, предположим, что M — комбинатор неподвижной точки. Тогда

$$Mf = f(Mf) \quad (\text{где } f \text{ — переменная}).$$

Следовательно,

$$M = \lambda f.Mf = \lambda f.f(Mf) = GM.$$

Равенство $M = \lambda f.Mf$ обосновывается следующим образом. В силу предположения и теоремы Чёрча — Россера

$$Mf \rightarrow f(\dots) \leftarrow f(Mf).$$

Так как $M \in \Lambda^0$, отсюда следует, что M должен редуцироваться к терму вида $\lambda f.N$. Но тогда

$$\lambda f.Mf = \lambda f.(\lambda f.N)f = \lambda f.N = M. \quad \square$$

6.5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) (Бём) $Y^0 \equiv Y$; $Y^{n+1} \equiv (Y^n)(S!)$.

(ii) $Y_M \equiv \lambda f.WWM$, где $W \equiv \lambda xz.f(xxz)$.

6.5.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Все термы $Y^0, Y^1, \dots$ — комбинаторы неподвижной точки.

(ii) Для каждого M терм Y_M — комбинатор неподвижной точки.

Доказательство. (i) вытекает из леммы 6.5.3.

(ii) доказывается, как всегда. $\square$

Заметим, что $Y^1 \rightarrow \Theta$.

6.5.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (гёделевская нумерация). (i) Стандартным методом легко определить взаимно однозначное отображение $\# : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$. В дальнейшем $\#$ всюду обозначает одно из таких отображений.

(ii) $\#M$ называется гёделевским номером выражения M . Всякую ниже будет использоваться следующее соглашение.

6.5.7. СОГЛАШЕНИЕ. Все понятия, относящиеся к натуральным числам, их последовательностям и т. д., переносятся на термы с помощью отображения $\#$.

ПРИМЕРЫ (i) Множество $\mathcal{A} \subset \Lambda$ называется рекурсивным, если множество $\# \mathcal{A} = \{\#M \mid M \in \mathcal{A}\}$ рекурсивно.

(ii) Последовательность термов $M_0, M_1, \dots$ называется рекурсивной, если последовательность $\lambda n.\#M_n$ рекурсивна.

В действительности это соглашение уже использовалось в доказательстве теоремы 6.3.13, где было показано, что множество $\{(M, N) \mid \lambda \vdash M = N\}$ рекурсивно перечислимо.

6.5.8. ОБОЗНАЧЕНИЯ. $\ulcorner M \urcorner = \ulcorner \#M \urcorner$.

Имеется некоторая опасность спутать обозначения $\ulcorner \urcorner$ из определений 6.2.9 и 6.5.8. Первое из них определено на $\mathbb{N}$, второе — на Λ .

6.5.9. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ.

$$\forall F \exists X (F \ulcorner X \urcorner = X).$$

Доказательство. Ввиду эффективности отображения $\#$ имеются рекурсивные функции Ap и Num , такие, что $\text{Ap} \ulcorner (M, \#N) \urcorner = \ulcorner \#MN \urcorner$ и $\text{Num} \ulcorner n \urcorner = \ulcorner \#n \urcorner$. Пусть Ap и Num λ -определяются термами $\text{Ap} \in \text{Num} \in \Lambda^0$. Тогда

$$\text{Ap} \ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner = \ulcorner MN \urcorner, \quad \text{Num} \ulcorner n \urcorner = \ulcorner \#n \urcorner;$$

в частности,

$$\text{Num} \ulcorner M \urcorner = \ulcorner \#M \urcorner.$$

Положим теперь

$$W \equiv \lambda x.F(\text{Ap } x(\text{Num } x)), \quad X \equiv W \ulcorner W \urcorner.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X &\equiv W \ulcorner W \urcorner = F(\text{Ap} \ulcorner W \urcorner (\text{Num} \ulcorner W \urcorner)) = \\ &= F \ulcorner W \urcorner \ulcorner W \urcorner = F \ulcorner X \urcorner. \quad \square \end{aligned}$$

Как и для обычных неподвижных точек, $X \rightarrow F \ulcorner X \urcorner$. Кроме того, приведенная конструкция равномерна в следующем смысле.

6.5.10. СЛЕДСТВИЕ. $(\exists \Theta_2 \in \Lambda^0)(\forall F \in \Lambda^0) \Theta_2 F \rightarrow F \ulcorner \Theta_2 F \urcorner$.

Доказательство. См. упр. 8.5.6. $\square$

6.6. Результаты о неразрешимости

6.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$.

(i) Множество $\mathcal{A}$ нетривиально, если $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \neq \Lambda$.

(ii) $\mathcal{A}$ замкнуто относительно равенства, если

$$(\forall M, N \in \Lambda) [M \in \mathcal{A} \text{ и } M = N \Rightarrow N \in \mathcal{A}].$$

Напомним, что два множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ натуральных чисел называются рекурсивно отделимыми, если существует рекурсивное множество $\mathcal{C}$, такое, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Следующая теорема принадлежит Скотту [1963]. Она родственна теореме Райса из теории рекурсии; ср. Роджерс [1967], с. 416.

6.6.2. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \Lambda$ — непустые множества, замкнутые относительно равенства. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ рекурсивно неотделимы.

(ii) Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$ — нетривиальное множество, замкнутое относительно равенства. Тогда $\mathcal{A}$ не рекурсивно.

Доказательство. (i) Пусть $M_0 \in \mathcal{A}$, $M_1 \in \mathcal{B}$. Допустим, что $\mathcal{C}$ — рекурсивное множество, такое, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Характеристическая функция множества $\# \mathcal{C}$ рекурсивна и, следовательно, λ -определена некоторым термом F . Отсюда получаем

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow F^{\ulcorner} M^{\urcorner} = \ulcorner 0^{\urcorner}, \quad M \notin \mathcal{C} \Rightarrow F^{\ulcorner} M^{\urcorner} = \ulcorner 1^{\urcorner}.$$

Положим теперь

$$G \equiv \lambda x. \text{если Zero}(Fx), \text{ то } M_1, \text{ иначе } M_0.$$

Тогда

$$M \in \mathcal{C} \Rightarrow G^{\ulcorner} M^{\urcorner} = M_1, \quad M \notin \mathcal{C} \Rightarrow G^{\ulcorner} M^{\urcorner} = M_0.$$

По второй теореме о неподвижной точке имеем $G^{\ulcorner} X^{\urcorner} = X$ для некоторого X . Но тогда

$$X \in \mathcal{C} \Rightarrow X = G^{\ulcorner} X^{\urcorner} = M_1 \in \mathcal{B} \Rightarrow X \notin \mathcal{C},$$

$$X \notin \mathcal{C} \Rightarrow X = G^{\ulcorner} X^{\urcorner} = M_0 \in \mathcal{A} \Rightarrow X \in \mathcal{C},$$

и получилось противоречие.

(ii) Если множество $\mathcal{A} \subset \Lambda$ нетривиально и замкнуто относительно равенства, то можно применить (i) к $\mathcal{A}$ и его дополнению. Следовательно, $\mathcal{A}$ не может быть рекурсивным. $\square$

Теорема 6.6.2 неверна для λ -исчисления. Возьмем $\mathcal{A} = \{M \in \Lambda_1 \mid FV(M) = \{x\}\}$. Это множество рекурсивно и замкнуто относительно равенства в λ -исчислении, см. лемму 9.1.2 (iv). Следующая релятивизация теоремы 6.6.2 верна также и для λ -исчисления.

6.6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda^0$. Скажем, что $\mathcal{A}$ замкнуто относительно равенства комбинаторов, если

$$(\forall M, N \in \Lambda^0) [M \in \mathcal{A} \text{ и } M = N \Rightarrow N \in \mathcal{A}].$$

6.6.4. СЛЕДСТВИЕ. Теорема 6.6.2 имеет место для множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \Lambda^0$, которые замкнуты относительно равенства комбинаторов.

Доказательство этого утверждения такое же, как для теоремы 6.6.2. $\square$

Чёрч [1936] дал один из первых примеров р.п. множества, не являющегося рекурсивным.

6.6.5. ТЕОРЕМА. $\{M \mid M \text{ имеет н. ф.}\}$ — рекурсивно перечислимое множество, не являющееся рекурсивным.

Доказательство. Рассматриваемое множество рекурсивно перечисливо, так как

$$M \text{ имеет н. ф.} \Leftrightarrow \exists N (N \text{ находится в н. ф. и } \lambda \vdash M = N).$$

По теореме 6.6.2 это множество не рекурсивно. $\square$

Теория $\mathcal{T}$ называется *существенно неразрешимой*, если она непротиворечива, но не имеет непротиворечивых рекурсивных расширений. Следующий факт был замечен Гжегорчиком.

6.6.6. ТЕОРЕМА. λ -исчисление (т. е. теория λ) существенно неразрешимо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — непротиворечивое расширение теории λ . Тогда множество $\{M \mid \mathcal{T} \vdash M = I\}$ замкнуто относительно равенства и нетривиально. Следовательно, по теореме 6.6.2 оно не рекурсивно. Поэтому $\mathcal{T}$ не рекурсивна. $\square$

6.7. Отступление: рефлексивные предложения и теорема о рекурсии

В заключение этой главы мы покажем, что построение гёделевского рефлексивного предложения и теорему о рекурсии можно истолковать как применения комбинатора неподвижной точки.

Пусть P — арифметика Пеано первого порядка. Если s — синтаксический объект системы P , то $\#s$ обозначает его гёделевский номер («код»), а $\ulcorner s^{\urcorner} \equiv \ulcorner \#s^{\urcorner}$ — соответствующую цифру в P .

I. ТЕОРЕМА (Гёдель). Пусть $A(x)$ — формула системы P , такая, что $FV(A(x)) = \{x\}$. Тогда существует предложение B системы P , такое, что

$$P \vdash B \leftrightarrow A(\ulcorner B^{\urcorner}).$$

(B говорит: «Я обладаю свойством A ».)

Доказательство. Положим для $n_1, n_2 \in N$

$n_1 \sim n_2$ т. и т. т., когда для некоторых предложений A_1, A_2 системы P имеем $n_1 = \#A_1$ и $P \vdash A_1 \leftrightarrow A_2$.

Достаточно показать, что для данной формулы $A(x)$

$$(1) \quad \exists n (n \sim \# A(\ulcorner n \urcorner)).$$

Действительно, после этого, взяв предложение B , такое, что $n = \# B$, мы получим

$$P \vdash B \leftrightarrow A(\ulcorner n \urcorner) = A(\ulcorner B \urcorner).$$

Чтобы доказать (1), введем следующие сокращения.

(i) Если x — переменная и $n \in \mathbb{N}$, то $\lambda x.n = \langle \# x, n \rangle$, где $\langle, \rangle$ — примитивно рекурсивная спаривающая функция с обратными функциями (проекциями) $(\)_0$ и $(\)_1$.

(ii) Для $n, m \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} n \cdot m &= \text{код результата подстановки числа } \ulcorner m \urcorner \\ &\text{вместо свободной переменной с кодом } (n)_0 \\ &\text{в формулу с кодом } (n)_1. \end{aligned}$$

Тогда функция $\cdot$ примитивно рекурсивна и

$$(2) \quad (\lambda x. \# A(x)).m = \# A(\ulcorner m \urcorner).$$

Так как (примитивно) рекурсивные функции представимы в P , можно считать, что имеется двухместный функциональный символ $\circ$ системы P , такой, что

$$(3) \quad P \vdash \ulcorner n \urcorner \circ \ulcorner m \urcorner = \ulcorner n \cdot m \urcorner.$$

Положим теперь $v = \lambda x. \# A(x \circ x)$ и $n = v \cdot v$. Тогда

$$\begin{aligned} n &= v \cdot v = (\lambda x. \# A(x \circ x)).v = \# A(\ulcorner v \urcorner \circ \ulcorner v \urcorner) \text{ (в силу (2))} \sim \\ &\sim \# A(\ulcorner v.v \urcorner) = \# A(\ulcorner n \urcorner). \end{aligned}$$

Эквивалентность $\sim$ имеет место потому, что в силу (3)

$$P \vdash A(\ulcorner v \urcorner \circ \ulcorner v \urcorner) \leftrightarrow A(\ulcorner v.v \urcorner). \quad \square$$

II. ТЕОРЕМА РЕКУРСИИ (Клини). Пусть $\{e\}$ обозначает частично рекурсивную функцию с индексом e . Предположим, что f — общерекурсивная функция. Тогда для некоторого n

$$\{f(n)\} \simeq \{n\},$$

т. е. $f(n)$ и n — индексы одной и той же частично рекурсивной функции.

Доказательство. Положим $x.y \simeq \{x\}(y)$ и

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall z (x.z \simeq y.z).$$

В этих обозначениях нам нужно доказать, что для каждой общерекурсивной функции f

$$f(n) \sim n \text{ для некоторого } n.$$

ЛЕММА. Пусть $\psi(x)$ частично рекурсивна. Тогда для некоторого v

(i) $v.x \sim \psi(x)$ для всех x (если $\psi(x) \uparrow$, то $v.x$ — индекс функции $\lambda z. \uparrow$).

(ii) $\{v\}$ всюду определена.

Доказательство. Функция $\lambda x.y. \{ \varphi(x) \}(y)$ частично рекурсивна, поэтому для некоторого e имеем $\{e\}(x, y) \simeq \{ \psi(x) \}(y)$. По s - m - n -теореме $\{ \psi(x) \}(y) \simeq \{s_1(e, x)\}(y)$. Определим теперь v из условия $\{v\}(x) = s_1(e, x)$. Тогда $v.x.y \simeq s_1(e, x).y \simeq \psi(x).y$, откуда $v.x \sim \psi(x)$. Функция $\{v\}$ всюду определена, так как функция s_1 примитивно рекурсивна. $\square$

Обозначения. Будем обозначать число v , построенное в лемме, через $\lambda x. \psi(x)$. Тогда

(i) $(\lambda x. \psi(x)).a \sim \psi(a)$,

(ii) $(\lambda x. \psi(x)).a$ всегда определено.

Положим теперь $v = \lambda x. f(x.x)$, $n = v.v$. Тогда в силу (ii) n корректно определено, а в силу (i)

$$n = v.v = (\lambda x. f(x.x)).v \sim f(v.v) = f(n). \quad \square$$

Как гёделевская конструкция рефлексивного предложения, так и теорема рекурсии могут быть истолкованы как теоремы о неподвижной точке для подходящих предполных нумерованных множеств в смысле Ершова; см. упр. 6.8.18.

6.8. Упражнения

6.8.1. Доказать, что

$$\langle M_1, \dots, M_n \rangle = \langle N_1, \dots, N_n \rangle \Leftrightarrow M_1 = N_1, \dots, M_n = N_n.$$

6.8.2. Построить термы K^∞ , $A \in \Lambda^0$, такие, что

(i) $K^\infty x = K^\infty$,

(ii) $Ax = xA$.

6.8.3. Показать, что для построенного K^∞ имеет место $K \neq K^\infty$.

6.8.4. Построить термы F , $\pi \in \Lambda^0$, такие, что

(i) $(\forall n \in \mathbb{N}) (F \ulcorner n \urcorner xy = xy \ulcorner n \urcorner)$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall i \leq n) (\pi \ulcorner n \urcorner \ulcorner i \urcorner = \pi_i^n)$.

6.8.5. Построить последовательность $A_0, A_1, \dots \in \Lambda$, такую, что

$$A_0 = S \text{ и } A_{n+1} = A_n A_{n+2}.$$

6.8.6 (Россер). Пусть A_+ , $A_\times$, A_{exp} — термы, такие, что

$$A_+ xy = \lambda p q. x p (y p q); \quad A_\times xy = x \circ y; \quad A_{\text{exp}} xy = yx.$$

Показать, что относительно цифр Чёрча $c_n = \lambda f x. f^n(x)$ сложение, умножение и показательная функция λ -определяются термами A_+ , $A_\times$ и A_{exp} соответственно (с единственным отклонением $c_0 c_n = 1 = {}_n c_1$).

Глава 7

Теория комбинаторов

В этой главе изучается формальная система комбинаторной логики **CL** и ее отношение к λ . Мотивировка введения этой теории изложена в § 2.2. Приложения к λ -исчислению будут приведены в гл. 8. Заглавие «Теория комбинаторов» указывает на формальную метатеорию над **CL**.

7.1. Комбинаторная логика

7.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **CL** — эквациональная теория, формулируемая в следующем языке.

Алфавит: **K**, **S** — константы,
 $v_0, v_1, \dots$ — переменные,
 $=$ — равенство,
 $(,)$ — несобственные символы.

Множество **CL**-термов, обозначаемое через $\mathcal{E}$, индуктивно определяется следующим образом:

- (i) $x \in \mathcal{E}$;
- (ii) $K \in \mathcal{E}, S \in \mathcal{E}$;
- (iii) $PQ \in \mathcal{E} \Rightarrow (PQ) \in \mathcal{E}$.

Формулы системы **CL** — это равенства $P = Q$, где $P, Q \in \mathcal{E}$.

Как и в случае системы λ , буквы $x, y, \dots$ пробегают произвольные переменные, а P, Q пробегают множество $\mathcal{E}$. Синтаксические соглашения для **CL** аналогичны соглашениям для λ (например, подразумевается группировка влево).

Так как в **CL** нет операций связывания переменных, понятия свободной переменной и подстановки формулируются для **CL** проще, чем для λ . Через $FV(P)$ обозначается множество всех переменных терма P , а $P[x := Q]$ обозначает результат подстановки терма Q вместо всех вхождений x в P .

P замкнут т. и т.т., когда $FV(P) = \emptyset$.

$$\mathcal{E}^0 = \{P \in \mathcal{E} \mid P \text{ замкнут}\}.$$

7.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система **CL** определяется следующим множеством аксиом и правил вывода.

- (I.1) $KPQ = P$,
- (I.2) $SPQR = PR(QR)$,
- (II.1) $P = P$,
- (II.2) $P = Q \Rightarrow Q = P$,
- (II.3) $P = Q, Q = R \Rightarrow P = R$,
- (II.4) $P = P' \Rightarrow PR = P'R$,
- (II.5) $P = P' \Rightarrow RP = RP'$.

7.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ оба согласованы с $\vec{x}$. Тогда

$$\mathbf{CL} \vdash P_1(\vec{x}) = P_2(\vec{x}), \mathbf{CL} \vdash \vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 \Rightarrow \mathbf{CL} \vdash P_1(\vec{Q}_1) = P_2(\vec{Q}_2).$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.1.22, но легче него, так как в **CL** переменные не связываются. $\square$

Теперь мы покажем, что λ -абстракцию можно смоделировать с помощью **K** и **S**. Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы о дедукции для одной формулировки (интуиционистской) логики высказываний в виде системы гильбертовского типа; см. Говард [1980].

7.1.4. ЛЕММА. Положим $I = SKK$. Тогда

$$(\forall P \in \mathcal{E}) (\mathbf{CL} \vdash IP = P).$$

Доказательство. $\mathbf{CL} \vdash IP = SKKP = KP(KP) = P$. $\square$

7.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дадим следующее определение терма $\lambda^*x.P$ индукцией по построению P :

$$\begin{aligned} \lambda^*x.x &\equiv I, \\ \lambda^*x.P &\equiv KP, \text{ если } x \notin FV(P), \\ \lambda^*x.PQ &\equiv S(\lambda^*x.P)(\lambda^*x.Q). \end{aligned}$$

По аналогии с обозначениями 2.1.3 положим

$$\lambda^*x_1 \dots x_n.P \equiv \lambda^*x_1.(\dots(\lambda^*x_n.P) \dots).$$

ПРИМЕР.

$$\lambda^*xy.yx = \lambda^*x.(\lambda^*y.yx) \equiv \lambda^*x.SI(Kx) \equiv S(K(SI))(S(KK)I).$$

7.1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $FV(\lambda^*x.P) = FV(P) - \{x\}$.

(ii) $\mathbf{CL} \vdash (\lambda^*x.P)x = P$.

(iii) $\mathbf{CL} \vdash (\lambda^*x.P)Q = P[x := Q]$.

Доказательство. (i), (ii) доказываем индукцией по построению терма P .

Случай 1. $P \equiv x$. Тогда $\lambda^*x.P \equiv I$, так что (i) тривиально, а (ii) следует из леммы 7.1.4.

Случай 2. $x \notin FV(P)$. Тогда $\lambda^*x.P = KP$, так что (i) непосредственно очевидно, а (ii) следует из аксиомы $KPx = P$ для комбинатора K .

Случай 3. $P \equiv P_1P_2$, $x \in FV(P_1P_2)$. Тогда

$$\lambda^*x.P \equiv S(\lambda^*x.P_1)(\lambda^*x.P_2).$$

Отсюда по индукционному предположению получаем

$$FV(\lambda^*x.P) = FV(\lambda^*x.P_1) \cup FV(\lambda^*x.P_2) = FV(P_1P_2) - \{x\}.$$

Далее в силу аксиом для S имеем

$$\begin{aligned} CL \vdash (\lambda^*x.P)x &\equiv S(\lambda^*x.P_1)(\lambda^*x.P_2)x = \\ &= (\lambda^*x.P_1)x((\lambda^*x.P_2)x) = P_1P_2 = P. \end{aligned}$$

(iii) В силу (ii) и предложения 7.1.3. $\square$

7.1.7. ЛЕММА. Если $x \notin FV(Q)$ и $x \neq y$, то

$$(\lambda^*x.P)[y := Q] \equiv \lambda^*x.P[y := Q].$$

Доказательство. Применить индукцию по построению термина P . $\square$

7.1.8. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $P \equiv P(\vec{x})$, $\vec{Q}$ согласовано с $\vec{x}$ и $\vec{x} \notin FV(\vec{Q})$. Тогда

$$CL \vdash (\lambda^*\vec{x}.P)\vec{Q} \equiv P(\vec{Q}).$$

Доказательство. Применяем предложение 7.1.6(iii) и лемму 7.1.7. $\square$

Ограничения на переменные в лемме 7.1.7 и следствии 7.1.8 не могут быть сняты. Например,

$$CL \not\vdash (\lambda^*xy.x)yQ = x[x := Q][y := Q].$$

Поэтому удобно принять ограничение на переменные также и для системы CL . Здесь, однако, не нужно заботиться об отождествлении α -конгруэнтных термов — они и так совпадают.

7.1.9. ЛЕММА. Если $y \notin FV(P)$, то

$$\lambda^*x.P \equiv \lambda^*y.P[x := y].$$

Доказательство. Применяем индукцию по построению термина P . $\square$

В заключение этого пункта рассмотрим правило экстенсинальности для CL .

7.1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $CL + ext$ обозначает систему CL , расширенную следующим правилом экстенсинальности:

$$ext: Px = P'x, x \notin FV(PP') \Rightarrow P = P'.$$

7.1.11. ЛЕММА. (i) $CL + ext \vdash K = \lambda^*xy.x(\equiv S(KK)I)$ и $CL + ext \vdash S = \lambda^*xyz.xz(yz)$.

(ii) $CL + ext$ замкнута относительно правила

$$(\xi) \quad P = Q \Rightarrow \lambda^*x.P = \lambda^*x.Q.$$

Доказательство. (i) $CL \vdash Kxy = x = (\lambda^*xy.x)xy$. Отсюда, дважды применяя правило ext , получаем

$$CL + ext \vdash K = \lambda^*xy.x.$$

Аналогично получаем

$$CL + ext \vdash S = \lambda^*xyz.xz(yz).$$

(ii) Допустим, что $CL + ext \vdash P = Q$. Тогда по лемме 7.1.6(ii) имеем

$$CL + ext \vdash (\lambda^*x.P)x = (\lambda^*x.Q)x.$$

Отсюда по правилу ext , используя лемму 7.1.6(i), получаем

$$CL + ext \vdash \lambda^*x.P = \lambda^*x.Q. \quad \square$$

7.2. Редукция для CL

Имеется понятие редукции w , которое порождает доказуемое равенство в CL . Соответствующее отношение $\rightarrow_w$ называется *слабой редукцией*.

7.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $w = \{(KMN, M) \mid M, N \in \mathcal{E}\} \cup \{(SMNL, ML(NL)) \mid M, N, L \in \mathcal{E}\}$. Как отмечено в замечании 3.1.7, понятие редукции w индуцирует бинарные отношения $\rightarrow_w$, $\rightarrow_w^*$ и $=_w$ на $\mathcal{E}$.

$\rightarrow_w$ — это наименьшее отношение, содержащее w и совместимое с аппликацией, а $\rightarrow_w^*$ — рефлексивное транзитивное замыкание отношений $\rightarrow_w$.

$=_w$ — наименьшее отношение эквивалентности, содержащее $\rightarrow_w^*$.

$\rightarrow_w$ называется *слабой редукцией*, так как имеются термы, например SK , находящиеся в w -н.ф., но такие, что соответствующий λ -терм (у нас $(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda xy.x)$) редуцируется дальше.

7.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $M =_w N \Leftrightarrow CL \vdash M = N$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 3.2.1. $\square$

7.2.3. ТЕОРЕМА. Отношение ω обладает свойством CR.

Доказательство. См. упр. 7.4.13. $\square$

Следующее утверждение резюмирует следствия предложения 7.2.2 и теоремы 7.2.3.

7.2.4. ТЕОРЕМА ЧЁРЧА — РОССЕРА для CL . (i) Если $CL \vdash M = N$, то $(\exists Z \in \mathcal{C}) [M \rightarrow_{\omega} Z \wedge N \rightarrow_{\omega} Z]$.

(ii) Если $CL \vdash M = N$ и N находится в ω -н. ф., то $M \rightarrow_{\omega} N$.

(iii) Пусть $M, N \in \mathcal{C}$ — различные ω -н. ф. Тогда $CL \nvdash M = N$. В частности, система CL непротиворечива.

Доказательство. Применяем теорему 3.1.12 и следствие 3.1.13. $\square$

Далее мы отметим, что доказуемое равенство в системе $CL + ext$ также можно проанализировать с помощью рекурсивного понятия редукции s (которое называется сильной редукцией).

7.2.5. ФАКТ. (i) (Хиндли [1967], Лёрчер [1967]). Существует рекурсивное понятие редукции s , такое, что для любых $M, N \in \mathcal{C}$ имеет место

$$M =_s N \Leftrightarrow CL + ext \vdash M = N$$

(ii) (Карри и др. [1958], § 6F). Кроме того, s обладает свойством CR.

Доказательство. См. цитированную литературу. $\square$

Пункт (ii) был доказан раньше (i) из-за того, что сначала было определено отношение $\rightarrow_s$ (которое Карри называл сильной редукцией и обозначал через $\rightharpoonup$) и лишь позднее — отношения $\rightarrow_s$ и s .

В дальнейшем сильная редукция не будет рассматриваться, так как теория $CL + ext$ эквивалентна теории $\lambda + ext$, а для последней имеется удобное понятие редукции $\beta\eta$, в то время как сильная редукция довольно сложна. В действительности свойство CR для s получается из свойства CR для $\beta\eta$, а никакого прямого доказательства не известно. Кроме того, s как множество пар не является функцией, т. е. один и тот же s -редекс может иметь несколько сверток.

У Клопа [1980a] доказано несколько утверждений о различиях между ω - и β -редукцией. Там показано, что если $G_{\omega}(P)$ содержит редукционный цикл (например, для $SII(SII)$), то этот граф содержит бесконечно много редукционных циклов. Это не так для β -редукции: рассмотрите, например, граф $G_{\beta}((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$. У Хиндли [1977] сравниваются понятия ω -, s - и β -редукции.

7.3. Соотношение между CL и λ

Как только в CL определена абстракция, возникают канонические отображения $\mathcal{C}$ и Λ друг в друга.

7.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (стандартных переводов $\mathcal{C}$ и Λ друг в друга). Отображения

$$(\)_{\lambda}: \mathcal{C} \rightarrow \Lambda \text{ и } (\)_{CL}: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$$

определяются индуктивно следующим образом:

$$(\)_{\lambda}: (x)_{\lambda} = x,$$

$$(K)_{\lambda} = K,$$

$$(S)_{\lambda} = S,$$

$$(PQ)_{\lambda} = (P)_{\lambda} (Q)_{\lambda};$$

$$(\)_{CL}: (x)_{CL} = x,$$

$$(MN)_{CL} = (M)_{CL} (N)_{CL},$$

$$(\lambda x.M)_{CL} = \lambda^* x. (M)_{CL}.$$

Обозначения. $P_{\lambda} = (P)_{\lambda}$, $P_{\lambda, CL} = (P_{\lambda})_{CL}$ для $P \in \mathcal{C}$.

$$M_{CL} = (M)_{CL}; M_{CL, \lambda} = (M_{CL})_{\lambda} \text{ для } M \in \Lambda.$$

7.3.2. ЛЕММА. (i) $FV(P) = FV(P_{\lambda})$ для $P \in \mathcal{C}$.

(ii) $FV(M) = FV(M_{CL})$ для $M \in \Lambda$.

Доказательство. Применяем индукцию по построению терма M с использованием леммы 7.1.6(i). $\square$

7.3.3. ЛЕММА. $CL \vdash P = Q \Rightarrow \lambda \vdash P_{\lambda} = Q_{\lambda}$.

Доказательство. Применяем индукцию по длине доказательства $P = Q$. $\square$

Однако обратное утверждение неверно. Например, $\lambda \vdash SK = KI$, но $CL \nvdash SK = KI$. Это происходит из-за того, что CL не замкнута относительно правила ξ , т. е. в общем случае

$$CL \vdash P = Q \not\Rightarrow CL \vdash \lambda^* x. P = \lambda^* x. Q.$$

Например, $CL \vdash Ix = x$, но $CL \nvdash S(KI)I = I$.

Карри расширил систему CL конечным множеством A_{β} замкнутых равенств, таким, что $CL + A_{\beta}$ эквивалентна λ . Мы воспроизведем его построение.

Сначала вводится вспомогательный оператор абстракции.

7.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\lambda_1 x. P$ определяется индукцией по построению терма P .

$$\lambda_1 x. x = I,$$

$$\lambda_1 x. c = Kc, \text{ если } c \text{ — переменная } \neq x \text{ или } c \in \{K, S\},$$

$$\lambda_1 x. PQ = S(\lambda_1 x. P)(\lambda_1 x. Q).$$

Пусть A — некоторое множество равенств между замкнутыми CL -термами. Через $CL + A$ обозначается теория CL , к которой добавлены в качестве аксиом все элементы множества A .

7.3.5. ЛЕММА. Рассмотрим следующие схемы:

- (1) $K = \lambda^*xy.x$,
- (2) $S = \lambda^*xyz.xz(yz)$,
- (3) $S(KP)(KQ) = K(PQ)$,
- (4) $\lambda^*x.KPQ = \lambda^*x.P$,
- (5) $\lambda^*x.SPQR = \lambda^*x.PR(QR)$.

Имеют место такие утверждения:

(i) Если в $CL + A$ доказуемы (1) и (2), то там доказуемо $P_{\lambda, CL} = P$ для всех $P \in \mathcal{C}$.

(ii) Если в $CL + A$ доказуемо (3), то там доказуемо $\lambda^*x.P = \lambda_1x.P$ для всех $P \in \mathcal{C}$.

(iii) Если в $CL + A$ доказуемы (3), (4), (5), то $CL + A$ замкнуто относительно правила ξ :

$$CL + A \vdash P = Q \Rightarrow CL + A \vdash \lambda^*x.P = \lambda^*x.Q.$$

Доказательство. (i) доказывается индукцией по построению терма P .

(ii) Индукция по построению P дает следующее:

$$\lambda_1x.P = KP, \text{ если } x \notin FV(P),$$

$$\lambda_1x.P = \lambda^*x.P.$$

(iii) устанавливается индукцией по длине доказательства равенства $P = Q$ в $CL + A$. Аксиомы системы CL рассматриваются с помощью (4), (5). Аксиомы, принадлежащие множеству A , рассматриваются без труда. В случае правила $P = Q \Rightarrow RP = RQ$ применяем п. (ii) и предположение индукции. Остальное нетрудно. $\square$

7.3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. A_β обозначает следующее множество аксиом:

- (A.1) $K = \lambda^*xy.Kxy$, (A.1') $K = \lambda^*xy.x$;
- (A.2) $S = \lambda^*xyz.Sxyz$, (A.2') $S = \lambda^*xyz.xz(yz)$;
- (A.3) $\lambda^*xy.S(Kx)(Ky) = \lambda^*xy.K(xy)$;
- (A.4) $\lambda^*xy.S(S(KK)x)y = \lambda^*xyz.xz$;
- (A.5) $\lambda^*xyz.S(S(S(KS)x)y)z = \lambda^*xyz.S(Sxz)(Syz)$.

7.3.7. ЛЕММА. В системе $CL + A_\beta$ можно доказать схемы (1), (2), (3) и (5) из леммы 7.3.5. В частности, там доказуемо $\lambda^*x.P = \lambda_1x.P$.

Доказательство. (1) и (2) даны непосредственно. (3) получается, если применить обе части равенства (A.3) к P и Q . Отсюда и из леммы 7.3.5(ii) следует, что $\lambda^*x.P = \lambda_1x.P$. Поэтому для получения (5) достаточно доказать равенство

$$\lambda_1x.SPQR = \lambda_1x.PR(QR).$$

Оно получается путем применения обеих частей равенства (A.5) к $\lambda_1x.P$, $\lambda_1x.Q$ и $\lambda_1x.R$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что если заменить правую часть равенства (A.4) на $\lambda^*xy.x$, то тем же способом можно получить и (4). Однако такой новый вариант (A.4) не перейдет в верное равенство при переводе в λ -термы.

7.3.8. ЛЕММА. В системе $CL + A_\beta$ можно доказать следующее:

- (i) $\lambda^*z.SPQz = SPQ$, если $z \notin FV(SPQ)$,
- (ii) $\lambda^*z.(\lambda^*x.P)z = \lambda^*x.P$, если $z \notin FV(P)$,
- (iii) $\lambda^*z.KPQ = \lambda^*z.P$.

Доказательство. (i) Имеем

$$\begin{aligned} SPQ &= (\lambda^*xyz.Sxyz)PQ \text{ (в силу (A.2))} = \\ &= \lambda^*z.SPQz \text{ (по леммам 7.1.7, 7.1.8)}. \end{aligned}$$

(ii) Случай 1. $P \equiv x$. Тогда $\lambda^*x.P \equiv I \equiv SKK$ и все в порядке в силу (i).

Случай 2. $x \notin FV(P)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda^*x.P &\equiv KP = (\lambda^*xy.Kxy)P \text{ (в силу (A.1))} = \\ &= \lambda^*y.KPy \text{ (по леммам 7.1.7, 7.1.8)} = \\ &= \lambda^*z.(\lambda^*x.P)z \text{ (по лемме 7.1.9)}. \end{aligned}$$

Случай 3. $P \equiv P_1P_2$. Тогда $\lambda^*x.P \equiv SQR$ и все в порядке в силу (i).

(iii) Имеем $\lambda^*x.KPQ = \lambda_1x.KPQ$ (по лемме 7.3.7) $\equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv S(S(KK)(\lambda_1x.P))(\lambda_1x.Q) = \\ &= (\lambda^*xy.S(S(KK)x)y)(\lambda_1x.P)(\lambda_1x.Q) = \\ &= (\lambda^*xyz.xz)(\lambda^*x.P)(\lambda^*x.Q) \text{ (в силу (A.4))} = \\ &= \lambda^*z.(\lambda^*x.P)z = \lambda^*x.P \text{ (в силу (ii))}. \quad \square \end{aligned}$$

7.3.9. СЛЕДСТВИЕ. В $CL + A_\beta$ доказуемы схемы (1)–(5) из леммы 7.3.5.

7.3.10. ТЕОРЕМА. Системы λ и $LC + A_\beta$ эквивалентны в следующем смысле:

- (i) $\lambda \vdash M_{CL, \lambda} = M$; в действительности $M_{CL, \lambda} \rightarrow_\beta M$.
- (ii) $CL + A_\beta \vdash P_{\lambda, CL} = P$.
- (iii) $\lambda \vdash M = N \Leftrightarrow CL + A_\beta \vdash M_{CL} = N_{CL}$.
- (iv) $CL + A_\beta \vdash P = Q \Leftrightarrow \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$.

Доказательство. (i) Сначала докажем индукцией по построению терма $P \in \mathcal{E}$ следующее соотношение:

$$(*) \quad (\lambda^* x.P)_\lambda \rightarrow_\beta \lambda x.P_\lambda.$$

После этого утверждение (i) получается индукцией по построению терма $M \in \lambda$.

(ii) следует из лемм 7.3.7 и 7.3.5(i).

(iii) $(\Rightarrow)$ Сначала индукцией по построению терма M покажем, что

$$(M[x := N])_{CL} \equiv M_{CL}[x := N_{CL}].$$

После этого доказываемая импликация получается индукцией по длине доказательства $M = N$ с использованием того факта, что система $CL + A_\beta$ замкнута относительно правила ξ в силу следствия 7.3.9 и леммы 7.3.5(iii).

(iv) $(\Rightarrow)$ Сначала с помощью (*) докажем, что в λ доказуемы переводы всех A_β -аксиом. Затем нужный результат получается индукцией по доказательству равенства $P = Q$.

(iii) $(\Leftarrow)$ Допустим, что $CL + A_\beta \vdash M_{CL} = N_{CL}$. Тогда в силу (iv) $(\Rightarrow)$ имеем $\lambda \vdash M_{CL, \lambda} = N_{CL, \lambda}$. Следовательно, $\lambda \vdash M = N$ в силу (i).

(iv) $(\Leftarrow)$ доказывается аналогично. $\square$

Теперь выясним, что случится, если добавить экстенциональность.

7.3.11. ЛЕММА. $CL + ext \vdash (A.1), (A.1'), (A.2), (A.2'), (A.3), (A.4), (A.5)$.

Доказательство. В качестве типичного примера докажем (A.3).

$$\begin{aligned} (\lambda^* xy.S(Kx)(Ky))xyz &= S(Kx)(Ky)z = Kxz(Kyz) = xy, \\ (\lambda^* xy.K(xy))xyz &= K(xy)z = xy. \end{aligned}$$

Нужный результат получается отсюда трехкратным применением правила ext . $\square$

7.3.12. ТЕОРЕМА. $CL + ext$ эквивалентна теории $\lambda + ext$ в смысле теоремы 7.3.10.

Доказательство. Аналоги п. (i), (ii) теоремы 7.3.10 следуют из того, что $\lambda \subseteq \lambda + ext$ и $CL + A_\beta \subseteq CL + ext$ по лемме 7.3.11. Аналоги п. (iii), (iv) получаются индукцией по длине доказательства. Нужна еще лемма 7.3.2, чтобы показать, что применения правила ext сохраняются после перевода. $\square$

По теореме 2.1.29 теории $\lambda + ext$ и $\lambda\eta$ эквивалентны. Аналогичным образом можно аксиоматизировать ext и в CL .

7.3.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $A_{\beta\eta}$ — это результат добавления к A_β соотношения

$$(A.6) \quad \lambda^* x.S(Kx)I = I.$$

7.3.14. ТЕОРЕМА. $CL + A_{\beta\eta} \vdash P = Q \Leftrightarrow CL + ext \vdash P = Q$. Следовательно, все четыре теории

$$\lambda + ext, \lambda\eta, CL + ext, CL + A_{\beta\eta}$$

эквивалентны.

Доказательство. $(\Rightarrow)$. Применение обеих частей равенства (A.6) к P дает

$$(6) \quad \lambda^* x.Px = P, \text{ если } x \notin FV(P).$$

Отсюда следует, что система $CL + A_{\beta\eta}$ замкнута относительно правила ext . Действительно, из $x \notin FV(PQ)$ и $CL + A_{\beta\eta} \vdash Px = Qx$ получается в силу следствия 7.3.9 и леммы 7.3.5(iii), что

$$CL + A_{\beta\eta} \vdash \lambda^* x.Px = \lambda^* x.Qx,$$

откуда в силу (6) следует, что $CL + A_{\beta\eta} \vdash P = Q$. Доказываемое утверждение получается теперь индукцией по длине доказательства $P = Q$ в $CL + ext$.

$(\Leftarrow)$ Сначала покажем, что $CL + ext \vdash (A.6)$. После этого нужный результат получается индукцией по длине доказательства. $\square$

Теперь приведем явные формулировки аксиом A_β и $A_{\beta\eta}$.

7.3.15. СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим следующие комбинаторные аксиомы:

$$\begin{array}{l} A_\beta \left\{ \begin{array}{l} (A.1) \quad K = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK)), \\ (A.2) \quad S = S(S(KS)(S(K(S(KS))))(S(K(S(KK))))(K(K(SKK))), \\ (A.3) \quad S(S(KS)(S(KK))(S(KS)K))(KK) = S(KK), \\ (A.4) \quad S(KS)(S(KK)) = \\ \quad S(KK)(S(S(KS)(S(KK)(SKK)))(K(SKK))), \\ (A.5) \quad S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS))) = \\ \quad = S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS))))S)))(KS), \\ (A.6) \quad S(S(KS)K)(K(SKK)) = SKK. \end{array} \right. \\ A_{\beta\eta} \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \end{array}$$

Если взять

$$A_\beta = \{(A.1), (A.2), (A.3), (A.4), (A.5)\},$$

$$A_{\beta\eta} = \{(A.3), (A.4), (A.5), (A.6)\},$$

то (в смысле теоремы 7.3.10)

(i) $CL + A_\beta$ и λ эквивалентны;

(ii) $CL + A_{\beta\eta}$ и $\lambda\eta$ эквивалентны.

Доказательство. (i) Равенства (A.1') и (A.2') из определения 7.3.6 следуют из наших равенств (A.1) — (A.5), так как наши явные аксиомы получены путем разворачивания λ^*x (и использования время от времени сокращения вроде λ_2x , см. упр. 7.4.3).

(ii) Равенства (A.1) и (A.2) вытекают из (A.3) — (A.6).

Подробности составляют упр. 7.4.12. $\square$

Из предыдущего следует, что понятие λ -алгебры допускает описание в языке первого порядка.

7.3.16. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ — аппликативная структура. Ее можно считать λ -алгеброй (т. е. $(X, \cdot, \lambda^*)$ является λ -алгеброй для некоторой операции λ^*) т. и т. т., когда для некоторых $k, s \in X$ структура $(X, \cdot, k, s)$ удовлетворяет следующим восьми аксиомам:

$$Kxy = x, \quad Sxyz = xz(yz), \quad K \neq S, \quad (A.1), \dots, (A.5).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $(X, \cdot, \lambda^*)$ есть λ -алгебра. Положим $k = [\lambda^*xy.x]$, $s = [\lambda^*xyz.xz(yz)]$. Индукция по построению комбинатора $P \in \mathcal{C}$ показывает, что для всех ρ (при очевидной интерпретации) имеем

$$(1) \quad [P_\lambda]_\rho = [P]_\rho.$$

Пусть теперь $P = Q$ — одна из аксиом. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{CL} + \mathbf{A}_\beta \vdash P = Q &\Rightarrow \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda \text{ (по теореме 7.2.10 (iv))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (X, \cdot, \lambda^*) \vdash P_\lambda = Q_\lambda \Rightarrow [P_\lambda]_\rho = [Q_\lambda]_\rho \text{ для всех } \rho \Rightarrow \\ &\Rightarrow [P]_\rho = [Q]_\rho \text{ (в силу (1))} \Rightarrow (X, \cdot, k, s) \models P = Q. \end{aligned}$$

Аксиома $K \neq S$ выполнена потому, что иначе $\mathfrak{M}$ была бы тривиальной (см. пример 2.1.33).

($\Leftarrow$) Пусть $(X, \cdot, k, s)$ удовлетворяет нашим аксиомам, где, как обычно, мы используем обозначения $K = c_k$, $S = c_s$. Определим для каждого $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ терм $\lambda^*x.A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ так же, как в определении 7.1.5. Индукция по построению терма $M \in \Lambda$ показывает, что для всех ρ

$$(2) \quad (M_{CL})_\rho = (M^*)_\rho.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lambda \vdash M = N &\Rightarrow \mathbf{CL} + \mathbf{A}_\beta \vdash M_{CL} = N_{CL} \text{ (по теореме 7.3.10 (iii))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (X, \cdot, k, s) \models M_{CL} = N_{CL} \Rightarrow (X, \cdot, \lambda^*) \models M = N \text{ (в силу (2)).} \end{aligned}$$

Аналогичным образом $\lambda(\mathfrak{M}) \vdash M = N \Rightarrow (X, \cdot, \lambda^*) \models M = N$. Следовательно, $(X, \cdot, \lambda^*)$ является λ -алгеброй. $\square$

Следует отметить, что стандартные переводы не сохраняют ни нормальную форму, ни редукцию.

7.3.17. Примеры. (i) Терм $SK \in \mathcal{C}$ находится в ω -н. ф., но $(SK)_\lambda = SK$ не находится в β -н. ф.

(ii) Пусть $\omega \equiv SII$ и $P \equiv S(K\omega)(K\omega)$.

Тогда P находится в ω -н. ф., а $P_\lambda = \beta\lambda x.\Omega$ вообще не имеет β -н. ф.

(iii) Имеет место

$$\lambda x.II \rightarrow_\beta \lambda x.I,$$

но для $\mathbf{CL}$ -переводов это уже не так:

$$S(KI)(KI) \not\rightarrow_\omega KI.$$

Сильная редукция также не сохраняется при стандартных переводах; см. Карри и др. [1958], с. 221.

С другой стороны, понятие разрешимости инвариантно относительно стандартных переводов. Для $\mathbf{CL}$ разрешимость определяется следующим образом.

7.3.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Терм $P \in \mathcal{C}^0$ называется ω -разрешимым, если $\exists \vec{Q} P\vec{Q} =_\omega I$.

(ii) Терм $P \in \mathcal{C}$ называется ω -разрешимым, если у него имеется ω -разрешимый подстановочный частный случай $P^* \in \mathcal{C}^0$.

Предложение 8.3.22, которое будет доказано в гл. 8, утверждает, что терм $M \in \Lambda$ β -разрешим т. и т. т., когда M_{CL} ω -разрешим.

7.4. Упражнения

7.4.1. Показать, что для $P, Q \in \mathcal{C}$ имеет место

$$P \rightarrow_\omega Q \Rightarrow P_\lambda \rightarrow_\beta Q_\lambda.$$

7.4.2. Начертить $G_\omega(\Omega_{CL})$ и $G_\beta(\Omega)$.

7.4.3. Наряду с λ^* и λ_1 имеются и иные способы определить абстракцию в $\mathbf{CL}$.

(i) Показать, что одним из таких способов является оператор λ_2 , вводимый следующим индуктивным определением:

$$\lambda_2 x.x \equiv SKK,$$

$$\lambda_2 x.P \equiv KP, \text{ если } x \notin FV(P),$$

$$\lambda_2 x.Px \equiv P, \text{ если } x \notin FV(P),$$

$$\lambda_2 x.PQ \equiv S(\lambda_2 x.P)(\lambda_2 x.Q), \text{ если не применим ни один из предыдущих случаев,}$$

Доказать, что $\mathbf{CL} \vdash (\lambda_2 x.P)Q = P[x := Q]$.

(ii) Показать, что если $x \notin FV(Q)$ и $x \neq y$, то

$$(\lambda_2 x.P)[y := Q] \equiv \lambda_2 x.P[y := Q].$$

Заметим, что структура терма $\lambda_2 x.P$ в общем случае проще, чем термов $\lambda^*x.P$ или $\lambda_1 x.P$; см. Карри и др. [1972], § 11С, где обсуждаются различные способы введения абстракции в $\mathbf{CL}$.

7.4.4. Показать, что

$$(\forall P \in \mathcal{C})(\exists Q \in \mathcal{C}, Q \text{ в } \omega\text{-н. ф.})(\forall R \in \mathcal{C})(QR \rightarrow_\omega P);$$

7.4.5. *S-терм* — это *CL*-терм, состоящий только из (нескольких экземпляров) комбинатора *S* (и скобок). Выяснить, какие из следующих *S*-термов имеют *ω*-н. ф. См. также Барендрегт и др. [1976], § 7.

(i) *SSSSSS*.

(ii) (А. Петоросси) *SAA(SAA)*, где *A* = *SSS*.

* (iii) (М. Барон; М. Дюбуэ). *S(SS)SSSS*.

7.4.6. (Бергстра, Клоп [1979]). Показать, что никакой *S*-терм *P* не «циклится», т. е. не имеет места $P \rightarrow_{\omega} P$.

7.4.7. (Клоп). (i) Пусть *P* — терм системы *CL*, который может быть записан без скобок (например, *SKSSK*). Показать, что *P* имеет *ω*-н. ф. (и даже сильно нормализуем). [Указание. Использовать предыдущее упражнение.]

(ii) Показать, что (i) нарушается, если считать *I* константой.

7.4.8. Запомните следующие определения; они часто используются в монографии Карри и др. [1958], [1972].

$$\begin{aligned} B &= \lambda x y z. x (y z), & B &= B_{CL}, \\ C &= \lambda x y z. x z y, & C &= C_{CL}, \\ J &= \lambda x y z w. x y (x w z), & J &= J_{CL}, \\ W &= \lambda x y. x y y, & W &= W_{CL}, \\ \Phi &= \lambda x y z w. x (y w) (z w), & \Phi &= \Phi_{CL}, \\ \Psi &= \lambda x y z w. x (y z) (y w), & \Psi &= \Psi_{CL}. \end{aligned}$$

(ii) Для произвольного *M* положим $M_* = M_I$. В частности, $C_* = \lambda x y. y x$.

7.4.9. (Хиндли). Построить терм $P \in \mathcal{C}^0$, находящийся в *ω*-н. ф. и такой, что

$$(\forall Q \in \mathcal{C}) PQ \rightarrow_{\omega} P.$$

7.4.10. (Бём, Дедзани-Чанкальни [1972]). Рассмотрим алфавит $\Sigma = \{K, S, (,), \cdot\}$. Пусть Σ^* обозначает множество всех слов в алфавите Σ (т. е. конечных цепочек $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $\alpha_i \in \Sigma$). Заметим, что $\mathcal{C}^0 \subseteq \Sigma^*$. Положим

$$\langle P \rangle = \lambda^* x. x P, \quad P \cdot Q = \lambda^* x. Q (P x), \quad B = \lambda^* x y z. x (y z).$$

Определим $\varphi: \Sigma^* \rightarrow \mathcal{C}^0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(K) &= \langle K \rangle, & \varphi(S) &= \langle S \rangle, & \varphi(() &= B, & \varphi(\cdot) &= I \\ \varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) &= \varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \varphi(\alpha_n). \end{aligned}$$

Показать, что

$$(\forall P \in \mathcal{C}) (CL + ext \vdash \varphi(P) = P).$$

[Указание. Показать сначала, что операция $\cdot$ ассоциативна и что $P \cdot I = I \cdot P = P$.]

Вывод. Смысл терма *P* можно найти без синтаксического разбора.

7.4.11 (Чёрч [1936a]). Используя результаты о *CL*, показать, что логика предикатов с одним бинарным отношением и одним бинарным функциональным символом неразрешима. (Замечание. Кальмар [1936] показал, что логика предикатов с единственным бинарным отношением неразрешима. Беман [1922] показал, что логика предикатов с одноместными отношениями разрешима. См. также Чёрч [1956].)

7.4.12. Восстановить подробности доказательства следствия 7.3.15.

7.4.13. Показать, что понятие редукции ω обладает свойством CR. [Ука-

зание: Россер [1935].) Положим $M \rightarrow N$, если в *M* имеются дизъюнктивные

ω -редексы $R_1, \dots, R_n$ и *N* получается сворачиванием редексов $R_1, \dots, R_n$.

Например, $S(KPQ)(SPQR) \rightarrow SP(PR(QR))$. Показать, что

(i) Отношение $\rightarrow$ обладает свойством ромба;

(ii) $\rightarrow_{\omega}$ есть транзитивное замыкание отношения $\rightarrow$.

7.4.14. (Гжегорчик). (i) Показать, что если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^0$ — нетривиальное множество ($\neq \emptyset, \neq \mathcal{C}^0$), замкнутое относительно равенства ($M \in \mathcal{A} \wedge M = N \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow N \in \mathcal{A}$), то $\mathcal{A}$ не рекурсивно.

(ii) Доказать, что теория первого порядка T_{CL} с аксиомами

$$\forall xy (kxy = x), \quad \forall xyz (sxyz = xz(yz)), \quad s \neq k,$$

существенно неразрешима (т. е. T_{CL} не имеет непротиворечивых рекурсивных расширений).

(iii) Показать, что T_{CL} не имеет рекурсивных моделей.

7.4.15. Определим отображение $()_{CL2}: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (x)_{CL2} &= x, \\ (MN)_{CL2} &= (M)_{CL2} (N)_{CL2}, \\ (\lambda x. M)_{CL2} &= \lambda_2 x. (M)_{CL2}, \text{ см. упр. 7.4.3.} \end{aligned}$$

(i) Показать, что $\lambda + ext$ и $CL + ext$ эквивалентны при переводах $()_{\lambda}$ и $()_{CL2}$.

(ii) Показать, что $P_{\lambda, CL2} = P$ и $(P[x := Q])_{CL2} = P_{CL2}[x := Q]_{CL2}$ для всех $P, Q \in \mathcal{C}$.

Глава 8

Классическое лямбда-исчисление (продолжение)

8.1. Базисы и перечисление

В этом разделе излагаются некоторые приложения теории комбинаторов к λ -исчислению. Дело в том, что множество Λ^0 можно породить с помощью λ -термов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$. Это не очевидно априори, так как Λ^0 определяется через множество Λ открытых термов, а не самостоятельным индуктивным определением.

8.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\mathcal{X} \subset \Lambda$. Множество термов, порожденное множеством $\mathcal{X}$ (и обозначаемое через $\mathcal{X}^+$) — это наименьшее множество $\mathcal{Y}$, такое что

- (1) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$,
- (2) $M, N \in \mathcal{Y} \Rightarrow MN \in \mathcal{Y}$.

(ii) Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$. Множество $\mathcal{X} \subset \Lambda$ называется базисом для $\mathcal{A}$, если

$$(\forall M \in \mathcal{A}) (\exists N \in \mathcal{X}^+) (N = M).$$

(iii) Множество $\mathcal{X}$ называется базисом, если $\mathcal{X}$ — базис для Λ^0 .

8.1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}$ есть базис. Более того,

$$(\forall M \in \Lambda^0) (\exists N \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}^+) (N \twoheadrightarrow M).$$

Доказательство. Очевидно, что из $P \in \mathcal{C}^0$ следует $P_\lambda \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}^+$. Пусть теперь $M \in \Lambda^0$. Тогда $M_{CL} \in \mathcal{C}^0$, откуда $M_{CL, \lambda} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}^+$. Далее, $M_{CL, \lambda} \twoheadrightarrow_\beta M$ по теореме 7.3.10(i). $\square$

8.1.3. СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathcal{X}$ — базис, то

$$(\forall M \in \Lambda^0) (\exists N \in \mathcal{X}^+) (N \twoheadrightarrow M).$$

Доказательство. По условию $(\exists N_K, N_S \in \mathcal{X}^+) (N_K = \mathbf{K} \wedge N_S = \mathbf{S})$. Из того, что $\mathbf{K}, \mathbf{S}$ находятся в н. ф., следует по теореме Чёрча — Россера, что $N_K \twoheadrightarrow \mathbf{K}$, $N_S \twoheadrightarrow \mathbf{S}$. В силу предложения 8.1.2

$$(\forall M \in \Lambda^0) (\exists L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}^+) (L \twoheadrightarrow M).$$

Но тогда

$$(\exists L' \in \{N_S, N_K\}^+ \subseteq \mathcal{X}^+) (L' \twoheadrightarrow L \twoheadrightarrow M). \quad \square$$

Теперь будет доказано, что имеется базис, состоящий из единственного комбинатора. Излагаемая конструкция принадлежит Россеру и является упрощением одной конструкции автора. Ранее К. А. Мередит (см. Мередит и Прайор [1963]) нашел одноэлементные базисы, рассмотрев единственную формулу, аксиоматизирующую позитивную импликативную логику. См. также упр. 8.5.16.

8.1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует базис, состоящий из единственного элемента $\mathbf{X}$.

Доказательство. Положим $\mathbf{X} \equiv \langle \mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{K} \rangle$. Легко проверяется, что $\mathbf{XXX} = \mathbf{K}$ и $\mathbf{X}(\mathbf{XX}) = \mathbf{S}$. Доказываемый результат следует теперь из предложения 8.1.2. $\square$

8.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Терм $M \in \Lambda$ перечисляет множество $\mathcal{A} \subset \Lambda$, если

$$(\forall N \in \mathcal{A}) (\exists n \in \mathbb{N}) (M \uparrow n = N).$$

На первый взгляд кажется, что если мы хотим перечислять множество Λ^0 , то мы должны перечислить и все подтермы термов из Λ^0 . Последнее невозможно, так как никакой (конечный) терм не может выдать все свободные переменные. Мы обойдем эту трудность путем построения перечисления (по существу) через базис. Следуя Клини [1936], мы построим терм $E \in \Lambda^0$, перечисляющий множество Λ^0 .

8.1.6. ТЕОРЕМА. Имеется терм $E \in \Lambda^0$, такой, что

$$(\forall M \in \Lambda^0) (E \uparrow M \twoheadrightarrow M).$$

Доказательство проводится в несколько шагов.

(1) Лемма. Пусть $\{\mathbf{X}\}$ — одноэлементный базис множества Λ^0 , построенный в предложении 8.1.4. Тогда

$$(\forall M \in \Lambda^0) (\exists M' \in \{\mathbf{X}\}^+) (M' \twoheadrightarrow M).$$

Более того, M' эффективно находится по M .

Доказательство. Используем следствие 8.1.3 и его доказательство. $\square_1$

(2) Определение. Для терма $M \in \{\mathbf{X}\}^+$ следующим образом индуктивно определяем число $\sharp M \in \mathbb{N}$:

$$\sharp \mathbf{X} = 0, \quad \sharp AB = (\sharp A, \sharp B),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — некоторая рекурсивная спаривающая функция с рекурсивными проекциями p_0, p_1 , причем 0 не пара.

(3) Лемма. $(\exists F \in \Lambda^0) (\forall M \in \{\mathbf{X}\}^+) (F \uparrow \sharp M \twoheadrightarrow M)$.

Доказательство. Пусть p_0, p_1 λ -определяются соответственно терминами $P_0, P_1 \in \Lambda^0$. Определим F соотношением

$$Fx \rightarrow \text{если Zero } x, \text{ то } X, \text{ иначе } F(P_0x)(F(P_1x)).$$

Индукцией по построению термина $M \in \{X\}^+$ получаем, что $F \vdash M^1 \rightarrow M$. $\square_3$

(4) Лемма $(\exists G \in \Lambda^0)(\forall M \in \Lambda^0)(G \vdash M^1 \rightarrow \vdash M')$, где M' берется из (1).

Доказательство. В силу (1) и (2) число $\vdash M'$ можно эффективно найти по M , а значит, и по $\# M$. Поэтому в силу тезиса Чёрча существует рекурсивная функция g , такая, что $g(\# M) = \vdash M'$. Пусть G — терм, λ -определяющий g . Тогда по определению 6.3.1 имеем $G \vdash M^1 \rightarrow \vdash M'$. $\square_4$

(5) Окончание доказательства. Наконец, полагаем $E \equiv \lambda x.F(Gx)$, где F и G построены выше. Тогда для всех $M \in \Lambda^0$

$$E \vdash M^1 \rightarrow F(G \vdash M^1) \rightarrow F \vdash M' \rightarrow M. \quad \square_5 \quad \square$$

Начиная с этого места E обозначает только что построенный нами терм.

Можно перечислить и термы, содержащие лишь данное фиксированное конечное множество переменных.

8.1.7. Следствие. Для каждого $\vec{x}$ имеется терм $E_{\vec{x}} \in \Lambda^0(\vec{x})$, такой, что

$$(\forall M \in \Lambda^0(\vec{x})) E_{\vec{x}} \vdash M^1 \rightarrow M.$$

Доказательство. Пусть дан $\vec{x}$. В силу эффективности гёделевской нумерации существует рекурсивная функция f , такая, что для всех $M \in \Lambda$ имеет место равенство $f(\# M) = \#(\lambda \vec{x}.M)$. Пусть терм F λ -определяет функцию f ; тогда

$$(\forall M \in \Lambda)(F \vdash M^1 \rightarrow \vdash \lambda \vec{x}.M).$$

Положим теперь $E_{\vec{x}} \equiv \lambda a.E(Fa) \vec{x}$. Тогда для любого $M \in \Lambda^0(\vec{x})$

$$E_{\vec{x}} \vdash M^1 \rightarrow E(F \vdash M^1) \vec{x} \rightarrow E \vdash \lambda \vec{x}.M^1 \vec{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow (\lambda \vec{x}.M) \vec{x} \quad (\text{так как } \lambda \vec{x}.M \text{ замкнут}) \rightarrow M. \quad \square$$

8.2. Равномерность; бесконечные последовательности

Бесконечные «равномерные» последовательности термов могут быть закодированы одним термом.

8.2.1. Определение. Пусть $M_n \in \Lambda$ определен для каждого $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что последовательность M_n равномерна по n , если для некоторого термина F

$$(*) \quad (\forall n \in \mathbb{N})(F \vdash n^1 = M_n).$$

Если имеет место (*), то мы говорим, что терм F λ -определяет последовательность $\lambda n.M_n$.

8.2.2. Предложение. Пусть M_n — последовательность термов, такая, что

- (i) $\exists \vec{x} (\forall n \in \mathbb{N})(M_n \in \Lambda^0(\vec{x}))$,
- (ii) $\lambda n.\# M_n$ рекурсивна.

Тогда M_n равномерна по n .

Доказательство. Пусть терм G λ -определяет функцию $\lambda n.\# M_n$. Тогда в силу следствия 8.1.7

$$(E_{\vec{x}} \circ G) \vdash n^1 = E_{\vec{x}} \vdash M_n^1 = M_n.$$

Значит, M_n равномерна по n . $\square$

Отметим, что условие (i) в предложении 8.2.2 также необходимо. Если $F \vdash n^1 = M_n$ для всех n , то $M_n \in \Lambda^0(\vec{x})$, где $\vec{x} = \# FV(F)$.

Условие (ii), однако, не является необходимым. Пусть, например, $M_n \equiv 1 \sim^{i(n)}$, где f — некоторая нерекурсивная функция. Тогда (ii) не выполнено, хотя $M_n \equiv 1$ для каждого n и, следовательно, M_n равномерна по n .

Пусть M_n равномерна по n . Мы хотим закодировать бесконечную последовательность $M_0, M_1, \dots$ одним термом $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

8.2.3. Определение. Пусть M_n — последовательность, равномерная по n , так что

$$F \vdash n^1 = M_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$A \equiv \Theta(\lambda x. [Fx, a(S^+x)]),$$

$$[M_n]_{n \in \mathbb{N}} \equiv A \vdash 0^1,$$

$$\pi_i \equiv \pi_i^{i+1} \equiv \lambda x.x F \sim^i T \quad (\text{см. определение 6.2.7}).$$

Терм A называется *генератором* для $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Заметим, что A и $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$ зависят от выбора терма F , который λ -определяет функцию $\lambda n.M_n$. При необходимости мы будем говорить, что A и $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$ определены через F . Если же опасности возникновения недоразумений не будет, то мы будем записывать $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$ в виде $[M_n]$ или даже в виде $[M_0, M_1, \dots]$.

8.2.4. ЛЕММА. Если $[M_n]$ определен через F , то $FV([M_n]) = FV[F]$.

Доказательство. Имеем

$$[M_n] \equiv \Theta(\lambda x. [Fx, a(S^+x)])^{\ulcorner 0 \urcorner}. \quad \square$$

8.2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть A — генератор для $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$

$$[M_n]_{n \in \mathbb{N}} = [M_0, \dots, M_i, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}].$$

(ii) Для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем $\pi_i[M_n]_{n \in \mathbb{N}} = M_i$.

Доказательство. Пусть A и M_n определены через F . Заметим, что для всех $i \in \mathbb{N}$

$$A^{\ulcorner i \urcorner} = [F^{\ulcorner i \urcorner}, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}] = [M_i, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [M_n] &\equiv A^{\ulcorner 0 \urcorner} = [M_0, A^{\ulcorner 1 \urcorner}] = \\ &= [M_0, [M_1, A^{\ulcorner 2 \urcorner}]] = [M_0, M_1, A^{\ulcorner 2 \urcorner}] = \\ &= \dots \\ &= [M_0, \dots, M_i, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}]. \end{aligned}$$

(ii) $\pi_i[M_n] = \pi_i^{i+1}[M_0, \dots, M_i, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}] = M_i. \quad \square$

8.2.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть последовательность $\lambda n.M_n$ λ -определена термом F , и допустим, что $F^{\ulcorner n \urcorner} \twoheadrightarrow M_n$ имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность $[M_n]$ с генератором A определена через F . Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$

(i) $[M_n] \twoheadrightarrow [M_0, \dots, M_i, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}]$;

(ii) $\pi_i[M_n] \twoheadrightarrow M_i$.

Доказательство. В условиях теоремы для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем $A^{\ulcorner i \urcorner} \twoheadrightarrow [M_i, A^{\ulcorner i \urcorner + 1 \urcorner}]$. Тогда (i) и (ii) получаются так же, как и раньше. $\square$

Замечание. Если последовательность $\lambda n.M_n$ λ -определена термом F , то можно было бы положить

$$[M_n]'_{n \in \mathbb{N}} \equiv F, \quad \pi'_i \equiv \lambda x. x^{\ulcorner i \urcorner}.$$

Тогда мы снова имели бы

$$\pi'_i[M_n]' = M_n.$$

Однако терм $[M_n]$ кодирует исходную последовательность более глубоким образом: для порождения членов этой последовательности уже не нужны цифры — они, так сказать, встроены в код. Это окажется полезным — см. например, предложение 8.2.8. Кроме того, бёмовское дерево терма $[M_n]$ (см. § 10.1) строится непосредственно из бёмовских деревьев термов M_n , $n \in \mathbb{N}$.

В качестве приложения описанного кодирования бесконечных последовательностей мы построим так называемый универсальный генератор. Это — терм, редукты которого становятся сколь угодно сложными.

8.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть R — понятие редукции. R -сечение терма M — это множество

$$\mathcal{F}_R(M) = \{N \mid \exists M' (M \twoheadrightarrow_R M' \text{ и } N \subset M')\}.$$

(ii) Терм M называется R -универсальным генератором (сокращенно R -у.г.), если $\mathcal{F}_R(M) = \Lambda$.

8.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует замкнутый у.г. (т.е. β -у.г.).

Доказательство. Рассмотрим терм $M \equiv [E^{\ulcorner 0 \urcorner}, E^{\ulcorner 1 \urcorner}, \dots]$, определенный через E . Для любого $N \in \Lambda^0$ существует $i \in \mathbb{N}$, такое, что $E^{\ulcorner i \urcorner} \twoheadrightarrow N$. Следовательно,

$$M \twoheadrightarrow [\dots, E^{\ulcorner i \urcorner}, \dots] \twoheadrightarrow [\dots, N, \dots].$$

Поэтому $\Lambda^0 \subset \mathcal{F}(M)$. Так как каждый терм является подтермом своего замыкания, то и $\Lambda \subset \mathcal{F}(M)$, так что $\mathcal{F}(M) = \Lambda$. Следовательно, M есть у.г. По лемме 8.2.4 терм M замкнут. $\square$

Заметим, что если M есть R -у.г., то $G_R(M)$ универсален в том смысле, что для каждого $N \in \Lambda$ $G_R(N)$ есть подграф в $G_R(M)$. Таким образом, терм, построенный в предложении 8.2.8, имеет универсальный β -граф.

Универсальные генераторы будут играть некоторую роль в связи с ω -правилом; см. § 17.3.

Понятие равномерности можно обобщить следующим образом.

8.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть для любого $A \in \Lambda$ определен терм $M_A \in \Lambda$. Скажем, что M_A *равномерен по A* , если

$$(*) \quad \forall A (FA = M_A)$$

для некоторого терма F .

Как и раньше, если имеет место (*), то говорят, что F λ -определяет отображение $\lambda A.M_A$.

8.2.10. Предложение. M_A равномерен по A т. и т.т., когда для некоторой переменной x и любых термов A имеет место равенство $M_A = M_x[x := A]$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что $\forall A (FA = M_A)$. Пусть $x \notin F$. Тогда имеем

$$M_A = FA = Fx[x := A] = M_x[x := A].$$

($\Leftarrow$) Предположим, что $\forall A (M_A = M_x[x := A])$. Тогда терм $\lambda x.M_x$ λ -определяет $\lambda A.M_A$.

8.3. Разрешимость; головные нормальные формы

Вспомним определение понятия разрешимости.

8.3.1. Определение. (i) Пусть $M \in \Lambda^0$. Терм M разрешим, если

$$\exists n (\exists N_1, \dots, \exists N_n \in \Lambda) (MN_1 \dots N_n = I).$$

(ii) Произвольный терм $M \in \Lambda$ разрешим, если его замыкание $\lambda x.M$ разрешимо (это не зависит от выбора $\vec{x}$).

(iii) Терм $M \in \Lambda$ неразрешим, если M не является разрешимым.

8.3.2. Примеры. K разрешим, так как $KI = I$. Аналогичным образом разрешим S . Терм $xI\Omega$ разрешим, так как $(\lambda x.xI\Omega)K = I$. Терм Y разрешим, так как $Y(KI) = KI (Y(KI)) = I$. С другой стороны, Ω неразрешим. Действительно, $\forall \vec{N} (\Omega \vec{N} = I$ не может иметь места), так как $\Omega \vec{N} \rightarrow M \Rightarrow M \equiv \Omega \vec{N}'$, где $\vec{N} \rightarrow \vec{N}'$.

Чтобы понять особую роль терма I в определении 8.3.1(i), заметим, что замкнутый терм M разрешим т. и т.т., когда $\forall P \exists \vec{N} (M\vec{N} = P)$.

Следующая лемма проясняет использование операции замыкания в определении 8.3.1(ii).

8.3.3. Лемма. Пусть $M \in \Lambda$. (i) M разрешим т. и т.т., когда имеется (замкнутый) подстановочный частный случай M^* терма M и термы $\vec{N} \in \Lambda^0$, такие, что $M^*\vec{N} = I$.

(ii) M разрешим т. и т.т., когда $\lambda x.M$ разрешим.

Доказательство. (i) Пусть $\lambda x_1 \dots x_n.M$ — замыкание терма M .

($\Rightarrow$) Допустим, что M разрешим. Тогда для некоторых термов $N_1, \dots, N_m$

$$(*) (\lambda x_1 \dots x_n.M) N_1 \dots N_m = I.$$

Будем считать, что термы $\vec{N}$ замкнуты, так как в противном случае можно подставить любые замкнутые термы в левую часть последнего равенства. Далее можно считать, что $m > n$, так как в противном случае можно добавить нужное количество I к последовательности $N_1, \dots, N_m$. Мы получаем, что

$$(**) M[x_1 := N_1] \dots [x_n := N_n] N_{n+1} \dots N_m = I,$$

и нужный результат следует из того, что $M^* \equiv M[x_1 := N_1] \dots [x_n := N_n]$ — замкнутый подстановочный частный случай терма M .

($\Leftarrow$) Если имеет место (**), то верно и (*), т. е. M разрешим.

(ii) Пусть $x_1 \equiv x$. Тогда в силу (i) имеем

M разрешим $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists \vec{N} \exists \vec{P} \in \Lambda^0) (M[x_1 := N_1] \dots [x_n := N_n] \vec{P} = I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists \vec{N} \exists \vec{P} \in \Lambda^0) ((\lambda x.M) N_1 [x_2 := N_2] \dots [x_n := N_n] \vec{P} = I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists \vec{N} \exists \vec{P} \in \Lambda^0) ((\lambda x.M) [x_2 := N_2] \dots [x_n := N_n] N_1 \vec{P} = I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x.M \text{ разрешим. } \square$$

8.3.4. Следствие. Если M неразрешим, то неразрешимы и термы MN , $M[x := N]$ и $\lambda x.M$ при любом N .

Доказательство состоит из ссылки на лемму 8.3.3. $\square$

8.3.5. Следствие. Разрешимость открытых термов $M \in \Lambda$ не зависит от порядка переменных $\vec{x}$ в замыкании $\lambda \vec{x}.M$.

Доказательство получается ссылкой на лемму 8.3.3(i). $\square$

Теперь будет дана синтаксическая характеристика разрешимости в терминах так называемых головных нормальных форм и головной редукции. Эти понятия введены Уодсвортом [1971].

8.3.6. Определение. (i) M называется аппликационным термом, если M имеет вид NL .

(ii) M называется абстракционным термом, если M имеет вид $\lambda x.N$.

8.3.7. Лемма. (i) Любой терм M — либо переменная, либо аппликационный терм, либо абстракционный терм.

(ii) Каждый аппликационный терм M имеет вид $M \equiv N_1 N_2 \dots N_n$, $n \geq 2$, где N_1 не является аппликационным термом.

(iii) Каждый абстракционный терм имеет вид $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n.N$, $n \geq 1$, где N не является абстракционным термом.

Доказательство. Применяем индукцию по длине термина M . $\square$

8.3.8. Следствие. Каждый терм M имеет один из следующих видов:

- (a) $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. x M_1 \dots M_m$, $n, m \geq 0$,
- (b) $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m$, $n \geq 0$, $m \geq 1$.

Доказательство. Если терм M — переменная, то он имеет вид (a), где $n = m = 0$. Если M — аппликационный терм, то $M \equiv N_1 N_2 \dots N_n$, где N_1 не является аппликационным термом. Следовательно, M имеет вид (a) или (b) с $n = 0$ в зависимости от того, является N_1 переменной или абстракционным термом. Аналогичным образом получается, что M имеет нужный вид в случае, когда он — абстракционный терм.

8.3.9. Определение. (i) Терм M является *головной нормальной формой* (г.н.ф.), если он имеет вид $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. x M_1 \dots M_m$, $n, m \geq 0$. *Головная переменная* такого термина M — это x . Через HNF обозначается множество всех г.н.ф.

(ii) Говорят, что M имеет головную нормальную форму, если $M \equiv M'$ для некоторого $M' \in \text{HNF}$.

(iii) Если M имеет вид

$$M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m, \quad n \geq 0, m \geq 1,$$

то $(\lambda x. M_0) M_1$ называется *головным редексом* термина M .

Заметим, что головной редекс термина является также и его самым левым редексом, но обратное неверно (контрпример — терм $\lambda x. x((\lambda a. a)b)$).

8.3.10. Определение. (i) Допустим, что Δ — головной редекс термина M . Будем писать

$$M \xrightarrow{\Delta} N,$$

если $M \xrightarrow{\Delta} N$, т. е. N получается из M путем свертывания редекса Δ . Отношение $\xrightarrow{\Delta}$ называется *одношаговой головной редукцией*.

(ii) $\xrightarrow{\Delta}$ обозначает рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow{\Delta}$.

(iii) *Головная редукция* (или *головная редукционная цепочка*) термина M — это однозначно определенная последовательность $M_0, M_1, \dots$, такая, что $M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta} M_1 \xrightarrow{\Delta} \dots$.

Если M_n — г.н.ф., то говорят, что головная редукция термина M оканчивается термом M_n . В противном случае говорят, что M имеет *бесконечную* головную редукцию.

Следующий результат Уодсворта — непосредственное следствие теоремы Карри о стандартизации (теорема 11.4.7).

8.3.11. Теорема. M имеет г.н.ф. т. и т.т., когда головная редукция термина M заканчивается.

Доказательство. См. следствие 11.4.8. $\square$

8.3.12. Лемма. Если $M \xrightarrow{h} M'$, то $M[z := N] \xrightarrow{h} M'[z := N]$.

Доказательство. По предположению

$$M \equiv \lambda \vec{x}. (\lambda y. N_0) N_1 N_2 \dots N_m,$$

$$M' \equiv \lambda \vec{x}. N_0[y := N_1] N_2 \dots N_m.$$

Следовательно,

$$M[z := N] \equiv \lambda \vec{x}. (\lambda y. N_0[z := N]) N_1[z := N] N_2^* \dots N_m^*,$$

$$M'[z := N] \equiv \lambda \vec{x}. N_0[y := N_1][z := N] N_2^* \dots N_m^*,$$

где $N_i^* \equiv N_i[z := N]$ для $2 \leq i \leq m$.

Теперь в силу леммы о подстановке 2.1.16 и соглашения о переменных 2.1.13 получаем, что $M[z := N] \xrightarrow{h} M'[z := N]$. $\square$

8.3.13. Предложение. (i) $\lambda x. M$ имеет г.н.ф. $\Leftrightarrow M$ имеет г.н.ф.

(ii) $M[z := N]$ имеет г.н.ф. $\Rightarrow M$ имеет г.н.ф.

(iii) MN имеет г.н.ф. $\Rightarrow M$ имеет г.н.ф.

Доказательство. (i) Используем тот факт, что из $\lambda x. M \rightarrow N$ следует, что $N \equiv \lambda x. N'$ и $M \rightarrow N'$.

(ii) Предположим, что M не имеет г.н.ф. Тогда по теореме 8.3.11 его головная редукция $M \equiv M_0 \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{h} \dots$ бесконечна. Тогда по лемме 8.3.12 и головная редукция термина $M[z := N]$ была бы бесконечна, что противоречит наличию г.н.ф. у термина $M[z := N]$.

(iii) Пусть

$$(*) \quad M \equiv M_0 \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{h} \dots$$

— головная редукция термина M .

Случай 1. M_k не является абстракционным термом ни для какого k . Тогда

$$MN \equiv M_0 N \xrightarrow{h} M_1 N \xrightarrow{h} \dots$$

— головная редукция термина MN . Так как последняя редукция конечна, последовательность $(*)$ также должна быть конечной. Значит, M имеет г.н.ф.

Случай 2. Для некоторого k терм M_k абстракционный. Запишем его в виде $M_k \equiv \lambda x.M'$. Выберем наименьшее k . Тогда головная редукция терма MN начинается последовательностью $MN \equiv M_0N \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} M_kN \equiv (\lambda x.M')N \xrightarrow{h} M'[x := N] \xrightarrow{h} \dots$.

Но

MN имеет г. н. ф. $\Rightarrow M'[x := N]$ имеет г. н. ф. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow M'$ имеет г. н. ф. (в силу (ii)) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow M_k \equiv \lambda x.M'$ имеет г. н. ф. (в силу (i)) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow M$ имеет г. н. ф. $\square$

Теперь мы можем охарактеризовать разрешимость в терминах г. н. ф.

8.3.14. ТЕОРЕМА (Уодсворт). M разрешим $\Leftrightarrow M$ имеет г. н. ф.

Доказательство. В силу леммы 8.3.3(ii) и предложения 8.3.13(i) можно считать, что M замкнут.

($\Rightarrow$) Если $M\vec{N} = I$, то $M\vec{N}$ имеет г. н. ф. Следовательно, в силу предложения 8.3.13(iii) терм M также имеет г. н. ф.

($\Leftarrow$) Если $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x_i M_1 \dots M_m$, то $M(K^m I) \sim^n = K^m I M_1 \dots M_m = I$. Следовательно, M разрешим. $\square$

В частности, нормальные формы разрешимы, или, что то же самое, неразрешимые термы не имеют н. ф.

8.3.15. Следствие. M неразрешим $\Leftrightarrow M$ наследственно не имеет н. ф., т. е. для любого подстановочного частного случая M^* и любой последовательности $\vec{N}$ терм $M^*\vec{N}$ не имеет н. ф.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если бы $M^*\vec{N}$ имел нормальную форму, то по теореме 8.3.14 и лемме 8.3.3(i) для некоторой последовательности $\vec{P}$ выполнялось бы равенство $(M^*\vec{N})^*\vec{P} = I$, где $(M^*\vec{N})^*$ — замкнутый подстановочный частный случай терма $M^*\vec{N}$. Поэтому $M^{**}\vec{N}^*\vec{P} = I$ и M был бы разрешим по лемме 8.3.3(i).

($\Leftarrow$) Если M разрешим, то по лемме 8.3.3(i) для некоторой последовательности $\vec{N}$ выполнено $M^*\vec{N} = I$. $\square$

Теперь будет установлено несколько результатов, которые понадобятся в гл. 10.

8.3.16. ЛЕММА. Пусть $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x M_1 \dots M_m$. Тогда из $M \rightarrow N$ следует, что $N \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x N_1 \dots N_m$ для некоторых термов $\vec{N}$, таких, что $M_i \rightarrow N_i$.

Доказательство. Все редексы, которые могут встречаться в терме M , находятся внутри $M_1, \dots, M_m$. Следовательно, если $M \rightarrow N$ или $M \twoheadrightarrow N$, то $N \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x N_1 \dots N_m$, причем $M_i \rightarrow N_i$ или $M_i \twoheadrightarrow N_i$. $\square$

8.3.17. Следствие. (i) Пусть $M \in \text{HNF}$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда $N \in \text{HNF}$.

(ii) Пусть M имеет две г. н. ф.

$N \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x N_1 \dots N_m$ и $N' \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x' N'_1 \dots N'_m$.

Тогда $n = n'$, $m = m'$, $x \equiv x'$ и $N_i = N'_i$ для $1 \leq i \leq m$.

Доказательство. (i) получается непосредственно по лемме 8.3.16.

(ii) По предположению имеем $N = M = N'$. Следовательно, по теореме Чёрча — Россера $\exists Z (N \twoheadrightarrow Z \leftarrow N')$. По лемме 8.3.16 терм Z имеет вид $\lambda x_1 \dots x_n.x Z_1 \dots Z_m$, где $n = n'$, $x \equiv x'$, $m = m'$ и $N_i \twoheadrightarrow Z_i \leftarrow N'_i$ для $1 \leq i \leq m$. $\square$

8.3.18. ЛЕММА. Множество NF нормальных форм можно определить любым из следующих двух способов.

(i) $x \in \text{NF}$;

$M_1, \dots, M_m \in \text{NF} \Rightarrow \lambda x_1 \dots x_n.x M_1 \dots M_m \in \text{NF}$, $n, m \geq 0$.

(ii) $x \in \text{NF}$;

$M_1, \dots, M_m \in \text{NF} \Rightarrow x M_1 \dots M_m \in \text{NF}$, где $m \geq 0$;

$M \in \text{NF} \Rightarrow \lambda x.M \in \text{NF}$.

Доказательство. (i) Пусть $\mathcal{X}$ — множество, которое задано рассматриваемым индуктивным определением. Очевидно, что $\mathcal{X} \subset \text{NF}$. Пусть теперь M есть н. ф. Тогда в силу следствия 8.3.8 терм M имеет вид $\lambda x_1 \dots x_n.x M_1 \dots M_m$, причем термы $M_1, \dots, M_m$ снова находятся в н. ф. Индукция по длине терма M показывает, что $M \in \mathcal{X}$.

(ii) Множество, заданное рассматриваемым индуктивным определением, — то же самое, что и в п. (i). $\square$

8.3.19. Следствие. M имеет н. ф. $\Leftrightarrow \lambda \vec{x}.M$ имеет н. ф.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $M = \lambda \vec{z}.y \vec{N}$, то $\lambda \vec{x}.M = \lambda \vec{x} \lambda \vec{z}.y \vec{N} \in \text{NF}$.

($\Leftarrow$) Если $\lambda \vec{x}.M \twoheadrightarrow \lambda \vec{z}.y \vec{N}$, то $\vec{z} = \vec{x} \vec{w}$ и $M \twoheadrightarrow \lambda \vec{w}.y \vec{N} \in \text{NF}$. $\square$

Терм M может иметь несколько различных г. н. ф. Например, $M \equiv \lambda x.lx$ (II) имеет г. н. ф. $\lambda x.x$ (II) и $\lambda x.xl$. Теорема 8.3.11 обеспечивает канонический выбор.

8.3.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если терм M имеет г.н.ф., то последний член его обрывающейся головной редукции называется *главной головной нормальной формой* терма M .

Пусть, например, $M \equiv (\lambda x.xx) ly (la)$. Тогда ya есть одна из г.н.ф. терма M , а его основная г.н.ф. есть $y(la)$.

Следующая лемма используется для сравнения разрешимости в системах λ и CL .

8.3.21. ЛЕММА (Хиндли [1977]). (i) Если $M \xrightarrow{h} N$ и M не имеет вида $\lambda z.M_1$, то $M_{CL} \xrightarrow{w} N_{CL}$.

(ii) Пусть $M \xrightarrow{h} x$. Тогда $M_{CL} \xrightarrow{w} x$ (а также и $M_{CL2} \xrightarrow{w} x$, где $()_{CL2}$ определено в упр. 7.4.15).

Доказательство. (i) Соотношение $M \xrightarrow{h} N$ имеет по предположению вид $(\lambda x.R) T \vec{U} \xrightarrow{h} R[x:=T] \vec{U}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} M_{CL} &\equiv (\lambda^* x.R_{CL}) T_{CL} \vec{U}_{CL} \xrightarrow{w} R_{CL}[x:=T_{CL}] \vec{U}_{CL} \equiv \\ &\equiv (R[x:=T] \vec{U})_{CL} \equiv N_{CL}. \end{aligned}$$

(ii) По предположению мы имеем головную редукцию

$$\sigma: M \equiv M_1 \xrightarrow{h} M_2 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} M_n \equiv x.$$

Из того, что последний терм — переменная, вытекает, что ни один из термов M_i не имеет вида $\lambda y.Z$. Поэтому доказываемый результат следует из (i). (Для $()_{CL2}$ рассуждаем аналогично с использованием упр. 7.4.15.) $\square$

Следующий результат взят из диссертации Барендрегта [1971]. Приводимое доказательство принадлежит Хиндли [1977].

8.3.22. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Для $M \in \Lambda$

$$M \text{ } \beta\text{-разрешим} \iff M_{CL} \text{ } \omega\text{-разрешим}.$$

(ii) Для $P \in \mathcal{C}$

$$P \text{ } \omega\text{-разрешим} \iff P_\lambda \text{ } \beta\text{-разрешим}.$$

Доказательство. (i) Не умаляя общности, можно считать, что M замкнут.

($\Leftarrow$) Пусть M_{CL} ω -разрешим. Тогда $M_{CL} \vec{Q} \xrightarrow{w} I$ для некоторых термов $\vec{Q}$. Следовательно, $M \vec{Q}_\lambda = M_{CL, \lambda} \vec{Q}_\lambda = I_\lambda = I$, что доказывает β -разрешимость терма M .

($\Rightarrow$) Если терм M β -разрешим, то $M \vec{N} = I$, откуда $M \vec{N} x \xrightarrow{h} x$. По теореме 8.3.11 отсюда следует, что $M \vec{N} x \xrightarrow{w} x$.

Тогда $M_{CL} \vec{N}_{CL} x \xrightarrow{w} x$ по лемме 8.3.21 (ii). Поэтому $M_{CL} N_{CL} I \xrightarrow{w} I$, что доказывает ω -разрешимость терма M_{CL} .

(ii) устанавливается аналогично с использованием упр. 7.4.15. $\square$

8.4. Лямбда-определимость частичных функций

В этом разделе понятие λ -определимости будет обобщено на частичные функции. Будет доказано, что среди частичных числовых функций λ -определимыми являются в точности частично рекурсивные функции.

Частичная числовая функция — это частичное отображение $\varphi: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ при некотором $p \in \mathbb{N}$. Пусть φ, ψ — две частичные функции. Будем говорить, что имеет место $\varphi(\vec{n}) \simeq \psi(\vec{m})$, если $\varphi(\vec{n}) = a \iff \psi(\vec{m}) = a$. Иными словами, если определена левая часть условного равенства $\varphi(\vec{n}) \simeq \psi(\vec{m})$, то правая часть определена и имеет то же самое значение, и наоборот.

Пусть $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m$ — частичные числовые функции, причем χ имеет m аргументов, а $\psi_1, \dots, \psi_m$ — одно и то же количество аргументов. Тогда $\chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n}))$ обозначает частичную числовую функцию φ , такую, что

$$\varphi(\vec{n}) = a \text{ т. и т.т., когда } \exists a_1 \dots a_m [\psi_i(\vec{n}) = a_i \text{ для } 1 \leq i \leq m \text{ и } \chi(a_1, \dots, a_m) = a].$$

Иными словами, для того чтобы было определено значение $\varphi(\vec{n})$, нужно, чтобы были определены все $\psi_i(\vec{n})$.

Напомним, что $\varphi(\vec{n}) \downarrow$ для частичной функции φ означает, что φ определена в точке $\vec{n}$ (т. е. $\exists a (\varphi(\vec{n}) = a)$), а $\varphi(\vec{n}) \uparrow$ означает, что φ не определена в точке $\vec{n}$.

Как уже говорилось раньше, первоначальное понятие λ -определимости было таково.

Частичная числовая функция φ от p аргументов λ -определима, если существует терм $F \in \Lambda$, такой, что для всех $\vec{n} \in \mathbb{N}^p$

$$F \vec{n} \uparrow \iff \varphi(\vec{n}) \uparrow, \text{ если } \varphi(\vec{n}) \downarrow,$$

$$F \vec{n} \uparrow \text{ не имеет н. ф. в противном случае.}$$

В духе предложения 2.2.14 мы изменяем это определение следующим образом.

8.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частичная числовая функция φ от p аргументов λ -определима, если для некоторого $F \in \Lambda$

$$(*) \quad (\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^p) \quad F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner \varphi(\vec{n}) \urcorner, \text{ если } \varphi(\vec{n}) \downarrow, \\ F \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{ неразрешим в противном случае.}$$

Если имеет место (*), то говорят, что φ λ -определена термом F .

Для всюду определенных функций это определение совпадает с определением 6.3.1. Поэтому непосредственно очевидно следующее утверждение.

8.4.2. ЛЕММА. Общерекурсивные функции λ -определимы как частичные функции.

8.4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A}$ — класс частичных числовых функций.

(i) Говорят, что $\mathcal{A}$ замкнут относительно композиции, если из $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m \in \mathcal{A}$ следует, что функция φ , определяемая соотношением

$$\varphi(\vec{n}) \simeq \chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n})),$$

также принадлежит $\mathcal{A}$.

(ii) Говорят, что $\mathcal{A}$ замкнут относительно минимизации, если для любой всюду определенной¹⁾ функции $\chi \in \mathcal{A}$ функция φ , определяемая соотношением $\varphi(\vec{n}) = \mu t [\chi(\vec{n}, t) = 0]$, принадлежит $\mathcal{A}$.

8.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс $\mathcal{PR}$ частично рекурсивных функций — это наименьший класс частичных числовых функций, содержащий общерекурсивные функции и замкнутый относительно композиции и минимизации.

При сопоставлении λ -термов частично рекурсивным функциям возникает следующая трудность. Представление композиции уже не обязательно является композицией представлений, как это было в случае всюду определенных функций; см. пример 2.2.9.

Эта проблема будет решена в лемме 8.4.6.

8.4.5. ЛЕММА. (i) $(\forall t \in \mathbb{N}) (\ulcorner t \urcorner \text{KII} = 1)$, т. е. цифры разрешимы.

¹⁾ Требование всюду определенности χ можно снять, если модифицировать доказательство леммы 8.4.11, применяя заглушающие множители, используемые в доказательстве леммы 8.4.6.

(ii) Пусть частичная числовая функция φ λ -определяется термом $F \in \Lambda$. Тогда для всех $\vec{n}$

$$F \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{KII} = 1, \text{ если } \varphi(\vec{n}) \downarrow,$$

$$F \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{KII} \text{ неразрешим в противном случае.}$$

Доказательство. (i) Имеем

$$\ulcorner 0 \urcorner \text{KII} = \text{KII} = 1, \quad \ulcorner n + 1 \urcorner \text{KII} = [F, \ulcorner n \urcorner] \text{KII} = F \text{II} = 1.$$

(ii) Если $\varphi(\vec{n}) \uparrow$, то терм $F \ulcorner \vec{n} \urcorner$ неразрешим, а тогда неразрешим и терм $F \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{KII}$ в силу следствия 8.3.4. $\square$

Следующая лемма использует искусственный прием, заимствованный у Лёрчера [1963].

8.4.6. ЛЕММА. Класс λ -определимых частичных числовых функций замкнут относительно композиции.

Доказательство. Пусть $\varphi(\vec{n}) \simeq \chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n}))$, где функции $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m$ λ -определены соответственно термами $G, H_1, \dots, H_m$. Положим

$$F \equiv \lambda \vec{x}. (H_1 \vec{x} \text{KII}) \cdots (H_m \vec{x} \text{KII}) (G (H_1 \vec{x}) \cdots (H_m \vec{x})).$$

Мы утверждаем, что терм F λ -определяет функцию φ . Действительно, если значение $\psi_i(\vec{n})$ не определено, то терм $F \ulcorner \vec{n} \urcorner$ неразрешим, так как i -й «заглушающий множитель» $H_i \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{KII}$ неразрешим в этом случае в силу леммы 8.4.5(ii). Если все значения $\psi_i(\vec{n})$ определены, то все заглушающие множители равны 1, и $F \ulcorner \vec{n} \urcorner = G(H_1 \ulcorner \vec{n} \urcorner) \cdots (H_m \ulcorner \vec{n} \urcorner)$, как и должно быть. $\square$

Чтобы λ -определить частичные функции, в построении которых участвует минимизация, нужен один результат из части III. Введем сначала некоторые определения.

8.4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\Delta \subset M$ — вхождение редекса, причем $\Delta \equiv (\lambda x.A)B$. Тогда первое вхождение символа λ в Δ называется *первым* λ в Δ .

(ii) Пусть $\Delta_1, \Delta_2 \subset M$ — вхождения редексов в терм M . Говорят, что Δ_1 (находится) левее Δ_2 , если первое λ в Δ_1 находится левее первого λ в Δ_2 . Мы пишем $\Delta_1 < \Delta_2$, если Δ_1 левее Δ_2 , и $\Delta_1 \leq \Delta_2$, если $\Delta_1 < \Delta_2$ или $\Delta_1 = \Delta_2$.

(iii) Вхождение редекса $\Delta \subset M$ называется *самым левым редексом* терма M (или в терме M), если Δ находится левее всех других редексов в M .

Пример. Рассмотрим терм

$$M \equiv \lambda a. (\lambda b. (\lambda c. c) bb) d ((\lambda e. I) a),$$

в котором подчеркнуты все редексы. Самый левый редекс в M — это $(\lambda b. (\lambda c. c) bb) d$.

Заметим, что головной редекс терма M всегда самый левый, но обратное неверно: рассмотрим хотя бы $M \equiv \lambda x. x((\lambda y. y)x)$.

8.4.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть σ — (конечная или бесконечная) редукционная цепочка, начинающаяся с M ,

$$\sigma: M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots$$

Тогда σ называется *квазилевой редукцией*, если

$$\forall n (\exists m \geq n) (\Delta_m \text{ — самый левый редекс в } M_m),$$

т. е. самые левые шаги в σ кофинальны.

8.4.9. ТЕОРЕМА. Если M имеет бесконечную квазиловую редукцию, то он не имеет н. ф.

Доказательство. См. теорему 13.2.6. $\square$

Теперь мы можем получить следующее приложение.

8.4.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть терм P таков, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место $P \uparrow n = F$. Тогда

- (i) μP не имеет н. ф.;
- (ii) μP неразрешим.

Доказательство. (i) По определению 6.3.8 мы имеем $\mu P = H_P \uparrow 0$, где

$$H_P = \Theta(\lambda h x. \text{если } P x, \text{ то } x, \text{ иначе } h x^+).$$

Тогда

$$H_P \uparrow n \rightarrow \text{если } P \uparrow n, \text{ то } \uparrow n, \text{ иначе } H_P \uparrow n + 1.$$

Поэтому μP имеет следующую редукционную цепочку

$$\begin{aligned} \mu P &= H_P \uparrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{если } P \uparrow 0, \text{ то } \uparrow 0, \text{ иначе } H_P \uparrow 1 \rightarrow \\ &\rightarrow H_P \uparrow 1 \rightarrow \\ &\quad \neq i \\ &\rightarrow \text{если } P \uparrow 1, \text{ то } \uparrow 1, \text{ иначе } H_P \uparrow 2 \rightarrow \\ &\rightarrow H_P \uparrow 2 \rightarrow \\ &\quad \neq i \\ &\rightarrow \dots \end{aligned}$$

Здесь запись $M \xrightarrow{\neq i} N$ показывает, что в данной редукции сворачивается хотя бы один самый левый редекс. Отсюда следует, что μP имеет бесконечную квазиловую редукцию и поэтому не имеет н. ф. по теореме 8.4.9.

(ii) Возьмем замкнутый подстановочный частный случай терма μP . Согласно определению 6.3.8, он имеет вид $\mu(P^*)$, где P^* — замкнутый подстановочный частный случай терма P .

Аналогично тому, как это сделано в п. (i), мы устанавливаем, что $\mu P^* \tilde{Z}$ не имеет н. ф. ни для каких $\tilde{Z}$. Поэтому μP неразрешим в силу следствия 8.3.15. (Вместо этого можно использовать упр. 13.6.13 для установления неразрешимости μP .) $\square$

8.4.11. ЛЕММА¹⁾. Множество λ -определимых частичных числовых функций замкнуто относительно минимизации.

Доказательство. Пусть $\varphi(\vec{n}) \simeq \mu t [x(\vec{n}, t) = 0]$, где функция χ всюду определена и λ -определена некоторым термом G . Положим

$$F \equiv \lambda \vec{x}. \mu [\lambda y. \text{Zero}(G \vec{x} y)].$$

Если $\varphi(\vec{n}) \downarrow$, то $\exists m (\chi(\vec{n}, m) = 0)$. Поэтому в силу предложения 6.3.9 (ii) имеем $F \uparrow \vec{n} = \varphi(\vec{n})$.

Если же $\varphi(\vec{n}) \uparrow$, то $\forall m (\chi(\vec{n}, m) \neq 0)$ и, следовательно, $\forall m (\text{Zero}(G \uparrow \vec{n} \uparrow m) = F)$. Поэтому в силу предложения 8.4.10 получаем, что терм

$$F \uparrow \vec{n} = \mu [\lambda y. \text{Zero}(G \uparrow \vec{n} y)]$$

неразрешим. Таким образом, терм F λ -определяет φ . $\square$

8.4.12. ЛЕММА. Если F λ -определяет частичную функцию φ , то

$$\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow F \uparrow \vec{n} = \uparrow m.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) имеет место по определению.

($\Leftarrow$) Если $F \uparrow \vec{n} = \uparrow m$, то ввиду разрешимости терма $\uparrow m$ имеем $\varphi(\vec{n}) \downarrow$ и $\varphi(\vec{n}) = m'$. Но тогда $\uparrow m = \uparrow m'$ и, следовательно, $m = m'$. $\square$

8.4.13. ТЕОРЕМА (Клини). Частичная числовая функция частично рекурсивна т. и т. т., когда она λ -определима.

¹⁾ См. подстрочное примечание к определению 8.4.3 (ii).

Доказательство. В силу определения 8.4.4, лемм 8.4.2, 8.4.6 и 8.4.11 получаем, что все частично рекурсивные функции λ -определимы. Обратно, пусть функция φ λ -определена термом F . Тогда по лемме 8.4.12

$$\varphi(\vec{n}) = m \iff \lambda \vdash F\vec{n}^\top = \vec{m}^\top.$$

Правая часть этой эквивалентности рекурсивно перечислима, поэтому перечислима и левая часть, а значит, и график функции φ . Таким образом, φ частично рекурсивна. $\square$

8.5. Упражнения

8.5.1 (Россер). Показать, что каждый из следующих термов образует одноэлементный базис.

(i) $X_0 = \langle K^4 I, S, K \rangle$.

(ii) $X_1 = \langle K^2 K, K, KS \rangle$.

8.5.2. Построить одноэлементный базис для $\Lambda^0(x_1, \dots, x_n)$.

8.5.3. Показать, что множество Λ нельзя перечислить одним термом.

8.5.4. (i) Вывести теорему о неподвижной точке 2.1.5 из второй теоремы о неподвижной точке 6.5.9, используя терм E .

(ii) Пусть $F \in \Lambda^0$. Положим $W \equiv \lambda x.F(Exx)$. Показать, что терм $W^\top W^\top$ — неподвижная точка для F .

(iii) Показать, что $(\forall F \in \Lambda^0) (\exists n \in \mathbb{N}) (F\vec{n}^\top = E\vec{n}^\top)$.

(iv) Пусть $\omega \equiv \lambda xy.Ey(xxy)$ и $G \equiv \omega\omega$. Показать, что G перечисляет множество неподвижных точек всех замкнутых термов.

8.5.5. Показать, что для некоторого $E \in \mathcal{C}^0$ имеет место

$$(\forall M \in \mathcal{C}^0) (\exists n \in \mathbb{N}) (E(\vec{n}_{CL}^\top) \rightarrow_w M).$$

8.5.6. (i) Доказать следствие 6.5.10.

(ii) Показать, что $\neg (\exists Y \in \Lambda) (\forall F \in \Lambda^0) (YF \rightarrow F\vec{Y}F^\top)$.

8.5.7. (i) Показать, что $\vec{M}^\top$ не равномерна по M .

(ii) Показать, что μP равномерна по P .

8.5.8. Пусть $K^\infty \equiv YK$. Показать, что

$$M \text{ разрешим} \Rightarrow M \neq K^\infty.$$

Обратная импликация тоже верна.

8.5.9. Пусть $C \equiv Y(\lambda cab.b(cb(ca)))$. Показать, что терм Cab не имеет н. ф., но разрешим.

8.5.10. Построить терм M , такой, что

$$M \text{ имеет н. ф.} \iff \text{теорема Ферма ложна.}$$

8.5.11. Определить μ -оператор $\mu t [\varphi(\vec{n}, t) = 0]$ также и для частичных функций φ . Показать, что класс λ -определимых частичных функций замкнут и относительно такой минимизации.

8.5.12. Показать, что понятия « M имеет н. ф.» и « M разрешим» Σ_1^0 -полны.

8.5.13. Построить терм $F \in \Lambda^0$, такой что $F\vec{n}^\top = \lambda xy.x^n yx \sim^n$.

8.5.14. (i) Пусть $S = \mathcal{M}^0(\lambda)$ — модель из термов, состоящая из замкнутых λ -термов с точностью до β -конвертируемости. Определим сюръективное отображение $v: \mathbb{N} \rightarrow S$, полагая $v(n) = E\vec{n}^\top$. Показать, что $\gamma(\lambda) = (S, v)$ — предполное нумерованное множество (это понятие определено перед

упр. 6.8.18). Показать, что отображение $\mu: S \rightarrow S$, определенное соотношением $\mu(M) = FM$ для $F \in \Lambda^0$, является морфизмом.

(ii) Показать, что для любой общерекурсивной функции f

$$(*) \quad (\exists n \in \mathbb{N}) (E\vec{n}^\top = E\vec{f}(n)^\top).$$

[Указание. Это непосредственно следует из (i) и упр. 6.8.18; можно также использовать упр. 8.5.4 (iii).]

(iii) Показать, что соотношение $(*)$ и вторая теорема о неподвижной точке 6.5.9 непосредственно эквивалентны.

(iv) Показать, что для всех рекурсивных f , удовлетворяющих условию $\forall m \exists n (M = E\vec{f}(n)^\top)$, имеет место равенство $E\vec{f}(n)^\top = E\vec{f}(m)^\top$ для некоторого $n \neq m$.

8.5.15 (Крейг, в книге Карри и др. [1958], с. 183). Собственный комбинатор — это замкнутый λ -терм M вида $\lambda x.P(\vec{x})$, где $P(\vec{x}) \in \{\vec{x}\}^+$. Доказать, что базис, состоящий из собственных комбинаторов, должен содержать не менее двух элементов.

8.5.16. (i) (Ч. А. Мердит) Пусть $H \equiv \lambda abcd.cd(a(\lambda x.d))$. Показать, что $\{H\}$ — базис. [Указание. Пусть $H_1 \equiv H$, $H_{n+1} \equiv H_n H$, $U \equiv H_3 H_2$, $X \equiv H_4(KH_4)$, $Y \equiv XX$ и $Z \equiv H_4(H_4 Y)(KH_4)$. Тогда $H_4(H_4 U H_2) H_2 = K$ и $X(UZ) = S$.]

(ii) (Барендрегт). Пусть $X \equiv \lambda x.x(xS(KK))K$. Показать, что $\{X\}$ — базис. [Указание. $XX = K$, $XX = S$.]

(iii) (Бём). Пусть $X \equiv \lambda x.x(xS(K^3 I))K$. Показать, что $\{X\}$ — базис. [Указание. $XX = K$, $XX = S$.]

(iv) (Россер). Найти $I \in \Lambda^0$, такой, что $II = S$ и $IS = K$.

8.5.17. Теорема о бесконечнократной неподвижной точке (Клоп).

(i) Пусть f — одноместная рекурсивная функция и $M_n \in \Lambda^0$ — рекурсивная последовательность. Число $n \in \text{Seq} \subseteq \mathbb{N}$ будем записывать в виде $n = \langle n_0, \dots, n_{\text{lh}(n)} \rangle$. Построить последовательность $X_0, X_1, \dots \in \Lambda^0$, такую, что $X_n = M_n X_{m_0} \dots X_{m_k}$ для всех n , где $m = f(n)$ и $k = \text{lh}(m)$.

(ii) Вывести из (i) теорему о кратной неподвижной точке 6.5.2.

8.5.18. Показать, что все частично рекурсивные функции можно представить в CL на цифровой системе $\vec{0}_{CL}^\top, \vec{1}_{CL}^\top, \dots$ [Указание. Использовать предложение 8.3.22.]

8.5.19. Показать, что терм E_x можно взять в н. ф. [Указание. Решение содержится в доказательстве леммы 16.3.15.]

Глава 9

λI -исчисление

Напомним определение ограниченного класса Λ_I :

$$\begin{aligned} x &\in \Lambda_I, \\ M &\in \Lambda_I, \quad x \in \text{FV}(M) \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda_I, \\ M, N &\in \Lambda_I \Rightarrow (MN) \in \Lambda_I. \end{aligned}$$

Элементы класса Λ_I называются λI -термами. λI — это формальная теория, состоящая из равенств между λI -термами, доказуемых, исходя из аксиом и правил системы λ , ограниченных множеством Λ_I . См. § 2.2, где обсуждается различие между полной и ограниченной теорией.

Построение теории λI параллельно построению полного λ -исчисления. Частично рекурсивные функции будут представлены λI -термами. Комбинаторный эквивалент этой теории будет изложен по аналогии с § 7.1. Анализ понятия разрешимости для λI -исчисления покажет, что имеется несколько приближений к K в виде λI -термов.

9.1. Общие соображения

Будет доказано, что полное λ -исчисление — консервативное расширение λI -исчисления. Некоторые из понятий, определенных для полного λ -исчисления, можно релятивизировать для λI -исчисления. Будет заимствован из гл. 11 результат о том, что терм $M \in \Lambda_I$, имеющий н.ф., является сильно нормализуемым.

9.1.1. Означения. (i) По отношению к системе λI используются те же синтаксические соглашения, что и по отношению к λ .

(ii) При необходимости различить эти системы полное λ -исчисление называется λK -исчислением. Аналогично различаются системы λI и λK , а также классы термов Λ_I^0 и Λ_K^0 .

(iii) Множество $\Lambda_I^0(\vec{x})$ определяется несколько иначе, чем в K -случае:

$$\Lambda_I^0(\vec{x}) = \{M \in \Lambda_I \mid \text{FV}(M) = \{\vec{x}\}\}.$$

Причина изменения, внесенного в определение класса $\Lambda_I^0(\vec{x})$, заключается в том, что λI -терм может перечислять только класс термов с фиксированным множеством переменных; см. лемму 9.1.2 (iv).

Теория λI имеет те же аксиомы и правила вывода, что и λK , но они ограничены множеством Λ_I . Например, равенство $(\lambda x.M)N = M[x := N]$ является аксиомой системы λI для всех $M, N \in \Lambda_I$. Следующее утверждение показывает, что введенное ограничение осмысленно.

9.1.2. ЛЕММА. (i) $M, N \in \Lambda_I \Rightarrow M[x := N] \in \Lambda_I$.

(ii) $M \in \Lambda_I \Rightarrow \text{FV}((\lambda x.M)N) = \text{FV}(M[x := N])$.

(iii) $M \in \Lambda_I, M \rightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow N \in \Lambda_I$.

(iv) $M \in \Lambda_I, M =_{\beta\eta} N \Rightarrow \text{FV}(M) = \text{FV}(N)$.

Доказательство. (i) получается индукцией по построению терма M .

(ii) Предположение $M \in \Lambda_I$ необходимо: действительно, $\text{FV}((\lambda x.I)y) \neq \text{FV}(I)$. Как только это отмечено, доказываемый результат становится очевидным.

(iii) устанавливается индукцией по порождению соотношения $M \rightarrow_{\beta\eta} N$ с использованием п. (i) для базы и п. (ii) при рассмотрении случая

$$P \rightarrow Q \Rightarrow \lambda x.P \rightarrow \lambda x.Q.$$

(iv) устанавливается аналогично. $\square$

9.1.3. СЛЕДСТВИЕ. (i) Система λK консервативна относительно λI .

(ii) Система $\lambda K\eta$ консервативна относительно $\lambda I\eta$.

Доказательство. (i) Допустим, что $M, N \in \Lambda_I$ и $\lambda K \vdash M = N$. Тогда $M =_{\beta} N$, откуда по теореме Чёрча — Россера получаем

$$\exists Z (M \rightarrow Z \wedge N \rightarrow Z).$$

По лемме 9.1.2 (iii) имеем $Z \in \Lambda_I$. Но тогда $\lambda I \vdash M = Z = N$.

(ii) устанавливается аналогично (i) с использованием теоремы Чёрча — Россера для $\beta\eta$ -конверсии. $\square$

Если ограничиться λI -исчислением, то понятие разрешимости изменится. В действительности и для λK -термов можно различать два вида разрешимости.

9.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda_K^0$. Терм M называется *K-разрешимым*, если $(\exists \vec{N} \in \Lambda_K)(M\vec{N} = I)$. Терм M называется *I-разрешимым*, если $(\exists \vec{N} \in \Lambda_I)(M\vec{N} = I)$.

(ii) Произвольный терм $M \in \Lambda_K$ называется *K- или I-разрешимым*, если таково его замыкание $\lambda x.M$.

Многие другие понятия, определенные для полного λK -исчисления, можно релятивизировать к λI -исчислению.

Теперь мы (в последний раз) заимствуем из части III один результат о редукции. Как уже отмечалось выше, λK -терм $KI\Omega$ имеет н. ф., но для него существует и бесконечная редукционная цепочка. Для λI -термов такое невозможно.

9.1.5. ТЕОРЕМА (Чёрч, Россер [1936]). Если $M \in \Lambda_I$ и M имеет н. ф., то верно $SN(M)$, т. е. все редукционные цепочки, начинающиеся термом M , обрываются. В частности, редукционный граф $G(M)$ конечен.

Доказательство. См. следствие 11.3.5. $\square$

9.1.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть терм $M \in \Lambda_I$ имеет н. ф. Тогда все подтермы $N \subset M$ также имеют н. ф.

Доказательство. Допустим, что $M \equiv C[N]$ и N не имеет н. ф. Тогда N имеет бесконечную редукционную цепочку, значит, и M имеет такую цепочку, что противоречит теореме 9.1.5. $\square$

Отметим, что следствие 9.1.6 несколько слабее, чем теорема 9.1.5: в λK -исчислении имеются термы M , такие, что все подтермы M имеют н. ф., но сам M обладает бесконечной редукционной цепочкой.

9.1.7. ПРИМЕР. Рассмотрим $M \equiv (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))$. Тогда $M \in \Lambda_K$ и все его подтермы имеют н. ф., но верно $\infty(M)$.

Доказательство. Терм M имеет вид WW , где $W \equiv \lambda a.F(aa)$. Так как $F \equiv \lambda xy.y$, то любой подтерм терма M (включая сам M) имеет н. ф. Бесконечная редукционная цепочка для M такова:

$$WW \rightarrow F(WW) \rightarrow F(F(WW)) \dots \square$$

9.2. Определимость

В этом пункте мы докажем, что для некоторой цифровой системы можно определить частично рекурсивные функции λI -термами.

Цифры $\ulcorner n \urcorner$, введенные в § 2.1, — это λK -термы. Однако все цифры Чёрча c_n , кроме c_0 , являются λI -термами. После изменения c_0 эти цифры будут использованы в λI -исчислении в качестве адекватной цифровой системы. Имеется и модификация стандартных цифр, дающая адекватную λI -систему; она описана в упр. 9.5.11.

9.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $c'_0 \equiv \lambda xy.x||y$, $c'_{n+1} \equiv c_{n+1}$.

Таким образом, для любого n цифра c'_n есть н. ф., принадлежащая Λ_I^0 , и $c'_n|| = I$. Отметим также, что $c'_0 c'_n c'_m = c'_m$. Это объясняет выбор цифры c'_0 как аппроксимации для $c_0 \equiv \lambda xy.y$.

В этом пункте λ -определимость частичных числовых функций всегда будет пониматься применительно к последовательности $c'_0, c'_1, \dots$.

9.2.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ. (i) $\ulcorner n \urcorner = c'_n$.

(ii) $\ulcorner M \urcorner = \ulcorner \# M \urcorner$.

(iii) Если $\vec{n} = n_0, \dots, n_k$, то $F_{\ulcorner \vec{n} \urcorner} = F_{\ulcorner n_0 \urcorner} \dots \ulcorner n_k \urcorner$.

9.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частичная числовая функция φ λI -определима, если для некоторого $F \in \Lambda_I^0$

$$(*) \quad \begin{aligned} F_{\ulcorner \vec{n} \urcorner} &= \ulcorner m \urcorner, & \text{если } \varphi(\vec{n}) &= m, \\ F_{\ulcorner \vec{n} \urcorner} &\text{ не имеет н. ф.,} & \text{если } \varphi(\vec{n}) &\uparrow. \end{aligned}$$

Если верно (*), то говорят, что φ λ -определена термом F .

Из следствия 9.4.21 будет вытекать, что это — подходящая релятивизация определения 8.4.1 применительно к λI -исчислению.

В λI -исчислении можно частично смоделировать истинностные значения и условный оператор.

9.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $T_I \equiv \lambda xy.y||x$, $F_I \equiv \lambda x.x||I (= T_I I)$.

9.2.5. ЛЕММА. Пусть B принимает значения T_I и F_I . Пусть P, Q таковы, что $P|| = I$ и $Q|| = I$. Тогда значение выражения если B , то P , иначе Q

можно представить термом BPQ . В частности, это имеет место для

$$P, Q \in \{I, T_I, F_I, \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \dots\}.$$

Доказательство очевидно. $\square$

9.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\text{Zero}_I \equiv \lambda x.x(T_I F_I) T_I T_I F_I$.

(ii) $\ulcorner i \urcorner \equiv \lambda x_0 \dots x_k.(x_0||) \dots (x_k||) x_i$.

9.2.7. ЛЕММА. (i) $\mathbf{Zero}_I \perp 0_I = \mathbf{T}_I$, $\mathbf{Zero}_I \perp n + 1_I = \mathbf{F}_I$.

(ii) $\mathbf{U}_{Ii}^k \vec{n}_I = \perp n_I$ для $\vec{n} = n_0, \dots, n_k$ и $0 \leq i \leq k$. $\square$

9.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Исходные функции (см. определение 6.3.2) λI -определимы.

Доказательство. В качестве определяющих λI -термов берем

$$\mathbf{U}_{Ii}^k, \mathbf{S}_I^+ \equiv \lambda x. \text{если } \mathbf{Zero}_I x, \text{ то } \perp 1_I, \text{ иначе } (\mathbf{S}_I^+ x),$$

где терм $\mathbf{S}_I^+ \equiv \lambda abc. b(abc)$ был введен в определении 6.4.4. Заметим, что $\mathbf{S}_I^+ \perp 0_I \equiv \perp$, так что применима лемма 9.2.5.

Наконец, положим

$$\mathbf{Z} \equiv \lambda x. x \parallel \perp 0_I. \quad \square$$

Начиная с этого места, $\mathbf{S}_I^+$ будет обозначать введенное только что представление функции следования.

9.2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Класс частичных λI -определимых функций замкнут относительно композиции.

Доказательство. Пусть функции $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m$ λI -определены термами $G, H_1, \dots, H_m$ соответственно. Тогда функция

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n}))$$

λI -определяется термом

$$F \equiv \lambda \vec{x}. G(H_1 \vec{x}) \dots (H_m \vec{x}).$$

В противоположность ситуации, имеющей место для λK -определимости (см. § 8.4), это верно и для частичных функций. Действительно, если одно из значений $\psi_i(\vec{n})$ не определено, то $H_i \vec{n}_I$ не имеет н.ф., а тогда в силу следствия 9.1.6 терм $F \vec{n}_I$ также не имеет н.ф. $\square$

9.2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbf{P}_{Ii}^k \equiv \lambda x. x \mathbf{U}_{Ii}^k$. Тогда $\mathbf{P}_{Ii}^k \langle M_0, \dots, M_k \rangle = M_i$ для $0 \leq i \leq k$, если $(\forall i \leq k) (M_i \parallel = \perp)$.

9.2.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Класс λI -определимых всюду определенных функций замкнут относительно примитивной рекурсии.

Доказательство. Пусть φ задана равенствами

$$\begin{aligned} \varphi(0, \vec{n}) &= \chi(\vec{n}), \\ \varphi(k+1, \vec{n}) &= \psi(\vec{n}, k, \varphi(k, \vec{n})), \end{aligned}$$

где χ и ψ λI -определены термами G и H соответственно. Положим

$$M_{k, \vec{n}} = \langle \perp k + 1_I, \perp \varphi(k+1, \vec{n})_I, \perp \varphi(k, \vec{n})_I \rangle.$$

Если мы сможем определить $M_{k, \vec{n}}$ равномерно по $k, \vec{n}$ некоторым λI -термом, т. е. если $M' \perp k_I \perp n_I = M_{k, \vec{n}}$ для некоторого $M' \in \Lambda_I^0$, то φ можно λI -определить термом

$$F \equiv \lambda xy. \mathbf{P}_{I2}^2(M'xy).$$

Чтобы найти M' , положим

$$X \equiv \lambda ax. \langle \mathbf{S}_I^+(\mathbf{P}_{I0}^2x), H\vec{a}(\mathbf{P}_{I0}^2x)(\mathbf{P}_{I1}^2x), \mathbf{P}_{I1}^2x \rangle.$$

Тогда $X \perp \vec{n}_I M_{k, \vec{n}} = M_{k+1, \vec{n}}$ и $X \perp \vec{n}_I \langle \perp 0_I, G \perp \vec{n}_I, \perp 0_I \rangle = M_{0, \vec{n}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{k, \vec{n}} &= (X \perp \vec{n}_I)^{k+1} \langle \perp 0_I, G \perp \vec{n}_I, \perp 0_I \rangle = \\ &= \perp k + 1_I (X \perp \vec{n}_I) \langle \perp 0_I, G \perp \vec{n}_I, \perp 0_I \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность $M_{k, \vec{n}}$ равномерна по $k, \vec{n}$ и все в порядке. $\square$

9.2.12. ЛЕММА. Пусть $A_0, A_1 \in \Lambda_I^0$ таковы, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$

$$A_i \sim^k = \perp, \quad i = 0, 1.$$

Тогда для некоторого $M \in \Lambda_I^0$

$$M \mathbf{T}_I = A_0, \quad M \mathbf{F}_I = A_1.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{T}_k \equiv \lambda xy. y \mid \sim^k x$, $\mathbf{F}_k \equiv \lambda xy. x \mid \sim^k y$. Заметим, что $\mathbf{T}_k \parallel = \mathbf{F}_k \parallel = \perp$. Положим $M \equiv \lambda x. x \mathbf{T}_k \mathbf{F}_k A_0 A_1$. Тогда

$$M \mathbf{T}_I = \mathbf{T}_I \mathbf{T}_k \mathbf{F}_k A_0 A_1 = \mathbf{T}_k A_0 A_1 = A_0,$$

и аналогично получаем $M \mathbf{F}_I = A_1$. $\square$

Следующая конструкция принадлежит Клини.

9.2.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть терм $P \in \Lambda_I^0$ таков, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$P \perp n_I = \mathbf{T}_I \quad \text{или} \quad P \perp n_I = \mathbf{F}_I.$$

Введем термы

$$A_0 \equiv \lambda x \omega t. \omega \mathbf{T}_I \mid \sim^3 (tx) \mid \sim^2 x, \quad A_1 \equiv \lambda x \omega t. \omega (\mathbf{S}_I^+ x) (\mathbf{S}_I^+ x) \omega t,$$

которые будут использованы для представления операции минимизации. Имеем $A_i I^{\sim 3} = I$ для $i = 0, 1$. (Отметим, что $S_I^+ I = I 2_I$.) Таким образом, в силу леммы 9.2.12 найдется терм $W \in \Lambda_I^0$, такой, что $WT_I = A_0$, $WF_I = A_1$. Положим, наконец,

$$H_P \equiv \lambda x. W(Px) x WP, \quad \mu_I P \equiv H_{P I 0_I}.$$

9.2.14. ЛЕММА. Пусть P , H_P и $\mu_I P$ — термы, определенные выше.

$$(i) H_{P I n_I} = \begin{cases} I n_I, & \text{если } P I n_I = T_I, \\ H_{P I n_I + 1_I}, & \text{если } P I n_I = F_I. \end{cases}$$

(ii) Если $\exists n (P I n_I = T_I)$, то положим $m = \mu n [P I n_I = T_I]$. Тогда $\mu_I P = I m_I$.

(iii) Если $\forall n (P I n_I = F_I)$, то $\mu_I P$ не имеет н. ф.

Доказательство. (i) Если $P I n_I = T_I$, то

$$\begin{aligned} H_{P I n_I} &= WT_{I n_I} WP = A_0 I n_I WP = \\ &= WT_{I I}^{\sim 3} (P I n_I) I^{\sim 2} I n_I = A_0 I^{\sim 3} T_I I^{\sim 2} I n_I = I n_I. \end{aligned}$$

Если $P I n_I = F_I$, то

$$\begin{aligned} H_{P I n_I} &= WF_{I n_I} WP = A_1 I n_I WP = \\ &= W(P I n_I + 1_I) I n_I + 1_I WP = H_{P I n_I + 1_I}. \end{aligned}$$

(ii) доказывается аналогично предложению 6.3.9(ii).

(iii) В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \mu_I P &\equiv H_{P I 0_I} \rightarrow W(P I 0_I) I 0_I WP \xrightarrow{\neq 0} W(P I 1_I) I 1_I WP \dots \\ &\dots \xrightarrow{\neq 0} W(P I n_I) I n_I WP \dots \end{aligned}$$

Таким образом, $\mu_I P$ имеет бесконечную редукционную цепочку, следовательно, он не имеет н. ф. в силу теоремы 9.1.5. $\square$

9.2.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Класс частичных λ -определимых функций замкнут относительно минимизации.

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.4.11 и использует лемму 9.2.14. $\square$

9.2.16. ТЕОРЕМА (Клини). Частичная числовая функция λ -определима т. и т. т., когда она частично рекурсивна.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.4.13 и использует результаты настоящего пункта. $\square$

9.3. Комбинаторы

В этом пункте исследуется теория CL_I — так называемый комбинаторный вариант теории λ . Мы исходим из того факта (установленного Россером [1935]), что, как и в неограниченной ситуации, комбинаторная полнота следует из конечного числа своих частных случаев. CL_I — теория без связанных переменных. Она похожа на CL , но имеет иное множество констант. И снова важное приложение комбинаторной теории обеспечивается тем, что она дает базис для множества замкнутых термов.

Если нужно подчеркнуть различие между двумя рассматриваемыми комбинаторными теориями — CL и CL_I , — то теорию CL обозначают CL_K .

9.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. CL_I , как и CL_K , — эквациональная теория. Ее константы — это

$$I, B, C \text{ и } S,$$

заменяющие константы K и S теории CL . Термы теории CL_I строятся из этих констант и переменных так же, как в CL_K . Множество CL_I -термов обозначается через $\mathcal{C}_I$. Формулы системы CL_I — это равенства ее термов.

Вместо аксиом группы (I) для CL_K (см. определение 7.1.2) система CL_I имеет следующие аксиомы:

$$IM = M, \quad BMNL = M(NL),$$

$$CMNL = MLN, \quad SMNL = ML(NL),$$

где M, N, L — произвольные CL_I -термы. Аксиомы и правила группы (II) для системы CL_K , утверждающие, что $=$ есть отношение равенства (см. определение 7.1.2), сохраняются и для системы CL_I .

Для CL_I будут использоваться те же соглашения, что и для CL_K .

Теперь будет показано, что λ -абстракцию можно смоделировать константами системы CL_I .

9.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для терма $M \in CL_I$, такого что $x \in \text{FV}(M)$, определим $\lambda^* x. M$ следующей индукцией по построению M :

$$\lambda^* x. x \equiv I,$$

$$\lambda^* x. PQ \equiv \begin{cases} BP(\lambda^* x. Q), & \text{если } x \notin \text{FV}(P) \text{ и } x \in \text{FV}(Q), \\ C(\lambda^* x. P)Q, & \text{если } x \in \text{FV}(P) \text{ и } x \notin \text{FV}(Q), \\ S(\lambda^* x. P)(\lambda^* x. Q), & \text{если } x \in \text{FV}(P) \text{ и } x \in \text{FV}(Q). \end{cases}$$

Как и в случае CL_K , мы можем теперь установить комбинаторную полноту.

9.3.3. ТЕОРЕМА. (i) $FV(\lambda^*x.M) = FV(M) - \{x\}$;
(ii) $(\lambda^*x_1 \dots x_n.M)N_1 \dots N_m = M[x_1 := N_1] \dots [x_n := N_m]$,
при условии, что обозначения корректны, т. е. $x \in FV(M)$ в (i)
и выполнено аналогичное условие для (ii). $\square$

Как и в случае системы CL_K , доказуемое в CL_I равенство порождается подходящим понятием редукции, которое определяется следующим образом.

$$\begin{aligned} \omega_I = \{ \langle IM, M \rangle \mid M \in \mathcal{C}_I \cup \dots \\ \dots \cup \{ \langle SMNL, ML(NL) \rangle \mid M, N, L \in \mathcal{C}_I \} \}. \end{aligned}$$

Это понятие ω_I обладает свойством CR — см. упр. 9.5.15.
Понятно, как определить стандартные переводы

$$(\)_{\lambda I}: \mathcal{C}_I \rightarrow \Lambda_I, \quad (\)_{CL_I}: \Lambda_I \rightarrow \mathcal{C}_I.$$

В частности,

$$\begin{aligned} (I)_{\lambda I} = I, \quad (B)_{\lambda I} = B \equiv \lambda xyz.x(yz), \\ (C)_{\lambda I} = C \equiv \lambda xyz.xzy, \quad (S)_{\lambda I} = S. \end{aligned}$$

Тем же методом, что и для K -случая, можно построить аксиомы $A_{I\beta(\eta)}$, такие, что системы $\mathcal{M}$ и $CL_I + A_{I\beta}$ эквивалентны между собой, а системы $\mathcal{M} + ext$, $CL_I + A_{I\beta\eta}$ и $CL_I + ext$ — между собой. См. упр. 9.5.12.

Опишем теперь некоторые приложения системы CL_I к λI -исчислению.

9.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathcal{X} \subseteq \Lambda_I^0$ называется I -базисом, если

$$(\forall M \in \Lambda_I^0)(\exists N \in \mathcal{X}^+)(N = M).$$

9.3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множество $\mathcal{X} = \{I, B, C, S\}$ является I -базисом. В действительности

$$(\forall M \in \Lambda_I^0)(\exists N \in \mathcal{X}^+)(N \twoheadrightarrow M).$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству для K -случая (предложение 8.1.2). $\square$

9.3.6. СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathcal{X}$ есть I -базис, то

$$(\forall M \in \Lambda_I^0)(\exists N \in \mathcal{X}^+)(N \twoheadrightarrow M).$$

Доказательство такое же, как для следствия 8.1.3. $\square$

9.3.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (Россер [1935]). Пусть

$$J \equiv \lambda abcd.ab(adc).$$

Тогда $\{I, J\}$ есть I -базис.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} JI \twoheadrightarrow C_* (\equiv \lambda ab.ba), \quad JC_*(JC_*)(JC_*) \twoheadrightarrow C, \quad C(JIC)(JI) \twoheadrightarrow B, \\ C(C(BC(C(BJC_*)C_*))C_*) \twoheadrightarrow W (\equiv \lambda ab.abb), \\ B(B(BW)C)(BB) \twoheadrightarrow S. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{I, J\}$ есть базис для $\{I, B, C, S\}$, а значит, и для Λ_I^0 . $\square$

В дальнейшем фиксируем обозначение $J \equiv \lambda abcd.ab(adc)$.

Заметим, что выражение комбинатора S через I и J требует 266 символов (не считая скобок).

Следующее утверждение впервые доказал Клоп [1975] с помощью иной конструкции.

9.3.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует I -базис, состоящий из одного элемента.

Доказательство. Положим

$$K^* \equiv \lambda xy.yI^4x, \quad X_I \equiv \langle K^*, J, I \rangle.$$

Заметим, что $K^*xN = x$ для $N \in \{I, J\}$ (K^* — локальный K).

Тогда $\{X_I\}$ — базис для $\{I, J\}$, а значит, и для Λ_I^0 :

$$\begin{aligned} X_I X_I \twoheadrightarrow X_I K^* J I \twoheadrightarrow K^* K^* J I J I \twoheadrightarrow K^* J I \twoheadrightarrow I \twoheadrightarrow I, \\ X_I I \twoheadrightarrow I K^* J I \twoheadrightarrow K^* J I \twoheadrightarrow J. \quad \square \end{aligned}$$

Начиная с этого места, X_I обозначает терм, построенный в этом доказательстве.

9.3.9. ЛЕММА. Для каждого $M \in \Lambda_I^0$ существует нормальный терм $M' \in \Lambda_I^0$, такой, что

$$M' I \twoheadrightarrow I, \quad M' X_I \twoheadrightarrow M.$$

Доказательство. Для данного M найдем $M_1 \in \{X_I\}^+$, такой, что $M_1 \twoheadrightarrow M$. Пусть M_2 получен из M_1 путем замены каждого вхождения термина X_I на переменную x . Положим $M' \equiv \lambda x.M_2$. Очевидно, что $M' \in \Lambda_I^0$ и находится в н. ф. Кроме того, $M' I \twoheadrightarrow I$ и $M' X_I \twoheadrightarrow M_1 \twoheadrightarrow M$. $\square$

9.3.10. ЛЕММА. $(\forall A_0 A_1 \in \Lambda_I^0)(\exists F \in \Lambda_I^0) F I_i I \twoheadrightarrow A_i, i = 0, 1$.

Доказательство. Пусть A'_i таковы, что

$$A'_i I \twoheadrightarrow I \text{ и } A'_i X_I \twoheadrightarrow A_i \text{ для } i = 0, 1.$$

Положим $F \equiv \lambda x. \mathbf{Zero}_I x A'_0 A'_1 X_I$. Тогда

$$F I_0 I \twoheadrightarrow T_I A'_0 A'_1 X_I \twoheadrightarrow A'_0 X_I \twoheadrightarrow A_0$$

и аналогично

$$F_{\perp 1} \rightarrow A_1. \quad \square$$

Существенное усиление леммы 9.3.10 дает теорема 10.5.2. См. также упр. 9.5.2.

9.3.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (Клини [1936]). Пусть $G, H \in \Lambda_I^0$. Тогда существует терм $F \in \Lambda_I^0$, такой, что

$$F_{\perp 0} \rightarrow G, \quad F_{\perp n+1} \rightarrow HF_{\perp n+1}.$$

Доказательство. Пусть терм $M \in \Lambda_I^0$ λ -определяет функцию sg , т. е. имеет место

$$M_{\perp 0} = \perp_0 \text{ и } M_{\perp n+1} = \perp_1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$P \equiv \lambda xy. H(\lambda z. y(Mz)zy)x.$$

В силу леммы 9.3.10 существуют термы $Q, R \in \Lambda_I^0$, такие что

$$Q_{\perp 0} \rightarrow \lambda x. x_{\perp 0} \perp_1, \quad Q_{\perp 1} \rightarrow G$$

и

$$R_{\perp 0} \rightarrow Q, \quad R_{\perp 1} \rightarrow P.$$

Положим теперь $F \equiv \lambda z. R(Mz)zR$. Тогда

$$F_{\perp 0} \rightarrow R_{\perp 0} \perp_0 R \rightarrow Q_{\perp 0} R \rightarrow R_{\perp 0} \perp_1 \rightarrow Q_{\perp 1} \rightarrow G$$

и

$$\begin{aligned} F_{\perp n+1} &\rightarrow R_{\perp 1} \perp_1 n+1 R \rightarrow P_{\perp n+1} R \rightarrow \\ &\rightarrow H(\lambda z. R(Mz)zR)_{\perp n+1} \rightarrow HF_{\perp n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

9.3.12. ТЕОРЕМА (Клини [1936]). Существует терм $E_I \in \Lambda_I^0$, такой, что для всех $M \in \Lambda_I^0$ имеет место соотношение $E_{I, \perp} M \rightarrow M$.

Доказательство строится в два этапа.

(1) Лемма. $(\exists F \in \Lambda_I^0)(\forall M \in \Lambda_I^0)(\exists n \in \mathbb{N})(F_{\perp n} \rightarrow M)$.

Доказательство. Как и на шаге 3 доказательства теоремы 8.1.6, возьмем термы $P_0, P_1 \in \Lambda_I^0$, λ -определяющие рекурсивные проекции p_0, p_1 . В силу предложения 9.3.11 существует терм $F \in \Lambda_I^0$, такой, что

$$\begin{aligned} F_{\perp n} &\rightarrow X_I, & \text{если } n=0, \\ &\rightarrow F(P_{0, \perp n})(F(P_{1, \perp n})) & \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Теперь, как и на шаге 3 доказательства теоремы 8.1.6, получаем, что F обладает нужными свойствами. $\square_1$

(2) Завершение доказательства. Полученный терм F может быть преобразован в E_I так же, как это сделано в шагах 4 и 5 доказательства теоремы 8.1.6. $\square_2 \quad \square$

Начиная с этого места, E_I обозначает терм, построенный в доказательстве теоремы 9.3.12.

9.3.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в K -случае, имеется перечислитель $E_{I, \vec{x}}$ для множества $\Lambda_I^0\{\vec{x}\}$, т. е. λ -терм, такой что

$$(\forall M \in \Lambda_I^0\{\vec{x}\})(E_{I, \vec{x}} \perp M \rightarrow M).$$

Отметим, однако, различие между множествами

$$\Lambda_I^0(\vec{x}) = \{M \in \Lambda_I \mid \text{FV}(M) = \{\vec{x}\}\}$$

и

$$\Lambda_K^0(\vec{x}) = \{M \in \Lambda_K \mid \text{FV}(M) \subseteq \{\vec{x}\}\}.$$

9.3.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\{M_n\}$ термов называется I -равномерной, если для некоторого $F \in \Lambda_I$

$$(*) \quad F_{\perp n} = M_n.$$

В этом случае говорят, что последовательность M_n I -равномерна (посредством F).

Последовательность $x_0, x_0x_0, x_0x_0x_0, \dots$ I -равномерна.

Последовательность $x_0, x_1, x_0, x_1, \dots$ для различных переменных x_0, x_1 является K -, но не I -равномерной.

Используя комбинатор $E_{I, \vec{x}}$, можно доказать, что последовательность M_n I -равномерна по n , если

- (i) $\forall n (M_n \in \Lambda_I^0(\vec{x}))$ для некоторого $\vec{x}$,
- (ii) $\lambda n. \# M_n$ рекурсивна.

Если M_n I -равномерна (посредством терма $F \in \Lambda_I$), то, как и в K -случае, можно определить через F терм $[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Терм $[E_{I, \perp n}]_{n \in \mathbb{N}}$ — универсальный генератор для λ -исчисления.

Вместе со второй теоремой о неподвижной точке терм $E_{I, \vec{x}}$ позволяет дать много обобщений леммы 9.3.11.

9.3.15. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ. (i) $(\forall F \in \Lambda_I)(\exists X \in \Lambda_I)(X = FX)$.

(ii) $(\forall F \in \Lambda_I)(\exists X \in \Lambda_I)(X = F_{\perp} X)$.

(iii) В (i) и (ii) имеет место $\text{FV}(X) = \text{FV}(F)$ и $X \rightarrow FX$ (соответственно $X \rightarrow F_{\perp} X$).

Доказательство такое же, как и в K -случае. Обратите внимание на то, что $Y, \Theta \in \Lambda_I^0$. $\square$

Следующая конструкция — типичный пример применения второй теоремы о неподвижной точке вместе с термом E_I .

9.3.16. Применение. Существует терм $F \in \Lambda_I^0$, такой что

$$F \downarrow k \downarrow = \begin{cases} G \downarrow k \downarrow, & \text{если } k \text{ чётно,} \\ HF \downarrow k \downarrow, & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 6.5.9, обозначим через Ar и Num рекурсивные функции, такие что

$$\text{Ar}(\# P, \# Q) = \# (PQ), \quad \text{Num}(n) = \# (\downarrow n \downarrow).$$

Положим

$$p(f, k) = \begin{cases} \text{Ar}(\# G, \text{Num}(k)), & \text{если } k \text{ чётно,} \\ \text{Ar}(\text{Ar}(\# H, f), \text{Num}(k)), & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Тогда функция p рекурсивна и, следовательно, λI -определима некоторым термом $P \in \Lambda_I^0$. Поэтому для любого терма M $P \downarrow M \downarrow \downarrow k \downarrow =$

$$= \begin{cases} \downarrow \text{Ar}(\# G, \# \downarrow k \downarrow) \downarrow = \downarrow G \downarrow k \downarrow, & \text{если } k \text{ чётно,} \\ \downarrow \text{Ar}(\text{Ar}(\# H, \# M), \text{Num}(k)) \downarrow = \downarrow HM \downarrow k \downarrow, & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

По второй теореме о неподвижной точке 9.3.15(ii) найдется терм $F \in \Lambda_I^0$, такой, что $F = \lambda x. E_I(P \downarrow F \downarrow x)$. Следовательно,

$$F \downarrow k \downarrow = \begin{cases} E_I(P \downarrow F \downarrow \downarrow k \downarrow) = E_I \downarrow G \downarrow k \downarrow = G \downarrow k \downarrow, & \text{если } k \text{ чётно,} \\ E_I \downarrow HF \downarrow k \downarrow = HF \downarrow k \downarrow, & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Разумеется, можно было использовать и конструкцию в стиле доказательства предложения 9.3.11 (см. упр. 9.5.9). Преимущество примененного нами метода в возможности опираться на тезис Чёрча для рекурсивных функций: обычно сравнительно легко доказать, что эффективно заданная числовая функция рекурсивна. Непосредственное построение терма с указанными выше свойствами было бы более сложным.

9.4. Разрешимость

В этом пункте мы покажем, что в λI -исчислении разрешимость терма M совпадает с наличием у него н. ф. Доказательство этого факта показывает, что конечное множество $\mathcal{X}$ замкнутых н. ф. может быть разрешено равномерно. Это даст возможность определить локальный K для множества $\mathcal{X}$: имеется $K^* \in \Lambda_I^0$, такой, что

$$(*) \quad K^* x N = x \quad \text{для } N \in \mathcal{X}.$$

Эти результаты были доказаны Барендрегтом [1973a]. Метод доказательства был упрощен Клопом [1975]. Этот метод позволяет сделать локальный K непредикативным, т. е. $(*)$ имеет место, даже если $N \in \{C_1[K^*], \dots, C_n[K^*]\}$, где $C_1[\], \dots, C_n[\]$ — заданные ранее контексты, такие, что все вхождения x в $C_i[x]$ пассивны, т. е. не входят в подтермы $(xM) \subset C_i[x]$.

Для доказательства I -разрешимости н. ф. вводится следующий класс SO λI -термов.

9.4.1. Обозначения. Пусть

$$\vec{P}_0 \equiv P_{00}, \dots, P_{0n_0},$$

...

$$\vec{P}_m \equiv P_{m0}, \dots, P_{mn_m}$$

— некоторые непустые последовательности термов. Тогда

$$\{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_m\} \equiv \lambda x_0 \dots x_m. (x_0 \vec{P}_0) \dots (x_m \vec{P}_m).$$

Иногда вместо $\{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_m\}$ используется матричная запись

$$\begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{0n_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m0} & \dots & P_{mn_m} \end{bmatrix}.$$

9.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс $SO \subset \Lambda_I^0$ индуктивно определяется следующим образом:

$$I \in SO,$$

$$\vec{P}_0 \in SO, \dots, \vec{P}_m \in SO \Rightarrow \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_m\} \in SO.$$

Полезно сопоставить каждому терму $M \in SO$ некоторое дерево $T(M)$ (отличное от дерева $BT(M)$, которое будет определено в следующей главе).

Напомним, что $\text{Seq} \subset \mathbb{N}$ — это множество натуральных чисел, являющихся кодами конечных последовательностей. На множестве Seq определены отношения и функции $<$, $\leq$, lh и $*$ — см. указания читателю в начале книги.

9.4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) *Дерево* — это множество $A \subset \text{Seq}$, такое, что

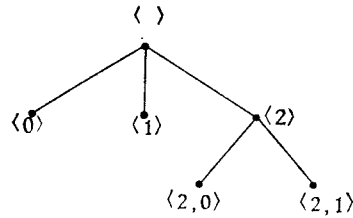
$$(1) \quad \alpha \in A, \beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \in A,$$

$$(2) \quad \alpha * \langle n+1 \rangle \in A \Rightarrow \alpha * \langle n \rangle \in A.$$

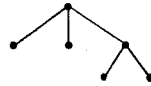
Элементы множества A называются *узлами* дерева.

(ii) *Поддерево* дерева A , исходящее из узла α (обозначаемое через A_α) — это дерево $\{\beta \mid \alpha * \beta \in A\}$.

9.4.4. ПРИМЕР. Фигура



является деревом. В действительности, однако, существенна лишь структура



Поддерево, исходящее из узла < 2 >, — это



9.4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\vec{SO}$ обозначает множество конечных последовательностей элементов множества SO . Для каждого $P \in SO$ и каждого $\vec{P} \in \vec{SO}$ следующим образом определяются деревья $T(P)$ и $T(\vec{P})$:

- (1) $T(I) = \{ \langle \rangle \}$;
- (2) $T(P_0, \dots, P_n) = \{ \langle \rangle \} \cup \{ \langle i \rangle * \alpha \mid \alpha \in T(P_i), 0 \leq i \leq n \}$;
- (3) $T(\{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_n\}) = \{ \langle \rangle \} \cup \{ \langle i \rangle * \alpha \mid \alpha \in T(\vec{P}_i), 0 \leq i \leq n \}$.

Менее формально эти деревья можно записать следующим образом:

$$(1) T(I) = \cdot,$$

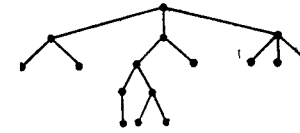
$$(2) T(P_0, \dots, P_n) = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ T(P_0) \quad \dots \quad T(P_n) \end{array} \cdot$$

$$(3) T(\{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_n\}) = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ T(\vec{P}_0) \quad \dots \quad T(\vec{P}_n) \end{array}$$

ПРИМЕР. Пусть

$$P \equiv \lambda x_0 x_1 x_2. (x_0 II) (x_1 (\lambda y_0 y_1. (y_0 I) (y_1 III)) I) (x_2 III).$$

Тогда $T(P)$ есть



Заметим, что поддеревья, исходящие из узлов, коды которых имеют четную (соответственно нечетную) длину, соответствуют объектам $\in SO$ (соответственно $\in \vec{SO}$).

9.4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Следующие подклассы $SO_{n,m} \subset SO$ определяются индукцией по n . Если $\vec{P} = P_1, \dots, P_k$, то $\vec{P} \in \vec{SO}_{n,m}$ обозначает, что $P_1, \dots, P_k \in SO_{n,m}$.

$$SO_{0,m} = \{I\},$$

$$SO_{n+1,m} = SO_{n,m} \cup \{ \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_k\} \mid k \leq m \text{ и } \vec{P}_0, \dots, \vec{P}_k \in \vec{SO}_{n,m} \}.$$

Очевидно, что $SO = \bigcup_{n,m} SO_{n,m}$. Отметим, однако, что множество $SO_{n,m}$ бесконечно для $n \neq 0$. Множества $SO_{n,m}$ можно следующим образом определить в терминах деревьев. Положим

$$\text{Seq}_{n,m} = \{ \alpha \in \text{Seq} \mid \text{lh}(\alpha) \leq 2n \wedge (\forall k \leq \text{lh}(\alpha)) (\alpha(2k) \leq m) \}.$$

$$\text{Тогда } SO_{n,m} = \{ P \in SO \mid T(P) \subset \text{Seq}_{n,m} \}.$$

9.4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{X} \subset \Lambda$. Говорят, что множество $\mathcal{X}$ замкнуто относительно аппликации (с точностью до β), если $(\forall M N \in \mathcal{X}) (MN \in_{\beta} \mathcal{X})$.

9.4.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Множество $SO_{n,m}$ замкнуто относительно аппликации.

(ii) Множество SO замкнуто относительно аппликации.

Доказательство строится в несколько этапов.

(1) Лемма. Если $M \in SO_{n+1,m}$, то либо $M \equiv I$, либо $M \equiv \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_k\}$, где $k \leq m$ и $\vec{P}_i \in \vec{SO}_{n,m}$ для $0 \leq i \leq k$.

Доказательство проводится индукцией по n . $\square_1$

(2) Лемма. Пусть $M, N \in SO_{n+1,m}$, причем $M \equiv \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_p\}$, где $p \leq m$ и $\vec{P}_i \in \vec{SO}_{n,m}$ для $0 \leq i \leq p$. Положим

$$L \equiv \lambda x_0 \dots x_p. N(x_0 \vec{P}_0) \dots (x_p \vec{P}_p).$$

Тогда $L \in_{\beta} SO_{n+1,m}$.

Доказательство. Если $N \equiv I$, то $L = M$ и все в порядке. В противном случае имеем в силу (1)

$$N \equiv \{\vec{Q}_0, \dots, \vec{Q}_q\}, \text{ где } \vec{Q}_i \in \vec{SO}_{n,m} \text{ для } 0 \leq i \leq q, q \leq m.$$

Случай 1. $p \geq q$. Тогда

$$\begin{aligned} L &\equiv \lambda x_0 \dots x_p. (\lambda y_0 \dots y_q. (y_0 \vec{Q}_0) \dots (y_q \vec{Q}_q)) (x_0 \vec{P}_0) \dots (x_p \vec{P}_p) \equiv \\ &\equiv \lambda x_0 \dots x_p. (x_0 \vec{P}_0 \vec{Q}_0) \dots (x_q \vec{P}_q \vec{Q}_q) (x_{q+1} \vec{P}_{q+1}) \dots (x_p \vec{P}_p) \equiv \\ &\equiv \{\vec{P}_0 \vec{Q}_0, \dots, \vec{P}_q \vec{Q}_q, \vec{P}_{q+1}, \dots, \vec{P}_p\} \in SO_{n+1, m}. \end{aligned}$$

Случай 2. $q > p$. Тогда аналогичным образом

$$L = \{\vec{P}_0 \vec{Q}_0, \dots, \vec{P}_p \vec{Q}_p, \vec{Q}_{p+1}, \dots, \vec{Q}_q\} \in SO_{n+1, m}. \quad \square_2$$

(3) Лемма. Допустим, что множество $SO_{n, m}$ замкнуто относительно аппликации. Тогда

$$M \in SO_{n+1, m}, \quad N \in SO_{n, m} \Rightarrow MN \in_\beta SO_{n+1, m}.$$

Доказательство. Если $M \equiv I$, то все в порядке. В противном случае имеем

$$M \equiv \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_p\}, \quad \text{где } \vec{P}_i \in \vec{SO}_{n, m}, \quad 0 \leq i \leq p.$$

Теперь

$$MN = \lambda x_1 \dots x_p. N \vec{P}_0 (x_1 \vec{P}_1) \dots (x_p \vec{P}_p).$$

По предположению

$$N \vec{P}_0 \in_\beta SO_{n, m} \subset SO_{n+1, m}.$$

Следовательно, $MN \in_\beta SO_{n+1, m}$ в силу леммы 2. $\square_3$

(4) Доказательство предложения 9.4.8. (i) устанавливается индукцией по n . Случай $n = 0$ тривиален, поэтому рассмотрим переход от n к $n + 1$.

Пусть $M, N \in SO_{n+1, m}$. Если $M \equiv I$, то, очевидно, имеем $MN \in_\beta SO_{n+1, m}$. В противном случае

$$M \equiv \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_p\}, \quad \text{где } \vec{P}_i \in \vec{SO}_{n, m}, \quad 0 \leq i \leq p.$$

Следовательно, $MN = \lambda x_1 \dots x_p. N \vec{P}_0 (x_1 \vec{P}_1) \dots (x_p \vec{P}_p)$. По лемме 3 и предположению индукции $N \vec{P}_0 \in_\beta SO_{n+1, m}$. Следовательно, по лемме 2 имеем $MN \in_\beta SO_{n+1, m}$.

(ii) получается непосредственно, так как $SO = \bigcup_{n, m} SO_{n, m}$. $\square_4$

9.4.9. ЛЕММА. (i) $(\forall n, m \in \mathbb{N}) (\exists k \in \mathbb{N}) (\forall M \in SO_{n, m}) (M I^{\sim k} = I)$.

(ii) $(\forall M \in SO) (\exists k \in \mathbb{N}) (M I^{\sim k} = I)$.

Доказательство (i) получается индукцией по n . Для $n = 0$ берем $k = 0$. Чтобы обосновать переход от n к $n + 1$, допустим, что для некоторого k_0

$$(*) \quad P \in SO_{n, m} \Rightarrow P I^{\sim k_0} = I.$$

Берем $k = m + k_0$. Тогда

$$M \in SO_{n+1, m} \Rightarrow M I^{\sim k} = I.$$

Действительно, при $M \equiv I$ эта импликация тривиальна. Если же $M \neq I$, то

$$M \equiv \{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_p\}, \quad \text{где } p \leq m \text{ и } \vec{P}_i \in \vec{SO}_{n, m}$$

для $0 \leq i \leq p$. Значит, $M I^{\sim p} = \vec{P}_0 (\vec{P}_1) \dots (\vec{P}_p) \in SO_{n, m}$ в силу предложения 9.4.8(i). Поэтому $M I^{\sim p+k_0} = I$ в силу (*). Следовательно, $M I^{\sim k} = I$.

(ii) получается непосредственно из (i). $\square$

9.4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Определим отношения $\subset$ и $\supseteq$ соответственно на множествах SO и $\vec{SO}$ следующей одновременной рекурсией.

(1) $I \subset P$,

(2) $\{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_p\} \subset \{\vec{Q}_0, \dots, \vec{Q}_q\} \Leftrightarrow p \leq q$ и $(\forall i \leq p) (\vec{P}_i \supseteq \vec{Q}_i)$

(3) $P_0, \dots, P_p \supseteq Q_0, \dots, Q_q \Leftrightarrow p \leq q$ и $(\forall i \leq p) (P_i \subset Q_i)$.

(ii) Определим бинарные операции $\cup$ и $\vec{\cup}$ соответственно на множествах SO и $\vec{SO}$ следующей одновременной рекурсией.

(1) $I \cup P = P \cup I = P$.

(2) $\{\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_p\} \cup \{\vec{Q}_0, \dots, \vec{Q}_q\} = \{\vec{P}_0 \vec{\cup} \vec{Q}_0, \dots, \vec{P}_p \vec{\cup} \vec{Q}_p, \vec{Q}_{p+1}, \dots, \vec{Q}_q\}$, если $q \geq p$. Аналогично, для $p \geq q$ полагаем

$$\{\vec{P}_0, \dots\} \cup \{\vec{Q}_0, \dots\} = \{\vec{P}_0 \vec{\cup} \vec{Q}_0, \dots, \vec{P}_q \vec{\cup} \vec{Q}_q, \vec{P}_{q+1}, \dots, \vec{P}_p\}.$$

(3) $P_0, \dots, P_p \vec{\cup} Q_0, \dots, Q_q = P_0 \cup Q_0, \dots, P_p \cup Q_p, Q_{p+1}, \dots, Q_q$, если $q \geq p$, и аналогично для $p \geq q$.

9.4.11. ЛЕММА. (i) Для $P, Q \in SO$
 $P \subset Q \Leftrightarrow T(P) \subset T(Q)$ (как множества кодов последовательностей)

и

$$T(P \cup Q) = T(P) \cup T(Q).$$

(ii) Для $\vec{P}, \vec{Q} \in \vec{SO}$

$$\vec{P} \supseteq \vec{Q} \Leftrightarrow T(\vec{P}) \subset T(\vec{Q}) \quad \text{и} \quad T(\vec{P} \vec{\cup} \vec{Q}) = T(\vec{P}) \cup T(\vec{Q}).$$

Доказательство проводится индукцией по определению рассматриваемых отношений и операций. $\square$

ПРИМЕРЫ

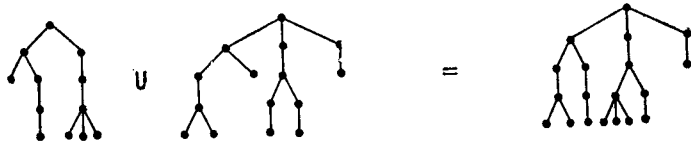
$$(i) \lambda xy.(xll)(yll) \subset \lambda xyz.(x|(\lambda p.pl))(y|(\lambda pq.(pl)(q|))ll)(zl),$$

Картина деревьев:



$$(ii) \lambda xy.(x|(\lambda p.pl))(y(\lambda p.plll)) \cup \\ \cup \lambda xyz.(x(\lambda p.pll)l)(y(\lambda pq.(pl)(q|)))(zl) = \\ = \lambda xyz.(x(\lambda p.(pll))(\lambda p.pl))(y(\lambda pq.(plll)(q|)))(zl).$$

Картина деревьев:



9.4.12. Следствие. Отношение $\subset$ и операция $\cup$ (соответственно $\supseteq$ и $\dot{\cup}$) обладают обычными булевыми свойствами отношения включения и операции объединения (например, $\subset$ транзитивно, $P \subset (P \cup Q)$ и т. д.).

Доказательство получается непосредственно с помощью операции перехода к деревьям. $\square$

9.4.13. Определение. Пусть $M \in \Lambda_K$ и $FV(M) \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$ (причем $\vec{x}$ выписан в стандартном порядке). Пусть $\vec{P} \equiv P_0, \dots, P_r$ — последовательность замкнутых термов и $r \geq n$. Тогда положим

$$M \dot{\bowtie} \vec{P} \dot{\bowtie} \equiv M[x_0, \dots, x_n := P_0, \dots, P_n] P_{n+1} \dots P_r.$$

9.4.14. Определение. Пусть $M \in \Lambda_K$. Последовательность $\vec{P} \in \vec{SO}$ называется критической последовательностью для терма M , если

$$(\forall \vec{Q} \supseteq \vec{P})(M \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} \in_{\beta} SO).$$

9.4.15. Основная лемма. Для любого нормального терма $M \in \Lambda_K$ найдется критическая последовательность $\vec{P} \in \vec{SO}$.

Доказательство проводится индукцией по процессу порождения н. ф. из леммы 8.3.18(ii).

Если $M \equiv x$, берем в качестве $\vec{P}$ одночленную последовательность $\vec{I}$.

Допустим, что $M \equiv \lambda x.N$, точнее

$$M \equiv M(x_0, \dots, x_n) \equiv \lambda x_{n+1}.N(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Тогда N также находится в н. ф., так что по предположению индукции N имеет критическую последовательность $\vec{P}$, т. е.

$$\vec{Q} \supseteq \vec{P} \Rightarrow N \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} \in_{\beta} SO.$$

Тогда $\vec{P}$ — критическая последовательность и для M :

$$\begin{aligned} \vec{Q} \supseteq \vec{P} \Rightarrow M \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} &\equiv M(Q_0, \dots, Q_n) Q_{n+1} \dots Q_q =_{\beta} \\ &=_{\beta} N(Q_0, \dots, Q_n, Q_{n+1}) Q_{n+2} \dots Q_q = \\ &= N \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} \in_{\beta} SO. \end{aligned}$$

Допустим, что $M \equiv x M_0 \dots M_k$, точнее $x = x_0$ и $M_i \equiv M_i(x_0, \dots, x_n)$ для $0 \leq i \leq k$. По предположению индукции для каждого M_i имеется критическая последовательность $\vec{P}_i$.

Чтобы построить критическую последовательность для M , найдем $M \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie}$, где

$$(1) \vec{Q} \equiv Q_0, \dots, Q_q \in \vec{SO}, \text{ причем } q \geq n. \text{ Имеем}$$

$$M \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} = Q_0 M_0(Q_0, \dots, Q_n) \dots M_k(Q_0, \dots, Q_n) Q_{n+1} \dots Q_q.$$

Предположим дополнительно, что

$$(2) Q_0 = \{\vec{R}_0, \dots, \vec{R}_r\}, \text{ причем } r \geq k. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} M \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} &= [\lambda x_{k+1} \dots x_r. (M_0(Q_0, \dots, Q_n) \vec{R}_0) \dots M_k(Q_0, \dots, Q_n) \vec{R}_k) \\ &\quad (x_{k+1} \vec{R}_{k+1}) \dots (x_r \vec{R}_r)] Q_{n+1} \dots Q_q. \end{aligned}$$

В силу подлеммы 2 из доказательства леммы 9.4.8 и самой леммы 9.4.8(ii) получаем, что $M \dot{\bowtie} \vec{Q} \dot{\bowtie} \in_{\beta} SO$, если

$$M_i(Q_0, \dots, Q_n) \vec{R}_i \in_{\beta} SO \text{ для } 0 \leq i \leq k.$$

В силу предположения индукции последнее имеет место, если

$$(3) Q_0, \dots, Q_n, \vec{R}_i \supseteq \vec{P}_i \text{ для } 0 \leq i \leq k.$$

Следовательно, $\vec{P}^M$ будет критической последовательностью для M , если верно

$$\vec{Q} \supseteq \vec{P}^M \Rightarrow (1) \wedge (2) \wedge (3).$$

В следующей подлемме мы закончим доказательство, построив такую последовательность $\vec{P}^M$.

Подлемма. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ и $\vec{P}_i \in \vec{SO}$, $i \leq k$. Тогда имеется последовательность $\vec{P}^* \in \vec{SO}$, такая, что для любых $\vec{Q} \supseteq \vec{P}^*$

- (1) $\vec{Q} = Q_0, \dots, Q_q$, где $q \geq n$,
- (2) $Q_0 = \{\vec{R}_0, \dots, \vec{R}_r\}$, где $r \geq k$,
- (3) $Q_0, \dots, Q_n, \vec{R}_i \supseteq \vec{P}_i$ для $0 \leq i \leq k$.

Доказательство. Допустим, что

$$\begin{aligned} \vec{P}_0 &= P_{00}, \dots, P_{0m_0}, \\ &\dots \\ \vec{P}_k &= P_{k0}, \dots, P_{km_k}, \end{aligned}$$

и положим

$$\begin{aligned} P^+ &= \bigcup \{P_{ij} \mid 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m_i\}, \\ m &= \max \{m_i \mid 0 \leq i \leq k\}. \end{aligned}$$

Наконец, положим

$$\vec{P}^* = P_0^+ \cup \begin{bmatrix} P_{00}^+ \dots P_{0m}^+ \\ \dots \\ P_{k0}^+ \dots P_{km}^+ \end{bmatrix}, \quad P_1^+, \dots, P_n^+,$$

где

$$P_i^+ = P^+ \text{ для } 0 \leq i \leq n \text{ и } P_{ij}^+ = P^+ \text{ для } 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m.$$

Пусть теперь $\vec{Q} \supseteq \vec{P}^*$. Покажем, что имеют место (1), (2) и (3).

(1) тривиально.

(2) Из того, что $Q_0 \supset [P_{ij}^+] = \{\vec{P}_0^+, \dots, \vec{P}_k^+\}$, следует, что $Q_0 = \{\vec{R}_0, \dots, \vec{R}_r\}$, где $r \geq k$.

(3) Так как P^+ есть супремум P_{ij} , достаточно показать, что

- (a) $Q_i \supset P^+$ для $0 \leq i \leq n$;
- (b) $(\forall i \leq k)(\vec{R}_i = R_{i0}, \dots, R_{is_i} \text{ и } s_i \geq m)$;
- (c) $R_{ij} \supset P^+$ для $0 \leq i \leq k$ и $0 \leq j \leq m$.

Чтобы установить (a), заметим, что

$$\vec{Q} \supseteq \vec{P}^* \text{ влечет } Q_i \supset P_i^+ = P^+.$$

Чтобы установить (b), (c), заметим, что

$$\{\vec{R}_0, \dots, \vec{R}_r\} = \vec{Q}_0 \supset \begin{pmatrix} P_{00}^+ \dots P_{0m}^+ \\ P_{k0}^+ \dots P_{km}^+ \end{pmatrix}$$

влечет

$$R_{i0}, \dots, R_{is_i} = \vec{R}_i \supset P_{i0}^+, \dots, P_{im}^+,$$

откуда, в частности, вытекает, что $s_i \geq m$ для $0 \leq i \leq k$ и $R_{ij} \supset P_{ij}^+ = P^+$ для $0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m$. $\square$ подлемма $\square$

9.4.16. Следствие. Пусть $M \in \Lambda_K$ находится в н. ф. Тогда $(\exists \vec{P} \in SO)(\forall n, m \in \mathbb{N})(\forall \vec{Q} \in SO_{n,m}) [\vec{Q} \supseteq \vec{P} \Rightarrow M \not\equiv \vec{Q} \in SO_{n,m}]$.

Доказательство аналогично предыдущему доказательству. (Выберем $\vec{P}$, такую, что из $\vec{Q} \supseteq \vec{P}$ следует $\vec{Q} \notin SO_{0,m}$.) $\square$

Для построения непредикативного локального комбинатора K нужна граница на SO -класс терма P_0 .

9.4.17. Определение. Пусть $M \in \Lambda_K$ находится в н. ф., и пусть x — переменная. Определим числа $n_x(M)$ и $m_x(M)$ индукцией по процессу порождения н. ф. в лемме 8.3.18(ii).

$$n_x(z) = m_x(z) = 0,$$

$$n_x(\lambda z.M) = n_x(M),$$

$$m_x(\lambda z.M) = m_x(M),$$

$$\begin{aligned} n_x(zM_0 \dots M_k) &= \begin{cases} \max \{n_x(M_i) \mid 0 \leq i \leq k\}, & \text{если } z \neq x, \\ \max_i \{n_x(M_i)\} + 1, & \text{если } x \equiv z \text{ и один из } M_i \text{ содержит } \lambda, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ m_x(zM_0 \dots M_k) &= \begin{cases} \max \{m_x(M_i)\}, & \text{если } z \neq x, \\ \max \{k, m_x(M_i)\}, & \text{если } z \equiv x \text{ и один из } M_i \text{ содержит } \lambda, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

9.4.18. Следствие. Для любого $M \equiv M(x_0, \dots, x_n) \in \Lambda_K$ в н. ф.

$$\begin{aligned} (\exists \vec{P} = P_0, \dots, P_p) [P_0 \in SO_{n_{x_0}(M), m_{x_0}(M)} \wedge \\ \wedge \forall n, m (\forall \vec{Q} \in SO_{n,m}) [\vec{Q} \supseteq \vec{P} \Rightarrow M \not\equiv \vec{Q} \in SO_{n,m}]]. \end{aligned}$$

Доказательство. Повторяем доказательство основной леммы 9.4.15 и замечаем, что если $M \equiv x_0 M_0 \dots M_k$ и ни один из термов $M_0, \dots, M_k$ не содержит λ , то в критической последовательности $\vec{P} = P_0, \dots, P_p$ можно взять $P_0 \equiv I$. В противном случае нужные границы получаются из определения критической последовательности $\vec{P}$ для терма M . $\square$

Теперь мы можем суммировать полученные результаты.

9.4.19. Следствие. Пусть терм $M \in \Lambda_K$ имеет н. ф. Тогда M I -разрешим.

Доказательство. Пусть $M \equiv M(\vec{x})$. По основной лемме 9.4.15 найдутся термы $\vec{Q} \in \Lambda_I^0$, такие, что

$$M \check{\check{Q}} \check{\check{Q}} \equiv M(Q_0, \dots, Q_n) Q_{n+1} \dots Q_q \in_{\beta} SO.$$

Поэтому в силу леммы 9.4.9 для некоторого k

$$(\lambda \vec{x}. M(\vec{x})) Q_0 \dots Q_k \uparrow^{\sim k} = I,$$

т. е. M I -разрешим. $\square$

9.4.20. ТЕОРЕМА. Для замкнутого терма $M \in \Lambda_I$ эквивалентны следующие утверждения:

- (a) M имеет н. ф.,
- (b) $(\exists \vec{N} \in \Lambda_I^0)(M\vec{N} = I)$,
- (c) $(\exists F \in \Lambda_I^0)(FM = I)$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) получается в силу следствия 9.4.19.

(b) $\Rightarrow$ (c). Если $M\vec{N} = I$, то для $F \equiv \lambda x. x\vec{N}$ мы имеем $FM = I$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Если $FM = I$, то FM имеет н. ф. Значит, в силу следствия 9.1.7 M имеет н. ф. $\square$

9.4.21. Следствие. В λI -исчислении

M имеет н. ф. т. и т. т., когда M разрешим.

Доказательство. В силу леммы 8.3.3(ii) и следствия 8.3.19 можно считать, что терм M замкнут. Но в этом случае нужный результат уже получен. $\square$

Доказательство следствия 9.4.19 вместе с основной леммой 9.4.15 показывает, что конечное множество нормальных термов может быть равномерно разрешено λI -термами.

9.4.22. ТЕОРЕМА. Пусть $M_0, \dots, M_n \in \Lambda_K$ имеют н. ф. Тогда

$$(\exists \vec{Q} \in \Lambda_I^0)(\forall i \leq n)(M \check{\check{Q}} \check{\check{Q}} = I).$$

Доказательство. В силу основной леммы 9.4.15 для каждого из термов M_i имеется критическая последовательность $\vec{P}_i$. Положим $\vec{P} = \vec{P}_0 \vec{\cup} \dots \vec{\cup} \vec{P}_n$. Тогда $M_i \check{\check{P}} \check{\check{P}} \in_{\beta} SO$ для $0 \leq i \leq n$. Следовательно, в силу леммы 9.4.9(ii) имеем для некоторого k

$$(\forall i \leq n)(M_i \check{\check{P}} \check{\check{P}} \uparrow^{\sim k} = I).$$

Таким образом, можно взять $\vec{Q} = \vec{P}, \uparrow^{\sim k}$. $\square$

Другое доказательство теоремы 9.4.22 намечено в упр. 10.6.11.

9.4.23. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{X} \subset \Lambda_K$. Терм $K^* \in \Lambda_I^0$ называется *локальным K* для множества $\mathcal{X}$, если

$$(\forall M \in \Lambda_K)(\forall N \in \mathcal{X})(K^*MN = M).$$

9.4.24. Следствие. Пусть $\mathcal{X} \subset \Lambda_K^0$ — конечное множество термов, имеющих н. ф. Тогда имеется локальный K для множества $\mathcal{X}$.

Доказательство. По теореме 9.4.22 существует последовательность $\vec{Q} \in \Lambda_I^0$, такая, что $(\forall N \in \mathcal{X})(N\vec{Q} = I)$. Положим $K^* \equiv \lambda a. b\vec{Q}a$. Тогда

$$(\forall M \in \Lambda_K)(\forall N \in \mathcal{X})(K^*MN = N\vec{Q}M = M). \quad \square$$

Сейчас мы построим непредикативный локальный K , т. е. терм $K^* \in \Lambda_I^0$, являющийся локальным K для данного множества плюс некоторые данные контексты, содержащие сам K^* .

9.4.25. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{X} \subset \Lambda_I^0$ — конечное множество термов, имеющих н. ф. Пусть $C_0[\] , \dots, C_k[\]$ — контексты, такие, что для $0 \leq i \leq n$

- (a) $C_i[x] \in \Lambda_K^0$ и находится в н. ф.;
- (b) x входит в $C_i[x]$ только пассивно. Тогда некоторый терм K^* является локальным K для множества

$$\mathcal{X} \cup \{C_0[K^*], \dots, C_k[K^*]\}.$$

Кроме того, для этого K^* имеет место равенство $K^* \uparrow^{\sim k} = I$.

Доказательство. Положим $N_i(x) \equiv C_i[\lambda a. xba]$ для $0 \leq i \leq k$. Так как все x в $C_i[x]$ пассивны, все термы $N_i(x)$ снова находятся в н. ф. Кроме того,

$$(\forall i \leq k)(n_x(N_i(x)) = m_x(N_i(x)) = 0).$$

Взяв объединение критических последовательностей для элементов множества $\mathcal{X}$, мы получаем с помощью следствия 9.4.16

$$(1) \quad (\exists \vec{P} \in SO) \forall n, m (\forall \vec{Q} \in SO_{n,m}) (\forall N \in \mathcal{X}) \\ [\vec{Q} \vec{\supset} \vec{P} \Rightarrow N\vec{Q} \in_{\beta} SO_{n,m}].$$

Аналогичным образом, используя следствие 9.4.18, получаем

$$(2) \quad (\exists \vec{P}' \equiv P'_0, \dots, P'_p \in SO) [P'_0 \in SO_{0,0} \wedge \forall n, m (\forall \vec{Q}' \in SO_{n,m}) \\ [\vec{Q}' \vec{\supset} \vec{P}' \Rightarrow (\forall i \leq k)(N_i(Q'_0) Q'_1 \dots Q'_q \in_{\beta} SO_{n,m})]].$$

Пусть $\vec{P} = P_0, \dots, P_p$. Так как $SO_{0,0} = \{I\}$, то $\vec{P}' = I, P'_1, \dots, P'_p$. Положим $R = P_0 \cup \dots \cup P_p \cup P'_1 \cup \dots \cup P'_p$ и $\vec{R} = R_0, \dots, R_r$, где $r = \max(p, p')$ и $(\forall i \leq r) (R_i \equiv R)$. Так как $R \in SO$, мы имеем $R \in SO_{n,m}$ для некоторых n, m .

В силу (1) и (2) получаем

$$(3) \quad (\forall N \in \mathcal{X}) (N\vec{R} \in_\beta SO_{n,m} \subset SO_{n+1,m})$$

и (так как $P'_0 \equiv I$)

$$(4) \quad (\forall i \leq k) (Q_0 \in SO_{n+1,m} \Rightarrow N_i(Q_0)\vec{R} \in_\beta SO_{n+1,m}).$$

Теперь в силу леммы 9.4.9(i) для некоторого $k' \in \mathbb{N}$ имеем

$$(5) \quad M \in SO_{n+1,m} \Rightarrow M I^{\sim k'} = I.$$

Поэтому в силу (3) и (4)

$$(6) \quad (\forall N \in \mathcal{X}) (N\vec{R} I^{\sim k'} = I),$$

$$(7) \quad Q_0 \in SO_{n+1,m} \Rightarrow (\forall i \leq k) (N_i(Q_0)\vec{R} I^{\sim k'} = I).$$

Возьмем теперь $Q_0 \equiv \lambda x.x\vec{R} I^{\sim k'}$. Тогда $Q_0 \in SO_{n+1,m}$ и в силу (7) получаем

$$(8) \quad (\forall i \leq k) (N_i(Q_0)\vec{R} I^{\sim k'} = I).$$

Наконец, положим $K^* \equiv \lambda ab.b\vec{R} I^{\sim k'}a$. Тогда в силу (5) (заметив, что $I\vec{R} \in_\beta SO_{n,m}$) получаем

$$(9) \quad K^* I = I.$$

Кроме того, в силу (6) и (8)

$$(10) \quad (\forall M \in \Lambda_K) (\forall N \in \mathcal{X}) (K^* M N = M),$$

$$(11) \quad (\forall M \in \Lambda_K) (\forall i \leq k) (K^* M (N_i(Q_0)) = M).$$

Но $N_i(Q_0) = C_i[\lambda ab.Q_0ba] = C_i[K^*]$. Следовательно, в силу (11)

$$(12) \quad (\forall M \in \Lambda_K) (\forall i \leq k) (K^* M (C_i[K^*]) = M).$$

В силу (9), (10) и (12) доказательство завершено. $\square$

9.4.26. Следствие. В теореме 9.4.25 можно потребовать, чтобы K^* был локальным K для множества

$$\mathcal{X} \cup \{C_0[K^*], \dots, C_k[K^*]\} \cup \{I^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$P, Q \in SO_{n,m} \Rightarrow \lambda k.PQ \in_\beta SO_{n,m}. \quad \square$$

Отметим, что теорема 9.4.25 станет ложной, если опустить требование пассивности x в $C_i[x]$.

ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{X} = \{I\}$ и $C_0[x] = xI(\lambda z.zz)(\lambda z.zz)$. Хотя I и $C_0[x]$ находятся в н. ф., невозможен терм K^* , являющийся локальным K для $\{I, C_0[K^*]\}$. Действительно,

$$C_0[K^*] = K^* I(\lambda z.zz)(\lambda z.zz) = \Omega,$$

и поэтому равенство $K^* I(C_0[K^*]) = I$ невозможно в силу следствия 9.1.6.

Приложения теоремы 9.4.25 даны в упр. 9.5.8 и 9.5.10.

9.5. Упражнения

9.5.1. (i) Построить терм $M \in \Lambda_f$, такой, что для всех n

$$M I^0 = I, \quad M I^n + I = S.$$

(ii) Построить терм $M \in \Lambda_f$, такой, что для всех n

$$M I^0 = \Omega, \quad M I^n + I = M.$$

9.5.2. (i) Пусть $M_0, \dots, M_n \in \Lambda_f^0$. Построить терм $F \in \Lambda_f^0$, такой, что $(\forall i \leq n) (F I^i = M_i)$.

(ii) Прodelать то же самое, не используя E_f .

9.5.3. Построить комбинатор $P \in \mathcal{X}_I$, такой, что P находится в ω -н. ф., но P_λ не имеет н. ф.

9.5.4. Построить терм $K^* \in \Lambda_f^0$, являющийся локальным K для

(i) $\{I, B, C, S\}$;

(ii) $\{S, \lambda x.x(\lambda y.yu)(\lambda y.yu), K^*\}$.

9.5.5. В каком месте доказательство теоремы 6.6.2 не проходит для λI -исчисления? Сформулировать подходящую модификацию для λI -исчисления и доказать ее.

9.5.6. Нарисовать диаграмму Венна для множеств

$$\Lambda_K^0, \Lambda_f^0, \{M \in \Lambda_K^0 \mid M \text{ имеет н. ф.}\},$$

$$\{M \in \Lambda_K^0 \mid M \text{ } I\text{-неразрешим}\} \text{ и } \{M \in \Lambda_K^0 \mid M \text{ } K\text{-неразрешим}\}.$$

Построить семь термов, позволяющих доказать, что между рассматриваемыми множествами нет иных соотношений, кроме указанных на диаграмме.

*9.5.7. (Клоп). Если $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n.x_i M_1 \dots M_m$ находится в г. н. ф., то n называется *арностью* терма M . Показать, что термы из SO имеют максимальную разрешающую силу, т. е. что для каждого нормального $M \in \Lambda_K^0$ арности n

$$(\exists P_1, \dots, P_n \in SO) (M P_1 \dots P_n = I).$$

*9.5.8. Доказать результат из приложения 9.3.16, используя неперекрывающийся локальный K .

* 9.5.9. Доказать результат из приложения 9.3.16 непосредственно, не используя ни второй теоремы о неподвижной точке, ни неперекативного локального K .

*9.5.10. Построить λ -определяющий терм для любой частично рекурсивной функции, используя неперекативный локальный K .

*9.5.11. Пусть $\ulcorner 0 \urcorner = 1$, $\ulcorner n + 1 \urcorner = [F, \ulcorner n \urcorner]$. Показать, что $\{\ulcorner n \urcorner \mid n \in \mathbb{N}\}$

— адекватная цифровая система для λ . [Указание. Использовать неперекативный локальный K для представления примитивной рекурсии и минимизации.]

9.5.12. Построить конечные множества $A_{I\beta}$ и $A_{I\beta\eta}$, состоящие из равенств между замкнутыми CL_I -термами, такие что теории $CL_I + A_{I\beta}$ и $CL_I + A_{I\beta\eta}$ эквивалентны соответственно теориям λI и $\lambda I\eta$.

9.5.13. (i) Пусть $N^* = \mathbb{N} \cup \{*\}$, где $* \notin \mathbb{N}$. Для $n, m \in \mathbb{N}$ положим

$$n \cdot m = \begin{cases} \{n\}(m), & \text{если это значение определено,} \\ * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим далее $n \cdot * = * \cdot n = * \cdot * = *$.

Показать, что имеются числа $i, b, c, s \in \mathbb{N}$, такие, что структура $\mathcal{H}_1 = \langle N^*, \cdot, i, b, c, s \rangle$ является моделью системы CL_I . [Указание. Использовать s - m -теорему из теории рекурсии.] Эта модель называется *первой моделью Клини* для системы CL_I .

(ii) Показать, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$

$$k \cdot m \cdot n = m \text{ для всех } m, n \in \mathbb{N}.$$

Почему структура $(N^*, \cdot, k, s)$ не является моделью системы CL_K ? Замечание. У Барендрегта [1975] показано, по существу, что

$$M \text{ не имеет } \omega\text{-н. ф.} \Leftrightarrow \mathcal{H}_1 \models M = *.$$

Следовательно, $\text{Con}(\{M = N \mid M, N \in \mathcal{C}, \text{ не имеют } \omega\text{-н. ф.}\})$.

*9.5.14. (Клини). Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ снабжено топологией произведения. Для $\alpha \in \mathbb{B}$, $n \in \mathbb{N}$ положим $\bar{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$; $\bar{\alpha}(0) = \langle \rangle$.

Пусть $\mathbb{B}^* = \mathbb{B} \cup \{*\}$, где $* \notin \mathbb{B}$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{B}$ положим

$$\alpha | \beta = \begin{cases} \gamma \text{ т. и т. т., когда } \forall n \exists m \alpha(\langle n \rangle * \bar{\beta}(m)) \neq 0 \text{ и} \\ \quad \forall n (\gamma(n) = \alpha(\mu m [\alpha(\langle n \rangle * \bar{\beta}(m)) \neq 0]) - 1) \\ * \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Положим далее $\alpha \cdot * = * \cdot \alpha = * \cdot * = *$.

Построить $\iota, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{B}$, такие что $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{B}^*, |, \iota, \beta, \gamma, \sigma)$ есть модель системы CL_I . Эта структура называется *второй моделью Клини* для системы CL_I . [Указание. Показать, что для любого непрерывного отображения $F: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ имеется $\alpha \in \mathbb{B}$ такое, что $(\forall \beta \in \mathbb{B}) (\alpha | \beta = F(\beta))$.]

9.5.15. Показать, что понятие редукции w_i обладает свойством CR. [Указание. Использовать метод упр. 7.4.13.]

9.5.16 (Бём, Дедзани-Чанкальни). Пусть $c = c_0, c_1, \dots \in \Lambda_K$ — цифры Чёрча с функцией следования S_c^+ . Пусть $A_\times = B$ и $A_{\text{exp}} = C_*$ представляют на c умножение и возведение в степень (см. упр. 6.8.6 и 7.4.8).

(i) Показать, что $\{c_1, S_c^+, A_\times, A_{\text{exp}}\}$ является I -базисом (в $\lambda I\eta$).

(ii) Показать, что $\{c_0, S_c^+, A_\times, A_{\text{exp}}\}$ является K -базисом (в λK).

[Указание (Чёрч, Карри). В (i) заметить, что

$$C = B(C_*(BVC_*)(BVC_*),$$

$$I = BCC,$$

$$W_* = B(C_{c_2}I)C_*,$$

$$W = B(B(C_*(BW_*(B(C_*C_*)(B(BBV)C_*))))(BVC_*))$$

$$(B(C_*(B(C_*I)((C_*I))))B),$$

$$S = C(CB(CB(CB(CB(CB))))(CB))W = B(B(BW)C)(BV),$$

$$J = B(BC(BC))(B(W(BBV)C)).$$

Следовательно, $\{c_2, A_\times, A_{\text{exp}}\}$ есть I -базис. Для (ii) заметим, что $K = C_{c_0}$.]

Вывод. «Комбинаторы — это обобщенные цифры».

9.5.17. Показать, что $\{M \in \Lambda \mid \infty(M)\}$ есть Π_1^0 -полное множество.

9.5.18. Показать, что I -разрешимый терм $M \in \Lambda_K$ не обязательно имеет н. ф.

Глава 10

Деревья Бёма

10.1. Основные факты

Для каждого термина $M \in \Lambda$ мы определим некоторое дерево $BT(M)$, называемое деревом Бёма (или бёмовским деревом для термина M). Это понятие подсказано первоначальным доказательством теоремы Бёма 10.4.2, понятием г.н.ф. и предложением 2.2.14 (неразрешим $\Leftrightarrow$ не определен). Деревья Бёма будут играть важную роль в анализе моделей P_ω и D_∞ .

Соотношение между термом и его деревом Бёма напоминает соотношение между вещественным числом и его разложением в непрерывную дробь. Если M имеет н.ф., то дерево $BT(M)$ конечно. В этом отношении н.ф. соответствуют рациональным числам. Например, в § 10.2 будет показано, что в подходящей топологии на Λ нормальные формы образуют плотное подмножество.

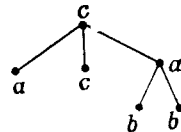
Сначала $BT(M)$ будет введено неформально. Напомним, что $Seq \subset \mathbb{N}$ — это множество кодов конечных последовательностей. На Seq имеются функции и отношения $*$, lh , $<$, $\leq$, см. указания читателю. Частичное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ — это отображение φ , такое, что $Dom(\varphi) \subseteq X$. Для $x \in X$ запись $\varphi(x) \downarrow$ означает, что $\varphi(x)$ определено, т. е. $x \in Dom(\varphi)$; $\varphi(x) \uparrow$ означает, что $\varphi(x)$ не определено, т. е. $x \notin Dom(\varphi)$.

10.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Σ — некоторое множество символов.

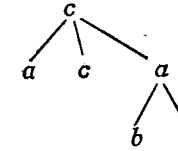
(i) Σ -помеченное дерево — это дерево, каждому узлу которого приписан некоторый элемент множества Σ .

(ii) Более формально, Σ -помеченное дерево — это частичное отображение $\varphi: Seq \rightarrow \Sigma$, такое, что множество $T_\varphi = \{\alpha \in Seq \mid \varphi(\alpha) \downarrow\}$ является деревом; T_φ называется лежащим в основе обнаженным деревом. Метка в узле $\alpha \in T_\varphi$ — это $\varphi(\alpha)$.

ПРИМЕР. Пусть $\Sigma = \{a, b, c\}$. Σ -помеченным деревом является, например, фигура



Другое изображение того же дерева представляет собой фигура



10.1.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ. (i) Буквы $A, B, \dots$ будут обозначать помеченные деревья. Таким образом, A есть некоторое частичное отображение φ .

(ii) Через $|A|$ будем обозначать дерево T_A , лежащее в основе A . Мы пишем $\alpha \in A$ вместо $\alpha \in T_A$.

10.1.3. НЕФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$\Sigma = \{\perp\} \cup \{\lambda x_1 \dots x_n. y \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n, y \text{ — переменные}\}.$$

Тогда $BT(M)$ — это Σ -помеченное дерево, определяемое следующим образом:

$BT(M) = \perp$, если M неразрешим. (То есть в этом случае $BT(M)$ состоит из единственного узла с меткой $\perp$.)

$$BT(M) = \lambda \vec{x}. y \quad \text{если } M \text{ разрешим и имеет главную г. н. ф. } \lambda \vec{x}. y M_1 \dots M_m.$$

$$\quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow$$

$$\quad \quad \quad BT(M_1) \dots BT(M_m)$$

ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Напомним, что в силу теоремы 8.3.14 λ -терм M разрешим т. и т. т., когда M имеет г.н.ф.

(ii) Если M имеет главную г.н.ф. $\lambda \vec{x}. y M_1 \dots M_m$, то термы M_i могут быть сложнее, чем сам M . Поэтому 10.1.3 не является индуктивным определением. Скорее оно описывает процесс, который может давать в результате бесконечное дерево.

(iii) Заметим, что в соответствии с предложением 2.2.14 все неразрешимые термы имеют одно и то же дерево Бёма.

(iv) Деревья Бёма были введены Барендрегтом [1977], но вместо $\perp$ использовался символ Ω .

Формальное определение деревьев Бёма выглядит так.

10.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Σ обозначает то же множество, что и в определении 10.1.3. Дерево Бёма (или бёмовское дерево) для λ -терма M (обозначаемое через $BT(M)$) — это Σ -помеченное дерево, определяемое следующим образом.

Если M неразрешим, то

$$BT(M)(\langle \rangle) = \perp,$$

$$BT(M)(\langle k \rangle * \alpha) \uparrow \quad \text{для всех } k, \alpha.$$

Если M разрешим и $\lambda x_1 \dots x_n. y M_0 \dots M_{m-1}$ — какая-нибудь его главная г. н. ф., то

$$\begin{aligned} \text{BT}(M)(\langle \rangle) &= \lambda x_1 \dots x_n. y, \\ \text{BT}(M)(\langle k \rangle * \alpha) &= \begin{cases} \text{BT}(M_k)(\alpha) & \text{для всех } \alpha \text{ и } k < m, \\ \uparrow & \text{для всех } \alpha \text{ и } k \geq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Свободные и связанные переменные для деревьев Бёма определяются так же, как и для термов. Деревья, различающиеся лишь наименованиями связанных переменных, отождествляются. Наилучший способ достичь этого — применить символику де Брёйна, которая описана в приложении С. Чтобы облегчить чтение, мы записываем (метки, входящие в) деревья Бёма наивным образом (т. е. с именами связанных переменных) и предполагаем, что выполнено соглашение о переменных, обеспечивая его выполнение тем, что в узле α используются связанные переменные $x_0^\alpha, x_1^\alpha, \dots$.

10.1.5. ПРИМЕРЫ.

(i) $\text{BT}(S) = \lambda abc. a$

```

      a
     / \
    c   b
       |
       c
  
```

(ii) $\text{BT}(Sa\Omega) = \lambda c. a$

```

      a
     / \
    c   \
       \perp
  
```

(iii) $\text{BT}(Y) = \lambda f. f$

```

      f
      |
      f
      |
      \vdots
  
```

Действительно, заметим, что $Y \equiv \lambda f. \omega_f \omega_f$, где $\omega_f \equiv \lambda x. f(xx)$ и $\omega_f \omega_f = f(\omega_f \omega_f)$.

Следовательно,

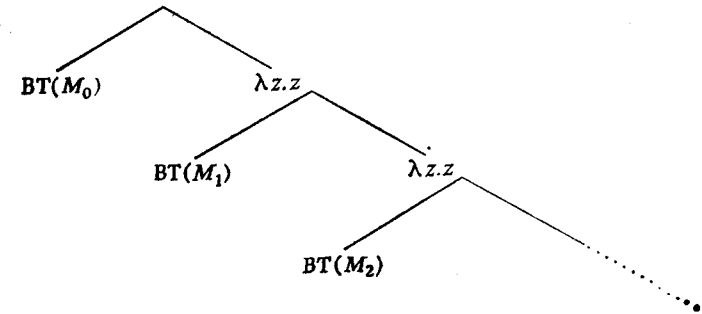
$$\begin{aligned} \text{BT}(\omega_f \omega_f) &= f &= f \\ &| &| \\ \text{BT}(\omega_f \omega_f) &= f &| \\ &| &\vdots \end{aligned}$$

(iv) Пусть $A \equiv \Theta(\lambda ax. \langle ax \rangle)$. Тогда $Ax \rightarrow \langle Ax \rangle \equiv \lambda z. z(Ax)$ и $\text{BT}(Ax) = \lambda z. z$

$$\begin{aligned} &| \\ &\lambda z. z \\ &| \\ &\lambda z. z \\ &| \\ &\vdots \end{aligned}$$

(v) Пусть последовательность M_n равномерна по n . Тогда

$$\text{BT}([M_n]_{n \in \mathbb{N}}) = \lambda z. z$$



Отметим, что $\text{BT}([M_n])$ не зависит от генератора последовательности $[M_n]$ и определяющего ее терма. Кроме того,

$$\forall i (\text{BT}(M_i) = \text{BT}(N_i)) \Leftrightarrow \text{BT}([M_n]) = \text{BT}([N_n])$$

для равномерных M_n, N_n .

(vi) Пусть $M \equiv \Theta(\lambda tab. a(mm))$. Тогда $M \rightarrow \lambda ab. a(MM)$ и

$$\begin{aligned} \text{BT}(M) &= \lambda ab. a \\ &| \\ &\text{BT}(MM) \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} MM &\rightarrow (\lambda ab. a(MM)) M \rightarrow \lambda b. M(MM) \rightarrow \\ &\rightarrow \lambda b. (\lambda a' b'. a'(MM))(MM) \rightarrow \lambda b b'. (MM)(MM). \end{aligned}$$

Следовательно, терм MM имеет бесконечную головную редукцию и потому неразрешим в силу теоремы 8.3.11. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{BT}(M) &= \lambda ab. a \\ &| \\ &\perp \end{aligned}$$

10.1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $M = N$, то $\text{BT}(M) = \text{BT}(N)$.

Доказательство. Допустим, что $M = N$. Индукцией по $\text{lh}(\alpha)$ мы покажем, что $\text{BT}(M)(\alpha) = \text{BT}(N)(\alpha)$.

Предположим, что $\text{lh}(\alpha) = 0$. Тогда $\alpha = \langle \rangle$. Если M неразрешим, то неразрешим и N , так что $\text{BT}(M)(\langle \rangle) = \perp = \text{BT}(N)(\langle \rangle)$. Если оба термина M, N разрешимы, то они имеют г.н.ф., которые в силу следствия 8.3.17(ii) имеют вид

$$(*) \quad \begin{aligned} M &= \lambda x_1 \dots x_n. x M_0 \dots M_{m-1}, \\ N &= \lambda x_1 \dots x_n. x N_0 \dots N_{m-1}, \end{aligned}$$

где $M_k = N_k$ для $k < m$.

Теперь $\text{BT}(M)(\langle \rangle) = \lambda x_1 \dots x_n. x = \text{BT}(N)(\langle \rangle)$.

Пусть $\text{lh}(\alpha) > 0$. Тогда для некоторых k, α' имеем $\alpha = \langle k \rangle * \alpha'$. Если M, N неразрешимы, то $\text{BT}(M)(\alpha) = \uparrow = \text{BT}(N)(\alpha)$. Если M, N разрешимы, то они имеют г.н.ф., удовлетворяющие условию (*). Следовательно, при $k \geq m$

$$\text{BT}(M)(\langle k \rangle * \alpha') = \uparrow = \text{BT}(N)(\langle k \rangle * \alpha');$$

а при $k < m$

$$\text{BT}(M)(\langle k \rangle * \alpha') = \text{BT}(M_k)(\alpha') = \text{BT}(N_k)(\alpha') = \text{BT}(N)(\langle k \rangle * \alpha')$$

по предположению индукции. $\square$

Введенные выше деревья Бёма неэффективны: для их построения нужен оракул, так как понятие (не)разрешимости не рекурсивно. Поэтому вводится следующий вариант помеченных деревьев.

10.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Σ — множество (символов).

(i) Частично Σ -помеченное дерево — это частичное отображение

$$\varphi: \text{Seq} \rightarrow \Sigma \times \mathbb{N},$$

такое, что

- (1) $\varphi(\sigma) \downarrow \wedge \tau < \sigma \Rightarrow \varphi(\tau) \downarrow$.
- (2) $\varphi(\sigma) = \langle a, n \rangle \Rightarrow (\forall k \geq n) \varphi(\sigma * \langle k \rangle) \uparrow$.

(ii) Обнаженное дерево, лежащее в основе частичного Σ -помеченного дерева φ , — это дерево

$$T_\varphi = \{ \langle \rangle \} \cup \{ \sigma \in \text{Seq} \mid \sigma = \sigma' * \langle k \rangle \wedge \varphi(\sigma') = \langle a, n \rangle \wedge k < n \}.$$

(iii) Пусть $\sigma \in T_\varphi$. Если $\varphi(\sigma) = \langle a, n \rangle$, то a называется меткой, (находящейся) в узле σ . Если $\varphi(\sigma) \uparrow$, то говорят, что узел σ непомеченный.

Замечания. (i) Интуитивный смысл равенства $\varphi(\sigma) = \langle a, n \rangle$ состоит в том, что узел σ имеет метку a и за ним непосредственно следуют в дереве n узлов. Если $\sigma \in T_\varphi$, то σ не обязательно имеет метку.

(ii) Очевидно, что T_φ — дерево. Действительно, если $\sigma \in T_\varphi$ и $\varphi(\sigma) \downarrow$, то в силу 10.1.7(1) имеем $\varphi(\sigma') \downarrow$ для всех $\sigma' < \sigma$, откуда $\sigma' \in T_\varphi$. Если $\langle \rangle \neq \sigma \in T_\varphi$ и $\varphi(\sigma) \downarrow$, то $\sigma = \sigma' * \langle k \rangle$ и $\varphi(\sigma') \downarrow$. Поэтому $\sigma'' \in T_\varphi$ для всех $\sigma'' \leq \sigma'$, и потому $\sigma'' \in T_\varphi$ для всех $\sigma'' < \sigma$. Кроме того, $\sigma * \langle k+1 \rangle \in T_\varphi \Rightarrow \sigma * \langle k \rangle \in T_\varphi$.

(iii) Если $\sigma \in T_\varphi$, то за σ непосредственно следует лишь конечное число узлов. Действительно, если $\varphi(\sigma) \uparrow$, то за σ вообще не следуют узлы, а в случае $\varphi(\sigma) \downarrow$ наше утверждение вытекает из 10.1.7(i) (2).

10.1.8. Обозначения. (i) Частично помеченные деревья будем обозначать буквами $A, B, \dots$. Символ $|A|$ обозначает обнаженное дерево T_A , лежащее в основе A . Мы пишем $\alpha \in A$ вместо $\alpha \in |A|$.

(ii) Пишем

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \perp, & \text{если } A(\alpha) \uparrow, \text{ но все же } \alpha \in A, \\ A(\alpha) &\uparrow \uparrow, & \text{если } A(\alpha) \uparrow \text{ и } \alpha \notin A. \end{aligned}$$

Тогда возможны три случая.

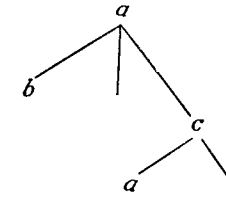
- (1) $A(\alpha) \downarrow$,
- (2) $A(\alpha) = \perp$,
- (3) $A(\alpha) \uparrow \uparrow$.

Отметим, что $\alpha \in A$ в случаях (1), (2) и $A(\alpha) \uparrow$ в случаях (2), (3).

ПРИМЕР. Пусть $\Sigma = \{a, b, c\}$. Определим A равенствами

$$\begin{aligned} A(\langle \rangle) &= \langle a, 3 \rangle, \\ A(\langle 0 \rangle) &= \langle b, 0 \rangle, \quad A(\langle 1 \rangle) \uparrow, \quad A(\langle 2 \rangle) = \langle c, 2 \rangle, \\ A(\langle 2, 0 \rangle) &= \langle a, 0 \rangle, \quad A(\langle 2, 1 \rangle) \uparrow. \end{aligned}$$

Тогда A — частично Σ -помеченное дерево



и $A(\langle 0 \rangle) \downarrow$, $A(\langle 1 \rangle) \uparrow$, $A(\langle 2 \rangle) \downarrow$ и $A(\langle 3 \rangle) \uparrow \uparrow$.

10.1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Σ_1 — множество

$$\{ \lambda x_1 \dots x_n. y \mid n \geq 0, x_1, \dots, x_n, y \text{ — переменные} \}.$$

Эффективное дерево Бёма для термина M (обозначаемое через $\text{BT}^e(M)$) — это частично Σ_1 -помеченное дерево, определяемое следующим образом:

если M неразрешим, то для всех σ

$$\text{BT}^e(M)(\sigma) \uparrow,$$

если M разрешим и имеет главную г.н.ф. $\lambda x_1 \dots x_n. y M_0 \dots M_{m-1}$, то

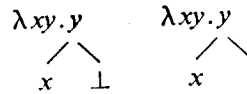
$$\text{BT}^e(M)(\langle \rangle) = \langle \lambda x_1 \dots x_n. y, m \rangle,$$

и для всех σ полагаем

$$\text{BT}^e(M)(\langle k \rangle * \sigma) = \begin{cases} \text{BT}^e(M_k)(\sigma), & \text{если } k < m, \\ \uparrow, & \text{если } k \geq m. \end{cases}$$

10.1.10. Замечания. (i) Легко показать, что $\text{BT}^e(M)$ — действительно частично помеченное дерево; см. упр. 10.6.1(i).

(ii) Пусть $M \equiv \lambda x y. y x (\Omega \Omega)$. Тогда $\text{BT}(M)$ и $\text{BT}^e(M)$ имеют соответственно вид



(iii) Заметим, что в общем случае деревья, лежащие в основе $\text{BT}(M)$ и $\text{BT}^e(M)$, совпадают; см. упр. 10.6.1(ii). Поэтому единственное различие между этими двумя объектами — то, которое указано в (ii): метки $\perp$, имевшиеся в $\text{BT}(M)$, убраны в $\text{BT}^e(M)$.

Таким образом, объекты $\text{BT}(M)$ и $\text{BT}^e(M)$ изоморфны. Единственное различие между ними — интенциональное, т. е. оно заключается в том способе, которым эти объекты нам заданы (ср. Трулстра [1975]). Оказывается, что эффективные деревья Бёма имеют несколько технических преимуществ.

10.1.11. Соглашения. (i) Начиная с этого момента будут рассматриваться только эффективные деревья Бёма, но они тем не менее будут обозначаться через $\text{BT}(M)$.

(ii) Неформальные обозначения из примера 5 по-прежнему будут использоваться при изображении деревьев Бёма. Метки $\perp$ будут или не будут указываться явно в зависимости от удобства в данный момент.

10.1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) *Дерево бёмовского типа* — это частично Σ_1 -помеченное дерево, где Σ_1 — множество из определения 10.1.9; $\mathfrak{B}$ обозначает множество всех деревьев бёмовского типа.

(ii) $\Lambda \mathfrak{B} = \{A \in \mathfrak{B} \mid (\exists M \in \Lambda) (\text{BT}(M) = A)\}$. Заметим, что множество $\Lambda \mathfrak{B}$ релятивизируется к $\Lambda_k \mathfrak{B}$ и $\Lambda_s \mathfrak{B}$.

(iii) Дерево $A \in \mathfrak{B}$ называется *рекурсивно перечислимым* (сокращенно р.п.), если частичная функция A частично рекурсивна (при подходящей кодировке множества Σ_1).

(iv) Дерево $A \in \mathfrak{B}$ $\perp$ -свободно, если $(\forall a \in A) A(a) \downarrow$.

(v) Если $A \in \mathfrak{B}$, то $d(A) = \sup \{\text{lh}(\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Отметим, что $d(A) < \infty$ т. и т. т., когда A конечно.

Для данного дерева A и узла $\alpha \in A$ поддерево дерева A , исходящее из α , состоит из всех узлов $\beta \in A$, продолжающих α . Более точная формулировка такова.

10.1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $A \in \mathfrak{B}$ и $\alpha \in \text{Seq}$. Если $\alpha \in A$, то *поддерево дерева A , исходящее из узла α* (обозначаемое через A_α), определяется равенством

$$A_\alpha = \lambda \beta. A(\alpha * \beta).$$

Очевидно, что $(\forall A \in \mathfrak{B}) \forall \alpha (A_\alpha \in \mathfrak{B})$.

(ii) $\text{BT}_\alpha(M) = (\text{BT}(M))_\alpha$.

(iii) Пусть $M \in \Lambda$ и $\alpha \in \text{BT}(M)$. Определим терм $M_\alpha \in \Lambda$ индукцией по $\text{lh}(\alpha)$.

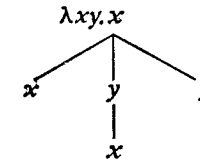
$$M_{\langle \rangle} \equiv M,$$

$$M_{\langle i \rangle * \alpha} \equiv (M_i)_\alpha, \text{ если } \lambda \vec{x}. y M_0 \dots M_{m-1} \text{ есть}$$

главная г.н.ф. терма M .

Заметим, что если M не имеет г.н.ф. или $i > m$, то $\langle i \rangle * \alpha \notin \text{BT}(M)$.

10.1.14. ПРИМЕРЫ. (i) Пусть A — дерево



Тогда

$$A_{\langle \rangle} \equiv A, \quad A_{\langle 1 \rangle} \equiv y,$$

$$\downarrow$$

$$x$$

$$A_{\langle 0 \rangle} \equiv A_{\langle 1, 0 \rangle} \equiv x \quad \text{и} \quad A_{\langle 2 \rangle} \equiv y.$$

(ii) Пусть $M = \lambda x. \lambda x. \Omega(\lambda x)$. Тогда $M_{\langle 0 \rangle} \equiv \Omega$ и $M_{\langle 1 \rangle} \equiv \lambda x$.

10.1.15. ЛЕММА. Для $M \in \Lambda$ и $\alpha \in \text{BT}(M)$

$$\text{BT}(M_\alpha) = \text{BT}_\alpha(M).$$

Доказательство проводится индукцией по $\text{lh}(\alpha)$. Случай $\alpha = \langle \rangle$ тривиален. Если же $\alpha = i * \langle \beta \rangle$ и M имеет главную г.н.ф. $\lambda \vec{x}. y M_0 \dots M_{m-1}$, то

$$\text{BT}(M_\alpha) = \text{BT}((M_i)_\beta) =$$

$$= \text{BT}_\beta(M_i) \text{ (по предположению индукции)} = \text{BT}_{\langle i \rangle * \beta}(M).$$

Последнее равенство справедливо, так как для всех γ

$$\begin{aligned} \text{BT}_\beta(M_i)(\gamma) &= \text{BT}(M_i)(\beta * \gamma) = \\ &= \text{BT}(M)(\langle i \rangle * \beta * \gamma) = \text{BT}_{\langle i \rangle * \beta}(M)(\gamma). \quad \square \end{aligned}$$

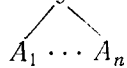
Каждое конечное дерево бёмовского типа является бёмовским деревом некоторого термина.

10.1.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дерево $A \in \mathfrak{B}$ конечно. Мы сейчас определим индукцией по $d(A)$ некоторый λ -терм $M(A)$ (обозначаемый иногда через M_A), для которого A является деревом Бёма.

Случай 1. $A = \perp$. Берем $M(A) \equiv \Omega$.

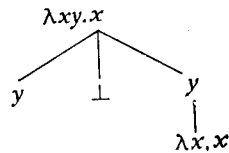
Случай 2. $A = \lambda x.y$. Берем $M(A) \equiv \lambda x.y$.

Случай 3. $A = \lambda x.y$. Берем $M(A) \equiv \lambda x.y M(A_1) \cdots M(A_n)$.



10.1.17. СЛЕДСТВИЕ. Для конечных деревьев $A \in \mathfrak{B}$ имеет место равенство $\text{BT}(M(A)) = A$. $\square$

ПРИМЕР. Пусть A есть дерево



Тогда $M(A) \equiv \lambda xy.x \Omega(y)$.

Заметим, что терм $M \in \Lambda$ имеет н.ф. т. и т.т., когда дерево $\text{BT}(M)$ конечно и $\perp$ -свободно (т. е. не содержит $\perp$).

10.1.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $A \in \mathfrak{B}$. Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$A^k(\alpha) = \begin{cases} A(\alpha), & \text{если } \text{lh}(\alpha) < k, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

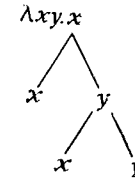
(ii) $\text{BT}^k(M) = (\text{BT}(M))^k$.

(iii) $M^{(k)} = M(\text{BT}^k(M))$.

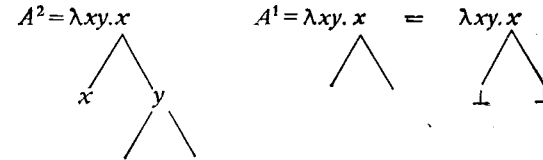
(iv) Для деревьев $A, B \in \mathfrak{B}$ будем писать $A =_k B$, если $A^k = B^k$.

Заметим, что A^k — это конечное дерево Бёма, которое получается из A отрезанием всех поддеревьев на глубине k . Напри-

мер, если A есть дерево



то



и $A^0 = \perp$.

10.1.19. ЛЕММА. Для термина $M \in \Lambda$ имеет место равенство $\text{BT}(M^{(k)}) = \text{BT}^k(M)$.

Доказательство. $\text{BT}(M^{(k)}) = \text{BT}(M(\text{BT}^k(M))) = \text{BT}^k(M)$ в силу следствия 10.1.17. $\square$

Теперь будет дана характеристика множества $\Lambda\mathfrak{B}$, т. е. тех деревьев, которые являются бёмовскими деревьями каких-то термов.

Читателю, вероятно, интуитивно очевидно, что следует понимать под множеством свободных переменных данного дерева $A \in \mathfrak{B}$. Следующее определение уточняет это.

10.1.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A \in \mathfrak{B}$.

(i) Пусть $\sigma \in A$. Если $A(\sigma) = \langle \lambda x_1 \cdots x_n.y, m \rangle$, то полагаем

$$\vec{x}_\sigma = x_1, \dots, x_n, \quad y_\sigma = y, \quad m_\sigma = m.$$

Если $A(\sigma) = \uparrow$, то полагаем $\vec{x}_\sigma = y_\sigma = m_\sigma = \uparrow$.

(ii) Если $\sigma \in A$, то $\vec{x}_\sigma$ (множество связывающих переменных до σ включительно) индуктивно определяется следующим образом (см. также замечание перед примером 10.1.5):

$$\vec{x}_{\sigma \downarrow} = \vec{x}_\sigma, \quad \vec{x}_{\sigma * \langle k \rangle} = \vec{x}_\sigma, \vec{x}_{\sigma * \langle k \rangle}.$$

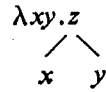
Пример. $\vec{x}_{\langle 1, 0 \rangle} = \vec{x}_\uparrow$, $\vec{x}_{\langle 1 \rangle} = \vec{x}_{\langle 1, 0 \rangle}$.

(iii) $\text{FV}_A(\sigma) = \begin{cases} \{y_\sigma\} - \{\vec{x}_\sigma\}, & \text{если } A(\sigma) \downarrow, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$

(iv) $\text{FV}(A) = \bigcup \{\text{FV}_A(\sigma) \mid \sigma \in A\}$.

(v) Говорят, что дерево A замкнуто, если $\text{FV}(A) = \emptyset$.

Пример. Пусть A есть дерево



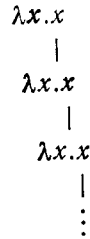
Тогда $\vec{x}_1 = x$, $y_1 = z$; $m_1 = 2$ и т. д., $FV(A) = \{z\}$.

10.1.21. Предложение. Пусть $A = BT(M)$ и обозначения $\vec{x}_\alpha$, y_α , m_α имеют тот же смысл, что в определении 10.1.20. Если $A(\alpha) = \downarrow$, то M_α имеет главную г. н. ф.

$$\lambda \vec{x}_\alpha. y_\alpha M_{\alpha * \langle 0 \rangle} \cdots M_{\alpha * \langle m_\alpha - 1 \rangle}$$

Доказательство. Это утверждение получается из определения. См. упр. 10.6.2. $\square$

10.1.22. Замечание. Заметим, что $FV(BT(M)) \subseteq FV(M)$; см. упр. 10.6.3. Это включение может быть собственным. Пусть, например, $M \rightarrow \lambda z x. x(Mz)$. Тогда $BT(Mz)$ имеет вид



и потому замкнуто, но терм Mz не замкнут (и даже не конвертируется в замкнутый терм). Мы говорим, что в дереве $BT(Mz)$ «переменная z выталкивается на бесконечность».

10.1.23. Теорема. Пусть $A \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$A \in \Lambda_K \mathfrak{B} \Leftrightarrow FV(A) \text{ конечно и } A \text{ р. н.}$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $A = BT(M)$, то в силу замечания 10.1.22 множество $FV(A) \subseteq FV(M)$ конечно. Далее, так как $BT(M)$ задано эффективной процедурой, дерево A рекурсивно перечислимо в силу тезиса Чёрча.

$(\Leftarrow)$ Пусть A частично рекурсивно и $FV(A) = \vec{a}$. Определим индуктивно последовательности переменных $\vec{z}_\alpha$.

$$\vec{z}_1 = \begin{cases} \vec{a}, & \text{если } A(\langle \rangle) \downarrow, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\vec{z}_{\alpha * \langle k \rangle} = \begin{cases} \vec{z}_\alpha, \vec{x}_\alpha, & \text{если } A(\alpha) \downarrow, \\ \uparrow & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь $\vec{x}_\alpha$ имеет тот же смысл, что в определении 10.1.20(i)). Заметим, что для всех α , таких, что $A(\alpha) \downarrow$,

$$(1) \quad \vec{z}_\alpha, \vec{x}_\alpha = \vec{a}, \quad \vec{x}_{\bar{\alpha}} = \vec{z}_{\alpha * \langle k \rangle} \quad \text{для всех } k < m_\alpha.$$

По теореме 8.1.6 найдется терм $E \in \Lambda^0$, такой, что $E^\Gamma M^\Gamma \rightarrow M$. Можно считать, что неразрешимость терма M влечет неразрешимость EM . (В действительности это имеет место уже для терма E , построенного в теореме 8.1.6, но если вы не хотите это проверять, возьмите

$$E' \equiv \lambda x. x T H E x.)$$

Если $A(\alpha) \downarrow$, то положим

$$B_\alpha = \lambda m \lambda \vec{z}_\alpha \lambda \vec{x}_\alpha. y_\alpha (E m^\Gamma \alpha * \langle 0 \rangle^\Gamma \vec{z}_{\alpha * \langle 0 \rangle}^\Gamma) \cdots \\ \cdots (E m^\Gamma \alpha * \langle m_\alpha - 1 \rangle^\Gamma \vec{z}_{\alpha * \langle m_\alpha - 1 \rangle}^\Gamma).$$

Заметим, что в силу (1) для узлов α , таких, что $A(\alpha) \downarrow$, $B_\alpha \in \Lambda^0$.

Так как A частично рекурсивно, найдется частично рекурсивная функция ψ , такая, что

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \# B_\alpha, & \text{если } A(\alpha) \downarrow, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть терм F λ -определяет функцию ψ . По второй теореме о неподвижной точке 6.5.9 существует терм $M \in \Lambda^0$, такой, что $M \rightarrow \lambda s. E(Fs)^\Gamma M^\Gamma$. Если $\psi(\alpha) = \downarrow$, то

$$(2) \quad M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma \rightarrow E(F^\Gamma \alpha^\Gamma)^\Gamma M^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma \rightarrow E^\Gamma B_\alpha^\Gamma M^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma \rightarrow B_\alpha^\Gamma M^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma \rightarrow \\ \rightarrow \lambda \vec{x}_\alpha. y_\alpha (E^\Gamma M^\Gamma \alpha * \langle 0 \rangle^\Gamma \vec{z}_{\alpha * \langle 0 \rangle}^\Gamma) \cdots \\ \rightarrow \lambda \vec{x}_\alpha. y_\alpha (M^\Gamma \alpha * \langle 0 \rangle^\Gamma \vec{z}_{\alpha * \langle 0 \rangle}^\Gamma) \cdots$$

Аналогично, если $A(\alpha) \uparrow$, то терм $M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma$ неразрешим.

Утверждение. Для всех α имеет место $BT(M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma) = A_\alpha$. Действительно, если $A(\alpha) \uparrow$, то и A_α , и $BT(M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma)$ — пустые деревья, так как в этом случае терм $M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma$ неразрешим. Если $A(\alpha) \downarrow$, то мы покажем индукцией по $lh(\beta)$, что

$$BT(M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma)(\beta) = A(\alpha * \beta) (= A_\alpha(\beta)).$$

Если $\beta = \langle \rangle$, то в силу (2)

$$BT(M^\Gamma \alpha^\Gamma \vec{z}_\alpha^\Gamma)(\langle \rangle) = \langle \lambda \vec{x}_\alpha. y_\alpha, m_\alpha \rangle = A(\alpha).$$

Допустим теперь, что $\beta = \langle k \rangle * \beta'$. Если $k < m_\alpha$, то

$$\text{BT}(M\Gamma\alpha \uparrow z_\alpha)(\beta) =$$

$$= \text{BT}(M\Gamma\alpha * \langle k \rangle \uparrow z_{\alpha * \langle k \rangle})(\beta') \quad (\text{в силу (2) и определения BT}) =$$

$$= A(\alpha * \langle k \rangle * \beta') \quad (\text{по предположению индукции}) = A(\alpha * \beta).$$

Если $k \geq m_\alpha$, то

$$\text{BT}(M\Gamma\alpha \uparrow z_\alpha)(\langle k \rangle * \beta') = \uparrow,$$

а в силу условия 2 из определения 10.1.7(i) мы имеем также

$$A(\alpha * \langle k \rangle * \beta') = \uparrow.$$

Это доказывает наше утверждение. Из него следует, что

$$\text{BT}(M\Gamma\langle \rangle \uparrow z_\langle \rangle) = A_\langle \rangle = A,$$

откуда $A \in \Lambda_K \mathfrak{B}$. $\square$

Теперь мы дадим аналогичную характеристику множества $\Lambda_I \mathfrak{B}$.

10.1.24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A \in \mathfrak{B}$ и $\vec{x}_\alpha, y_\alpha$ определяются так же, как в определении 10.1.20(i). Индикатором переменных для A называется частичное отображение

$$\chi: \text{Seq} \rightarrow \{\text{последовательности переменных}\},$$

такое, что

$$(1) \alpha \in A \Leftrightarrow \chi(\alpha) \downarrow,$$

$$(2) \{\vec{x}_\alpha\} \cup \{\chi(\alpha)\} = \{y_\alpha\} \cup \bigcup \{\chi(\alpha * \langle i \rangle) \mid i < m_\alpha\},$$

$$(3) \{\vec{x}_\alpha\} \cap \{\chi(\alpha)\} = \emptyset.$$

В процессе доказательства следующей теоремы выяснится, что если $M \in \Lambda_I$, то $\chi(\alpha) = \text{FV}(M_\alpha)$ есть индикатор переменных для $\text{BT}(M)$.

10.1.25. ТЕОРЕМА. Пусть $A \in \mathfrak{B}$. Тогда
 $A \in \Lambda_I \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{FV}(A)$ конечно и A р.п. и имеет частично рекурсивный индикатор переменных.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Так как $A \in \Lambda_I \mathfrak{B} \subseteq \Lambda_K \mathfrak{B}$, из теоремы 10.1.25 следует, что $\text{FV}(A)$ конечно и A р.п. Пусть $A = \text{BT}(M)$ для $M \in \Lambda_I$. Полагаем

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} \text{FV}(M_\alpha), & \text{если } \alpha \in A, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда χ частично рекурсивна. Кроме того, χ — индикатор переменных. Условие 1 из определения 10.1.24 выполнено тривиальным образом. Если $A(\alpha) \downarrow$, то в силу предложения 10.1.21 терм M_α имеет главную г.н.ф.

$$\lambda \vec{x}_\alpha. y_\alpha M_{\alpha * \langle 0 \rangle} \cdots M_{\alpha * \langle m_\alpha - 1 \rangle} \in \Lambda_I.$$

Следовательно, в силу леммы 9.1.2(iv) ясно, что выполнены и условия 2 и 3.

($\Leftarrow$) Пусть $\vec{z}_\alpha = \chi(\alpha)$, а $\vec{x}_\alpha, y_\alpha, m_\alpha$ понимаются как в определении 10.1.20. Положим

$$B_\alpha \equiv \lambda m \vec{z}_\alpha \vec{x}_\alpha. y_\alpha (E_I m \Gamma \alpha * \langle 0 \rangle \uparrow \vec{z}_{\alpha * \langle 0 \rangle}) \cdots,$$

$$\psi(\alpha) = \# B_\alpha.$$

Из того, что χ — индикатор переменных, следует, что $B_\alpha \in \Lambda_I^0$ при $A(\alpha) \downarrow$. Кроме того, из частичной рекурсивности A и χ следует, что частично рекурсивна и ψ . Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству теоремы 10.1.2.3. $\square$

Могут спросить, нельзя ли охарактеризовать множество $\Lambda_I \mathfrak{B}$ более простым способом.

10.1.26. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дерево $A \in \mathfrak{B}$ похоже на Λ_I -дерево, если $\text{FV}(A)$ конечно, A р.п. и

$$(\forall \alpha \in A) \{\vec{x}_\alpha\} \subseteq \bigcup \{\text{FV}_A(\beta) \mid \beta > \alpha\}.$$

В упр. 10.6.4 будет показано, что некоторое дерево $A \in \Lambda_K \mathfrak{B}$ похоже на Λ_I -дерево, но не имеет индикатора переменных. Поэтому $A \notin \Lambda_I \mathfrak{B}$.

10.2. Сравнение деревьев Бёма.

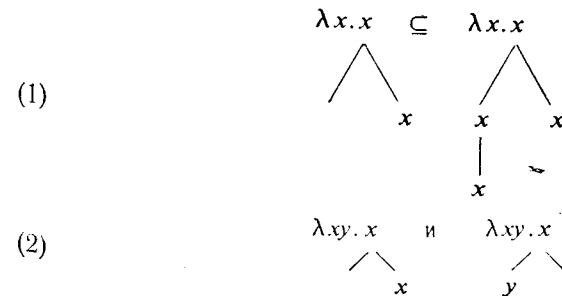
Топология деревьев на Λ

Деревья бёмовского типа являются в действительности частичными функциями из $\mathfrak{B} \subseteq \text{Seq}$ в Σ_1 . Так как частичные функции с отношением включения образуют п.ч.у.м. (см. пример 1.2.30), то отношение $\subseteq$ является частичным порядком и на $\mathfrak{B}$.

Заметим, что для деревьев $A, B \in \mathfrak{B}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow A$ получается из B (когда оба они изображены как эффективные деревья) отрезанием некоторых поддеревьев.

10.2.1. ПРИМЕРЫ.



совместимы (см. определение 1.2.28).

$$(3) \quad \begin{array}{c} \lambda x y. x \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \lambda x y. x \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \end{array}$$

несовместимы. Деревья

$$\begin{array}{c} \lambda x. x \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \lambda x. x \\ \swarrow \quad \searrow \end{array}$$

также несовместимы, ибо для первого дерева $A(\langle \rangle) = \langle \lambda x. x, 2 \rangle$, а для второго $A(\langle \rangle) = \langle \lambda x. x, 3 \rangle$.

В предложении 1.2.31(ii) доказано, что $\text{Seq} \rightarrow \Sigma_1$ — когерентное алгебраическое п.ч.у.м. Когерентным п.ч.у.м. будет и его подмножество $\mathfrak{B}$.

10.2.2. Предложение. (i) $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ — когерентное алгебраическое п.ч.у.м., где A компактно т. и т.т., когда оно конечно.

(ii) Если $\Phi \subseteq \mathfrak{B}$ непусто, то $\bigcap \Phi \subseteq \mathfrak{B}$ есть инфимум семейства Φ .

Доказательство. Пусть $\Phi \subseteq \mathfrak{B}$ совместно. Тогда $\bigcup \Phi$ — частичная функция. Нетрудно показать, что $\bigcup \Phi \subseteq \mathfrak{B}$. Поэтому $\mathfrak{B}$ — когерентное п.ч.у.м. Каждое дерево бёмовского типа — объединение конечных деревьев $(A = \bigcup_k A^{(k)})$. Очевидно, что конечные деревья компактны. Следовательно, $\mathfrak{B}$ алгебраическое.

(ii) также устанавливается легко. $\square$

10.2.3. Обозначения. Пусть $M, N \in \Lambda$.

(i) $M \approx N$ т. и т.т., когда $\text{BT}(M) = \text{BT}(N)$.

(ii) $M \subseteq N$ т. и т.т., когда $\text{BT}(M) \subseteq \text{BT}(N)$.

Топология деревьев на Λ

10.2.4. Определение. Рассмотрим п.ч.у.м. $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}, \subseteq)$ с топологией Скотта. Топология деревьев на множестве Λ — это наименьшая топология, в которой непрерывно отображение $\text{BT}: \Lambda \rightarrow \mathfrak{B}$.

Иными словами, открытые подмножества Λ имеют вид $\text{BT}^{-1}(O)$, где O открыто в топологии Скотта на $\mathfrak{B}$.

Используя топологию деревьев, можно выразить обычные понятия, относящиеся к λ -исчислению, в топологических терминах. Например, н.ф. оказываются изолированными точками, а неразрешимые термы — точками компактификации; см. § 20.5.

В § 14.3 будет доказано, что аппликация и абстракция непрерывны в топологии деревьев на Λ . Для аппликации это не-

тривиальный результат, имеющий несколько интересных следствий.

В § 20.5 топология деревьев на моделях из термов будет определена как фактортопология.

Заметим, что топология деревьев на самом множестве Λ еще не принадлежит классу T_0 , так как из $\text{BT}(M) = \text{BT}(N)$ следует, что M, N нельзя отделить.

Подразумевается, что топологические понятия для Λ , используемые без дополнительных эпитетов, относятся к топологии деревьев.

10.2.5. Пример. Пусть $\text{SOL} \subseteq \Lambda$ обозначает множество разрешимых термов. Тогда SOL открыто.

Доказательство. В любом п.ч.у.м. множество $\{x \mid x \neq \perp\}$ открыто по Скотту. Следовательно, множество $\text{SOL} = \text{BT}^{-1}\{A \mid A \neq \perp\}$ открыто в Λ . $\square$

10.2.6. Лемма. Множество $O \subseteq \Lambda$ открыто т. и т.т., когда

(1) $M \in O, M \subseteq N \Rightarrow N \in O$,

(2) если $M \in O$ и $\text{BT}(M) = \bigcup_i \text{BT}(M_i)$, где семейство $\{\text{BT}(M_i)\}_i \subseteq \mathfrak{B}$ направленно, то $\exists i (M_i \in O)$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ По предположению $O = \text{BT}^{-1}(X)$, где множество $X \subseteq \mathfrak{B}$ открыто. Тогда (1) и (2) следуют из определения топологии Скотта.

$(\Leftarrow)$ Пусть $O \subseteq \Lambda$ и имеют место (1), (2). Положим

$$X = \text{BT}(O) = \{\text{BT}(M) \mid M \in O\},$$

$$X^\vee = \{B \in \mathfrak{B} \mid (\exists A \in X) A \subseteq B\}.$$

Тогда $\text{BT}^{-1}(X^\vee) = O$. Мы утверждаем, что множество $X^\vee$ открыто по Скотту. Действительно, первое условие открытости выполняется тривиально. Чтобы проверить второе условие, допустим, что $\bigcup A_i \in X^\vee$, где последовательность $\{A_i\}_i$ направлена. Тогда $\bigcup A_i \supseteq B \in X$ для некоторого B , т.е. $\bigcup A_i \supseteq \text{BT}(M)$ для некоторого $M \in O$, откуда

$$\bigcup_{i,n} (A_i^{(n)} \cap \text{BT}(M)) = \text{BT}(M).$$

Полагаем

$$\text{BT}(M_i^{(n)}) = A_i^{(n)} \cap \text{BT}(M).$$

Тогда семейство $\{\text{BT}(M_i^{(n)})\}_{i,n}$ направленно и

$$\bigcup_{i,n} \text{BT}(M_i^{(n)}) = \text{BT}(M).$$

В силу условия (2) $M_i^{(n)} \in O$ для некоторых i, n . Но тогда $A_i \supseteq \text{BT}(M_i^{(n)}) \in X$, откуда $A_i \in X^\vee$. $\square$

10.2.7. Следствие. (i) Множества

$$O_{M,k} = \{N \in \Lambda \mid M^{(k)} \sqsubseteq N\}$$

образуют базис топологии деревьев на Λ .

(ii) Множество NF β -нормальных форм плотно в Λ .

Доказательство. (i) В силу леммы множества $O_{M,k}$ открыты. Пусть теперь $N \in O$, где $O \subseteq \Lambda$ открыто. Так как

$$\text{BT}(N) = \bigcup_i \text{BT}(N^{(i)}),$$

из леммы следует, что $N^{(k)} \in O$ для некоторого k . Но тогда $N \in O_{N,k} \subseteq O$.

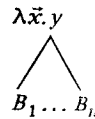
(ii) Пусть $O_{M,k}$ — базисные открытые множества и $A = \text{BT}(M^{(k)})$. Определим A_1 как результат замены в A всех $\perp$ на $\lambda x.x$ и положим $M_1 \equiv M(A_1)$. Тогда $A \subseteq A_1$, откуда $M^{(k)} \sqsubseteq M_1$, т. е. $M_1 \in O_{M,k}$. Так как M_1 есть н.ф., нужный результат следует из (i). $\square$

Бесконечная η -редукция для деревьев

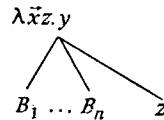
Заметим, что, хотя $\lambda x.x =_{\eta} \lambda xy.x$, деревья Бёма для этих термов различны. Поэтому для деревьев бёмовского типа будет введен некоторый тип η -конверсии. Так как эти деревья бесконечны, конверсия будет иметь инфинитарный характер.

Это понятие будет использовано в оставшейся части этой главы и в анализе моделей D_{∞} и P_{ω} , который будет проведен в § 19.1 и 19.2.

10.2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $A \in \mathfrak{B}$, и пусть узел $\alpha \in A$ имеет метку $\langle \lambda \vec{x}.y, n \rangle$. Тогда η -расширением дерева A в узле α назовем дерево A' , получающееся заменой в A поддерева A_{α} , которое имеет вид



на дерево



(ii) *Обозначения.* Мы пишем $A' \rightarrow_{\eta} A$, если A' есть η -расширение дерева A в некотором узле $\alpha \in A$, таком что $A(\alpha) \neq \perp$. Транзитивное рефлексивное замыкание отношения $\rightarrow_{\eta}$ обозначается через $\twoheadrightarrow_{\eta}$.

Уодсворт [1971] заметил, что η -расширения могут быть также и бесконечными, как показывает следующий пример.

10.2.9. ПРИМЕР. Пусть $J \equiv \Theta(\lambda jxy.x(jy))$. Тогда $Jx \rightarrow \lambda z.x(Jz)$, откуда

$$\begin{array}{c} B = \text{BT}(Jx) = \lambda z_0.x \\ | \\ \lambda z_1.z_0 \\ | \\ \lambda z_2.z_1 \\ | \\ \lambda z_3.z_2 \\ | \\ \vdots \end{array}$$

Можно рассматривать B как предел следующей серии η -расширений:

$$A = x \leftarrow_{\eta} \text{BT}(\lambda z_0.xz_0) \leftarrow_{\eta} \text{BT}(\lambda z_0.x(\lambda z_1.z_0z_1)) \leftarrow_{\eta} \dots$$

Поэтому B называется *бесконечным η -расширением* дерева A (а само дерево A — *бесконечным η -редуктом* дерева B). Следующее определение вводит это понятие в общем случае.

10.2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A \in \mathfrak{B}$ и $X \in \text{Seq}$.

(i) X *расширяет* A , если выполнены следующие условия:

(1) X — дерево и $|A| \subseteq X$, причем X имеет конечное ветвление;

(2) $A(\alpha) = \perp \Rightarrow \alpha$ — конечная точка (т. е. терминальный узел) дерева X .

(ii) Если X расширяет A , то $(A; X)$ обозначает дерево бёмовского типа (с лежащим в основе деревом X), определяемое следующим образом:

(1) $(A; X)(\alpha) = A(\alpha)$, если $\alpha \in A$ и за ним в A непосредственно следует то же количество узлов, что и в X ;

(2) $(A; X)(\alpha) = \langle \lambda \vec{x}z_0^a \dots z_{k-1}^a.y, m+k \rangle$, если $A(\alpha) = \langle \lambda \vec{x}.y, m \rangle$ и за α непосредственно следует $m+k$ узлов в X ;

$$(A; X)(\alpha) = \langle \lambda z_0^a \dots z_{n-1}^a.z_i^b, n \rangle,$$

(3) если $\alpha = \beta * \langle k+i \rangle \in X - |A|$, $\beta \in A$ и β имеет k наследников в A , а за α непосредственно следует n узлов в X или

(4) если $\alpha = \beta * \langle i \rangle \in X - |A|$, $\beta \notin A$ и α имеет n наследников в X ;

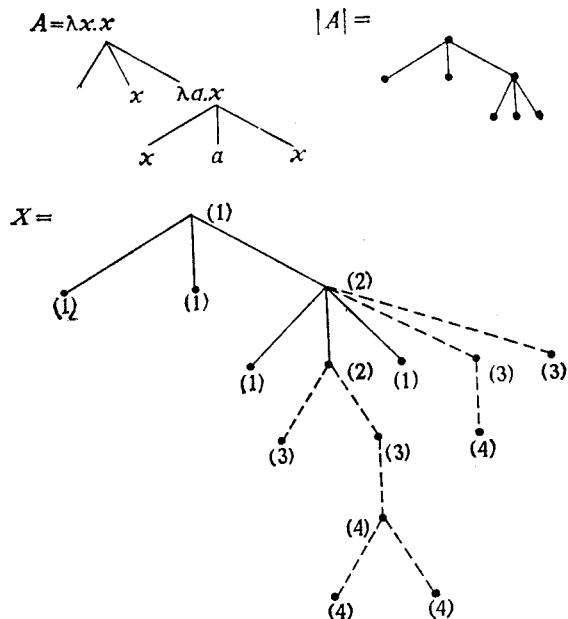
$$(A; X) = \uparrow, \text{ если } \alpha \notin X.$$

Эта нумерация (1)–(4) используется в приводимом ниже примере.

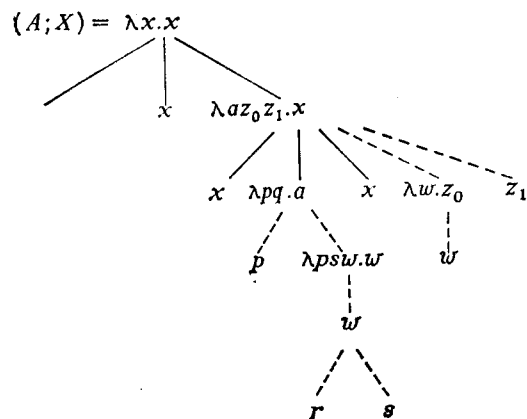
(iii) Говорят, что дерево B является (возможно) бесконечным η -расширением дерева A (и пишут $B \geq_\eta A$ или $A \leq_\eta B$), если для некоторого $X \in \text{Seq}$, расширяющего A , $B = (A; X)$.

Дерево $(A; X)$ устроено проще, чем может показаться.

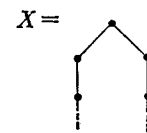
10.2.11. ПРИМЕРЫ. (i) Пусть



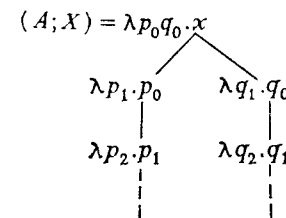
Тогда



(ii) Пусть $A = x$; тогда $|A| = \cdot$. Пусть



Тогда



Таким образом, для X , расширяющего A , дерево $(A; X)$ является очевидным (бесконечным) η -расширением дерева A с лежащим в основе деревом X .

10.2.12. ЛЕММА. (i) $(\mathfrak{B}, \leq_\eta)$ — частично упорядоченное множество.

(ii) Если $A \leq_\eta B$ и множество $|B| - |A|$ конечно, то $B \Rightarrow_\eta A$.

Доказательство. (i) Очевидно, что отношение $\leq_\eta$ рефлексивно и транзитивно. Заметим, что из $X = |A|$ следует, что $(A; X) = A$. Поэтому

$$A \leq_\eta B \leq_\eta A \Rightarrow B = (A; |B|) \wedge |A| = |B| \Rightarrow A = B.$$

(ii) очевидно. $\square$

10.2.13. ЛЕММА. Допустим, что $A \leq_\eta A_1$ и $A \leq_\eta A_2$. Тогда

(i) $\exists B (A_1 \leq_\eta B \wedge A_2 \leq_\eta B)$. (Это перевернутое свойство Чёрча — Россера. Обычная форма тоже имеет место, см. предложение 10.2.15.)

(ii) $A_1 \leq A_2 \Rightarrow A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $A_i = (A; X_i)$ для $i = 1, 2$.

(i) Берем $B = (A; X_1 \cup X_2)$.

(ii) Ввиду $A_1 \leq A_2$ имеем $X_1 \leq X_2$. Если $\alpha \in X_2 - X_1$, то $\beta \in A_1$ и $A_1(\beta) \uparrow$ для некоторого $\beta < \alpha$. Но тогда сразу $\beta \in A$ и $A(\beta) \uparrow$. Из определения 10.2.10(i) (2) следует, что β — терминальный узел в X_2 , а это противоречит соотношению $\beta < \alpha \in X_2$. Поэтому $X_1 = X_2$ и нужный результат получен.

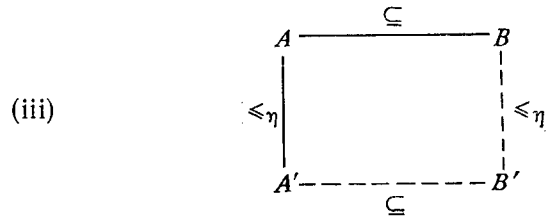
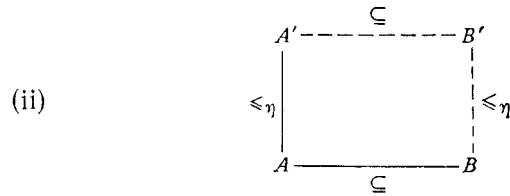
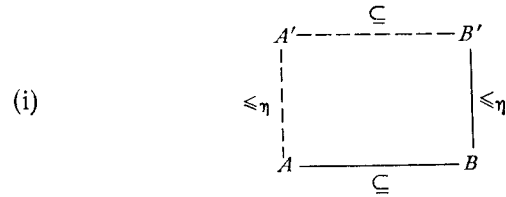
10.2.14. ЛЕММА. Пусть $A \leq B$. Тогда

(i) $B \leq_\eta B' \Rightarrow \exists A' (A \leq_\eta A' \leq B')$,

(ii) $A \leq_\eta A' \Rightarrow \exists B' (A' \leq B' \leq_\eta B)$,

(iii) $A \geq_\eta A' \Rightarrow \exists B' (A' \leq B' \leq_\eta B)$.

На диаграммах это выглядит следующим образом.



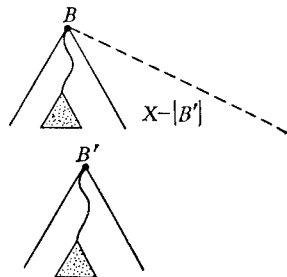
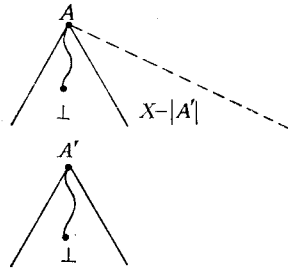
Доказательство. (i) Пусть $B' = (B; X)$. Тогда берем $A' = (A; X')$, где

$$X' = \{\alpha \in X \mid \neg (\exists \beta < \alpha) (A(\beta) = \perp)\}.$$

(ii) Пусть $A' = (A; X)$. Тогда берем $B' = (B; X \cup \{B\})$.

(iii) Пусть $A = (A'; X)$. Полагаем

$$B'(\alpha) = \begin{cases} A'(\alpha), & \text{если } A'(\alpha) \downarrow, \\ B(\alpha), & \text{если } (\exists \beta \leq \alpha) (A'(\beta) = \perp), \\ \uparrow & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$



Тогда $B = (B'; X \cup \{B'\}) \geq_\eta B'$ и $A' \subseteq B'$. $\square$

Заметим, что в общем случае $A \subseteq B \geq_\eta B' \not\Rightarrow \exists A' (A \geq_\eta A' \subseteq B)$. Возьмем, например,

$$A = \lambda z.x, \quad B = \lambda z.x, \quad B' = x.$$

10.2.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Каждое дерево $A \in \mathfrak{B}$ имеет бесконечную η -н. ф. (обозначаемую через $\infty \eta A$), обладающую следующими свойствами:

$$(1) \infty \eta(A) \leq_\eta A,$$

$$(2) \forall B [B \leq_\eta A \Rightarrow \infty \eta A \leq_\eta B].$$

(ii) Дерево $\infty \eta(A)$, удовлетворяющее условиям (1) и (2), единственно.

Доказательство. (i) Определим операцию $\infty \eta$ на множестве $\mathfrak{B}$ следующим образом.

$$\infty \eta(\perp) = \perp$$

$$\infty \eta(\lambda x_1 \dots x_n.y) =$$

$$= \begin{cases} \begin{array}{c} A_1 \dots A_m \\ \swarrow \quad \searrow \\ \infty \eta(\lambda x_1 \dots x_{n-1}.y), \end{array} & \text{если } x_n \leq_\eta A_m \text{ и } x_n \notin \text{FV}(A_i), \\ & 1 \leq i \leq m-1; \\ \begin{array}{c} \lambda x_1 \dots x_n.y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \infty \eta(A_1) \dots \infty \eta(A_m) \end{array} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пробираясь по дереву, мы видим, что $\infty \eta(A)$ корректно определено и имеет место (1). Условие (2) также выполнено, ибо в $\infty \eta(A)$ сделаны все возможные η -сжатия.

(ii) Если $\infty \eta'(A)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то

$$\infty \eta'(A) \leq_\eta \infty \eta(A) \leq_\eta \infty \eta'(A).$$

Следовательно, по лемме 10.2.12(i) имеем $\infty \eta'(A) = \infty \eta(A)$. $\square$

10.2.16. ЗАМЕЧАНИЕ. В упр. 10.6.6 будет показано, что множество $\Lambda \mathfrak{B}$ не замкнуто относительно операции $\infty \eta$, т. е. имеется терм $M \in \Lambda$, такой, что дерево $\infty \eta(\text{BT}(M))$ не является бёмовским деревом какого-либо терма.

10.2.17. СЛЕДСТВИЕ. $A \geq_\eta B \Rightarrow \infty \eta(A) = \infty \eta(B)$.

Доказательство. Это соотношение — следствие единственности бесконечной η -н. ф. $\square$

Говорят, что узел (т. е. код последовательности) α виртуально принадлежит дереву бёмовского типа A , если α принадле-

жит некоторому η -расширению дерева A . Очевидно, что α виртуально принадлежит A т. и т. т., когда $\neg(\exists \beta < \alpha)(A(\beta) = \perp)$.

Следующее определение описывает виртуальные метки дерева бёмовского типа в его виртуальных узлах.

10.2.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $A \in \mathfrak{B}$ и $\alpha \in \text{Seq}$ пусть $X_\alpha \subseteq \text{Seq}$ — наименьшее множество (если оно существует), такое что $\alpha \in X_\alpha$ и X_α расширяет A . Очевидно, что X_α существует т. и т. т., когда $\neg(\exists \beta < \alpha)(A(\beta) = \perp)$. Положим

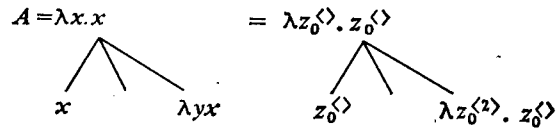
$$(i) \quad A|\alpha = \begin{cases} (A; X_\alpha)(\alpha), & \text{если } \neg(\exists \beta < \alpha)(A(\beta) = \perp), \\ \perp, & \text{если } A(\alpha) = \perp, \\ \uparrow\uparrow & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как и в 10.1.8, может быть $A|\alpha = \langle \lambda x.y, m \rangle, = \perp$ или $= \uparrow\uparrow$.

(ii) $M|\alpha = \text{BT}(M)|\alpha$.

(iii) $M_\alpha = (M; X_\alpha)_\alpha$, где α — виртуальный узел дерева $\text{BT}(M)$.

ПРИМЕР. Пусть



и $\alpha_1 = \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha_2 = \langle 1 \rangle$, $\alpha_3 = \langle 1, 0 \rangle$, $\alpha_4 = \langle 2, 2 \rangle$. Тогда $A|\alpha_1 = z_1^{(1)}$, $A|\alpha_2 = \perp$, $A|\alpha_3 = \uparrow\uparrow$ и $A|\alpha_4 = z_3^{(2)}$ (см. рис. 10.1).

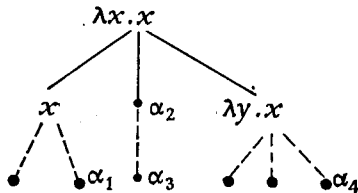


Рис. 10.1

Эквивалентные г.н.ф. и локально эквивалентные деревья Бёма

Следующее отношение эквивалентности на г.н.ф. было введено Бёмом [1968].

10.2.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_m$ и $N \equiv \lambda x_1 \dots x_n. y' N_1 \dots N_{m'}$ — две г.н.ф. Тогда говорят, что M эквивалентна N и пишут

$$M \sim N,$$

если $y \equiv y'$ и $n - m = n' - m'$ (эти разности могут быть отрицательными).

(ii) Если M и N — произвольные термы, то пишут, что $M \sim N$, если оба терма M, N неразрешимы или оба они разрешимы и имеют эквивалентные г.н.ф.

10.2.20. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Из соглашения о переменных следует, что условие $y \equiv y'$ в определении 10.2.19(i) выполнено только в том случае, когда обе эти переменные свободны или обе они связаны. Например, $\lambda x. y M \not\sim \lambda y. y M$, но $\lambda x. x M \sim \lambda y z. y M N$.

(ii) Пусть M, N — г.н.ф. Пусть $\vec{x}$ — последовательность переменных, такая, что $M\vec{x} = y M_1 \dots M_m$, $N\vec{x} = y' N_1 \dots N_{m'}$. Тогда $M \sim N$ в том и только том случае, когда $y \equiv y'$ и $m = m'$.

(iii) В силу следствия 8.3.17(ii) отношение $M \sim N$ корректно определено для термов M, N , не находящихся в г.н.ф.

10.2.21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для элементов множества Σ_1 (меток деревьев бёмовского типа) положим

$$\langle \lambda x_1 \dots x_n. y, m \rangle \sim \langle \lambda x_1 \dots x_n. y', m' \rangle$$

т. и т. т., когда $y \equiv y'$ и $n - m = n' - m'$.

(ii) Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$ и $\alpha \in \text{Seq}$. Тогда $A \sim_\alpha B$ в том и только том случае, когда $A|\alpha \sim B|\alpha$ (т. е. обе виртуальные метки $A|\alpha$

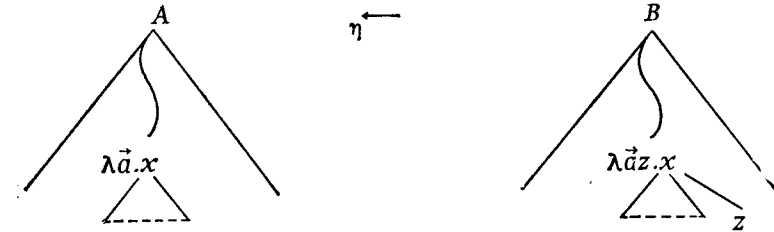


Рис. 10.2

и $B|\alpha$ определены и эквивалентны или обе они не определены (т. е. $\perp$ или $\uparrow\uparrow$)).

10.2.22. ЛЕММА. Если $A \leq_\eta B$, то $\forall \alpha (A \sim_\alpha B)$.

Доказательство. Заметим, что $B \rightarrow_\eta A$ влечет $\forall \alpha (A \sim_\alpha B)$, см. рис. 10.2.

Наше утверждение получается теперь из того, что отношение $\geq_\eta$ — транзитивное замыкание отношения $\rightarrow_\eta$. $\square$

Специальные отношения включения для деревьев Бёма

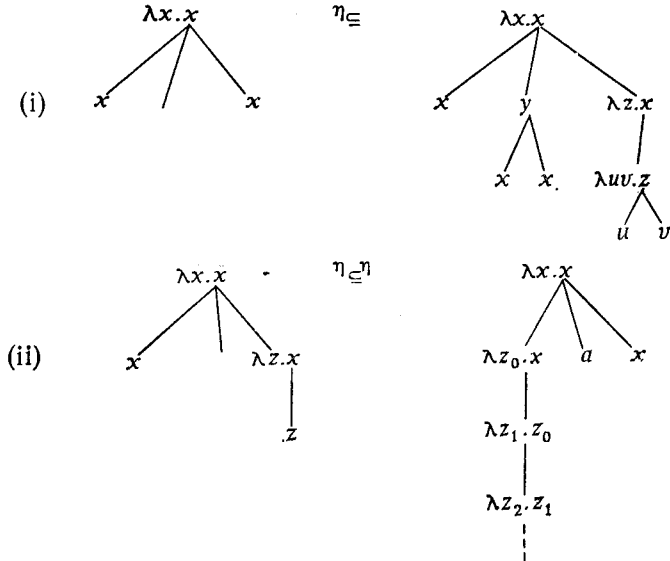
Следующие два отношения включения для деревьев играют важную роль в анализе моделей P_ω и D_∞ в гл. 19.

10.2.23. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$. Тогда

(i) $A \eta \subseteq B \Leftrightarrow \exists A' (A \leq_{\eta} A' \subseteq B)$,

(ii) $A \eta \subseteq^{\eta} B \Leftrightarrow \exists A' B' (A \leq_{\eta} A' \subseteq B' \geq_{\eta} B)$.

ПРИМЕРЫ.



10.2.24. ЛЕММА. (i) $\eta \subseteq$ — частичный порядок на множестве $\mathfrak{B}$.

(ii) Отношение $\eta \subseteq^{\eta}$ рефлексивно и транзитивно.

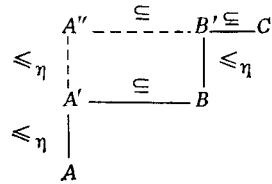


Рис. 10.3

Доказательство. (i) Рефлексивность очевидна. Чтобы доказать транзитивность, допустим, что $A \eta \subseteq B \eta \subseteq C$. Тогда

$$\exists A' B' (A \leq_{\eta} A' \subseteq B \leq_{\eta} B' \subseteq C).$$

По лемме 10.2.14(i) имеем $\exists A'' (A' \leq_{\eta} A'' \subseteq B')$. Следовательно, $A \leq_{\eta} A'' \subseteq C$, т. е. $A \eta \subseteq C$ (см. рис. 10.3).

Допустим теперь, что $A \eta \subseteq B \eta \subseteq A$, чтобы доказать равенство $A = B$. Тогда $\exists A' B' (A \leq_{\eta} A' \subseteq B \leq_{\eta} B' \subseteq A)$. Пусть $A' = (A; X)$ и $B' = (B; Y)$. Имеют место включения

$$|A| \subseteq X \subseteq |B| \subseteq Y \subseteq |A|.$$

Следовательно, $|A| = X = |B| = Y$. Поэтому $A = (A; X) \subseteq B$ и аналогично $B \subseteq A$, откуда $A = B$.

(ii) устанавливается аналогично с использованием лемм 10.2.13 и 10.2.14(ii). $\square$

10.2.25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем писать

$$A =_{\eta} B, \text{ если } A \eta \subseteq^{\eta} B \eta \subseteq^{\eta} A.$$

По лемме 10.2.24(ii) отношение $=_{\eta}$ является отношением эквивалентности на $\mathfrak{B}$. Заметим, что

$$A \leq_{\eta} B \Rightarrow A =_{\eta} B.$$

Напомним, что $A =_k B$ для деревьев $A, B \in \mathfrak{B}$ имеет место т. и т. т. когда $A^k = B^k$. Аналогичным образом полагаем

$$A \subseteq_k B \Leftrightarrow A^k \subseteq B^k.$$

10.2.26. ЛЕММА. Для деревьев $A, B \in \mathfrak{B}$

$$A \leq_{\eta} B \Leftrightarrow \forall k \exists A_k [A_k \rightarrow_{\eta} A \wedge A_k =_k B].$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Имеем $B = (A; X)$ для некоторого X , расширяющего A . Положим

$$X_k = |A| \cup \{\alpha \in X \mid \text{lh}(\alpha) \leq k\}.$$

Тогда X_k расширяет A , и ввиду конечности множества $X_k - |A|$ имеем $(A; X_k) \rightarrow_{\eta} A$ для любого k . Кроме того, $(A; X_k) =_k (A; X) = B$. Поэтому можно взять $A_k = (A; X_k)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть даны деревья A_k . Полагаем $X_k = |A_k^k|$ и $X = \bigcup_k X_k$. Тогда X расширяет A и $(A; X) = B$. Следовательно, $A \leq_{\eta} B$. $\square$

10.2.27. СЛЕДСТВИЕ. (i) $A \eta \subseteq B \Leftrightarrow \forall k \exists A_k [A_k \rightarrow_{\eta} A \wedge A_k \subseteq_k B]$.

(ii) $A \eta \subseteq^{\eta} B \Leftrightarrow \forall k \exists A_k B_k [A_k \rightarrow_{\eta} A \wedge B_k \rightarrow_{\eta} B \wedge A_k \subseteq_k B_k]$.

Доказательство. (i) $(\Rightarrow)$ По предположению имеем $A \leq_{\eta} A' \subseteq B$ для некоторого A' . Отсюда в силу леммы получаем

$$\forall k \exists A_k [A_k \rightarrow_{\eta} A \wedge A_k =_k A'],$$

а так как $A' \subseteq B$, то

$$\forall k \exists A_k [A_k \rightarrow_{\eta} A \wedge A_k \subseteq_k B].$$

$(\Leftarrow)$ Пусть даны деревья A_k . Полагаем $X_k = |A_k^k|$, $X = \bigcup_k X_k$.

Тогда X расширяет A , и для $A' = (A; X)$ имеем $A \leq_{\eta} A' \subseteq B$, т. е. $A \eta \subseteq B$.

(ii) устанавливается аналогично. $\square$

Следующие понятия вводятся для описания ситуаций, когда $A \eta \not\subseteq B$.

10.2.28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$.

(i) A вкладывается в B , если $(\exists A' \rightarrow_{\eta} A) (A' \subseteq_1 B)$.

(ii) Говорят, что A превосходит B (и пишут $A \supset B$), если A не вкладывается в B . Полагаем

$$A \supset B \Leftrightarrow A_{\alpha} \supset B_{\alpha} \text{ для } \alpha \in \text{Seq}.$$

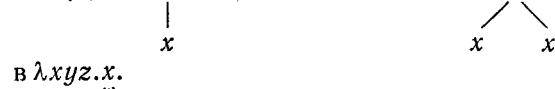
Пусть, как обычно, Σ_1 обозначает множество меток деревьев бёмовского типа, и пусть $a, b \in \Sigma_1 \cup \{\uparrow\}$, где $\uparrow$ обозначает «не определено».

(iii) Говорят, что a вкладывается в b , если $a = \uparrow$ или $a = \langle \lambda x_1 \dots x_n.y, m \rangle$ и $b = \langle \lambda x_1 \dots x_{n+k}.y, m+k \rangle$.

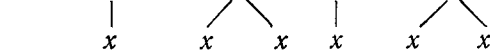
(iv) Пишут, что $a \supset b$, если a не вкладывается в b .

ПРИМЕРЫ. (i) $\perp$ вкладывается в любое дерево.

(ii) $\lambda x.x$ вкладывается в $\lambda xy.x$, который вкладывается



(iii) $\lambda x.x \supset \lambda xy.y$; $\lambda x.x \supset \lambda x.x$.



(iv) A вкладывается в $B \Leftrightarrow A(\langle \rangle)$ вкладывается в $B(\langle \rangle)$.

10.2.29. ЛЕММА. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$ таковы, что $A \subseteq_k B$.

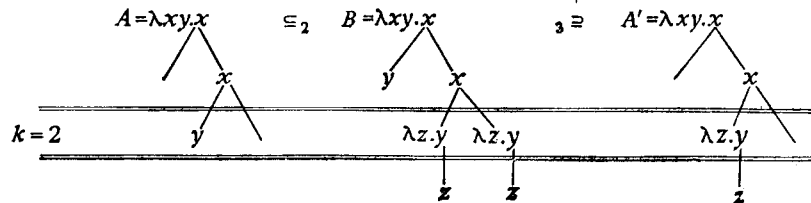
(i) Предположим, что $A(\alpha)$ вкладывается в $B(\alpha)$ для любого $\alpha \in A \cap B$, такого, что $\text{lh}(\alpha) = k$. Тогда

$$(\exists A' \rightarrow_{\eta} A) (A' \subseteq_{k+1} B).$$

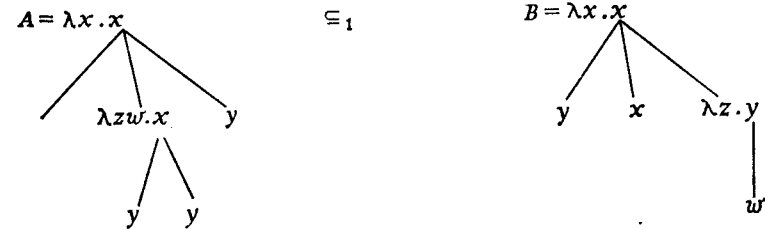
(ii) Предположим, что $A(\alpha) \sim B(\alpha)$ для любого $\alpha \in A \cap B$, такого, что $A(\alpha) \downarrow$ и $\text{lh}(\alpha) = k$. Тогда

$$(\exists A' \rightarrow_{\eta} A) (\exists B' \rightarrow_{\eta} B) (A' \subseteq_{k+1} B').$$

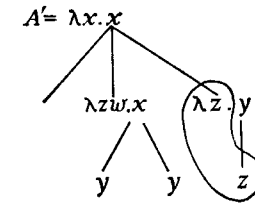
Доказательство. (i) Произведем в каждом узле $\alpha \in A$, таком, что $\text{lh}(\alpha) = k$ и $A(\alpha) \downarrow$, подходящее η -расширение дерева A , которое вкладывает $A(\alpha)$ в $B(\alpha)$. Тогда мы получаем, что $A' \subseteq_{k+1} B$. Например,



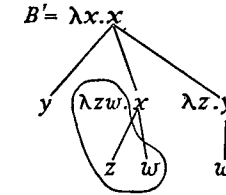
(ii) Аналогичным образом произведем η -расширения в обоих деревьях A и B . Например,



Берем



и



Тогда $A' \subseteq_2 B'$. $\square$

Напомним, что

$$\alpha \in \text{Dom}(A) \Leftrightarrow A(\alpha) \downarrow,$$

$$\alpha \in A \Leftrightarrow A(\alpha) \downarrow \vee A(\alpha) = \perp.$$

10.2.30. ЛЕММА. (i) $A \not\subseteq B \Rightarrow (\exists \alpha \in B) [A \supset_{\alpha} B]$.

(ii) $A \not\subseteq B \Rightarrow (\exists \alpha \in \text{Dom}(A)) [A \not\sim_{\alpha} B]$.

Доказательство. (i) Допустим, что $A \not\subseteq B$. Применяя следствие 10.2.27(i), выберем наименьшее k , для которого

$$(1) \quad (\forall A' \rightarrow_{\eta} A) (A' \not\subseteq_k B).$$

Тогда $k > 0$ и для некоторого дерева $A_0 \rightarrow_{\eta} A$ имеем $A_0 \subseteq_{k-1} B$. Можно считать, что A_0 — минимальное η -расширение дерева A , такое, что $A_0 \subseteq_{k-1} B$. Отсюда следует, в частности, что

$$(2) \quad \neg \exists \alpha [\text{lh}(\alpha) \geq k-1 \text{ и } A_0 \text{ есть расширение дерева } A \text{ в узле } \alpha].$$

В силу (1) отсюда вытекает, что

$$\neg (\exists A' \rightarrow_{\eta} A_0 \rightarrow_{\eta} A) (A' \subseteq_k B).$$

Поэтому, применяя контрапозицию к лемме 10.2.29(i), получаем

$$(\exists \alpha \in A_0 \cap B) [\text{lh}(\alpha) = k - 1 \wedge A_0 \supset_{\alpha} B].$$

Теперь из (2) следует, что $A_0(\alpha) = A(\alpha)$, откуда (так как $A \supset_{\alpha} B$ тогда и только тогда, когда $A(\alpha) \supset B(\alpha)$) следует, что $(\exists \alpha \in B) [A \supset_{\alpha} B]$.

(ii) устанавливается аналогично с использованием леммы 10.2.29(ii). $\square$

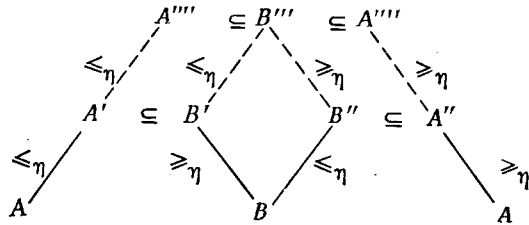
10.2.31. ТЕОРЕМА. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $A =_{\eta} B$;
- (ii) $\infty_{\eta}(A) = \infty_{\eta}(B)$;
- (iii) $\forall k (\exists A' \rightarrow_{\eta} A) (\exists B' \rightarrow_{\eta} B) (A' =_k B')$;
- (iv) $\forall \alpha (A \sim_{\alpha} B)$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). По предположению

$$\exists A' B' B'' A'' (A \leq_{\eta} A' \leq B' \geq_{\eta} B \leq_{\eta} B'' \leq A'' \geq_{\eta} A).$$

Используя леммы 10.2.13(i) и 10.2.14(i), (ii) получаем следующую диаграмму:



По лемме 10.2.13(ii) имеем $A''' = A''''$, откуда $A''' = B'''$. Поэтому в силу следствия 10.2.17

$$\infty_{\eta}(A) = \infty_{\eta}(A''') = \infty_{\eta}(B''') = \infty_{\eta}(B).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) По предположению $A \geq_{\eta} \infty_{\eta}(A) \leq_{\eta} B$. Следовательно, по лемме 10.2.13(i) $C \geq_{\eta} A, B$ для некоторого C . Поэтому в силу леммы 10.2.26 получаем

$$\forall k (\exists A' \rightarrow_{\eta} A) (\exists B' \rightarrow_{\eta} B) (A' =_k C =_k B').$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть дан узел $\alpha \in \text{Seq}$, и пусть $k = \text{lh}(\alpha) + 1$. По предположению

$$(1) (\exists A' \rightarrow_{\eta} A) (\exists B' \rightarrow_{\eta} B) (A' =_k B').$$

Тогда

$$A|\alpha \sim A'|\alpha \text{ (по лемме 10.2.22)} = B'|\alpha \text{ (в силу (1))} \sim B|\alpha \text{ (по лемме 10.2.22)}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i). Применяя контрапозицию к лемме 10.2.30(ii), получаем

$$\forall \alpha (A \sim_{\alpha} B) \Rightarrow A \sqsubseteq^{\eta} B,$$

откуда и следует нужное утверждение. $\square$

Отношения на деревьях индуцируют соответствующие отношения на термах.

10.2.32. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$, $\alpha \in \text{Seq}$.

- (i) $M \sqsubseteq^{\eta} N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \sqsubseteq^{\eta} \text{BT}(N)$.
- (ii) $M \sqsubseteq^{\eta} N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \sqsubseteq^{\eta} \text{BT}(N)$.
- (iii) $M \leq_{\eta} N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \leq_{\eta} \text{BT}(N)$.
- (iv) $M \approx_{\eta} N \Leftrightarrow \text{BT}(M) =_{\eta} \text{BT}(N)$.
- (v) $M \sim_{\alpha} N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \sim_{\alpha} \text{BT}(N)$.

В упр. 10.6.7 будет показано, что

$$M \sqsubseteq^{\eta} N \Leftrightarrow \exists M' (M \leq_{\eta} M' \sqsubseteq N),$$

$$M \sqsubseteq^{\eta} N \Leftrightarrow \exists M' N' (M \leq_{\eta} M' \sqsubseteq N' \geq_{\eta} N).$$

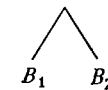
(Это не очевидно, так как нужное промежуточное дерево может не быть бёмовским деревом ни для какого терма.)

10.3. Техника выворачивания по Бёму

Пусть $A = \text{BT}(M)$ и A_{α} — его поддереву. Техника выворачивания по Бёму состоит в нахождении контекста $C[]$, такого, что, грубо говоря, $\text{BT}(C[M]) = A_{\alpha}$. (Поддереву A_{α} «выворачивается наружу по Бёму».) Этот метод был впервые применен Бёмом [1968] для отделения различных $\beta\eta$ -н.ф. M и N , т. е. для построения контекста $C[]$, такого, что, например, $C[M] = \ulcorner 0 \urcorner$, $C[N] = \ulcorner 1 \urcorner$.

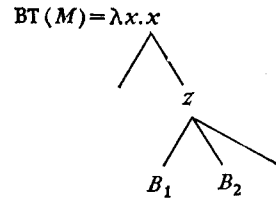
10.3.1. ПРИМЕРЫ. (i) Пусть

$$\text{BT}(M) = \lambda x.x$$



и допустим, что нас интересует дерево B_2 . Положим $C[] \equiv [] F$. Тогда $\text{BT}(C[M]) = B_2$ (если x не входит в B_2).

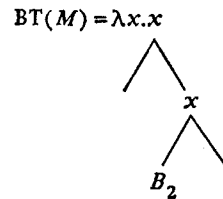
(ii) Пусть



и пусть нам нужно B_2 .

Положим $C[\] \equiv (\lambda z.[\] F) U_1^2$. Тогда $\text{BT}(C[M]) = B_2$.

(iii) Следующий пример менее очевиден. Пусть



и пусть нам нужно B_2 . Если мы возьмем $C_0[\] \equiv [\] F$, то $C_0[M] = \Omega$. Теперь, однако, мы положим $C[\] \equiv [\] P_2 F T$, где $P_2 \equiv \lambda a b. \langle a, b \rangle$. Тогда $C[M] = \langle \Omega, \langle B_2, \Omega \rangle \rangle F T = B_2$.

Заметим, что в общем случае не $C[M] = B_2$, а $C[M] = B_2^*$, где B_2^* — подстановочный частный случай дерева B_2 . Можно, однако, получить лучший результат.

10.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Частный случай M^* терма $M \in \Lambda$ — это любой результат подстановки термов вместо свободных переменных терма M .

(ii) Обозначения. $\exists * \dots M^* \dots$ означает, что для некоторого частного случая M^* терма M имеет место $\dots M^* \dots$. Аналогично понимается $\forall * \dots$.

10.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Преобразование f — это отображение $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$.

(ii) Разрешающее преобразование f определяется либо равенством

$$f(P) = Px \text{ для некоторого } x \text{ и всех } P, \text{ либо равенством}$$

$$f(P) = P[x := N] \text{ для некоторых } x, N \text{ и всех } P.$$

(iii) Бёмовское преобразование — это конечная композиция разрешающих преобразований (включая тождественное, которое является композицией нуля преобразований).

(iv) Обозначения. π пробегает бёмовские преобразования; M^π обозначает $\pi(M)$.

10.3.4. ЛЕММА. (i) $\forall \pi \exists C_\pi[\] \forall M (M^\pi = C_\pi[M])$.

(ii) Контекст $C_\pi[\]$ в (i) можно выбрать так, что

$$\forall \vec{x} \exists \vec{N} (\forall M \in \Lambda^0(\vec{x}) (C_\pi[M] = (\lambda \vec{x}. M) \vec{N})).$$

Доказательство. (i) Если $M^\pi = Mx$, берем $C_\pi[\] = [\]x$; если $M^\pi = M[x := N]$, берем $C_\pi[\] = (\lambda x. [\])N$, а если $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, то полагаем $C_\pi[\] = C_{\pi_1}[C_{\pi_2}[\]]$.

(ii) Снова ясно, как поступать, когда π — разрешающее преобразование. Пусть теперь $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, где π_1 — разрешающее преобразование, и $C_{\pi_1}[M] = (\lambda \vec{x}. M) \vec{N}$ для $M \in \Lambda^0(\vec{x})$.

Случай 1. $(\)^{\pi_1} = (\)y$. Тогда $C_\pi[M] = (\lambda \vec{x}. M) \vec{N}y$ для $M \in \Lambda^0(\vec{x})$.

Случай 2. $(\)^{\pi_1} = (\) [y := P]$. Тогда $C_\pi[M] = (\lambda \vec{x}. M) \vec{N}^*$ для $M \in \Lambda^0(\vec{x})$, где $*$ — $[y := P]$. $\square$

10.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Г. н. ф. $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_m$ называется λ -свободной, если $n = 0$, т. е. $M \equiv y M_1 \dots M_m$.

(ii) Г. н. ф. $M \equiv \lambda \vec{x}. y \vec{M}$ имеет оригинальную голову (или является г. н. ф. с оригинальной головой), если $y \notin FV(\vec{M})$.

(iii) λ -терм M готов, если M неразрешим или имеет λ -свободную г. н. ф. с оригинальной головой.

Мы покажем теперь, что λ -терм всегда можно сделать готовым. Напомним обозначение $U_i^n \equiv \lambda x_0 \dots x_n. x_i$; эти термы называются селекторами. Перестановщик — это терм вида $\lambda x_1 \dots \dots x_n. x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_n}$, где σ — перестановка. Специальная группа перестановщиков определяется соотношением

$$P_n \equiv \lambda x_1 \dots x_n. \langle x_1, \dots, x_n \rangle \equiv \lambda x_1 \dots x_{n+1}. x_{n+1} x_1 \dots x_n.$$

10.3.6. ЛЕММА. (i) $\forall M \exists \pi (M^\pi \text{ готов})$.

(ii) $\forall M (\forall \alpha \in \text{BT}(M)) \exists \pi [M^\pi \text{ готов и } \exists * (M^\pi)_\alpha = (M_\alpha)^*]$.

(iii) Подстановка, нужная в (ii), делается только в головной переменной терма M (если M имеет г. н. ф.).

Доказательство. (i) Если M неразрешим, то берем $M^\pi = M$. Если M разрешим, то пусть $\lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_m$ — его (главная) г. н. ф. Положим

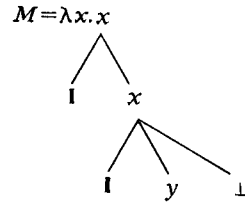
$$N^\pi \equiv \lambda x_1 \dots x_n [y := P_m] a,$$

где a — новая переменная. Тогда

$$M^\pi \equiv P_m M_1^* \dots M_m^* a = a M_1^* \dots M_m^*,$$

а этот терм готов.

(ii) [Конструкция, приведенная в (i), теперь недостаточна: она может перемешивать структуры поддеревьев M . Пусть, например



Тогда

$$\begin{aligned} M^\pi &= Mx[x := P_2]a = P_2 | (P_2 | y\Omega) a = \\ &= P_2 | (P_2 | y\Omega) a = a | (\Omega | y) = \end{aligned}$$

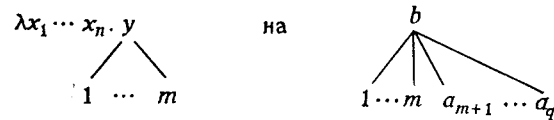
следовательно, $(M^\pi)_{(1,0)} \neq (M_{(1,0)})^*$. Ситуация снова тривиальна, если M неразрешим. В противном случае M имеет г.н.ф., которую мы запишем в виде $M = \lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_m$. Пусть $lh(\alpha) = k$, и пусть узлы дерева $BT(M)$ с длиной $\leq k$ имеют не более q наследников в дереве. Полагаем

$$M^\pi = Nx_1 \dots x_n [y := P_q] a_{m+1} \dots a_q b.$$

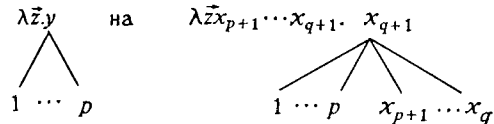
Тогда, так как

$$M^\pi = P_q M_1^* \dots M_m^* a_{m+1} \dots a_q b = b M_1^* \dots M_m^* a_{m+1} \dots a_q,$$

где $*$ $= [y := P_q]$, мы видим, что $BT^{k+1}(M^\pi)$ получается из $BT^{k+1}(M)$ заменой верхушки



а внутренних узлов (длины $\leq k$)



Очевидно, что M^π готов и $(M^\pi)_\alpha$ есть частный случай M_α , получаемый подстановкой $[y := P_q]$.

(iii) непосредственно очевидно. $\square$

10.3.7. Предложение (лемма о выворачивании по Бёму).

(i) $\forall M (\forall \alpha \in BT(M)) \exists \pi \exists * (M^\pi = (M_\alpha)^*)$.

(ii) Подстановка $(*)$ из п. (i) производится только вместо тех переменных из M_α , которые встречаются в качестве головных переменных в узлах $\beta < \alpha$.

(iii) Преобразование π из п. (i) обладает свойством

$$M^\pi \equiv M[x_1 := N_1] \dots [x_n := N_n] \vec{P}$$

для некоторых $\vec{N}, \vec{P}$, которые являются либо переменными, либо перестановщиками, либо селекторами, причем $\{x\}$ состоит из тех свободных переменных терма M , которые встречаются в качестве головных переменных в узлах $\beta < \alpha$ дерева $BT(M)$.

Доказательство. (i) Индукцией по $lh(\alpha)$ мы покажем, что

$$\forall M [\alpha \in BT(M) \Rightarrow \exists \pi * (M^\pi = (M_\alpha)^*)].$$

Если $\alpha = \langle \rangle$, т. е. $M_\alpha \equiv M$, мы можем взять $\pi = id$. Допустим, что $\alpha = \langle j \rangle * \beta$. Применяя лемму 10.3.6, найдем подстановку π_0 , такую, что

$$(1) \quad M^{\pi_0} = x M_0 \dots M_m \text{ готов}$$

и для некоторой подстановки $*_0$

$$(2) \quad (M_\alpha)^{*}_0 = (M^{\pi_0})_\alpha = (M_j)_\beta.$$

Положим

$$(\)^{\pi_1} = (\) [x := U_j^*], \quad \pi_{10} = \pi_1 \circ \pi_0.$$

Тогда в силу (1) $M^{\pi_{10}} = (x M_1 \dots M_m)^{\pi_1} = M_j$. По предположению индукции в применении к узлу β имеем

$$\exists \pi_2 \exists *_2 (M_j^{\pi_2} = ((M_j)_\beta)^{*}_2).$$

Следовательно, в силу (2) получаем, что $(M_j)^{\pi_2} = M_\alpha^{*_*2}$. Полагаем $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_0$, и все в порядке.

(ii), (iii) непосредственно очевидны. $\square$

Без добавочного труда мы можем вывернуть по Бёму виртуальный узел дерева.

10.3.8. Следствие. $\forall M (\forall \alpha, \text{ виртуального в } BT(M)) \exists \pi \exists * (M^\pi = (M_\alpha)^*)$. Более того, π и $*$ можно выбрать так, чтобы они обладали свойствами из предложения 10.3.7(ii), (iii).

Доказательство проводится с помощью двух примеров.

(1) Пусть

$$M = \lambda x. x$$

и $\alpha = \langle 2 \rangle$.

Тогда можно найти M_α , изобразив η -расширение

$$M' \equiv \lambda x y. x.$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ x \quad x \quad y \end{array}$$

Чтобы вывернуть по Бёму узел α в M' , используем преобразование π , определенное соотношением

$$(\)^\pi = (\) xy [x := U_2^2].$$

Это π работает и для терма M :

$$M^\pi = U_2^2 U_2^2 U_2^2 y = y.$$

(2) Пусть M тот же, что в (1), и пусть $\alpha = \langle 2, 1 \rangle$. Берем

$$M' \equiv \lambda x y. x.$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ x \quad x \quad \lambda p q. y \\ \quad \quad \diagup \diagdown \\ \quad \quad p \quad q \end{array}$$

Полагаем $(\)^\pi = (\) xy [x := U_2^2] pq [y := U_1^1]$. Тогда $M^\pi = q$. $\square$

Предыдущее доказательство показывает, что в самом терме M не нужно делать никаких подстановок, если α виртуально находится в $BT(M)$.

Следующий результат взят из работы Барендрегта и др. [1976a]; он используется в теореме 20.2.6.

10.3.9. Следствие. Пусть $M \in \Lambda^0(x)$, $x \in FV(BT(M))$. Тогда для некоторых $\vec{P}, \vec{Q} \in \Lambda$, таких, что $x \notin FV(\vec{P})$, мы имеем

(i) $M\vec{P} = x\vec{Q}$;

(ii) в (i) можно потребовать, чтобы термы $\vec{P}$ были замкнуты и каждый из них имел вид U_i^n либо P_m .

Доказательство. (i) Пусть α — узел минимальной длины дерева $BT(M)$, такой, что x встречается в узле α в качестве свободной головной переменной (т. е. не связан ни в каком узле $\beta < \alpha$). Тогда $M_\alpha = \lambda y. x\vec{N}$. В силу предложений 10.3.7(i), (ii), (iii) имеем

$$M^\pi \equiv M\vec{P} = (\lambda y. x\vec{N})^* = \lambda y. x\vec{N}^*$$

для некоторых $\pi, *$. Поэтому $M\vec{P}y = x\vec{N}^*$, что и требовалось.

(ii) В силу предложения 10.3.7(iii) члены списка $\vec{P}y$ — это переменные $\equiv x$ или термы вида U_i^n или P_m . Подставляя в (i)

термы $1 \equiv U_0^0$ вместо переменных $\equiv x$, можно добиться того, чтобы $\vec{P} \in \Lambda^0$. $\square$

В следующем разделе техника выворачивания по Бёму будет применяться к нескольким термам одновременно. В дальнейшем буква $\mathcal{F}$ будет обозначать конечные последовательности термов (возможно, с повторениями), и мы будем писать $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\}$.

10.3.10. Определение. Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$ и $\alpha \in \text{Seq}$.

(i) Множество $\mathcal{A}$ *готово* (соответственно *λ -свободно*), если $(\forall M \in \mathcal{A}) M$ *готов* (соответственно *λ -свободен*).

(ii) преобразование π является *α - $\mathcal{A}$ -точным*, если

$$(\forall MN \in \mathcal{A}) ([M \sim_\alpha N \Leftrightarrow M^\pi \sim N^\pi] \wedge [M|\alpha \downarrow \Leftrightarrow M^\pi \text{ разрешим}]).$$

Преобразование π *$\mathcal{A}$ -точно*, если π является $\langle \rangle$ - $\mathcal{A}$ -точным.

(iii) Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда говорят, что M, N *согласованы вплоть до α* , если $(\forall \beta < \alpha) (M|\beta = N|\beta)$.

(iv) Множество $\mathcal{A}$ *согласовано вплоть до α* , если $(\forall MN \in \mathcal{A}) (M, N \text{ согласованы вплоть до } \alpha)$.

10.3.11. Лемма. Пусть $\mathcal{F}$ согласовано вплоть до α . Тогда для некоторого π

(1) $\mathcal{F}^\pi$ *готово*;

(2) $\mathcal{F}^\pi$ *согласовано вплоть до α* ;

$$(3) (\forall MN \in \mathcal{F}) [M \sim_\alpha N \Leftrightarrow M^\pi \sim_\alpha N^\pi].$$

Доказательство. Это утверждение получается из доказательства леммы 10.3.6(ii). Допустим, что $\alpha \neq \langle \rangle$ и что элементы множества $\mathcal{F}$ разрешимы (остальные случаи проще). Тогда для $M_i \in \mathcal{F}$ мы имеем $M_i = \lambda x. y N_{i1} \dots N_{im}$. Определим π с помощью равенства

$$(\)^\pi = (\)^x [y := P_q] a_1 \dots a_r,$$

где q, r достаточно велики (внимательный читатель без труда увидит, насколько велики они должны быть). Тогда $M_i^\pi = P_q M_{i1}^\pi a_1 \dots a_r$, а этот терм *готов*. Это устанавливает (1).

Чтобы доказать (2), допустим $\beta < \alpha$. Для терма $M \in \mathcal{F}$ дерево $BT(M^\pi)$ получается из $BT(M)$ изменениями (1) и (2) из доказательства леммы 10.3.6(ii). Пусть $M, N \in \mathcal{F}$. Тогда возможны три случая.

Случай 1. $M|\beta = N|\beta = \langle \lambda z. y', m \rangle$, $y' \neq y$. Тогда

$$M^\pi|\beta = N^\pi|\beta = \langle \lambda z. y', m \rangle.$$

Случай 2. $M|\beta = N|\beta = \langle \lambda \vec{z}.y, m \rangle$. Тогда

$$\lambda_1^\pi |\beta = N^\pi |\beta = \langle \lambda \vec{z}x_{m+1} \cdots x_{q+1}.x_{q+1}, q \rangle.$$

Случай 3. $M|\beta = N|\beta = \uparrow$. Тогда $M^\pi |\beta = N^\pi |\beta = \uparrow$.

Чтобы доказать (3), допустим, что $M, N \in \mathcal{F}$ и $M|\alpha, N|\alpha$ определены (остальные случаи проще). Если $M|\alpha \sim N|\alpha$, то, как и выше, $M^\pi |\alpha \sim N^\pi |\alpha$. Допустим, что $M \not\sim_\alpha N$, и покажем, что $M^\pi \not\sim_\alpha N^\pi$. Пусть

$$M|\alpha = \langle \lambda z_1 \cdots z_{n_1}.y_1, m_1 \rangle, \quad N|\alpha = \langle \lambda z_1 \cdots z_{n_2}.y_2, m_2 \rangle.$$

Случай 1. $y_1 \not\equiv y_2$. Тогда $M^\pi \not\sim_\alpha N^\pi$. (Рассмотрите подслучай $y_1 \not\equiv y, y_2 \not\equiv y$ и $y_1 \equiv y, y_2 \not\equiv y$.)

Случай 2. $y_1 \equiv y_2, n_1 - m_1 \neq n_2 - m_2$. Подслучай 2.1. $y_1 \equiv y_2 \not\equiv y$. Тогда $M^\pi |\alpha = M|\alpha$ и аналогичное равенство верно для N , так что $M^\pi \not\sim_\alpha N^\pi$. Подслучай 2.2. $y_1 \equiv y_2 \equiv y$. Тогда

$$M^\pi |\alpha = \langle \lambda z_1 \cdots z_{n_1}x_{m_1+1} \cdots x_{q+1}.x_{q+1}, q \rangle,$$

$$N^\pi |\alpha = \langle \lambda z_1 \cdots z_{n_2}x_{m_2+1} \cdots x_{q+1}.x_{q+1}, q \rangle$$

и, значит, $M^\pi \not\sim_\alpha N^\pi$, так как

$$n_1 + (q+1) - m_1 - q \neq n_2 + (q+1) - m_2 - q. \quad \square$$

В дальнейшем нам потребуется следующий результат.

10.3.12. ЛЕММА. (i) Пусть $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$. Положим $()^\pi = ()x$. Тогда если $x \notin \text{FV}(\mathcal{A})$, то π $\mathcal{A}$ -точно.

(ii) Пусть $\mathcal{A}_k = \{M \in \Lambda \mid \|M\| < k, M \text{ есть } \beta\eta\text{-н. ф.}\}$. Положим $()^\pi = () [x := P_k]$. Тогда

- (1) преобразование π $\mathcal{A}_k$ -точно;
- (2) $\mathcal{A}_k^\pi \subset NF$;
- (3) π инъективно на $\mathcal{A}_k$ (т. е. $M^\pi = N^\pi \Rightarrow M \equiv N$ для $M, N \in \mathcal{A}_k$).

Доказательство. (i) устанавливается легко.

(ii). Пункт (1) доказывается тем же методом, что и в лемме 10.3.11. Чтобы установить (2), докажем индукцией по глубине d дерева $\text{BT}(M)$, что

$$M \in \mathcal{A}_k \Rightarrow M^\pi \text{ имеет } \beta\eta\text{-н. ф.}$$

Пусть $d = 0$. Тогда $M = \lambda \vec{y}.z$, поэтому $M[x := P_k]$ имеет $\beta\eta$ -н. ф. как при $z \not\equiv x$, так и при $z \equiv x$.

Пусть $d > 0$. Тогда

$$\begin{array}{c} \text{BT}(M) = \lambda \vec{y}.z \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Delta_1 \quad \Delta_p \end{array}$$

Если $z \not\equiv x$, то

$$\begin{array}{c} \text{BT}(M^\pi) = \lambda \vec{y}.z \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Delta_1^\pi \quad \Delta_p^\pi \end{array}$$

и нужный результат следует из предположения индукции. Если z — это свободная переменная x , то

$$\begin{array}{c} \text{BT}(M^\pi) = \lambda \vec{y}.P_k = \lambda \vec{y}.z_{p+1} \cdots z_{k+1}.z_{k+1} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \Delta_1^\pi \quad \Delta_p^\pi \quad \quad \quad \Delta_1^\pi \cdots \Delta_p^\pi \quad z_{p+1} \cdots z_k \end{array}$$

так как $k > \|M\| > p$, и нужный результат снова следует из предположения индукции.

Чтобы установить (3), заметим, что индукция по d показывает возможность восстановления $\text{BT}(M)$ по $\text{BT}(M^\pi)$ для $M \in \mathcal{A}_k$. [Отметим, что, так как M находится в $\beta\eta$ -н. ф., поддерево Δ_p^π дерева $\text{BT}(M^\pi)$ не равно последней переменной списка $\vec{y}$, и поэтому его можно проследить.] Следовательно, преобразование π инъективно на $\mathcal{A}_k$. $\square$

10.3.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Предположим, что $\mathcal{F}$ согласовано вплоть до α . Тогда существует α - $\mathcal{F}$ -точное преобразование π .

Доказательство проводится индукцией по $\text{lh}(\alpha)$. Если $\alpha = \langle \rangle$, берем $\pi = \text{id}$. В противном случае пусть $\alpha = \langle j \rangle * \beta$. По предположению имеем

$$(1) \quad (\forall MN \in \mathcal{F})(M|\langle \rangle = N|\langle \rangle).$$

Для упрощения записи допустим, что $\mathcal{F} = \{M, N\}$.

Случай 1. Термы M, N неразрешимы. Берем $\pi = \text{id}$.

Случай 2. Термы M, N разрешимы. В силу (1) для подходящего p

$$M = \lambda \vec{x}.y.M_1 \cdots M_p, \quad N = \lambda \vec{x}.y.N_1 \cdots N_p.$$

По лемме 10.3.11 найдется π_0 , такое что

$$(2) \quad \mathcal{F}^{\pi_0} \text{ готово,}$$

$$(3) \quad M \sim_\alpha N \Leftrightarrow M^{\pi_0} \sim_\alpha N^{\pi_0},$$

$$(4) \quad \mathcal{F}^{\pi_0} \text{ согласовано вплоть до } \alpha.$$

В силу (1), (2) для подходящего q

$$\mathcal{F}^{\pi_0} = \{aP_0 \cdots P_q, aQ_0 \cdots Q_q\}.$$

Полагаем $()^\pi = () [a := U^q]$. Тогда $\mathcal{F}^{\pi \circ \pi_0} = \{P_i, Q_i\}$.

Кроме того, в силу (4) множество $\mathcal{F}^{\pi_1 \circ \pi_0}$ согласовано вплоть до β . Поэтому в силу предположения индукции найдется $\beta\text{-}\mathcal{F}^{\pi_1 \circ \pi_0}$ -точное преобразование π_2 . Тогда

$$M \sim_{\alpha} N \Leftrightarrow a\vec{P} \sim_{\alpha} a\vec{Q} \text{ (в силу (3))} \Leftrightarrow P_I \sim_{\beta} Q_I \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_I^{\pi_2} \sim_{\beta} Q_I^{\pi_2} \Leftrightarrow M^{\pi} \sim N^{\pi},$$

где $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_0$. Поэтому это преобразование $\alpha\text{-}\mathcal{F}$ -точно. $\square$

10.4. Отделимость термов

Множество $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\}$ λ -термов называется *отделимым*, если его элементы можно отобразить на произвольные термы с помощью «определимой» функции.

Перед исследованием общего понятия отделимости будет рассмотрен случай $n = 2$. Следующий результат принадлежит Бёму [1968].

10.4.1. Лемма. (i) Пусть термы $M, N \in \Lambda$ разрешимы. Тогда

$$M \approx N \Rightarrow (\forall PQ \in \Lambda) \exists \pi [M^{\pi} = P \wedge N^{\pi} = Q].$$

(ii) Пусть M разрешим. Тогда

$$M \approx N \Rightarrow (\forall P \in \Lambda) \exists \pi [M^{\pi} = P \wedge N^{\pi} \text{ неразрешим}].$$

Доказательство. (i) По теореме 8.3.14 термы M, N имеют г.н.ф.

$$M = \lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_m, \quad N = \lambda x_1 \dots x_{n'}. y' N_1 \dots N_{m'}.$$

Допустим, что $M \approx N$. Тогда $y \neq y'$ или $n - m \neq n' - m'$.

Случай 1. $y \neq y'$. Допустим, что $n' \geq n$, тогда $n' = n + k$. Положим

$$(\)^{\pi_0} = (\) x_1 \dots x_{n+k}, \\ (\)^{\pi_1} = (\) [y := \lambda a_1 \dots a_{m+k}. P] [y' := \lambda a_1 \dots a_{m'}. Q]$$

и $\pi = \pi_1 \circ \pi_0$. Тогда

$$M^{\pi} = (y M_1 \dots M_m x_{n+1} \dots x_{n+k})^{\pi_1} = P, \\ N^{\pi} = (y' N_1 \dots N_{m'})^{\pi_1} = Q.$$

Случай 2. $y \equiv y'$ и $n - m \neq n' - m'$. Пусть $n' \geq n$. Положим

$$(\)^{\pi_0} = (\) x_1 \dots x_{n'}.$$

Тогда (используя очевидное обозначение $\xrightarrow{\pi}$) для подходящих термов L_i, L'_j получаем

$$M \xrightarrow{\pi_0} y M_1 \dots M_m x_{n+1} \dots x_{n'} \equiv y L_1 \dots L_p, \\ N \xrightarrow{\pi_0} y N_1 \dots N_{m'} \equiv y L'_1 \dots L'_{p'},$$

где $p = m' - n$ и $p' = m'$. Так как $p \neq p'$, имеем $p = p' + k$ (считая, что $p > p'$). Положим

$$(\)^{\pi_1} = (\) a b_1 \dots b_k, \\ (\)^{\pi_2} = (\) [y := \lambda z_1 \dots z_{p+1}. z_{p+1}].$$

Тогда имеем

$$y L_1 \dots L_p \xrightarrow{\pi_1} y L_1 \dots L_p a b_1 \dots b_k \xrightarrow{\pi_2} a b_1 \dots b_p, \\ y L'_1 \dots L'_{p'} \xrightarrow{\pi_1} y L'_1 \dots L'_{p'} a b_1 \dots b_k \xrightarrow{\pi_2} b_k.$$

Наконец, пусть

$$(\)^{\pi_3} = (\) [a := \lambda b_1 \dots b_k. P] [b_k := Q], \\ \pi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_0.$$

Тогда $M^{\pi} = P, N^{\pi} = Q$.

(ii) Снова имеем г.н.ф. $M = \lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_m$, и допустим, что N неразрешим. Положим

$$(\)^{\pi} = (\) x_1 \dots x_n [y := \lambda a_1 \dots a_m. P].$$

Тогда $M^{\pi} = P$, а N^{π} все еще неразрешим. $\square$

10.4.2. ТЕОРЕМА (Бём [1968]). Пусть M, N — различные $\beta\eta$ -н.ф. Тогда

(i) $\forall PQ \exists \pi [M^{\pi} = P \wedge N^{\pi} = Q]$;

(ii) если, кроме того, $M, N \in \Lambda^0$, то $\forall PQ \exists \vec{L} [M\vec{L} = P \wedge N\vec{L} = Q]$.

Доказательство. (i) По предположению $M \not\approx_{\eta} N$. Отсюда по теореме 10.2.31 получаем

$$M \not\approx_{\alpha} N \text{ (см. также упр. 10.6.9)}$$

для некоторого α . Пусть α — узел минимальной длины, удовлетворяющий этому условию. Тогда множество $\{M, N\}$ согласовано вплоть до α . Поэтому в силу предложения 10.3.13 для некоторого π_0

$$M^{\pi_0} \not\approx N^{\pi_0}.$$

Теперь применяем предыдущую лемму.

(ii) получается из (i), так как для любого π и замкнутого M имеет место равенство $M^{\pi} = M\vec{L}$. $\square$

Из предыдущего следует, что для термов, имеющих н.ф., $\lambda\beta\eta$ -исчисление полно по Гильберту — Посту. Это неверно для термов, не имеющих н.ф. См. гл. 16 и 17.

10.4.3. Следствие. (i) Пусть M, N — различные $\beta\eta$ -н.ф. Тогда равенство $M = N$ противоречит теории λ .

(ii) Если M, N — термы, имеющие н. ф., то равенство $M = N$ либо доказуемо в теории $\lambda\eta$, либо противоречит ей.

Доказательство. (i) Для заданных P, Q по предыдущей теореме имеется преобразование π , такое, что $M^\pi = P$, $N^\pi = Q$. Поэтому

$$\lambda + M = N \vdash P = M^\pi = N^\pi = Q,$$

откуда следует, что

в $\lambda + M = N$ выводимо любое равенство.

(ii) Если N, M имеют β -н. ф., то, сворачивая все η -редексы, мы получаем для них и $\beta\eta$ -н. ф. N', M' . Если $M' \equiv N'$, то $\lambda\eta \vdash M = N$. Если $M' \not\equiv N'$, то в силу (i) имеем

$$\neg \text{Con}(\lambda\eta + M = N). \quad \square$$

Теперь рассмотрим отделимость для λK -исчисления в общем случае. Формулировка и доказательство окончательного результата принадлежат Конпо и др. [1978].

10.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\}$ — множество λ -термов.

(i) Пусть $\mathcal{F} \subseteq \Lambda^0$; тогда $\mathcal{F}$ называется *отделимым*, если

$$(+)(\forall N_1 \dots N_p \in \Lambda) \exists (F \in \Lambda) (FM_1 = N_1 \wedge \dots \wedge FM_p = N_p).$$

(ii) Если $\mathcal{F} \subseteq \Lambda$ произвольно, то $\mathcal{F}$ *отделимо*, если его замыкание $\vec{\lambda x}.\mathcal{F} = \{\vec{\lambda x}.M_1, \dots, \vec{\lambda x}.M_p\}$ отделимо в смысле (i).

Можно определить η -отделимость, заменяя знак $=$ в условии (+) на $=_\eta$. В гл. 17 будет установлено, что

$$\mathcal{F} \text{ } \eta\text{-отделимо} \iff \mathcal{F} \text{ отделимо}.$$

В действительности это имеет место в гораздо более общей ситуации.

10.4.5. ЛЕММА. $\{M_1, \dots, M_p\} \subseteq \Lambda$ отделимо $\iff$

$$\iff \forall N_1 \dots N_p \exists C [\] (C[M_1] = N_1 \wedge \dots \wedge C[M_p] = N_p).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Допустим, что $F(\vec{\lambda x}.M_i) = N_i$. Берем $C[\] = F(\vec{\lambda x}.[\])$.

($\Leftarrow$) следует из леммы 2.1.20. $\square$

В оставшейся части этого пункта $\mathcal{F}$ обозначает произвольное конечное множество термов.

10.4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha \in \text{Seq}$. Скажем, что α *полезен* для $\mathcal{F}$, если

- (1) $(\forall M \in \mathcal{F}) M \downarrow \alpha$;
- (2) $(\exists MN \in \mathcal{F}) (M \approx_\alpha N)$.

Следующее понятие определяется индукцией по числу элементов множества $\mathcal{F}$.

10.4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathcal{F}$ *различно*, если оно одноэлементно или некоторый $\alpha \in \text{Seq}$ полезен для $\mathcal{F}$ и классы всех элементов $\mathcal{F}$ по отношению $\sim_\alpha$ различны.

Важные примеры различных множеств доставляются следующей леммой.

10.4.8. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{F}$ состоит из термов, имеющих различные $\beta\eta$ -н. ф. Тогда $\mathcal{F}$ различно.

Доказательство проводится индукцией по числу p элементов множества $\mathcal{F}$.

Случай $p = 1$ очевиден, поэтому предположим, что $p > 1$. Пусть $M, N \in \mathcal{F}$ имеют различные $\beta\eta$ -н. ф. Тогда $M \not\approx_\eta N$, следовательно, по теореме 10.2.31 $M \not\approx_\alpha N$ для некоторого α . Из того, что элементы множества $\mathcal{F}$ имеют н. ф., следует, что $(\forall L \in \mathcal{F}) L \downarrow \alpha$. Поэтому α полезен для $\mathcal{F}$. Из предположения индукции вытекает, что все классы эквивалентности по отношению $\sim_\alpha$ различны. Поэтому $\mathcal{F}$ различно. $\square$

Основной результат статьи Конпо и др. [1978] состоит в том, что в λK -исчислении

$$\mathcal{F} \text{ отделимо} \iff \mathcal{F} \text{ различно}.$$

В этом пункте будет доказана только импликация $\Leftarrow$, а доказательство обратной импликации будет отложено до § 14.

10.4.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathcal{F}$ *оригинально*, если $\mathcal{F}$ состоит из λ -свободных г. н. ф. и

$$(\forall MN \in \mathcal{F}) [M \not\approx N \Rightarrow M, N \text{ имеют различные головные переменные}].$$

10.4.10. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{F}$ состоит из разрешимых термов.

- (i) $\exists \pi (\pi \text{ } \mathcal{F}\text{-точно и } \mathcal{F}^\pi \text{ } \lambda\text{-свободно})$.
- (ii) $\exists \pi (\pi \text{ } \mathcal{F}\text{-точно и } \mathcal{F}^\pi \text{ оригинально})$.

Доказательство. Положим $()^\pi = ()_{x_1 \dots x_n}$, где переменные $\vec{x}$ новые, а n достаточно велико. Тогда преобразование π $\mathcal{F}$ -точно в силу следствия 10.3.12(i).

(ii) В силу (i) мы можем считать, что $\mathcal{F}$ λ -свободно. Пусть

$$\mathcal{F}_y = \{M \in \mathcal{F} \mid y \text{ — головная переменная (г. н. ф.) терма } M\}.$$

Если $M, N \in \mathcal{F}_y$, запишем их в виде $M = yM_1 \dots M_p$, $N = yN_1 \dots N_q$. Тогда $M \sim N \iff p = q$. Пусть

$$X(\mathcal{F}) = \{p \mid (\exists M \in \mathcal{F}) (M = yM_1 \dots M_p)\}$$

и $p = \max X(\mathcal{F})$. Определим теперь π_y следующим образом:

$$(\)^{\pi_y} = (\) a_1 \cdots a_{p+1} [y := P_p],$$

где $\vec{a}$ — новые переменные. Тогда множество $\mathcal{F}^{\pi_y}$ оригинально и π_y является $\mathcal{F}_y$ - и даже $\mathcal{F}$ -точным.

[Пример. Пусть $\mathcal{F}_y$ состоит из 4 элементов

$$yPP, yPQ, yPPP, yPPPP.$$

Тогда $\mathcal{F}^{\pi_y}$ есть

$$yPPa_1a_2a_3a_4a_5 [y := P_4] = a_3P^*P^*a_1a_2a_4a_5,$$

$$yPQa_1a_2a_3a_4a_5 [y := P_4] = a_3P^*Q^*a_1a_2a_4a_5,$$

$$yPPPa_1a_2a_3a_4a_5 [y := P_4] = a_2P^*P^*P^*a_1a_3a_4a_5,$$

$$yPPPPa_1a_2a_3a_4a_5 [y := P_4] = a_1P^*P^*P^*P^*a_2a_3a_4a_5.]$$

Последовательное выполнение таких бёмовских преобразований для каждой головной переменной z из $\mathcal{F}$ дает требуемое преобразование π . $\square$

10.4.11. Следствие. Пусть $\mathcal{F}$ состоит из разрешимых термов. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$ — разбиение множества $\mathcal{F}$ на классы $\sim$ -эквивалентности. Тогда

$$\forall N_1 \cdots N_q \exists \pi (\forall M \in \mathcal{F}_k) (M^\pi = N_k), \quad 1 \leq k \leq q.$$

Доказательство. Пусть дано множество $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\}$. В силу леммы можно считать, что $\mathcal{F}$ оригинально. Это означает, что для $1 \leq i, j \leq p$

$$M_i = y_i M_{i1} \cdots M_{im_i} \text{ и } M_i \sim M_j \Leftrightarrow y_i = y_j.$$

Пусть даны $N_1, \dots, N_q$. Определим π следующим образом:

$$[\]^\pi = [\] [y_{i_1} := \lambda x_1 \cdots x_{m_{i_1}}. N_1] \cdots [y_{i_q} := \lambda x_1 \cdots x_{m_{i_q}}. N_q],$$

где $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_q}\}$ — попарно различные головные переменные из $\mathcal{F}$. Тогда очевидно, что π искомое. [Пример. $\mathcal{F} = \{xPP, xPQ, yPP, zPQR\}$,

$$[\]^\pi = [\] [x := \lambda x_1 x_2. N_1] [y := \lambda x_1 x_2. N_2] [z := \lambda x_1 x_2 x_3. N_3].$$

Тогда $\mathcal{F}^\pi = \{N_1, N_1, N_2, N_3\}$. $\square$

10.4.12. Предложение. $\mathcal{F}$ различимо $\Rightarrow \mathcal{F}$ отделимо.

Доказательство проводится индукцией по $\text{Card}(\mathcal{F})$. Считаем, что $\text{Card}(\mathcal{F}) > 1$, так как иначе все тривиально.

По предположению некоторый α полезен для $\mathcal{F}$. Возьмем такой α с минимальной длиной. Тогда

$$(1) \quad (\exists MN \in \mathcal{F}) (M \not\sim_\alpha N),$$

$$(2) \quad (\forall M \in \mathcal{F}) (M \mid \alpha \downarrow),$$

$$(3) \quad (\forall \beta < \alpha) (\forall MN \in \mathcal{F}) (M \sim_\beta N).$$

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k$ — разбиение $\mathcal{F}$ на классы $\sim_\alpha$ -эквивалентности. В силу (1) $\text{Card}(\mathcal{F}_i) < \text{Card}(\mathcal{F})$, так что по предположению индукции каждое из множеств $\mathcal{F}_i$ при $1 \leq i \leq k$ различимо.

В силу предложения 10.3.13, а также (2) и (3) для некоторого π_1

$$(\forall MN \in \mathcal{F}) [M^{\pi_1} \sim N^{\pi_1} \Leftrightarrow M \sim_\alpha N] \wedge M^\pi \text{ разрешим.}$$

Утверждение. Для любых $F_1, \dots, F_k$ существует π , такое, что

$$(4) \quad (\forall M \in \mathcal{F}_i) (M^\pi = F_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Действительно, заметим, что $\mathcal{F}^{\pi_1} = \mathcal{F}_1^{\pi_1} \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k^{\pi_1}$ — разбиение множества $\mathcal{F}^{\pi_1}$ на классы $\sim$ -эквивалентности. Поэтому в силу следствия 10.4.11 для данных $F_1, \dots, F_k$ существует π_2 , такое, что

$$(5) \quad (\forall M \in \mathcal{F}_i^{\pi_1}) (M^{\pi_2} = F_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Положим теперь $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$. Тогда в силу (5)

$$(\forall M \in \mathcal{F}_i) (M^\pi = (M^{\pi_1})^{\pi_2} = F_i),$$

что и доказывает наше утверждение.

Пусть $\text{FV}(\mathcal{F}) \subset \{\vec{x}\}$. Для данных $F_1, \dots, F_k$ найдем преобразование π , такое, что верно (4). Положим

$$C[\] = C_\pi[\](\lambda \vec{x}. [\]),$$

где контекст $C_\pi[\]$ таков, что $\forall M (C_\pi[M] = M^\pi)$ (он существует по лемме 10.3.4). Тогда

$$(\forall M \in \mathcal{F}_i) C[M] = C_\pi[M](\lambda \vec{x}. M) = F_i(\lambda \vec{x}. M) \text{ (в силу (4)).}$$

Так как множества $\mathcal{F}_i$ отделимы, мы можем выбрать термы F_i , такие, что для всех $M \in \mathcal{F}_i$ терм $F_i(\lambda \vec{x}. M)$ равен наперед заданному значению. Поэтому $\mathcal{F}$ отделимо. $\square$

В гл. 14 будет доказана обратная импликация.

10.4.13. Теорема (Коппо и др. [1978]). Для λK -исчисления $\mathcal{F}$ отделимо $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ различимо.

Доказательство. Эта теорема следует из предложений 10.4.12 и 14.4.14. $\square$

10.4.14. Следствие. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\}$ — множество различных $\beta\eta$ -н. ф. Тогда $\mathcal{F}$ отделимо.

Доказательство получается ссылкой на лемму 10.4.8. $\square$

10.5. Отделимость в λI -исчислении

Понятие отделимости релятивизируется очевидным образом.

10.5.1. Определение. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\} \subseteq \Lambda_K$. Тогда $\mathcal{F}$ I -отделимо $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall L_1 \dots L_p \in \Lambda_I^0) (\exists F \in \Lambda_I) [FM_1 = L_1 \wedge \dots \wedge FM_p = L_p].$$

Ясно, что если множество $\mathcal{F} \subseteq \Lambda_I$ является I -отделимым, то $\mathcal{F} \subseteq \Lambda_I^0$: от свободных переменных не избавившись. Для множеств $\mathcal{F} \subseteq \Lambda_I^0$ можно полностью охарактеризовать отделимость.

10.5.2. Теорема. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\} \subseteq \Lambda_I^0$. Тогда $\mathcal{F}$ I -отделимо $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}$ состоит из термов, имеющих попарно различные $\beta\eta$ -н. ф.

Доказательство. ($\Rightarrow$) По предположению $(\exists F \in \Lambda_I) [FM_1 = \ulcorner 1 \urcorner \wedge \dots \wedge FM_p = \ulcorner p \urcorner]$ (цифры Чёрча). Значит, в силу следствия 9.1.6 все термы M_i имеют β -н. ф. Сворачивая все η -редексы, получаем, что все M_i имеют $\beta\eta$ -н. ф. Если M_i и M_j имеют одну и ту же $\beta\eta$ -н. ф., то $\lambda\eta \vdash \ulcorner i \urcorner = \ulcorner j \urcorner$, откуда $i = j$.

($\Leftarrow$) — это следующая теорема. $\square$

В действительности справедливо даже более сильное утверждение.

10.5.3. Теорема. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\} \subseteq \Lambda_K^0$ — множество различных $\beta\eta$ -н. ф. Тогда $\mathcal{F}$ I -отделимо.

Доказательство этой теоремы занимает оставшуюся часть настоящего пункта. $\square$

10.5.4. Определение. (i) Преобразование π называется I -разрешающим, если оно определено одним из следующих двух способов: либо $M^\pi = Mx$ для некоторого x , либо $M^\pi = M[x := N]$ для некоторого x и $N \in \Lambda_I$.

(ii) I -бёмовское преобразование — это композиция конечного числа I -разрешающих преобразований.

(iii) $\pi \in I$ означает, что π является I -бёмовским преобразованием.

10.5.5. Определение. (i) Различное нормальное множество (р.н.м.) — это конечное множество $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\}$, состоящее из термов, имеющих различные $\beta\eta$ -н. ф.

(ii) $\mathcal{F}$ пробегает р.н.м.

10.5.6. Определение. Если $M = \lambda x_1 \dots x_n y M_1 \dots M_m$, то аргументным числом терма M называется число $m - n$ (которое обозначается через $\#M$). Заметим, что для г.н.ф.

$M \sim N \Leftrightarrow M$ и N имеют одинаковые

головные переменные и $\#M = \#N$.

Кроме того,

$$\#(xM_1 \dots M_n) = n, \#(My) = \#(M) + 1, \#(\lambda x.M) = \#(M) - 1.$$

10.5.7. Определение. $\mathcal{F}_I^* = \{\pi \in I \mid \pi \text{ } \mathcal{F}\text{-точно и } \mathcal{F}^\pi \text{ есть р.н.м.}\}$.

10.5.8. Лемма. (i) Если $\pi \in \mathcal{F}_I^*$ и $\pi' \in (\mathcal{F}^\pi)_I^*$, то $\pi' \circ \pi \in \mathcal{F}_I^*$.

(ii) Пусть x — новая переменная. Положим $(\)^\pi = (\)x$. Тогда $\pi \in \mathcal{F}_I^*$.

Доказательство. (i) $\mathcal{F}$ есть р.н.м. $\Rightarrow \pi(\mathcal{F})$ есть р.н.м. $\Rightarrow \pi' \circ \pi(\mathcal{F})$ есть р.н.м. Далее, для $M, N \in \mathcal{F}$

$$\pi \circ \pi'(M) \sim \pi' \circ \pi(N) \Rightarrow \pi(M) \sim \pi(N) \Rightarrow M \sim N.$$

(ii) Очевидно, что $\pi \in I$. Кроме того,

(1) π $\mathcal{F}$ -точно. Это следует из леммы 10.3.12(i).

(2) $\mathcal{F}^\pi$ есть р.н.м. Очевидно, что $\mathcal{F}^\pi$ состоит из $\beta\eta$ -н.ф. Чтобы доказать, что они различны, предположим, что $Mx, M'x$ (такие, что $M, M' \in \mathcal{F}$, $M \neq M'$) имеют одну и ту же $\beta\eta$ -н.ф. Тогда и $\lambda x.Mx =_{\beta\eta} \lambda x.M'x$, а так как x — новая переменная, отсюда следует $M =_{\beta\eta} M'$ вопреки тому, что $\mathcal{F}$ есть р.н.м. [Именно в этом месте требуется, чтобы термы из р.н.м. имели различные η -н.ф. В противном случае, например, последовательность $\lambda x.zx$, z перешла бы в zx , zx .] $\square$

10.5.9. Следствие. $\forall \mathcal{F} (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (\mathcal{F}^\pi \text{ } \lambda\text{-свободно})$.

Доказательство. Возьмем $(\) = (\)x_1 \dots x_p$ с достаточно большим p . $\square$

10.5.10. Определение. (i) Блок в множестве $\mathcal{F}$ — это класс $\sim$ -эквивалентности элементов $\mathcal{F}$.

(ii) Головная переменная блока — это головная переменная любого из его элементов.

Напомним, что $\mathcal{F}$ называется оригинальным, если оно λ -свободно и различные блоки в $\mathcal{F}$ имеют различные головные переменные.

10.5.11. **Определение.** Пусть $\mathcal{B}$ есть λ -свободный блок (в некотором множестве $\mathcal{F}$). Запишем его в виде

$$\begin{aligned} M_1 &= yM_{11} \cdots M_{1m_1} \\ &\vdots \\ M_q &= yM_{q1} \cdots M_{qm_q}. \end{aligned}$$

Скажем, что $\mathcal{B}$ является x -прямым, если из того, что $x \in FV(M_{i_0})$ для некоторого M_{i_0} из данного блока, следует, что $x \equiv y$ и для всех $1 \leq i \leq q$ имеет место $M_{i_0} = x$.

10.5.12. **Примеры.** (i) Множества $y|x$ и $x|$ x -прямые.

$$\begin{array}{cc} ySxx & xS \\ y|x & x|x \text{ и } y|(xy)x \\ yxx & xSx \quad yS(xy)x \end{array}$$

не являются x -прямыми.

10.5.13. **Определение.** $\mathcal{F}$ *специально*, если

- (1) $\mathcal{F}$ оригинально,
- (2) если x — головная переменная некоторого блока в $\mathcal{F}$, то все блоки в $\mathcal{F}$ x -прямые.

Мы хотим теперь показать, что любое р.н.м. можно с помощью некоторого π перестроить в специальное множество.

10.5.14. **Обозначения.** (i) Напомним, что $P_k \equiv \lambda x_1 \cdots$

$$\cdots x_{k+1} \cdot x_{k+1} x_1 \cdots x_k.$$

- (ii) Если $M_1, \dots, M_p$ — последовательность термов, то через $M_1, \dots, \bar{M}_i, \dots, M_p$

обозначается последовательность $M_1, \dots, M_{i-1}, M_{i+1}, \dots, M_p$ для некоторого i , такого что $1 \leq i \leq p$.

- (iii) $\mathcal{A}_k = \{M \mid M \text{ есть } \beta\eta\text{-н. ф. } \wedge \|M\| < k\}$.

10.5.15. **Определение.** Пусть $\mathcal{F}$ есть λ -свободное р.н.м. Мультиблоком в $\mathcal{F}$ с головной переменной x называется множество

$$\mathcal{F}_x = \{M \in \mathcal{F} \mid x \text{ — головная переменная } M\}.$$

10.5.16. **Лемма.** Пусть $\mathcal{B}$ — мультиблок в некотором λ -свободном множестве $\mathcal{F}$. Тогда $(\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (\mathcal{B}^\pi \text{ специально})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &xM_{11}^1 \cdots M_{1m_1}^1 \\ &\vdots \\ &xM_{n_1 1}^1 \cdots M_{n_1 m_1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\boxed{xM_{11}^2 \cdots M_{1m_1}^2} \\ &\vdots \\ &\boxed{xM_{11}^k \cdots M_{1m_q}^k} \end{aligned}$$

где $m_1 < m_2 < \cdots < m_q$. Положим

$$(\)^\pi = (\) [x := P_k] z_1 \cdots z_{k+1},$$

где $k > \|M\|$ для всех $M \in \mathcal{F}$, и $\vec{z}$ — новые переменные.

Сначала покажем, что $\mathcal{B}^\pi$ специально. Пусть $M \in \mathcal{B}$, $M = xM_1 \cdots M_m$. Тогда

$$M^\pi = z_{k+1-m} M_1^* \cdots M_m^* z_1 \cdots z_{k+1-m} \cdots z_{k+1},$$

где $M_i^* = M_i [x := P_k]$. Следовательно, $\mathcal{B}^\pi$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\boxed{z_{k+1-m_1} M_{11}^{1*} \cdots M_{1m_1}^{1*} z_1 \cdots z_{k+1-m_1} \cdots z_{k+1}} \\ &\vdots \\ &\boxed{z_{k+1-m_q} M_{n_1 1}^1 \cdots M_{n_1 m_q}^1 z_1 \cdots z_{k+1-m_q} \cdots z_{k+1}} \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $\mathcal{B}^\pi$ оригинально. Так как переменные $\vec{z}$ новые, множество $\mathcal{B}^\pi$ также и специально.

Теперь будет показано, что $\pi \in \mathcal{F}_I^*$.

(1) Так как $P_k \in \Lambda_I^0$, то $\pi \in I$.

(2) По леммам 10.3.12 и 10.5.8 $\mathcal{F}^\pi$ есть р.н.м.

(3) Так как $k > \|M\|$ для $M \in \mathcal{F}$, мы имеем $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_k$, а значит, по леммам 10.3.12 и 10.5.8 преобразование π $\mathcal{F}$ -точно. $\square$

10.5.17. **Следствие.** $\forall \mathcal{F} (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (\mathcal{F}^\pi \text{ специально})$.

Доказательство. В силу следствия 10.5.9 можно считать, что $\mathcal{F}$ λ -свободно. Последовательное применение леммы 10.5.16 к различным мультиблокам $\mathcal{F}_x$ дает оригинальное р.н.м.

$\mathcal{F}^\pi$ для $\pi \in \mathcal{F}_I^*$. Пусть z — одна из головных переменных множества $\mathcal{F}^\pi$, которая подставлена вместо головной переменной x мультиблока $\mathcal{F}_x$. Тогда z -прямыми становятся не только блоки в $\mathcal{F}_x^\pi$, но и блоки в $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_x)^\pi$: ведь z — новая переменная. Поэтому $\mathcal{F}^\pi$ специально. $\square$

10.5.18. Определение. Множество $\mathcal{F}$ дискретно, если не все термы из $\mathcal{F}$ $\sim$ -эквивалентны.

Будет показано, что каждое $\mathcal{F}$ можно I -преобразовать в дискретное р.н.м. С этой целью строится алгоритм, который должен разбивать блоки. Чтобы установить, что этот алгоритм заканчивает работу, определяется натуральное число $d(M, N)$, указывающее глубину существенного различия между $\text{BT}(M)$ и $\text{BT}(N)$.

10.5.19. Определение. Пусть M, N имеют различные $\beta\eta$ -н.ф. Тогда $M \not\approx_\eta N$. Следовательно, по теореме 10.2.31 (см. также упр. 10.6.9) $M \approx_\alpha N$ для некоторого α . Полагаем

$$d(M, N) = \min \{ \text{lh}(\alpha) \mid M \approx_\alpha N \}.$$

10.5.20. Лемма. $\forall \mathcal{F} (\forall M \neq N \in \mathcal{F}) (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) [\mathcal{F}^\pi \text{ специально и } d(M^\pi, N^\pi) = d(M, N)]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ состоит из термов, имеющих различные $\beta\eta$ -н.ф. Бёмовское преобразование π называется $\mathcal{A}$ -консервативным, если $(\forall M \neq N \in \mathcal{A}) (d(M^\pi, N^\pi) = d(M, N))$. Мы покажем, что каждая компонента преобразования π , которое делает множество $\mathcal{F}$ специальным, консервативна на подходящей области, так что само π оказывается $\mathcal{F}$ -консервативным.

(1) Преобразование $()^{\pi_0} = ()_x$, очевидно, $\mathcal{A}$ -консервативно, если $x \notin \text{FV}(\mathcal{A})$. Следовательно, $\mathcal{F}$ -консервативно преобразование, которое делает р.н.м. $\mathcal{F}$ λ -свободным.

(2) Теперь будет показано, что преобразование $()^\pi = ()_{[x := \mathbf{P}_k]}$ является $\mathcal{A}$ -консервативным. Пусть $M, N \in \mathcal{A}_k$, $M \neq N$. Индукцией по $k = d(\text{BT}(M)) + d(\text{BT}(N))$ мы покажем, что $d(M_1^\pi, M_2^\pi) = d(M_1, M_2)$.

Базис индукции $k = 0$. В этом случае $M = \lambda y_1.z_1$, $N = \lambda y_2.z_2$. Если $d(M, N) = 0$, то $M \approx N$, откуда по лемме 10.3.12(ii) имеем $M^\pi \approx N^\pi$, т. е. $d(M^\pi, N^\pi) = 0$. Если $d(M, N) \neq 0$, то $M \sim N$, что в нашем случае влечет $M \equiv N$ вопреки предположению.

Индукционный переход $k > 0$. Если $d(M, N) = 0$, то снова $d(M^\pi, N^\pi) = 0$. Если $d(M, N) \neq 0$, то $M \sim N$. Мы можем считать, что M, N λ -свободны, и написать $M = y M_1 \dots M_m$, $N = y N_1 \dots N_m$.

Случай 1. $y \equiv x$. Тогда λ -свободные формы термов M^π , N^π имеют вид $z_{k+1} M_1^\pi \dots M_m^\pi z_{m+1} \dots z_k$, $z_{k+1} N_1^\pi \dots N_m^\pi z_{m+1} \dots z_k$ соответственно. Теперь получаем

$$\begin{aligned} d(M^\pi, N^\pi) &= \text{Max} \{ 1 + d(M_i^\pi, N_i^\pi) \mid 1 \leq i \leq m \} = \\ &= \text{Max} \{ 1 + d(M_i, N_i) \mid 1 \leq i \leq m \} \\ &= d(M, N). \end{aligned} \quad (\text{по предположению индукции}) =$$

Случай 2. $y \neq x$. Нужный результат получается аналогично.

10.5.21. Лемма. $(\forall M_1 \neq M_2 \in \mathcal{F}) [M_1 \sim M_2 \Rightarrow (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (d(M_1^\pi, M_2^\pi) < d(M_1, M_2))]$.

Доказательство. В силу леммы 10.5.20 можно считать, что множество $\mathcal{F}$ специально. Допустим, что $M_1 \neq M_2$, $M_1 \sim M_2$. Тогда M_1 и M_2 входят в один и тот же блок множества $\mathcal{F}$. Запишем этот блок в виде

$$\begin{aligned} M_1 &= x_1 M_{11} \dots M_{1m}, \\ M_2 &= x_1 M_{21} \dots M_{2m}, \\ &\dots \\ M_n &= x_1 M_{n1} \dots M_{nm}. \end{aligned}$$

Так как $M_1 \sim M_2$, то $d(M_1, M_2) > 0$, и потому для некоторого i_0 верно равенство

$$(1) \quad d(M_1, M_2) = d(M_{1i_0}, M_{2i_0}) + 1$$

и $M_{1i_0} \sim M_{2i_0}$. Для $1 \leq j \leq n$ пусть $M_{ji_0} = \lambda b_1 \dots b_{q_j} y_j L_{j1} \dots L_{jr_j}$, и положим $q = \max \{ q_1, \dots, q_n \}$. В силу соглашения о переменных можно считать, что $b_1, \dots, b_q$ не входят свободно в $\mathcal{F}$. Положим

$$\begin{aligned} F &\equiv \lambda a_1 \dots a_m b_1 \dots b_q a_{i_0} b_1 \dots b_p a_1 \dots a_{i_0} \dots a_m, \\ ()^\pi &= ()_{b_1 \dots b_q [x_1 := F]}. \end{aligned}$$

Сначала покажем, что $\pi \in \mathcal{F}_I^*$. Ясно, что $\pi \in I$. Пусть теперь $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\begin{array}{ll} x_1 M_{11} \dots M_{1i_0} \dots M_{1m} & M_{1i_0} = \lambda b_1 \dots b_{q_1} y_1 L_{11} \dots L_{1r_1} \\ \dots & \dots \\ x_1 M_{n1} \dots M_{ni_0} \dots M_{nm} & M_{ni_0} = \lambda b_1 \dots b_{q_n} y_n L_{n1} \dots L_{nr_n} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l}
 x_2 \cdots x_1 \text{ (возможно)} \cdots \\
 \cdots \\
 x_2 \cdots x_1 \text{ (возможно)} \\
 \cdots \\
 \cdots \\
 \cdots \\
 \hline
 x_k \cdots \\
 \cdots \\
 x_k \cdots
 \end{array}$$

Так как $\mathcal{F}$ специально, переменная x_1 активно входит только в первый блок. Поэтому $\mathcal{F}^\pi$ имеет вид

$$\begin{array}{l}
 M_1^\pi = y_1 L_{11} \cdots L_{1r_1} b_{q_1+1} \cdots b_p M_{11} \cdots \hat{M}_{1i_0} \cdots M_{1m} \\
 M_2^\pi = y_2 L_{21} \cdots L_{2r_2} b_{q_2+1} \cdots b_p M_{21} \cdots \hat{M}_{2i_0} \cdots M_{2m} \\
 \cdots \\
 y_n L_{n1} \cdots L_{nr_n} b_{q_n+1} \cdots b_p M_{n1} \cdots \hat{M}_{ni_0} \cdots M_{nm}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{|l}
 x_2 \cdots F \text{ (возможно)} \cdots \vec{b} \\
 \cdots \\
 x_2 \cdots F \text{ (возможно)} \cdots \vec{b} \\
 \cdots \\
 \cdots \\
 \cdots \\
 \hline
 x_k \cdots \vec{b} \\
 \cdots \\
 x_k \cdots \vec{b}
 \end{array}$$

Очевидно, что $\mathcal{F}^\pi$ состоит из термов, имеющих $\beta\eta$ -н. ф. Кроме того, переменные $\vec{y}$ отличны от всех переменных x . Если, например, $y_2 = x_2$, то, так как $\mathcal{F}$ специально, мы получили бы, что $y_2 = M_{1i_0} = M_{2i_1}$ вопреки выбору i_0 . Отсюда следует, что преобразование π $\mathcal{F}$ -точно. Чтобы доказать, что $\mathcal{F}^\pi$ — р.н.м., нам осталось только показать, что π -образ каждого отдельного блока

множества $\mathcal{F}$ состоит из термов, имеющих различные $\beta\eta$ -н. ф. Для первого блока это верно потому, что любой терм может быть восстановлен по своему образу. Другие блоки также остаются р.н.м., так как возможная подстановка $[x_1 := F]$ ничего не портит (блоки x_1 -прямые). Таким образом, действительно $\pi \in \mathcal{F}_I^*$.

Наконец, мы покажем, что $d(M_1^\pi, M_2^\pi) < d(M_1, M_2)$. Имеем $d(M_1^\pi, M_2^\pi) = 1 + d(L_{1j_0}, L_{2j_0})$ (для некоторого j_0) = $= d(M_{1i_0}, M_{2i_0}) < d(M_1, M_2)$ (в силу (1)). $\square$

10.5.22. Следствие.

$$\forall \mathcal{F} (\forall M_1 \neq M_2 \in \mathcal{F}) (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (M_1^\pi \not\sim M_2^\pi).$$

Доказательство. Если $M_1 \sim M_2$, то лемма дает преобразование $\pi_1 \in \mathcal{F}_I^*$, такое, что $d(M_1^{\pi_1}, M_2^{\pi_1}) < d(M_1, M_2)$. Если $M_1^{\pi_1} \sim M_2^{\pi_1}$, то все в порядке. В противном случае лемма снова применима. Так как величина $d(-, -)$ не может убывать бесконечно, мы получим в конце концов $M_1^\pi \not\sim M_2^\pi$. $\square$

10.5.23. Предложение. $\forall \mathcal{F} (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (\mathcal{F}^\pi \text{ дискретно})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ есть $\{M_1, \dots, M_p\}$. Применяя предыдущий результат не более чем p раз, можно найти подходящее π (используйте точность применяемых преобразований). $\square$

10.5.24. Определение. Р.н.м. $\mathcal{F}$ *регулярно*, если оно дискретно, специально и все свободные переменные из $\mathcal{F}$ являются головными переменными (хотя они и могут встречаться в разных местах).

Примеры. (i) Множество $\{x_1 | x_2 S, x_2 x_1 SS, x_3 x_1 x_2 K\}$ регулярно.

(ii) Множество $\{x_1 | S, x_2 S(x_1 I)\}$ не регулярно.

10.5.25. Лемма. $\forall \mathcal{F} (\exists \pi \in \mathcal{F}_I^*) (\mathcal{F}^\pi \text{ регулярно})$.

Доказательство. В силу предложения 10.5.23 и следствия 10.5.17 можно считать, что $\mathcal{F}$ дискретно и специально. Пусть $\{x_1, \dots, x_p\}$ — список головных переменных термов из $\mathcal{F}$, и пусть $\{y_1, \dots, y_m\} = FV(\mathcal{F}) - \{x_1, \dots, x_p\}$. Положим

$$(\)^{\pi_1} = (\) [y_1 := P_{k_1}],$$

где k_1 столь велико, что $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_{k_1}$. Тогда по лемме 10.3.12 $\pi_1 \in \mathcal{F}_I^*$ и $\mathcal{F}^{\pi_1}$ имеет меньше свободных неголовных переменных, чем $\mathcal{F}$. Продолжая выполнять такие же преобразования, мы получим в конце концов $\pi \in \mathcal{F}_I^*$, такое, что множество $\mathcal{F}^\pi$ регулярно. $\square$

10.5.26. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\}$, и пусть $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$. Тогда для некоторого $\pi \in I$ имеет место равенство $\mathcal{F}^\pi = \{\downarrow k_1, \dots, \downarrow k_p\}$.

Доказательство. В силу леммы 10.5.25 можно считать, что $\mathcal{F}$ регулярно. Запишем его в виде

$$\begin{array}{c} x_1 M_{11} \dots M_{1m_1} \\ \vdots \\ x_p M_{p1} \dots M_{pm_p} \end{array}$$

где либо $M_{ij} \in \Lambda^0$, либо $M_{ij} \in \{x_1, \dots, x_p\}$ для всех i, j , таких что $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m_i$.

По теореме 9.4.22 существует равномерное λ -решение $\vec{O} \in \text{SO}$ для тех из термов M_{ij} , которые замкнуты, т. е.

$$(1) \quad M_{ij} \in \Lambda^0 \Rightarrow M_{ij} \vec{O} = 1.$$

Добавляя, если нужно, некоторое количество 1, можно считать, что $\vec{O} = O_1, \dots, O_r$, где $r > m_i + 1$ для всех $i, 1 \leq i \leq p$. Теперь полагаем для $1 \leq i \leq p$

$$L_i = \lambda y_1 \dots y_{m_i} (y_1 \vec{O} \uparrow^q) \dots (y_{m_i} \vec{O} \uparrow^q) \downarrow k_{i1},$$

где q еще будет определено. Заметим, что

$$L_i \vec{O} \uparrow^q = (O_1 \vec{O} \uparrow^q) \dots (O_{m_i} \vec{O} \uparrow^q) \downarrow k_{i1} h O_{m_i+1} \dots O_r \uparrow^q.$$

По лемме 9.4.9(ii) имеется q_1 , такое, что SO-термы $O_i \vec{O}$ разрешаются термами $\uparrow^q$ для $q \geq q_1$, т. е. $O_i \vec{O} \uparrow^q = 1$. Тогда для $1 \leq i \leq p$

$$\begin{aligned} L_i \vec{O} \uparrow^q &= \downarrow k_{i1} O_{m_i+1} O_{m_i+2} \dots O_r \uparrow^q = \\ &= \begin{cases} O_{m_i+1}^{k_i} (O_{m_i+2} \dots O_r \uparrow^q), & \text{если } k_i \neq 0, \\ O_{m_i+1} \parallel O_{m_i+2} \dots O_r \uparrow^q & \text{в противном случае} \end{cases} \\ &= H_i \uparrow^q \end{aligned}$$

для некоторого SO-терма H_i , не зависящего от q . Снова применяя лемму 9.4.9(ii), найдем q_2 , такое, что из $q \geq q_2$ следует $H_i \uparrow^q = 1$ для всех $1 \leq i \leq p$. Теперь для $q = \max\{q_1, q_2\}$

$$(2) \quad L_i \vec{O} \uparrow^q = 1,$$

$$(3) \quad M_{ij} \vec{O} \uparrow^q = 1 \text{ для } M_{ij} \in \Lambda^0 \text{ в силу (1).}$$

Положим

$$(\)^\pi = (\) [x_1 := L_1] \dots [x_p := L_p]$$

(где число q из определения термов L_i есть $\max\{q_1, q_2\}$). Тогда $\pi \in I$ и $\mathcal{F}^\pi$ есть

$$\begin{array}{c} L_1 M_{11}^* \dots M_{1m_1}^* \\ \vdots \\ L_p M_{p1}^* \dots M_{pm_p}^* \end{array}$$

где

$$(4) \quad \text{либо } M_{ij}^* = M_{ij} \in \Lambda^0, \text{ либо } M_{ij}^* \in \{L_1, \dots, L_p\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M_i^\pi &= L_i M_{i1}^* \dots M_{im_i}^* = (M_{i1}^* \vec{O} \uparrow^q) \dots (M_{im_i}^* \vec{O} \uparrow^q) \downarrow k_{i1} = \\ &= \downarrow k_{i1} \text{ (в силу (4), (2) и (3)). } \quad \square \end{aligned}$$

10.5.27. ЛЕММА. Имеются термы $P, Q, E \in \Lambda_I^0(\vec{x})$, такие что $(\forall N_1 \dots N_p \in \Lambda_I^0(\vec{x})) \exists k_1 \dots k_p (\downarrow k_{i1} P Q E = N_i), 1 \leq i \leq p$.

Доказательство. Пусть $P = \lambda z. \langle z S^+ \rangle, Q = \langle \downarrow 0 \downarrow \rangle$ и $E = E_{I, \vec{x}}$, где S^+ есть функция следования для цифр Чёрча, а терм $E_{I, \vec{x}} \in \Lambda_I^0(\vec{x})$ со свойством

$$(\forall N \in \Lambda_I^0(\vec{x})) (\exists k \in \mathbb{N}) (E_{I, \vec{x}} \downarrow k + 1 = N)$$

построен в замечании 9.3.13.

Пусть теперь даны $N_1, \dots, N_p \in \Lambda_I^0(\vec{x})$. Найдем $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$, такие что $E_{I, \vec{x}} \downarrow k_i + 1 = N_i$. Заметим сначала, что $P^n(Q) = \langle \downarrow n \downarrow \rangle$. Тогда для $1 \leq i \leq p$

$$\downarrow k_i + 1 P Q E = P^{k_i+1}(Q) E = \langle \downarrow k_i + 1 \downarrow \rangle E = E_{I, \vec{x}} \downarrow k_i + 1 = N_i. \quad \square$$

Наконец-то обещанный результат:

10.5.28. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_p\} \subseteq \Lambda_K^0 - \text{р.н.м.}$

Тогда

$$(\forall N_1, \dots, N_p \in \Lambda_I^0(\vec{x})) (\exists \pi \in I) (\mathcal{F}^\pi = \{N_1, \dots, N_p\}).$$

Доказательство. Применяем леммы 10.5.26 и 10.5.27. $\square$

Глава 11

Фундаментальные теоремы

Как мы видели, редукция полезна при анализе конвертируемости. Для нескольких расширений $\mathcal{T}$ системы λ имеются понятия редукции R , соответствующие этим системам: $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow M =_R N$ и R обладает свойством Чёрча — Россера. Это дает анализ $\mathcal{T}$ в терминах теории доказательств: если M, N не имеют общего R -редукта, то $\mathcal{T} \not\vdash M = N$. В гл. 11 и 15 эти CR-свойства доказываются еще раз (по-новому) для β , а также и для других понятий редукции. В гл. 11 доказываются и другие важные теоремы о β -редукции (конечность разверток, консервативность над λI -исчислением, стандартизация).

В гл. 13 вводится понятие редукционной стратегии. Такие стратегии часто полезны в случаях, когда надо показать, что два терма не имеют общего редукта. Мы пользуемся тем, что из $x \notin FV(M)$ и

$$(1) \quad \forall N' [N \rightarrow_R N' \Rightarrow x \in FV(N')]$$

следует, что M, N не имеют общего R -редукта (так как переменные обычно не могут создаваться в процессе редукции). Чтобы установить (1), нужно изучить редукционный граф терма M , а он зачастую весьма запутан. Однако (1) верно, если оно выполняется на «кофинальном» редукционном пути в $G_R(M)$. Такой путь строится несколькими редукционными стратегиями.

В гл. 12 изучается эквивалентность редукций. Это понятие было введено Леви [1978] в связи с поиском оптимальных редукционных стратегий.

Глава 14 показывает, что λ -исчисление «локально сильно нормализуемо». У этого результата имеются различные приложения.

Дополнительную информацию о редукциях можно найти у Клопа [1980].

Редукция была введена для анализа β -конверсии. В части II мы уже привели несколько приложений теоремы Чёрча — Россера и теоремы о стандартизации. Эти и другие важные результаты о β -редукции будут доказаны в настоящей главе.

11.1. Теорема Чёрча — Россера

Имеется много различных доказательств теоремы Чёрча — Россера. В § 3.2 было дано короткое доказательство, принадлежащее Тейту и Мартин-Лефу. В настоящей главе будет изложено несколько более длинное, но более прозрачное доказательство. Сравнение этих двух доказательств будет проведено в § 11.2.

Чтобы доказать, что $\rightarrow$ (т. е. $\rightarrow_\beta$) обладает свойством ромба, было бы достаточно (в силу леммы 3.2.2) доказать, что этим свойством обладает $\Rightarrow$. Последнее, однако, не имеет места. Следующая лемма проливает некоторый свет на ситуацию.

11.1.1. Лемма. (i) Отношения $\rightarrow$ и $\Rightarrow$ не обладают свойством ромба.

(ii) Отношение $\rightarrow$ обладает слабым свойством ромба.

Доказательство. (i) Пусть соотношение $R \rightarrow R'$ есть $\Pi \rightarrow I$. Рассмотрим редукции

$$(\lambda x.xx)R \rightarrow RR, \quad (\lambda x.xx)R \rightarrow (\lambda x.xx)R'.$$

Общим редуктом был терм $R'R'$, но до него не добраться от RR за один шаг. Следовательно, отношение $\rightarrow$ (как и его рефлексивное замыкание) не обладает свойством ромба.

(ii) Допустим, что $M \rightarrow M_1$, $M \rightarrow M_2$, и построим M_3 , такой, что $M_1 \rightarrow M_3$, $M_2 \rightarrow M_3$. Пусть $(\Delta_i): M \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, причем $\Delta_i \equiv (\lambda x_i.P_i)Q_i$. Возможные относительные расположения редексов Δ_1 и Δ_2 в M приведены в следующей таблице:

(1) $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ (т. е. Δ_1, Δ_2 дизъюнкты)	
(2) $\Delta_1 = \Delta_2$	
(3) $\Delta_1 \subset \Delta_2$	3.1. $\Delta_1 \subset P_2$
	3.2. $\Delta_1 \subset Q_2$
(4) $\Delta_2 \subset \Delta_1$	4.1. $\Delta_2 \subset P_1$
	4.2. $\Delta_2 \subset Q_1$

Пусть $\Delta'_i \equiv P_i[x_i := Q_i]$.

Случай 1. Имеем

$$M \equiv \dots \Delta_1 \dots \Delta_2 \dots,$$

$$M_1 \equiv \dots \Delta'_1 \dots \Delta_2 \dots,$$

$$M_2 \equiv \dots \Delta_1 \dots \Delta'_2 \dots$$

Тогда берем

$$M_3 \equiv \dots \Delta'_1 \dots \Delta'_2 \dots$$

Случай 2. Имеем $M_1 \equiv M_2$, так что можно взять $M_3 \equiv M_1$.

Случай (3.1). Имеем $M \equiv \dots ((\lambda x_2. \dots \Delta_1 \dots) Q_2) \dots$, где $\dots \Delta_1 \dots \equiv P_2$,

$$M_1 \equiv \dots ((\lambda x_2. \dots \Delta'_1 \dots) Q_2) \dots,$$

$$M_2 \equiv \dots (\dots \Delta_1 \dots) [x_2 := Q_2] \dots$$

Берем

$$M_3 \equiv \dots (\dots \Delta'_1 \dots) [x_2 := Q_2] \dots$$

Тогда соотношения $M_1 \rightarrow M_3$ и $M_2 \rightarrow M_3$ очевидным образом следуют из подстановочности β -редукции.

Случай (3.2). Имеем $M \equiv \dots ((\lambda x_2. P_2) (\dots \Delta_1 \dots)) \dots$, где $\dots \Delta_1 \dots \equiv Q_2$,

$$M_1 \equiv \dots ((\lambda x_2. P_2) (\dots \Delta'_1 \dots)) \dots,$$

$$M_2 \equiv \dots (P_2[x_2 := (\dots \Delta_1 \dots)]) \dots$$

Берем

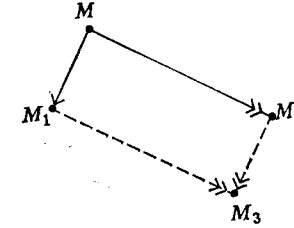
$$M_3 \equiv \dots (P_2[x_2 := (\dots \Delta'_1 \dots)]) \dots$$

и соотношения $M_1 \rightarrow M_3$ и $M_2 \rightarrow M_3$ очевидны в силу замечания 3.1.7(i).

Случаи (4.1) и (4.2) можно рассмотреть аналогично случаям (3.1) и (3.2). $\square$

Ввиду существования бесконечных редукционных цепочек, из леммы 11.1.1 не следует непосредственно, что β обладает свой-

ством CR, т. е. что $\rightarrow$ удовлетворяет лемме о ромбе (см. упр. 3.5.10). Свойство ромба для отношения $\rightarrow$ получается, однако, из следующей «леммы о полосе», которая усиливает лемму 11.1.1:



Идея доказательства этой леммы такова. Пусть $M \xrightarrow{\Delta} M_1$. Если мы будем следить за тем, что происходит в Δ во время редукции $M \rightarrow M_2$, то, сворачивая все «остатки» редекса Δ в M_2 , мы получим искомым редукт M_3 . Чтобы вести необходимую отчетность, удобно пометать некоторые редексы. Для этого достаточно присвоить индекс первому λ -символу такого редекса. (В целях некоторых дальнейших приложений мы будем разрешать несколько индексов.) Поэтому вводится следующее вспомогательное расширение множества Λ .

11.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Λ' — множество слов в следующем алфавите:

$v_0, v_1, \dots$ — переменные,

$\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \dots$ — ламбды,

$(,)$ — скобки.

(ii) Множество Λ' вводится следующим индуктивным определением:

$$x \in \Lambda',$$

$$M \in \Lambda' \Rightarrow (\lambda x. M) \in \Lambda',$$

$$M, N \in \Lambda' \Rightarrow (MN) \in \Lambda',$$

$$M, N \in \Lambda' \Rightarrow ((\lambda_i x. M) N) \in \Lambda' \text{ для всех } i \in \mathbb{N}$$

(где x обозначает произвольную переменную).

(iii) Если $M \in \Lambda'$, то терм $|M| \in \Lambda$ получается из M путем вычеркивания всех индексов. Например, $|(\lambda_1 x. x) ((\lambda_2 x. x) (\lambda x. x))| \equiv |(\lambda) (\lambda) (\lambda)| \equiv I(II)$.

Элементы множества Λ' называются λ' -термами. Мы используем для них те же соглашения, что и для λ -термов. Понятие редукции β следующим образом расширяется до понятия редукции β' на множестве Λ' .

11.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Подстановка определяется на Λ' очевидным образом. В частности,

$$((\lambda_i x.M)N)[z := L] \equiv (\lambda_i x.M[z := L])(N[z := L]).$$

(ii) Понятие редукции β' на Λ' определяется равенством $\beta' = \beta_0 \cup \beta_1$, где β_0 и β_1 определяются следующим правилом свертывания:

$$\beta_0: (\lambda_i x.M)N \rightarrow M[x := N],$$

$$\beta_1: (\lambda x.M)N \rightarrow M[x := N],$$

где $i \in \mathbb{N}$ и $M, N \in \Lambda'$.

(iii) Как указано в замечании 3.1.7(ii), понятие редукции β' порождает отношения $\rightarrow_{\beta'}$ и $\twoheadrightarrow_{\beta'}$ на множестве Λ' : $M \rightarrow_{\beta'} N$ имеет место т. и т. т., когда для некоторого (индексированного) контекста $C[]$ с одной дырой и некоторой пары $(P, Q) \in \beta'$

$$M \equiv C[P] \text{ и } N \equiv C[Q].$$

$\twoheadrightarrow_{\beta'}$ — это рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\rightarrow_{\beta'}$.

В следующем пункте понятие редукции β_0 будет играть важную роль. В настоящем пункте множество Λ' и понятие β' можно было бы определить проще (используя ровно один индекс).

11.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda'$. Определим терм $\varphi(M) \in \Lambda$ индукцией по построению терма M :

$$\varphi(x) \equiv x,$$

$$\varphi(PQ) \equiv \varphi(P)\varphi(Q), \text{ если } P \neq \lambda_i x.P',$$

$$\varphi(\lambda x.P) \equiv \lambda x.\varphi(P),$$

$$\varphi((\lambda_i x.P)Q) \equiv \varphi(P)[x := \varphi(Q)].$$

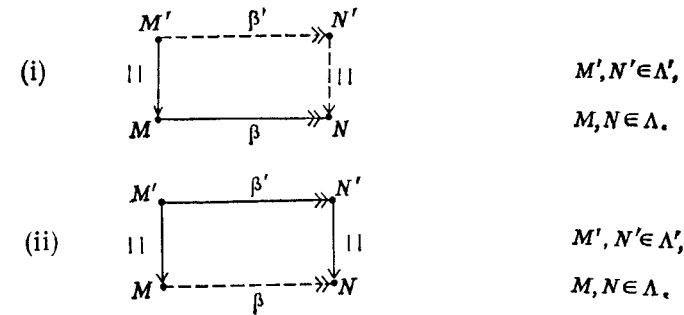
Иными словами, φ сворачивает все редексы, имеющие индекс (начиная изнутри; в п. 11.2 будет показано, что другие способы сворачивания всех индексированных редексов всегда приводят к одному и тому же результату).

11.1.5. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Соотношения $|M| \equiv N$ и $\varphi(M) \equiv N$ будут обозначаться соответственно через

$$M \xrightarrow{\uparrow} N \text{ и } M \xrightarrow{\varphi} N.$$

Это удобно для схематического представления утверждений.

11.1.6. ЛЕММА.

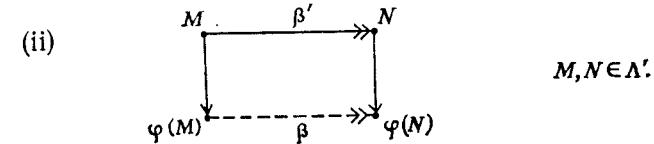


Доказательство. (i) Допустим сначала, что $M \twoheadrightarrow_{\beta} N$ — одношаговая редукция. Тогда N получается сворачиванием некоторого редекса в M , а N' можно получить сворачиванием соответствующего редекса в M' . Нужно утверждение в общем случае получается по транзитивности.

(ii) доказывается аналогично, но проще: нужно просто вычеркнуть все индексы из редукционной цепочки, ведущей от M' к N' . $\square$

11.1.7. ЛЕММА. (i) Пусть $M, N \in \Lambda'$. Тогда

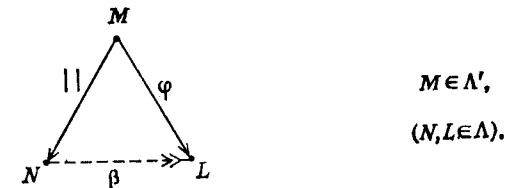
$$\varphi(M[x := N]) \equiv \varphi(M)[x := \varphi(N)].$$



Доказательство. (i) Воспользуемся индукцией по построению терма M , применяя лемму о подстановке в случае $M \equiv (\lambda_i y.P)Q$. Ввиду соглашения о переменных 2.1.13 можно считать, что условия леммы о подстановке выполнены.

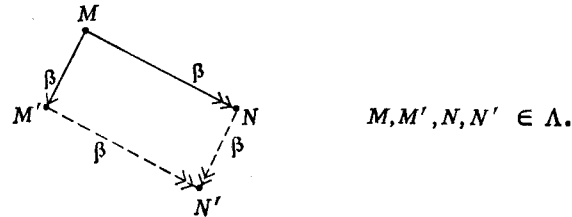
(ii) получается индукцией по порождению $\twoheadrightarrow_{\beta'}$ с использованием (i). $\square$

11.1.8. ЛЕММА.

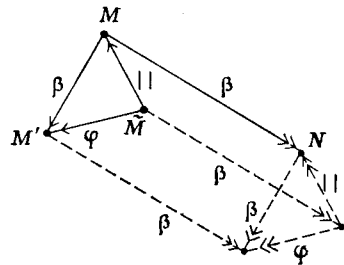


Доказательство проводится индукцией по построению терма M . $\square$

11.1.9. Лемма о полосе.

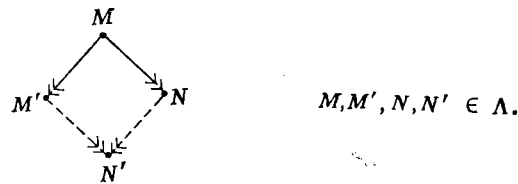


Доказательство. Пусть M' — результат сворачивания вхождения Δ редекса в M . Пусть $\bar{M} \in \Lambda'$ получен из M путем индексирования Δ (т. е. приписывания ему некоторого индекса). Тогда $|\bar{M}| \equiv M$ и $\varphi(\bar{M}) \equiv M'$. В силу лемм 11.1.6(i), 11.1.7(ii) и 11.1.8 мы можем составить следующую диаграмму:



которая и доказывает лемму о полосе. $\square$

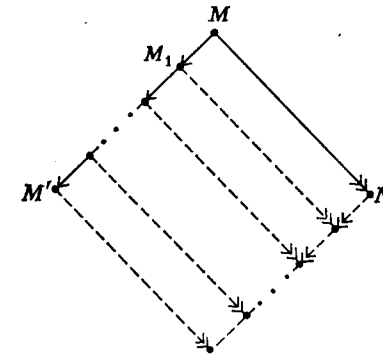
11.1.10. ТЕОРЕМА ЧЁРЧА — РОССЕРА. β обладает свойством CR, т. е.



Доказательство. Если $M \twoheadrightarrow M'$, то

$$M \equiv M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \equiv M'.$$

Поэтому свойство ромба следует из леммы о полосе и простого обхода диаграммы



В гл. 3 мы доказали, что $\beta\eta$ обладает свойством CR. Поучительно заметить, что доказательство, данное для β , не обобщается непосредственно на $\beta\eta$ (см. упр. 11.5.4).

11.2. Конечность разверток

Основная теорема этого пункта утверждает, что для любого $M \in \Lambda$ так называемые развертки (особый вид редукционных цепочек, начинающихся с M) всегда конечны. Эта теорема (обозначаемая через FD) имеет важные следствия, среди которых теорема Чёрча — Россера, консервативность ограниченной теории и теорема стандартизации.

FD была впервые доказана Чёрчем и Россером [1936] для λI -исчисления с целью доказать CR-теорему для этой теории. Для полного λ -исчисления FD была доказана Шроэром [1965] и независимо Хайландом [1973] и Хиндли [1978]. Приводимое ниже доказательство взято из работы Барендрегта и др. [1976] и представляет собой модификацию доказательства Хайланда.

Наша формулировка FD — это просто

$$\text{SN}(\beta_0).$$

Иными словами, редукции термов из Λ' , сворачивающие только индексированные редексы, всегда конечны. Часто эта теорема формулируется в терминах «остатков». Удобно ввести эту терминологию.

11.2.1. ЛЕММА (о проектировании). Пусть σ' есть β' -редукция, начинающаяся термом $M' \in \Lambda'$:

$$\sigma': M' \equiv M'_0 \xrightarrow{\beta'} M'_1 \xrightarrow{\beta'} \dots$$

Тогда последовательность

$$|\sigma'|: |M'| \equiv |M'_0| \xrightarrow{|\Delta'_0|} |M'_1| \xrightarrow{|\Delta'_1|} \dots$$

является β -редукцией, начинающейся с $|M'|$.

Доказательство очевидно — нужно просто стереть все индексы. $\square$

Следующий результат — усиление леммы 11.1.6(i).

11.2.2. Лемма (о подъеме). Пусть σ есть β -редукция, начинающаяся термом $M \in \Lambda$. Тогда для каждого $M' \in \Lambda'$, такого, что $|M'| \equiv M$, имеется β' -редукция σ' , начинающаяся с M' и такая, что $|\sigma'| \equiv \sigma$.

Доказательство очевидно: нужно приписать подходящие индексы термам, участвующим в редукции σ . $\square$

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество редексов, входящих в λ -терм M . Если мы интересуемся тем, что происходит с термами из $\mathcal{F}$ во время редукции, то мы можем поднять M в множество Λ' , индексируя редексы из множества $\mathcal{F}$.

11.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda$. Тогда запись $\Delta \in M$ означает, что Δ — вхождение редекса в M .

(ii) Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество вхождений редексов. Тогда запись $\mathcal{F} \subseteq M$ означает, что $(\forall \Delta \in \mathcal{F})(\Delta \in M)$.

(iii) Пусть $\mathcal{F} \subseteq M \in \Lambda$. Тогда через $(M, \mathcal{F}) \in \Lambda'$ обозначается индексированный терм, получаемый из M путем приписывания индекса 0 всем вхождениям редексов из $\mathcal{F}$. В этих обозначениях $M \in \Lambda$ отождествляется с термом $(M, \emptyset) \in \Lambda'$.

ПРИМЕР. Пусть $M \equiv (ly)(ly)(lz)$. Тогда в M имеется три вхождения редексов (первое и второе вхождения (ly) и вхождение (lz)). Пусть $\mathcal{F} = \{\text{второе } ly, lz\}$. Тогда $\mathcal{F} \subseteq M$ и $(M, \mathcal{F}) \equiv (\lambda x.x)y((\lambda_0 x.x)y)((\lambda_0 x.x)z)$.

11.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $\sigma: M \rightarrow N$.

(i) Пусть $\mathcal{F} \subseteq M$. Множество *остатков* (редексов из множества) $\mathcal{F}$ относительно σ (обозначаемое через $\mathcal{F}/\sigma$) определяется следующим образом.

Пусть $M' \equiv (M, \mathcal{F})$. Поднимая σ до $\sigma': M' \rightarrow N'$, получаем $|N'| \equiv N$, см. рис. 11.1. Очевидно, что β' -редукции не создают новых индексов, поэтому N' имеет в качестве индексов только 0 и, значит, $N' \equiv (N, \mathcal{F}')$ для некоторого $\mathcal{F}'$.

Теперь полагаем $\mathcal{F}/\sigma = \mathcal{F}'$.

(ii) Если $\Delta \in M$, то остатки Δ в N относительно σ — это элементы множества $\{\Delta\}/\sigma$, обозначаемого также через Δ/σ .

Остатки можно определить и для β' -редукций. Пусть $\mathcal{F}' \subseteq M' \xrightarrow{\sigma'} N'$. Тогда

$$\mathcal{F}'/\sigma' = \{\Delta' \in N' \mid |\Delta'| \in |\mathcal{F}'|/|\sigma'|\}.$$

Интуитивные основания, лежащие в основе определения остатков, таковы. Если дана редукция σ , мы помечаем некоторое множество редексов в исходном терме этой редукции и прослеживаем это множество во всей редукционной цепочке. Так

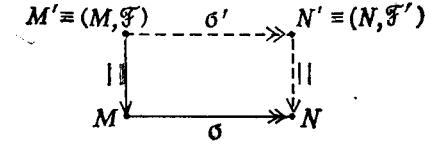


Рис. 11.1

как метки не затрагивают саму редукцию, приводимые ниже леммы 11.2.5, 11.2.6 и 11.2.8 очевидны.

11.2.5. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda$, $\sigma: M \rightarrow N$ и $\mathcal{F} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \subseteq M$. Тогда $\mathcal{F}/\sigma = \Delta_1/\sigma \cup \dots \cup \Delta_n/\sigma$. $\square$

11.2.6. ЛЕММА. Пусть $\sigma: M \rightarrow N$, $\tau: N \rightarrow L$ и $\mathcal{F} \subseteq M$. Тогда $\mathcal{F}/\sigma + \tau = \mathcal{F}/\sigma/\tau$. $\square$

В силу лемм 11.2.5 и 11.2.6 остатки в общем случае определяются остатками одного редекса относительно одношаговой редукции.

11.2.7. ПРИМЕРЫ. Пусть $\Delta \equiv (\lambda a.a(lx))(xb)$. Рассмотрим следующие одношаговые редукции:

- (i) $(\lambda x.xx) a \Delta \rightarrow a a \Delta$,
- (ii) $(\lambda x.xx) \Delta \rightarrow \Delta \Delta$,
- (iii) $(\lambda x.y) \Delta \rightarrow y$,
- (iv) $(\lambda x.x) \Delta \rightarrow (\lambda x.x)(xb(lx))$,
- (v) $(\lambda x.\Delta) P \rightarrow (\lambda a.a(lP))(Pb)$,
- (vi) $\Delta(\rightarrow \lambda a.ax)(xb)$.

В (i) остаток редекса Δ (относительно данной редукции) — это сам терм без изменений. В (ii) Δ имеет два остатка. В (iii) и (iv) Δ не имеет остатков. В (v) остатком Δ является $\Delta[x := P]$. В (vi) остатком Δ является $(\lambda a.ax)(xb)$.

Следующая лемма показывает, что можно одновременно находить остатки нескольких редексов, если дать им различные индексы и проследивать эти индексированные редексы.

11.2.8. ЛЕММА. Пусть $\sigma': M' \rightarrow_{\beta'} N'$, $M', N' \in \Lambda'$ и $\sigma = |\sigma'|$. Положим для $P \in \Lambda'$

$$|P|_i = \{\Delta \mid \Delta \in P \text{ есть } i\text{-редекс}\}.$$

Тогда $|M'|_i / \sigma = |N'|_i$.

11.2.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\sigma: M \rightarrow N$, $M, N \in \Lambda$, и пусть $\Delta_0, \Delta_1 \in M$ — различные вхождения редексов. Тогда $(\Delta_0 / \sigma) \cap (\Delta_1 / \sigma) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть M' получается из M путем присписывания индекса i редексу Δ_i . Тогда нужный результат достигается путем подъема редукции σ . $\square$

Важно отметить, что Δ / σ зависит от σ , а не только от первого и последнего терма из σ .

11.2.10. ПРИМЕР (Леви). Рассмотрим $l(x) \rightarrow lx$. Эта одношаговая редукция может быть получена следующими двумя способами:

$$\sigma_1: l(x) \xrightarrow{l} lx, \quad \sigma_2: l(x) \xrightarrow{l(x)} lx.$$

Теперь $lx / \sigma_1 = \emptyset$, но $lx / \sigma_2 = \{lx\}$. Эта ситуация изучается в гл. 12.

Если $\mathcal{F} \subseteq M$ и мы имеем в виду какую-то определенную редукцию, начинающуюся с M , то можно говорить об «остатках редексов из $\mathcal{F}$ », не указывая этой редукционной цепочки.

11.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda$ и $\mathcal{F} \subseteq M$. Развертка индексированного терма $(M, \mathcal{F})$ — это редукционная цепочка

$$\sigma: M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots,$$

такая, что каждый редекс $\Delta_i \in M_i$ является остатком некоторого редекса из $\mathcal{F}$ (относительно $(\Delta_0) + \dots + (\Delta_{i-1})$).

(ii) Говорят, что редукционная цепочка $\sigma: M \rightarrow N$ является *полной разверткой* терма $(M, \mathcal{F})$, и пишут $\sigma: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{cpl}} N$, если σ есть развертка $(M, \mathcal{F})$ и $\mathcal{F} / \sigma = \emptyset$.

(iii) Развертка терма M — это развертка индексированного терма $(M, \mathcal{F}_M)$, где $\mathcal{F}_M$ — множество всех вхождений редексов в M .

(iv) $M \xrightarrow{\text{dev}} N$ означает, что N встречается в некоторой развертке терма M .

Развертки и β_0 -редукции соответствуют друг другу в следующем смысле.

11.2.12. ЛЕММА. σ есть развертка индексированного терма $(M, \mathcal{F})$ т. и т. т., когда она поднимается до редукционной цепочки σ' , начинающейся с $(M, \mathcal{F})$ и являющейся β_0 -редукцией.

Доказательство. Заметим, что σ сворачивает только остатки редексов из $\mathcal{F}$ т. и т. т., когда σ' сворачивает только индексированные редексы. $\square$

Теперь мы докажем, что все развертки конечны. В силу леммы 11.2.12 достаточно показать, что β_0 сильно нормализуема.

Чтобы приобрести некоторую интуицию, рассмотрим редукцию

$$(\lambda_0 x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_{\beta_0} (\lambda x.lx)(\lambda x.xx) \in \beta_0\text{-NF}.$$

Второе вхождение $(\lambda x.xx)$ не может иметь индекса, так как оно не является первой частью никакого редекса. Причина того, что β -редукции могут быть бесконечными, — в возможности «создания» новых редексов. Если сворачиваются только старые редексы (т. е. их остатки), редукция всегда обрывается. Именно это и будет теперь установлено.

Идея доказательства: каждому $M \in \Lambda'$ сопоставляется множество специальных норм (положительных целых чисел), такое, что

$M \rightarrow_{\beta} N \Rightarrow$ по каждой специальной норме для M можно найти строго меньшую норму для N .

Эти специальные нормы вводятся с помощью вспомогательной системы Λ'^* . Доказательство заканчивается теоремой 11.2.21.

11.2.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Λ'^* — множество взвешенных Λ' -термов — определяется следующим образом.

$x^n \in \Lambda'^*$ для любой переменной x и любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

$M \in \Lambda'^* \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda'^*$,

$M, N \in \Lambda'^* \Rightarrow (MN) \in \Lambda'^*$,

$M, N \in \Lambda'^* \Rightarrow ((\lambda_i x.M)N) \in \Lambda'^*$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Целые положительные числа, приписанные переменным, называются *весами*. Заметим, что взвешенными могут быть только переменные, не стоящие сразу после знака λ .

Каждый терм $M \in \Lambda'^*$ можно рассматривать как пару $M \equiv (M_0, I)$, где λ' -терм M_0 получается из M вычеркиванием всех весов, а I — *взвешивание*, т. е. отображение, сопоставляющее некоторое положительное целое число каждому вхождению переменной, не стоящему сразу за λ .

11.2.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Понятие редукции β_0 распространяется на Λ'^* следующим образом. Сначала определим подстановку на Λ'^* соотношением $x^n[x := N] \equiv N$ и обычными остальными правилами. Затем определим β_0^* правилом свертывания:

$$\beta_0^*: (\lambda_i x.M)N \rightarrow M[x := N] \text{ для } M, N \in \Lambda'^*.$$

β_0^* обычным образом порождает отношения $\rightarrow_{\beta_0^*}$ и $\twoheadrightarrow_{\beta_0^*}$.

Заметим, что при β_0^* -редукции, как и при β_0 -редукции, можно сворачивать только индексированные редексы.

11.2.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda'^*$. Для $N \subset M$ положим $\|N\|' =$ сумма весов, встречающихся в N .

Заметим, что $\|N\|' > 0$.

11.2.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \equiv (M_0, I) \in \Lambda'^*$. Взвешивание I называется *убывающим*, если для любого β_0^* -редекса $(\lambda_i x.P)Q$ из M

$$\|x\|' > \|Q\|' \text{ для всех вхождений } x \text{ в } P.$$

ПРИМЕР. Терм $(\lambda_i x.x^6 x^7)(\lambda x.x^2 x^3)$ имеет убывающее взвешивание, а терм $(\lambda_i x.x^4 x^7)(\lambda x.x^2 x^3)$ не имеет.

11.2.17. ЛЕММА. Любой терм $M \in \Lambda'$ имеет убывающее взвешивание.

Доказательство. Перенумеруем (начиная с номера 0) все вхождения переменных в M справа налево. Назначим n -му вхождению индекс 2^n . Пример: если $M \equiv xy((\lambda_i z.z)(xx))$, то в результате индексации получится

$$x^{16}y^8((\lambda_i z.z^4)(x^2x^1));$$

так как $2^n > 2^{n-1} + \dots + 2 + 1$, получилось убывающее взвешивание. $\square$

Понятие остатка осмысленно и для редукций термов из Λ'^* . Это понятие неформально используется в следующем доказательстве.

11.2.18. ЛЕММА. Пусть $M^* \equiv (M, I) \in \Lambda'^*$, взвешивание I убывающее и

$$M^* \rightarrow_{\beta_0}^* N^* \equiv (N, I').$$

Тогда (i) $\|M^*\|' > \|N^*\|'$;

(ii) I' — убывающее взвешивание.

Доказательство. Пусть $\Delta_1 \equiv (\lambda_i x_1.P_1)Q_1$ — редекс, сворачиваемый при редукции $M^* \rightarrow_{\beta_0}^* N^*$.

(i) Все вхождения x_1 в P_1 заменяются на Q_1 . Так как $\|x_1\|' > \|Q_1\|'$, это означает, что сумма весов уменьшается. Это верно и в случае, когда P_1 вообще не содержит x_1 , так как тогда исчезает Q_1 , а $\|Q_1\|' > 0$.

(ii) Чтобы проверить, что взвешивание I' убывающее, возьмем произвольный β_0^* -редекс $\Delta_0 \equiv (\lambda_j x_0.P_0)Q_0$ в N^* . Так как терм Δ_0 индексированный, он является остатком некоторого редекса Δ_2 из M^* , который мы запишем в виде $\Delta_2 \equiv (\lambda_j x_2.P_2)Q_2$.

Возможные относительные расположения Δ_1 и Δ_2 перечислены в таблице из леммы 11.1.1.

Нетривиальны только два из этих случаев, в которых нетрудно проверить, что для x_0 из P_0 имеет место $\|x_0\|' > \|Q_0\|'$.

Случай 3.2. $\Delta_1 \subset Q_2$. Тогда

$$\begin{array}{c} M^* \equiv \dots (\lambda_j x_2.P_2) \left[\dots ((\lambda_i x_1.P_1)Q_1) \dots \right]_2 \dots \\ \beta_0^* \downarrow \\ N^* \equiv \dots (\lambda_j x_2.P_2) \left[\dots P_1[x_1 := Q_1] \dots \right]_0 \dots \end{array}$$

где $\left[\dots \right]_2 \equiv Q_2$ и $(\lambda_j x_2.P_2) \left[\dots \right]_0 \equiv (\lambda_i x_0.P_0)Q_0$.

Так как M^* имеет убывающее взвешивание, мы получаем

$$(1) \quad \|(\lambda_i x_1.P_1)Q_1\|' > \|P_1[x_1 := Q_1]\|'$$

и для всех вхождений $x_2 (\equiv x_0)$ в $P_2 (\equiv P_0)$

$$(2) \quad \|x_2\|' > \|Q_2\|'.$$

Из (1) следует, что $\|Q_2\|' > \|Q_0\|'$, откуда в силу (2) $\|x_0\|' > \|Q_0\|'$.

Случай 4.1. $\Delta_2 \subset P_1$. Имеем

$$\begin{array}{c} M^* \equiv \dots \left(\lambda_i x_1. \left[\dots x_1 \dots ((\lambda_j x_2.P_2)Q_2) \dots \right]_1 \right) Q_1 \dots \\ \beta_0^* \downarrow \\ N^* \equiv \dots \left[\dots Q_1 \dots ((\lambda_j x_2.P_2[x_1 := Q_1])(Q_2[x_1 := Q_1])) \dots \right]_1 \dots \end{array}$$

где $\left[\dots \right]_1 \equiv P_1$ и $(\lambda_i x_0.P_0)Q_0 \equiv (\lambda_j x_2.P_2[x_1 := Q_1])(Q_2[x_1 := Q_1])$.

Так как M^* имеет убывающее взвешивание, то

$$(1) \quad \|x_1\|' > \|Q_1\|' \text{ для всех вхождений } x_1 \text{ в } P_1,$$

$$(2) \quad \|x_2\|' > \|Q_2\|' \text{ для всех вхождений } x_2 \text{ в } P_2.$$

Из (1) следует, что

$$\|Q_2\|' \geq \|Q_2[x_1 := Q_1]\|' \text{ (где } = \text{ имеет место, если } x_1 \notin \text{FV}(Q_2))$$

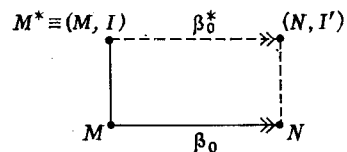
и потому из (2) получается, что

$$\|x_2\|' > \|Q_2[x_1 := Q_1]\|' \text{ для всех вхождений } x_2 \text{ в } P_2[x_1 := Q_1],$$

так как в силу соглашения о переменных можно считать, что x_2 не входит в Q_1 . $\square$

11.2.19. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda'$ и $M^* \equiv (M, I) \in \Lambda'^*$. Если $M \twoheadrightarrow_{\beta_0} N$, то для некоторого взвешивания I'

$$M^* \twoheadrightarrow_{\beta_0} N^* \equiv (N, I'):$$



Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 11.1.6(i), копируем редукцию $M \twoheadrightarrow_{\beta_0} N$ на взвешенных термах. $\square$

11.2.20. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Понятие редукции β_0 сильно нормализуемо на Λ' .

Доказательство. Предположим, что

$$\sigma: M \equiv M_0 \rightarrow_{\beta_0} M_1 \rightarrow_{\beta_0} \dots$$

есть β_0 -редукция, начинающаяся термом $M \in \Lambda'$. По лемме 11.2.17 для терма M имеется убывающее взвешивание I . Но тогда по лемме 11.2.19 σ индуцирует редукцию

$$\sigma^*: M^* \equiv (M_0, I) \rightarrow_{\beta_0} (M_1, I_1) \rightarrow_{\beta_0} \dots$$

По лемме 11.2.18 все взвешивания I_i убывающие. Поэтому снова по той же лемме

$$\|(M_0, I)\| > \|(M_1, I_1)\| > \dots$$

Значит, σ^* , а следовательно, и σ , должна быть конечной. $\square$

11.2.21. ТЕОРЕМА (FD: конечность разверток). Пусть $M \in \Lambda$. Тогда все развертки терма M конечны.

Доказательство. Применяем предложение 11.2.20 и лемму 11.2.12. $\square$

11.2.22. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $M \in \Lambda$. Тогда

- (i) для любого $\mathcal{F} \subseteq M$ любая развертка терма $(M, \mathcal{F})$ может быть продолжена до полной развертки;
- (ii) множество $\{M \mid M \xrightarrow{\text{dev}} N \text{ конечно}\}$.

Доказательство. (i) По предыдущей теореме у терма $(M, \mathcal{F})$ имеется развертка максимальной длины. Она — полная.

(ii) Любой терм имеет лишь конечное число одношаговых редуктов. Поэтому нужный результат следует из леммы Кёнига. (Доказательство теоремы позволяет вычислить границу для максимальной длины развертки терма M (см. упр. 11.5.8), поэтому

приведенное рассуждение может быть сделано конструктивным.) $\square$

Теперь будет доказано, что все полные развертки терма $(M, \mathcal{F})$ заканчиваются с одним и тем же результатом. Применительно к β_0 это означает, что β_0 -н. ф. единственна.

11.2.23. ЛЕММА. (i) β_0 обладает слабым свойством Чёрча — Россера.

(ii) Точнее, пусть $M, M_1, M_2 \in \Lambda'$ и

$$\sigma: M \xrightarrow{\Delta_1}_{\beta_0} M_1, \quad \tau: M \xrightarrow{\Delta_2}_{\beta_0} M_2.$$

Тогда имеются β_0 -редукции

$$\sigma': M_2 \twoheadrightarrow_{\beta_0} M_3, \quad \tau': M_1 \twoheadrightarrow_{\beta_0} M_3,$$

такие, что σ' (соответственно τ') получается сворачиванием остатков Δ_1/τ (соответственно Δ_2/σ) одного за другим слева направо.

(iii) Аналогичное утверждение для β' .

Доказательство. (i) устанавливается аналогично лемме 11.1.1(ii) (с проверкой согласованности индексов).

(ii) Это — просто информация, накопленная в процессе доказательства п. (i).

(iii) столь же просто. $\square$

11.2.24. СЛЕДСТВИЕ. (i) Понятие редукции β_0 на множестве Λ' обладает свойством Чёрча — Россера.

(ii) Каждый терм $M' \in \Lambda'$ имеет единственную β_0 -н. ф.

Доказательство. (i) получается из предыдущей леммы и предложений 11.2.20 и 3.1.25.

(ii) получается из (i), предложения 11.2.20 и следствия 3.1.13. $\square$

11.2.25. ТЕОРЕМА. (FD!) Пусть $M \in \Lambda$ и $\mathcal{F} \subseteq M$.

- (i) Все развертки терма M конечны.
- (ii) Любую развертку терма $(M, \mathcal{F})$ можно продолжить до полной развертки этого терма.
- (iii) Все полные развертки терма $(M, \mathcal{F})$ оканчиваются одним и тем же термом.

Доказательство. (i) и (ii) получаются из теоремы FD и ее следствия.

(iii) получается из следствия 11.2.24 и леммы 11.2.12. $\square$

Следствие 11.2.24(ii) позволяет нам дать следующее определение.

11.2.26. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M' \in \Lambda'$. Тогда $\text{Cpl}(M')$ обозначает единственную β_0 -н. ф. терма M' .

Это определение будет часто применяться в случае, когда $M' \equiv (M, \mathcal{F})$ для некоторого $\mathcal{F} \subseteq M$.

ПРИМЕРЫ. Пусть $M \equiv (\lambda x.x)((\lambda x.x) i)$, и пусть $\Delta_1 \equiv M$, $\Delta_2 \equiv (\lambda x.x) i$ — первый и второй редексы в M . Тогда

$$\text{Cpl}(M, \{\Delta_1, \Delta_2\}) = \Pi,$$

$$\text{Cpl}(M, \{\Delta_1\}) = (\lambda x.x) i,$$

$$\text{Cpl}(M, \{\Delta_2\}) = (\lambda x.x)(\Pi).$$

Теперь мы дадим другое доказательство теоремы Чёрча — Россера для β с использованием FD! . Этот метод неявно содержится у Карри и др. [1958].

11.2.27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $M, N \in \Lambda$ будем писать

$$M \xrightarrow{1} N,$$

если $\text{Cpl}(M, \mathcal{F}) = N$ для некоторого $\mathcal{F}$.

Здесь не возникает недоразумений с понятием $\xrightarrow{1}$ из определения 3.2.3: оба отношения совпадают — см. упр. 11.5.3.

ПРИМЕР. Пусть $\omega = \lambda x.xx$, и пусть R — некоторый редекс со сверткой R' . Тогда

$$\omega R \xrightarrow{1} RR, \quad \omega R \xrightarrow{1} R'R', \quad \omega R \xrightarrow{1} \omega R',$$

но не $\omega R \xrightarrow{1} RR'$.

11.2.28. ЛЕММА. (i) $\xrightarrow{\beta}$ — транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow{1}$.

(ii) Отношение $\xrightarrow{1}$ обладает свойством ромба.

Доказательство. (i) доказывается так же, как лемма 3.2.7.

(ii) Положим $M_3 = \text{Cpl}(M, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$. Тогда $M \xrightarrow{1} M_3$.

Соотношение $M \xrightarrow{1} M_1$ получается в результате (частичной) развертки терма $(M, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$. Поэтому, разворачивая полностью остатки редексов из $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ в M_1 (относительно данной редукции $M \xrightarrow{1} M_1$), мы получаем $M_1 \xrightarrow{1} M_3$ в силу FD! . Аналогично $M_2 \xrightarrow{1} M_3$, и получился ромб; см. рис. 11.2. $\square$

11.2.29. Следствие. β обладает свойством CR.

Доказательство получается ссылкой на леммы 11.2.28 и 3.2.2. $\square$

Доказательства теоремы Чёрча — Россера, данные в § 3.2 и § 11.1, родственны только что приведенному доказательству.

В § 3.2 используется отношение $\xrightarrow{1}$, совпадающее с отношением, определенным в настоящем пункте (см. упр. 11.5.3). Однако там не обязательно знать теорему FD! , так как возможно непосредственное индуктивное определение.

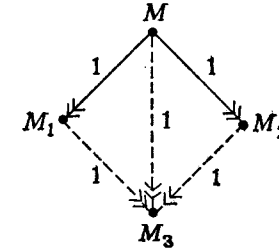


Рис. 11.2

В § 11.1 отображение $\phi: \Lambda' \rightarrow \Lambda$ таково, что $\phi(M, \mathcal{F}) = \text{Cpl}(M, \mathcal{F})$; см. упр. 11.5.1. Поэтому и доказательство, данное там, совпадает по существу с доказательством из настоящего пункта.

11.3. Теорема о консервативности для λI

В этом пункте будет доказана теорема 9.1.5, утверждающая, что для $M \in \Lambda_I$

M имеет н. ф. $\Rightarrow M$ сильно нормализуем.

Для $M \in \Lambda_K$ это неверно: терм $KI\Omega$ имеет н. ф., однако $\infty(KI\Omega)$. См. также пример 9.1.7.

Теорема о консервативности заимствована у Чёрча [1941]. Приводимое ниже доказательство принадлежит Барендрегту и др. [1976].

Пусть $\Lambda'_I = \{M \in \Lambda' \mid |M| \in \Lambda_I\}$.

11.3.1. ЛЕММА. Пусть терм $M \in \Lambda'_I$ содержит вхождения редексов Δ_1, Δ_2 , из которых индексировано только Δ_1 . Рассмотрим редукцию $M \xrightarrow{\Delta_1} N$. Тогда Δ_2 имеет хотя бы один остаток в N (который тоже не индексирован).

Доказательство. Так как $M \in \Lambda'_I$, то Δ_1 является I -редексом. Следовательно, единственный редекс, исчезающий (т. е. не имеющий остатка) в редукции $M \xrightarrow{\Delta_1} N$, — это Δ_1 . $\square$

Лемма 11.3.1, разумеется, ложна для $M \in \Lambda'_K$: достаточно рассмотреть $(\lambda_0 x.l)\Delta_2 \rightarrow l$.

11.3.2. Следствие. Пусть $M' \equiv (M, \mathcal{F}) \in \Lambda'_I$, и пусть $\sigma: M' \rightarrow_{\beta_0} N' \equiv (N, \mathcal{F}')$. Пусть Δ — вхождение редекса в M' , причем $\Delta \notin \mathcal{F}$. Тогда $\Delta/\sigma \neq \emptyset$.

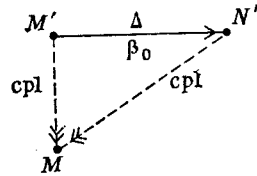
Доказательство. Пусть σ имеет вид

$$M' \rightarrow_{\beta_0} M'_1 \rightarrow_{\beta_0} \dots \rightarrow_{\beta_0} N'.$$

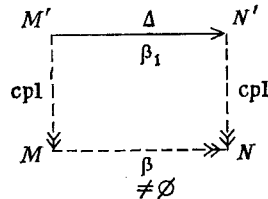
По лемме 11.3.1 редекс Δ имеет остаток Δ_1 в M'_1 (и этот остаток не индексирован), Δ_1 имеет остаток в M'_2 и т. д. Следовательно, по лемме 11.2.6 все доказано. $\square$

11.3.3. Лемма. Пусть $M' \equiv (M_0, \mathcal{F}) \in \Lambda'_I$ и $M' \xrightarrow{\Delta}_{\beta'} N'$.

(i) Если Δ есть β_0 -редекс, т. е. Δ индексирован, то



(ii) Если Δ есть β_1 -редекс, т. е. Δ не индексирован, то



Доказательство. (i). Пусть $M \equiv \text{Cpl}(M')$. Так как Δ индексирован, то $\Delta \in \mathcal{F}$, и потому $M' \xrightarrow{\Delta}_{\beta_0} N'$ есть (неполная) развертка терма M' . Следовательно, из FD! (теорема 11.2.25) следует, что также и $M \equiv \text{Cpl}(N')$.

(ii) Так как Δ не индексирован, то $\Delta \notin \mathcal{F}$. Заметим, что

$$M' \xrightarrow{\Delta}_{\beta_1} N' \xrightarrow{\text{cpl}} N$$

— полная развертка терма $M'' \equiv (M_0, \mathcal{F} \cup \{\Delta\})$. Следовательно, в силу FD! редукция $M' \xrightarrow{\text{cpl}} M$ может быть продолжена до полной развертки M'' в терм N . Поэтому $\sigma: M \xrightarrow{\beta} N$, где σ — полная развертка остатков редекса Δ в M (относительно некоторой редукции $M' \rightarrow M$). Поскольку в силу следствия 11.3.2 редекс Δ имеет по крайней мере один такой остаток, мы получаем $M \xrightarrow{\beta} N$. $\square$

11.3.4. ТЕОРЕМА КОНСЕРВАТИВНОСТИ (для λI). Пусть $M \in \Lambda_I$ и $M \rightarrow N$. Тогда $\infty(M) \Rightarrow \infty(N)$.

Доказательство. Допустим, что $M \rightarrow N$ получается сворачиванием редекса Δ . Пусть

$$\sigma: M \equiv M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots$$

— бесконечная редукция, начинающаяся термом M . Пусть $\mathcal{F} = \{\Delta\}$. В силу лемм 11.2.2 и 11.3.3 мы можем составить диа-

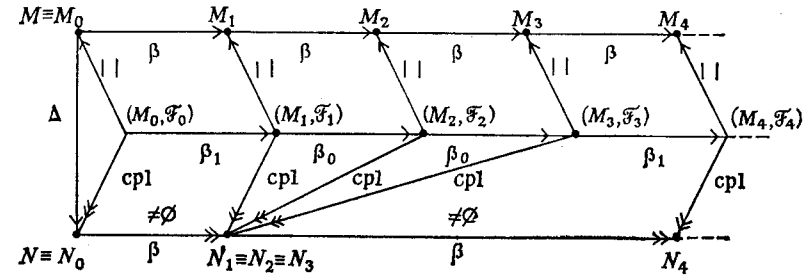


Рис. 11.3

грамму, приведенную на рис. 11.3. Остается показать, что

$$\zeta: N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots$$

— бесконечная редукция. По лемме 11.3.3 равенство $N_i \equiv N_{i+1}$ имеет место только в случае, когда редукция

$$(M_i, \mathcal{F}_i) \rightarrow_{\beta'} (M_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1})$$

является β_0 -редукцией.

Но в силу предложения 11.2.20 это может произойти подряд лишь конечное число раз. Поэтому ζ — бесконечная редукционная цепочка. $\square$

11.3.5. Следствие. Если терм $M \in \Lambda_I$ имеет н. ф., то он сильно нормализуем и граф $G(M)$ конечен.

Доказательство. Пусть $M \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow N$ — редукция терма M к н. ф. Из $\neg \infty(N)$ следует по теореме 11.3.4, что $\neg \infty(M)$, т. е. $\text{SN}(M)$. Отсюда следует по лемме Кёнига, что $G(M)$ конечен. $\square$

Теореме 11.3.4 можно придать формулировку, которая верна и для λK .

11.3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q \in \Lambda_K$. Тогда Δ называется I -редексом, если $x \in \text{FV}(P)$, и K -редексом в противном случае.

11.3.7. ТЕОРЕМА КОНСЕРВАТИВНОСТИ. Пусть $M, N \in \Lambda_K$ и $M \xrightarrow{\Delta} N$, где Δ есть I -редекс. Тогда $\infty(M) \Rightarrow \infty(N)$.

Доказательство. См. теорему 13.4.12. $\square$

В § 13.4 будет показано, что доказательство теоремы 11.3.4 нельзя непосредственно обобщить таким образом, чтобы получился результат 11.3.7.

11.4. Стандартизация

Теорема о стандартизации из книги Карри и др. [1958] — полезный результат, утверждающий, что $M \twoheadrightarrow N$ влечет существование «стандартной» редукции терма M к N .

Используя понятие остатка, определение стандартной редукции можно сформулировать следующим образом. Напомним, что вхождение Δ редекса в M находится левее редекса Δ' , если главный знак λ редекса Δ находится левее главного λ редекса Δ' .

11.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть дана редукция

$$\sigma: M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \xrightarrow{\Delta_2} \dots$$

Она называется *стандартной редукцией*, если $\forall i (\forall j < i) [\Delta_i$ не является остатком редекса, находящегося левее Δ_j (относительно данной редукции терма M_j к M_i)].

(ii) Мы пишем $M \twoheadrightarrow N$, если имеется стандартная редукция $\sigma: M \rightarrow N$.

Стандартные редукции производят свертывания слева направо, возможно, со скачками. Эту ситуацию можно описать также следующим образом.

«После каждого сворачивания редекса R следует индексировать λ -символы, находящиеся левее R . Редексы с индексированными λ в дальнейшем запрещается сворачивать. Индексированные лямбда-символы остаются индексированными после сворачивания других редексов».

Пример. Рассмотрим следующие редукции (сворачиваемые редексы подчеркнуты).

$$(i) \lambda a.(\lambda b.(\lambda c.c) \underline{bb}) d \rightarrow \lambda a.(\lambda b.\underline{bb}) d \rightarrow \lambda a.dd.$$

$$(ii) \lambda a.(\lambda b.(\lambda c.c) \underline{bb}) d \rightarrow \lambda a.(\lambda c.c) \underline{dd} \rightarrow \lambda a.dd.$$

Обе редукции имеют одинаковые начала и одинаковые концы. Первая нестандартна, вторая стандартна.

Заметим, что если редукция $\sigma = \rho + \tau$ стандартна, то стандартны τ и ρ , но не наоборот.

Теперь мы изложим доказательство теоремы стандартизации, принадлежащее Мичке [1979].

11.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda$ и дан редекс $\Delta \in M$. Тогда Δ называется *внутренним* (в M), если он не является головным редексом в M .

(ii) Пишем $M \xrightarrow{i} N$, если имеется редукция (так называемая *внутренняя редукция*)

$$\sigma: M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots \rightarrow M_n \equiv N,$$

такая что редекс Δ_i — внутренний в M_i для $0 \leq i < n$.

(iii) Пишем $M \xrightarrow{i,i} N$, если имеется редукция $\sigma: M \twoheadrightarrow N$, которая является одновременно полной редукцией для некоторого терма $(M, \mathcal{F})$, т. е. $\sigma: M \xrightarrow{i} N$.

Напомним, что $\xrightarrow{h}$ обозначает головную редукцию.

Примеры. Пусть $M \equiv \lambda x.(\lambda z.zz)(\lambda l(lx))$. Тогда λx и $\lambda l(lx)$ — внутренние редексы, а $(\lambda z.zz)(\lambda l(lx))$ — головной редекс. Имеем

$$M \xrightarrow{i} \lambda x.(\lambda z.zz)(\lambda l),$$

$$M \xrightarrow{i,i} \lambda x.(\lambda z.zz) x,$$

$$M \xrightarrow{h} \lambda x.(\lambda l(lx))(\lambda l(lx)),$$

$$M \xrightarrow{h} \lambda x.x(\lambda l(lx)),$$

$$M \xrightarrow{i} \lambda x.xx.$$

11.4.3. ЛЕММА. Пусть $\sigma: M \xrightarrow{\Delta} N$, где Δ — внутренний редекс в M .

(i) Если в N имеется головной редекс, то он имеется и в M .

(ii) Если Δ_h — головной редекс в M , то Δ_h/σ состоит в точности из одного элемента, который является головным редексом в N .

(iii) Если Δ_i — внутренний редекс в M , то все элементы множества Δ_i/σ — внутренние редексы в N .

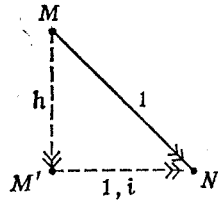
Доказательство. (i) Если M не имеет головного редекса, то M находится в г.н.ф., тогда и N находится в г.н.ф. вопреки предположению.

(ii) Припишем головному редексу Δ_h в терме M какой-нибудь индекс, например 0. Тогда при сворачивании внутренних

редексов этот редекс не будет ни уничтожаться, ни дублироваться. Очевидно, что 0-редекс все время остается головным редексом.

(iii) столь же просто. $\square$

11.4.4. ЛЕММА.

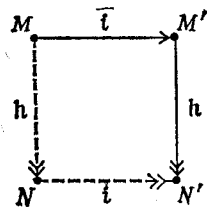


$M, M', N \in \Lambda$.

Доказательство. Пусть N — полный редукт терма $(M, \mathcal{F})$. Развернем теперь $(M, \mathcal{F})$ следующим образом. Во-первых, свернем последовательно все индексированные редексы, являющиеся головными редексами. Согласно FD, этот процесс оборвется на некотором терме M' . Затем дополним эту развертку, сворачивая оставшиеся внутренние индексированные редексы (т. е. остатки $\mathcal{F}$ в M'). Согласно FD!, это снова приводит к терму N . Очевидно, что $M \xrightarrow{h} M'$ и $M' \xrightarrow{1, i} N$. По лемме

11.4.3(iii) верно даже $M' \xrightarrow{1, i} M$. $\square$

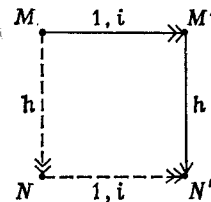
11.4.5. ЛЕММА.



$M, M', N, N' \in \Lambda$.

Доказательство. Сначала будет показано, что

(*)



Пусть M' — полный редукт некоторого терма $(M, \mathcal{F})$, где все элементы множества $\mathcal{F}$ — внутренние редексы. По лемме 11.4.3(i) терм M имеет головной редекс, который мы обозначим

через Δ . В силу 11.4.3(ii) редекс Δ имеет ровно один остаток Δ' в M' , причем $M' \xrightarrow{\Delta'} N'$. Следовательно,

$$M \xrightarrow{1, i} M' \xrightarrow{h} N'$$

— полная развертка терма $(M, \mathcal{F} \cup \{\Delta\})$. Пусть M_1 получается из M сворачиванием редекса Δ . В силу FD! полное сворачива-

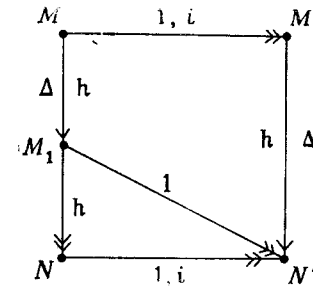


Рис. 11.4

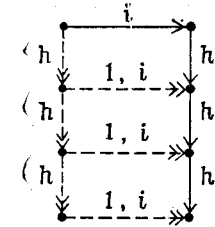
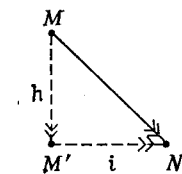


Рис. 11.5

ние всех остатков $\mathcal{F}$ в M_1 дает $M_1 \xrightarrow{1} N'$. Поэтому в силу леммы 11.4.4 имеем $\exists N (M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{1, i} N')$. Это доказывает (*) с помощью рис. 11.4.

Теперь, так как $M \xrightarrow{1} M' \Rightarrow M \xrightarrow{1, i} M'$, утверждение из нашей леммы получается из (*) и обхода диаграммы на рис. 11.5. $\square$

11.4.6. Основная лемма.



$M, N, M' \in \Lambda$

Доказательство. Любая редукция $M \xrightarrow{h} N$ имеет вид

$$M \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{h} M_3 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} N.$$

Она может быть перестроена в требуемую редукцию с помощью леммы 11.4.5 и обхода диаграммы на рис. 11.6.

Теперь мы можем доказать теорему стандартизации, принадлежащую Карри и др. [1958].

11.4.7. ТЕОРЕМА СТАНДАРТИЗАЦИИ. Если $M \xrightarrow{s} N$, то $M \xrightarrow{s} N$.

Доказательство проводится индукцией по длине термина N . В силу леммы 11.4.6

$$\exists Z (M \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{i} N).$$

Если N есть переменная x , то $Z \equiv x$ и все в порядке (так как головная редукция, очевидно, также и стандартная).

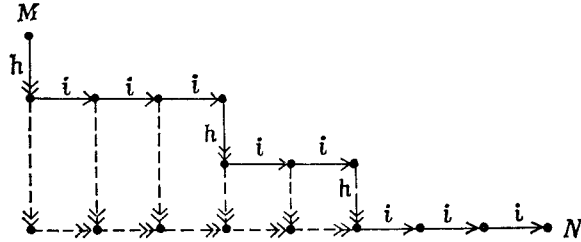


Рис. 11.6

Если $N \equiv \lambda x_0 \dots x_n. N_0 N_1 \dots N_m$, где $n + m > 0$, то Z должен иметь вид

$$Z \equiv \lambda x_0 \dots x_n. Z_0 Z_1 \dots Z_m,$$

где

$$Z_i \xrightarrow{i} N_i, \quad 0 \leq i \leq m.$$

По предположению индукции

$$\exists \sigma_i (\sigma_i: Z_i \xrightarrow{s} N_i), \quad 0 \leq i \leq m.$$

Пусть $\sigma: M \xrightarrow{h} Z$. Тогда

$$\sigma + \sigma_0 + \dots + \sigma_m: M \xrightarrow{s} N. \quad \square$$

11.4.8. Следствие. Терм M имеет г.н.ф. т. и т.т., когда его головная редукционная цепочка обрывается.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $M = \lambda \vec{x}. y \vec{M}$. По теореме CR имеем $M \xrightarrow{i} Z$, $\lambda \vec{x}. y \vec{M} \xrightarrow{i} Z$ для некоторого термина Z . Но тогда $Z \equiv \lambda \vec{x}. y \vec{N}$, где $M_i \xrightarrow{i} N_i$. Отсюда по теореме стандартизации получаем

$$(1) \quad M \xrightarrow{s} \lambda \vec{x}. y \vec{N}.$$

Пусть эта редукция имеет вид

$$M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots \rightarrow \lambda \vec{x}. y \vec{N}.$$

Если все Δ_i — головные редуксы, то (1) — обрывающаяся головная редукция. В противном случае пусть Δ_i — первый внут-

ренний редукс. Тогда M должен находиться в г.н.ф., так как иначе его головной редукс сохранился бы (редукция $M_i \rightarrow \lambda \vec{x}. y \vec{N}$ стандартна). Поэтому $M \xrightarrow{i} M_i$ — обрывающаяся головная редукция.

($\Leftarrow$) очевидно. $\square$

11.5. Упражнения

11.5.1. Пусть $(M, \mathcal{F}) \in \Lambda'$. Показать, что $\text{Cpl}(M, \mathcal{F}) = \varphi(M, \mathcal{F})$, где операция φ введена в определении 11.1.4.

11.5.2. Построить редукцию $\sigma: M \xrightarrow{i} N$, такую, что для некоторого редекса $\Delta \in M$ не все элементы множества Δ/σ дизъюнкты. Получить отсюда, что метод, примененный в упр. 7.4.13 для доказательства свойства Чёрча — Россера для ω , не распространяется на β .

11.5.3. Доказать, что отношения $\xrightarrow{i}$, определенные в 3.2.3 и 11.2.27, совпадают.

11.5.4. Показать, что доказательство свойства CR для β , данное в 11.1, не обобщается непосредственно на $\beta\eta$. [Указание. Рассмотрим $\lambda x(\lambda y.P)x$. Этот терм содержит β -редекс и является η -редексом. Если свернуть один из них, то другой исчезнет. Аналогично обстоит дело для термина $(\lambda x.Mx)N$.]

11.5.5. Сформулировать и доказать теорему о стандартизации и FD!-теорему для CL , а также теорему консервативности для CL .

11.5.6. (Шроэр). Пусть $\omega \equiv \lambda x.xx$ и $M \equiv (\lambda y.\omega y)(\lambda y.\omega y)$. Начертить $G(M)$. Для каких N имеет место $M \xrightarrow{i} N$?

11.5.7. Пусть $\omega \equiv \lambda x \lambda z.z(aax)$. Показать, что $\omega\omega x \xrightarrow{i} M$ влечет $x \in \text{FV}(M)$. [Указание. Рассмотреть стандартную редукцию минимальной длины.]

11.5.8. (i) Показать, что развертка термина M имеет длину $\leq 2^{\|M\|}$

(ii) Показать, что имеется вещественное число $\alpha > 0$ и термы $M_0, M_1, \dots$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n\| = \infty,$$

$$2^{\alpha \|M_n\|} \leq \text{максимальная длина развертки термина } M_n.$$

11.5.9 (С. Микали). Показать, что если $\Delta \in M$ и $\sigma: M \xrightarrow{i} N$ — развертка, то остатки термина Δ относительно σ — дизъюнкты подтермы термина N (ср. упр. 11.5.2).

Сильно эквивалентные редукции

В этой главе для редукций будет определено отношение $\cong$, называемое сильной эквивалентностью. С помощью этого понятия теорема стандартизации будет усилена следующим образом.

Для данной редукции $\sigma: M \rightarrow N$ имеется единственная стандартная редукция

$$\sigma_s: M \rightarrow N, \text{ такая, что } \sigma \cong \sigma_s.$$

Можно усилить теорему FD! и теорему Чёрча — Россера (CR).

(FD!+) Все полные развертки терма $(M, \mathcal{F})$ оканчиваются одним и тем же термом и сильно эквивалентны.

(CR⁺)

$$\sigma + \rho' \cong \rho + \sigma'$$

План этой главы таков. В § 12.1 определяется диаграмма двух редукций с общим началом. С помощью таких диаграмм в § 12.2 вводится эквивалентность $\cong$ и доказываются теоремы CR⁺ и FD!+. Наконец, в § 12.3 приводится усиление теоремы стандартизации.

12.1. Редукционные диаграммы

Пусть $\sigma: M \rightarrow N$ — редукция, а $\Delta \in M$ — вхождение редекса. Как отмечено в 11.2.10, множество остатков Δ/σ может зависеть от σ , а не только от M, N, Δ .

12.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Хиндли). Пусть $\sigma_i: M_i \rightarrow N_i$, $i = 1, 2$, — две редукции.

(i) Говорят, что σ_1, σ_2 (слабо) эквивалентны (и пишут $\sigma_1 \simeq \sigma_2$), если $M_1 \equiv M_2$ и $N_1 \equiv N_2$.

(ii) Говорят, что σ_1, σ_2 H -эквивалентны (и пишут $\sigma_1 \cong \sigma_2$), если $\sigma_1 \simeq \sigma_2$ и $(\forall \Delta \in M_1) (\Delta/\sigma_1 = \Delta/\sigma_2)$.

Ниже будет определено отношение эквивалентности $\cong$ на редукциях, более сильное, чем $\simeq$. Это понятие принадлежит Берри и Леви; см. Леви [1978], где приводятся также усиления теорем CR, FD! и теоремы стандартизации.

Мы приведем определение отношения $\cong$ через диаграммы, введенные у Клопа [1980] для этой цели. Диаграмма редукций $\sigma: M \rightarrow N_1$ и $\rho: M \rightarrow N_2$ получается в результате попытки найти общий редукт термов N_1 и N_2 путем непрерывного применения слабого свойства ромба.

12.1.1'. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть R — понятие редукции.

(i) Напомним, что запись $M \xrightarrow{\Delta}_R N$ означает, что N получается из M путем сворачивания R -редекса $\Delta \in M$. Это понятие расширяется до $M \xrightarrow{\Delta}_R N$, где Δ может быть и пустым редексом $\emptyset$. В этом случае $M \xrightarrow{\emptyset}_R M$ — пустая редукция, т. е. с M ничего не происходит и $N \equiv M$.

(ii) R -редукция — это последовательность

$$\sigma: M_0 \xrightarrow{\Delta_0}_R M_1 \xrightarrow{\Delta_1}_R \dots,$$

где каждый из Δ_i либо R -редекс, либо пуст. Если все Δ_i равны $\emptyset$, то и σ обозначается через $\emptyset$.

$\sigma: M \xrightarrow{\Delta}_R N$ называется *одношаговой R -редукцией*.

$\sigma: M \xrightarrow{\Delta}_R N$ означает, что σ есть R -редукция (от) M к N .

Как обычно, R не указывается в случае $R = \beta$. В оставшейся части этого пункта R будет обозначать β или β' , а множеством термов будет соответственно Λ или Λ' .

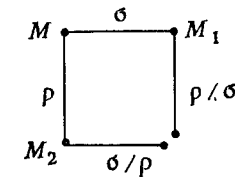


Рис. 12.1

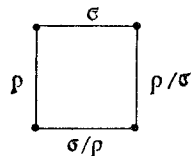
12.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\sigma: M \xrightarrow{\Delta_1}_R M_1$, $\rho: M \xrightarrow{\Delta_2}_R M_2$. Рассмотрим $\Delta_1/\rho \subset M_2$. Это — множество дизъюнктивных редексов. Определим σ/ρ как редукцию, которая начинается термом M_2 и получается путем последовательного (слева направо) сворачивания элементов множества Δ_1/ρ . Аналогичным образом определяется ρ/σ , см. рис. 12.1.

Если $\Delta_1 = \emptyset$, то $\Delta_1/\rho = \emptyset$ и, следовательно, $\sigma/\rho = \emptyset$. Однако $\sigma/\rho = \emptyset$ возможно и в других случаях — см. пример 12.1.5.

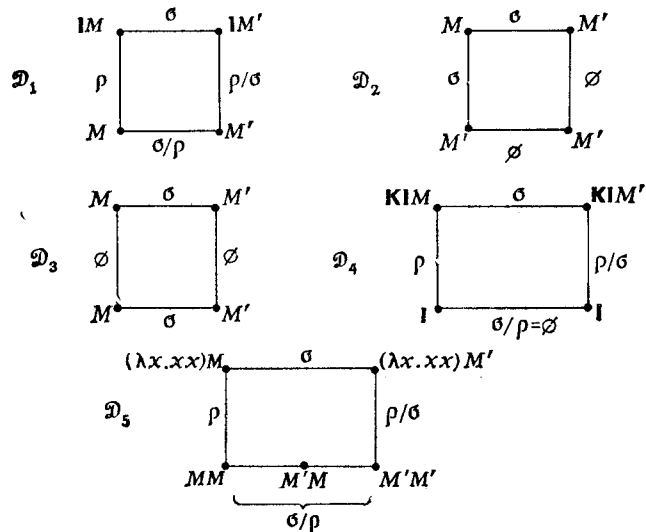
12.1.3. Лемма. Пусть σ, ρ — одношаговые R -редукции. Тогда σ/ρ и ρ/σ оканчиваются одним и тем же термом. Кроме того, $\sigma + \rho/\sigma \cong_n \rho + \sigma/\rho$.

Доказательство следует доказательству леммы 11.1.1(ii). (Для $R = \beta'$ нужно проследить соответствие индексов.) Оставшаяся часть следует из леммы 11.2.8. (Если это неясно, см. доказательство предложения 12.2.3(i).) $\square$

12.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть σ, ρ — две одношаговые R -редукции с общим началом. Тогда элементарная R -диаграмма (для) редукций σ, ρ — это



12.1.5. ПРИМЕРЫ. Пусть $M \rightarrow M'$ — одношаговая редукция. Тогда приводимые фигуры являются элементарными диаграммами.



Пример $\mathcal{D}_5$ показывает, что σ/ρ может быть редукцией сколь угодно большой длины. Описанные $=$ -редукции введены из-за примеров вроде $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_4$.

12.1.6. ЛЕММА. Пусть σ — одношаговая R -редукция.

- (i) $\sigma/\sigma = \emptyset$;
- (ii) $\sigma/\emptyset = \sigma$;
- (iii) $\emptyset/\sigma = \emptyset$.

Доказательство. См. примеры $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_4$. $\square$

12.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть σ/ρ — одна из сторон элементарной диаграммы. Говорят, что σ/ρ *расщепляется*, если она состоит более чем из одного шага редукции. Элементарная диаграмма *расщепляется*, если расщепляется одна из ее сторон.

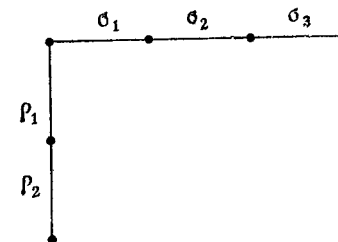
Диаграмма $\mathcal{D}_5$ в примере 12.1.5 расщепляется. Элементарная диаграмма не может расщепляться на более чем одной стороне — см. упр. 12.4.1.

Соглашение. Если элементарная диаграмма для σ, ρ расщепляется, мы будем изображать ее в виде

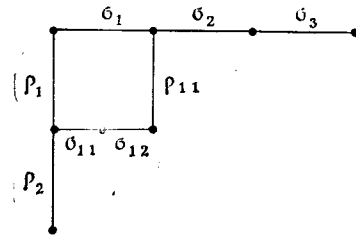


в зависимости от того, какая сторона расщепляется и на какое число одношаговых редукций.

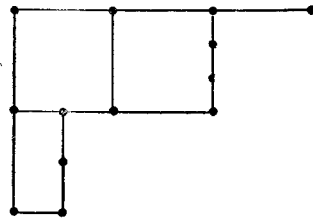
12.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны две R -редукции $\sigma: M \rightarrow_R M_1$ и $\rho: M \rightarrow_R M_2$ с общим началом. Расцепим σ и ρ на одношаговые R -редукции: $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ и $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_m$. Мы можем попытаться найти общий редукт термов M_1, M_2 , применяя элементарные диаграммы следующим образом. Начнем с ситуации



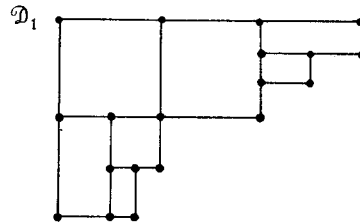
начертим элементарную диаграмму редукций σ_1 и ρ_1



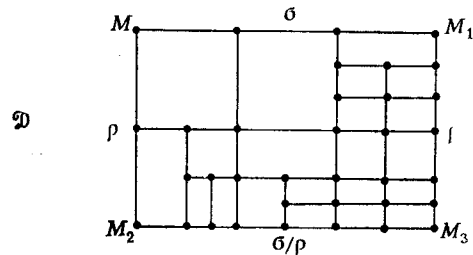
затем диаграммы для ρ_2 , σ_{11} и для ρ_{11} , σ_2



и т. д., так что через несколько шагов получится фигура вроде



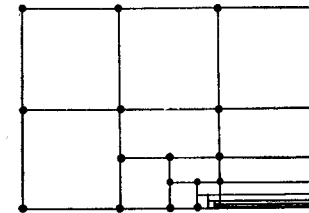
и т. д., и наконец, прямоугольник вида



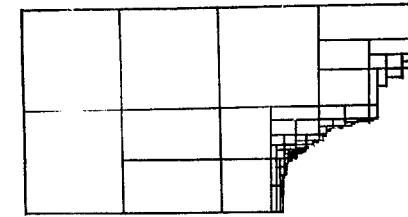
Фигура вида $\mathcal{D}$, если она существует, называется R -диаграммой (для редукций σ и ρ и обозначается через $\mathcal{D}_R(\sigma, \rho)$. Получаемые R -редукции $M_1 \xrightarrow{R} M_3$ и $M_2 \xrightarrow{R} M_3$ обозначаются соответственно через ρ/σ и σ/ρ . Фигура вида $\mathcal{D}_1$ назы-

вается *преддиаграммой* (для σ и ρ). $\mathcal{D}_\beta$ обозначается через $\mathcal{D}$, а $\mathcal{D}_{\beta'}$ — через $\mathcal{D}'$.

Сразу не очевидно, что $\mathcal{D}_R(\sigma, \rho)$ всегда существует. В принципе можно было бы представить себе, что могут появиться картины в стиле Эшера, вроде



или



Однако будет доказана теорема 12.1.4, утверждающая, что R -диаграммы всегда существуют для $R = \beta$ и $R = \beta'$. Для δ -редукций, описываемых в § 15.3, картины в стиле Эшера действительно появляются.

12.1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) (проектирование). Пусть $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\sigma', \rho')$ есть β' -диаграмма, а $|\mathcal{D}'|$ получается из $\mathcal{D}'$ стиранием всех индексов. Тогда существует $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho, \sigma)$, такая, что $\sigma = |\sigma'|$, $\rho = |\rho'|$ и $|\mathcal{D}'| = \mathcal{D}$.

(ii) (подъем). Пусть $\sigma: M \rightarrow M_1$, $\rho: M \rightarrow M_2$ и $M = |M'|$, где $M' \in \Lambda'$. Поднимем σ , ρ до σ' , ρ' , начинающихся с M' . Тогда существует $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\sigma', \rho')$ и $|\mathcal{D}'| = \mathcal{D}$.

Доказательство. (i) Для элементарных β' -диаграмм это очевидно. Общий случай получается путем обхода диаграмм.

(ii) получается аналогично. $\square$

12.1.10. ЛЕММА. (i) Пусть

$$\rho': M' \xrightarrow{\Delta} \beta_0 M'_1, \quad \sigma': M' \xrightarrow{\Delta} \beta' M'_2.$$

Тогда ρ'/σ' есть β_0 -редукция.

(ii) Пусть

$$\rho': M' \xrightarrow{\Delta} \beta_0 M'_1, \quad \sigma': M' \xrightarrow{\Delta} \beta' M'_2$$

и $\mathcal{D}'(\rho', \sigma')$ существует. Тогда ρ'/σ' является β_0 -редукцией.

Доказательство. (i) По предположению Δ — индексированный редекс. Следовательно, Δ/σ состоит из индексированных редексов (или пусто). Значит, ρ'/σ' является β_0 -редукцией по определению.

(ii) получается из (i) с помощью обхода диаграмм. $\square$

12.1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $=$ -редукция ρ , начинающаяся термом M , называется $=$ -разверткой M , если редукция ρ^- , получаемая из ρ вычеркиванием всех пустых шагов, является разверткой терма M .

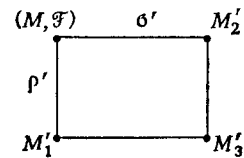
12.1.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\rho: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{dev}} M$ и $\sigma: M \rightarrow M_2$

Предположим, что существует $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho, \sigma)$. Тогда

(i) ρ/σ есть $=$ -развертка терма $(M_2, \mathcal{F}/\sigma)$;

(ii) если, кроме того, ρ — полная развертка терма $(M, \mathcal{F})$, то ρ/σ — полная $=$ -развертка терма $(M_2, \mathcal{F}/\sigma)$.

Доказательство. (i) Пусть $M' \equiv (M, \mathcal{F}) \in \Lambda'$. Поднятая диаграмму $\mathcal{D}$ до M' , получим следующую диаграмму $\mathcal{D}'$:



По лемме 11.2.12 ρ' является β_0 -редукцией. Следовательно, по лемме 12.1.10(ii) ρ'/σ' тоже β_0 -редукция. Очевидно, что $\rho/\sigma = |\rho'/\sigma'|$ — развертка терма $(M_2, \mathcal{F}/\sigma)$, так как $\mathcal{F}/\sigma = \{|\Delta'| \in M_2 \mid \Delta' \in M'_2 \text{ и } \Delta' \text{ индексирован}\}$.

(ii) Если теперь предположить, что $\rho: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{cpl}} M_1$, то $M'_1 \in \Lambda$. Следовательно, $M'_3 \in \Lambda$ и, значит, редукция ρ/σ — полная $=$ -развертка терма $(M_2, \mathcal{F}/\sigma)$. $\square$

Следующая лемма получается, хотя и не сразу, из FD.

12.1.13. ЛЕММА. Пусть σ, ρ — две $=$ -развертки терма M . Тогда существует $\mathcal{D}(\sigma, \rho)$ и $\sigma/\rho, \rho/\sigma$ также $=$ -развертки.

Доказательство проводится в несколько шагов.

(1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мультимножества — это подмножества $\mathbb{N}$, в которых каждый элемент k может встречаться более одного раза, т. е. с кратностью $m_k \in \mathbb{N}$. Говоря более формально, мультимножество $X \subseteq \mathbb{N}$ — это пара (X, m) , где $m: X \rightarrow \mathbb{N}$.

Пример. $\{0, 3, 0, 0, 4, 3\}$ — мультимножество, для которого $m_0 = 3, m_3 = 2, m_4 = 1$.

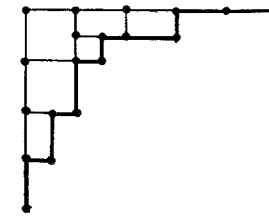
Для каждого мультимножества $X = (X, m) \in \mathbb{N}$ введем ординал

$$\text{Ord}(X) = \omega^{k_1} \cdot m_{k_1} + \dots + \omega^{k_p} \cdot m_{k_p},$$

где

$$X = \{k_1, \dots, k_p\} \text{ с } k_1 > \dots > k_p.$$

(2) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задан конкретный способ построения диаграммы. Если процесс еще не завершился на шаге n , мы имеем преддиаграмму вида



Пусть теперь D_n обозначает конечное мультимножество термов, находящихся на юго-восточном краю этой преддиаграммы (жирная линия).

(3) ЛЕММА. Любой редекс, сворачиваемый в преддиаграмме для σ, ρ является остатком (относительно всевозможных редукционных цепочек) некоторого редекса из M .

Доказательство. Утверждение леммы верно для исходной преддиаграммы (состоящей из σ и ρ), так как σ и ρ по предположению являются развертками. После добавления новой элементарной диаграммы для некоторых редукций σ_1, ρ_1 это утверждение остается верным, так как редексы, сворачиваемые в σ_1/ρ_1 и ρ_1/σ_1 , — это остатки редексов, сворачиваемых в σ_1, ρ_1 , а значит, и редексов из M . (Утверждение, заключенное в скобки, следует из леммы 12.1.3.) $\square_3$

(4) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A} = \{N \mid M \xrightarrow{\text{dev}} N\}$. В силу FD множество $\mathcal{A}$ конечно. Далее, в силу леммы 3 множество $\mathcal{A}$ содержит все термы из преддиаграммы. (Мы еще не достигли цели, так как возможно бесконечное дублирование из-за пустых редукций.)

Для термов $N, N' \in \mathcal{A}$ будем писать $N \xrightarrow{M} N'$, если существует развертка

$$\sigma_0 + \sigma: M \xrightarrow{M} N \xrightarrow{M} N',$$

где редукция $\sigma: N \xrightarrow{M} N'$ непуста,

Для $N \in \mathcal{A}$ положим

$$\|N\| = \text{card} \{N' \in \mathcal{A} \mid N \xrightarrow[M]{\rightarrow} N'\}.$$

Так как $\xrightarrow[M]{\rightarrow}$ -редукции не содержат циклов в силу FD, мы получаем, что $N \xrightarrow[M]{\rightarrow} N'$ влечет $\|N'\| > \|N\|$.

Наконец, определим для каждого n ординал $\alpha_n < \omega^6$, полагая $\alpha_n = \text{Ord}(\|D_n\|)$, где $\|D_n\|$ — мультимножество $\{\|M_1\|, \dots, \|M_p\|\}$, если $D_n = \{M_1, \dots, M_p\}$.

(5) ЛЕММА. Пусть $X \subseteq \mathbb{N}$ — мультимножество. Если X' получено из X заменой одного элемента k новыми элементами $k_1, \dots, k_q < k$, то $\text{Ord}(X) > \text{Ord}(X')$.

Доказательство проведем на примере. Пусть $X = \{3, 5, 7, 5\}$ и $X' = \{3, 4, 4, 3, 7, 5\}$. Тогда

$$\text{Ord}(X) = \omega^7 + \omega^5 \cdot 2 + \omega^3,$$

$$\text{Ord}(X') = \omega^7 + \omega^5 + \omega^4 \cdot 2 + \omega^3 \cdot 2.$$

Теперь имеем

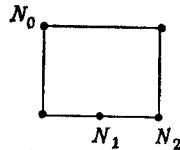
$$\omega^5 + \dots > \omega^4 \cdot 2 + \omega^3 + \dots \quad (\text{так как } \dots < \omega^5).$$

Поэтому

$$\text{Ord}(X) > \text{Ord}(X'). \quad \square_5$$

(6) ЛЕММА. Если элементарная диаграмма, добавленная на $(n+1)$ -м шаге построения диаграммы, расщепляется, то $\alpha_n > \alpha_{n+1}$.

Доказательство. Пусть элементарная диаграмма, добавленная на шаге $n+1$, имеет вид

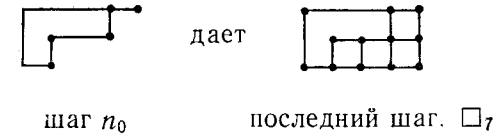


Тогда $D_{n+1} = D_n - \{N_0\} \cup \{N_1, N_2\}$. Так как $N_0 \xrightarrow[M]{\rightarrow} N_1, N_2$ в силу (2), для терма N_0 имеем в силу (4) неравенства $\|N_0\| > \|N_1\|, \|N_2\|$. Поэтому применимо (5), так что $\alpha_n = \text{Ord}(\|D_n\|) > \text{Ord}(\|D_{n+1}\|) = \alpha_{n+1}$. $\square_6$

(7) УТВЕРЖДЕНИЕ. $\mathcal{D}(\sigma, \rho)$ существует.

Доказательство. Из (6) следует, что после конечного числа шагов построения $\mathcal{D}(\sigma, \rho)$ уже не добавляются новые расщепляющиеся элементарные диаграммы. После последнего такого шага (номер которого мы обозначим через n_0) добавляются

только нерасщепляющиеся элементарные диаграммы, и потому предиаграмма не может взорваться (или, скорее, сжаться), образуя фигуру в стиле Эшера. Например,

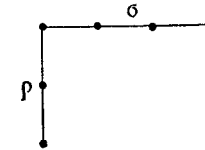


(8) УТВЕРЖДЕНИЕ. σ/ρ и ρ/σ суть $=$ -развертки.

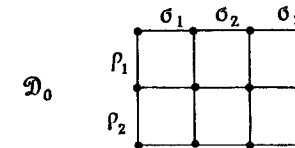
Доказательство состоит из ссылки на 12.1.12(i). $\square_8$

12.1.14. ТЕОРЕМА. Для любой пары ρ, σ конечных β -редукций с общим началом существует диаграмма $\mathcal{D}(\rho, \sigma)$. Следовательно, редукции σ/ρ и ρ/σ корректно определены.

Доказательство. Пусть дана фигура



(подразумевающая, что $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где σ_i — одношаговые редукции, и аналогично для $\rho = \rho_1 + \rho_2$). Проведем горизонтали и вертикали



Так как σ_1, ρ_1 — развертки, из леммы 12.1.13 следует, что существует диаграмма $\mathcal{D}(\sigma_1, \rho_1)$ и что ρ_1/σ_1 и σ_1/ρ_1 суть $=$ -развертки. Еще одно применение леммы 12.1.13 показывает, что существует $\mathcal{D}(\sigma_2, \rho_1/\sigma_1)$. Продолжая таким же образом, получаем, что можно заполнить все прямоугольники в диаграмме $\mathcal{D}_0$, что и дает искомую $\mathcal{D}(\sigma, \rho)$. $\square$

12.2. Сильные варианты теорем CR и FD!

Теперь будет определено обещанное усиление отношения $\cong_n$. Все результаты оставшейся части этой главы относятся к обычной β -редукции.

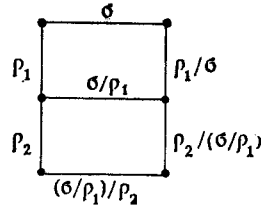
12.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Леви). Пусть σ, ρ — две редукции с общим началом. Говорят, что σ и ρ *сильно эквивалентны* (и пишут $\sigma \cong \rho$), если $\sigma/\rho = \rho/\sigma = \emptyset$.

Утверждение о том, что $\cong$ — отношение эквивалентности, не очевидно. Это утверждение, а также совместимость $\cong$ с операциями $+$ и $/$ будут доказаны в 12.2.2 и 12.2.7.

12.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Имеют место следующие равенства (при условии, что определены все входящие в них выражения):

- (i) $\rho + \emptyset = \emptyset + \rho = \rho$;
- (ii) $\rho + (\sigma + \tau) = (\rho + \sigma) + \tau$;
- (iii) $(\rho_1 + \rho_2)/\sigma = \rho_1/\sigma + \rho_2/(\sigma/\rho_1)$;
- (iv) $\sigma/(\rho_1 + \rho_2) = (\sigma/\rho_1)/\rho_2$;
- (v) $\sigma/\emptyset = \sigma$;
- (vi) $\emptyset/\sigma = \emptyset$;
- (vii) $\sigma/\sigma = \emptyset$;
- (viii) $\rho \cong \rho', \sigma \cong \sigma' \Rightarrow \rho + \sigma \cong \rho' + \sigma'$;
- (ix) $\rho + \sigma \cong \rho + \sigma' \Rightarrow \sigma \cong \sigma'$;
- (x) $\rho \cong \emptyset \Rightarrow \rho = \emptyset$;
- (xi) $\rho + (\sigma/\rho) \cong \sigma + (\rho/\sigma)$.

Доказательство. (i), (ii) тривиальны.
(iii), (iv).



(v), (vi), (vii). Если σ — одношаговая $=$ -редукция, то ссылаемся на лемму 12.1.6. Если шагов больше, используем (iii) и (iv) и строим диаграммы.

(viii) Допустим, что $\rho \cong \rho', \sigma \cong \sigma'$, т. е. $\rho/\rho' = \rho'/\sigma = \emptyset, \sigma/\sigma' = \sigma'/\sigma = \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} (\rho + \sigma)/(\rho' + \sigma') &= ((\rho + \sigma)/\rho')/\sigma' = (\rho/\rho' + \sigma/(\rho'/\rho))/\sigma' = \\ &= (\emptyset + \sigma/\emptyset)/\sigma' = \sigma/\sigma' = \emptyset. \end{aligned}$$

Аналогично получаем $(\rho' + \sigma')/(\rho + \sigma) = \emptyset$. Следовательно, $\rho + \sigma \cong \rho' + \sigma'$. Другой способ — рассмотреть рис. 12.2.

(ix) Надо изобразить $\mathcal{D}(\rho + \sigma, \rho' + \sigma')$.

(x) Если $\rho \cong \emptyset$, то $\rho = \rho/\emptyset = \emptyset$.

(xi) Надо произвести вычисления или начертить диаграмму. $\square$

12.2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $\rho \cong \sigma \Rightarrow \rho \cong_H \sigma$.

(ii) Обратная импликация ложна.

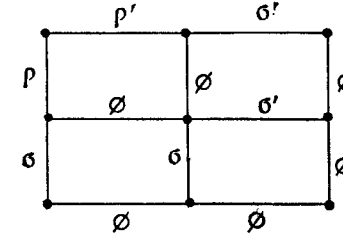
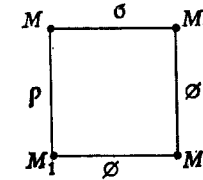


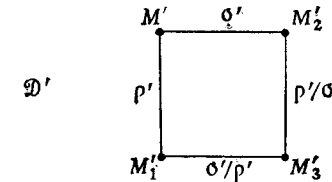
Рис. 12.2

Доказательство. (i) Допустим, что $\rho \cong \sigma$. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho, \sigma)$ имеет вид



Тогда $M_1 \equiv M_3 \equiv M_2$, откуда $\rho \cong \sigma$.

Рассмотрим теперь терм $M' \in \Lambda'$, полученный индексированием всех редексов в терме M различными числами. Поднимем $\mathcal{D}$ до M' и получим фигуру вида



где $|\mathcal{D}'| = \mathcal{D}$. Следовательно, $\sigma'/\rho' = \rho'/\sigma' = \emptyset$, откуда $M'_1 \equiv M'_3 \equiv M'_2$.

Пусть $\Delta \in M$. Мы должны показать, что $\Delta/\rho = \Delta/\sigma$. Пусть редекс $\Delta' \in M'$, соответствующий редексу Δ , имеет индекс i . По лемме 11.2.8

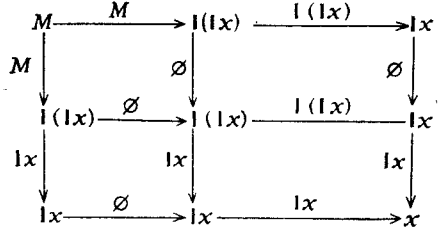
$$\begin{aligned} \Delta/\rho &= \{|\Delta''| \mid |\Delta'' \in M'_1 \text{ имеет индекс } i\} = \\ &= \{|\Delta''| \mid |\Delta'' \in M'_2 \text{ имеет индекс } i\} = \Delta/\sigma, \end{aligned}$$

так как $M'_1 \equiv M'_2$. Поэтому действительно $\rho \cong_H \sigma$.

(ii) Рассмотрим терм $M \equiv (\lambda zx.z(x))I$ и редукции

$$\rho: M \xrightarrow{M} I(Ix) \xrightarrow{Ix} Ix, \quad \sigma: M \xrightarrow{M} I(Ix) \xrightarrow{I(Ix)} Ix.$$

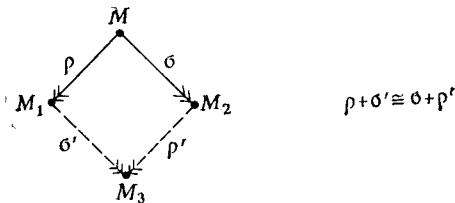
Тогда $\mathcal{D}(\rho, \sigma)$ имеет вид



Таким образом, $\rho \not\equiv \sigma$. Однако $\rho \equiv_n \sigma$, так как M — единственное входное выражение редукса в M и $M/\rho = M/\sigma = \emptyset$. $\square$

Теперь будут приведены усиленные варианты теорем CR и FD!

12.2.4. ТЕОРЕМА (CR⁺).



Доказательство. Пусть $\rho' = \rho/\sigma$, $\sigma' = \sigma/\rho$. Тогда сильная эквивалентность следует из предложения 12.2.2(xi). $\square$

12.2.5. ТЕОРЕМА (FDI⁺). Любая развертка терма $(M, \mathcal{F})$ конечна и потому может быть продолжена до полной. Далее, все полные развертки терма $(M, \mathcal{F})$ оканчиваются одним и тем же термом и сильно эквивалентны между собой.

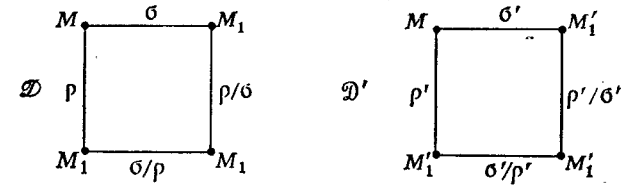
Доказательство. Ввиду FDI! достаточно показать, что для

$$\rho: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{cpl}} M_1, \quad \sigma: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{cpl}} M_1$$

имеет место $\rho \equiv \sigma$.

Рассмотрим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho, \sigma)$ и результат $\mathcal{D}'$ подъема диаграммы $\mathcal{D}$ до терма $M' \equiv (M, \mathcal{F}) \in \Lambda'$. Тогда $|\mathcal{D}'| = \mathcal{D}$. Так как ρ и σ — полные развертки терма $(M, \mathcal{F})$, из леммы 11.2.12 следует, что ρ' , σ' — редукции, оканчивающиеся термом $M'_1 \in \Lambda$.

Но тогда в силу леммы 12.1.10(ii) как ρ'/σ' так и σ'/ρ' являются β_0 -редукциями, и ввиду $M'_1 \in \Lambda$ мы имеем $\rho'/\sigma' = \sigma'/\rho' = \emptyset$.



Поэтому $\rho/\sigma = |\rho'/\sigma'| = \emptyset$ и аналогично $\sigma/\rho = \emptyset$. Таким образом $\rho \equiv \sigma$. $\square$

Следующая лемма, принадлежащая Леви, используется, чтобы показать, что $\equiv$ — отношение эквивалентности, совместимое с операцией $/$.

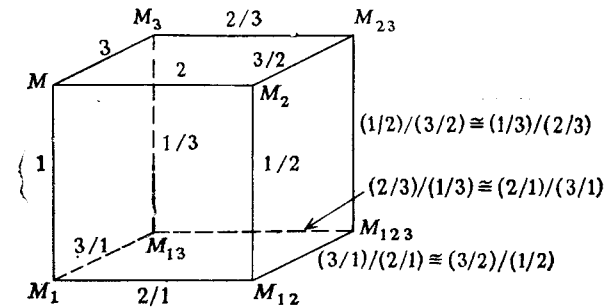


Рис. 12.3

12.2.6. ЛЕММА О КУБЕ. Пусть

$$\sigma_1: M \xrightarrow{\text{cpl}} M_1, \quad \sigma_2: M \xrightarrow{\text{cpl}} M_2, \quad \sigma_3: M \xrightarrow{\text{cpl}} M_3.$$

Тогда

$$(\sigma_1/\sigma_2)/(\sigma_3/\sigma_2) \equiv (\sigma_1/\sigma_3)/(\sigma_2/\sigma_3),$$

$$(\sigma_2/\sigma_3)/(\sigma_1/\sigma_3) \equiv (\sigma_2/\sigma_1)/(\sigma_3/\sigma_1),$$

$$(\sigma_3/\sigma_1)/(\sigma_2/\sigma_1) \equiv (\sigma_3/\sigma_2)/(\sigma_1/\sigma_2),$$

см. рис. 12.3.

Доказательство. Предположим сначала, что $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — полные развертки, т. е. $\sigma_i: (M, \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\text{cpl}} M_i$. По лемме 12.1.2(ii)

$$(\sigma_1/\sigma_2): (M_2, \mathcal{F}_1/\sigma_2) \xrightarrow{\text{cpl}} M_{12}$$

и, следовательно, по той же лемме

$$(\sigma_1/\sigma_2)/(\sigma_3/\sigma_2): (M_{23}, (\mathcal{F}_1/\sigma_2)/(\sigma_3/\sigma_2)) \xrightarrow{\text{cpl}} M_{123}.$$

Аналогично

$$(\sigma_1/\sigma_3)/(\sigma_2/\sigma_3): (M_{23}, (\mathcal{F}_1/\sigma_3)/(\sigma_2/\sigma_3)) \xrightarrow{\text{срл}} M_{123}.$$

Теперь по лемме 11.2.6 получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_1/\sigma_2)/(\sigma_3/\sigma_2) &= \mathcal{F}_1/(\sigma_2 + (\sigma_3/\sigma_2)) = \\ &= \mathcal{F}_1/(\sigma_3 + (\sigma_2/\sigma_3)) = (\mathcal{F}_1/\sigma_3)/(\sigma_2/\sigma_3), \end{aligned}$$

где среднее равенство получается из леммы 12.2.2(xi) и предложения 12.2.3(i):

$$\sigma_2 + (\sigma_3/\sigma_2) \cong_{\text{H}} \sigma_3 + (\sigma_2/\sigma_3).$$

Следовательно, в силу FD!+

$$(\sigma_1/\sigma_2)/(\sigma_3/\sigma_2) \cong (\sigma_1/\sigma_3)/(\sigma_2/\sigma_3).$$

Аналогичным образом доказываются другие равенства.

Общий случай получится, если записать $\sigma_i = \sigma_{i1} + \dots + \sigma_{in_i}$, $i = 1, 2, 3$, начертить блок размером $n_1 \times n_2 \times n_3$ и повторить приведенное рассуждение для каждого из $n_1 \times n_2 \times 1$ слоев, используя лемму 12.2.2(viii). [Поскольку еще не доказано, что отношение $\cong$ транзитивно, приходится повторять рассуждение для простого случая вместо того, чтобы применить его несколько раз.] $\square$

См. упр. 12.4.4, где намечено категорное доказательство леммы о кубе.

12.2.7. Следствие. (i) $\cong$ — отношение эквивалентности.

(ii) $\rho \cong \rho', \sigma \cong \sigma' \Rightarrow \rho/\sigma \cong \rho'/\sigma'$.

Доказательство. (i) Рефлексивность следует из предложения 12.2.2(vii). Симметричность тривиальна. Чтобы доказать транзитивность, допустим, что $\rho \cong \sigma$, $\sigma \cong \tau$. Тогда $\rho/\sigma = \sigma/\rho = \sigma/\tau = \tau/\sigma = \emptyset$. Следовательно, в силу леммы о кубе и предложения 12.2.2(v, vi) получаем

$$\rho/\tau = (\rho/\sigma)/(\sigma/\tau) \cong (\rho/\sigma)/(\tau/\sigma) = \emptyset.$$

Таким образом, $\rho/\tau = \emptyset$ и аналогично $\tau/\rho = \emptyset$.

(ii) Мы покажем, что

(a) $\rho \cong \rho' \Rightarrow \rho/\sigma \cong \rho'/\sigma$,

(b) $\sigma \cong \sigma' \Rightarrow \rho/\sigma \cong \rho/\sigma'$.

Нужный результат следует отсюда по транзитивности отношения $\cong$. Чтобы доказать (a), предположим, что $\rho \cong \rho'$. Тогда $\rho/\rho' = \rho'/\rho = \emptyset$. Отсюда в силу леммы о кубе и предложения 12.2.2(vi) получаем

$$(\rho/\sigma)/(\rho'/\sigma) \cong (\rho/\rho')/(\sigma/\rho') = \emptyset$$

и аналогично получаем $(\rho'/\sigma)/(\rho/\sigma) \cong \emptyset$. Таким образом, $\rho/\sigma \cong \rho'/\sigma$.

Чтобы доказать (b), допустим, что $\sigma \cong \sigma'$. Тогда $\sigma/\sigma' = \sigma'/\sigma = \emptyset$. Отсюда получаем

$$(\rho/\sigma) = (\rho/\sigma)/(\sigma'/\sigma) \cong (\rho/\sigma')/(\sigma/\sigma') = (\rho/\sigma')$$

по лемме о кубе. $\square$

12.3. Сильный вариант теоремы стандартизации

Теперь мы рассмотрим усиление теоремы стандартизации, упомянутое в начале этой главы. Приводимое ниже доказательство принадлежит Клопу. Его дополнительное преимущество — наличие явного алгоритма для нахождения стандартной редукции, эквивалентной данной. Кроме того, оно обобщается на $\beta\eta$ -редукцию; см. Клоп [1980], гл. 4.

12.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\sigma: M \rightarrow N$. Запишем $\sigma = (\Delta_0) + \dots + (\Delta_n)$. Пусть $\Delta \in M$.

(i) Редекс Δ сворачивается в редукции σ , если для некоторого $k \leq n$ редекс Δ_k есть остаток Δ (относительно данной редукции $(\Delta_0) + \dots + (\Delta_{k-1})$).

(ii) Δ обеспечен в σ , если он сворачивается в σ и $\Delta/\sigma = \emptyset$.

(iii) $\text{lmc}(\sigma) \in M$ — это самое левое вхождение редекса, которое сворачивается в σ .

Напомним, что для редексов $\Delta, \Delta' \in M$ мы пишем $\Delta < \Delta'$, если Δ расположен левее Δ' . Аналогичным образом $\Delta \leq \Delta'$ означает, что $\Delta < \Delta'$ или $\Delta = \Delta'$.

12.3.2. ЛЕММА. Пусть $\sigma: M \rightarrow N$ и $\Delta \equiv \text{lmc}(\sigma) \in M$.

(i) Допустим, что $\sigma = \sigma' + \sigma''$, где σ'' — одношаговая редукция. Тогда либо $(\Delta)/\sigma' = \emptyset$ (и в этом случае Δ сворачивается в редукции σ'), либо $(\Delta)/\sigma' = (\text{lmc}(\sigma''))$.

(ii) То же, что (i), но без требования, чтобы σ' была одношаговой редукцией.

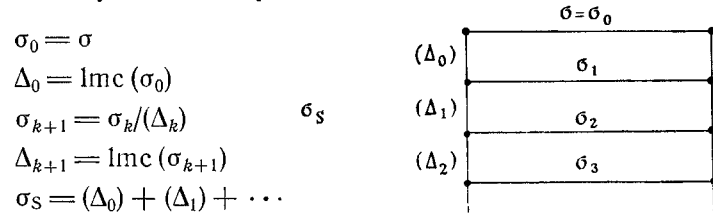
(iii) Δ обеспечен в σ .

Доказательство. (i) Пусть $\sigma' = (\Delta_0): M \rightarrow M_1$. Так как $\Delta \equiv \text{lmc}(\sigma)$, то $\Delta \leq \Delta_0$. Поэтому из $(\Delta)/\sigma' = \emptyset$ следует $\Delta = \Delta_0$, так что Δ сворачивается в σ' . (Если $\Delta_0 \leq \Delta$, то $(\Delta)/(\Delta_0) = \emptyset$ и возможно, что $\Delta \neq \Delta_0$: (л.х.л.) $\Delta \xrightarrow{\Delta_0} \text{I.}$) Если $(\Delta)/\sigma' \neq \emptyset$, то $\Delta \neq \Delta_0$ и, следовательно, $\Delta < \Delta_0$. Таким образом, $M \equiv \dots \lambda_{\Delta} \dots \Delta_0 \dots$, где λ_{Δ} — первый λ -символ в Δ . Тогда Δ/σ' очевидным образом состоит из единственного элемента, который мы обозначим через Δ' . Так как Δ сворачивается в σ , но не в σ' , редекс Δ' должен сворачиваться в σ'' . Если бы Δ' не был $\text{lmc}(\sigma'')$, то Δ не был бы $\text{lmc}(\sigma)$. Поэтому $\Delta' \equiv \text{lmc}(\sigma'')$, так что $(\Delta)/\sigma' = (\text{lmc}(\sigma''))$.

(ii) получается по транзитивности.

(iii) Так как Δ сворачивается в редукции σ , то $\sigma = \sigma' + \sigma_0 + \sigma''$, где σ_0 сворачивает остаток Δ_0 редекса Δ относительно σ' (остаток Δ_0 единствен в силу (ii)). Тогда $\Delta/\sigma = \Delta/\sigma'/\sigma_0/\sigma'' = \Delta_0/\sigma_0/\sigma'' = \emptyset/\sigma'' = \emptyset$ (группировка влево). $\square$

12.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана редукция $\sigma: M \rightarrow N$. Тогда *стандартизация* редукции σ (обозначаемая через σ_s) определяется следующим алгоритмом:



Алгоритм нахождения σ_s останавливается, если $\sigma_n = \emptyset$ для некоторого n . В этом случае полагаем $\sigma_s = (\Delta_0) + \dots + (\Delta_{n-1})$. Сначала мы хотим показать, что конечность редукции σ влечет конечность редукции σ_s .

12.3.4. Лемма. Пусть σ — развертка терма M . Тогда σ_s тоже развертка терма M , так что она конечна.

Доказательство. Пусть σ — развертка терма $(M, \mathcal{F})$, и пусть $\sigma_s = (\Delta_0) + (\Delta_1) + \dots$.

Утверждение. Каждый Δ_i есть остаток некоторого редекса из $\mathcal{F}$ относительно редукции $(\Delta_0) + \dots + (\Delta_{i-1})$.

Действительно, так как $\Delta_i = \text{lmc}(\sigma_i)$, где $\sigma_i = \sigma/((\Delta_0) + \dots + (\Delta_{i-1}))$, то в редукции σ_i имеется шаг (Δ'_i) , где Δ'_i — остаток редекса Δ_i . Так как σ — развертка множества $\mathcal{F}$, из предложения 12.1.12(i) следует, что σ_i есть развертка множества $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}/((\Delta_0) + \dots + (\Delta_{i-1}))$. Следовательно Δ'_i является остатком некоторого редекса $\Delta \in \mathcal{F}_i$. Но из того, что различные редексы имеют дизъюнктные множества остатков, следует, что $\Delta_i \equiv \Delta$. Поэтому $\Delta_i \in \mathcal{F}_i$.

В силу только что доказанного утверждения σ_s является разверткой терма $(M, \mathcal{F})$ и потому конечна в силу FD. $\square$

12.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть σ, σ' есть $=$ -редукции. Говорят, что σ' — *разрежение* редукции σ , если σ можно получить из σ' путем вычеркивания пустых шагов.

Пример. Редукция $\Pi \xrightarrow{=} \Pi \xrightarrow{=} I \xrightarrow{=} I$ есть разрежение редукции $\Pi \xrightarrow{=} I$.

12.3.6. Лемма. Пусть $\sigma = \sigma' + \sigma''$, где σ' — *отношаговая* редукция. Тогда σ_s/σ' — *разрежение* редукции $(\sigma'')_s$.

Доказательство. Пусть $\sigma_s = (\Delta_0) + (\Delta_1) + \dots$. Положим (см. рис. 12.4)

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= \sigma', & \sigma'_{k+1} &= \sigma'_k/(\Delta_k), \\ \rho_k &= (\Delta_k)/\sigma'_k, \\ \sigma''_0 &= \sigma'', & \sigma''_{k+1} &= \sigma''_k/\rho_k. \end{aligned}$$

Так как для всех k имеет место $\Delta_k = \text{lmc}(\sigma'_k + \sigma''_k)$, то из леммы 12.3.2(i) следует, что либо $\rho_k = \emptyset$ и $\sigma''_{k+1} = \sigma''_k$, либо $\rho_k = (\text{lmc}(\sigma''_k))$. Следовательно, редукция $\sigma_s/\sigma' = \rho_0 + \rho_1 + \dots$ действительно является разрежением редукции $(\sigma'')_s$. $\square$

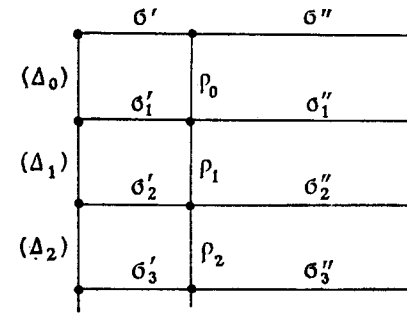


Рис. 12.4

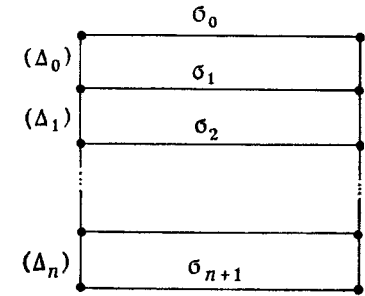


Рис. 12.5

12.3.7. Следствие. Допустим, что $\sigma = \sigma' + \sigma''$, где σ' — *одношаговая* редукция. Тогда

$$\sigma''_s \text{ конечна} \Rightarrow \sigma_s \text{ конечна.}$$

Доказательство. Предположим, что σ''_s конечна. Редукция σ_s/σ' — разрежение редукции σ''_s , поэтому (в обозначениях из доказательства леммы) имеем $\emptyset = \rho_n = \rho_{n+1} = \dots$ для некоторого n .

Утверждение. $(\forall k \geq n) (\Delta_k = \text{lmc}(\sigma'_k))$. Действительно, по определению $\Delta_k = \text{lmc}(\sigma'_k + \sigma''_k)$. Следовательно, $\Delta_k \leq \text{lmc}(\sigma'_k)$. Но в силу леммы 12.3.2(ii) в применении к Δ_k и $\sigma'_k + \sigma''_k$ равенство $\rho_k = \emptyset$ возможно, только если Δ_k сворачивается в σ'_k . Таким образом, и $\text{lmc}(\sigma'_k) \leq \Delta_k$, т. е. $\Delta_k \equiv \text{lmc}(\sigma'_k)$.

Из только что установленного утверждения и теоремы стандартизации получаем, что $(\sigma'_n)_s = (\Delta_n) + (\Delta_{n-1}) + \dots$. По лемме 12.1.12(i) редукция $\sigma'_n = \sigma'/((\Delta_0) + \dots + (\Delta_{n-1}))$ является разверткой. Следовательно, применима лемма 12.3.4, показываю-

щая, что редукция $(\Delta_n) + (\Delta_{n+1}) + \dots$ конечна. Таким образом, конечна и редукция σ_s . $\square$

12.3.8. Предложение. Пусть σ конечна. Тогда σ_s конечна.

Доказательство. Запишем σ в виде $\sigma_n + \sigma_{n-1} + \dots + \sigma_1 + \emptyset$. С помощью индукции по k из предыдущего следствия получается, что $(\sigma_k + \dots + \sigma_1 + \emptyset)_s$ конечна, в частности σ_s конечна. $\square$

12.3.9. Следствие. Пусть σ конечна. Тогда $\sigma \cong \sigma_s$.

Доказательство. Положим (см. рис. 12.5)

$$\sigma_s = (\Delta_0) + \dots + (\Delta_n),$$

$$\sigma_0 = \sigma, \quad \sigma_{k+1} = \sigma_k / (\Delta_k),$$

$$\rho_k = (\Delta_k) / \sigma_k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

По определению $\Delta_k = \text{Imc}(\sigma_k)$, откуда по лемме 12.3.2(iii) получаем $\rho_k = (\Delta_k) / \sigma_k = \emptyset$. Таким образом, $\sigma_s / \sigma = \rho_0 + \dots + \rho_n = \emptyset$.

Обратно, $\sigma / \sigma_s = \sigma_{n+1}$. Если эта редукция — не $\emptyset$, то алгоритм построения σ_s не остановился бы. $\square$

Теперь мы покажем, что σ_s — стандартная редукция.

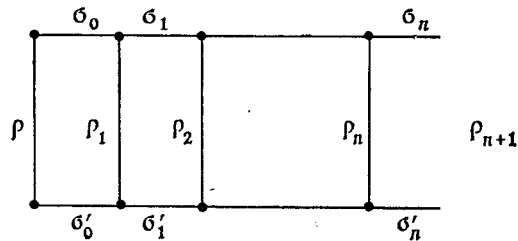


Рис. 12.6

12.3.10. Лемма. Для β' -редукции σ положим

$$\text{Index}(\sigma) = \{i \mid \text{имеется } i\text{-редекс, сворачиваемый в редукции } \sigma\}.$$

Пусть ρ, σ — некоторые β' -редукции. Тогда

$$\text{Index}(\sigma / \rho) \subseteq \text{Index}(\sigma).$$

Доказательство. Пусть $\sigma = \sigma_0 + \dots + \sigma_n$;

$$\rho_0 = \rho, \quad \rho_{k+1} = \rho_k / \sigma_k, \quad \sigma'_k = \sigma_k / \rho_k \quad \text{для } 0 \leq k \leq n.$$

Тогда $\sigma / \rho = \sigma'_0 + \dots + \sigma'_n$ — см. рис. 12.6.

Пусть $\sigma_k: M_k \xrightarrow{\Delta_k} \beta' M_{k+1}$, $\sigma'_k: M'_k \xrightarrow{\beta'} M'_{k+1}$. По лемме 12.1.15(i) редукция σ'_k — развертка терма $(M'_k, \Delta_k / \rho_k)$. Кроме того, все эле-

менты множества Δ_k / ρ_k имеют тот же индекс, что и Δ_k . Следовательно,

$$\text{Index}(\sigma'_k) \subseteq \text{Index}(\sigma_k)$$

(равенство возможно, так как Δ_k / ρ_k может быть пусто). Поэтому $\text{Index}(\sigma) = \bigcup_i \text{Index}(\sigma_i) \supseteq \bigcup_i \text{Index}(\sigma'_i) = \text{Index}(\sigma / \rho)$. $\square$

12.3.11. Предложение. Для любой редукционной цепочки σ редукция σ_s стандартна независимо от того, конечна σ или бесконечна.

Доказательство. Пусть $\sigma_s = (\Delta_0) + \dots + (\Delta_i) + \dots$, где $\Delta_i \in M_i$. Мы должны показать, что для всех k, k' , таких, что $k < k'$, и для всех $\Delta \in M_k$

$\Delta_{k'}$ не является остатком редекса Δ относительно
(*) $\Delta < \Delta_k \Rightarrow$ редукции $(\Delta_k) + (\Delta_{k+1}) + \dots + (\Delta_{k'-1})$.

Пусть $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_{i+1} = \sigma_i / (\Delta_i)$ — см. рис. 12.5.

Рассмотрим диаграмму $\mathcal{D} = \mathcal{D}((\Delta_k) + \dots + (\Delta_{k'}), \sigma_k)$. Пусть терм $M'_k \in \Lambda'$ получается из M_k путем приписывания редексу Δ индекса 0, а остальным редексам — индекса 1. Поднимая $\mathcal{D}$ до M'_k , получим диаграмму $\mathcal{D}'$ и будем отождествлять вхождения (под)термов в $\mathcal{D}'$ с соответствующими вхождениями в $\mathcal{D}$. Чтобы доказать (*), достаточно в силу леммы 11.2.8 показать, что редекс $\Delta_{k'}$ в $\mathcal{D}'$ не индексирован числом 0. Так как $\Delta < \Delta_k = \text{Imc}(\sigma_k)$, редекс Δ не сворачивается в σ_k , а следовательно, $0 \notin \text{Index}(\sigma)$. По лемме 12.3.10 отсюда следует, что $0 \notin \text{Index}(\sigma_{k'})$. Но тогда $\Delta_{k'} = \text{Imc}(\sigma_{k'})$ не может иметь индекс 0. $\square$

Последний результат состоит в том, что для конечной редукции σ имеется не более одной стандартной редукции σ' , такой, что $\sigma' \cong \sigma$.

12.3.12. Лемма. Пусть $\sigma = (\Delta_1) + \dots + (\Delta_n)$ — конечная стандартная редукция. Пусть $\Gamma < \Delta_1$. Тогда Γ / σ состоит ровно из одного элемента.

Доказательство. Пусть $\sigma_k = (\Delta_1) + \dots + (\Delta_k)$. Индукцией по $k \leq n$ мы докажем следующее более сильное утверждение: Γ / σ_k состоит из единственного элемента (который мы обозначим через Γ_k) и если $k \neq n$, то $\Gamma_k < \Delta_{k+1}$. Случай $k = 0$ тривиален. Поэтому предположим, что $\Gamma / \sigma_k = \{\Gamma_k\}$, где $\Gamma_k < \Delta_{k+1}$. Пусть теперь $(\Delta_{k+1}): M_{k+1} \rightarrow M_{k+2}$. Тогда

$$M_{k+1} \equiv \dots \lambda \dots \Delta_{k+1} \dots,$$

где указанный явно λ -символ — главный символ редекса Γ_k и

$$M_{k+2} \equiv \dots \lambda \dots \square \dots,$$

где $\square$ — свертка редекса Δ_{k+1} . Отсюда следует, что $\Gamma/\sigma_{k+1} = \Gamma/\sigma_k/(\Delta_{k+1}) = \Gamma_k/(\Delta_{k+1})$ состоит из единственного элемента, который мы обозначим через Γ_{k+1} . При этом если $k+1 \neq n$, то, так как $(\Delta_{k+1}) + (\Delta_{k+2})$ — стандартная редукция, $\Gamma_{k+1} < \Delta_{k+2}$. $\square$

12.3.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть ρ, σ — конечные стандартные редукции, такие, что $\rho \cong \sigma$. Тогда $\rho = \sigma$.

Доказательство. Пусть

$$\rho = (\Gamma_0) + \dots + (\Gamma_n), \quad \sigma = (\Delta_0) + \dots + (\Delta_m).$$

Утверждение. $\Gamma_0 \equiv \Delta_0$. Допустим, что $\Gamma_0 < \Delta_0$. В этом случае $\Gamma_0/\sigma \neq \emptyset$ по лемме 12.3.12, откуда в силу предложения 12.1.12(ii) получаем $(\Gamma_0)/\sigma \neq \emptyset$. Но тогда $\rho \not\cong \sigma$. По аналогичной причине невозможно соотношение $\Delta_0 < \Gamma_0$.

В силу только что доказанного утверждения и предложения 12.2.2(ix) получаем, что

$$(\Gamma_1) + \dots + (\Gamma_n) \cong (\Delta_1) + \dots + (\Delta_m).$$

Продолжая рассуждать так же, получаем $\Gamma_0 \equiv \Delta_0$, $\Gamma_1 \equiv \Delta_1$, $\dots$. Если $n < m$, то

$$(\Delta_{n+1}) + \dots + (\Delta_m) \cong \emptyset.$$

Но из предложения 12.2.2(x) следует, что это невозможно, так как Δ_i — настоящие (непустые) редексы. Следовательно, $n = m$. $\square$

12.3.14. ТЕОРЕМА. Для любой конечной редукции σ ее стандартизация σ_s — единственная стандартная редукция, такая, что $\sigma_s \cong \sigma$.

Доказательство получается ссылкой на следствие 12.3.9 и предложения 12.3.11 и 12.3.13. $\square$

В § 14.2 будет дано другое доказательство этой теоремы.

12.4. Упражнения

12.4.1. Пусть σ, ρ — одношаговые редукции с общим началом. Показать, что элементарная диаграмма для σ и ρ расщепляется хотя бы на одной стороне.

12.4.2 (Леви, Берри). Пусть σ, τ — конечные редукции с общим началом. Положим по определению $\sigma \leq \tau \Leftrightarrow \sigma/\tau = \emptyset$. Пусть $\mathcal{R}_\omega(M) = \{\sigma \mid \sigma \text{ — конечная редукция, начинающаяся термом } M\}$.

(i) Показать, что $\leq$ индуцирует частичный порядок на множестве $\mathcal{R}_\omega(M)/\cong$.

(ii) Показать, что $\mathcal{R}_\omega(M)/\cong$ с упорядочением $\leq$ является верхней полурешеткой, но не решеткой.

(iii) Показать, что $\sigma \leq \tau \Leftrightarrow \exists \rho (\sigma + \rho \cong \tau)$.

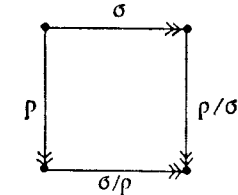
(iv) Показать, что $\sigma + \rho \leq \sigma + \rho' \Leftrightarrow \rho \leq \rho'$.

12.4.3. (i) Показать, что $\rho + \sigma \cong \rho' + \sigma \Rightarrow \rho \cong \rho'$ не имеет места в общем случае.

(ii) Показать, что $\rho \cong \rho' \Leftrightarrow \forall \sigma (\sigma/\rho \cong \sigma/\rho')$.

12.4.4. Определим следующую категорию $\mathcal{C}$. Множество объектов категории $\mathcal{C}$ — это Λ . Множество $\text{Hom}(M, N)$ морфизмов между объектами $M, N \in \Lambda$ — это $\{\sigma \mid \sigma: M \rightarrow N\}/\cong$, т.е. морфизмы из M в N — это редукции M к N с точностью до $\cong$.

(i) Показать, что в $\mathcal{C}$ диаграмма



является коуниверсальным квадратом (pushout).

(ii) Показать, что в любой категории с коуниверсальными квадратами имеет место лемма о кубе 12.2.6 для коуниверсальных квадратов.

12.4.5. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — редукции с общим началом. Показать, что невозможен канонический способ определения трехмерной диаграммы $\mathcal{D}_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, аналогичной $\mathcal{D}(\sigma_1, \sigma_2)$. [Указание. Рассмотреть терм $M = (\lambda x.xxx)((\lambda y.yy)(\Pi))$.]

12.4.6. Показать, что если σ — бесконечная редукционная цепочка, то σ_s тоже бесконечна.

12.4.7. Показать, что если $\Delta \in M$ и $\sigma: M \rightarrow N$, то $(\Delta)/\sigma$ — полная развертка терма $(N, \{\Delta\}/\sigma)$.

Редукционные стратегии

Терм можно редуцировать несколькими способами. Поэтому его редукционный граф может стать весьма запутанным. Редукционная стратегия делает выбор между различными способами редукции терма.

Редукционные стратегии могут оказаться весьма полезными для доказательства отрицательных результатов, например утверждений о том, что некоторый терм не имеет н.ф. или что два терма не имеют общего редукта (см. приложения 13.2.3 и 13.2.13).

13.1. Классификация стратегий

13.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть R — понятие редукции.

(i) R -(редукционная) стратегия — это отображение $F: \Lambda \rightarrow \Lambda$, такое, что $M \rightarrow_R F(M)$ для всех $M \in \Lambda$.

(ii) R -стратегия F называется *одношаговой* (сокращенно — R -1-стратегией), если для любого терма M , не находящегося в R -н.ф., $M \rightarrow_R F(M)$.

(iii) R -стратегия *рекурсивна*, если она становится рекурсивной функцией после кодирования термов числами. Стратегию называют *эффективной*, если она не просто общерекурсивна, но и может быть вычислена сравнительно просто¹⁾.

(Чтобы пояснить различие между эффективным и рекурсивным, положим

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\text{-я частично рекурсивная функция заканчивает обработку аргумента } n \text{ не более чем за } n \text{ шагов,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда f рекурсивна, но не эффективна в нашем смысле.)

¹⁾ Наиболее распространенное в настоящее время уточнение понятия эффективности в том смысле, как его применяет автор, — полиномиальность. Функция f полиномиально вычислима, если вычисление $f(M)$ заканчивается за число шагов, ограниченное (заранее фиксированной) степенью длины M . Однако сам автор понимает под эффективностью, по-видимому, что-то более близкое к вычислимости в реальное время (когда ответ выдается, как только закончилось чтение аргумента). — *Прим. перев.*

13.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F — некоторая R -стратегия. F -(редукционная) цепочка для терма M — это последовательность термов

$$M, F(M), F^2(M), \dots$$

Следующие понятия заимствованы у Барендрегта и др. [1976].

13.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F есть R -стратегия.

(i) F называется *нормализующей*, если для любого $M \in \Lambda$ M имеет R -н.ф. $\Rightarrow F^n(M)$ есть R -н.ф. для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

(ii) F *кофинальна*, если для любого $M \in \Lambda$ F -цепочка терма M кофинальна в $G_R(M)$, т. е. $(\forall N \in G_R(M)) \exists n (N \rightarrow_R F^n(M))$.

(iii) F обладает свойством Чёрча — Россера (CR), если для любых $M, N \in \Lambda$

$$M =_R N \Rightarrow F\text{-цепочки термов } M \text{ и } N \text{ пересекаются,}$$

$$\text{т. е. } \exists m, n (F^m(M) \equiv F^n(N)).$$

13.1.4. ЛЕММА. Пусть F есть R -стратегия, и пусть R обладает свойством CR. Тогда

(i) F обладает свойством CR $\Rightarrow F$ кофинальна;

(ii) F кофинальна $\Rightarrow F$ нормализующая.

Доказательство. (i) Пусть $N \in G_R(M)$. Тогда $M =_R N$. Используя предположение, получаем

$$N \rightarrow_R F^n(N) \equiv F^m(M)$$

для некоторых n, m . Таким образом, F -цепочка терма M кофинальна в $G_R(M)$.

(ii) Пусть N есть R -н.ф. терма M . Тогда $N \in G_R(M)$. Применяя предположение, получаем, что $N \rightarrow_R F^k(M)$ для некоторого k . Но тогда $F^k(M) \equiv N$, так как N находится в R -н.ф. $\square$

Таким образом, для построения (рекурсивных) нормализующих стратегий, кофинальных стратегий и CR-стратегий достаточно построить CR-стратегии. Однако в § 13.2 и 13.3 будут проведены отдельные построения трех видов стратегий (всех для понятия редукции β). Дело в том, что хотя рекурсивная CR-стратегия и существует, она не очень эффективна. Имеется эффективная кофинальная стратегия, но она не является 1-стратегией. Существует также эффективная нормализующая 1-стратегия.

13.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. R -стратегия F называется *зацикливающей*, если для всех $M \in \Lambda$

$$\infty_R(M) \Rightarrow F\text{-цепочка терма } M \text{ бесконечна (и не содержит пустых шагов редукции).}$$

В § 13.4 будет построена эффективная зацикливающая β -стратегия.

13.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F есть R -стратегия.

(i) Длина F -цепочки терма M (обозначаемая через $L_F(M)$) — это $\mu n[F^n(M) \text{ находится в } R\text{-н. ф.}]$.

Если F -цепочка терма M не заканчивается R -н. ф., то получаем, что $L_F(M) = \infty$.

(ii) Ширина F -цепочки терма M (обозначаемая через $B_F(M)$) — это $\sup \{\|F^n(M)\| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

И $B_F(M)$ может быть равна ∞ .

13.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F, G — некоторые R -стратегии.

(i) $F \leq_L G$, если $\forall M (L_F(M) \leq L_G(M))$.

(ii) Стратегия F L -лучше, чем G , если $F \leq_L G$, но не $G \leq_L F$.

(iii) Стратегия F L -оптимальна, если она нормализующая и никакая R -стратегия не L -лучше, чем F .

(iv) Стратегия F L -1-оптимальна, если она — нормализующая R -1-стратегия и никакая R -1-стратегия не L -лучше, чем F .

Аналогичным образом определяются понятия и отношения $F \leq_B G$, F B -лучше, чем G , F B -оптимальна и F B -1-оптимальна. В определениях 13.1.7(iii) и (iv) не обязательно требовать, чтобы F была нормализующей (это следует из остальных условий). Однако для соответствующего определения $B(-1)$ -оптимальности это необходимо сделать.

Очевидно, что существуют (1-)оптимальные стратегии. Однако в § 13.5 будет доказано, что не существует $L(-1)$ -оптимальных стратегий.

В оставшейся части этой главы рассматриваются только β -стратегии.

13.2. Эффективные нормализующие и кофинальные стратегии

13.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Стратегия левой редукции F_ℓ определяется следующим образом:

$$F_\ell(M) = \begin{cases} M, & \text{если } M \text{ находится в н. ф.}, \\ M', & \text{если } M \xrightarrow{\Delta} M' \text{ и } \Delta \text{ — самый левый редекс в } M. \end{cases}$$

(ii) Начальный отрезок F_ℓ -цепочки называется *левой редукцией*.

Следующее утверждение доказано в монографии Карри и др. [1958], с. 142.

13.2.2. ТЕОРЕМА НОРМАЛИЗАЦИИ. F_ℓ — эффективная нормализующая 1-стратегия.

Доказательство. Очевидно, что F_ℓ — эффективная 1-стратегия. Чтобы показать, что стратегия F_ℓ нормализующая, допустим, что терм M имеет н. ф. N . Тогда по теореме Чёрча — Россера получаем, что $M \twoheadrightarrow N$. Следовательно, имеется стандартная редукция

$$\sigma: M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots \xrightarrow{\Delta_{n-1}} M_n \equiv N.$$

Мы утверждаем, что σ есть F_ℓ -редукционная цепочка для M . Действительно, в противном случае Δ_i для некоторого i не был бы самым левым редексом R_i в терме M_i . Тогда R_i заморожен (т. е. не редуцируется в дальнейшем) и, значит, остается редексом (возможно, несколько меняясь внутри) в последующих термах. Но тогда N не будет н. ф. $\square$

13.2.3. ПРИЛОЖЕНИЕ. Пусть $\omega \equiv (\lambda b x z. z(b b x))$ и $A \equiv \omega \omega x$. Тогда левая редукционная цепочка для A имеет вид

$$A \rightarrow (\lambda x z. z(\omega \omega x)) x \rightarrow \lambda z. z(\omega \omega x) \equiv \langle A \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle \langle A \rangle \rangle \rightarrow \dots$$

Значит, по теореме нормализации терм A не имеет н. ф. Так как полный редукционный граф терма A довольно сложен (см. упр. 3.5.4), мы видим, что теорема нормализации весьма полезна для доказательства того, что некоторые термы не имеют н. ф.

Для рассмотренных в § 8.4 результатов о λ -определимости частично рекурсивных функций необходимо одно усиление теоремы 13.2.2.

13.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Мы пишем $M \xrightarrow{\ell} N$, если $M \xrightarrow{\Delta} N$ и Δ — самый левый редекс в M .

(ii) Мы пишем $M \xrightarrow{\neq \ell} N$, если $M \xrightarrow{\Delta} N$ и Δ — не самый левый редекс в M .

(iii) $\xrightarrow{\ell}$ и $\xrightarrow{\neq \ell}$ — это транзитивные рефлексивные замыкания отношений $\xrightarrow{\ell}$, $\xrightarrow{\neq \ell}$ соответственно; $\xrightarrow{\neq \ell}$ — транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow{\ell}$.

Напомним, что квазилевая редукция терма M — это последовательность

$$\sigma: M = M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots,$$

такая, что

$$\forall i (\exists j \geq i) [\Delta_j \text{ — самый левый редекс в } M_i].$$

Мы хотим теперь показать, что если M имеет бесконечную квазиленную редукцию, то M не имеет н. ф.

13.2.5. ЛЕММА. (i)

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\neq \ell} & M' \\ \downarrow \ell & & \downarrow \ell \\ N & \xrightarrow{\beta} & N' \end{array} \quad M, M', N, N' \in \Lambda.$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\neq \ell} & M' \\ \downarrow \ell \neq \emptyset & & \downarrow \ell \neq \emptyset \\ N & \xrightarrow{\neq \ell} & N' \end{array} \quad M, M', N, N' \in \Lambda.$$

Доказательство. (i) Пусть $M \xrightarrow{\ell} N$ и $M \xrightarrow{\neq \ell} M'$ имеют соответственно вид

$$\dots (\lambda x.P) Q \dots \xrightarrow{\ell} \dots P [x := Q] \dots$$

и

$$\dots (\lambda x.P) Q \dots \xrightarrow{\neq \ell} \dots (\lambda x.P') Q' \dots',$$

где $P \xrightarrow{\beta} P'$, $Q \xrightarrow{\beta} Q'$ и $\dots \xrightarrow{\beta} \dots$.

Ввиду подстановочности β -редукции

$$\dots P [x := Q] \dots \xrightarrow{\beta} \dots P' [x := Q'] \dots',$$

но из $M' \xrightarrow{\ell} N'$ получаем

$$N' \equiv \dots P' [x := Q'] \dots',$$

откуда $N \xrightarrow{\beta} N'$ — см. рис. 13.1.

$$\begin{array}{ccc} \dots (\lambda x.P) Q \dots & \xrightarrow{\neq \ell} & \dots (\lambda x.P') Q' \dots' \\ \downarrow \ell & & \downarrow \ell \\ \dots P [x := Q] \dots & \xrightarrow{\beta} & \dots P' [x := Q'] \dots' \end{array}$$

Рис. 13.1

(ii) Заметим, что в случае $M \xrightarrow{s} N$ редукция состоит из (быть может, нуля) левых редукций, за которыми следуют (быть может, в нулевом числе) $\neq \ell$ -редукции — см. рис. 13.2.

Теперь в силу (i), теоремы стандартизации 11.4.7 и только что сделанного замечания диаграмма, изображенная на рис. 13.3, показывает, что все в порядке. $\square$

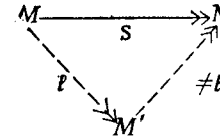


Рис. 13.2

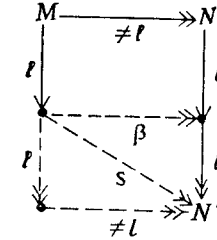


Рис. 13.3

13.2.6. ТЕОРЕМА. Если M имеет бесконечную квазиленную редукцию, то M не имеет н. ф.

Доказательство. С помощью леммы 13.2.5 квазиленная редукция может быть перестроена в бесконечную левую редукцию — см. рис. 13.4.

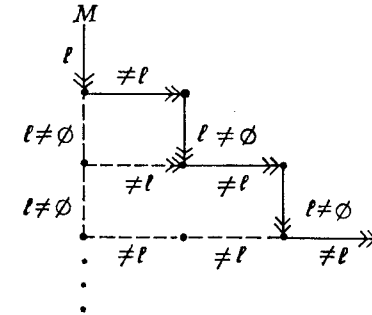


Рис. 13.4

Поэтому в силу теоремы нормализации 13.2.2 мы завершили доказательство. $\square$

Теперь будет определена эффективная кофинальная стратегия, которая, однако, не будет одношаговой. Эта конструкция найдена независимо Кнутом [1970] и В. Гроссом.

13.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Редукционная стратегия F_{gk} определяется равенством

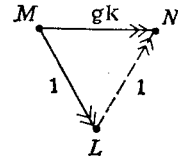
$$F_{gk}(M) = \text{Cpl}(M, \mathcal{F}_M),$$

где $\mathcal{F}_M$ — множество всех редексов терма M . Мы пишем $M \xrightarrow{gk} N$, если $F_{gk}(M) = N$.

F_{gk} называется стратегией Гросса — Кнута. Заметим, что

$$M \xrightarrow{gk} N \Rightarrow M \xrightarrow{i} N.$$

13.2.8. ЛЕММА.

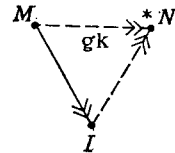


Доказательство. По предположению имеем $(M, \mathcal{F}_M) \xrightarrow{\text{cpl}} N$ и $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{cpl}} L$ для некоторого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M$.

Полностью разворачивая остатки редексов из $\mathcal{F}_M - \mathcal{F}$, имеющиеся в L , мы получаем $L \xrightarrow{1} N$ в силу FD! (теорема 11.2.25). $\square$

13.2.9. ТЕОРЕМА. F_{gk} — эффективная кофинальная стратегия.

Доказательство. Пусть $\xrightarrow{*}_{gk}$ — транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow{gk}$. Мы должны показать, что



Так как $\xrightarrow{*}_{gk}$ — транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow{gk}$ (лемма 11.2.28(i)), нужный результат получается простым по-

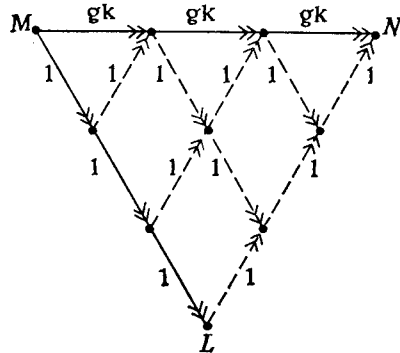


Рис. 13.5

строением диаграмм, которое подсказывает рис. 13.5, с использованием лемм 13.2.8 (для обхода треугольников) и 11.2.28(ii) (для обхода параллелограммов). $\square$

Неизвестно, существует ли рекурсивная кофинальная 1-стратегия, — скорее всего нет.

Теперь мы усилим теорему 13.2.9.

13.2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda$. Квази-ГК-редукция¹⁾ терма M — это цепочка вида

$$M \equiv M_0 \xrightarrow{1} M_1 \xrightarrow{1} M_2 \xrightarrow{1} \dots,$$

такая, что

$$\forall i (\exists j \geq i) (M_i \xrightarrow{gk} M_{j+1}).$$

13.2.11. ТЕОРЕМА. Любая квази-ГК-редукционная цепочка терма M кофинальна в $G(M)$.

Доказательство. Квази-ГК-редукция терма M имеет вид

$$M \xrightarrow{1} M_1 \xrightarrow{gk} M_2 \xrightarrow{1} M_3 \xrightarrow{1} M_4 \xrightarrow{gk} M_5 \xrightarrow{1} \dots$$

С помощью обхода диаграмм, подсказываемого рис. 13.6, нужный результат получается из теоремы 13.2.9 (для большого

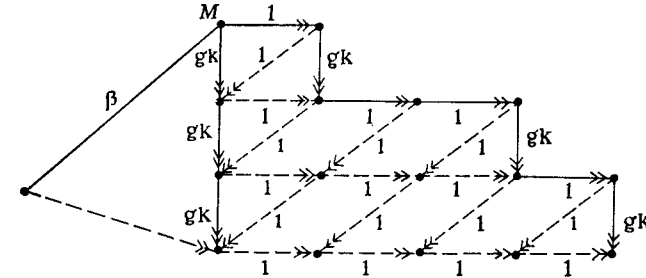


Рис. 13.6

треугольника), лемм 13.2.8 (для маленьких треугольников) и 11.2.28(ii) (для параллелограммов). $\square$

Теорему 13.2.11 можно использовать для установления неконвертируемости двух термов. Напомним, что $x \in_{\beta} M$, если $(\forall N =_{\beta} M) (x \in FV(N))$.

13.2.12. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $M \equiv M_0 \xrightarrow{1} M_1 \xrightarrow{1} \dots$ — квази-ГК-редукция. Допустим, что $\forall i (x \in FV(M_i))$. Тогда

- (i) $x \in_{\beta} M$;
- (ii) $x \notin FV(N) \Rightarrow M \neq_{\beta} N$.

Доказательство. Пусть $M = N$. Тогда по теореме Чёрча — Россера для некоторого Z

$$M \xrightarrow{1} Z, \quad N \xrightarrow{1} Z.$$

¹⁾ От Gross — Knuth. — Прим. перев.

Утверждение. $x \in \text{FV}(Z)$. Действительно, в силу теоремы 13.2.11

$$Z \rightarrow M_i$$

для некоторого i . Теперь из $x \in \text{FV}(M_i)$ следует в силу предложения 3.3.12, что $x \in \text{FV}(Z)$.

Но тогда мы получаем и $x \in \text{FV}(N)$, так как $N \rightarrow Z$. Поэтому $x \in {}_\beta M$.

(ii) непосредственно следует из (i). $\square$

13.2.13. Приложение. Пусть $A \equiv \Theta(\lambda a x. \langle a x \rangle)$. Заметим, что $Ax \rightarrow \langle Ax \rangle$. Следовательно,

$$\begin{array}{c} \text{BT}(Ax) = \lambda z. z \\ \quad | \\ \quad \lambda z. z \\ \quad | \\ \quad \lambda z. z \\ \quad | \\ \quad \vdots \end{array}$$

и потому $\text{BT}(Ax) = \text{BT}(Ay)$ для всех x, y . Тем не менее $Ax \neq Ay$, если $x \neq y$.

Доказательство. Пусть $\omega \equiv \lambda a x. \langle a a x \rangle$. Заметим, что Ax имеет следующую квази-GK-редукцию:

$$\begin{array}{l} Ax \rightarrow \omega \omega x \xrightarrow{\text{gk}} (\lambda x. \langle \omega \omega x \rangle) x \\ \rightarrow \langle \omega \omega x \rangle \xrightarrow{\text{gk}} \langle (\lambda x. \langle \omega \omega x \rangle) x \rangle \\ \rightarrow \langle \langle \omega \omega x \rangle \rangle \xrightarrow{\text{gk}} \dots \\ \dots \end{array}$$

Нужный результат получается теперь из того, что $x \notin \text{FV}(Ay)$, и следствия 13.2.12. $\square$

13.3. Рекурсивная CR-стратегия

В этом пункте будет доказано существование рекурсивной CR-стратегии. Использованная конструкция заимствована из статьи Бергстры и Клопа [1979].

13.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Терм $M \in \Lambda$ называется *минимальным*, если

$$\forall N [N = M \Rightarrow N \rightarrow M].$$

ПРИМЕРЫ. (1) Любая н. ф. минимальна.

(2) Ω минимален.

(3) Терм WWW , где $W \equiv \lambda x y. x y u$, минимален.

13.3.2. ЛЕММА. Если M минимален, то он либо находится в н. ф., либо вообще не имеет н. ф.

Доказательство. Допустим, что M имеет н. ф. N . Из минимальности терма M следует, что $N \rightarrow M$. Но тогда $N \equiv M$ в силу следствия 3.2.9(i). Следовательно, M находится в н. ф. $\square$

13.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $H \in \Lambda \rightarrow \Lambda$ — частичное отображение.

(i) Говорят, что H *конечно*, если конечна $\text{Dom}(H)$.

(ii) Говорят, что H — *частичная редукционная стратегия*, если для всех $M \in \text{Dom}(H)$ имеет место $M \rightarrow H(M)$.

(iii) Говорят, что частичная редукционная стратегия H обладает свойством CR, если для всех $M, N \in \text{Dom}(H)$ имеет место

$$M = {}_\beta N \Rightarrow (\exists p q \in \mathbb{N}) (\forall p' \leq p) (\forall q' \leq q)$$

$$[H^{p'}(M), H^{q'}(N) \in \text{Dom}(H) \text{ и } H^p(M) \equiv H^q(N)].$$

(iv) H -цикл — это конечная последовательность $\langle M_0, \dots, M_n \rangle$, такая, что

$$H(M_0) \equiv M_1, H(M_1) \equiv M_2, \dots, H(M_n) \equiv M_0.$$

Такой цикл *присоединен* к терму M , если $M = {}_\beta M_i$ для некоторого $i \leq n$.

(v) Пусть $\mathcal{C} = \langle M_0, \dots, M_n \rangle$ и $\mathcal{C}' = \langle M'_0, \dots, M'_{n'} \rangle$ — два H -цикла. Скажем, что $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ *соединены*, если $M_i = {}_\beta M'_j$ для некоторых $i \leq n, j \leq n'$. Циклы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ *идентичны*, если $n = n'$ и $M_i \equiv M'_i$ для некоторого $i \leq n$.

(vi) Пусть $\mathcal{X} \subset \Lambda$. Замыкание множества $\mathcal{X}$ по стратегии H (обозначаемое через $\text{Cl}_H(\mathcal{X})$) — это наименьшее множество $\mathcal{X}'$, такое что

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{X}' \text{ и } (\forall M \in \mathcal{X}' \cap \text{Dom}(H)) (H(M) \in \mathcal{X}').$$

(vii) H -цикл $\mathcal{C}$ *минимален*, если каждый терм $M \in \mathcal{C}$ минимален. Очевидно, что это имеет место т. и т. т., когда некоторый терм $M \in \mathcal{C}$ минимален.

Следующее утверждение показывает, каким требованиям должна удовлетворять CR-стратегия.

13.3.4. ЛЕММА. Предположим, что F есть CR-стратегия, а $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — некоторые F -циклы. Тогда

(i) $\mathcal{C}_1$ минимален;

(ii) если $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ соединены, то они идентичны.

Доказательство. (i) Пусть $M \in \mathcal{C}$ и $M \rightarrow N$. Тогда

$$\exists n, m (F^n(N) \equiv F^m(M) \in \mathcal{C})$$

и, следовательно, $N \rightarrow F^m(M) \rightarrow M$. Поэтому M минимален.

(ii) Пусть $M_i \in \mathcal{E}_i$ и $M_1 = M_2$. Тогда

$$\exists n, m (F^n(M_1) \equiv F^m(M_2)).$$

Отсюда следует, что рассматриваемые два цикла идентичны. $\square$

13.3.5. Лемма. Имеется последовательность множеств $\mathcal{E}_n \subset \Lambda$, такая что

- (i) $\mathcal{E}_n$ конечно и вычислимо по n ;
- (ii) $M, N \in \mathcal{E}_n \Rightarrow M =_\beta N$;
- (iii) $M =_\beta N \Rightarrow M, N \in \mathcal{E}_n$ для некоторого n (вычислимого по M, N).

Доказательство. Пусть $M_0, M_1, M_2, \dots$ — эффективное перечисление множества Λ . Будем писать $CR_n(M, N)$, если оба терма M, N редуцируются к одному и тому же терму Z за менее чем n шагов. Положим

$$\|M\|_1 = \|M\| + \sum \{i \mid v_i \in FV(M)\},$$

где $\{v_0, v_1, \dots\}$ — множество всех переменных λ -исчисления. Тогда множество $\{M \mid \|M\|_1 < n\}$ конечно при любом n . Пусть $\langle n, m, l \rangle$ — рекурсивное взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}^3$ на $\mathbb{N}$ с рекурсивными проекциями

$$\langle n_0, n_1, n_2 \rangle_i = n_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Положим теперь

$$\mathcal{E}_n = \{N \mid \|N\|_1 \leq (n)_0 \text{ и } CR_{(n)_1}(M_{(n)_2}, N)\}.$$

Тогда (i) очевидно в силу тезиса Чёрча. (ii) получается из того, что $M, N \in \mathcal{E}_n$ влечет $M =_\beta M_{(n)_2} =_\beta N$. Чтобы доказать (iii), допустим, что $M =_\beta N$. Тогда по теореме Чёрча — Россера получаем $CR_{n_1}(M, N)$ для некоторого n_1 . Пусть $M \equiv M_{n_2}$ и $n_0 = \max(\|M\|_1, \|N\|_1)$. Тогда $M, N \in \mathcal{E}_{\langle n_0, n_1, n_2 \rangle}$. $\square$

13.3.6. Лемма. Пусть множество $\mathcal{E} \subset \Lambda$ конечно.

(i) Предикат (от M)

$$(*) \quad (\exists N \notin \mathcal{E})(M \rightarrow N)$$

рекурсивен.

(ii) Если $(*)$ неверно для M , то $G(M) \subseteq \mathcal{E}$ и, следовательно, граф $G(M)$ конечен.

(iii) Пусть H — конечная частичная стратегия. Тогда имеется рекурсивная функция, распознающая предикат (от M)

в $\mathcal{E}$ имеется H -цикл, присоединенный к M

для термов M , не удовлетворяющих $(*)$.

Доказательство. (i) Для данного терма M рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_n = \{N \mid M \rightarrow N \text{ за менее чем } n \text{ шагов}\}.$$

Заметим, что все множества $\mathfrak{M}_n$ конечны и рекурсивны по n . Очевидно, что $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1}$ и что из $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathfrak{M}_n$ следует $\mathfrak{M}_{n+k} = \mathfrak{M}_n$ для всех k .

Вычислим теперь наименьшее $n (\leq \text{Card}(\mathcal{E}))$, такое, что

$$(1) \quad \mathfrak{M}_n \not\subseteq \mathcal{E} \quad \text{или} \quad (2) \quad \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n+1} \subseteq \mathcal{E}.$$

Тогда $(*)$ следует из (1).

(ii) Если $(*)$ неверно, то имеет место (2) и $G(M) = \mathfrak{M}_n$ для этого n .

(iii) Пусть $\mathcal{C} = \langle M_0, \dots, M_n \rangle$ — H -цикл в $\mathcal{E}$. Вычислим $G(M)$. Тогда $\mathcal{C}$ присоединен к M т. и т. т., когда $M_0 \in G(M)$. Повторяем это для всех H -циклов в $\mathcal{E}$. $\square$

13.3.7. Основная конструкция. Существует рекурсивная последовательность $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots$ конечных частичных редукционных стратегий, такая, что имеет место следующее. Пусть множества $\mathcal{E}_k$ построены согласно лемме 13.3.5. Положим

$$\mathcal{E}_0 = \emptyset, \quad \mathcal{E}_{k+1} = \text{Cl}_{F_k}(\mathcal{E}_k).$$

Тогда для всех k

- (i) $\text{Dom}(F_k) \supseteq \mathcal{E}_k$;
- (ii) $F_k \upharpoonright \mathcal{E}_k$ — частичная CR-стратегия;
- (iii) если $\text{Dom}(F_k)$ содержит F_k -цикл $\mathcal{C} = \langle M_0, \dots, M_n \rangle$, то M_0 минимален;
- (iv) если $\text{Dom}(F_k)$ содержит два соединенных F_k -цикла, то они идентичны.

Доказательство. Стратегии F_k , удовлетворяющие (i) — (iv), будут строиться индукцией по k . При этом F_k будет вычисляться по k .

Берем $F_0 = \emptyset$. Условия (i) — (iv) выполнены.

Предположим теперь, что уже построены F_k , удовлетворяющие (i) — (iv). Пусть

$$(*) \quad \text{Dom}(F_{k+1}) = \mathcal{E}_{k+1} \cup \text{Dom}(F_k),$$

$$\mathcal{A}_{k+1} = \text{Dom}(F_{k+1}) - \text{Dom}(F_k).$$

Положим

$$F_{k+1}(M) = \begin{cases} F_k(M), & \text{если } M \in \text{Dom}(F_k), \\ M_{k+1}, & \text{если } M \in \mathcal{A}_{k+1}, \end{cases}$$

где M_{k+1} определен следующим образом (см. также рис. 13.7).

Узнаем, содержит ли множество $\mathcal{E}_{k+1}$ какой-либо F_k -цикл $\mathcal{C} = \langle N_0, \dots, N_m \rangle$. Если да, то в силу (iii) терм N_0 минимален, откуда $M \rightarrow N_0$ (ведь $M =_\beta N_0$, так как $M, N_0 \in \mathcal{E}_{k+1}$). Полагаем

$$(1) \quad M_{k+1} \equiv N_0$$

(где N_0 выбирается некоторым каноническим способом).

Если F_k -цикла нет, вычисляем общий редукт A_{k+1} (не обязательно принадлежащий $\mathcal{G}_{k+1}$) всех элементов множества $\mathcal{A}_{k+1}$. Узнаем (это возможно в силу леммы 13.3.6(i)), существует ли редукт термина A_{k+1} , не содержащийся в $\text{Dom}(F_{k+1})$. Если да, то

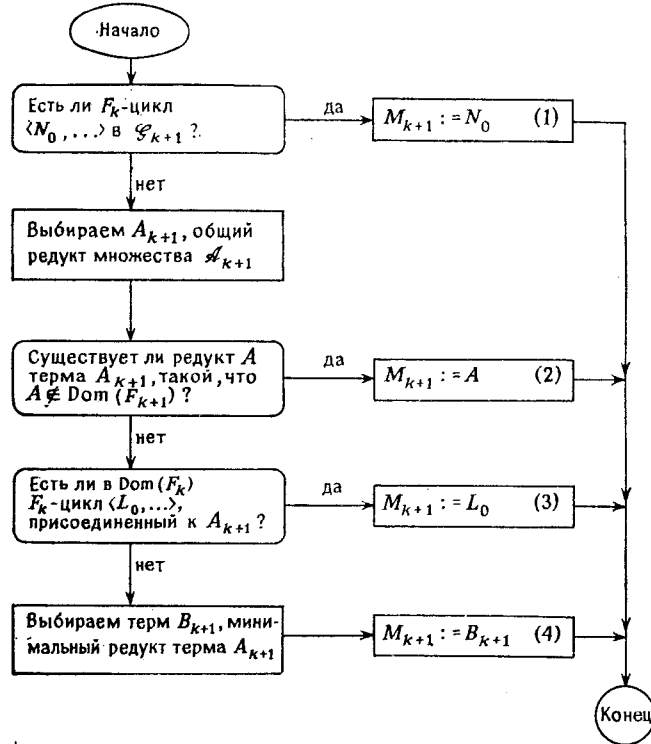


Рис. 13.7. Вычисление термина M_{k+1}

выбираем один из таких редуктов, обозначаем его через A и полагаем

$$(2) \quad M_{k+1} \equiv A.$$

Если нет, проверяем, существует ли в $\text{Dom}(F_k)$ какой-то F_k -цикл $\langle L_0, \dots, L_p \rangle$, присоединенный к A_{k+1} (что в рассматриваемом случае возможно в силу леммы 13.3.6(iii)). Если такой цикл найден, то полагаем

$$(3) \quad M_{k+1} \equiv L_0.$$

Если такого цикла нет, выбираем терм $B_{k+1} \in \text{Dom}(F_{k+1})$, который минимален и является редуктом термина A_{k+1} (B_{k+1} су-

ществует, так как в рассматриваемом случае множество $G(A_{k+1})$ конечно по лемме 13.3.6(ii)). Наконец, полагаем

$$(4) \quad M_{k+1} \equiv B_{k+1}.$$

Вычисление термина M_{k+1} можно оформить в виде блок-схемы, приведенной на рис. 13.7.

Это завершает построение термина M_{k+1} и определение стратегии F_{k+1} . В силу своего построения F_{k+1} вычислима по F_k и $\mathcal{G}_k$. Следовательно, $\lambda k. F_k$ рекурсивна. Очевидно, что $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots$.

Теперь проверим, что для F_{k+1} выполняются условия (i)–(iv).

(i) сразу следует из (*).

(ii) *Случай 1.* M_{k+1} определен соотношением (1). Тогда все элементы множества $\mathcal{A}_{k+1}$ переводятся в N_0 стратегией F_{k+1} . Элементы множества $\mathcal{G}_{k+1} \cap \text{Dom}(F_k)$ либо переводятся в $\mathcal{A}_{k+1}$, а значит, и в N_0 стратегией F_{k+1} , либо циклятся в $\mathcal{G}_{k+1} \cap \text{Dom}(F_k)$. Но тогда в силу п. (iv) предположения индукции они также переходят в N_0 .

Случай 2. M_{k+1} определен одним из соотношений (2)–(4). Тогда в $\mathcal{G}_{k+1}$ нет F_k -цикла. Следовательно, все элементы множества $\mathcal{G}_{k+1} \cap \text{Dom}(F_k)$ переводятся в $\mathcal{A}_{k+1}$ (а значит, и в M_{k+1}) стратегией F_{k+1} , и то же верно для элементов множества $\mathcal{A}_{k+1}$.

(iii), (iv). Если терм M_{k+1} определен одним из соотношений (1)–(3), то новых циклов не возникает. Поэтому (iii) и (iv) следуют из предположения индукции.

Если M_{k+1} определен соотношением (4) и создан новый цикл $\mathcal{C}$, то (iii) выполнено, так как B_{k+1} минимален, а (iv) выполнено, так как никакие другие F_{k+1} -циклы не соединены с $\mathcal{C}$. $\square$

13.3.8. Следствие. Существует рекурсивная стратегия F_{CR} , обладающая свойством CR.

Доказательство. Пусть $F_0, F_1, \dots$ — стратегии, введенные в конструкции 13.3.7. Положим $F_{CR} = \bigcup_n F_n$. Тогда F_{CR} — тотальная (т. е. определенная для всех термов) стратегия, так как в силу леммы 13.3.5(iii) любой терм $M \in \Lambda$ принадлежит некоторому множеству $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{G}_{k+1}$. Так как это число k может быть найдено эффективно, стратегия F_{CR} рекурсивна.

Если $M = N$, то по лемме 13.3.5(iii) мы имеем $M, N \in \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ для некоторого n . Так как частичная стратегия $F_{CR} \upharpoonright \mathcal{G}_{n+1} = F_{n+1} \upharpoonright \mathcal{G}_{n+1}$ обладает свойством CR, то

$$F_{CR}^p(M) \equiv F_{CR}^q(N)$$

для некоторых p, q . Следовательно, F_{CR} обладает свойством CR. $\square$

Согласно своему определению F_{CR} не является 1-стратегией. В упр. 13.6.6 строится (нерекурсивная) 1-стратегия со свойством CR. См. также работу Бергстры и Клопа [1979], где построена рекурсивная 1-стратегия, обладающая свойством CR на S-термах.

13.4. Эффективная закливающая стратегия

В этом пункте будет построена эффективная закливающая стратегия. В качестве приложения будет доказана общая теорема о консервативности 11.3.7. Эти результаты взяты из работы Барендрегта и др. [1976].

13.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим редукционную стратегию F_{∞} следующей индукцией по длине терма:

$F_{\infty}(M) = M$, если M находится в н. ф.

Если терм M не находится в н. ф., запишем его в виде $C[(\lambda x.P)Q]$, где $R \equiv (\lambda x.P)Q$ — самый левый редекс терма M . Тогда

$F_{\infty}(M) = C[P[x := Q]]$, если R есть I -редекс.

В противном случае (если R есть K -редекс) полагаем

$$F_{\infty}(M) = \begin{cases} C[P], & \text{если } Q \text{ находится в н. ф.} \\ C[(\lambda x.P)(F_{\infty}(Q))], & \text{если } Q \text{ не находится в н. ф.} \end{cases}$$

Более явное описание действия F_{∞} дается с помощью следующих понятий.

13.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть R — редекс $(\lambda x.P)Q$. re -часть (или просто re) терма R — это $(\lambda x.P)$, а $decs$ -часть (или просто $decs$) — это терм Q .

(ii) Пусть M — терм, не находящийся в н. ф. Производная (или производный терм) терма M (обозначаемая через M^+) — это $decs$ -часть самого левого редекса в M .

(iii) Пусть M — терм. Его производная последовательность $M^0, M^1, \dots, M^n$ определяется следующим образом: $M^0 \equiv M$, $M^{k+1} = (M^k)^+$, если M^k не находится в н. ф., и M^{k+1} не определено в противном случае. Очевидно, что любая производная последовательность конечна.

(iv) Самый левый редекс терма M^i обозначается через R^i и называется специальным редексом порядка i (для) терма M ($0 \leq i \leq n$). См. рис. 13.8.

13.4.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Из определений 13.4.1 и 13.4.2 видно, что стратегия F_{∞} сворачивает первый I -редекс в последовательности $R^0, R^1, \dots, R^{n-1}$, если таковой имеется; в противном случае F_{∞} сворачивает R^{n-1} .

13.4.4. ЛЕММА. Пусть $M \equiv C[(\lambda x.P)Q]$, где $R \equiv (\lambda x.P)Q$ — самый левый редекс в M . Если $M \rightarrow M'$, то $M' \equiv C'[(\lambda x.P')Q']$, где $P \rightarrow P'$, $Q \rightarrow Q'$ и $C[z] \rightarrow C'[z]$ для любой переменной z .

Доказательство. Если $M \rightarrow M'$, то доказываемое утверждение очевидно: так как R — самый левый редекс, то ничего не подставляется внутрь R и сам R не подставляется вме-

$$\begin{array}{c} M \equiv M^0 \\ \cup \\ R^0 \equiv (\lambda x_0.P_0) M^1 \\ \cup \\ R^1 \equiv (\lambda x_1.P_1) M^2 \\ \cup \\ \vdots \\ R^{n-1} \equiv (\lambda x_{n-1}.P_{n-1}) M^n \end{array}$$

где M^n находится в н. ф.

Рис. 13.8

сто какой-либо переменной. В общем случае все получается по транзитивности. $\square$

13.4.5. ЛЕММА. Пусть $M \equiv C[(\lambda x.P)Q]$, где $R \equiv (\lambda x.P)Q$ — самый левый редекс. Допустим, что

- (i) R есть K -редекс;
 - (ii) $\infty(M)$;
 - (iii) неверно $\infty(Q)$.
- Тогда $\infty(C[P])$.

Доказательство. Пусть

$$\sigma : M \equiv M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$$

— бесконечная редукционная цепочка. Возможны два случая.

- (1) Для любого k верно $M \rightarrow M_k$. Тогда по лемме 13.4.4 $\neq \ell$

σ имеет вид

$$C_0[(\lambda x.P_0)Q_0] \rightarrow C_1[(\lambda x.P_1)Q_1] \rightarrow C_2[(\lambda x.P_2)Q_2] \dots,$$

где $C_n[z] \rightarrow C_{n+1}[z]$, $P_n \rightarrow P_{n+1}$, $Q_n \rightarrow Q_{n+1}$. Так как $\infty(Q)$ неверно, существует m , такое, что $Q_m \equiv Q_{m'}$ для всех $m' \geq m$. Иными словами, в одношаговой редукции

$$C_{m'}[(\lambda x.P_{m'})Q_{m'}] \rightarrow C_{m'+1}[(\lambda x.P_{m'+1})Q_{m'+1}]$$

сворачивается редекс, находящийся вне $Q_{m'+1}$.

Поэтому верно и

$$C_{m'}[P_{m'}] \rightarrow C_{m'+1}[P_{m'+1}].$$

Следовательно,

$$C[P] \rightarrow C_m[P_m] \rightarrow C_{m+1}[P_{m+1}] \dots$$

— бесконечная редукция, начинающаяся термом $C[P]$, и, таким образом, верно $\infty(C[P])$.

(2) Для некоторого k имеем $M \xrightarrow[\neq \ell]{\rightarrow} M_k \xrightarrow[\ell]{\rightarrow} M_{k+1}$. Тогда по лемме 13.4.4 σ имеет вид

$$C_0[(\lambda x.P_0)Q_0] \xrightarrow[\neq \ell]{\rightarrow} C_k[(\lambda x.P_k)Q_k] \xrightarrow[\ell]{\rightarrow} C_k[P_k] \rightarrow \dots$$

Следовательно,

$$C[P] \rightarrow C_k[P_k] \rightarrow \dots,$$

т. е. $\infty(C[P])$. $\square$

Лемма 13.4.5 ложна без предположения, что R — самый левый редекс; см. упр. 13.6.7.

13.4.6. ТЕОРЕМА. F_∞ — эффективная закливающая однашаговая стратегия.

Доказательство. Из замечания 13.4.3 ясно, что F_∞ — эффективная однашаговая стратегия. Чтобы доказать, что F_∞ закливающая, положим $M \equiv C[(\lambda x.P)Q]$, где $R \equiv (\lambda x.P)Q$ — самый левый редекс терма M . Пусть $\infty(M)$, и пусть

$$\sigma: M \equiv M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$$

— бесконечная редукционная цепочка.

Утверждение $\infty(F_\infty(M))$ будет доказано индукцией по длине терма M (причем предположение индукции потребует только в случае 2.2.2).

Случай 1. R есть I -редекс. Тогда $F_\infty(M) \equiv C[P[x:=Q]]$.

Случай 1.1. Для всех k верно $M \xrightarrow[\neq \ell]{\rightarrow} M_k$. Тогда по лемме 13.4.4 σ имеет вид

$$C_0[(\lambda x.P_0)Q_0] \rightarrow C_1[(\lambda x.P_1)Q_1] \rightarrow \dots,$$

где $P_k \rightarrow P_{k+1}$, $Q_k \rightarrow Q_{k+1}$, $C_k[z] \rightarrow C_{k+1}[z]$. Мы докажем сейчас утверждение $\infty(C[P[x:=Q]])$. Ввиду $x \in \text{FV}[P]$ это имеет место, если верно $\infty(Q)$. В силу подстановочности наше утверждение справедливо и в случае $\infty(P)$. Если же неверно как $\infty(P)$, так и $\infty(Q)$, то имеет место $\infty(C[z])$, и наше утверждение снова следует из подстановочности.

Случай 1.2. Для некоторого k верно $M \xrightarrow[\neq \ell]{\rightarrow} M_k$ и $M_k \xrightarrow[\ell]{\rightarrow} M_{k+1}$.

Тогда σ имеет вид

$$C[(\lambda x.P)Q] \rightarrow C_k[(\lambda x.P_k)Q_k] \rightarrow C_k[P_k[x:=Q]] \equiv M_{k+1} \rightarrow \dots$$

В этом случае верно и $\infty(F_\infty(M))$, так как

$$F_\infty(M) \equiv C_0[P_0[x:=Q_0]] \rightarrow C_k[P_k[x:=Q_k]].$$

Случай 2. R есть K -редекс.

Случай 2.1. Q находится в н.ф. Тогда $F_\infty(M) \equiv C[P]$, и ввиду $\infty(Q)$ мы имеем $\infty(C[P])$ по лемме 13.4.5.

Случай 2.2. Q не находится в н.ф. Тогда $F_\infty(M) \equiv C[(\lambda x.P)(F_\infty(Q))]$.

Случай 2.2.1. $\infty(Q)$ неверно. Тогда по лемме 13.4.5 имеет место $\infty(C[P])$, откуда получается $\infty(F_\infty(M))$, так как $F_\infty(M) \equiv C[(\lambda x.P)(F_\infty(Q))] \rightarrow C[P]$.

Случай 2.2.2. $\infty(Q)$. По индукционному предположению имеем $\infty(F_\infty(Q))$, откуда $\infty(F_\infty(M))$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство теоремы 13.4.6 неконструктивно, однако рассуждение может быть сделано конструктивным, если учесть явное описание действия стратегии F_∞ (см. замечание 13.4.3).

Общая теорема о консервативности 11.3.7 будет теперь получена как приложение теоремы 13.4.6.

Заметим сначала, что доказательство теоремы о консервативности, данное для λI -исчисления, не обобщается на λK -исчисление. Напомним, что это доказательство выглядело следующим образом.

Допустим, что $M \xrightarrow{\Delta} M'$, где Δ есть I -редекс и $\infty(M)$. Пусть

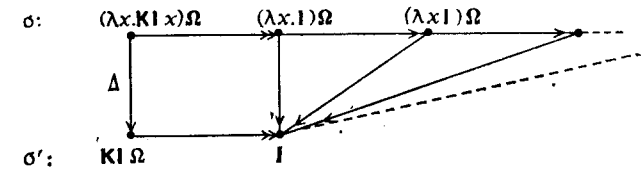
$$\sigma: M' \equiv M'_0 \rightarrow M'_1 \rightarrow \dots$$

— бесконечная редукционная цепочка. Тогда бесконечная редукция, начинающаяся термом M' , имеет вид

$$\sigma': M' \equiv M'_0 \rightarrow M'_1 \rightarrow M'_2 \rightarrow \dots,$$

где каждый из термов M'_k — полный редукт всех остатков редекса Δ в терме M_k . Следовательно, $\infty(M')$.

Следующий пример показывает, что этот метод доказательства не проходит для λK .



В такой ситуации говорят, что последовательность σ непроектируема. Общая теорема о консервативности будет доказана

путем установления того, что в случае $\infty(M)$ редукция M согласна стратегии F_∞ , является бесконечной и проектируемой, откуда и следует $\infty(M')$. Доказательство занимает п. 13.4.7—13.4.12.

13.4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Говорят, что $M \in \Lambda''$, если $M \equiv (M_0, \mathcal{F}) \in \Lambda'$ и $\Delta \in \mathcal{F} \Rightarrow \Delta$ есть I -редекс (индексированы только I -редексы).

(ii) Пусть $M \in \Lambda'$. Специальные редексы терма M определяются так же, как для λ -термов (определение 13.4.2(iv)).

13.4.8. ЛЕММА. Специальный редекс R терма $M \in \Lambda'$ никогда не входит в ре-часть никакого редекса из M .

Доказательство проводится индукцией по порядку i редекса R .

Если $i = 0$, то R — самый левый редекс терма M . Если бы R находился в ре-части какого-то редекса из M , то R не был бы самым левым редексом в M .

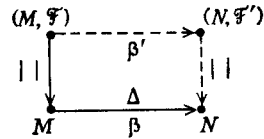
Если $i > 0$, то R — специальный редекс порядка i в терме M^+ . По предположению индукции R не находится в ре-части никакого редекса из M^+ . Поэтому если бы R находился в ре-части какого-либо редекса из M , то M^+ входил бы в эту ре-часть. Но тогда R^0 (см. определение 13.4.2) не был бы самым левым редексом в M . $\square$

13.4.9. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda'$. Если $M \rightarrow_{\beta'} N$, причем сворачивается специальный редекс Δ терма M , то

$$M \in \Lambda'' \Rightarrow N \in \Lambda''.$$

Доказательство. Индексированный I -редекс $(\lambda_i x.P)Q$ может вырождаться в K -редекс, только если внутри P стираются все свободные вхождения переменной x . Из того что Δ — специальный редекс, следует по лемме 13.4.8, что $\Delta \not\subset P$, а этого не может быть. $\square$

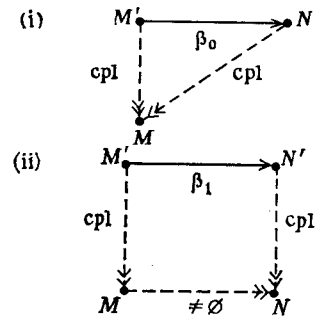
13.4.10. СЛЕДСТВИЕ.



где Δ — специальный редекс, $(M, \mathcal{F}) \in \Lambda''$, $(N, \mathcal{F}') \in \Lambda''$.

Доказательство получается ссылкой на леммы 11.2.2 и 13.4.9. $\square$

13.4.11. ЛЕММА. Пусть $M', N' \in \Lambda'$.



Доказательство аналогично доказательству леммы 11.3.3 и использует условие $M' \in \Lambda''$ п. (ii). $\square$

13.4.12. ТЕОРЕМА О КОНСЕРВАТИВНОСТИ. Пусть $M \xrightarrow{\Delta} M'$, где Δ есть I -редекс. Тогда $\infty(M) \Rightarrow \infty(M')$.

Доказательство. Положим $M_n \equiv F_\infty^n(M)$ и допустим, что $\infty(M)$. Так как F_∞ — зацикливающая стратегия, то

$$\sigma: M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \xrightarrow{\Delta_2} \dots$$

— бесконечная цепочка. В силу замечания 13.4.3 каждый из редексов Δ_k специальный.

Пусть $\mathcal{F}_0 = \{\Delta\}$. Тогда $(M_0, \mathcal{F}_0) \in \Lambda''$. В силу следствия 13.4.10 имеются $\mathcal{F}_k$, такие, что для всех k

$$(M_k, \mathcal{F}_k) \in \Lambda'' \text{ и } (M_k, \mathcal{F}_k) \rightarrow_{\beta'} (M_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1}).$$

Пусть M'_k — полная развертка терма $(M_k, \mathcal{F}_k)$. Тогда $M' \equiv M'_0$. Если

$$(M_k, \mathcal{F}_k) \rightarrow_{\beta_1} (M_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1}),$$

то по лемме 13.4.11(i)

$$M'_k \xrightarrow{\neq \emptyset} M'_{k+1}.$$

Если, с другой стороны,

$$(M_k, \mathcal{F}_k) \rightarrow_{\beta_0} (M_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1}),$$

то по лемме 13.4.11(ii)

$$M'_k \equiv M'_{k+1}.$$

Следовательно, мы находимся в ситуации, изображенной на рис. 13.9.

По теореме 11.2.20 цепочка последовательных $\rightarrow_{\beta_0}$ -свертываний всегда конечна. Поэтому некоторая подпоследовательность термов M'_i есть бесконечная редукционная цепочка для M' , т. е. $\infty(M')$. $\square$

Отметим, что в противоположность F_ℓ стратегия F_∞ рассматривает «инфраструктуру» редексов (т. е. устанавливает, является ли данный Δ K - или I -редексом), а не только их положение. В упр. 13.6.8 будет показано, что это существенно для закикливающей стратегии.

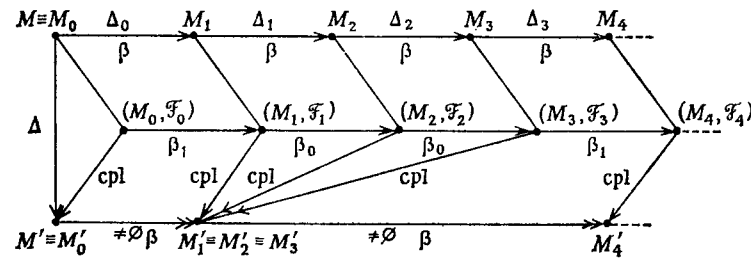


Рис. 13.9

13.4.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть R — редекс со сверткой R' . Скажем, что R закикливающий, если $\forall C [\] \infty C [R] \Rightarrow \infty C [R']]$.

Теорема 13.4.12 утверждает, что I -редексы — закикливающие. В работе Бергстры и Клопа [1982] дана следующая характеристика закикливаемости K -редексов.

13.4.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда

$$M \geq_\infty N, \text{ если } \forall * [\infty (N^*) \Rightarrow \infty (M^*)],$$

где $*$ пробегает все подстановочные частные случаи.

13.4.15. ТЕОРЕМА. K -редекс $(\lambda x.M)N$ является закикливающим т. и т. т., когда $M \geq_\infty N$.

Доказательство. См. Бергстра и Клоп [1982]. $\square$

13.4.16. СЛЕДСТВИЕ. Редекс $(\lambda x.M)N$ является закикливающим т. и т. т., когда $x \in \text{FV}(M)$ или $M \geq_\infty N$.

Доказательство состоит из ссылки на теоремы 13.4.12 и 13.4.15. $\square$

13.5. Оптимальные стратегии

В этом пункте будет доказано, что нет рекурсивных L -оптимальных, L -1-оптимальных и B -оптимальных стратегий. Неизвестно, существует ли рекурсивная B -1-оптимальная стратегия, но кажется, что и она невозможна. Кроме того, будет показано, что нет стратегии, которая была бы одновременно L -1- и B -1-оптимальной. Эта терминология и результаты заимствованы

из работы Барендрегта и др. [1976]. Другой подход к оптимальной редукции имеется у Леви [1980].

Очевидно, что существуют нерекурсивные оптимальные стратегии.

13.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Существует L -оптимальная стратегия.

(ii) Существует L -1-оптимальная стратегия.

(iii) Существуют B -оптимальная и B -1-оптимальная стратегии.

Доказательство. (i) Полагаем

$$F(M) = \begin{cases} M, & \text{если } M \text{ находится в н. ф.}, \\ N, & \text{если } M \rightarrow N \text{ и } N \text{ находится в н. ф.}, \\ F_\ell(M), & \text{если } M \text{ не имеет н. ф.} \end{cases}$$

Тогда

$$L_F(M) = \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ находится в н. ф.}, \\ 1, & \text{если } M \text{ имеет н. ф.}, \\ \infty, & \text{если } M \text{ не имеет н. ф.} \end{cases}$$

Следовательно, стратегия F L -оптимальна.

(ii) Если M имеет н. ф., обозначим через σ_M кратчайшую редукцию термина M к н. ф. Положим

$$F(M) = \begin{cases} M, & \text{если } M \text{ находится в н. ф.}, \\ M_1, & \text{если } M \text{ имеет н. ф. и } \sigma_M: M \rightarrow M_1 \rightarrow \dots, \\ F_\ell(M) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда стратегия F L -1-оптимальна.

(iii) устанавливается аналогично. $\square$

13.5.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Не существует рекурсивной L -оптимальной стратегии.

(ii) Не существует рекурсивной B -оптимальной стратегии.

Доказательство. (i) Если F — L -оптимальная стратегия, то $F(M)$ находится в н. ф. для всех M , имеющих н. ф. Следовательно,

$$M \text{ имеет н. ф.} \Leftrightarrow F(M) \text{ находится в н. ф.}$$

Поэтому если бы F была рекурсивной, то и множество $\{M \mid M \text{ имеет н. ф.}\}$ было бы рекурсивным вопреки теореме 6.6.5.

(ii) Рассмотрим $\mathcal{A} = \{M \mid M \text{ имеет н. ф. } N \text{ и } \|N\| \leq \|M\|\}$. Очевидно, что это Σ_1^0 -полное множество (см. упр. 13.6.15) и, следовательно, $\mathcal{A}$ не рекурсивно. Положим

$$\Lambda_n = \{M \in \Lambda \mid \|M\| \leq n\}.$$

Заметим, что каждое из множеств Λ_n конечно. Предположим, что F есть B -оптимальная стратегия.

Утверждение.

$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow F$ -цепочка терма M лежит целиком в $\Lambda_{\|M\|}$.

Действительно, импликация $\Leftarrow$ тривиальна, так как F — нормализующая стратегия. Если бы импликация $\Rightarrow$ не имела места, то F можно было бы улучшить, полагая $F(M) \equiv N$, где N есть н. ф. терма M .

Таким образом, вместе со стратегией F было бы рекурсивно и множество $\mathcal{A}$, что дает противоречие. $\square$

Теперь докажем, что не существует оптимальной L -1-стратегии.

13.5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если M имеет н. ф., то $n(M)$ обозначает длину кратчайшей редукционной цепочки (состоящей из одношаговых редукций и), ведущей от терма M к н. ф. Если M не имеет н. ф., то $n(M) = \infty$.

13.5.4. ЛЕММА. (i) Если $A =_{\beta} \lambda x y. I$, то для всех B, C
 $n(ABC) = n(A) + 2$.

(ii) Если $A =_{\beta} a$, то для всех B, C
 $n(ABC) = n(A) + n(B) + n(C)$.

Доказательство. См. упражнение 13.6.12. $\square$

13.5.5. ЛЕММА. Пусть F есть L -1-оптимальная стратегия. Пусть
 $M \equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB (\Pi))$,

где A, B находятся в н. ф. Тогда

(i) $AB = \lambda x y. I \Rightarrow F(M) \equiv (\lambda y. yB (\Pi)) A (\lambda y. yB (\Pi))$,

(ii) $AB = a \Rightarrow F(M) \equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB I)$.

Доказательство. (i) В силу предположения и теоремы Чёрча — Россера $AB \rightarrow \lambda x y. I$. Если в M первым сворачивается редекс Π , то после этого кратчайшая редукция к н. ф. имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma: M &\equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB I) \rightarrow \\ &\rightarrow (\lambda y. yB I) A (\lambda y. yB I) \rightarrow AB I (\lambda y. yB I) \rightarrow_{\sigma_1} I, \end{aligned}$$

где σ_1 — редукция наименьшей возможной длины. По лемме 13.5.4(i)

$$\|\sigma\| = 3 + \|\sigma_1\| = 3 + n(AB) + 2 = n(AB) + 5.$$

Если в M первым сворачивается самый левый редекс, то после этого кратчайшая редукция к н. ф. имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma': M &\equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow \\ M_2 &\equiv (\lambda y. yB (\Pi)) A (\lambda y. yB (\Pi)) \\ &\rightarrow AB (\Pi) (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow_{\sigma'_1} I, \end{aligned}$$

где σ'_1 — снова редукция кратчайшей возможной длины. Снова по лемме 13.5.4(i) имеем

$$\|\sigma'\| = 2 + \|\sigma'_1\| = 2 + n(AB) + 2 = n(AB) + 4.$$

Таким образом, из L -1-оптимальности F следует, что $F(M) \equiv M_2$.

(ii) В этом случае $AB \rightarrow a$. Если в M первым сворачивается Π , после этого кратчайшая редукция к н. ф. опять имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma: M &\equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow \\ M_1 &\equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB I) \\ &\rightarrow (\lambda y. yB I) A (\lambda y. yB I) \\ &\rightarrow AB I (\lambda y. yB I) \rightarrow_{\sigma_1} a I (\lambda y. yB I), \end{aligned}$$

где σ_1 — кратчайшая из возможных. По лемме 13.5.4(ii)

$$\|\sigma\| = 3 + \|\sigma_1\| = 3 + n(AB) + 0 + 0 = n(AB) + 3.$$

Если в M первым сворачивается самый левый редекс, то кратчайшая редукция к н. ф. проходит следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma': M &\equiv (\lambda x. xAx) (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow (\lambda y. yB (\Pi)) A (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow \\ &\rightarrow_{\sigma'_1} AB (\Pi) (\lambda y. yB (\Pi)) \rightarrow_{\sigma'_1} a I (\lambda y. yB I), \end{aligned}$$

где σ'_1 — кратчайшая из возможных. По лемме 13.5.4(ii) получаем

$$\begin{aligned} \|\sigma'\| &= 2 + n(AB (\Pi) (\lambda y. yB (\Pi))) = \\ &= 2 + n(AB) + 1 + 1 = n(AB) + 4. \end{aligned}$$

Таким образом, теперь $F(M) \equiv M_1$, так как стратегия F L -1-оптимальна. $\square$

13.5.6. ТЕОРЕМА. Не существует рекурсивной L -1-оптимальной стратегии.

Доказательство. По теореме Скотта 6.6.2(i) дизъюнктивные рекурсивно перечислимые (р. п.) множества

$$\mathcal{A} = \{N \mid N = \lambda x y. I\}, \quad \mathcal{B} = \{N \mid N = a\}$$

рекурсивно неотделимы. Поэтому рекурсивно неотделимы дизъюнктивные р. п. множества

$$\# \mathcal{A} = \{n \mid E_a \ulcorner n \urcorner = \lambda xy.1\}, \quad \# \mathcal{B} = \{n \mid E_a \ulcorner n \urcorner = a\}.$$

В силу упр. 8.5.19 можно считать, что E_a находится в н. ф. Рассмотрим теперь термы

$$M_n \equiv (\lambda x.x E_a x) (\lambda y.y \ulcorner n \urcorner (\Pi)).$$

Допустим, что F — рекурсивная L -1-оптимальная стратегия. Тогда множество

$$\mathcal{C} = \{n \mid M_n \xrightarrow{F} F(M_n)\}$$

рекурсивно. По лемме 13.5.5 множество $\mathcal{C}$ отделяет $\# \mathcal{A}$ и $\# \mathcal{B}$ что невозможно. $\square$

13.5.7. ТЕОРЕМА. Не существует одношаговой стратегии F , которая была бы одновременно L -1- и B -1-оптимальной.

Доказательство. Рассмотрим терм

$$M \equiv (\lambda xy.pxx(y))((\lambda x.pxx)A)1,$$

где A находится в н. ф. и имеет очень большую длину. Пусть Δ_F — самый левый редекс терма M , а Δ_i — внутренний редекс. Утверждение:

(i) Чтобы минимизировать $L_F(M)$, стратегия F должна сворачивать Δ_i .

(ii) Чтобы минимизировать $B_F(M)$, стратегия F должна сворачивать Δ_F .

Утверждение (i) очевидно, так как сворачивание редекса Δ_F удваивает Δ_i . Чтобы установить (ii), сравним редукции, начинающиеся сворачиванием Δ_F и Δ_i .

$$\begin{aligned} \sigma: M &\xrightarrow{\Delta_F} \\ &(\lambda y.p((\lambda x.pxx)A)((\lambda x.pxx)A)(y))1 \rightarrow \\ &\rightarrow p((\lambda x.pxx)A)((\lambda x.pxx)A)(\Pi) \rightarrow \\ &\rightarrow p((\lambda x.pxx)A)((\lambda x.pxx)A)1 \rightarrow \\ &\rightarrow p(pAA)((\lambda x.pxx)A)1 \rightarrow \\ &\rightarrow p(pAA)(pAA)1. \end{aligned}$$

(Так как терм A очень длинный, лучше не сделаешь.)

$$\begin{aligned} \sigma': M &\xrightarrow{\Delta_i} (\lambda xy.pxx(y))(pAA)1 \rightarrow \\ &\rightarrow M' \equiv (\lambda y.p(pAA)(pAA)(y))1 \rightarrow p(pAA)(pAA)(\Pi) \rightarrow \\ &\rightarrow p(pAA)(pAA)1. \end{aligned}$$

Мы видим, что терм M^* длиннее, чем любой из термов, встречающихся в предшествующих редукциях σ . Таким образом, F должна сворачивать Δ_F . Это доказывает наше утверждение.

Так как 1-стратегия не может сворачивать сразу Δ_F и Δ_i , стратегия F с указанным свойством невозможна. $\square$

13.6. Упражнения

13.6.1. Показать, что F_ℓ не кофинальна.

13.6.2. Показать, что $F_{\text{гк}}$ не обладает свойством CR.

13.6.3. Пусть $C[a]$ — контекст, в который a входит только пассивно.

Пусть $F \equiv \Theta(\lambda f x. C[\ulcorner x \urcorner])$. Тогда $F \vec{x} \twoheadrightarrow C[\vec{x}]$.

Естественная редукция терма $F \vec{x}$ — это цепочка

$$\sigma: F \vec{x} \twoheadrightarrow C[\vec{x}] \twoheadrightarrow C[C[\vec{x}]] \twoheadrightarrow \dots$$

Доказать, что σ кофинальна в $G(F)$.

13.6.4. Пусть $H \equiv \Theta(\lambda h x. \lambda h x. h x)$. Показать, что $HK \neq H1$.

13.6.5. (Клоп). Говорят, что $\sigma: M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots$ есть *максимальная редукционная цепочка*, если σ бесконечна или оканчивается термом в н. ф. Положим

$$\mathcal{R}^m(M) = \{\sigma \mid \sigma \text{ — максимальная редукционная цепочка, начинающаяся термом } M\}.$$

Пусть редукции $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}^m(M)$ таковы, что

$$\sigma: M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots,$$

$$\sigma': M'_0 \rightarrow M'_1 \rightarrow \dots$$

Скажем, что

$$\sigma \leq \sigma', \text{ если } \forall n \exists m (M_n \twoheadrightarrow M'_m).$$

$$\sigma \sim \sigma', \text{ если } \sigma \leq \sigma' \text{ и } \sigma' \leq \sigma.$$

Тогда $\sim$ — отношение эквивалентности на $\mathcal{R}^m(M)$. Пусть $[\sigma]$ — класс эквивалентности, которому принадлежит σ . Положим

$$[\sigma] \leq [\sigma'] \Leftrightarrow \sigma \leq \sigma'$$

(это определение не зависит от выбора представителей).

Наконец, *спектр* терма M — это структура

$$\text{Спек}(M) = (\mathcal{R}^m(M)/\sim, \leq).$$

(i) Показать, что если M минимален, то $\text{Спек}(M)$ одноэлементен.

(ii) Показать, что $\text{Спек}(M)$ всегда имеет наибольший элемент.

(iii) Рассмотрим следующие термы:

$$M_0 \equiv K1\Omega,$$

$$M_1 \equiv (\lambda x.1(xx))(\lambda x.1(xx)) = \Theta(1),$$

$$M_2 \equiv [\Omega_3, \Omega_3], \quad \Omega_3 \equiv (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx),$$

$$M_3 \equiv (\lambda y.\omega y)(\lambda y.\omega y), \quad \omega \equiv (\lambda x.xx).$$

Спектры этих термов изображены на рис. 13.10. Найти соответствие между термами и изображенными там структурами.

13.6.6 (Бергстра, Клоп). Показать, что существует (нерекурсивная) одношаговая CR-стратегия. (Как уже было сказано, неизвестно, существует ли рекурсивная I-стратегия, которая кофинальна или обладает свойством CR.)

13.6.7. Показать, что лемма 13.4.5 неверна, если R не самый левый редекс.

13.6.8. Скелет терма M — это результат замены каждой переменной (и свободной, и связанной) знаком $\square$. Таким образом, скелет терма $y(\lambda x.xx)$ — это $\square(\lambda\square.\square\square)$.

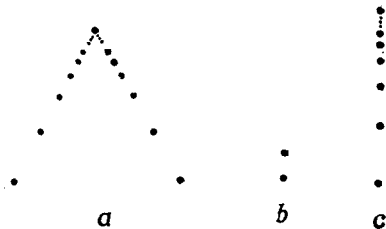


Рис. 13.10

I-стратегия называется *скелетной*, если редекс, подлежащий сворачиванию, можно определить по скелету терма. Например, F_ℓ — скелетная стратегия.

(i) Показать, что заикливающая I-стратегия не является скелетной.

(ii) Показать, что B-1-оптимальная стратегия не является скелетной.

13.6.9. (Бём). Пусть

$$M_0 \equiv H \vee H, \quad H \equiv \lambda x y . x (\lambda z . y z y) x,$$

$$M_1 \equiv L L I, \quad L \equiv \lambda x y . x (y y) x,$$

$$M_2 \equiv P Q, \quad P \equiv \lambda x . x ! x, \quad Q \equiv \lambda x y . x y ! (x y).$$

Начертить $G(M_0)$, $G(M_1)$, $G(M_2)$.

13.6.10. Показать, что для стратегии $F = F_{gk}$, определенной в 13.2.7

$$(i) F(\lambda x . y M_1 \dots M_n) = \lambda x . y F(M_1) \dots F(M_n).$$

$$(ii) F(\lambda x . (\lambda y . M_0) M_1 \dots M_n) = \lambda x . F(M_0) [y := F(M_1)] F(M_2) \dots F(M_n).$$

13.6.11 (Бергстра — Клоп). Будем писать $M >_\infty N$, если $M \geq_\infty N$ и $N \not\geq_\infty M$. Показать, что

$$(i) xxx >_\infty xx; \quad xxl >_\infty xx;$$

$$(ii) x!x \text{ и } xx \text{ несравнимы по отношению } \geq_\infty;$$

$$(iii) M \supset N \Rightarrow M \geq_\infty N.$$

13.6.12. Доказать лемму 13.5.4.

13.6.13. Определить понятие «квазиголовная редукция». Показать, что терм M неразрешим, если существует бесконечная квазиголовная редукция, начинающаяся термом M .

13.6.14 (Клоп). Пусть $\sigma: M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots$ — редукция. Редекс $\Delta \in M_i$ называется *обеспеченным*, если для некоторого $j > i$ в терме M_j нет остатка редекса Δ относительно данной редукции. Редукция σ *обеспечена*, если все редексы всех термов M_i обеспечены.

Показать, что если σ обеспечена, то она кофинальна в $G(M)$.

13.6.15. Доказать, что множество $\{M \mid M \text{ имеет н. ф. } N \text{ и } \|N\| \leq \|M\|\}$ не рекурсивно.

Глава 14

Помеченная редукция

В § 14.1 рассматривается одно расширение множества λ -термов вместе с соответствующим понятием редукции. Получающаяся система называется помеченным $\lambda\perp$ -исчислением. Основная теорема § 14.1 утверждает, что эта система сильно нормализуема. В гл. 19 помеченная редукция используется для локального анализа λ -моделей D_∞ , P_ω .

Данное конечное множество конечных β -редукционных цепочек в обычном λ -исчислении можно изоморфно вложить в помеченное λ -исчисление. Поэтому λ -термы с β -редукцией «локально сильно нормализуемы». В § 14.2 дано несколько приложений этого факта, включая симпатичные доказательства теоремы Чёрча — Россера и (сильного варианта) теоремы стандартизации. Другое приложение такого рода дано в § 14.3, где доказана непрерывность операций λ -исчисления в топологии деревьев. Наконец, в § 14.4 доказано, что операции λ -исчисления по существу последовательные.

14.1. Сильная нормализация

Помеченное λ -исчисление, изучаемое в этом пункте, было введено Хайландом [1976] и Уодсвортом [1976] для исследования λ -моделей D_∞ и P_ω .

В статьях Леви [1975], [1978] рассмотрено более общее λ -исчисление. Эта система связана с понятием сильной эквивалентности редукций, см. упр. 14.5.5.

14.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество помеченных λ -термов, обозначаемое через $\Lambda \perp^N$, определяется следующим образом.

Алфавит

$v_0, v_1, \dots$	переменные,
$(,), \lambda$	несобственные символы,
$\perp$	константа,
$0, 1, \dots, n, \dots$	метки (для каждого $n \in \mathbb{N}$).

Термы

- (i) $\Lambda \perp^N$ — это наименьший класс X , такой что
 $x \in X$ для любой переменной x ,
 $\perp \in X$,
 $M, N \in X \Rightarrow (MN) \in X$,
 $M \in X \Rightarrow (\lambda x.M) \in X$,
 $M \in X \Rightarrow (M^n) \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\Lambda \perp$ — это подкласс класса $\Lambda \perp^N$, состоящий из термов, не содержащих никаких меток.

(iii) $| \cdot | : \Lambda \perp^N \rightarrow \Lambda \perp$ — это отображение, стирающее все метки.

Подстановка

Для термов $M, N \in \Lambda \perp^N$ подстановка $M[x := N]$ вводится следующим индуктивным определением:

$$\begin{aligned} x[x := N] &\equiv N, \\ y[x := N] &\equiv y \text{ для } y \neq x, \\ \perp[x := N] &\equiv \perp, \\ (M_1 M_2)[x := N] &\equiv M_1[x := N] M_2[x := N], \\ (\lambda y.M)[x := N] &\equiv \lambda y.M[x := N], \\ (M^n)[x := N] &\equiv (M[x := N])^n. \end{aligned}$$

Для того чтобы ввести важные понятия редукции на множестве $\Lambda \perp^N$, нужно одно вспомогательное понятие редукции.

14.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем на $\Lambda \perp^N$ следующее понятие редукции:

$$label: (M^n)^m \rightarrow M^{\min(n, m)}.$$

14.1.3. ЛЕММА. Каждый помеченный λ -терм M имеет единственную $label$ -н. ф. (которую мы обозначим через $M!$).

Доказательство. Каждый терм имеет $label$ -н. ф., так как свертывание уменьшает длину терма. Из того, что функция $\min(n, m)$ ассоциативна, следует, что $\rightarrow_{label} \models \Diamond$. Значит, по лемме 3.2.2 понятие редукции $label$ обладает свойством CR. Поэтому $label$ -н. ф. единственна. $\square$

$$\text{ПРИМЕР. } ((\lambda x.((x^2)^3(x^7)^4)^8)^7)^6! \equiv (\lambda x.(x^2 x^4)^8)^6.$$

14.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. На множестве помеченных λ -термов вводятся следующие понятия редукции:

$$(1) \beta_+: (\lambda x.M)^{n+1} N \rightarrow (M[x := N^n])^n.$$

$$(2) \beta_\perp: (\lambda x.M)^0 N \rightarrow (M[x := \perp])^0.$$

$$\perp: \begin{cases} \perp^n \rightarrow \perp, \\ \lambda x.\perp \rightarrow \perp, \\ \perp M \rightarrow \perp. \end{cases}$$

В предшествующих определениях термы $M, N \in \Lambda \perp^N$, а число $n \in \mathbb{N}$ произвольно.

$$(ii) \quad lab.\beta = \beta_+ \cup \beta_\perp \cup \perp \cup label.$$

$$+ = \beta_+ \cup \perp \cup label.$$

Понятие редукции R на множестве $\Lambda \perp^N$ индуцирует отношения $\rightarrow_R, \rightarrow_R$ и $=_R$, совместимые с операциями на термах. В частности,

$$M \rightarrow_R N \Rightarrow M^n \rightarrow_R N^n.$$

14.1.5. ПРИМЕР. Используя сокращение $M^n, m \equiv (M^n)^m$, имеем

$$\begin{aligned} L &\equiv (\lambda x.x^1 x)^3 (\lambda x.xx) \rightarrow_{\beta_+} ((\lambda x.xx)^{2,1} (\lambda x.xx)^2)^2 \rightarrow_{label} \\ &\rightarrow_{label} ((\lambda x.xx)^1 (\lambda x.xx)^2)^2 \rightarrow_{\beta_+} ((\lambda x.xx)^{2,0} (\lambda x.xx)^{2,0})^{0,2} \rightarrow_{label} \\ &\rightarrow_{label} ((\lambda x.xx)^0 (\lambda x.xx)^0)^0 \rightarrow_{\beta_\perp} (\perp \perp)^{0,0} \rightarrow_{label} (\perp \perp)^0 \rightarrow_{\perp} \perp. \end{aligned}$$

Поэтому $L \rightarrow_{lab.\beta} \perp$, т. е. L имеет $lab.\beta$ -н. ф. Терм L имеет также и $+$ -н. ф., а именно $(\omega^0 \omega^0)^0$, где $\omega \equiv \lambda x.xx$. Заметим, что пунктуальность предписывает редуцировать M к M .

14.1.6. ЛЕММА. (i) $lab.\beta$ подстановочно.

(ii) $lab.\beta$ обладает слабым свойством Чёрча — Россера.

(iii) Пункты (i) и (ii) верны для $+$.

Доказательство п. (i) — тривиальное обобщение доказательства того, что β подстановочно (предложение 3.1.16).

Доказательство п. (ii) — простое обобщение доказательства слабого свойства Чёрча — Россера для β (лемма 11.1.1). Вот некоторые примеры:

$$\begin{array}{ccc} (\lambda x.(\lambda y.yx)^8 b)^3 a & \rightarrow & (\lambda x.(b^7 x)^7)^3 a \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((\lambda y.ya^2)^8 b)^2 & \rightarrow & (b^7 a^2)^{7,2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\lambda x.\perp)^3 a & \rightarrow & \perp^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \perp^3 a \rightarrow \perp a \rightarrow \perp & & \downarrow \\ & & \perp \end{array}$$

(iii) доказывается аналогично. $\square$

Теперь мы докажем, что любой помеченный λ -терм сильно $lab.\beta$ -нормализуем. Это доказательство принадлежит Ван Делену и занимает пп. 14.1.8—14.1.12. Главный шаг — доказательство того, что сильная нормализуемость термов M, N влечет сильную нормализуемость подстановки $M[x := N]$.

Другие доказательства этого факта принадлежат Р. де Врие-ру (с использованием понятия вычислимости, применяемого в случае типового λ -исчисления) и Клопу [1980] (где используется перевод в помеченное λI -исчисление и теорема о консервативности).

В оставшейся части этого пункта $\rightarrow$ и $\twoheadrightarrow$ означают $\rightarrow_{lab.\beta}$ и $\twoheadrightarrow_{lab.\beta}$.

14.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathcal{PN} = \{M \in \Lambda \perp^N \mid M \text{ сильно } lab.\beta\text{-нормализуем}\}$.

(ii) Если $M \in \mathcal{PN}$, то $d(M)$ обозначает длину самой длинной $lab.\beta$ -редукционной цепочки, начинающейся термом M .

14.1.8. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda \perp^N$, причем $M \in \mathcal{PN}$. Для терма $L \in \Lambda \perp^N$ будем писать $L^* = L[x := N]$. Пусть $M^* \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n$. Тогда имеются лишь две приводимые ниже возможности:

- (1) $M \twoheadrightarrow (\lambda y.P_1)^n$ и $P_1^* \twoheadrightarrow P$,
- (2) $M \rightarrow L \equiv xU_1 \cdots U_m$ (где, быть может, пропущены некоторые метки), причем $m \geq 0$ и $L^* \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n$.

Доказательство. Так как результат не зависит от наличия или отсутствия меток, мы их не будем упоминать вообще. Более интересно то, что в действительности не нужно даже, чтобы $M \in \mathcal{PN}$ — см. упр. 15.4.8. Однако наше доказательство использует то, что $M \in \mathcal{PN}$, и проводится индукция по парам $(d(M), \|M\|)$, упорядоченным лексикографически, т. е. так, что $(n, m) < (n', m')$ т. и т. т., когда $n < n'$ или $(n = n' \text{ и } m < m')$. Иными словами, индукция проводится по ординалу $\omega \cdot d(M) + \|M\|$. Для каждого терма M наше утверждение будет либо доказано непосредственно, либо выведено из предположения индукции, т. е. из такого же утверждения для термов M' , имеющих меньший параметр $(d(M'), \|M'\|)$. Мы рассмотрим случаи в зависимости от вида терма M .

Случай 1. M — переменная. Если $M \equiv x$, то мы имеем (2). Если $M \not\equiv x$, то неверно, что $M^* \twoheadrightarrow (\lambda y.P)$.

Случай 2. $M \equiv \lambda y.M_1$. Тогда мы имеем (1).

Случай 3. $M \equiv M_1 M_2$. Тогда $M^* \equiv M_1^* M_2^* \twoheadrightarrow \lambda y.P$. Это возможно, только если имеют место

- (3) $M_1^* \twoheadrightarrow \lambda z.Q$,
- (4) $Q[z := M_2^*] \twoheadrightarrow \lambda y.P$.

В силу (3) и предположения индукции (которое применимо, так как $d(M_1) \leq d(M)$, $\|M_1\| < \|M\|$) возможны два случая:

$$(5) \quad M_1 \twoheadrightarrow \lambda z.Q_1 \text{ и } Q_1^* \twoheadrightarrow Q$$

или

$$(6) \quad M_1 \twoheadrightarrow L_1 = xV_1 \cdots V_m \text{ и } L_1^* \twoheadrightarrow \lambda z.Q.$$

Допустим, что имеет место (5). Тогда

$$(7) \quad M_1 M_2 \twoheadrightarrow (\lambda z.Q_1) M_2 \rightarrow Q_1[z := M_2];$$

$$(8) \quad M_1^* M_2^* \twoheadrightarrow (\lambda z.Q_1^*) M_2^* \rightarrow Q_1^*[z := M_2^*] \equiv (Q_1[z := M_2])^* \twoheadrightarrow Q[z := M_2^*] \twoheadrightarrow \lambda y.P$$

в силу (5), (4). Из того что $d(Q_1[z := M_2]) < d(M)$ (в силу (7)), следует в силу последней редукции в (8) и предположения индукции, что снова возможны два случая:

$$(9.1) \quad Q_1[z := M_2] \twoheadrightarrow \lambda y.P_2 \text{ и } P_2^* \twoheadrightarrow P$$

или

$$(9.2) \quad Q_1[z := M_2] \twoheadrightarrow x\vec{W} \text{ и } (x\vec{W})^* \twoheadrightarrow \lambda y.P.$$

В силу (5) имеем $M = M_1 M_2 \twoheadrightarrow Q_1[z := M_2]$, поэтому в обоих случаях все в порядке ((9.1) $\Rightarrow$ (1), (9.2) $\Rightarrow$ (2)).

Допустим теперь, что имеет место (6). Тогда

$$M_1 M_2 \twoheadrightarrow xV_1 \cdots V_m M_2 \text{ и } (x\vec{V} M_2)^* \twoheadrightarrow (\lambda z.Q) M_2^* \twoheadrightarrow \lambda y.P$$

в силу (4), и мы получаем (2).

14.1.9. ЛЕММА. Пусть $(\dots (M^p M_1)^{p_1} \dots M_m)^{p_m} \twoheadrightarrow (\lambda y.N)^q$, $m \geq 0$. Тогда $q \leq p$.

Доказательство проводится индукцией по m . Заметим, что

$$(1) \quad Q_1^{q_1} \twoheadrightarrow Q_2^{q_2} \Rightarrow q_2 \leq q_1,$$

так как внешняя метка может только понижаться (при label-свертываниях). Если $m = 0$, то $M^p \twoheadrightarrow (\lambda y.N)^q$ и, значит, $q \leq p$ в силу (1). Если $m > 0$, то (опуская некоторые метки) должно иметь место

$$M^p M_1 \cdots M_{m-1} \twoheadrightarrow (\lambda z.N_1)^{q_1}, \quad M_m \twoheadrightarrow M'_m$$

и (если $q_1 \neq 0$)

$$(\lambda z.N_1)^{q_1} M'_m \twoheadrightarrow (N_1[z := M_m'^{q_1-1}])^{q_1-1} \twoheadrightarrow (\lambda y.N)^q.$$

Следовательно, $q \leq q_1 - 1 \leq q_1 \leq p$ в силу (1) и предположения индукции. $\square$

Первая из следующих двух лемм — частный случай второй. Тем не менее приходится доказывать ее отдельно.

14.1.10. Лемма. $M \in \mathcal{PN} \Rightarrow M[x := \perp] \in \mathcal{PN}$.

Доказательство проводится индукцией по лексикографическому упорядочению пар $(d(M), \|M\|)$. Будем обозначать $P[x := \perp]$ через P^* .

Случай 1. M — переменная. Тогда доказываемое утверждение очевидно.

Случай 2. $M \equiv \lambda y.M_1$. Тогда $M^* \equiv \lambda y.M_1^*$ и доказываемое утверждение следует из предположения индукции $M_1^* \in \mathcal{PN}$.

Случай 3. $M \equiv M_1^n$. Тогда $M^* \equiv (M_1^*)^n$ и доказываемое утверждение следует из предположения индукции.

Случай 4. $M \equiv M_1 M_2$. Тогда $M^* \equiv M_1^* M_2^*$. По предположению индукции $M_1^*, M_2^* \in \mathcal{PN}$. Допустим, что существует бесконечная редукция σ , начинающаяся термом M^* . Тогда обязательно $M_1^* \twoheadrightarrow (\lambda z.P)^n$, так как в противном случае редукции термов M_1^* и M_2^* происходят раздельно и σ не может быть бесконечной. В силу леммы 14.1.8 могут представиться два случая.

Подслучай 4.1. $M_1 \twoheadrightarrow (\lambda z.P_1)^n$ и $P_1^* \twoheadrightarrow P$. Тогда при $n > 0$ имеем

$$(1) \quad \sigma: M^* \equiv M_1^* M_2^* \twoheadrightarrow (\lambda z.P)^n N_2^* \rightarrow (P[z := (N_2^*)^{n-1}])^{n-1} \twoheadrightarrow \dots$$

и т. д. до бесконечности; сначала применяется $M_2^* \twoheadrightarrow N_2^*$. С другой стороны,

$$M \equiv M_1 M_2 \twoheadrightarrow (\lambda z.P_1)^n M_2 \rightarrow (P_2[z := M_2^{n-1}])^{n-1} \equiv Q,$$

где Q просто обозначает предшествующий терм.

Имеем $d(M) > d(Q)$. Поэтому $Q^* \in \mathcal{PN}$ по предположению индукции. Но

$$Q^* \equiv (P_1^*[z := (M_2^*)^{n-1}])^{n-1} \twoheadrightarrow (P[z := (N_2^*)^{n-1}])^{n-1},$$

и потому $P[z := (N_2^*)^{n-1}] \in \mathcal{PN}$ вопреки (1). Если $n = 0$, то противоречие получается аналогично.

Подслучай 4.2. $M_1 \twoheadrightarrow x\vec{N}$ и $(x\vec{N})^* \equiv \perp \vec{N} \twoheadrightarrow (\lambda z.P)^n$. Но это невозможно. $\square$

14.1.11. Следствие (основная лемма). $M, N \in \mathcal{PN} \Rightarrow M[x := N] \in \mathcal{PN}$.

Доказательство. Пусть $l(N)$ — внешняя метка терма N , т. е.

$$l(\perp) = l(x) = l(PQ) = l(\lambda x.P) = 0, \quad l(P^n) = n.$$

Наше утверждение будет доказано индукцией по лексикографическому упорядочению троек $(l(N), d(M), \|M\|)$. Будем обозначать $P[x := N]$ через P^* .

Случай 1, 2, 3, когда $M \equiv z$, $M \equiv \lambda y.M_1$ или $M \equiv (M_1)^n$, рассматриваются так же, как в доказательстве леммы 14.1.10.

Случай 4. $M \equiv M_1 M_2$. Допустим, что имеется бесконечная редукция σ , начинающаяся термом M^* . Как и в доказательстве леммы 14.1.10, обязательно $M_1^* \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n$, $M_2^* \twoheadrightarrow N_2^*$ и

$$(1) \quad \sigma: M_1^* M_2^* \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n N_2^* \rightarrow \begin{cases} (P[y := (N_2^*)^{n-1}])^{n-1}, & \text{если } n \neq 0, \\ (P[y := \perp])^0, & \text{если } n = 0, \end{cases} \twoheadrightarrow \dots$$

до бесконечности. Если $n = 0$, то противоречие получается из леммы 14.1.10. Допустим, что $n \neq 0$. Могут представиться два подслучая.

Подслучай 4.1. $M_1 \twoheadrightarrow \lambda y.P_1$ и $P_1^* \twoheadrightarrow P$. Этот случай рассматривается так же, как в доказательстве леммы 14.1.10.

Подслучай 4.2. $M_1 \twoheadrightarrow x\vec{Q}$ и $(x\vec{Q})^* \equiv \lambda y.\vec{Q}^* \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n$. Тогда по лемме 14.1.10 имеем $n \leq l(N)$. Поэтому предположение индукции применимо к P и $(N_2^*)^{n-1}$, т. е. $P[y := (N_2^*)^{n-1}] \in \mathcal{PN}$. Это противоречит (1). $\square$

14.1.12. Теорема (о сильной нормализации). Пусть $M \in \Lambda \perp^N$. Тогда любая lab. β -редукция, начинающаяся термом M , обрывается.

Доказательство проводится индукцией по построению терма M . Если M — переменная, то доказываемое утверждение тривиально, а если $M \equiv \lambda y.M_1$ или $M \equiv (M_1)^n$, то оно следует из предположения индукции. Поэтому предположим, что $M \equiv M_1 M_2$ и σ — бесконечная редукция, начинающаяся термом M . Так как $M_1, M_2 \in \mathcal{PN}$ по предположению индукции, то $M_1 \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n$, $M_2 \twoheadrightarrow Q$ и

$$\sigma: M_1 M_2 \twoheadrightarrow (\lambda y.P)^n Q \rightarrow \begin{cases} (P[y := Q^{n-1}])^{n-1}, & \text{если } n \neq 0, \\ (P[y := \perp])^0, & \text{если } n = 0, \end{cases} \twoheadrightarrow \dots$$

до бесконечности. Так как $M_1, M_2 \in \mathcal{PN}$, то и $P, Q^{n-1} \in \mathcal{PN}$. Поэтому в силу основной леммы получаем $(P[y := Q^{n-1}])^{n-1} \in \mathcal{PN}$ или $(P[y := \perp])^0 \in \mathcal{PN}$. Но это дает противоречие. $\square$

14.2. Приложения

Приложения теоремы о сильной нормализации для помеченного λ -исчисления начинаются со следующего наблюдения: обычные β -редукции можно поднять до помеченных редукций и таким образом сделать сильно нормализуемыми. Поэтому

можно сказать, что β -редукции «локально сильно нормализуемы». Эта идея принадлежит Леви [1975], [1978].

14.2.1. Лемма (о подъеме). (i) Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \rightarrow_{\beta} N$. Тогда для некоторых $M', N' \in \Lambda \perp^N$, таких, что $|M'| \equiv M$, $|N'| \equiv N$, имеет место $M' \rightarrow_{+} N'$.
(ii) Аналогичное утверждение имеет место для $M, N_1, \dots, N_n \in \Lambda$ и $M \rightarrow_{\beta} N_i$, $1 \leq i \leq n$.

Доказательство. (i) Нужно просто приписать подтермам терма M (имеющим вид $\lambda x.P$) достаточно высокие метки, например число k , где k — длина редукции $M \rightarrow_{\beta} N$.

Пример. Редукция $(\lambda x.xx) |a \rightarrow |a \rightarrow |a \rightarrow a$ переходит в

$$(\lambda x.xx)^3 |^2 a \rightarrow_{+} (|^2 |^2)^2 a \rightarrow_{+} |^1 a \rightarrow_{+} a^0.$$

(ii) Аналогично (i). $\square$

14.2.2. Лемма (о проектировании). Пусть $\sigma': M'_0 \rightarrow_{+} M'_1 \rightarrow_{+} \dots$ есть $+$ -редукционная цепочка. Допустим, что $|M'_0| \in \Lambda$. Положим

$$|\sigma'|: |M'_0| \rightarrow |M'_1| \rightarrow \dots$$

Тогда $|\sigma'|$ является β -редукционной цепочкой.

Доказательство. Так как $|M'_0| \in \Lambda$, терм M'_0 не содержит знака $\perp$, а значит, это верно для термов M'_i (нет $\beta_{\perp}$ -редексов). Следовательно, $|M'_i| \in \Lambda$ для всех i . Остальное очевидно. $\square$

Первым приложением будет новое доказательство теоремы Чёрча — Россера для помеченного λ -исчисления. В качестве следствия мы получаем обычную теорему Чёрча — Россера.

14.2.3. Теорема (теорема Чёрча — Россера для помеченного λ -исчисления).

(i) Понятие редукции $\text{lab.}\beta$ на множестве $\Lambda \perp^N$ обладает свойством CR.

(ii) То же верно для $+$.

Доказательство. (i) получается с помощью предложения 3.1.25, так как $\text{lab.}\beta$ сильно нормализуемо и обладает слабым свойством Чёрча — Россера (лемма 14.1.6(ii)).

(ii) Очевидно, что понятие редукции $+$ сильно нормализуемо. По лемме 14.6(iii) оно обладает и слабым свойством Чёрча — Россера. $\square$

14.2.4. Следствие (теорема Чёрча — Россера для β -редукции). Понятие редукции β обладает свойством CR.

Доказательство. Если даны редукции $M \rightarrow M_1$, $M \rightarrow M_2$, поднимем их до $\Lambda \perp^N$. Найдем там общий редукт и спроектируем. $\square$

Легко получается и теорема о конечности разверток (и даже FDI!).

14.2.5. Следствие (FDI!). Пусть $M \in \Lambda$, а $\mathcal{F}$ — множество редексов $\in M$. Тогда все развертки терма $(M, \mathcal{F})$ конечны. Полные развертки оканчиваются одним и тем же термом. $\square$

Доказательство. Пусть дан терм $(M, \mathcal{F})$. Определим терм $M' \in \Lambda \perp^N$ как результат замены в M всех редексов $(\lambda x.P)Q$ из $\mathcal{F}$ на $(\lambda x.P)^1 Q$. Очевидно, что развертка терма $(M, \mathcal{F})$ соответствует (а именно, является проекцией) $+$ -редукции терма M' . В силу теоремы о сильной нормализации 14.1.12 все $+$ -редукции конечны. По теореме 14.2.3(ii) все полные $+$ -редукции оканчиваются одним и тем же термом. $\square$

Перед тем как рассматривать приложения теоремы стандартизации, дающие новые результаты, мы приведем еще одно доказательство теоремы стандартизации (в действительности даже сильной версии теоремы 12.3.14). Метод принадлежит Клопу [1980] и обладает тем достоинством, что бросает новый свет на процесс стандартизации. Доказательство занимает п. 14.2.6—14.2.10.

14.2.6. Определение. (i) $\text{RED} = \{\sigma | \sigma \text{ — некоторая конечная } \beta\text{-редукционная цепочка}\}$. На множестве RED имеется частичная операция $+$ ($\sigma + \tau$ определено, только если конечная точка σ совпадает с начальной точкой τ).

(ii) Пусть $M \in \Lambda$ и $\Delta_1, \Delta_2 \subset M$ — два редекса, такие, что $\Delta_2 < \Delta_1$ (т. е. Δ_2 находится левее Δ_1). Рассмотрим редукцию $\sigma: M \xrightarrow{\Delta_1} M_1 \xrightarrow{\Delta_2'} M_2$, полученную сворачиванием сначала редекса Δ_1 , а затем единственного остатка Δ_2' редекса Δ_2 . Такая редукция σ — минимальная из нестандартных редукций. Она называется *редексом редукции Клопа* или просто *K-редексом*.

(iii) Если σ есть K-редекс из (ii), то его свертка — это редукция

$$\tau: M \xrightarrow{\Delta_2} M_3 \xrightarrow{\Delta_1'} \dots \xrightarrow{\Delta_1'} M_2,$$

где

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Delta_1} & M_1 \\ \Delta_2 \downarrow & & \downarrow \Delta_2' \\ M_3 & \xrightarrow{\Delta_1'} \dots \xrightarrow{\Delta_1'} & M_2 \end{array}$$

—элементарная диаграмма (может оказаться, что имеется $n \geq 0$ остатков Δ'_i редекса Δ_1).

(iv) На множестве RED вводится следующее понятие редукции:

$K = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma \text{ есть } K\text{-редекс, а } \tau \text{ — его свертка}\}.$

(v) Как всегда, K индуцирует следующие бинарные отношения на множестве RED:

- $\rightarrow_K$ (это отношение совместимо с $+$),
- $\twoheadrightarrow_K$ (это отношение рефлексивно и транзитивно),
- $=_K$ (отношение эквивалентности).

14.2.7. ЛЕММА. Отношение $\rightarrow_K$ ациклическое, т. е. не существует циклов

$$(1) \quad \sigma_0 \rightarrow_K \sigma_1 \rightarrow_K \dots \rightarrow_K \sigma_n \equiv \sigma_0, \quad n > 0.$$

Доказательство. Допустив (1), мы получим противоречие с помощью индукции по k — числу шагов β -редукции в σ_0 .

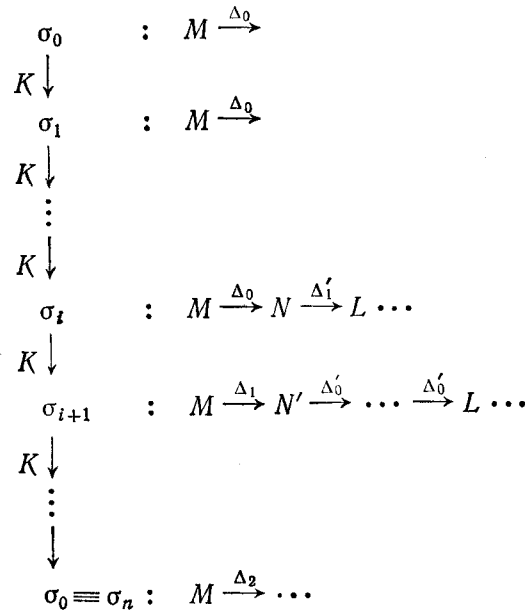


Рис. 14.1

Если $k=0$, то σ_0 не содержит K -редексов. Поэтому допустим, что $k > 0$. Допустим, что для некоторого $i < n$ K -редекс в σ_i находится в начале этой редукции. Пусть i — наименьшее число с этим свойством. Тогда мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 14.1, причем $\Delta_1 < \Delta_0$. Кроме того, σ_n должна начи-

наться сворачиванием редекса $\Delta_2 \leq \Delta_1 < \Delta_0$ (если имеет место $\Delta_1 < \Delta_2$, то Δ_1 остается первым сворачиваемым редексом). Но тогда $\sigma_n \neq \sigma_0$, что дает противоречие.

Если K -редекс не находится в начале ни одной из редукций σ_i , то стирание первых шагов в $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ снова дает $\rightarrow_K$ -цикл $\sigma'_0, \dots, \sigma'_n$ с более короткой σ'_0 . По предположению индукции это приводит к противоречию. $\square$

14.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Понятие редукции K на множестве RED сильно нормализуемо.

(ii) Если редукция σ находится в K -н.ф., то она стандартна.

Доказательство. (i) Допустим, что $\sigma \rightarrow_K \tau$ и σ начинается термом M . По лемме 14.2.1(i) можно поднять σ до $+$ -редукции σ' , начинающейся термом $M' \in \Lambda \perp^N$.

Сворачивание K -редексов можно производить также и при наличии меток. Поэтому редукцию τ можно поднять до $+$ -редукции τ' , начинающейся тем же самым термом M' .

Предположим теперь, что имеется бесконечная K -редукция

$$\sigma_0 \rightarrow_K \sigma_1 \rightarrow_K \dots$$

В силу только что проведенного рассуждения имеются $+$ -редукции $\sigma'_0, \sigma'_1, \dots$, такие, что $|\sigma'_i| = \sigma_i$, и все они начинаются термом M' . Из теоремы о сильной нормализации для $+$ -редукции и леммы Кёнига легко следует, что имеется лишь конечное число $+$ -редукций, начинающихся фиксированным термом (см. упр. 3.5.9). Поэтому $\sigma'_i \equiv \sigma'_j$ для некоторых $i \neq j$, откуда $\sigma_i \equiv \sigma_j$. Это противоречит лемме 14.2.8.

(ii) Если $\sigma: M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ не является стандартной редукцией, то обозначим через k наименьшее число $< n$, такое, что $M_0 \rightarrow \dots \rightarrow M_{k+1}$ не стандартна. Но тогда $M_{k-1} \rightarrow M_k \rightarrow M_{k+1}$ есть K -редекс, и, значит, σ не находится в K -н.ф. $\square$

Обращение формулируемого ниже утверждения тоже истинно — см. упр. 14.5.9.

14.2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\sigma =_K \tau$, то $\sigma \cong \tau$.

Доказательство. Так как в силу теоремы 12.2.2(viii) $\cong$ есть отношение равенства на $(\text{RED}, +)$, то достаточно показать, что

$$(\sigma, \tau) \in K \Rightarrow \sigma \cong \tau.$$

Но если $(\sigma, \tau) \in K$, то σ и τ — стороны элементарной диаграммы, так что $\sigma \cong \tau$ в силу предложения 12.2.2(xi). $\square$

14.2.10. ТЕОРЕМА. Любая $\sigma \in \text{RED}$ имеет единственную K -н.ф. σ_s . Эта σ_s — единственная стандартная редукция, такая, что $\sigma \cong \sigma_s$.

Доказательство. В силу предложения 14.2.8 каждая σ имеет K -н. ф., которая является стандартной редукцией. Допустим, что редукции τ, τ' — две K -н. ф. редукции σ . Тогда по лемме 14.2.9 имеем $\tau \cong \tau'$, а так как τ, τ' стандартны, из предложения 12.3.13 следует, что $\tau \equiv \tau'$. Поэтому K -н. ф. редукции σ единственна. Остальное понятно. $\square$

Следующее приложение — новый результат. Уэлч [1975] ввел следующее понятие внутренней редукции и высказал гипотезу о справедливости теоремы 14.2.12.

14.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda$ и

$$\sigma: M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots$$

— редукция. Тогда говорят, что σ — *редукция изнутри* (inside out), если Δ_i не является остатком никакого редекса $\Delta'_j \subset \Delta_i$ для любых $j < i$.

(ii) Будем писать $M \twoheadrightarrow_{i.o.} N$, если имеется редукция изнутри $\sigma: M \twoheadrightarrow N$.

ПРИМЕРЫ. (i) $I((\lambda x.xx)a) \rightarrow I(aa) \rightarrow aa$ — редукция изнутри.

(ii) Редукция $I((\lambda x.xx)a) \rightarrow (\lambda x.xx)a \rightarrow aa$ не является редукцией изнутри.

Мы видим, что редукции изнутри двойственны стандартным, где сначала сворачиваются внешние редексы.

Следующий результат, принадлежащий Леви [1975], показывает, что множество $\{N \mid M \twoheadrightarrow_{i.o.} N\}$ кофинально в $G(M)$.

14.2.12. ТЕОРЕМА (полнота редукций изнутри). Если $M \twoheadrightarrow N$, то $M \twoheadrightarrow_{i.o.} N_1$ и $N \twoheadrightarrow_{i.o.} N_1$ для некоторого N_1 ; см. рис. 14.2.

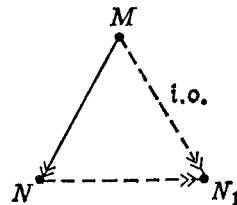


Рис. 14.2

Доказательство. Поднимем $M \twoheadrightarrow N$ до $M' \twoheadrightarrow_+ N'$. Выполним $+$ -редукции на M' , сворачивая каждый раз самый внутренний $+$ -редекс (т. е. редекс, не имеющий собственных подредексов). Так как $+$ -редукция сильно нормализуема, этот процесс остановится на некотором терме, который мы обозначим

через N'_1 . Тогда N'_1 есть $+$ -н. ф. терма M' . Следовательно, $N' \twoheadrightarrow_+ N'_1$ в силу CR-свойства для $+$. Проектируя, получим $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$, $N \twoheadrightarrow_\beta N_1$, и очевидно, что первая из этих редукций искома. $\square$

14.3. Непрерывность

В этом пункте будет доказано, что операции аппликации и абстракции на множестве Λ непрерывны в топологии деревьев. Этот факт оказывается весьма полезным. Он заменяет несколько рассуждений, требующих анализа редукции. Существенной леммой в доказательстве теоремы о непрерывности оказывается предложение 14.3.19, которое было доказано Уодсвортом [1971], Леви [1975] и Уэлчем [1975] с помощью различных методов. Мы следуем доказательству Леви (которое использует некоторые идеи Уодсворта и Уэлча).

14.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество $\Lambda \perp$ $\lambda \perp$ -термов получается добавлением константы $\perp$ к правилам построения термов (так что $\Lambda \perp = |\Lambda \perp^N|$).

(ii) На множестве $\Lambda \perp$ вводятся следующие понятия редукции:

$$\beta: (\lambda x.P)Q \rightarrow P[x := Q],$$

$$\perp_1: \perp P \rightarrow \perp, \quad \perp_2: \lambda x.\perp \rightarrow \perp,$$

$$\perp = \perp_1 \cup \perp_2, \quad \beta \perp = \beta \cup \perp.$$

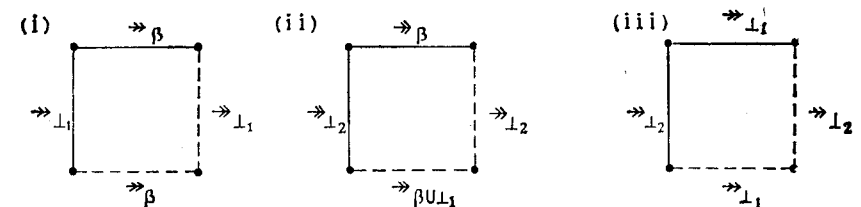
14.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $\beta(\perp)$ обладает свойством CR.

(ii) Каждый терм $P \in \Lambda \perp$ имеет единственную $\perp$ -н. ф.

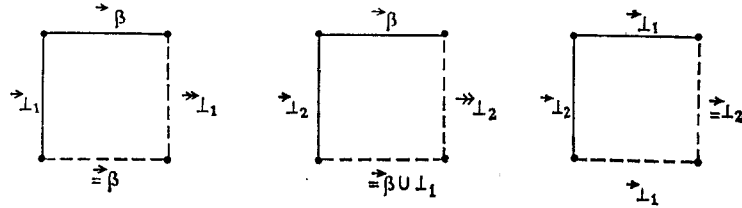
Доказательство. (i) Применяем подъем (лемма 14.2.1), свойство CR для $lab.\beta$ (теорема 14.2.3) и проектирование (лемма 14.2.2).

(ii) $\perp$ -редукция уменьшает длину терма, поэтому она сильно нормализуема. Кроме того, верно $\twoheadrightarrow_\perp \models \Diamond$. В силу предложения 3.2.2 отсюда следует, что $\perp$ обладает свойством CR, а потому $\perp$ -н. ф. единственна. $\square$

14.3.3. ЛЕММА. Пусть $P \in \Lambda \perp$. Тогда



Доказательство. Сначала с помощью простого разбора случаев показываем, что имеют место



Остальное получается путем простого обхода диаграмм. $\square$

Понятие бёмовского дерева обобщается на $\Lambda \perp^{(N)}$ путем трактовки $\perp$ как Ω (и игнорирования меток).

14.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для $P \in \Lambda \perp$ будем обозначать через $P[\perp := Q]$ результат замены всех $\perp$ на Q , и положим $BT(P) = BT(P[\perp := \Omega])$.

(ii) Для $P \in \Lambda \perp^N$ положим $BT(P) = BT(|P|)$.

(iii) Пусть A — конечное бёмовское дерево. Тогда терм $M[A] \in \Lambda \perp$ получается из $M(A)$ (см. определение 10.1.16) заменой всех Ω на $\perp$.

(iv) Пусть $M \in \Lambda$. Тогда $M^{[n]} \equiv M[BT^n(M)]$.

Заметим, что в силу леммы 10.1.19 $BT(M^{[n]}) \equiv BT^n(M)$; кроме того, $M^{[n]} \approx M^{(n)}$.

ПРИМЕРЫ. (i) $BT(\lambda x.x(\lambda z.\perp)) = \lambda x.x$

$\perp$

(ii) Если Y — комбинатор неподвижной точки, то $Y^{[2]} \equiv \lambda f.f(f(\perp))$.

Вводимая ниже терминология (в модифицированном виде) восходит к Уодсворту [1971].

14.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda(\perp)$.

(i) Терм $P \in \Lambda \perp$ аппроксимирует терм M (запись $P \sqsubseteq M$), если $BT(P) \subseteq BT(M)$.

(ii) Терм $P \in \Lambda \perp$ есть аппроксимативная нормальная форма (а. н. ф.) терма M , если $P \sqsubseteq M$ и P есть $\beta \perp$ -н. ф.

(iii) $\mathcal{A}(M) = \{P \in \Lambda \perp \mid P \text{ есть а. н. ф. терма } M\}$.

ПРИМЕРЫ. (i) $\lambda z.xz \perp \sqsubseteq \lambda z.xzK$; $Sx\Omega \sqsubseteq \lambda z.xzK$; $\lambda x.x \perp \in \mathcal{A}(\lambda x.lxS)$.

(ii) $M^{[n]} \in \mathcal{A}(M)$.

Для доказательства интересных утверждений об аппроксимации полезно вернуться к первоначальному определению Уодсворта.

14.3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda \perp$. Тогда терм $\alpha(M) \in \Lambda \perp$ получается из M заменой самых внешних (т. е. $\subseteq$ -максимальных) редексов на $\perp$. Можно определить α индуктивно следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda \vec{x}.yM_1 \cdots M_n) &\equiv \lambda \vec{x}.y\alpha(M_1) \cdots \alpha(M_n), \\ \alpha(\lambda \vec{x}.(\lambda y.P)QM_1 \cdots M_n) &\equiv \alpha(\lambda \vec{x}.\perp M_1 \cdots M_n) \equiv \\ &\equiv \lambda \vec{x}.\perp \alpha(M_1) \cdots \alpha(M_n). \end{aligned}$$

(ii) Через $\omega(M)$ обозначается $\perp$ -н. ф. терма $\alpha(M)$. Операцию ω можно ввести следующим индуктивным определением.

$$\begin{aligned} \omega(\lambda \vec{x}.yM_1 \cdots M_n) &\equiv \lambda \vec{x}.y\omega(M_1) \cdots \omega(M_n), \\ \omega(\lambda \vec{x}.(\lambda y.P)Q\vec{M}) &\equiv \omega(\lambda \vec{x}.\perp \vec{M}) \equiv \perp. \end{aligned}$$

(iii) $\mathcal{A}'(M) = \{\omega(N) \mid M \rightarrow_\beta N\}$.

ПРИМЕР. (i) $\alpha(z(\lambda x.(\lambda y.y)xz)) \equiv z(\lambda x.\perp z)$.

(ii) $\omega(z(\lambda x.(\lambda y.y)xz)) \equiv z \perp$.

14.3.7. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda \perp$. Тогда

(i) $\omega(M) \sqsubseteq M$,

(ii) $M \rightarrow_\beta N \Rightarrow \omega(M) \sqsubseteq \omega(N)$.

Доказательство. (i) устанавливается индукцией по длине терма M . Если $M \equiv \lambda x.(\lambda y.P)Q\vec{N}$, то $\omega(M) \equiv \perp \sqsubseteq M$. Если $M \equiv \lambda x.yN_1 \cdots N_n$, то

$$\omega(M) \equiv \lambda x.y\omega(N_1) \cdots \omega(N_n) \sqsubseteq M$$

по предположению индукции.

(ii) устанавливается аналогично. Сначала показываем по индукции, что $M \rightarrow_\beta N \Rightarrow \omega(M) \sqsubseteq \omega(N)$. (Типичный случай $\lambda \vec{x}.y\vec{M} \rightarrow \lambda \vec{x}.y\vec{M}$.) Остальное следует из транзитивности. $\square$

14.3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda$ и $\mathcal{X} \subseteq \Lambda \perp$. Тогда

(i) $\sqcup \mathcal{X} = M$, если $\sqcup \{BT(P) \mid P \in \mathcal{X}\} = BT(M)$.

(ii) Множество $\mathcal{X}$ направленно, если множество $\{BT(P) \mid P \in \mathcal{X}\}$ направленно в $(\mathcal{B}, \subseteq)$.

14.3.9. ЛЕММА. (i) $\mathcal{A}(M)$ направленно.

(ii) $\mathcal{A}'(M)$ направленно.

Доказательство. (i) Пусть $P, P' \in \mathcal{A}(M)$. Тогда $P \sqcup P' = M[BT(P) \cup BT(P')] \in \mathcal{A}(M)$.

(ii) Получается по теореме Чёрча — Россера и лемме 14.3.7(ii). $\square$

14.3.10. Предложение. (i) $\mathcal{A}'(M) \subseteq \mathcal{A}(M)$.

(ii) $M = \bigsqcup \mathcal{A}(M) = \bigsqcup \mathcal{A}'(M)$.

Доказательство. (i) Пусть $\omega(N) \in \mathcal{A}'(M)$ и $M \rightarrow_{\beta} N$. Тогда $\text{BT}(M) = \text{BT}(N)$, откуда $\omega(N) \subseteq M$ по лемме 14.3.7. Очевидно, что $\omega(N)$ есть $\beta \perp$ -н. ф., поэтому $\omega(N) \in \mathcal{A}(M)$.

(ii) Очевидно, что $M = \bigsqcup \mathcal{A}(M) \supseteq \bigsqcup \mathcal{A}'(M)$, где операции и отношения понимаются в естественном для бёмовских деревьев смысле.

Утверждение.

$$(\forall P \in \mathcal{A}(M)) (\exists P' \in \mathcal{A}'(M)) (P \subseteq P').$$

Это интуитивно очевидно, если представить себе, как «растет» бёмовское дерево. [Если это все же не очевидно, определим индукцией по n функцию $g(M, n)$ — «рост дерева $\text{BT}(M)$ к n -му дню»:

$$g(M, 0) = M;$$

$$g(M, n+1) = \begin{cases} \lambda \vec{x}. yg(M_1, n) \cdots g(M_m, n), & \text{если } M \text{ — главная} \\ & \text{г. н. ф. терма } \lambda \vec{x}. yM; \\ M, & \text{если } M \text{ неразрешим.} \end{cases}$$

Тогда с помощью индукции по n мы докажем, что

$$M \rightarrow_{\beta} g(M, n) \text{ и } M^{[n]} \subseteq \omega(g(M, n)).$$

Пусть теперь $P \in \mathcal{A}(M)$. Тогда для некоторого n имеем

$$P \subseteq M^{[n]}, \text{ и потому } P \subseteq \omega(g(M, n)) \in \mathcal{A}'(M).]$$

Используя только что установленное утверждение, мы получаем

$$M \subseteq \bigsqcup \mathcal{A}'(M) \subseteq \bigsqcup \mathcal{A}(M) = M. \quad \square$$

Приводимое ниже следствие описывает отношение $\subseteq$ через его ограничение на термы с конечными деревьями.

14.3.11. Следствие. Пусть $M, N \in \Lambda(\perp)$. Тогда

$$M \subseteq N \text{ т. и т. т., когда } (\forall M'_{\beta} \leftarrow M) (\exists N'_{\beta} \leftarrow N) (\omega(M') \subseteq \omega(N')).$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) следует из того, что $M = \bigsqcup \{\omega(M') \mid M \rightarrow_{\beta} M'\}$ в силу предложения 14.3.10.

($\Rightarrow$) Пусть $M \rightarrow_{\beta} M'$. Тогда в силу предложений 10.1.6 и 14.3.10 и леммы 14.3.7 имеем

$$\omega[M'] \subseteq M' \approx M = \bigsqcup \{\text{BT}(\omega(N')) \mid N \rightarrow_{\beta} N'\},$$

т. е.

$$\text{BT}(\omega(M')) \subseteq \bigcup \{\text{BT}(\omega(N')) \mid N \rightarrow_{\beta} N'\}.$$

Так как $\text{BT}(\omega(M'))$ — компактный элемент упорядочения $(\mathfrak{B}, \subseteq)$, а множество в правой части включения — направленное, то

$$\text{BT}(\omega(M')) \subseteq \text{BT}(\omega(N'))$$

для некоторого $N'_{\beta} \leftarrow N$, т. е. $\omega(M') \subseteq \omega(N')$. $\square$

14.3.12. Лемма. Пусть $M \in \Lambda \perp$ и $C[\]$ — контекст над $\Lambda \perp$. Тогда $C(\perp) \subseteq C[M]$.

Доказательство. Пусть $C[\perp] \rightarrow_{\beta} L$. Тогда $C[M] \rightarrow_{\beta} L[\perp := M]$. Кроме того, индукцией по длине терма L легко показать, что имеет место $\omega(L) \subseteq \omega(L[\perp := M])$ (рассмотреть три случая: $L \equiv \lambda \vec{x}. y\vec{L}$; $L \equiv \lambda \vec{x}. \perp \vec{L}$; $L \equiv \lambda \vec{x}. (\lambda y. P) Q\vec{L}$). Поэтому применимо следствие 14.3.11. $\square$

14.3.13. Следствие. $P \in \mathcal{A}(M) \Rightarrow C[P] \subseteq C[M]$.

Доказательство. По предположению P есть $\beta \perp$ -н. ф. $\subseteq M$. Следовательно, $P \equiv D[\perp, \dots, \perp]$, $M \equiv D[M_1, \dots, M_n]$. Поэтому, применяя несколько раз лемму, получаем

$$C[P] \equiv C[D[\perp]] \subseteq C[D[\vec{M}]] \equiv C[M]. \quad \square$$

14.3.14. Лемма. (i) $P \rightarrow_{\perp} Q \Rightarrow \omega(P) \equiv \omega(Q)$.

(ii) $P \rightarrow_{\perp} Q \Rightarrow P \approx Q$.

Доказательство. (i) Достаточно показать, что $P \rightarrow_{\perp} Q \Rightarrow \omega(P) \equiv \omega(Q)$. Это получается индукцией по длине терма P .

(ii) Допустим сначала, что $P \rightarrow_{\perp} Q$. Тогда $P \equiv C[\perp M]$, $Q \equiv C[\perp]$. По лемме 14.3.12 имеем $Q \subseteq P$. Чтобы установить обратное соотношение, допустим, что $P \rightarrow_{\beta} P'$. Тогда по лемме 14.3.3(i) имеем $Q \rightarrow_{\beta} Q'$ и $P' \rightarrow_{\perp} Q'$. В силу (i) отсюда следует, что $\omega(P') \approx \omega(Q')$, и в силу следствия 14.3.11 все в порядке.

Допустим теперь, что $P \rightarrow_{\perp} Q$. Тогда аналогичное рассуждение с помощью результата, установленного для $\rightarrow_{\perp}$, показывает, что $P \approx Q$. $\square$

14.3.15. Следствие. Пусть $P, Q \in \Lambda \perp$. Тогда

$$P =_{\beta \perp} Q \Rightarrow P \approx Q.$$

Доказательство. В силу предложения 10.1.6 (обобщенного на $\Lambda \perp$) имеем $P =_{\beta} Q \Rightarrow P \approx Q$. В силу предыдущей

леммы то же верно для $\rightarrow_{\perp}$. Так как отношение $=_{\beta\perp}$ порождается отношениями $=_{\beta}$ и $\rightarrow_{\perp}$, мы получаем нужный результат. $\square$

Следующее понятие введено Уэлчем.

14.3.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda$ и $\mathcal{F} \subset M$. Тогда говорят, что терм M редуцируется к N , не затрагивая множества $\mathcal{F}$ (и пишут $M \rightarrow_{\text{не } \mathcal{F}} N$), если имеется редукция $\sigma: M \rightarrow N$ такая, что в ней никогда не сворачивается остаток редекса из $\mathcal{F}$.

(ii) Если $P \subset M$, то пишем $M \rightarrow_{\text{не } P} N$, если $M \rightarrow_{\text{не } \mathcal{F}_P} N$, где $\mathcal{F}_P$ — множество всех редексов $\subset P$.

14.3.17. ЛЕММА. Пусть $M \rightarrow_{\text{не } \mathcal{F}} N$ посредством редукции σ . Тогда

$$M[\mathcal{F} := \perp] \rightarrow N[\mathcal{F}' := \perp],$$

где $[\mathcal{F} := \perp]$ обозначает результат замены ($\subset$ -максимальных) редексов из $\mathcal{F}$ на $\perp$, а $\mathcal{F}'$ — множество остатков редексов из $\mathcal{F}$ относительно редукции σ .

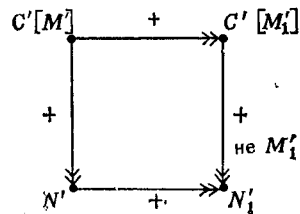
Доказательство. В силу транзитивности можно считать, что мы имеем дело с одношаговой редукцией $M \xrightarrow{\Delta}_{\text{не } \mathcal{F}} N$. Нужно нам утверждение доказывается простым разбором следующих трех случаев: (1) Δ и $\mathcal{F}$ дизъюнкты; (2) $\Delta \subset \Delta_1 \in \mathcal{F}$; (3) некоторый максимальный элемент множества $\mathcal{F}$ — подредекс Δ . $\square$

Следующая теорема была первоначально доказана Уэлчем в предположении, что истинна теорема 14.2.12, т. е. что внутренняя редукция полна.

14.3.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $C[M], N \in \Lambda$, и пусть $C[M] \rightarrow N$. Тогда

$$(\exists M_1 \leftarrow M)(\exists N_1 \leftarrow N)(C[M_1] \rightarrow_{\text{не } M_1} N_1).$$

Доказательство. Поднимем $C[M] \rightarrow N$ до $+$ -редукции $C'[M'] \rightarrow N'$ на множестве $\Lambda \perp^N$. Пусть M'_1 есть $+$ -н. ф. терма M' . Тогда в силу свойства CR для $+$ имеем



Проектируя обратно, получаем нужный результат. $\square$

Следующий результат был впервые доказан Уодсвортом [1971]. Приводимое нами доказательство принадлежит Леви [1975].

14.3.19. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $C[M] \in \Lambda$. Тогда

$$\forall P \in \mathcal{A}'(C[M])(\exists Q \in \mathcal{A}'(M))(P \sqsubseteq C[Q]).$$

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{A}'(C[M])$. Тогда $P \equiv \omega(N)$, причем $C[M] \rightarrow N$. В силу предложения 14.3.18 для некоторых $M_1, N_1 \in \Lambda$

$$(1) \quad M \rightarrow M_1, \quad N \rightarrow N_1,$$

$$(2) \quad C[M_1] \rightarrow_{\text{не } M_1} N_1.$$

Возьмем $Q \equiv \omega(M_1)$. Тогда $Q \in \mathcal{A}'(M)$. Остается показать, что $P \sqsubseteq C[Q]$. В силу (2) и леммы 14.3.17

$$(3) \quad C[M_1][\mathcal{F} := \perp] \rightarrow_{\beta} N_1[\mathcal{F}' := \perp],$$

где $\mathcal{F}$ — множество вхождений редексов в M_1 . Теперь получаем

$$P \equiv \omega(N) \sqsubseteq \omega(N_1) \quad (\text{в силу (1) и леммы 14.3.7 (ii)}) \equiv$$

$$\equiv \omega(N_1[\mathcal{F}' := \perp]) \quad (\text{так как все редексы все равно надо изменить на } \perp) \sqsubseteq$$

$$\sqsubseteq N_1[\mathcal{F}' := \perp] \quad (\text{в силу леммы 14.3.7 (i)}) \approx$$

$$\approx C[M_1][\mathcal{F} := \perp] \quad (\text{в силу (3) и леммы 14.3.15}) \equiv$$

$$\equiv C[\alpha(M_1)] \approx$$

$$\approx C[\omega(M_1)] \quad (\text{в силу леммы 14.3.15}) \equiv$$

$$\equiv C[Q]. \quad \square$$

14.3.20. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $C[\] \in \Lambda[\]$ и $M, N \in \Lambda$. Тогда

$$(i) \quad C[M] = \bigsqcup \{C[Q] \mid Q \in \mathcal{A}'(M)\} = \bigsqcup \{C[Q] \mid Q \in \mathcal{A}(M)\}.$$

$$(ii) \quad C[M] = \bigsqcup_n C[M^{[n]}].$$

$$(iii) \quad M \sqsubseteq N \Rightarrow C[M] \sqsubseteq C[N].$$

Доказательство. (i) В силу следствия 14.3.13 имеем $C[Q] \sqsubseteq C[M]$ для всех $Q \in \mathcal{A}(M)$. Поэтому

$$\bigsqcup \{C[Q] \mid Q \in \mathcal{A}'(M)\} \sqsubseteq \{C[Q] \mid Q \in \mathcal{A}(M)\} \sqsubseteq C[M].$$

Так как $C[M] = \bigsqcup \{P \mid P \in \mathcal{A}'(C[M])\}$ в силу предложения 14.3.10(ii), оставшаяся часть следует из предложения 14.3.19.

(ii) Заметим, что $M^{[n]} \in \mathcal{A}(M)$ и что из $P \in \mathcal{A}(M)$ следует $P \sqsubseteq M^{[p]}$ для некоторого p . Теперь используем (i).

(iii) Допустим, что $M \sqsubseteq N$. Тогда

$$C[M] = \bigcup \{C[P] \mid P \in \mathcal{A}(M)\} \quad (\text{в силу (i)}) \sqsubseteq \\ \sqsubseteq C[N] \quad (\text{в силу следствия 14.3.13}),$$

ибо $P \sqsubseteq M \Rightarrow P \sqsubseteq N$. $\square$

14.3.21. Следствие. Отображение $\lambda M.C[M]: \Lambda \rightarrow \Lambda$ непрерывно в топологии деревьев.

Доказательство. Напомним, что множества $Q_{M,k} = \{N \mid M^{[k]} \sqsubseteq N\}$ образуют базис топологии деревьев. Поэтому мы должны показать, что из $C[M] = N$ следует

$$\forall k \exists m \forall M' [M' \in O_{M,m} \Rightarrow C[M'] \in O_{N,k}].$$

Допустим, что $C[M] = N$ и зафиксируем k . Положим $P \equiv N^{[k]} \in \mathcal{A}(C[M])$. В силу предложения 14.3.19 получаем

$$1) \quad P \sqsubseteq C[Q]$$

для некоторого $Q \in \mathcal{A}'(M)$. Теперь имеем $Q \sqsubseteq M = \bigcup \{M^{[m]} \mid m \in \mathbb{N}\}$, где в правой части получается (после перехода к бёмовским деревьям) направленный супремум. Так как дерево $\text{BT}(Q)$ конечно, то оно компактно в $(\mathfrak{B}, \sqsubseteq)$, а значит, $Q \sqsubseteq M^{[m]}$ для некоторого m . Отсюда следует, что

$$M' \in O_{M,m} \Rightarrow M^{[m]} \sqsubseteq M' \Rightarrow Q \sqsubseteq M' \Rightarrow C[Q] \sqsubseteq C[M'] \Rightarrow \\ \Rightarrow P \sqsubseteq C[M'] \quad (\text{в силу (1)}) \Rightarrow \\ \Rightarrow C[M'] \in O_{N,k} \quad (\text{так как } P \equiv N^{[k]}). \quad \square$$

14.3.22. ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ. Операции абстракции и аппликации на Λ непрерывны в топологии деревьев. Иными словами:

(i) Положим $\text{Abs}_x(M) = \lambda x.M$. Тогда $\text{Abs}_x: \Lambda \rightarrow \Lambda$ непрерывно.

(ii) Положим $\text{Ap}(M, N) = MN$. Тогда $\text{Ap}: \Lambda^2 \rightarrow \Lambda$ непрерывно.

Доказательство. (i) устанавливается тривиально: $M' \in O_{M,k} \Rightarrow \lambda x.M' \in O_{\lambda x.M,k}$.

(ii) Мы должны показать, что из $MN = L$ следует

$$\forall k \exists m, n (\forall M' \in O_{M,m}) (\forall N' \in O_{N,n}) (M'N' \in O_{L,k}).$$

Допустим, что $MN = L$ и зафиксируем k . В силу следствия 14.3.21 операция Ap непрерывна по каждому из своих аргументов в отдельности. Поэтому найдется n , такое, что

$$N' \in O_{N,n} \Rightarrow MN' \in O_{L,k}.$$

В частности, $MN^{(n)} \in O_{L,k}$. В силу непрерывности по первому аргументу имеется m , такое, что

$$M' \in O_{M,m} \Rightarrow M'N^{(n)} \in O_{L,k};$$

в частности, $M^{(m)}N^{(n)} \in O_{L,k}$. Но тогда

$$M' \in O_{M,m}, N' \in O_{N,n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M'N' \sqsubseteq M^{(m)}N' \sqsubseteq M^{(m)}N^{(n)} \sqsubseteq L^{(k)} \quad \text{в силу следствия 14.3.20 (iii)} \Rightarrow \\ \Rightarrow M'N' \in O_{L,k}. \quad \square$$

Теорема о непрерывности — хорошо запоминающийся и удобный в обращении результат. Она заменяет рассуждения, использующие анализ редукций. В качестве примера мы докажем «лемму о генеричности» (которая называется так потому, что утверждает следующее: если нечто неразрешимое отображается на данную н.ф., то и любой терм обладает этим свойством; иными словами неразрешимые термы генеричны).

Точка x топологического пространства X называется *точкой компактификации*, если X является единственной окрестностью точки x .

14.3.23. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda$. Тогда

(i) M изолирован $\Leftrightarrow M$ имеет н.ф.;

(ii) M — точка компактификации $\Leftrightarrow M$ неразрешим.

Доказательство. (i) $(\Rightarrow)$ Если M изолирован, то $\{M\} = O_{M,n}$ для некоторого n . Поэтому

$$\forall P [M^{(n)} \sqsubseteq P \Rightarrow P \approx M].$$

Взяв $P \equiv M^{(n)}$, получаем, что $\text{BT}(M) = \text{BT}^n(M)$. Кроме того, $\text{BT}(M) \perp$ -свободно. Поэтому M имеет н.ф.

$(\Leftarrow)$ Если M имеет н.ф., то $\text{BT}(M)$ конечно и $\perp$ -свободно. Поэтому $\{M\} = O_{M,k}$, где $k = d(\text{BT}(M))$.

(ii) $(\Rightarrow)$ Если M разрешим, то $M = \lambda x.y\vec{M}$, следовательно, $M^{(1)} \equiv \lambda x.y\perp$. Отсюда $O_{M,1} \neq \Lambda$, так что M не является точкой компактификации.

$(\Leftarrow)$ Если M неразрешим, то $O_{M,n} = \{P \mid \perp \sqsubseteq P\} = \Lambda$ для всех n . Тогда M — точка компактификации. $\square$

14.3.24. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (лемма о генеричности). Пусть $M, N \in \Lambda$, терм M неразрешим, а терм N имеет н.ф. Тогда для любого контекста $C[\] \in \Lambda$

$$C[M] = N \Rightarrow (\forall L \in \Lambda) (C[L] = N).$$

Доказательство. Множество $\{N\}$ открыто в силу леммы 14.3.23. В силу непрерывности (следствие 14.3.21) имеется

окрестность O точки M , такая, что

$$(\forall L \in O)(C[L] = N).$$

Но $O = \Lambda$ в силу леммы 14.3.23. $\square$

Аналогичным образом получается следующее утверждение.

14.3.25. Следствие. Пусть $M, N \in \Lambda$, причем M неразрешим, а N $\perp$ -свободен. Тогда для любого контекста $C[\]$ имеем

$$C[M] \approx N \Rightarrow \forall L (C[L] \approx N).$$

Доказательство. По непрерывности получаем

$$\forall n \exists m (C[O_{M,m}] \in O_{N,n}).$$

Так как терм M неразрешим, имеем $O_{M,m} = \Lambda$ для всех m . Отсюда

$$\forall n \forall L (C[L] \supseteq N^{(n)}).$$

Но тогда $C[L] \supseteq \bigcup_n N^{(n)} = N$. Так как N $\perp$ -свободен, то $C[L] \approx N$ для всех L . $\square$

В упр. 14.5.7 показано, что это следствие станет ложным, если заменить $\approx$ на $=$.

14.4. Последовательность вычислений и устойчивость

Берри [1978] показал, что вычисление определимых функций λ -исчисления скорее последовательно, чем параллельно. Отсюда следует невозможность «параллельного или» (ср. Плоткин [1977]), т. е. терма $F \in \Lambda$, такого, что

$$FMN = \begin{cases} I, & \text{если } M \text{ или } N \text{ разрешим,} \\ \text{неразрешим в противном случае.} \end{cases}$$

Такая операция F очевидным образом параллельно вычислима (пытаемся одновременно искать г.н.ф. M и N ; если одна из них нашлась — даем выход I , в противном случае не даем никакого выхода).

Сейчас мы изложим результат Берри, теоремы 14.4.8 и 14.4.10, а также некоторые их следствия.

При этом удобно работать с контекстами, дыры которых занумерованы.

14.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество $\Lambda[\]_N$ *кратно нумерованных контекстов* определяется следующим образом:

$$x, [\]_i \in \Lambda[\]_N,$$

$$M, N \in \Lambda[\]_N \Rightarrow (MN), (\lambda x.N) \in \Lambda[\]_N.$$

Пример. $(\lambda x. [\]_1 y) [\]_2 \in \Lambda[\]_N$.

(ii) Пусть контекст $C \in \Lambda[\]_N$ таков, что все «дыры» из C содержатся в списке $[\]_{i_1}, \dots, [\]_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Пусть $\vec{M} \equiv M_1, \dots, M_n \in \Lambda$. Тогда через

$$C[M_1, \dots, M_n] \equiv C[\vec{M}]$$

обозначается результат помещения терма M_i в дыру $[\]_{i_j}$ для $1 \leq j \leq n$ (при этом некоторые свободные переменные из M_i могут стать связанными).

Пусть $\vec{M} \equiv M_1, \dots, M_n$. Тогда запись $\vec{M} \sqsubseteq \vec{M}'$ означает, что $\vec{M}' \equiv M'_1, \dots, M'_n$ и $M_i \sqsubseteq M'_i$ для $1 \leq i \leq n$.

14.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $C \in \Lambda[\]_N$, $\vec{M} \in \Lambda$, $C[\vec{M}] = N$ и $N|_\alpha = \perp$ (т. е. в узле α дерева $BT(N)$ помещен знак $\perp$).

(i) Говорят, что $C[\vec{M}]$ является α -постоянным, если $(\forall \vec{M}' \sqsupseteq \vec{M})(C[\vec{M}']|_\alpha = \perp)$.

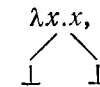
(ii) Пусть $1 \leq i \leq n$ и $\beta \in \text{Seq}$. Тогда говорят, что причиной метки $N|_\alpha (= \perp)$ является метка $M_i|\beta$ (в терме $C[\vec{M}]$), если

$$(1) M_i|\beta = \perp,$$

$$(2) [M_i|\beta = \perp \Rightarrow C[\vec{M}']|_\alpha = \perp] \text{ и } [M_i|\beta = z \Rightarrow C[\vec{M}']|_\alpha \neq \perp]$$

для любых термов $\vec{M}' \sqsupseteq \vec{M}$ и новых переменных z .

ПРИМЕР. Пусть $C \equiv \lambda x.x [\]_1 (\Omega [\]_2)$. Тогда $N \equiv C[\Omega_1, \Omega_2]$, где $\Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv \Omega$ имеет бёмовское дерево



так что $N|_{\langle 0 \rangle} = N|_{\langle 1 \rangle} = \perp$. Терм $C[\Omega, \Omega]$ $\langle 1 \rangle$ -постоянен, но не $\langle 0 \rangle$ -постоянен. При этом причиной пометки $N|_{\langle 0 \rangle}$ является $\Omega_1|_{\langle \rangle}$.

14.4.3. ЛЕММА. Пусть $C[\vec{\Omega}] = N$, причем $\vec{\Omega} \equiv \Omega_1, \dots, \Omega_n$, $\Omega_1 \equiv \dots \equiv \Omega_n \equiv \Omega$ и $N|_\alpha = \perp$. Тогда либо

$$(1) C[\vec{\Omega}] \text{ } \alpha\text{-постоянен, либо}$$

$$(2) \text{ причиной } N|_\alpha \text{ является } \Omega_i|_{\langle \rangle} \text{ для некоторого } 1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. Допустим, что $C[\vec{\Omega}]$ не является α -постоянным. Тогда $C[\vec{M}]|_\alpha \neq \perp$ для некоторых термов $\vec{M}$. В частности, $C[\vec{M}]$ имеет г.н.ф., так что его головная редукция заканчивается, скажем, за k шагов. Мы докажем (2) индукцией по $(lh(\alpha), k)$.

После небольшого размышления выясняется, что C должен иметь один из следующих трех видов (см. следствие 8.3.8).

Случай 1. $C[] \equiv \lambda \vec{x}. []_i C_1 \dots C_m$. Тогда $\alpha = \langle \rangle$ и причиной метки $N | \langle \rangle$ является $\Omega_i | \langle \rangle$.

Случай 2. $C[] \equiv \lambda \vec{x}. y C_1 \dots C_m$. Тогда $\alpha = \langle j \rangle * \alpha'$, где $\alpha' \in \text{Seq}$, $1 \leq j \leq m$ и $C_j[\vec{\Omega}] | \alpha' = \perp$. Кроме того, $C_j[\vec{M}] | \alpha' \neq \perp$, поэтому в силу индукционного предположения получим, что причиной метки $C[\vec{\Omega}] | \alpha = C_j[\vec{\Omega}] | \alpha'$ является некоторая $\Omega_i | \langle \rangle$.

Случай 3. $C \equiv \lambda \vec{x}. (\lambda y. P) Q C_1 \dots C_m$. Тогда

$$\begin{aligned} C[\vec{M}] &\rightarrow_n \lambda \vec{x}. P[\vec{M}][y := Q_1[\vec{M}]] C_1[\vec{M}] \dots \equiv \\ &\equiv C_*[\vec{M}, \vec{M}[y := Q[\vec{M}]]] \equiv C_*[\vec{M}, \vec{M}^*]. \end{aligned}$$

Кроме того, $C[\vec{\Omega}] = C_*[\vec{\Omega}, \vec{\Omega}]$. Следовательно,

$$C_*[\vec{\Omega}, \vec{\Omega}] | \alpha = \perp \quad \text{и} \quad C_*[\vec{M}, \vec{M}] | \alpha \neq \perp.$$

Заметим, что головная редукция терма $C_*[\vec{M}, \vec{M}]$ к г.н.ф. имеет длину $< k$. Поэтому в силу предположения индукции причиной метки $N | \alpha$ является некоторая $\Omega_i | \langle \rangle$ (в $C_*[\vec{\Omega}, \vec{\Omega}]$). Но тогда ее причиной является и метка $\Omega_i | \langle \rangle$ в $C[\vec{\Omega}]$, остатком которой является Ω_j . $\square$

14.4.4. Следствие. Пусть все термы $\vec{P} = P_1, \dots, P_n \in \Lambda \perp$ находятся в $\beta \perp$ -н.ф., и пусть $C[\vec{P}] | \alpha = \perp$. Тогда либо

- (1) $C[\vec{P}]$ α -постоянен, либо
- (2) причиной метки $C[\vec{P}] | \alpha$ является некоторая $P_i | \beta$ (для $1 \leq i \leq n$ и $\beta \in \text{Seq}$).

Доказательство. Пусть контекст $C_1 \in \Lambda[]_N$ получается из $C[\vec{P}]$ заменой различных вхождений $\perp$ в термах $\vec{P}$ внутри $C[\vec{P}]$ на нумерованные дыры $[]_1, []_2, \dots$. Тогда $C[\vec{P}] = C_1[\vec{\perp}] \approx C_1[\vec{\Omega}]$ и

$$(\forall \vec{P}' \sqsupseteq \vec{P}) \exists \vec{M} (C[\vec{P}'] = C_1[\vec{M}]).$$

Теперь нужный результат следует из леммы 14.4.3. $\square$

14.4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N, L \in \Lambda(\perp)$. Тогда

- (i) $M \sqcap N \approx L$, если $\text{BT}(M) \cap \text{BT}(N) = \text{BT}(L)$.
- (ii) $M \uparrow N$, если $\exists P (M, N \sqsubseteq P)$.

(iii) Для последовательностей одинаковой длины записи $\vec{M} \sqcap \vec{N} = \vec{L}$ и $\vec{M} \uparrow \vec{N}$ понимаются очевидным образом.

ПРИМЕР. $\lambda x. xba \sqcap \lambda x. xab = \lambda x. x \perp \perp$; $\lambda x. xaa \sqcap \lambda x. xab = \lambda x. xa \perp$.

14.4.6. ЛЕММА. $(\forall M, N \in \Lambda(\perp)) (\exists L \in \Lambda) (M \sqcap N \approx L)$.

Доказательство. Пусть $A = \text{BT}(M) \cap \text{BT}(N)$. Тогда A рекурсивно перечислимо и имеет конечное множество свободных переменных. Поэтому применима теорема 10.1.23. $\square$

Мы будем работать с выражением $M \sqcap N$ так, как будто его значение — терм, хотя на самом деле это значение определено только с точностью до $\approx$.

14.4.7. ЛЕММА. Пусть $C \in \Lambda[]_N$, $\vec{M} \in \Lambda$, $\vec{P} \in \Lambda \perp$, причем $\vec{M} \uparrow \vec{P}$, а все термы $\vec{P} = P_1, \dots, P_n$ находятся в $\beta \perp$ -н.ф. Тогда

$$C(\vec{M} \sqcap \vec{P}) \approx C[\vec{M}] \sqcap C[\vec{P}].$$

Доказательство. Очевидно что $\vec{M} \sqcap \vec{P} \sqsubseteq \vec{M}, \vec{P}$. В силу монотонности отсюда следует $C(\vec{M} \sqcap \vec{P}) \sqsubseteq C[\vec{M}] \sqcap C[\vec{P}]$. Предположим, что это неравенство строгое. Тогда для некоторого $\alpha \in \text{Seq}$

$$C(\vec{M} \sqcap \vec{P}) | \alpha = \perp, \quad C[\vec{M}] \sqcap C[\vec{P}] | \alpha \neq \perp.$$

Следовательно, $C[\vec{M}] | \alpha \neq \perp$ и $C[\vec{P}] | \alpha \neq \perp$. Поэтому $C(\vec{M} \sqcap \vec{P})$ не является α -постоянным и из предложения 14.4.4 следует, что причиной метки $C(\vec{M} \sqcap \vec{P}) | \alpha$ является некоторая $(M_i \sqcap P_i) | \beta$. Тогда $(M_i \sqcap P_i) | \beta = \perp$, $M_i | \beta \neq \perp$ (иначе $C[\vec{M}] | \alpha = \perp$) и $P_i | \beta \neq \perp$ (по аналогичной причине). Это противоречит соотношению $M_i \uparrow P_i$. $\square$

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать теорему о том, что вычисления последовательны. Этот результат касается контекстов $C[]$, рассматриваемых как функции от аргументов, помещаемых в дыры. Он утверждает, что если бёмовское дерево результата $C[\vec{M}]$ содержит $\perp$, то это $\perp$ либо вообще не зависит от аргументов $\vec{M}$, либо его причиной является конкретное $\perp$ в бёмовском дереве одного из аргументов. Это не так для функций вроде параллельного «или»:

$$\perp \text{ «или» } \perp = \perp, \quad \perp \text{ «или» } T = T, \quad T \text{ «или» } \perp = T.$$

14.4.8. ТЕОРЕМА О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ. Пусть $\vec{M} = M_1, \dots, M_n$ и $C[\vec{M}] | \alpha = \perp$. Тогда либо

- (1) $C[\vec{M}]$ α -постоянен, либо

(2) причиной метки $C[\vec{M}]|\alpha$ является некоторая $M_i|\beta$, где $1 \leq i \leq n$ и $\beta \in \text{Seq}$.

Доказательство. Допустим, что $C[\vec{M}]$ не является α -постоянным. Тогда

(3) $C[\vec{M}'] \neq \perp$

для некоторых термов $\vec{M}' \supseteq \vec{M}$. Из непрерывности следует, что

(4) $C[P] \neq \perp$ для некоторых $P_i \in \mathcal{A}(M_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Так как имеет место $\vec{P} \uparrow \vec{M}$ (а именно, и правая, и левая часть $\sqsubseteq \vec{M}'$), из леммы 14.4.7 следует, что

$$C[\vec{P} \sqcap \vec{M}]|\alpha = (C[\vec{P}] \sqcap C[\vec{M}]|\alpha) = \perp,$$

так как $C[\vec{M}]|\alpha = \perp$. Из (3) следует, что $C[\vec{P} \sqcap \vec{M}]$ не является α -постоянным. Так как термы $\vec{P} \sqcap \vec{M}$ имеют конечные бёмовские деревья, следствие 14.4.4 дает

(5) причиной $C[\vec{P} \sqcap \vec{M}]|\alpha$ является некоторая $P_i \sqcap M_i|\beta$.

Утверждение. Причиной $C[\vec{M}]|\alpha$ является $M_i|\beta$. Действительно, заметим, что $P_i|\beta \neq \perp$ (так как иначе в силу (5) было бы $C[P] = \perp$, что противоречит (4)), и по (5) имеем $P_i \sqcap M_i|\beta = \perp$. Поэтому $M_i|\beta = \perp$.

Допустим еще, что $\vec{M} \sqsubseteq \vec{N}$. Тогда $\vec{P} \sqcap \vec{M} \sqsubseteq \vec{N}$, откуда

$$N_i|\beta = \perp \Rightarrow C[\vec{N}]|\alpha = \perp$$

и

$$N_i|\beta = z \text{ (новая)} \Rightarrow C[\vec{N}]|\alpha \neq \perp. \quad \square$$

В качестве следствия доказанной теоремы мы покажем теперь, что λ -определимые функции «устойчивы», т. е. сохраняют пересечения (вычисленные через бёмовские деревья) ограниченных множеств.

14.4.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$. Тогда

(i) $\prod \mathcal{X} \approx M$, если $\text{BT}(M) = \bigcap \{\text{BT}(N) \mid N \in \mathcal{X}\}$.

(ii) $\uparrow \mathcal{X}$, если $(\exists M \in \Lambda)(\forall N \in \mathcal{X})(N \sqsubseteq M)$.

Не для любого $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$ имеется $M \in \Lambda$, такой, что $\prod \mathcal{X} \approx M$. Однако $\bigcap \{\text{BT}(N) \mid N \in \mathcal{X}\}$ — всегда дерево бёмовского типа.

14.4.10. ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ. Пусть $\vec{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n \subseteq \Lambda$ и $\uparrow \mathcal{X}_1, \dots, \uparrow \mathcal{X}_n$. Тогда

$$C[\prod \mathcal{X}_1, \dots, \prod \mathcal{X}_n] \approx \prod C[\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n].$$

Точнее, если $\prod \mathcal{X}_i = M_i$ для $1 \leq i \leq n$, то

$$C[M_1, \dots, M_n] \approx \prod \{C[N_1, \dots, N_n] \mid N_i \in \mathcal{X}_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Доказательство. Очевидно, что $M_i \sqsubseteq N_i$ для всех $N_i \in \mathcal{X}_i$. Отсюда по монотонности получаем

$$\text{BT}(C[\vec{M}]) \subseteq \bigcap \{\text{BT}(C[\vec{N}]) \mid \vec{N} \in \vec{\mathcal{X}}\}.$$

Рассуждая от противного, допустим, что это включение строгое. Тогда для некоторого $\alpha \in \text{Seq}$

(1) $C[\vec{M}]|\alpha = \perp$ и

(2) $(\forall \vec{N} \in \vec{\mathcal{X}})(C[\vec{N}]|\alpha \neq \perp)$.

Отсюда вытекает, что $C[\vec{M}]$ не является α -постоянным. Следовательно, по теореме о последовательности вычислений, причиной метки $C[\vec{M}]|\alpha$ является некоторая $M_i|\beta$. Тогда для всех $\vec{N} \in \vec{\mathcal{X}}$ мы имеем $\vec{M} \sqsubseteq \vec{N}$ и

$$N_i|\beta = \perp \Rightarrow C[\vec{N}]|\alpha = \perp.$$

Поэтому из (2) следует, что $(\forall N_i \in \mathcal{X}_i)(N_i|\beta = \perp)$. Из $\uparrow \mathcal{X}_i$ мы получаем, что для всех $N, N' \in \mathcal{X}_i$ имеет место $N|\beta = N'|\beta \neq \perp$. Поэтому $M_i|\beta = \prod \mathcal{X}_i|\beta \neq \perp$ в противоречие с тем, что причиной метки $M_i|\beta$ является $C[\vec{M}]|\alpha$. $\square$

14.4.11. Следствие. Если $\vec{M} \uparrow \vec{N}$, то $C[\vec{M} \sqcap \vec{N}] \approx C[\vec{M}] \sqcap C[\vec{N}]$.

Доказательство. Это утверждение непосредственно получается из предыдущей теоремы, так как в силу леммы 14.4.6 $\vec{M} \sqcap \vec{N}$ всегда существует как терм. $\square$

Приведенное ниже следствие теоремы о последовательности вычислений показывает, что если λ -определимая функция C от n аргументов постоянна (с точностью до $\approx$) на n «взаимно перпендикулярных прямых», то она постоянна (с точностью до $\approx$) на всем множестве Λ^n .

14.4.12. ТЕОРЕМА. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $M_{ij}, N_i \in \Lambda$ для $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Предположим, что для всех $Z \in \Lambda$

$$C[M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1n-1}, Z] \approx N_1,$$

$$C[M_{21}, M_{22}, \dots, Z, M_{2n}] \approx N_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C[Z, M_{n2}, \dots, M_{nn-1}, M_{nn}] \approx N_n.$$

Тогда для всех $\vec{Z} = Z_1, \dots, Z_n \in \Lambda$

$$C[\vec{Z}] \approx N \approx N_1 \approx \dots \approx N_n.$$

Доказательство. Предположим для простоты записи, что $n = 3$. Тогда для всех Z

$$(1) \quad \begin{cases} C[M_{11}, M_{12}, Z] \approx N_1, \\ C[M_{21}, Z, M_{23}] \approx N_2, \\ C[Z, M_{32}, M_{33}] \approx N_3. \end{cases}$$

Пусть $N = C[\Omega, \Omega, \Omega]$. Тогда $N \sqsubseteq N_i$, $1 \leq i \leq 3$. Допустим, что одно из этих неравенств строгое. Тогда для некоторого $\alpha \in \text{Seq}$ имеем $N|\alpha = \perp$ и $N_i|\alpha \neq \perp$. Отсюда следует, что $C[\Omega]$ не является α -постоянным, так что по теореме о последовательности вычислений причиной метки $N|\alpha$ является одна из $\Omega_i|\langle \rangle$, например $\Omega_3|\langle \rangle$. Но тогда

$$C[M_{11}, M_{12}, \Omega]|\alpha = \perp, \quad C[M_{11}, M_{12}, z]|\alpha \neq \perp$$

в противоречие с (1). Таким образом, мы доказали, что $N \approx N_1 \approx N_2 \approx N_3$.

Допустим, что $\exists M_1, M_2, M_3 (N' \equiv C[M_1, M_2, M_3] \sqsupseteq N)$, т. е. $N|\alpha = \perp$ и $N'|\alpha \neq \perp$ для некоторого α . Тогда $C[\tilde{\Omega}]$ не является α -постоянным, так что причиной $N|\alpha$ является одна из $\Omega_i|\langle \rangle$, например $\Omega_2|\langle \rangle$. Но тогда

$$C[M_{21}, z, M_{23}] \approx N_2 \approx N$$

в силу (1) и $C[M_{21}, z, M_{23}]|\alpha \neq \perp$. Получилось противоречие. $\square$

Эта теорема, вероятно, верна и с $\equiv_\beta$ вместо $\approx$.

Следующий результат показывает, что в λ -исчислении нет «параллельного или».

Приложение. Ни для какого $F \in \Lambda$ не имеет места

$$FMN = \begin{cases} 1, & \text{если } M \text{ или } N \text{ разрешим,} \\ \text{неразрешимо в противном случае.} \end{cases}$$

Действительно, в противном случае мы имели бы $\forall Z (F|Z \approx FZ|1)$, но $F\Omega\Omega = \Omega$ в противоречие с предыдущей теоремой.

Следующие результаты, заимствованные из статьи Коппо и др. [1978], были нужны в § 10.4.

14.4.13. Лемма. Если $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\} \in \Lambda$, где $n > 1$, отделимо, то имеется $\alpha \in \text{Seq}$, полезный для $\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $C[M_i] = x_i$, $1 \leq i \leq n$, и допустим, рассуждая от противного, что

$$(1) \quad \neg(\exists \alpha \in \text{Seq}) \quad (\alpha \text{ полезен для } \mathcal{F}).$$

В силу непрерывности (следствие 14.3.21) для некоторого $k \in \mathbb{N}$

$$(2) \quad C[M_i^{[k]}] = x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Сделаем, если нужно, η -расширения в термах $M_i^{[k]}$, можно считать, что для $1 \leq i, j \leq n$

$$(3) \quad M_i^{[k]} \sim_\alpha M_j^{[k]} \Rightarrow \text{BT}(M_i^{[k]})(\alpha) = \text{BT}(M_j^{[k]})(\alpha).$$

[Используется то обстоятельство, что термы $M_i^{[k]}$ имеют конечные бёмовские деревья. В (2) придется сделать в правой части η -расширения переменных x_i , что не влияет на отделимость.]

В силу (1) никакой узел $\alpha \in \text{Seq}$ не полезен для множества $\mathcal{F}^{[k]} = \{M_1^{[k]}, \dots\}$. Следовательно,

$$(4) \quad M_i^{[k]} \not\sim_\alpha M_j^{[k]} \Rightarrow \exists h (M_h^{[k]}|\alpha = \perp).$$

Заменим в дереве $\text{BT}(M_i^{[k]})$ все метки в узлах α , таких, что $\exists h (M_h^{[k]}|\alpha = \perp)$, на $\perp$. В силу (3) и (4) результат этой замены, который мы обозначим через A , не зависит от i . Пусть

$$D[\vec{\cdot}] \equiv D[\cdot]_1 \dots [\cdot]_m \equiv M[A][\perp := [\cdot]].$$

Тогда найдутся $\vec{N}_i \equiv N_{i1}, \dots, N_{im}$, такие, что для $1 \leq i \leq n$

$$(5) \quad M_i^{[k]} \approx D[\vec{N}_i],$$

$$(6) \quad \forall j \exists i (N_{ij} = \Omega).$$

Рассмотрим $B = \text{BT}(C[D[\vec{\Omega}]])$, где $\Omega_j = \Omega$, $1 \leq j \leq m$.

Случай 1. Дерево $B \perp$ -свободно. Тогда в силу монотонности (следствие 14.3.20(iii)) имеем

$$\text{BT}(C[M_i^{[k]}]) = \text{BT}(C[D[\vec{N}_i]]) = B$$

независимо от i . Это противоречит (2).

Случай 2. $B|\beta = \perp$ для некоторого β . В силу теоремы о последовательности вычислений 14.4.8 и (2) причиной этого должен быть один из термов Ω ; пусть это будет Ω_j . В силу (6) имеем $N_{ij} = \Omega$ для некоторого i . Тогда

$$\perp = \text{BT}(C[D[\vec{N}_i]])|\beta = \text{BT}(x_i)|\beta \quad (\text{в силу (2), (5)}),$$

и снова получилось противоречие. $\square$

14.4.14. Предложение. Если множество $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\}$ отделимо, то $\mathcal{F}$ различимо.

Доказательство проводится индукцией по n . Если $n = 1$, то $\mathcal{F}$ различимо по определению. Если $n > 1$, то в силу

предыдущей леммы имеется узел α , полезный для $\mathcal{F}$. Классы множества $\mathcal{F}$ по отношению $\sim_\alpha$ все еще отделимы и имеют меньшую мощность. По предположению индукции все они различимы. Поэтому $\mathcal{F}$ различимо. $\square$

14.5. Упражнения

14.5.1. (i) Показать, что

$$M \rightarrow N \Rightarrow \exists N' [M \twoheadrightarrow N' \wedge N \twoheadrightarrow N'].$$

i. o. i. o.

(ii) Показать, что

$$M \twoheadrightarrow N \not\Rightarrow M \rightarrow N.$$

i. o.

14.5.2. (i) Допустим, что $M \xrightarrow{\Delta} N \equiv (\lambda y.R)S$ и M не является редексом. Показать, что либо

$$M \equiv I(\lambda y.R)S \quad \text{и} \quad \Delta \equiv I(\lambda y.R),$$

либо

$$M \equiv (\lambda xy.R_1)QS, \quad \Delta \equiv (\lambda xy.R_1)Q \quad \text{и} \quad R_1[x := Q] \equiv R.$$

(ii) Предположим, что $M[x := N]$ есть β -редекс и $M \not\equiv x$. Показать, что $M \equiv xQ$ и $N \equiv (\lambda y.P)$.

14.5.3 (создание редексов, Леви [1978]). Пусть $M \xrightarrow{\Delta} N$, причем редекс $(\lambda y.R)S \equiv N$ создан в рассматриваемой одношаговой редукции (т. е. не является остатком никакого редекса из M). Показать, что редукция $M \rightarrow N$ должна иметь один из следующих видов:

- (1) $C[I(\lambda y.R)S] \rightarrow C[(\lambda y.R)S]$,
- (2) $C[(\lambda xy.R_1)QS] \rightarrow C[(\lambda y.R_1[x := Q])S] \equiv C[(\lambda y.R)S]$,
- (3) $C[(\lambda x.D[xS])(\lambda y.R)] \rightarrow C[D[(\lambda y.R)S]]$.

14.5.4. Показать, что имеется по существу единственный $M \in \Lambda$, такой, что $M \rightarrow M$ (т. е. $M \rightarrow M$, но это не имеет места ни для какого собственного его подтерма). [Указание. Использовать упр. 14.5.2 (ii).]

14.5.5 (помеченное λ -исчисление Леви (в формулировке Клопа [1980])). Пусть $L_0 \triangleq \{a, b, c, \dots\}$ — бесконечное множество символов. Определим индуктивно множество L меток Леви:

$$\alpha \in L_0 \Rightarrow \alpha \in L, \quad \alpha, \beta \in L \Rightarrow \alpha\beta \in L, \quad \alpha \in L \Rightarrow \underline{\alpha} \in L.$$

Здесь $\alpha\beta$ обозначает конкатенацию (приписывание) α и β без скобок.

Множество Λ^L определяется правилами построения λ -термов плюс правило

$$M \in \Lambda^L, \quad \alpha \in L \Rightarrow (M^\alpha) \in \Lambda^L.$$

Подстановка на Λ^L определяется путем добавления пункта

$$(M)^\alpha[x := L] \equiv (M[x := L])^\alpha$$

к обычному определению.

Пусть дано множество $P \subseteq L$. На Λ^L определяются следующие понятия редукции:

$$\beta^P: (\lambda x.M)^\alpha N \rightarrow M^\alpha[x : N^\alpha], \quad \text{если} \quad \alpha \in P.$$

$$lab: (M^\alpha)^\beta \rightarrow M^{\alpha\beta}, \quad \beta_L^P = \beta^P \cup lab.$$

Будем писать β^P вместо β_L^P . Определим для $\alpha \in L$ высоту $h(\alpha)$.

$$h(\alpha) = 0, \quad \text{если} \quad \alpha \in L_0, \quad h(\alpha\beta) = \max\{h(\alpha), h(\beta)\}, \quad h(\underline{\alpha}) = h(\alpha) + 1.$$

Множество $P \subseteq \Lambda$ называется ограниченным, если $\exists n \forall \alpha [\alpha \in P \Rightarrow h(\alpha) \leq n]$.

(i) Показать, что если P ограничено, то понятие редукции β^P сильно нормализуемо. [Указание. Использовать свойство SN для $+$ -редукции.]

(ii) Пусть $M, N \in \Lambda$ и $\sigma: M \twoheadrightarrow N$, $\tau: M \twoheadrightarrow N$. Пусть $M' \in \Lambda^L$ — результат пометки всех подтермов терма M различными метками из L_0 . Показать, что редукции σ, τ можно поднять до редукций $\sigma', \tau': M' \twoheadrightarrow_{\beta^P} N'$, таких, что

$$\sigma \cong \tau \text{ т. н. т. т., когда } \sigma' \equiv \tau'.$$

14.5.6. Показать, что (i) $\neg (\exists F \in \Lambda) (F! \Omega = K \wedge F\Omega = S)$.

(ii) $\neg (\exists F, G \in \Lambda^0) (FGx = FxG = x)$.

14.5.7. Показать, что

$$C[M] = N, \quad M \text{ неразрешим}, \quad N \perp\text{-свободен} \not\Rightarrow \forall P (C[P] = N).$$

[Указание. Выбрать $C[x]$, который «выталкивает x на бесконечность» в $BT(C[x])$.]

14.5.8. (i) Показать, что аппликация $Ap: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ не является открытым отображением.

(ii) Показать, что операции λ -исчисления не являются в общем случае равномерно непрерывными в следующем смысле: имеется $F \in \Lambda^0$, такой, что неверно

$$\forall k \exists k' \forall M, N [N \in O_{M, k'} \Rightarrow FN \in O_{FM, k}].$$

(iii) Пусть $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ — непрерывное отображение. Показать, что в общем случае не существует $F \in \Lambda$, такого, что $\forall M (FM = f(M))$.

14.5.9. Пусть σ, τ — две β -редукции. Показать, что

$$\sigma \cong \tau \Rightarrow \sigma \cong_K \tau.$$

14.5.10. Построить множество $\mathcal{R} \subseteq \Lambda^0$, такое, что $\bigcap \{BT(M) \mid M \in \mathcal{R}\}$ не является бёмовским деревом никакого терма.

14.5.11. Показать, что $\mathcal{A}(M) = \{\omega(N) \mid N =_\beta M\}$.

Глава 15

Другие понятия редукции

15.1. $\beta\eta$ -редукция

Так как $\beta\eta$ -редукция анализирует равенство в экстенциональном λ -исчислении $\lambda\eta$, полезно рассмотреть это понятие редукции получше. Наша первая цель — доказать, что

M имеет β -н. ф. $\Leftrightarrow M$ имеет $\beta\eta$ -н. ф.

Первоначально это было доказано в монографии Карри и др. [1972]. Приводимое ниже доказательство — это упрощенный вариант из статьи Барендрегта и др. [1976]. Оно занимает 15.1.1—15.1.5.

Мы расширим множество Λ маркерами « η » для прослеживания η -редуксов.

15.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Λ^η — это множество термов, определяемое следующим образом.

$x \in \Lambda^\eta$ для переменных x , $P, Q \in \Lambda^\eta \Rightarrow (PQ) \in \Lambda^\eta$,

$P \in \Lambda^\eta \Rightarrow (\lambda x.P) \in \Lambda^\eta$, $P \in \Lambda^\eta \Rightarrow P^\eta \in \Lambda^\eta$.

(ii) На множестве Λ^η мы определим понятие редукции β^η с помощью следующих правил свертывания:

$$\beta^\eta \begin{cases} (\lambda x.P)Q \rightarrow P[x:=Q], \\ P^\eta Q \rightarrow PQ, \end{cases}$$

где $P^\eta[x:=Q] \equiv (P[x:=Q])^\eta$.

(iii) Если $P \in \Lambda^\eta$, то $|P|$ — это результат вычеркивания всех η из P .

(iv) Отображение $\varphi: \Lambda^\eta \rightarrow \Lambda$ определяется следующим образом.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x, \\ \varphi(PQ) &= \varphi(P)\varphi(Q), \\ \varphi(\lambda x.P) &= \lambda x.\varphi(P), \\ \varphi(P^\eta) &= \lambda z.\varphi(P)z. \end{aligned}$$

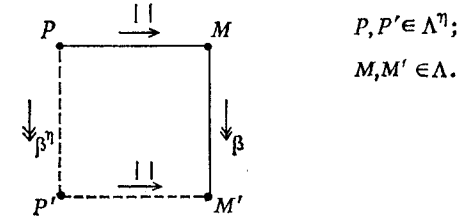
ОБОЗНАЧЕНИЕ. Запись $P \xrightarrow{\beta} M$ означает, что $|P| \equiv M$. Аналогично понимается $P \xrightarrow{\varphi} M$.

15.1.2. ЛЕММА. Пусть $P, Q \in \Lambda^\eta$ и $M, M' \in \Lambda$. Тогда

(i) $P \xrightarrow{\beta^\eta} Q \Rightarrow \varphi(P) \xrightarrow{\beta} \varphi(Q)$,

(ii) $\varphi(P) \xrightarrow{\eta} |P|$,

(iii)



Доказательство. (i) устанавливается индукцией по порождению отношения $\xrightarrow{\beta^\eta}$ с использованием равенства $\varphi(P[x:=Q]) \equiv \varphi(P)[x:=\varphi(Q)]$.

(ii) устанавливается индукцией по построению P .

(iii) $\xrightarrow{\beta}$ -редукцию можно моделировать $\xrightarrow{\beta^\eta}$ -редукцией, так как маркеры η не мешают (т. е. $P_1^\eta P_2 \xrightarrow{\beta^\eta} P_1 P_2^\eta$). $\square$

15.1.3. ЛЕММА. Пусть $P \in \Lambda^\eta$. Тогда

$|P|$ есть β -н. ф. $\Rightarrow \varphi(P)$ имеет β -н. ф.

Доказательство проводится индукцией по построению терма $|P|$. Отметим сначала, что

(1) $\varphi(P^\eta) =_\beta \varphi(P^\eta)$,

(2) $\varphi((\lambda x.P)^\eta) =_\beta \varphi(\lambda x.P)$,

(3) $\varphi(P^\eta Q) =_\beta \varphi(PQ)$.

Случай 1. $|P| \equiv x$. Тогда $P = x^{\dots}$, где точки обозначают нуль или более маркеров η . Отсюда и из (1) следует, что $\varphi(P) \equiv x$ или $\equiv \lambda z.xz$, и все в порядке.

Случай 2. $|P| \equiv \lambda x.M$. Тогда $P \equiv (\lambda x.Q)^{\dots}$. В силу (2)

$$\varphi(P) =_\beta \varphi(\lambda x.Q) \equiv \lambda x.\varphi(Q)$$

и нужный результат следует из предположения индукции.

Случай 3. $|P| \equiv xM_1 \dots M_n$. Тогда $P \equiv (\dots (x^{\dots} P_1)^{\dots} \dots P_n)^{\dots}$. В силу (3) и (1) либо

$$\varphi(P) =_\beta \varphi(xP_1 \dots P_n) = x\varphi(P_1) \dots \varphi(P_n),$$

либо

$$\varphi(P) =_\beta \varphi((xP_1 \dots P_n)^\eta) = \lambda z.x\varphi(P_1) \dots \varphi(P_n)z.$$

В обоих случаях нужный результат следует из предположения индукции. $\square$

15.1.4. Лемма. Если $M \rightarrow_{\eta} M'$ и M' имеет β -н. ф., то и M имеет β -н. ф.

Доказательство. Пусть $M \equiv C[\lambda x.Lx]$, $M' \equiv C[L]$ и $N' \equiv$ н. ф. терма M' . Возьмем $P \equiv C[L^{\eta}]$. Тогда $\varphi(P) \equiv M$ и

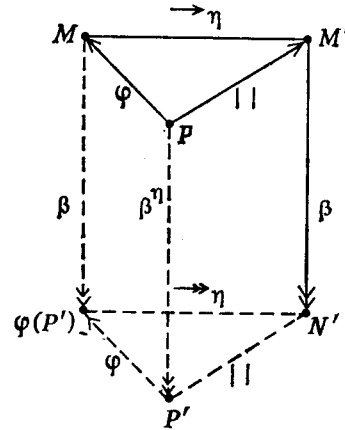


Рис. 15.1

$|P| \equiv M'$, так что с помощью леммы 15.1.2 мы получаем диаграмму на рис. 15.1.

Из леммы 15.1.3 следует, что $\varphi(P')$, а значит, и M имеет β -н. ф. $\square$

15.1.5. Следствие. M имеет β -н. ф. $\Leftrightarrow M$ имеет $\beta\eta$ -н. ф.

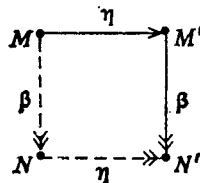
Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ тривиальна, так как η -свертывания уменьшают длину терма и не создают новых редексов.

$(\Leftarrow)$ доказывается индукцией по числу шагов в $\beta\eta$ -редукции терма M к $\beta\eta$ -н. ф. $\square$

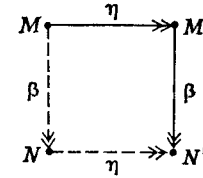
15.1.6. Следствие (откладывание η -редукции).

$$M \rightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow \exists L (M \rightarrow_{\beta} L \rightarrow_{\eta} N).$$

Доказательство. Рис. 15.1 показывает, что



откуда



Поэтому

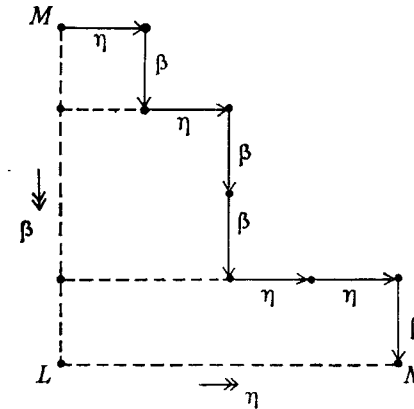


Рис. 15.2

Напомним, что терм $M \in \Lambda$ $\beta\eta$ -разрешим т. и т. т., когда $\exists \vec{P} (M^* \vec{P} =_{\beta\eta} I)$, где M^* — замыкание терма M .

15.1.7. Предложение. M $\beta\eta$ -разрешим $\Leftrightarrow M$ разрешим.

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ тривиальна.

$(\Rightarrow)$ Пусть $M^* \vec{P} =_{\beta\eta} I$. Из следствия 15.1.5 получаем, что $M^* \vec{P}$ имеет β -н. ф., которую мы обозначим через N . Тогда $N =_{\beta\eta} I$, откуда $N \rightarrow_{\beta\eta} I$ в силу следствия 3.3.10(i). Так как N есть β -н. ф., мы получаем, что $N \rightarrow_{\eta} I$ (сворачивание η -редексов не создает β -редексов). Пусть k — число шагов в редукции σ : $N \rightarrow_{\eta} I$. Индукция по k дает

$$(1) \quad N \equiv \lambda x_1 \dots x_n. x_1 N_2 \dots N_n,$$

где $n \geq 1$, $FV(N_i) = \{x_i\}$ и

$$(2) \quad N_i \rightarrow_{\eta} x_i \text{ менее чем за } k \text{ шагов.}$$

Еще раз применяя индукцию по k , мы покажем, что N разрешим.

Если $k = 0$, то $N \equiv I$, и все в порядке.

Пусть теперь $k > 0$. Тогда $n \geq 2$. Из (2) и подстановочности η -редукции следует, что $N_i[x_i := 1] \rightarrow_{\eta} 1$ менее чем за k шагов. Следовательно, по предположению индукции имеем

$$\exists P_{i1} \dots P_{ik_i}(N_i[x_i := 1] P_{i1} \dots P_{ik_i} = 1), \quad 2 \leq i \leq n.$$

Тогда

$$NL_1 \dots L_n = 1,$$

где $L_1 \equiv \lambda y_2 \dots y_n.(y_2 P_{11} \dots P_{1k_1}) \dots (y_n P_{n1} \dots P_{nk_n})$ и $L_2 \equiv \dots \equiv L_n \equiv 1$. Поэтому N действительно разрешим.

Отсюда следует, что $M \xrightarrow{\vec{P}} L = 1$, и все в порядке. $\square$

В заключение мы упомянем, что у Клопа [1980] доказана естественная формулировка теоремы стандартизации для $\beta\eta$ -редукции, а также результат о том, что сворачивание самого левого $\beta\eta$ -редекса — нормализующая стратегия. Мы не можем привести здесь эти результаты, так как они намного более сложны, чем соответствующие теоремы для β -редукции (например, второе из этих утверждений не следует непосредственно из первого).

15.2. $\beta\eta\Omega$ -редукция

Понятие редукции Ω вводится из-за того, что $\beta \cup \Omega$ анализирует доказуемость в теории $\mathcal{H}$. В этом пункте доказываются несколько результатов об этом понятии в связи с $\beta\eta$ -редукцией.

15.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Понятие редукции Ω определяется следующим правилом свертывания:

$$\Omega: M \rightarrow \Omega, \text{ если } M \text{ неразрешим и } M \not\equiv \Omega.$$

$$(ii) \beta\Omega = \beta \cup \Omega; \beta\eta\Omega = \beta\eta \cup \Omega.$$

15.2.2. ЛЕММА. Понятие редукции Ω подстановочно, и, следовательно, таковы же $\beta\Omega$ и $\beta\eta\Omega$.

Доказательство. Пусть $(M, \Omega) \in \Omega$. Тогда M неразрешим, а в силу следствия 8.3.4 неразрешим и терм $M[x := N]$ при любом N . Поэтому

$$(M[x := N], \Omega(\equiv \Omega[x := N])) \in \Omega. \quad \square$$

Чтобы показать, что $\beta\eta\Omega$ обладает свойством CR, нам нужно установить, что если M есть Ω -редекс и в M происходит β -, η - или Ω -свертывание, то результирующий терм M' — все еще Ω -редекс. Следующее понятие введено Уодсвортом.

15.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что терм M эквивалентен терму M' по разрешимости (и пишут $M \sim_s M'$), если

$$\forall C[] [C[M] \text{ разрешим} \Leftrightarrow C[M'] \text{ разрешим}].$$

Очевидно, что $\sim_s$ — отношение эквивалентности на множестве Λ .

$$15.2.4. \text{ ЛЕММА. (i) } M =_{\beta} N \Rightarrow M \sim_s N.$$

$$(ii) M =_{\eta} N \Rightarrow M \sim_s N.$$

$$(iii) M =_{\Omega} N \Rightarrow M \sim_s N.$$

Доказательство. (i) Пусть $M =_{\beta} N$ и терм $C[M]$ разрешим. Тогда $C^*[M] \vec{P} = 1$ и, следовательно, $C^*[N] \vec{P} = 1$, где $C^*[] \equiv \lambda \vec{x}. C[]$. Поэтому $C[N]$ разрешим.

(ii) Пусть $M =_{\eta} N$ и $C[M]$ разрешим. Тогда $C^*[N] \vec{P} = =_{\eta} C^*[M] \vec{P} = 1$ для некоторых $\vec{P}$. Следовательно, терм $C[N]$ $\beta\eta$ -разрешим, так что он разрешим в силу следствия 15.1.7.

(iii) Так как $\sim_s$ — отношение эквивалентности, достаточно показать, что $M \sim_s \Omega$ для $(M, \Omega) \in \Omega$. Поэтому допустим, что M неразрешим, а $C[M]$ разрешим. Тогда для некоторых $\vec{P}, \vec{x}$

$$(\lambda \vec{x}. C[M]) \vec{P} = 1.$$

Из леммы о генеричности (предложение 14.3.24) следует, что

$$(\lambda \vec{x}. C[\Omega]) \vec{P} = 1.$$

Поэтому $C[\Omega]$ разрешим. Аналогичным образом устанавливается, что

$$C[\Omega] \text{ разрешим} \Rightarrow C[M] \text{ разрешим.} \quad \square$$

15.2.5. ЛЕММА. Понятие редукции Ω обладает свойством CR.

Доказательство. В силу леммы 3.2.2 достаточно показать, что $\vdash_{\Omega} \Diamond$. Допустим, что $M \xrightarrow{\Delta_1}_{\Omega} M_1$, $M \xrightarrow{\Delta_2}_{\Omega} M_2$ (если $M \equiv M_1$ или $M \equiv M_2$, то ситуация тривиальна).

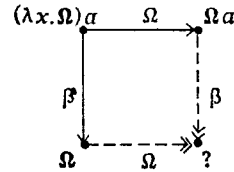
$$\begin{array}{ccc} M \equiv C[\Delta_2] \equiv & C[D[\Delta_1]] \xrightarrow{\Delta_2} & M_2 \equiv C[\Omega] \\ \Delta_1 \downarrow & & \downarrow \neq \phi \\ M_1 \equiv C[D[\Omega]] & \xrightarrow{D[\Omega]} & M_3 \equiv C[\Omega] \end{array}$$

Рис. 15.3

Случай 1. Δ_1, Δ_2 — дизъюнктивные подтермы терма M . Тогда можно найти общий редукт M_3 термов M_1, M_2 , заменяя оба редекса Δ_1, Δ_2 в терме M на Ω .

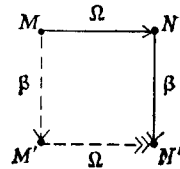
Случай 2. Δ_1 и Δ_2 перекрываются, например $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Тогда берем $M_3 \equiv M_2$. Это действительно срабатывает, так как $\Delta_1 \sim_s \Omega$ по лемме 15.2.4(iii) и, значит, результат замены Δ_1 в Δ_2 на Ω все еще неразрешим. См. рис. 15.3. $\square$

В доказательстве свойства CR для $\beta\Omega$ и $\beta\eta\Omega$ мы не можем применить лемму Хиндли—Розена, так как $\rightarrow_\beta$ и $\rightarrow_\Omega$ не коммутируют:



Поэтому используется другая стратегия, которая была первоначально применена для $\beta\eta$ -случая Карри и Фейсом [1958]. Сначала устанавливаются некоторые возможности откладывания $\beta\eta\Omega$ -редукций.

15.2.6. ЛЕММА.



Доказательство. Пусть $\Delta \equiv (\lambda x.P)Q$ есть β -редекс, сворачиваемый в N , и Δ' — его свертка. Тогда $N \equiv C[\Delta]$, $N' \equiv C[\Delta']$. Кроме того, N — результат замены неразрешимого подтерма $H \subset M$ на Ω .

Случай 1. Подтермы Δ и Ω терма N дизъюнкты. Тогда диаграмма дополняется следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} M \equiv \dots H \dots \Delta \dots & \xrightarrow{\Omega} & N \equiv \dots \Omega \dots \Delta \dots, \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ M' \equiv \dots H \dots \Delta' \dots & \xrightarrow{\Omega} & N' \equiv \dots \Omega \dots \Delta' \dots. \end{array}$$

Случай 2. $\Omega \subset \Delta$.

Подслучай 2.1. $\Omega \subset P$. Тогда $P \equiv D[\Omega]$, и мы имеем

$$\begin{array}{ccc} M \equiv C[(\lambda x.D[H])Q] & \xrightarrow{\Omega} & N \equiv C[(\lambda x.D[\Omega])Q], \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ M' \equiv C[D[H][x := Q]] & \xrightarrow{\Omega} & N' \equiv C[D[\Omega][x := Q]], \end{array}$$

ввиду подстановочности понятия редукции Ω .

Подслучай 2.2. $\Omega \subset Q$. Он рассматривается аналогично, но теперь $M' \rightarrow_\Omega N'$.

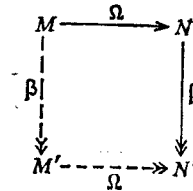
Подслучай 2.3. $\Omega \equiv \Delta$. Тогда $M \equiv C[H]$, и можно взять $M' \equiv C[H']$, где H' — одношаговый редукт неразрешимого подтерма H .

Случай 3. $\Delta \subset \Omega$. Тогда $\Delta \equiv \Omega$, т. е. имеет место подслучай 2.3. $\square$

15.2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (об откладывании Ω -редукции).

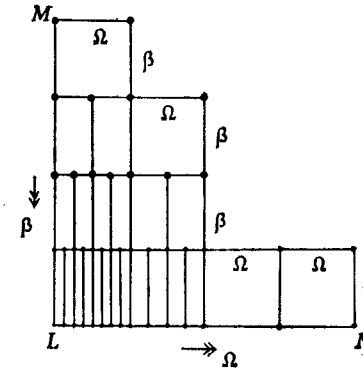
$$M \rightarrow_{\beta\Omega} N \Rightarrow \exists L (M \rightarrow_\beta L \rightarrow_\Omega N).$$

Доказательство. В силу леммы 15.2.6 мы получаем с помощью обхода диаграммы, что

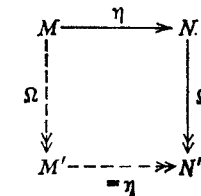


откуда с помощью еще одного обхода диаграммы получается, что это имеет место и с $\rightarrow_\Omega$ вместо $\rightarrow_\beta$. Но тогда нужный результат получается с помощью заключительного обхода диаграммы, такого же, как на рис. 15.2. $\square$

Замечание. Если собрать вместе обходы диаграммы, использованные в предыдущем доказательстве, то получится фигура следующего вида:



15.2.8. ЛЕММА.



Доказательство. Пусть редукция $M \rightarrow_{\eta} N$ состоит в сворачивании редекса $\lambda x.Px$ в P , а редукция $N \rightarrow_{\Omega} N'$ — в сворачивании H в Ω .

Случай 1. Подтермы P и H дизъюнкты в N . Рассматривается легко.

Случай 2. $H \subset P$. Тогда $P \equiv P_0[H]$, и мы имеем

$$\begin{array}{ccc} M \equiv C[\lambda x.P_0[H]x] & \xrightarrow{\eta} & N \equiv C[P_0[H]], \\ \Omega \downarrow & & \downarrow \Omega \\ M' \equiv C[\lambda x.P_0[\Omega]x] & \xrightarrow{\eta} & N' \equiv C[P_0[\Omega]]. \end{array}$$

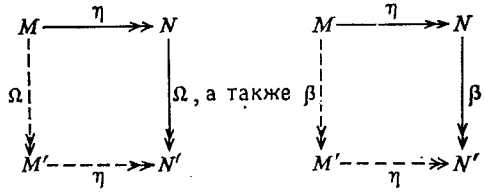
Случай 3. $P \subset H$. Тогда $H \equiv H_0[P]$, и мы имеем

$$\begin{array}{ccc} M \equiv C[H_0[\lambda x.Px]] & \xrightarrow{\eta} & N \equiv C[H_0[P]], \\ \Omega \downarrow & & \downarrow \Omega \\ M' \equiv C[\Omega] & \xrightarrow{=} & N' \equiv C[\Omega]. \quad \square \end{array}$$

15.2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (откладывание Ω - и η -редукции). Если $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} N$, то

$$\exists L_1 L_2 (M \twoheadrightarrow_{\beta} L_1 \twoheadrightarrow_{\Omega} L_2 \twoheadrightarrow_{\eta} N).$$

Доказательство. Сначала с помощью леммы 15.2.8 показываем, что



Вторая диаграмма получается с помощью следствия 15.1.8. Допустим теперь, что $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} N$. С помощью обхода ступенчатой диаграммы (см. замечание после предложения 15.2.7) мы откладываем η -редукцию и получаем $M \twoheadrightarrow_{\beta\Omega} L_2 \twoheadrightarrow_{\eta} N$. Теперь нужный результат получается из предложения 15.2.7. $\square$

Понятия редукции η и Ω столь просты, что н. ф. существуют всегда.

15.2.10. ЛЕММА (i) Каждый терм имеет единственную η -н. ф.
(ii) Каждый терм имеет единственную Ω -н. ф.

Доказательство. (i) η -свертывания уменьшают длину терма, поэтому через конечное число шагов мы приходим к η -н. ф. Так как η обладает свойством CR, мы имеем единственность.

(ii) Назовем Ω -редекс максимальным, если он не содержится (собственным образом) ни в каком другом Ω -редексе.

Максимальные Ω -редексы дизъюнкты. Если заменить их все на Ω , то не возникает новых Ω -редексов (так как $H \sim_s \Omega$ для неразрешимых H). Поэтому M имеет Ω -н. ф., которая единственна, так как Ω обладает свойством CR. $\square$

15.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda$. Тогда

- (i) $\eta(M)$ обозначает η -н. ф. терма M ,
- (ii) $\Omega(M)$ обозначает Ω -н. ф. терма M .

ПРИМЕРЫ. (i) $\eta(a(\lambda x.y(\lambda z.xz))) = ay$.

(ii) $\Omega(a((\lambda x.x)\omega_3\omega_3)((\lambda x.z(xx))\omega_3)) = a\Omega((\lambda x.z(xx))\omega_3)$.

15.2.12. ЛЕММА. (i) $\eta(P)[x := \eta(Q)] \twoheadrightarrow_{\eta} \eta(P[x := Q])$.

(ii) $\Omega(P)[x := \Omega(Q)] \twoheadrightarrow_{\Omega} \Omega(P[x := Q])$.

Доказательство. (i) В силу подстановочности отношения η имеем

$$\eta(P)[x := \eta(Q)] =_{\eta} P[x := \eta(Q)] =_{\eta} P[x := Q] = \eta(P[x := Q]),$$

а последний терм находится в η -н. ф. Поэтому нужный результат получается из следствия 3.1.13 и того факта, что η обладает свойством CR (лемма 3.3.7).

(ii) устанавливается аналогично. $\square$

15.2.13. ЛЕММА. (i) $M \rightarrow_{\beta} N \Rightarrow \Omega(M) \twoheadrightarrow_{\beta\Omega} \Omega(N)$.

(ii) $M \rightarrow_{\eta} N \Rightarrow \Omega(M) \twoheadrightarrow_{\eta\Omega} \Omega(N)$.

(iii) $M \rightarrow_{\beta} N \Rightarrow \eta(M) \twoheadrightarrow_{\beta\eta} \eta(N)$.

(iv) $M \rightarrow_{\Omega} N \Rightarrow \eta(M) \twoheadrightarrow_{\eta\Omega} \eta(N)$.

Доказательство. (i) Заметим, что нормальную форму Ω можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= x, \\ \Omega(MN) &= \begin{cases} \Omega(M)\Omega(N), & \text{если } MN \text{ разрешим,} \\ \Omega & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \Omega(\lambda x.M) &= \begin{cases} \lambda x.\Omega(M), & \text{если } \lambda x.M \text{ разрешим,} \\ \Omega & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Наше утверждение будет доказано индукцией по порождению отношения $M \rightarrow_{\beta} N$.

Случай 1. $M \rightarrow_{\beta} N$ есть $(\lambda x.P)Q \rightarrow_{\beta} P[x := Q]$. Тогда

$$\Omega(M) = \begin{cases} (\lambda x.\Omega(P))\Omega(Q), & \text{если } M \text{ разрешим,} \\ \Omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В первом из этих случаев имеем $\Omega(M) \twoheadrightarrow_{\Omega} \Omega(N)$ в силу леммы 15.2.12(ii), во втором — $\Omega(M) \equiv \Omega(N) \equiv \Omega$.

Случай 2. $M \rightarrow_{\beta} N$ есть $ZP \rightarrow_{\beta} ZP'$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow_{\beta} P'$.

Тогда

$$\Omega(M) = \begin{cases} \Omega(Z) \Omega(P), & \text{если } M \text{ разрешим,} \\ \Omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В первом из этих случаев имеем $\Omega(M) \rightarrow_{\beta\Omega} \Omega(Z) \Omega(P')$ по предположению индукции, во втором — $\Omega(M) \equiv \Omega(N) \equiv \Omega$.

Случай 3. $M \rightarrow_{\beta} N$ есть $PZ \rightarrow_{\beta} P'Z$ или $\lambda x.P \rightarrow_{\beta} \lambda x.P'$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow_{\beta} P'$. Доказательство аналогично.

(ii) устанавливается аналогично (i) с использованием леммы 15.2.4(ii).

(iii) Отметим, что н. ф. $\eta(M)$ можно определить следующим образом:

$$\eta(x) = x,$$

$$\eta(MN) = \eta(M) \eta(N),$$

$$\eta(\lambda x.M) = \begin{cases} \eta(M_1), & \text{если } M \equiv M_1 x, \text{ причем } x \notin \text{FV}(M_1), \\ \lambda x.\eta(M) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы снова используем индукцию.

Случай 1. $M \rightarrow_{\beta} N$ есть $(\lambda x.P)Q \rightarrow_{\beta} P[x := Q]$. Тогда

$$\eta(M) = \begin{cases} \eta(P_1) \eta(Q), & \text{если } P \equiv P_1 x, \text{ причем } x \notin \text{FV}(P_1), \\ (\lambda x.\eta(P)) \eta(Q) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В первом из этих случаев

$$\begin{aligned} \eta(M) &\equiv \eta(P_1 x) [x := \eta(Q)] \rightarrow_{\eta} \\ &\rightarrow_{\eta} \eta((P_1 x) [x := Q]) \text{ (в силу леммы 15.2.12(ii))} \equiv \\ &\equiv \eta(N). \end{aligned}$$

Во втором случае

$$\eta(M) \rightarrow_{\beta} \eta(P) [x := \eta(Q)] \rightarrow_{\eta} \eta(P [x := Q]) \equiv \eta(N).$$

Случай 2. $M \rightarrow_{\beta} N$ есть $ZP \rightarrow_{\beta} ZP'$ или $PZ \rightarrow_{\beta} P'Z$ и является непосредственным следствием соотношения $P \rightarrow_{\beta} P'$. Тогда нужный результат следует из предположения индукции.

Случай 3. $M \rightarrow_{\beta} N$ есть $\lambda x.P \rightarrow_{\beta} \lambda x.P'$ и непосредственно следует из $P \rightarrow_{\beta} P'$.

Подслучай 3.1. $\eta(M) \equiv \eta(P_1)$, так как $P \equiv P_1 x$, причем $x \notin \text{FV}(P_1)$.

Подслучай 3.1.1. $P' \equiv P'_1 x$, причем $P_1 \rightarrow_{\beta} P'_1$. Тогда

$$\eta(M) \equiv \eta(P_1) \rightarrow_{\eta} \eta(P'_1) \text{ (по предположению индукции)} \equiv \eta(N).$$

Подслучай 3.1.2. $P \equiv P_1 x \equiv (\lambda z.P_2) x$ и $P' \equiv P_2 [z := x]$. Тогда $\eta(M) \equiv \eta(P_1) \equiv \eta(\lambda x.P_2) \equiv \eta(\lambda x.P_2 [z := x]) \equiv \eta(N)$.

Подслучай 3.2. $\eta(M) = \lambda x \eta(P)$.

Подслучай 3.2.1. $\eta(N) \equiv \eta(P'_1)$, так как $P' \equiv P'_1 x$ и $x \notin \text{FV}(P'_1)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \eta(M) &\equiv \lambda x.\eta(P) \rightarrow_{\eta} \lambda x.\eta(P') \text{ (по предположению индукции)} \equiv \\ &\equiv \lambda x.\eta(P'_1) x \rightarrow_{\eta} \eta(P'_1) \equiv \eta(N). \end{aligned}$$

Подслучай 3.2.2. $\eta(N) \equiv \lambda x.\eta(P')$. Тогда

$$\eta(M) \equiv \lambda x.\eta(P) \rightarrow_{\eta} \lambda x.\eta(P') \equiv \eta(N) \text{ (по предположению индукции).}$$

(iv) доказывается аналогично с рассмотрением подслучаев и их подслучаев, когда $M \rightarrow_{\Omega} N$ имеет вид $\lambda x.P \rightarrow_{\Omega} \lambda x.P'$. Рассуждение, обосновывающее базис индукции, использует лемму 15.2.4(ii). $\square$

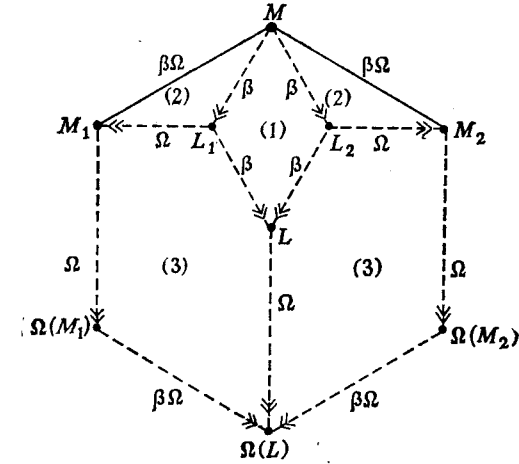


Рис. 15.4

15.2.14. Следствие. (i) $M \rightarrow_{\beta\Omega} N \Rightarrow \Omega(M) \rightarrow_{\beta\Omega} \Omega(N)$; $M \rightarrow_{\beta\eta\Omega} N \Rightarrow \Omega(M) \rightarrow_{\beta\eta\Omega} \Omega(N)$.

(ii) $M \rightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow \eta(M) \rightarrow_{\beta\eta} \eta(N)$; $M \rightarrow_{\beta\eta\Omega} N \Rightarrow \eta(M) \rightarrow_{\beta\eta\Omega} \eta(N)$.

Доказательство. (i) непосредственно получается из п. (i) и (ii) предыдущей леммы. ($M \rightarrow_{\Omega} N \Rightarrow \Omega(M) \equiv \Omega(N)$.)

(ii) непосредственно получается из п. (iii) и (iv) предыдущей леммы. $\square$

15.2.15. Теорема. (i) Понятие редукции $\beta\Omega$ обладает свойством CR.

(ii) Понятие редукции $\beta\eta\Omega$ обладает свойством CR.

Доказательство. (i) См. рис. 15.4.

Комментарии. (1) получается откладыванием Ω -редукции.

(2) следует из CR-свойства для β .

(3) получается из равенств $\Omega(L_i) \equiv \Omega(M_i)$ и следствия 15.2.14(i).

(ii) Заменить на рис. 15.4 все Ω на η , а затем β на $\beta\Omega$. $\square$

Для установления кофинальности некоторой редукционной цепочки в $G_{\beta\eta\Omega}(M)$ часто оказывается полезной приводимая ниже теорема в сочетании со следствием 13.2.11.

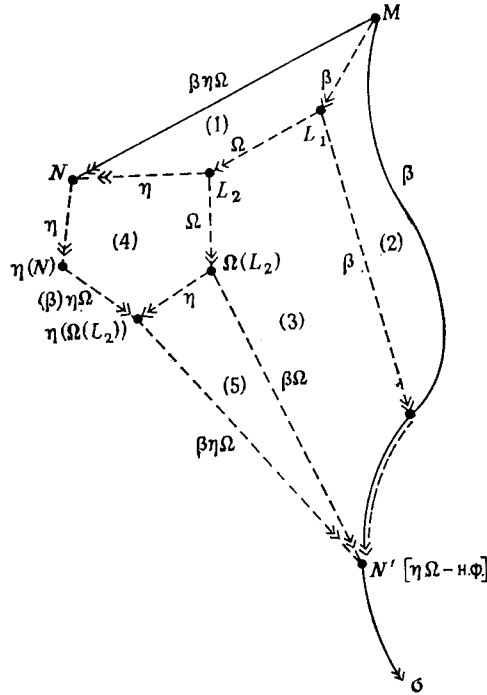


Рис. 15.5

15.2.16. ТЕОРЕМА. (i) Пусть σ — кофинальная редукционная цепочка в графе $G_\beta(M)$, такая, что бесконечно много термов из σ находятся в $\eta\Omega$ -н. ф. Тогда σ кофинальна и в графе $G_{\beta\eta\Omega}(M)$.

(ii) Тот же результат, что в (i), с заменой двух $\eta\Omega$ на η .

Доказательство. (i) Если $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} N$, то рис. 15.5 показывает, что N имеет $\beta\eta\Omega$ -редукт N' в цепочке σ .

Комментарии. (1) — это предложение 15.2.9.

(2) получается из кофинальности σ в $G_\beta(M)$.

(3) получается из следствия 15.2.14(i) с учетом того, что $\Omega(L_2) \equiv \Omega(L_1)$, $\Omega(N') \equiv N'$.

(4) получается из следствия 15.2.14(ii) с учетом того, что $\eta(N) \equiv \eta(L)$.

(5) — это следствие 15.2.14(ii)

(ii) устанавливается аналогично. $\square$

Тем же методом мы получаем более сильный, но менее обобщимый результат.

15.2.17. Следствие. (i) Пусть

$$\sigma: M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$$

— $\beta\eta\Omega$ -редукционная цепочка, такая, что

(1) $M \twoheadrightarrow_\beta M' \Rightarrow \exists i (M' \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} M_i)$.

(2) бесконечно много термов из σ находятся в $\eta\Omega$ -н. ф. Тогда σ кофинальна в $G_{\beta\eta\Omega}(M)$.

(ii) аналогична (i) с заменой $\eta\Omega$ на η . $\square$

Теперь мы построим кофинальную $\beta\eta(\Omega)$ -стратегию. Напомним, что $F_{gk}(M)$ обозначает результат полной развертки всех редексов из M , см. определение 13.2.7.

15.2.18. ЛЕММА. (i) $M \twoheadrightarrow_\Omega N \Rightarrow F_{gk}(M) \twoheadrightarrow_\Omega F_{gk}(N)$.

(ii) $M \twoheadrightarrow_\eta N \Rightarrow F_{gk}(M) \twoheadrightarrow_\eta F_{gk}(N)$.

Доказательство. Следствие 8.3.8 утверждает, что λ -терм M всегда находится в одном из следующих двух видов:

(1) $M \equiv \lambda \vec{x}. y M_1 \dots M_n$, $n \geq 0$, где $\vec{x}$ возможно пусто,

(2) $M \equiv \lambda \vec{x}. (\lambda y. M_0) M_1 \dots M_n$, $n \geq 1$, где $\vec{x}$ возможно пусто.

Утверждения (i), (ii) доказываются индукцией по длине терма M .

(i) Пусть $M \xrightarrow{H} N$.

Случай 1. M имеет вид (1). Тогда $H \equiv M_i$ для некоторого i и нужный результат следует из индукционного предположения с помощью упражнения 13.6.10.

Случай 2. M имеет вид (2).

Подслучай 2.1. $H \subset M_i$. Тогда нужный результат снова следует из предположения индукции.

Подслучай 2.2. $H \equiv (\lambda y. M_0) M_1 \dots M_j$, где $0 \leq j \leq n$. Тогда

$$F_{gk}(M) \equiv \lambda \vec{x}. F_{gk}(H) F_{gk}(M_{j+1}) \dots F_{gk}(M_n),$$

$$F_{gk}(N) \equiv \lambda \vec{x}. \Omega F_{gk}(M_{j+1}) \dots F_{gk}(M_n)$$

в силу упр. 13.6.10. Так как терм $F_{gk}(H) =_\beta H$ неразрешим, мы имеем $F_{gk}(M) \twoheadrightarrow_\Omega F_{gk}(N)$.

Подслучай 2.3. $H \equiv M$. Тогда $N \equiv \Omega$ и $F_{gk}(M) \twoheadrightarrow_\Omega F_{gk}(\Omega) \equiv \Omega$.

(ii) Пусть $M \xrightarrow{\Delta}_{\eta} N$, причем $\Delta \equiv \lambda x.Px$.

Случай 1. M имеет вид (1).

Подслучай 1.1. $\Delta \subset M_i$ для некоторого i . Тогда все в порядке в силу предположения индукции и упр. 13.6.10.

Подслучай 1.2. $M \equiv \lambda x_1 \dots x_m.yM_1 \dots M_{n-1}x_m$ и $\Delta \equiv \lambda x_m.yM_1 \dots M_{n-1}x_m$. Тогда $N \equiv \lambda x_1 \dots x_{m-1}.yM_1 \dots M_{n-1}$ и нужные результаты получаются легко.

Случай 2. M имеет вид (2).

Подслучай 2.1. $\Delta \subset M_i$ для некоторого i . Рассматривается так же, как раньше.

Подслучай 2.2. $\Delta \equiv \lambda y.M_0 \equiv \lambda y.Py$. Тогда $M \equiv \lambda \vec{x}.(\lambda y.Py)M_1 \dots M_n$, $N \equiv \lambda \vec{x}.PM_1 \dots M_n$. Здесь случайно получилось, что $M \rightarrow_{\beta} N$ без порождения новых β -редексов. Поэтому $F_{gk}(M) \equiv F_{gk}(N)$, и все в порядке.

Подслучай 2.3. $M \equiv \lambda x_1 \dots x_m.(\lambda y.M_0)M_1 \dots M_{n-1}x_m$ и $\Delta \equiv \lambda x_m.(\lambda y.M_0)M_1 \dots M_{n-1}x_m$. Рассматривается так же, как предыдущий. $\square$

Следующее определение и теорема применимы как к $\beta\eta$ -, так и к $\beta\eta\Omega$ -редукции.

15.2.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть σ есть $\beta\eta(\Omega)$ -редукция

$$\sigma: M \equiv M_0 \rightarrow_R M_1 \rightarrow_R M_2 \rightarrow_R \dots,$$

где $R = \beta\eta(\Omega)$. Тогда σ называется *квази-GK-редукционной цепочкой* (где GK — сокращение от Gross — Knuth) для M , если

- (1) $F_{gk}(M_i) = M_{i+1}$ для бесконечно многих i ,
- (2) M_j есть $\eta(\Omega)$ -н. ф. для бесконечно многих j .

15.2.20. ТЕОРЕМА. Любая квази-GK- $\beta\eta(\Omega)$ -редукционная цепочка, начинающаяся с M , кофинальна в графе $G_{\eta\beta(\Omega)}(M)$.

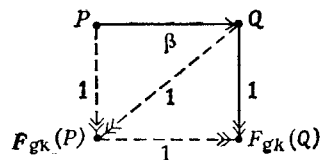
Доказательство. В силу леммы 15.2.18

$$(1) \quad P \rightarrow_{\eta(\Omega)} Q \Rightarrow F_{gk}(P) \rightarrow_{\eta(\Omega)} F_{gk}(Q).$$

Утверждение.

$$(2) \quad P \rightarrow_{\beta} Q \Rightarrow F_{gk}(P) \rightarrow_{\beta} F_{gk}(Q).$$

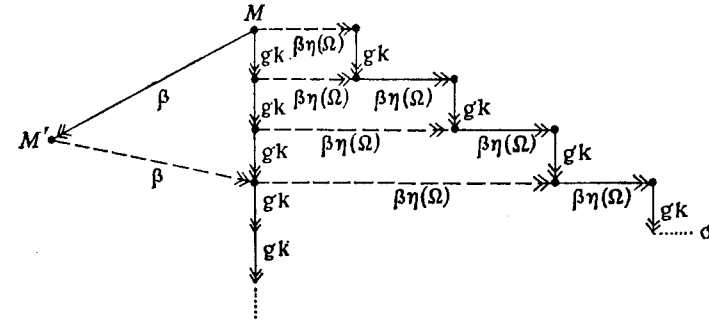
Очевидно, что достаточно доказать (2) для одношаговой редукции $P \rightarrow_{\beta} Q$. В этом случае (2) получается из леммы 13.2.8 и следующей диаграммы:



Из (1) и (2) получаем

$$(3) \quad P \rightarrow_{\beta\eta(\Omega)} Q \Rightarrow F_{gk}(P) \rightarrow_{\beta\eta(\Omega)} F_{gk}(Q).$$

Теперь утверждение теоремы будет доказано с помощью следствия 15.2.17. Второе из условий этого следствия выполнено в силу определения 15.2.19(2). Чтобы проверить первое, допустим, что $M \rightarrow_{\beta} M'$. Тогда приводимая ниже диаграмма показывает, что терм $M' \beta\eta(\Omega)$ -редуцируется к некоторому терму из σ .



Здесь треугольник получается по теореме 13.2.9, а прямоугольники — из соотношения (3). $\square$

ПРИМЕР. Пусть

$$\sigma: M \xrightarrow{F_{gk}} M_1 \xrightarrow{\eta\Omega} M'_1 \xrightarrow{F_{gk}} M_2 \xrightarrow{\eta\Omega} M'_2 \xrightarrow{F_{gk}} \dots,$$

где M'_i обозначает $\eta(\Omega)$ -н. ф. терма M_i . Тогда σ является квази-GK- $\beta\eta\Omega$ -редукцией и потому кофинальна в $G_{\beta\eta(\Omega)}(M)$.

Приложения см. в упражнении 15.4.2.

15.3. Дельта-редукция

Дельта-редукция — это не какое-то одно понятие редукции, а целая их совокупность. Все они определены на некотором расширении множества Λ .

15.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть δ — некоторая константа. Тогда $\Lambda\delta$ обозначает множество λ -термов, построенных из переменных и константы δ с обычным использованием аппликации и абстракции.

(ii) Аналогично определяется множество $\Lambda\vec{\delta}$, где $\vec{\delta}$ — последовательность констант.

Дельта-редукция служит для того, чтобы можно было сделать внутренними многие внешние функции f на множестве Λ ,

постулировав $\vec{\delta M} \rightarrow f(\vec{M})$. Это полезно для прикладного (особенно ориентированного на программирование) λ -исчисления. Первый пример δ -редукции вводит тест на равенство двух н. ф.

15.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (δ -символ Чёрча). Пусть δ_C — некоторая константа. На множестве $\Lambda\delta_C$ введем следующее понятие редукции:

$$\delta_C: \begin{cases} \delta_C MN \rightarrow T, & \text{если } M, N \in \beta\delta_C\text{-NF}^0, \quad M \equiv N, \\ \delta_C MN \rightarrow F, & \text{если } M, N \in \beta\delta_C\text{-NF}^0, \quad M \not\equiv N, \end{cases}$$

где $\beta\delta_C\text{-NF}^0 \subseteq \Lambda\delta_C^0$ — множество замкнутых β -н. ф., не содержащих подтермов вида $\delta_C PQ$.

Замечания. (i) Аналогичные правила свертывания, где разрешаются открытые н. ф., ведут к противоречию:

$$(\lambda xy. \delta xy) \Pi \rightarrow \delta \Pi \rightarrow T, \quad (\lambda xy. \delta xy) \Pi \rightarrow (\lambda x. F) \Pi \rightarrow F.$$

Необходимо также, чтобы константа δ действовала на н. ф. Кроме того, см. упр. 15.4.10.

(ii) Если $\mathcal{N} \subseteq \Lambda$ — конечное множество замкнутых $\beta\eta$ -н. ф., то найдется терм $D \in \Lambda^0$, такой, что для любых термов $M, N \in \mathcal{N}$ имеет место

$$DMN \rightarrow T, \text{ если } M \equiv N, \quad DMN \rightarrow F, \text{ если } M \not\equiv N.$$

Это получается из следствия 10.4.14. Для бесконечных множеств замкнутых $\beta\eta$ -н. ф. это в общем случае неверно — см. упр. 15.4.9.

Свойство CR для $\beta\delta_C$ -редукции Чёрча легко получается из следующего утверждения.

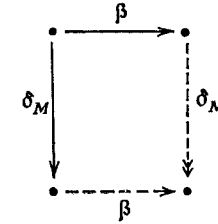
15.3.3. ТЕОРЕМА (Мичке [1976]). Пусть δ — некоторая константа. Пусть $R_1, \dots, R_m \subseteq (\Lambda\delta)^n$ — какие-либо n -арные отношения, и пусть $N_1, \dots, N_m \in \Lambda\delta$ — произвольные термы. Введем понятие редукции δ с помощью следующих правил свертывания:

$$\delta_M \begin{cases} \vec{\delta M} \rightarrow N_1, & \text{если } R_1(\vec{M}), \\ \dots \\ \vec{M} \rightarrow N_m, & \text{если } R_m(\vec{M}). \end{cases}$$

Тогда $\beta\delta_M$ обладает свойством CR, если выполнены следующие условия:

- (1) Отношения R_i дизъюнкты.
- (2) Отношения R_i замкнуты относительно $\beta\delta_M$ -редукции и подстановки (т. е. $R_i(\vec{M}) \Rightarrow R_i(\vec{M}')$, если $\vec{M} \rightarrow_{\beta\delta_M} \vec{M}'$ или M' есть подстановочный частный случай $\vec{M}$).

Доказательство. Сначала покажем, что δ_M обладает свойством CR. По лемме 3.2.2 для этого достаточно доказать, что $\Rightarrow_{\delta_M} \models \Diamond$. Это легко получается разбором случаев с использованием того факта, что отношения R_i замкнуты относительно δ_M -редукции. По лемме Хиндли — Розена (предложение 3.3.5) достаточно показать, что β и δ_M коммутируют. Рассматривая относительные положения β - и δ -редексов легко показать, что



Нужное свойство коммутативности получается отсюда с помощью обхода диаграмм. $\square$

15.3.4. СЛЕДСТВИЕ. $\beta\delta_C$ -редукция Чёрча обладает свойством CR.

Доказательство очевидно. $\square$

Для некоторых приложений полезно иметь аналог теоремы 15.3.3, в котором новая константа δ заменена на терм Ω , который ведет себя как константа при β -редукциях.

15.3.5. ТЕОРЕМА. Пусть $R_1, \dots, R_m \subseteq \Lambda^n$ — некоторые n -арные отношения и термы $N_1, \dots, N_m \in \Lambda$ произвольны. Рассмотрим понятие редукции Ω_δ , определенное конверсиями,

$$\Omega_\delta: \begin{cases} \Omega \vec{M} \rightarrow N_1, & \text{если } R_1(\vec{M}), \\ \dots \\ \Omega \vec{M} \rightarrow N_m, & \text{если } R_m(\vec{M}). \end{cases}$$

Тогда $\beta\Omega_\delta$ обладает свойством CR, если выполнены следующие условия:

- (1) Отношения R_i дизъюнкты.
- (2) Отношения R_i замкнуты относительно $\beta\Omega_\delta$ -редукции и подстановки.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 15.3.3. $\square$

15.3.6. СЛЕДСТВИЕ. Определим на множестве Λ следующее понятие редукции:

$$\Omega_1: \Omega 1 \rightarrow T, \quad \Omega 1 \rightarrow F.$$

Тогда $\beta\Omega_1$ обладает свойством CR.

Доказательство очевидно. $\square$

15.3.7. Следствие. Имеется непротиворечивая λ -теория $\mathcal{T}$, такая, что $\mathcal{T} \eta$ противоречива.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ аксиоматизирована равенствами $\Omega_1 = \mathbf{T}$, $\Omega_1 = \mathbf{F}$. Из очевидной эквивалентности

$$M =_{\beta\Omega_1} N \text{ т. и т. т., когда } \mathcal{T} \vdash M = N,$$

и того, что $\beta\Omega_1$ обладает свойством CR, следует непротиворечивость теории $\mathcal{T}$. Но

$$\mathcal{T} \eta \vdash \mathbf{T} = \Omega_1 = \Omega_1 = \mathbf{F},$$

значит, $\mathcal{T} \eta$ противоречива. $\square$

15.3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Якопини, Вентурини-Цилли). Терм $M \in \Lambda$ *легок*, если

$$(\forall N \in \Lambda) \text{Con}(M = N).$$

15.3.9. Предложение (Якопини [1975]). Ω *легок*.

Доказательство (Мичке). Определим понятие редукции $\Omega_M: \Omega \rightarrow M$. Из теоремы 15.3.5 при $n = 0$ следует, что $\beta\Omega_M$ обладает свойством CR. Так как очевидным образом

$$P =_{\beta\Omega_M} Q \text{ т. и т. т., когда } \Omega = M \vdash P = Q,$$

мы получаем, что $\text{Con}(\Omega = M)$. $\square$

См. также работу Батена и Бурбома [1979], где приведено теоретико-модельное доказательство этого результата.

Другие приложения метода Мичке приведены в упр. 15.4.3 и 15.4.5. См. Клоп [1980], с. 225, где приведено обобщение этого метода.

Редукция, не обладающая свойством Чёрча — Россера.

В 1972 году Ч. Манн заметил, что неясно, как доказать теорему Чёрча — Россера для понятия редукции, связанного с «взаимно однозначным спариванием» (см. также Барендрегт [1974]). Эта система получается путем добавления к Λ новых констант $\delta, \delta_1, \delta_2$ и постулирования для $M \in \Lambda\delta\delta_1\delta_2$ редукций

$$\text{SP} \begin{cases} \delta_i(\delta M_1 M_2) \rightarrow M_i & (i = 1, 2), \\ \delta(\delta_1 M)(\delta_2 M) \rightarrow M. \end{cases}$$

Хиндли заметил в 1973 г., что трудность имеется уже для системы $\delta_{\mathbf{H}} MM \rightarrow M$. Степлз [1976] заметил, что CR-свойство неочевидно даже для упрощенной системы $\delta_s MM \rightarrow \epsilon$, где ϵ — новая константа.

Клоп [1980] показал, что $\beta\delta_s$ действительно не обладает свойством CR. Отсюда следует, что $\beta\delta_{\mathbf{H}}$ и βSP не обладают свойством CR, где SP означает взаимно однозначное спаривание.

В оставшейся части этого пункта мы будем писать δ вместо δ_s . Интуитивные соображения, лежащие в основе контрпримера Клопа, таковы. Для термов $M \in \Lambda\delta\epsilon$ определим деревья $\text{BT}(M)$, расширив обычное определение пунктом

$$\text{BT}(\lambda \vec{x}. \delta M_1 \dots M_n) = \lambda \vec{x}. \delta \begin{array}{c} \nearrow \text{BT}(M_1) \dots \text{BT}(M_n) \searrow \end{array}$$

и аналогичным пунктом для ϵ . Если $M \rightarrow_{\delta} N$, то $\text{BT}(N)$ получается из $\text{BT}(M)$ путем замены некоторого количества деревьев вида

$$\lambda \vec{x}. \delta \begin{array}{c} \nearrow \Delta \dots \Delta \searrow \end{array} \quad \text{на} \quad \lambda \vec{x}. \epsilon \begin{array}{c} \nearrow \Delta \dots \Delta \searrow \end{array}$$

Это количество может быть бесконечным. Возьмем, например,

$$M \equiv (\lambda z. zz) (\lambda a. x (\delta bb) (aa)), \quad N \equiv (\lambda z. zz) (\lambda a. x \epsilon (aa)).$$

Тогда $M \rightarrow_{\delta} N$ и

$$\text{BT}(M) = x \begin{array}{c} \nearrow \delta \begin{array}{c} \nearrow b \searrow b \end{array} \dots \text{BT}(M) \searrow \end{array} = x \begin{array}{c} \nearrow \delta \begin{array}{c} \nearrow b \searrow b \end{array} \dots \delta \begin{array}{c} \nearrow b \searrow b \end{array} \dots x \begin{array}{c} \nearrow \delta \begin{array}{c} \nearrow b \searrow b \end{array} \dots x \begin{array}{c} \nearrow x \searrow \end{array} \end{array}$$

и

$$\text{BT}(N) = x \begin{array}{c} \nearrow \epsilon \searrow \text{BT}(N) \end{array} = x \begin{array}{c} \nearrow \epsilon \searrow x \begin{array}{c} \nearrow \epsilon \searrow x \begin{array}{c} \nearrow \epsilon \searrow x \begin{array}{c} \nearrow x \searrow \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Возьмем такую цепочку σ минимальной длины. Из того, что первая часть σ стандартна, следует, что

$$\sigma: C\varepsilon \xrightarrow[\text{st}]{\beta} \delta\varepsilon (C\varepsilon) \xrightarrow[\text{st}]{\beta} L \xrightarrow{\delta} \varepsilon.$$

По лемме 15.3.13 имеем

$$\sigma': C\varepsilon \xrightarrow[\text{st}]{\beta} L' \xrightarrow{\delta} \varepsilon$$

для некоторой σ' , такой, что $\text{lh}(\sigma') < \text{lh}(\sigma)$, а это противоречит минимальности σ . $\square$

15.3.15. ТЕОРЕМА. λ -исчисление, дополненное константами δ, ε и дополнительным правилом свертывания $\delta MM \rightarrow \varepsilon$, не обладает свойством CR.

Доказательство получается непосредственно из лемм 15.3.11 и 15.3.14. $\square$

Используя возможность «имитировать» редукцию $\delta MM \rightarrow \varepsilon$ с помощью констант $\delta, \delta_1, \delta_2$ для взаимно однозначного спаривания, Клоп [1980] показывает, что и эта последняя система не обладает свойством CR; см. упр. 15.4.4.

15.4. Упражнения

15.4.1. Показать, что любой терм $M \in \Lambda$ $\Omega\eta$ -сильно нормализуем.

15.4.2. (i) Пусть $A \equiv \omega\omega$, где $\omega \equiv \lambda xz.z(aa(x\Omega))$. Тогда $Ax \xrightarrow{\beta} A(x\Omega)$. Показать, что $x \in_{\beta\eta\Omega} Ax$ (обозначения см. в упр. 3.5.15). [Указание. Используя теоремы 15.2.20 и 13.2.11, находим кофинальную редукционную цепочку σ в $C_{\beta\eta\Omega}(Ax)$, такую, что для любого M_i в σ имеет место $x \in \text{FV}(M_i)$.]

(ii) Показать, что можно естественным образом выбрать терм $O \in \Lambda^0$, такой, что

$$Ox \ulcorner n \urcorner z \xrightarrow{\beta} z\Omega \sim^n (Ox \ulcorner n + 1 \urcorner z)$$

и $x \in_{\beta\eta\Omega} Ox \ulcorner 0 \urcorner$.

(iii) Пусть $F \in \Lambda^0$. Показать, что можно естественным образом выбрать терм $H \in \Lambda^0$, такой, что

$$Hcia \xrightarrow{\beta} [1, Fca(Hcia^+)]$$

и $x \in_{\beta\eta\Omega} Hsx \ulcorner 0 \urcorner$, где $a^+ \equiv [F, a]$ — результат применения стандартной функции следования.

15.4.3 (Плоткин). Пусть $A \in N$. Определим понятие редукции

$$\Omega_A: \begin{cases} \Omega \ulcorner n \urcorner \rightarrow T, & \text{если } n \in A, \\ \Omega \ulcorner n \urcorner \rightarrow F & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(i) Доказать, что $\beta\Omega_A$ обладает свойством CR.

(ii) Пусть $\mathcal{T}_A$ — результат расширения теории λ аксиомами $\{\Omega \ulcorner n \urcorner = T \mid n \in A\} \cup \{\Omega \ulcorner n \urcorner = F \mid n \notin A\}$. Показать, что $\mathcal{T}_A$ непротиворечива.

(iii) Получить отсюда, что имеется $2^{\aleph_0}$ непротиворечивых расширений λ -исчисления.

15.4.4 (Клоп [1980]). Определим на множестве $\Lambda\delta\delta_1\delta_2$ понятие редукции **SP** (взаимно однозначное или сюръективное спаривание)

$$\text{SP} \begin{cases} \delta_i (\delta M_1 M_2) \rightarrow M_i, & i = 1, 2, \\ \delta (\delta_1 M) (\delta_2 M) \rightarrow M. \end{cases}$$

Показать, что βSP не обладает свойством CR. [Указание. Положим $\delta_S = \lambda xy.\delta(\delta_1 \langle x \rangle)(\delta_2 \langle y \rangle)$ (К δ). Тогда $\delta_S MM \xrightarrow{\beta} \delta$, и мы можем имитировать контрпример из теоремы 15.3.15.]

15.4.5 (i) (Якопини). Пусть $\mathcal{T}$ получается добавлением к системе λ аксиом

$$\{\Omega \ulcorner 0 \urcorner Z = \Omega \ulcorner 1 \urcorner Z \mid Z \in \Lambda^0\}.$$

Показать, что $\mathcal{T} \not\models \Omega \ulcorner 0 \urcorner = \Omega \ulcorner 1 \urcorner$. [Указание. Использовать рассуждение с применением свойства CR.]

(ii) Показать, что теория $\mathcal{T}' = \mathcal{T} + \Omega(\lambda x.\Omega \ulcorner 0 \urcorner x) = T + \Omega(\lambda x.\Omega \ulcorner 1 \urcorner x) = F$ непротиворечива, а $\mathcal{T}' \cup \omega$ противоречива.

15.4.6 (Барендрегт, Койманс). Показать, что имеется λ -алгебра $\mathcal{M}$, такая, что теория $\text{Th}^{\text{op}}(\mathcal{M})$ противоречива. [Указание. Взять $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0(\mathcal{T}')$, где $\mathcal{T}'$ построена в упр. 15.4.5.]

15.4.7. Показать, что свойство WCR для понятия редукции R на множестве Λ не влечет в общем случае свойства CR.

15.4.8 (Ван Дален). Пусть $L \in \Lambda$. Для терма $M \in \Lambda$ положим $M^* \equiv M[x := L]$. Если x — вхождение свободной переменной в терм M , то назовем его областью действия максимальный подтерм вида $x\vec{P}$ в M , начинающийся данным вхождением x . Например, в терме $M = \lambda y.yx1(x1K)$ у область действия первого (вхождения) x — это сам x , а область действия второго вхождения — терм $x1K$. Будем писать $M \rightsquigarrow N$, если $M \equiv C[x\vec{P}_1, \dots, x\vec{P}_n]$, где выписаны явно все самые внешние вхождения x с соответствующими областями действия, и $N \equiv C[Q_1, \dots, Q_n]$, где $(x\vec{P}_i)^* \rightarrow Q_i$, $1 \leq i \leq n$.

(i) Показать, что

$$\begin{array}{ccc} M & \rightsquigarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \rightsquigarrow & N' \end{array}$$

[Указание. Если $M_i \rightsquigarrow N_i$, $i = 1, 2$, то $M_1[y := N_1] \rightsquigarrow M_2[y := N_2]$.]

(ii) Показать, что если $M^* \rightsquigarrow N$, то $M \rightsquigarrow M' \rightsquigarrow N$ для некоторого M' .

(iii) Доказать, что если $M^* \rightsquigarrow \lambda y.P$, то либо

$$M \rightsquigarrow \lambda y.P_1 \quad \text{и} \quad P_1^* \rightsquigarrow P,$$

либо

$$M \rightsquigarrow x\vec{Q} \quad \text{и} \quad (x\vec{Q})^* \rightsquigarrow \lambda y.P.$$

15.4.9 (Барендрегт, Уодсворт). Положим $0 = 1$, $n + 1 = Kn$. Показать, что функцию sg (где $sg(0) = 0$, $sg(n + 1) = 1$) нельзя λ -определить относительно системы $0, 1, \dots$. [Указание. В противном случае мы имели бы $F0 = y$, $Fn + 1 = z$ для некоторого F . Остается применить упр. 15.4.8(ii), взяв $M \equiv Fx$, $L = n + 1$.] Получить отсюда, что δ -символ Чёрча не определим в λ -исчислении.

15.4.10. Показать, что в теории первого порядка с одной бинарной операцией (которая изображается приписыванием), равенством, константами k, s, δ и аксиомами

$$kxy = x, \quad sxyz = xz(yz), \quad \delta xx = k, \quad x \neq y \rightarrow \delta xy = s$$

можно вывести $\forall xy (x = y)$.

Часть IV

Теории



Барендрегт
(фотография
автора, 1977)



Виссер (фотография
Дж. Виссера, 1979)

Осмысленные теории

Лямбда-теория $\mathcal{T}$ — это непротиворечивое расширение λ -исчисления. Имеются три причины изучения таких расширений.

(1) Имеются хорошие мотивировки новых отождествлений, вводимых в $\mathcal{T}$.

(2) $\mathcal{T}$ дает полезную информацию о самом λ -исчислении.

(3) $\mathcal{T}$ — теория некоторой модели.

Теория $\mathcal{H}$, отождествляющая все неразрешимые термы, подпадает под (1) и (2). $\mathcal{H}$ имеет единственное пополнение $\mathcal{H}^*$ по Гильберту — Посту, подпадающее под все три пункта. Будет доказано, что имеются $2^{\aleph_0}$ осмысленных теорий (расширений теории $\mathcal{H}$). Среди них теория $\mathcal{B}$, где приравниваются термы с одинаковыми бёмовскими деревьями.

16.1. Теория $\mathcal{H}$

В обсуждении, предшествовавшем предложению 2.2.14, высказана точка зрения, что следует использовать неразрешимые термы для представления значения «не определено». Лемма о генеричности 14.3.24 утверждает, что для неразрешимых термов M имеет место

если $FM = P$, терм P находится в н. ф., то $\forall N (FN = P)$.

Это показывает, что неразрешимые термы безразличны с вычислительной точки зрения, и также подсказывает возможность их отождествления.

Напомним следующее определение.

16.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\mathcal{H}_0 = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и неразрешимы}\}$.

(ii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^+$.

(iii) λ -теория $\mathcal{T}$ называется осмысленной, если $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}$.

Будет показано, что теория $\mathcal{H}$ непротиворечива даже при наличии экстенциональности. Будет дано несколько доказательств непротиворечивости, в частности два в настоящем пункте: одно — с помощью свойства CR для $\beta\eta\Omega$ и другое — с помощью

леммы о генеричности. В § 16.2 в процессе доказательства результатов об НР-пополнении системы $\mathcal{H}$ будет получено другое доказательство непротиворечивости средствами теории доказательств. Наконец, в гл. 19 будет изложено теоретико-модельное доказательство: там показано, что λ -модели $P\omega$ и D_∞ удовлетворяют $\mathcal{H}$.

Напомним, что если $\mathcal{T}$ — некоторое множество равенств λ -термов, то $\mathcal{T}\eta$ обозначает $\{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \lambda\eta + \mathcal{T} \vdash M = N\}$.

16.1.2. ЛЕММА. (i) Понятие редукции $\beta\Omega$ порождает $\mathcal{H}$, т. е.

$$\mathcal{H} \vdash M = N \Leftrightarrow M =_{\beta\Omega} N.$$

(ii) Понятие редукции $\beta\eta\Omega$ порождает $\mathcal{H}\eta$, т. е.

$$\mathcal{H}\eta \vdash M = N \Leftrightarrow M =_{\beta\eta\Omega} N.$$

Доказательство. (i) ($\Rightarrow$) Заметим, что из $M = N \in \mathcal{H}_0$ следует $M =_\Omega N$, так как M, N неразрешимы и, значит, $M \rightarrow_\Omega \Omega$ и $N \rightarrow_\Omega \Omega$. Поэтому мы имеем $M =_{\beta\Omega} N$ для всех аксиом $M = N$ системы $\mathcal{H}$, откуда и следует нужный результат.

($\Leftarrow$) Заметим, что любая β или Ω -одношаговая редукция является доказуемым в $\mathcal{H}$ равенством. Значит, это верно и для $\beta\Omega$ -конвертируемости.

(ii) устанавливается аналогично (i). $\square$

16.1.3. ТЕОРЕМА. $\text{Con}(\mathcal{H}\eta)$.

Доказательство. Из леммы 16.1.2 и свойства CR для $\beta\eta\Omega$ следует, что $\mathcal{H}\eta \vdash I = S$. $\square$

Теперь будет дано доказательство теоремы $\text{Con}(\mathcal{H}\eta)$, использующее лемму о генеричности. Этот метод даст кое-какую полезную теоретико-доказательственную информацию.

Понадобится следующее консервативное расширение системы $\mathcal{H}\eta$.

16.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем формальную теорию $\mathcal{T}$, алфавит которой получается добавлением символов $\approx$ и $\sim$ к алфавиту системы λ . Термы теории $\mathcal{T}$ — это в точности λ -термы.

$\mathcal{T}$ аксиоматизирована следующими аксиомами и правилами вывода (где, как обычно, M, M', N, L, Z обозначают произвольные термы $\in \Lambda$).

(I. 1) $M \approx M$,

(I. 2) $(\lambda x.M)N \approx M[x := N]$, (β)

(I. 3) $\lambda x.Mx \approx M$, (η)

(I. 4) $M \approx M'$, если M, M' неразрешимы.

(II. 1) $M \approx N \Rightarrow N \approx M$,

(II. 2) $M \approx N \Rightarrow M \sim N$,

(II. 3) $M \sim N \Rightarrow ZM \sim ZN$,

- (II.4) $M \sim N \Rightarrow MZ \sim NZ$,
 (II.5) $M \sim N \Rightarrow \lambda x.M \sim \lambda x.N$,
 (II.6) $M \sim N \Rightarrow M = N$,
 (II.7) $M = N, N = L \Rightarrow M = L$.

Замечание. $\approx$ — рефлексивное симметричное отношение, соответствующее аксиомам системы $\mathcal{H}\eta$.

$\sim$ — совместимое замыкание отношения $\approx$.

$=$ — транзитивное замыкание отношения $\sim$.

В оставшейся части настоящего пункта $\mathcal{T}$ обозначает теорию из определения 16.1.4.

16.1.5. Лемма. $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow \mathcal{H}\eta \vdash M = N$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Индукцией по длине доказательства в теории $\mathcal{T}$ мы показываем, что из

$$\mathcal{T} \vdash M \approx N, \mathcal{T} \vdash M \sim N \text{ или } \mathcal{T} \vdash M = N$$

следует $\mathcal{H}\eta \vdash M = N$.

($\Leftarrow$) Заметим, что доказуемое в $\mathcal{T}$ равенство симметрично и совместимо. Отсюда, как и выше, следует, что

если $\lambda\eta + \mathcal{H}_0 \vdash M = N$, то $\mathcal{T} \vdash M = N$. $\square$

16.1.6. Лемма. (i) $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow \exists n \exists M_1, \dots, M_n$

$$\mathcal{T} \vdash M \sim M_1 \sim \dots \sim M_n \equiv N.$$

(ii) $\mathcal{T} \vdash M \approx N \Leftrightarrow [M = N \text{ или } N = M - \text{аксиома системы } \lambda\eta \text{ или } M = N \in \mathcal{H}_0]$.

Доказательство. (i) ($\Rightarrow$) устанавливается индукцией по длине доказательства равенства $M = N$.

($\Leftarrow$) получается по правилам (II.6, 7).

(ii) столь же просто. $\square$

16.1.7. Лемма. $\mathcal{T} \vdash M = N \Rightarrow$

$$\exists C[] \exists M', N' [C[M'] \equiv M \wedge C[N'] \equiv N \wedge \mathcal{T} \vdash M \approx N].$$

Доказательство. Применяем индукцию по длине доказательства эквивалентности $M \sim N$.

Если $M \sim N$ — непосредственное следствие соотношения $M \approx N$, то берем $C[] \equiv []$, $M' \equiv M$, $N' \equiv N$.

Если $M \sim N$ есть $\lambda x.P \equiv \lambda x.Q$ и является непосредственным следствием соотношения $P \sim Q$, то по предположению индукции имеем

$$C_1[P'] \equiv P, C_1[Q'] \equiv Q, P' \approx Q'$$

для некоторых $C_1[]$, P' , Q' . Теперь берем $C[] \equiv \lambda x.C_1[x]$, $M' \equiv P'$, $N' \equiv Q'$.

Если $M \sim N$ есть $ZP \sim ZQ$ или $PZ \sim QZ$ и является непосред-

ственным следствием соотношения $P \sim Q$, то рассуждение аналогично. $\square$

16.1.8. Основная лемма. Пусть N имеет β -н. ф. Тогда

$$\mathcal{T} \vdash M = N \Rightarrow \lambda\eta \vdash M = N.$$

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{T} \vdash M = N$. Тогда по лемме 16.1.6(i) существуют n , $M_1, \dots, M_n$, такие, что

$$(1) \quad \mathcal{T} \vdash M \sim M_1 \sim \dots \sim M_n \equiv N.$$

Индукцией по n мы покажем, что соотношение (1) с N , имеющим н. ф., влечет $\lambda\eta \vdash M = N$.

Если $n = 0$, то $M \equiv N$ и все в порядке. Предположим теперь, что

$$\mathcal{T} \vdash M \sim M_1 \sim \dots \sim M_n \sim M_{n+1} \equiv N.$$

В силу леммы 16.1.7 существуют $C[]$, M'_n , M'_{n+1} , такие, что

$$\mathcal{T} \vdash M'_n \approx M'_{n+1}, C[M'_n] \equiv M_n \text{ и } C[M'_{n+1}] \equiv M_{n+1}.$$

По лемме 16.1.6(ii) возможны два случая.

Случай 1. Равенство $M'_n = M'_{n+1}$ (для простоты записи — в этом порядке) — аксиома системы $\lambda\eta$. Тогда

$$M_n = C[M'_n] \equiv_{\beta\eta} C[M'_{n+1}] \equiv M_{n+1} \equiv N.$$

Поэтому в силу следствия 15.1.5 терм M_n имеет н. ф., и, значит, в силу предположения индукции получаем

$$\lambda\eta \vdash M = M_n = N.$$

Случай 2. Термы M'_n , M'_{n+1} неразрешимы. Тогда, так как

$$C[M'_{n+1}] \equiv M_{n+1} \equiv N$$

и N имеет н. ф. (которую мы обозначим через N'), получаем по лемме о генеричности 14.3.24, что $C[M'_n] \equiv N'$. Поэтому $M_n \equiv C[M'_n] \equiv N'$, и, следовательно, по предположению индукции

$$\lambda\eta \vdash M = M_n = N' = N. \quad \square$$

16.1.9. ТЕОРЕМА. Пусть терм $N \in \Lambda$ имеет β -н. ф. Тогда

(i) $\mathcal{H}\eta \vdash M = N \Rightarrow \lambda\eta \vdash M = N$,

(ii) $\mathcal{H} \vdash M = N \Rightarrow \lambda \vdash M = N$,

(iii) $\text{Con}(\mathcal{H}\eta)$.

Доказательство. (i) получается непосредственно из лемм 16.1.5 и 16.1.8.

(ii) получается аналогично (i), если ввести сначала вспомогательную теорию $\mathcal{T}$, не содержащую схемы (I.3), т. е. (η).

(iii). В силу (i) в теории $\mathcal{H}\eta$ недоказуемо, например, равенство $S = I$.

Теперь мы покажем, что теория $\mathcal{H}$ Σ_2^0 -полна. Доказательство заимствовано из статьи Барендрегта и др. [1978].

16.1.10. ЛЕММА. Пусть $R(\vec{n})$ — р. п. предикат на $\mathbb{N}$. Тогда для некоторого $F \in \Lambda^0$ имеем в $\mathcal{H}$

$$F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \begin{cases} 1, & \text{если } R(\vec{n}), \\ \Omega, & \text{если } \neg R(\vec{n}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть ψ — частично рекурсивная функция, такая что $R(n)$ имеет место т. и т. т., когда $\psi(\vec{n}) \downarrow$. Пусть ψ λ -определена термом $G \in \Lambda^0$. Положим $F = \lambda x. Gx \mathbf{K} \mathbf{I}$. Тогда

$$\begin{aligned} R(\vec{n}) \Rightarrow \psi(\vec{n}) \downarrow &\Rightarrow G \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner m \urcorner \text{ (для некоторого } m) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner m \urcorner \mathbf{K} \mathbf{I} = 1; \\ \neg R(\vec{n}) \Rightarrow \psi(\vec{n}) \uparrow &\Rightarrow G \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{ (неразрешим)} \cdot \\ &\Rightarrow F \ulcorner \vec{n} \urcorner \text{ (неразрешим)} \Rightarrow F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \Omega \text{ в } \mathcal{H}. \quad \square \end{aligned}$$

16.1.11. ТЕОРЕМА. Теория $\mathcal{H}$ Σ_2^0 -полна.

Доказательство. Очевидно, что множество $\mathcal{H}_0 = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0, M, N \text{ неразрешимы}\}$ принадлежит Π_1^0 . Значит это множество аксиоматизирует некоторую Σ_2^0 -теорию.

Пусть $P(p) \equiv \exists n \forall m Q(n, m, p)$ — произвольный Σ_2^0 -предикат с рекурсивным Q . По лемме 16.1.10 найдется $F \in \Lambda^0$, такой, что в $\mathcal{H}$

$$F \ulcorner p \urcorner \ulcorner n \urcorner = \begin{cases} \Omega, & \text{если } \forall m Q(n, m, p), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $Hrpz \rightarrow [1, Fpn(Hpz(S^+n))]$, и пусть x, y — различные переменные.

Утверждение. $\exists n \forall m Q(n, m, p) \Leftrightarrow \mathcal{H} \vdash H \ulcorner p \urcorner x \ulcorner 0 \urcorner = H \ulcorner p \urcorner y \ulcorner 0 \urcorner$.

Действительно, если $\exists n \forall m Q(n, m, p)$, то для таких n имеет место $H \ulcorner p \urcorner z \ulcorner n \urcorner \rightarrow_{\beta\Omega} [1, \Omega]$, откуда

$$\mathcal{H} \vdash H \ulcorner p \urcorner x \ulcorner 0 \urcorner = [1, 1, \dots, 1, \Omega] = H \ulcorner p \urcorner y \ulcorner 0 \urcorner.$$

Обратно, если $\neg \exists n \forall m Q(n, m, p)$, то $\forall n F \ulcorner p \urcorner \ulcorner n \urcorner = 1$. Из упражнения 15.4.2(iii) следует, что при естественном выборе терма H имеет место

$$H \ulcorner p \urcorner z \ulcorner 0 \urcorner \rightarrow_{\beta\Omega} M \Rightarrow z \in \text{FV}(M).$$

Но тогда в силу леммы 16.1.2 и свойства CR для $\beta\Omega$ имеем $\mathcal{H} \not\vdash H \ulcorner p \urcorner x \ulcorner 0 \urcorner = H \ulcorner p \urcorner y \ulcorner 0 \urcorner$.

Таким образом, любой Σ_2^0 -предикат можно свести к доказуемости в системе $\mathcal{H}$. $\square$

Аналогичным образом устанавливается Σ_2^0 -полнота системы $\mathcal{H}\eta$.

16.1.12. ЗАМЕЧАНИЕ. При релятивизации к I -случаю определение теории $\mathcal{H}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \{M = N \mid N, M \in \Lambda_I^0 \text{ } I\text{-неразрешимы}\}^+ = \\ &= \{M = N \mid N, M \in \Lambda_I^0 \text{ не имеют н. ф.}\}^+ \end{aligned}$$

по теореме 9.4.20.

16.1.13. ТЕОРЕМА. В λI -исчислении (с экстенциональностью) непротиворечиво приравнивание всех термов, не имеющих н. ф.

Доказательство. Релятивизируя теорему 16.1.9(iii) к I -случаю, мы получаем $\text{Con}(\mathcal{H}_I\eta)$. (Отметим, что M имеет н. ф. т. и т. т., когда $\lambda x.$ имеет н. ф.) $\square$

Следствие 16.2.12, доказываемое ниже, утверждает, что $\mathcal{H}_I\eta$ является НР-полной теорией.

16.2. Теория $\mathcal{H}^*$

Оказывается, что λ -теория $\mathcal{H}$ имеет единственное НР-полное (см. определение 4.1.22) расширение $\mathcal{H}^*$. Теория $\mathcal{H}^*$ была первоначально введена Хайландом и Уодсвортом в связи с λ -моделью D_∞ (см. теорему 19.2.12). Соотношение между $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$ можно, однако, исследовать и не углубляясь в теоретико-модельные подробности.

16.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$. Напомним, что $M \sim_s N$ т. и т. т., когда

$$\forall C [] [C[M] \text{ разрешим} \Leftrightarrow C[N] \text{ разрешим}].$$

Положим $\mathcal{H}^* = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } M \sim_s N\}$.

16.2.2. ЛЕММА. $\mathcal{H}^*$ — экстенциональная λ -теория. Точнее,

- (i) $\mathcal{H}^*\eta \vdash M = N \Rightarrow M \sim_s N$,
- в частности $\mathcal{H}^*\eta = \mathcal{H}^*$.
- (ii) $\text{Con}(\mathcal{H}^*)$.

Доказательство. (i) устанавливается индукцией по длине вывода $\mathcal{H}^*\eta \vdash M = N$.

Если $M = N$ — аксиома системы $\lambda\eta$, то $M =_{\beta\eta} N$. Теперь $C[M]$ разрешим $\Rightarrow (\lambda\vec{x}.C[M])\vec{P} = I$ (для некоторых $\vec{x}, \vec{P}$) $\Rightarrow (\lambda\vec{x}.C[N])\vec{P} =_{\beta\eta} I$ (так как $M =_{\beta\eta} N$) $\Rightarrow C[N]$ $\beta\eta$ -разрешим $\Rightarrow C[N]$ разрешим в силу предложения 15.1.7.

Обратные импликации также верны. Следовательно, $M \sim_s N$.

Если $M = N$ — аксиома системы $\mathcal{H}^*$, то все в порядке.

Если $M = N$ имеет вид $\lambda x.P = \lambda x.Q$ и является непосредственным следствием равенства $P = Q$, то по предположению индукции мы имеем для любого контекста $C[]$ эквивалентность

$$C[P] \text{ разрешим} \Leftrightarrow C[Q] \text{ разрешим.}$$

Следовательно, она верна и для всех контекстов $C[\lambda x.[]]$, а потому $M \sim_s N$.

Аналогичное рассуждение применимо, если $M = N$ имеет вид $ZP = ZQ$ или $PZ = QZ$ и является непосредственным следствием равенства $P = Q$.

Если $M = N$ — непосредственное следствие равенств $M = L$ и $L = N$, то имеем $M \sim_s L$ и $L \sim_s N$, откуда для любого контекста $C[]$ получаем

$$C[M] \text{ разрешим} \Leftrightarrow C[L] \text{ разрешим} \Leftrightarrow C[N] \text{ разрешим,}$$

т. е. $M \sim_s N$.

(ii) Заметим, что $I \not\sim_s \Omega$, так как I разрешим, а Ω — нет. Значит, в силу (i) имеем $\mathcal{H}^* \not\models I = \Omega$. $\square$

Следующая лемма дает еще одно доказательство непротиворечивости системы $\mathcal{H}\eta$.

16.2.3. ЛЕММА. (i) $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^*$.

(ii) $\text{Con}(\mathcal{H}\eta)$.

Доказательство. (i) Так как $\mathcal{H}^*$ есть λ -теория, нам достаточно доказать, что множество $\mathcal{H}_0$ (аксиом теории $\mathcal{H}$) содержится в $\mathcal{H}^*$.

Допустим, что $M = N \in \mathcal{H}_0$, т. е. что M и N неразрешимы. Тогда для всех контекстов $C[]$ имеем

$$\begin{aligned} C[M] \text{ разрешим} &\Leftrightarrow \exists \vec{P} (\lambda \vec{x}.C[M])\vec{P} = I \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists \vec{P} (\lambda \vec{x}.C[N])\vec{P} = I \text{ (по лемме о генеричности 14.3.24)} \\ &\Rightarrow C[N] \text{ разрешим.} \end{aligned}$$

Поэтому $M \sim_s N$, т. е. $M = N \in \mathcal{H}^*$.

(ii) В силу (i) и леммы 16.2.2(i) имеем $\mathcal{H}\eta \subseteq \mathcal{H}^*\eta = \mathcal{H}^*$. Отсюда по лемме 16.2.2(ii) получаем $\text{Con}(\mathcal{H}\eta)$. $\square$

16.2.4. ОСНОВНАЯ ЛЕММА. $\text{Con}(\mathcal{H} + M = N) \Rightarrow M \sim_s N$.

Доказательство. Допустим, что $M \not\sim_s N$. Тогда для некоторого контекста $C[]$ (с точностью до перестановки M и N) $C[M]$ разрешим и $C[N]$ неразрешим.

Следовательно, для некоторых $\vec{x}, \vec{P}$

$$(\lambda \vec{x}.C[M])\vec{P} = I,$$

в то время как $(\lambda \vec{x}.C[N])\vec{P}$ неразрешим в силу следствия 8.3.4. Теперь получаем

$$\mathcal{H} + M = N \vdash I = (\lambda \vec{x}.C[M])\vec{P} = (\lambda \vec{x}.C[N])\vec{P} = \Omega_3,$$

где Ω_3 — неразрешимый терм из леммы 4.1.8. Применяя эту лемму, получаем $\neg \text{Con}(\mathcal{H} + M = N)$. $\square$

16.2.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — непротиворечивое множество замкнутых равенств между λ -термами, содержащее $\mathcal{H}$. Тогда $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}^*$.

Доказательство получается ссылкой на лемму 16.2.4. $\square$

16.2.6. ТЕОРЕМА. $\mathcal{H}^*$ — единственная НР-полная λ -теория, содержащая $\mathcal{H}$.

Доказательство состоит из ссылки на следствие 16.2.5 и лемму 16.2.2(ii). $\square$

Следующий результат заимствован из § 19.2. Напомним, что $M \approx_{\eta} N$ т. и т. т., когда $\text{BT}(M) =_{\eta} \text{BT}(N)$.

16.2.7. ТЕОРЕМА. Для $M, N \in \Lambda$ имеем

$$\mathcal{H}^* \vdash M = N \Leftrightarrow M \approx_{\eta} N.$$

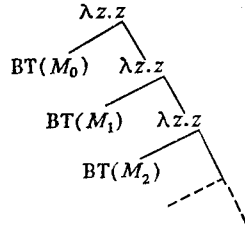
Доказательство. См. теорему 19.2.12. Импликация $(\Rightarrow)$ получается с помощью выворачивания по Бёму. Импликация $(\Leftarrow)$ следует из НР-полноты системы $\mathcal{H}^*$, если мы знаем, что множество $\{M = N \mid M \approx_{\eta} N\}$ ($\cong \mathcal{H}$) непротиворечиво. [Непротиворечивость множества $\{M = N \mid M \approx_{\eta} N\}$ получается средствами теории моделей: $D_{\infty} \models M = N \Leftrightarrow M \approx_{\eta} N$. Отсюда следует $\mathcal{H}^* = \text{Th}(D_{\infty})$.] $\square$

Теперь будет показано, что $\mathcal{H}^*$ есть Π_2^0 -полная теория. Доказательство этого факта принадлежит Уодсворту.

16.2.8. ЛЕММА. Пусть $M_n, N_n \in \Lambda$ — равномерные последовательности. Тогда (см. определение 8.2.3)

$$\forall n (\mathcal{H}^* \vdash M_n = N_n) \Leftrightarrow \mathcal{H}^* \vdash [M_n] = [N_n].$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Бёмовское дерево терма $[M_n]$ имеет вид



и аналогично для $[N_n]$. Поэтому, используя теорему 16.2.7, получаем

$$\begin{aligned} \forall n (\mathcal{H}^* \vdash M_n = N_n) &\Rightarrow \forall n (M_n \approx_n N_n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [M_n] \approx_n [N_n] \Rightarrow \mathcal{H}^* \vdash [M_n] = [N_n]. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ получается применением терма π_n из определения 8.2.3. $\square$

16.2.9. ТЕОРЕМА. Пусть φ_n обозначает частично рекурсивную функцию с индексом n . Тогда имеются λ -термы $F_n \in \Lambda^0$, такие, что F_n λ -определяет φ_n и

$$\varphi_n \cong \varphi_m \Leftrightarrow \mathcal{H}^* \vdash F_n = F_m.$$

Доказательство. По теореме 8.4.13 или 9.2.16 функция φ_n λ -определяется некоторым термом, который мы обозначим через G_n . Пусть терм π таков, что $\pi^n = \pi_n$. Положим $F_n = \lambda x. \pi x [G_n^{\ulcorner 0 \urcorner}, G_n^{\ulcorner 1 \urcorner}, \dots]$ (см. определение 8.2.3). Тогда очевидно, что F_n λ -определяет φ_n . Более того, если $\varphi_n \cong \varphi_m$, то

$$(\forall p \in \mathbb{N}) (\mathcal{H} \vdash G_n^{\ulcorner p \urcorner} = G_m^{\ulcorner p \urcorner})$$

(если $\varphi_n(p) \uparrow$, то $\varphi_m(p) \uparrow$ и оба терма $G_n^{\ulcorner p \urcorner}, G_m^{\ulcorner p \urcorner}$ неразрешимы). Поэтому

$$\mathcal{H}^* \vdash [G_n^{\ulcorner 0 \urcorner}, \dots] = [G_m^{\ulcorner 0 \urcorner}, \dots]$$

в силу леммы 16.2.8. Отсюда следует, что $\mathcal{H}^* \vdash F_n = F_m$. Обратная импликация тривиальна.

16.2.10. Следствие. Теория $\mathcal{H}^*$ Π_2^0 -полна.

Доказательство. Очевидно, что $\sim_s$ есть Π_2^0 -предикат. Так как термы F_n находятся по n эффективно, а предикат $\varphi_n \cong \varphi_m$ Π_2^0 -полон, нужный результат следует из предыдущей теоремы. $\square$

Релятивизируя все к λI -исчислению, мы получаем НР-полную теорию $\mathcal{H}_I^*$. Эту теорию можно описать следующим образом.

16.2.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В λI -исчислении $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_I$, т. е.

$$\mathcal{H}_I^* = \mathcal{H}_I.$$

Доказательство. По леммам 16.2.3(i) и 16.2.2(i)

$$\mathcal{H}_I \eta \subseteq \mathcal{H}_I^* \eta = \mathcal{H}_I^*.$$

Допустим теперь, что $M = N \in \mathcal{H}_I^*$, чтобы показать, что

$$(1) \quad \mathcal{H}_I \eta \vdash M = N.$$

По определению отношения $M \sim_s N$ в λI -исчислении для всех контекстов $C[\] \in \Lambda_I$ имеет место

$$C[M] \text{ } I\text{-разрешим} \Leftrightarrow C[N] \text{ } I\text{-разрешим}.$$

Отсюда, в частности,

$$M \text{ } I\text{-разрешим} \Leftrightarrow N \text{ } I\text{-разрешим}.$$

Случай 1. Оба терма M, N I -неразрешимы. Тогда $M = N \in \mathcal{H}_{0I}$ и (1) выполнено.

Случай 2. Оба терма M, N I -разрешимы. Применяя следствия 9.4.21 и 15.1.5, получаем, что термы M, N имеют $\beta\eta$ -н. ф., которые мы обозначим соответственно через M', N' . Если $M' \equiv N'$, то (1) получается следующим образом:

$$\mathcal{H}_I \eta \vdash M = M' \equiv N' = N.$$

Если $M' \neq N'$, то $\neg \text{Con}(M' = N')$ по теореме Бёма 10.5.31 для $\mathcal{M}$, откуда $\neg \text{Con}(M = N)$ и, значит, $\neg \text{Con}(\mathcal{H}_I^*)$, что дает противоречие. $\square$

16.2.12. Следствие. $\lambda I \eta + \{M = N \mid M, N \in \Lambda_I^0 \text{ не имеют н. ф.}\}$ является НР-полной теорией.

Доказательство состоит из ссылки на предложение 16.2.11 и замечание 16.1.12. $\square$

В заключение мы покажем, что $\mathcal{H}_I^*$ и $\mathcal{H}_K^* (= \mathcal{H}^*)$ — налегающие, но не совпадающие множества равенств, так что в силу их НР-полноты они несравнимы, т. е. $\mathcal{H}_I^* \cup \mathcal{H}_K^*$ противоречиво.

16.2.13. Замечание. $\mathcal{H}_I^* \not\subseteq \mathcal{H}_K^*$ и $\mathcal{H}_K^* \not\subseteq \mathcal{H}_I^*$.

Доказательство. Пусть $J = \Theta(\lambda j x y. x(jy))$. Тогда $I \approx_\eta J$ (см. пример 10.2.9), откуда по теореме 16.2.7 получаем $I = J \in \mathcal{H}_K^*$. Но $I = J \notin \mathcal{H}_I^*$, так как J не имеет н. ф. и, значит, I -неразрешим.

С другой стороны, $\Omega = \lambda x. x x$, $\Omega \in \mathcal{H}_I^*$, так как оба эти терма не имеют н. ф. Однако $\Omega = \lambda x. x \Omega \notin \mathcal{H}_K^*$, так как терм $\lambda x. x \Omega$ K -разрешим, а Ω — нет.

16.3.2^ю осмысленных теорий

В этом пункте будет построен континуум осмысленных теорий. Перейдя к моделям из замкнутых термов, мы увидим, что имеется 2^ю неизоморфных жестких моделей. Этот результат взят из статьи Барендрегта и др. [1978].

16.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория.

(i) Множество $\mathcal{P}$ равенств между λ -термами независимо над $\mathcal{T}$, если для любого равенства $M = N \in \mathcal{P}$

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{P} - \{M = N\} \not\models M = N.$$

(ii) Множество $X \subset \Lambda$ независимо над $\mathcal{T}$, если для некоторого $M_0 \in X$ множество

$$\mathcal{P}(X, M_0) = \{M = M_0 \mid M \in X, M \neq M_0\}$$

независимо над $\mathcal{T}$.

16.3.2. ЛЕММА. Пусть $X = \{B_0, B_1, \dots\} \subseteq \Lambda^0$ — счетное множество, независимое над λ -теорией $\mathcal{T}$. Тогда имеется 2^ю λ -теорий, содержащих $\mathcal{T}$.

Доказательство. Пусть множество $\{B_n = B_0 \mid n \neq 0\}$ независимо над теорией $\mathcal{T}$ (и, следовательно, совместимо с ней). Для множества $A \subseteq \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{T}(A) = (\mathcal{T} + \{B_{n+1} = B_0 \mid n \in A\})^+.$$

Тогда очевидно, что $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(A)$. Далее, для любых $A, A' \subseteq \mathbb{N}$

$$(1) \quad A \neq A' \Rightarrow \mathcal{T}(A) \neq \mathcal{T}(A').$$

Действительно, если $n \in A, n \notin A'$, то

$$\mathcal{T}(A) \vdash B_{n+1} = B_0, \quad \text{но} \quad \mathcal{T}(A') \not\vdash B_{n+1} = B_0.$$

В силу (1) имеется 2^ю λ -теорий, содержащих $\mathcal{T}$. $\square$

Теперь мы построим равномерную последовательность $B^{\Gamma 0^1}, B^{\Gamma 1^1}, \dots$, образующую множество, независимое над $\mathcal{H}\eta$.

16.3.3. Обозначения (только для этого пункта). Пусть

$$\omega \equiv \lambda b x z.z(b b x) \quad \text{и} \quad B \equiv \omega \omega.$$

Заметим, что

$$\Theta(\lambda b x z.z(b x)) \rightarrow B \quad \text{и} \quad B \rightarrow \lambda z.z(B x).$$

Чтобы показать, что множество $\{B^{\Gamma 0^1}, B^{\Gamma 1^1}, \dots\}$ независимо над $\mathcal{H}\eta$, мы должны показать, что для любого $n \neq 0$

$$\mathcal{H}\eta + \{B^{\Gamma m^1} = B^{\Gamma 0^1} \mid m \neq n\} \not\vdash B^{\Gamma n^1} = B^{\Gamma 0^1}.$$

Это будет сделано путем введения нового понятия редукции R_n , которое порождает доказуемое равенство в этой теории.

16.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\text{Red}(Bx) = \{C(x) \mid Bx \rightarrow_{\beta} C(x)\}$.

(ii) R_n — это понятие редукции

$$\{\langle C(\Gamma m^1), C(\Gamma 0^1) \rangle \mid C(x) \in \text{Red}(Bx), m \neq n\}.$$

(iii) $\beta\eta\Omega_n$ — это понятие редукции

$$\beta\eta\Omega \cup R_n.$$

16.3.5. ЛЕММА. $\beta\eta\Omega_n$ порождает доказуемое равенство в теории

$$\mathcal{H}\eta + \{B^{\Gamma m^1} = B^{\Gamma 0^1} \mid m \neq n\}.$$

Доказательство очевидно. $\square$

Следующие обозначения используются для облегчения вычисления редукционного графа терма Bx .

16.3.6. ОБОЗНАЧЕНИЯ. (i) $\square \equiv Bx \equiv (\lambda b x z.z(b b x))(\lambda b x z.z(b b x))x$.

(ii) Если Δ — терм, то

$$\Delta^0 \equiv \lambda z.z\Delta, \quad \Delta^1 \equiv (\lambda x z.z\Delta)x, \quad \Delta^{ij} \equiv (\Delta^i)^j \quad \text{для } i, j \in \{0, 1\}.$$

16.3.7. ЛЕММА. $C(x) \in \text{Red}(Bx)$ т. и т. т., когда для некоторого $n > 0$ и некоторых $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ имеет место

$$(+) \quad C(x) \in \square^{i_1} \dots \square^{i_n}.$$

Доказательство. Заметим, что

(i) $\square \rightarrow_{\beta} M \Rightarrow M \equiv \square^1$,

(ii) $\Delta^0 \rightarrow_{\beta} M \Rightarrow M \equiv \Delta^0$, где $\Delta \rightarrow \Delta^1$,

(iii) $\Delta^1 \rightarrow_{\beta} M \Rightarrow M \equiv \Delta^0$ или $M \equiv \Delta^1$, где $\Delta \rightarrow \Delta^1$.

Из (i)–(iii) следует, что возможные β -редукты терма $\square$ имеют вид (+). Кроме того, все термы вида (+) являются редуктами терма $\square$. $\square$

16.3.8. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $C(x) \in \text{Red}(Bx)$. Тогда

(i) $C(x)$ не содержит ни η -, ни Ω -редексов;

(ii) $C(x)$ имеет ровно одно вхождение свободной переменной. Это — вхождение переменной x в качестве самого правого (не считая скобок) символа в $C(x)$;

(iii) $C(\Gamma m^1) \rightarrow_{\beta} M \Rightarrow M \equiv C'(\Gamma m^1)$ для некоторого $C'(x)$, такого, что $C(x) \rightarrow C'(x)$;

(iv) $C(\Gamma m^1) \equiv \lambda c.M \Rightarrow M \equiv cC'(\Gamma m^1)$ для некоторого $C'(x) \in \text{Red}(Bx)$.

(v) Пусть $k = n$ или $k = 0$. Тогда $B^{\Gamma k^1} \rightarrow_{\beta\eta\Omega_n} M \Rightarrow M \equiv C(\Gamma k^1)$ для некоторого $C(x) \in \text{Red}(Bx)$.

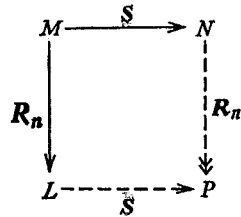
Доказательство. (i) — (iv) очевидны, а (v) следует из (i) и (ii).

16.3.9. ЛЕММА. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ понятие редукции R_n обладает свойством CR.

Доказательство. Пусть $M \rightarrow_{R_n} M_1$, $M \rightarrow_{R_n} M_2$. Тогда терм M_i получается из M заменой некоторой его части вида $C_i(\Gamma m_i^1)$ на $C_i(\Gamma 0^1)$. Общий редукт M_3 термов M_1 , M_2 можно найти, сделав в M обе эти замены. (Если $C_1(\Gamma m_1^1)$, $C_2(\Gamma m_2^1)$ не дизъюнкты, то в силу следствия 16.3.8(ii) имеем $m_1 = m_2$ и одно из этих вхождений содержится в другом, пусть для определенности $C_1(\Gamma m_1^1) \subset C_2(\Gamma m_1^1)$. Тогда берем в качестве M_3 результат замены $C_1(\Gamma m_1^1)$ на $C_1(\Gamma 0^1)$ в M). Следовательно, $\rightarrow_{R_n}$ обладает свойством ромба, а значит, этим же свойством обладает и $\rightarrow_{R_n}$, т. е. R_n обладает свойством CR. $\square$

16.3.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ понятие редукции $\beta\eta\Omega_n$ обладает свойством CR.

Доказательство. По теореме 15.2.15(ii) и лемме 16.3.9. каждое из понятий $\beta\eta\Omega$ и R_n обладает свойством CR. Поэтому в силу леммы Хиндли — Розена достаточно показать, что они коммутируют. Для этого достаточно показать, что имеет место



где S — любое из понятий редукции β , η и Ω .

Случай $S = \beta$. Пусть $R \equiv (\lambda z.V)W$ — вхождение β -редекса, сворачиваемое при редукции $M \rightarrow_\beta N$, а $C(\Gamma m^1)$ есть R_n -редекс из $M \rightarrow_{R_n} L$.

Случай 1. $R \cap C(\Gamma m^1) = \emptyset$. Тогда P находится легко.

Случай 2. $R \subset C(\Gamma m^1)$. P находится в силу следствия 16.3.8(iii).

Случай 3. $C(\Gamma m^1) \subset R$.

Подслучай 3.1. $C(\Gamma m^1) \subset W$. Тогда P находится легко.

Подслучай 3.2. $C(\Gamma m^1) \subset V$. Так как терм $C(\Gamma m^1)$ замкнут, в него ничего нельзя подставить, так что P находится легко.

Подслучай 3.3. $C(\Gamma m^1) \equiv \lambda z.V$. В силу следствия 16.3.8(iv) имеем $C(\Gamma m^1) \equiv \lambda z.zC'(\Gamma m^1)$, где $Bx \rightarrow_\beta C'(x)$. Следовательно,

$N \equiv \dots WC'(\Gamma m^1) \dots$, $L \equiv \dots C(\Gamma 0^1)W \dots \equiv \dots (\lambda z.zC'(\Gamma 0^1))W \dots$. Берем $P \equiv \dots WC'(\Gamma 0^1) \dots$.

Случай $S = \eta$. Пусть $E \equiv \lambda y.Fy$ есть η -редекс, а $CC(\Gamma m^1)$ есть R_n -редекс, сворачиваемые в M .

Случай 1. $E \cap C(\Gamma m^1) = \emptyset$. Рассматривается легко.

Случай 2. $E \subset C(\Gamma m^1)$. Это невозможно в силу следствия 16.3.8(i).

Случай 3. $C(\Gamma m^1) \subset E$.

Подслучай 3.1. $C(\Gamma m^1) \subset F$. Рассматривается легко.

Подслучай 3.2. $C(\Gamma m^1) \equiv Fy$. Это невозможно в силу следствия 16.3.8(ii).

Случай $S = \Omega$. Пусть H есть Ω -редекс, а $C(\Gamma m^1)$ есть R_n -редекс, сворачиваемые в M .

Случай 1. $H \cap C(\Gamma m^1) = \emptyset$. Рассматривается легко.

Случай 2. $H \subset C(\Gamma m^1)$. Это невозможно в силу следствия 16.3.8(i).

Случай 3. $C(\Gamma m^1) \subset H$. Тогда $H \equiv H'[C(\Gamma m^1)]$, $M \equiv \dots H \dots$, $N \equiv \dots \Omega \dots$, $L \equiv \dots H'[C(\Gamma 0^1)] \dots$.

Утверждение. Терм $H'[C(\Gamma 0^1)]$ неразрешим. Действительно, заметим, что термы $C(\Gamma m^1)$ и $C(\Gamma 0^1)$ имеют одно и то же бёмовское дерево, откуда по теореме 16.2.7 получаем, что $C(\Gamma m^1) \equiv C(\Gamma 0^1) \in \mathcal{H}^*$. Но тогда имеем $C(\Gamma m^1) \sim_s C(\Gamma 0^1)$, а так как терм $H \equiv H'[C(\Gamma m^1)]$ неразрешим, то и терм $H'[C(\Gamma 0^1)]$ тоже неразрешим.

В силу только что установленного утверждения можно взять $P \equiv N$ и заполнить диаграмму. $\square$

16.3.11. СЛЕДСТВИЕ. Множество $\{B^{\Gamma 0^1}, B^{\Gamma 1^1}, \dots\}$ независимо над $\mathcal{H}\eta$.

Доказательство. Мы покажем, что множество равенств

$$\{B^{\Gamma 1^1} = B^{\Gamma 0^1}, B^{\Gamma 2^1} = B^{\Gamma 0^1}, \dots\}$$

независимо над $\mathcal{H}\eta$, т. е. что для $n \neq 0$ мы имеем

$$\mathcal{H}\eta + \{B^{\Gamma m^1} = B^{\Gamma 0^1} \mid m \neq 0, m \neq n\} \not\models B^{\Gamma n^1} = B^{\Gamma 0^1}.$$

Допустим, что равенство $B^{\Gamma n^1} = B^{\Gamma 0^1}$ доказуемо в этой теории. Тогда в силу леммы 16.3.5 и предложения 16.3.10 термы $B^{\Gamma n^1}$ и $B^{\Gamma 0^1}$ имели бы общий $\beta\eta\Omega_n$ -редукт. Но это невозможно в силу следствия 16.3.8(v) и (ii).

16.3.12. ТЕОРЕМА. (i) Имеются 2^я осмысленных λ -теорий между $\mathcal{H}\eta$ и $\mathcal{H}^*$.

(ii) Имеется 2^я жестких осмысленных λ -алгебр.

(iii) Имеется 2^я осмысленных экстенциональных λ -моделей.

н. ф. Ввиду симметричности получаем $M \sim_{NF} N$, откуда $M = N \in \mathcal{T}_{NF}$. $\square$

Так же как в случае $\mathcal{H}^*$, можно показать, что теория $\mathcal{B}$ Π_2^0 -полна.

16.5. Упражнения.

16.5.1.(i) Показать, что

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\exists n \in \mathbb{N}) (\mathcal{H} \vdash Z\Omega \sim^n \Omega).$$

(ii) Пусть A таков, что $Ax \Rightarrow \lambda z.z (A (x\Omega))$. Показать, что

$$(\forall Z, Z' \in \Lambda^0) (\mathcal{H} \vdash AZ = AZ');$$

$$\neg (\forall Z, Z' \in \Lambda) (\mathcal{H} \vdash AZ = AZ');$$

$$(\forall Z, Z' \in \Lambda) (\mathcal{H}^* \vdash AZ = AZ').$$

16.5.2. Показать, что $\mathcal{H} \vdash ext^0$, но $\mathcal{H} \not\vdash ext$.

16.5.3. Показать непосредственно, что теория $\mathcal{H}^* \Pi_2^0$ -полна. То же для $\mathcal{B}$.

16.5.4. Начертить редукционный граф для термина Bx (в обозначениях 16.3.3).

16.5.5 (Моррис [1968]). Положим

$$M \subseteq_{m1} N \Leftrightarrow \forall C [\] [C[M] \text{ имеет н. ф.} \Rightarrow C[N] \text{ имеет ту же н. ф.}];$$

$$M \subseteq_{m2} N \Leftrightarrow \forall C [\] [C[M] \text{ имеет } \beta\eta\text{-н. ф.} \Rightarrow C[N] \text{ имеет ту же } \beta\eta\text{-н. ф.}];$$

$$M \subseteq_{m3} N \Leftrightarrow \forall C [\] [C[M] \text{ имеет н. ф.} \Rightarrow C[N] \text{ имеет н. ф.}];$$

$$M \subseteq_{m4} N \Leftrightarrow \forall C [\] [C[M] \text{ имеет } \beta\eta\text{-н. ф.} \Rightarrow C[N] \text{ имеет } \beta\eta\text{-н. ф.}].$$

Положим для $1 \leq i \leq 4$

$$M \sim_{mi} N \Leftrightarrow (M \subseteq_{mi} N \text{ и } N \subseteq_{mi} M);$$

$$\mathcal{T}_{mi} = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } M \sim_{mi} N\}.$$

Показать, что (i) $M \subseteq_{m1} N \Rightarrow M \subseteq N$,

$$(ii) \mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{T}_{m1} \subsetneq \mathcal{T}_{m2} = \mathcal{T}_{m3} = \mathcal{T}_{m4} \subsetneq \mathcal{H}^*.$$

[$\mathcal{T}_{m2}$ — это первоначальное определение экстенциональной теории Морриса; $\mathcal{T}_{m1}$ называется теорией Морриса.]

16.5.6. Показать, что если $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ — нетривиальное открытое множество, замкнутое относительно равенства, то $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \supseteq \mathcal{B}$.

16.5.7. Положим $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_{\{N \mid N =_{\beta} M\}}$. Показать, что

$$(i) \lambda \not\subseteq \mathcal{T}_{\Omega},$$

$$(ii) \mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{T}_I.$$

$$*(iii) \mathcal{T}_I \subsetneq \mathcal{T}_{NF}.$$

16.5.8. Показать, что комбинаторные алгебры не составляют мальцевского многообразия, см. замечание 4.1.21. [Указание. Пусть $I = \lambda + I = \Omega_3 = \omega_3 \omega_3$, где $\omega_3 = \lambda x.xxx$. Тогда $(I, \Omega_3) \in =_I \bullet = \mathcal{H}$, но $(I, \Omega_3) \notin =_{\mathcal{H}} \bullet =_I$. (Использовать лемму 4.1.8(ii), предложение 15.3.9 и теорему 16.1.9(i).)] Из теоремы Мальцева следует, что $\neg (\exists F \in \Lambda^0) (Fxxu = u \wedge Fxuu = x)$. Доказать это следствие непосредственно.

16.5.9. Показать, что терм $M \in \Lambda$ разрешим т. и т. т., когда $\neg \text{Con}(M = K_{\infty})$, где $K_{\infty} = \Theta K$.

Глава 17

Другие ламбда-теории

В этой главе изучаются некоторые λ -теории, не являющиеся осмысленными. Однако обычно эти теории полуосмысленны, т. е. могут быть расширены до осмысленных теорий. Одна из причин интереса к этим теориям заключается в том, что никакая осмысленная теория не является рекурсивно аксиоматизируемой.

Один из результатов о рекурсивно перечислимых λ -теориях утверждает, что они плотны (относительно включения) и даже полны для счетных частичных упорядочений.

Другую группу теорий характеризует замкнутость относительно ω -правила. Будет исследовано, насколько силен эффект добавления ω -правила. Окажется, что ни $\lambda\eta$, ни $\mathcal{H}\eta$ не замкнуты относительно ω -правила, а $\mathcal{H}^*$ замкнута.

17.1. Полуосмысленные и р. п. теории

Напомним, что λ -теория $\mathcal{T}$ называется полуосмысленной (п. о.), если $\mathcal{T} \vdash M = N$, когда M разрешим, а N неразрешим.

17.1.1. Лемма. $\mathcal{T} \text{ п. о.} \Leftrightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}^*$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $M = N \in \mathcal{T}$. Допустим, что $M = N \notin \mathcal{H}^*$, т. е. $M \sim_s N$. Пусть для определенности $C[M]$ разрешим, а $C[N]$ неразрешим для некоторого контекста $C[\]$. Но $\mathcal{T} \vdash C[M] = C[N]$; это противоречит тому, что $\mathcal{T}$ п. о.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}^*$ и $\mathcal{T} \vdash M = N$. Тогда $M \sim_s N$, значит, M, N одновременно разрешимы или неразрешимы. $\square$

Следовательно, все теории λ , $\lambda\eta$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}\eta$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\eta$ и $\mathcal{H}^*$ являются п. о. λ -теориями.

17.1.2. Следствие. (i) $\mathcal{T}$ — п. о. λ -теория $\Rightarrow \mathcal{T}\eta$ — п. о. λ -теория.

(ii) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ — п. о. λ -теории $\Rightarrow \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ — п. о. λ -теория.

Доказательство очевидно. $\square$

В общем случае объединение двух λ -теорий не обязано быть λ -теорией. Симпатичный пример принадлежит М. Белу. Имеют-

ся три термина $M, N, L \in \Lambda^0$, такие, что

$$\text{Con}(M = N), \quad \text{Con}(N = L), \quad \text{Con}(L = M),$$

но $\neg \text{Con}(M = N = L)$ (см. упр. 17.5.2).

Одна из основных отличительных черт п. о. λ -теории — абсолютность понятий разрешимости и отделимости.

17.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория.

(i) Терм $M \in \Lambda^0$ называется $\mathcal{T}$ -разрешимым, если $\exists \vec{N} (M\vec{N} =_{\mathcal{T}} I)$. Терм $M \in \Lambda$ называется $\mathcal{T}$ -разрешимым, если $\mathcal{T}$ -разрешимо его замыкание $\lambda \vec{x}.M$.

(ii) Множество $F = \{M_1, \dots, M_n\}$ $\mathcal{T}$ -отделимо, если

$$\forall N_1 \dots N_n \exists C [\] (C[M_1] =_{\mathcal{T}} N_1 \wedge \dots \wedge C[M_n] =_{\mathcal{T}} N_n).$$

17.1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть теория $\mathcal{T}$ п. о. Тогда

$$M \text{ } \mathcal{T}\text{-разрешим} \Leftrightarrow M \text{ разрешим}.$$

Доказательство. Достаточно установить эту эквивалентность для замкнутых термов M .

($\Rightarrow$) Пусть $M\vec{N} =_{\mathcal{T}} I$. Тогда в силу полуосмысленности терм $M\vec{N}$ разрешим, значит, и M разрешим.

Импликация ($\Leftarrow$) тривиальна. $\square$

Легко видеть, что предложение 17.4.4 характеризует п. о. λ -теории.

17.1.5. ЛЕММА. Пусть множество $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\} \subseteq \Lambda$ $\mathcal{H}^*$ -отделимо. Тогда $\mathcal{F}$ отделимо.

Доказательство. По условию для некоторого контекста

$$C[M_1] =_{\mathcal{H}^*} x_1, \dots, C[M_n] =_{\mathcal{H}^*} x_n.$$

Тогда $C[M_i] \sim x_i$ в силу леммы 10.4.1, значит, все термы $C[M_i]$ разрешимы и имеют соответственно свободные головные переменные $x_1, x_2, \dots$. Но тогда множество $\{C[M_1], \dots\}$ отделимо в силу предложения 10.4.12, а значит, отделимо и $\mathcal{F}$. $\square$

17.1.6. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{T}$ — п. с. теория. Тогда

$$\mathcal{F} \text{ } \mathcal{T}\text{-отделимо} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ отделимо}.$$

Доказательство. Заметим, что для λ -теорий $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$

$$\mathcal{T}_1\text{-отделимость} \Rightarrow \mathcal{T}_2\text{-отделимость}.$$

Поэтому

$$\mathcal{F} \text{ отделимо} \Rightarrow \mathcal{F} \text{ } \mathcal{T}\text{-отделимо} \Rightarrow \mathcal{F} \text{ } \mathcal{H}\text{-отделимо} \Rightarrow \mathcal{F} \text{ отделимо}$$

в силу предыдущей леммы. $\square$

17.1.7. Другая характеристика полуосмысленности — топологическая:

$\mathcal{T}$ полуосмысленна, если $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ с топологией деревьев не является неметризуемой. [Каноническая топология на $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ — это фактортопология, определяемая с помощью канонического отображения $\varphi_{\mathcal{T}}: \Lambda \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{T})$, причем на Λ задана топология деревьев, определенная в § 10.2.] Это установлено в предложении 20.5.6.

Р. п. теории

Несколько результатов этого пункта принадлежат Виссеру. Он получил их, рассматривая модели из термов как предполные нумерованные множества в смысле Ершова [1973] — см. упр. 6.8.18. Мы изложим здесь эти результаты, не упоминая нумерованные множества.

17.1.8. ЛЕММА. Пусть $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — частично рекурсивная функция. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(n) \downarrow \Rightarrow E^{\ulcorner n \urcorner} = E^{\ulcorner \psi(n) \urcorner}.$$

Доказательство. Пусть ψ λ -определена термом F . По второй теореме о неподвижной точке 6.5.9 имеем $X = E \circ F^{\ulcorner X \urcorner}$ для некоторого $X \in \Lambda$. Положим $\ulcorner n \urcorner = \ulcorner X \urcorner$. Тогда

$$\begin{aligned} E^{\ulcorner n \urcorner} &= E^{\ulcorner X \urcorner} = X \quad (\text{по теореме 8.1.6}) = \\ &= E \circ F^{\ulcorner X \urcorner} = E(F^{\ulcorner n \urcorner}) = E^{\ulcorner \psi(n) \urcorner}. \quad \square \end{aligned}$$

Следующие три результата заимствованы из работы Виссера [1980].

17.1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — р. п. λ -теория, и пусть термы $M, N \in \Lambda$ таковы, что $\mathcal{T} \not\vdash M = N$. Тогда

$$\exists R \forall Q (\mathcal{T} + P = Q \not\vdash M = N).$$

Доказательство. Положим $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid \mathcal{T} + E^{\ulcorner m \urcorner} = E^{\ulcorner m \urcorner} \vdash M = N\}$. Тогда

$$(1) \quad \forall n (n \notin A_n),$$

$$(2) \quad m \in A_n \Leftrightarrow \exists z (R(n, m, z))$$

для некоторого рекурсивного предиката R . Рассмотрим функцию

$$\psi(n) = (\mu z R(n, (z)_0, (z)_1))_0.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$

$$(3) \quad \psi(n) \downarrow \Leftrightarrow A_n \neq \emptyset,$$

$$(4) \quad \psi(n) \downarrow \Leftrightarrow \psi(n) \in A_n.$$

По предыдущей лемме имеется число n_0 , такое, что

$$(5) \quad \psi(n_0) \downarrow \Rightarrow E^{\Gamma} n_0^{\Gamma} = E^{\Gamma} \psi(n_0)^{\Gamma}.$$

Предположим, что $\psi(n_0) \downarrow$. Тогда $\psi(n_0) \in A_{n_0}$ в силу (4). Но $E^{\Gamma} n_0^{\Gamma} = E^{\Gamma} \psi(n_0)^{\Gamma}$ в силу (5), откуда $\psi(n_0) \notin A_{n_0}$. Поэтому $\psi(n_0) \uparrow$ и, следовательно, $A_{n_0} = \emptyset$ в силу (3). Теперь мы можем взять $P = E^{\Gamma} n_0^{\Gamma}$. $\square$

Терм P $\mathcal{T}$ -легкий, если $\forall Q \text{ Con}(\mathcal{T} + P = Q)$. Предложение 17.1.9 показывает, что для любой р.п. λ -теории $\mathcal{T}$ имеется $\mathcal{T}$ -легкий терм P .

Следующая теорема показывает, что р.п. λ -теории плотны по отношению включения.

17.1.10. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$ — р.п. λ -теории. Тогда существует р.п. λ -теория $\mathcal{P}$, такая, что $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{T}'$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}' \vdash M = N$ и $\mathcal{T} \nvdash M = N$. В силу предыдущего предложения для некоторого P

$$(1) \quad \forall Q (\mathcal{T} + P = Q \nvdash M = N).$$

Берем $\mathcal{P} = \mathcal{T} + PM = PN$. Очевидно, что $\mathcal{P}$ р.п. и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}'$.

Допустим, что $\mathcal{T} = \mathcal{P}$. Тогда

$$\mathcal{T} + P = I = \mathcal{T} + PM = PN + P = I \vdash M = N$$

в противоречие с (1).

Допустим, что $\mathcal{T}' = \mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{T} + PM = PN \vdash M = N$. Так как $\mathcal{T} + P = KI \vdash PM = PN$, то $\mathcal{T} + P = KI \vdash M = N$ в противоречие с (1). $\square$

17.1.11. СЛЕДСТВИЕ. Существует семейство λ -теорий $\{\mathcal{T}_r\}_{r \in \mathbb{R}}$, такое, что для любых вещественных чисел r, r'

$$(1) \quad r < r' \Leftrightarrow \mathcal{T}_r \subsetneq \mathcal{T}_{r'}.$$

Доказательство. Используя предыдущую теорему, можно вложить рациональные числа в р.п. λ -теории, т. е. построить семейство $\{\mathcal{T}_r\}_{r \in \mathbb{Q}}$, такое, что (1) имеет место для любых $r, r' \in \mathbb{Q}$. Положим теперь для $r \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_r = \bigcup \{ \mathcal{T}_q \mid q < r \text{ и } q \in \mathbb{Q} \}.$$

При таком выборе (1) очевидным образом выполняется для $r, r' \in \mathbb{R}$. $\square$

У Виссера [1980] доказано, что любое счетное частично упорядоченное множество можно вложить в семейство р.п. λ -теорий, упорядоченных по включению.

Иному типу результатов о р.п. теориях принадлежит следующая «теорема об области». Если $\mathcal{T}$ — р.п. λ -теория, то область значений любого определимого отображения в модели из термов $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — либо одноэлементное, либо бесконечное множество. Эта теорема была сформулирована Бёмом в виде гипотезы и доказана независимо Майхиллом и автором. У Виссера [1980] указано, что ее доказательство можно оформить в приятной топологической манере. Первоначальное (более короткое) доказательство см. в теореме 20.2.5.

17.1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топология Виссера на множестве Λ получается, если взять в качестве базисных открытых множеств такие множества $O \subseteq \Lambda$, что

- (1) O замкнуто относительно β -равенства,
- (2) O является (после кодирования натуральными числами)

Π_1^0 -множеством.

(ii) Пусть $\mathcal{T}$ — любая λ -теория. Топология Виссера на $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — это фактортопология для $\varphi_{\mathcal{T}}: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$, где $\varphi_{\mathcal{T}}$ — каноническое отображение, а Λ имеет топологию Виссера.

Например, неразрешимые термы образуют открытое множество в Λ . В $\mathfrak{M}(\mathcal{H})$ открыто множество $\{\Omega\}$.

17.1.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Если f — определимое отображение на множестве Λ (т. е. $f(M) = FM$ для некоторого $F \in \Lambda$), то f непрерывно в топологии Виссера.

(ii) То же верно для определимых отображений на $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ (т. е. таких f , что $f[M]_{\mathcal{T}} = [FM]_{\mathcal{T}}$).

Доказательство. (i) Пусть O — базисная окрестность точки FM . Положим $O_M = \{N \mid FN \in O\}$. Тогда из открытости O по Виссеру следует открытость O_M , и все в порядке.

(ii) следует из (i) и диаграммы, связывающей $\mathcal{T}$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$. $\square$

Топологическое пространство называется гиперсвязным, если любые два непустых открытых множества имеют непустое пересечение. Очевидно, что такое пространство связно.

17.1.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Множество Λ с топологией Виссера гиперсвязно.

(ii) Множество $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ с топологией Виссера гиперсвязно для любой λ -теории $\mathcal{T}$.

Доказательство. (i) Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется β -замкнутым, если $[n \in A \wedge E^{\Gamma} n^{\Gamma} = E^{\Gamma} m^{\Gamma}] \Rightarrow m \in A$. Нам понадобится следующий результат.

Подлемма. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$ — такие β -замкнутые р.п. множества, что $A \cup B = \mathbb{N}$. Тогда $A = \mathbb{N}$ или $B = \mathbb{N}$.

Доказательство подлеммы. Допустим, что $A, B \neq \mathbb{N}$. Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ — пара рекурсивно неотделимых дизъюнктивных р.п. множеств. Пусть $n_A \in A - B, n_B \in B - A$. Положим

$$\psi(n) = \begin{cases} n_A, & \text{если } n \in X, \\ n_B, & \text{если } n \in Y, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция ψ частично рекурсивна и потому λ -определена некоторым термом $F \in \Lambda$. Положим

$$C = \{n \mid \Vdash (F \ulcorner n \urcorner) \in A\}, \quad D = \{n \mid \Vdash (F \ulcorner n \urcorner) \in B\}.$$

Тогда C, D р.п. и $C \cup D = \mathbb{N}$. Далее,

$$n \in X \Rightarrow \psi(n) = n_A \notin B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Vdash F \ulcorner n \urcorner \notin B \text{ (так как } F \text{ определяет } \psi, \text{ а } B \text{ } \beta\text{-замкнуто)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \notin D.$$

Поэтому $X \cap D = \emptyset$; аналогично доказывается, что $Y \cap C = \emptyset$.

В силу принципа редукции для р.п. множеств имеются р.п. множества $C' \subseteq C, D' \subseteq D$, такие что $C' \cup D' = C \cup D = \mathbb{N}$ и $C' \cap D' = \emptyset$. Но тогда множество C' рекурсивно и отделяет X и Y вопреки выбору X, Y . $\square$ подлемма

Пусть множества $O_1, O_2 \subseteq \Lambda$ открыты и $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Положим

$$A = \{n \mid \mathbf{E} \ulcorner n \urcorner \notin O_1\}, \quad B = \{n \mid \mathbf{E} \ulcorner n \urcorner \notin O_2\}.$$

Тогда A, B удовлетворяют условию подлеммы. Следовательно, $A = \mathbb{N}$ или $B = \mathbb{N}$, откуда $O_1 = \emptyset$ или $O_2 = \emptyset$.

(ii) $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — образ гиперсвязного пространства Λ при каноническом отображении $\varphi_{\mathcal{T}}$, которое непрерывно по определению. Поэтому $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ гиперсвязно. $\square$

В качестве непосредственного следствия мы получаем теорему Скотта: любое нетривиальное множество $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$, замкнутое относительно равенства, нерекурсивно. Действительно, если бы $\mathcal{A}$ было рекурсивным, то $\mathcal{A}$ и $\Lambda - \mathcal{A}$ принадлежали бы классу Π_1^0 , следовательно, были бы открыты по Виссеру в противоречие со связностью Λ .

17.1.15. Лемма. Пусть $\mathcal{T}$ — р.п. λ -теория.

(i) Пусть множество $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ конечно. Тогда $\mathcal{A}$ дискретно в топологии Виссера.

(ii) Пусть $\text{ВН}_{\mathcal{T}} = \{[M]_{\mathcal{T}} \mid M \text{ есть } \beta\eta\text{-н. ф.}\} \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Тогда $\text{ВН}_{\mathcal{T}}$ тоже дискретно.

Доказательство. (i) Пусть $\mathcal{A} = \{[M_1]_{\mathcal{T}}, \dots, [M_n]_{\mathcal{T}}\}$. Положим

$$O_1 = \{[M]_{\mathcal{T}} \mid M \neq_{\mathcal{T}} M_2 \wedge \dots \wedge M \neq_{\mathcal{T}} M_n\}.$$

Тогда $[M_1]_{\mathcal{T}} \in O_1$ и $O_1 \cap (\mathcal{A} - \{[M_1]_{\mathcal{T}}\}) = \emptyset$. Далее, множество $\varphi_{\mathcal{T}}^{-1}(O_1)$ принадлежит классу Π_1^0 и замкнуто относительно равенства, поэтому O_1 открыто по Виссеру. Значит $[M_1]_{\mathcal{T}}$ — изолированная точка множества $\mathcal{A}$. Так как точка $[M_1]_{\mathcal{T}}$ произвольна, множество $\mathcal{A}$ дискретно.

(ii) Пусть $[M_0]_{\mathcal{T}} \in \text{ВН}_{\mathcal{T}}$. Допустим, что M_0 есть $\beta\eta$ -н. ф. Положим

$$O = \{[M]_{\mathcal{T}} \mid (\forall M' \text{ в } \beta\eta\text{-н. ф.}) [M' \neq M_0 \Rightarrow M' \neq_{\mathcal{T}} M]\}.$$

Как и в пункте (i), множество O открыто по Виссеру. По теореме Бёма имеем $[M_0]_{\mathcal{T}} \in O$. Далее, $(\text{ВН}_{\mathcal{T}} - \{[M_0]_{\mathcal{T}}\}) \cap O = \emptyset$. Поэтому $\{[M_0]_{\mathcal{T}}\}$ — изолированная точка множества $\text{ВН}_{\mathcal{T}}$, что и требовалось. $\square$

17.1.16. ТЕОРЕМА ОБ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ. Пусть $\mathcal{T}$ — р.п. теория. Пусть $f: \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — определенное отображение (т. е. $f([M]_{\mathcal{T}}) = [FM]_{\mathcal{T}}$ для некоторого $F \in \Lambda$). Тогда область значений f либо одноэлементна, либо бесконечна. То же верно для f , ограниченного множеством $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$.

Доказательство. Допустим, что область значений f конечна. Тогда она дискретна в силу предыдущего предложения. С другой стороны, в силу предложений 17.1.13(ii) и 17.1.14(i) область значений f есть непрерывный образ связного пространства, а потому она связна. Но дискретное пространство связно, только если оно одноэлементно. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что множество Λ^0 открыто, а значит, и гиперсвязно. $\square$

Теорема об области значений верна и для некоторых других моделей λ -исчисления, см. теорему 20.2.6. Неизвестно, верна ли эта теорема для $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H})$.

17.1.17. Следствие. Пусть $\mathcal{T}$ — р.п. теория, а терм F таков, что

$$(\forall M \in \Lambda) (\exists N \text{ в } \beta\eta\text{-н. ф.}) (FM =_{\mathcal{T}} N).$$

Тогда F постоянен с точностью до (равенства в) $\mathcal{T}$ (т. е. $\forall M, N (FM =_{\mathcal{T}} FN)$).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 17.1.16. $\square$

В упражнении 20.6.12 теорема об области значений интерпретируется в теории нумераций Ершова.

17.2. Омега-теории

Непротиворечивость теории $\lambda\omega$ была доказана Барендрегтом [1971] путем ординального анализа доказательств. Уодсворт [1976] и Накадзима [1975] показали, что имеет место $D_\infty \models \omega$, т. е. что для любых $M, N \in \Lambda^0$ верно

$$[(\forall Z \in \Lambda^0) (D_\infty \models MZ = NZ)] \Rightarrow D_\infty \models M = N.$$

Так как $\text{Th}(D_\infty) = \mathcal{H}^*$ (см. теорему 19.2.12), мы получаем, что и теория $\mathcal{H}^*$ должна быть замкнута относительно ω -правила. Будет дано простое доказательство этого факта, не использующее модель D_∞ . Тем не менее будет приведено и доказательство непротиворечивости, использующее ординалы, так как оно содержит больше информации, относящейся к теории доказательств, и увенчано теоремой 17.2.17:

$$\mathcal{H}\omega \vdash M = I \Rightarrow \lambda\eta \vdash M = I.$$

Доказательство того, что $\mathcal{H}^* \vdash \omega$, занимает 17.2.1—17.2.8. Используется теория $\mathbf{CL}$, так как замкнутые $\mathbf{CL}$ -термы записываются без каких-либо переменных. Вводится вспомогательная теория $\mathbf{CL}$, чтобы проследивать термы в процессе редукции.

17.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество $\mathcal{E}^0$ (подчеркнутых замкнутых $\mathbf{CL}$ -термов) индуктивно определяется следующим образом:

- (1) $K, S \in \mathcal{E}^0$,
- (2) $P, Q \in \mathcal{E}^0 \Rightarrow (PQ) \in \mathcal{E}^0$,
- (3) $P \in \mathcal{E}^0 \Rightarrow \underline{P} \in \mathcal{E}^0$.

Заметим, что в силу п. (3) имеются только простые подчеркивания.

(ii) Бинарные отношения $\rightarrow_w$ и $\twoheadrightarrow_w$ на множестве $\mathcal{E}^0$ определяются с помощью понятия редукции $\underline{w}$, которое имеет следующие правила свертывания:

$$K PQ \rightarrow P, \quad SPQR \rightarrow PR(QR), \quad \underline{P}Q \rightarrow PQ \quad \text{для } P \in \mathcal{E}^0.$$

(iii) Если $P \in \mathcal{E}^0$, то терм $|P|$ — это результат убирания подчеркиваний из $\underline{P}$. Для $P, Q \in \mathcal{E}^0$ пишем $P \cong Q$, если $|P| \equiv |Q|$. $P \subset Q$ означает, что P есть подтерм терма Q . Например, $K \subset \underline{KS}$, $K \not\subset \underline{KS}$.

Заметим, что $\mathcal{E}^0 \subseteq \mathcal{E}^0$ и что на $\mathcal{E}^0$ отношения $\rightarrow_w$ и $\twoheadrightarrow_w$ совпадают, так же как $\rightarrow_w$ и $\twoheadrightarrow_w$.

17.2.2. ЛЕММА. (i) Пусть $P, P' \in \mathcal{E}^0$. Тогда

$$[P \twoheadrightarrow_w P' \wedge Q' \subset P'] \Rightarrow (\exists Q \in \mathcal{E}^0) [Q \subset P \wedge Q \twoheadrightarrow_w Q'].$$

(ii) Пусть $F, P \in \mathcal{E}^0$ и $P' \in \mathcal{E}^0$. Тогда

$$[FP \twoheadrightarrow_w P' \wedge Q \subset P'] \Rightarrow P \twoheadrightarrow_w Q.$$

Доказательство. (i) В силу транзитивности достаточно провести доказательство для случая $P \twoheadrightarrow_w P'$. Это делается с помощью индукции по построению отношения $\rightarrow_w$. Примеры: $SPQR \rightarrow_w PR(QR)$, $SPQR \rightarrow_w SPQR'$.

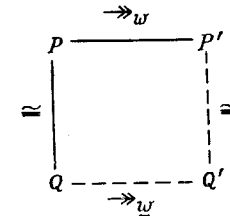
(ii) Допустим, что $FP \twoheadrightarrow_w P' \supset Q$. В силу (i) имеем

$$\exists Q_1 [Q_1 \subset FP \text{ и } Q_1 \twoheadrightarrow_w Q].$$

Но тогда $Q_1 \equiv P$. $\square$

17.2.3. ЛЕММА. Пусть $P, P' \in \mathcal{E}^0$ и $Q \in \mathcal{E}^0$. Тогда

$$[P \cong Q \text{ и } P \twoheadrightarrow_w P'] \Rightarrow (\exists Q' \in \mathcal{E}^0) [P' \cong Q' \text{ и } Q \twoheadrightarrow_w Q'].$$



Доказательство. Снова достаточно рассмотреть случай, когда слева стоит $\rightarrow_w$. Это делается легко. Заметим лишь, что нужно правило $\underline{P}Q \rightarrow_w PQ$. Например, из $\underline{KMN} \cong \underline{KMN} \rightarrow_w M$ получаем $\underline{KMN} \rightarrow_w \underline{KMN} \rightarrow_w M$. $\square$

17.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $R \in \mathcal{E}^0$ следующим образом определим отображение $\varphi_R: \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^0$:

$$\varphi_R(P) = P, \text{ если } P \in \mathcal{E}^0, \quad \varphi_R(\underline{P}) = R, \quad \varphi_R(PQ) = \varphi_R(P) \varphi_R(Q).$$

φ_R просто заменяет все подчеркнутые термы на R .

Для $P, Q \in \mathcal{E}^0$ положим

$$(P \sim_s Q) \Leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{E}) [FP \text{ } \omega\text{-разрешим} \Leftrightarrow FQ \text{ } \omega\text{-разрешим}].$$

17.2.5. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda^0$. Тогда

$$M \sim_s N \Leftrightarrow M_{CL} \sim_s N_{CL}.$$

Доказательство состоит из ссылки на предложение 8.3.22 и лемму 2.1.20. $\square$

17.2.6. ЛЕММА. Пусть $P, Q \in \mathcal{E}^0$, $R, R' \in \mathcal{E}^0$ и $(\forall Z \in \mathcal{E}^0) (RZ \sim_s R'Z)$. Тогда $\varphi_R(P) \sim_s \varphi_{R'}(Q)$, если выполнено любое из следующих условий:

- (i) $P \rightarrow_w Q$ и $(\forall L \subset P) (L =_w R)$.

(ii) $P \rightarrow_w Q$ и $(\forall L \subset P) (L =_w R)$.

(iii) $P \equiv FR \rightarrow_w Q$, где $F \in \mathcal{C}^0$.

Доказательство. В случае (i) применяем индукцию по порождению отношения $P \rightarrow_w Q$. Единственный нетривиальный подслучай встречается, когда $P \equiv CD$, $Q \equiv CD$. Тогда $C =_w R$, откуда

$$\varphi_{R'}(P) \equiv R' \varphi_{R'}(D) \sim_s R \varphi_{R'}(D) =_w C \varphi_{R'}(D) \equiv \varphi_{R'}(Q).$$

Заметим, что $X \sim_s Y =_w Z \Rightarrow X \sim_s Z$.

(ii) получается из (i) с помощью транзитивности и леммы 17.2.2(i).

(iii) получается из (ii). $\square$

17.2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda^0$ и $(\forall Z \in \Lambda^0) (MZ \sim_s NZ)$. Тогда $M \sim_s N$.

Доказательство. Так как M и N замкнуты, достаточно в силу леммы 2.1.20 показать, что

$$\forall F [FM \text{ разрешим} \Rightarrow FN \text{ разрешим}].$$

Пусть дан F . Тогда

$$FM \text{ разрешим} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{CL} M_{CL} \text{ } \omega\text{-разрешим} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{CL} M_{CL} \vec{P} =_w S \text{ для некоторых } \vec{P} \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{CL} M_{CL} \vec{P} \rightarrow_w S \text{ (в силу свойства CR для } \omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{CL} M_{CL} \vec{P} \rightarrow_w S', \text{ где } S' \cong S \text{ по лемме 17.2.3.}$$

Случай 1. $S' \equiv S$. По предположению $(\forall R \in \mathcal{C}^0) (M_{CL} R \sim_s N_{CL} R)$. Поэтому в силу леммы 17.2.6(iii), примененной к $F' \equiv \lambda^* x. F_{CL} x \vec{P}$ и $\varphi_{N_{CL}}$,

$$F_{CL} N_{CL} \vec{P} \sim_s S \Rightarrow (F_{CL} N_{CL} \text{ CL-разрешим} \Rightarrow FN \text{ разрешим}).$$

Случай 2. $S' \equiv S$. Тогда по лемме 17.2.2(ii) имеем $M_{CL} \rightarrow_w S$ и по лемме 17.2.6(iii) —

$$F_{CL} N_{CL} \vec{P} \sim_s N_{CL}.$$

Так как в силу леммы 17.2.5 и предположения верно $M_{CL} I \sim_s N_{CL} I$, то

$$F_{CL} N_{CL} \vec{P} III \sim_s N_{CL} III \sim_s M_{CL} III =_w S III =_w I.$$

Следовательно, разрешим терм $F_{CL} N_{CL}$, а вместе с ним и FN . $\square$

17.2.8. ТЕОРЕМА. (i) $\mathcal{H}^* \vdash \omega$.

(ii) Если $\mathcal{T}$ полусмысленна, то $\mathcal{T} \omega$ тоже.

(iii) $\lambda \omega \subseteq \mathcal{H} \omega \subseteq \mathcal{H}^*$.

Доказательство. (i) По лемме 17.2.7 имеем $\mathcal{H}^* \vdash \omega^0$. Но тогда $\mathcal{H}^* \vdash \omega$ по лемме 4.1.15(i).

(ii) $\mathcal{T}$ п. о. $\Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}^* \Rightarrow \mathcal{T} \omega \subseteq \mathcal{H}^* \omega = \mathcal{H}^*$ (в силу (i)) $\Rightarrow \mathcal{T} \omega$ п. о.

по лемме 17.1.1.

(iii) следует из того, что λ и $\mathcal{H}$ полусмысленны. $\square$

Теперь будет приведено ординальное доказательство непротиворечивости для $\mathcal{H} \omega$. Так как ω -правило влечет экстенциональность, а теории $\lambda + ext$ и $CL + ext$ эквивалентны, непротиворечивость теории $\lambda \mathcal{H} \omega$ будет доказана с помощью ее комбинаторной формулировки $CL \mathcal{H} \omega$. Это удобно, так как в CL не нужно никаких (даже связанных) переменных. Доказательство непротиворечивости вместе со своими теоретико-доказательственными следствиями занимает 17.2.9—17.2.17.

17.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $CL \mathcal{H} \omega'$ обозначается следующий язык:

$$\text{Алфавит}_{CL \mathcal{H} \omega'} = \text{Алфавит}_{CL} \cup \{\approx_\alpha, \sim_\alpha, =_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1},$$

где ω_1 — множество всех счетных ординалов.

Термы. Множество термов языка $CL \mathcal{H} \omega'$ — это $\mathcal{C}^0$.

Формулы. Если $P, Q \in \mathcal{C}^0$, то $P =_\alpha Q$, $P \sim_\alpha Q$ и $P \approx_\alpha Q$ — формулы языка $CL \mathcal{H} \omega'$.

Аксиомы и правила вывода:

(I.1) $CL \mathcal{H} \vdash P = Q \Rightarrow P \approx_0 Q$ (где $\mathcal{H}$ аксиоматизирована множеством $\{P = Q \mid P, Q \in \mathcal{C}^0 \text{ неразрешимы}\}$).

(I.2) $[(\forall Z \in \mathcal{C}^0) (\exists \gamma < \alpha) (PZ =_\gamma QZ)] \Rightarrow P \approx_\alpha Q$.

(II.1) $P \approx_\alpha Q \Rightarrow P \sim_\alpha Q$.

(II.2) $P \sim_\alpha Q \Rightarrow C[P] \sim_\alpha C[Q]$.

(III.1) $P \sim_\alpha Q \Rightarrow P =_\alpha Q$.

(III.2) $P =_\alpha Q, Q =_\alpha R \Rightarrow P =_\alpha R$.

Замечания. Дадим интуитивную интерпретацию введенных отношений.

$P =_\alpha Q$ означает, что $P = Q$ доказуемо с использованием ω -правила не более α раз.

$P \sim_\alpha Q$ означает, что $P =_\alpha Q$ доказуемо без использования транзитивности.

$P \approx_\alpha Q$ означает, что $P \sim_\alpha Q$ получается непосредственно по ω -правилу (или доказуемо в $CL \mathcal{H}$ в случае $\alpha = 0$).

Заметим, что $P \approx_\alpha Q \Rightarrow Q \approx_\alpha P$ и аналогичные соотношения для $\sim_\alpha, =_\alpha$ являются выводимыми правилами системы $CL \mathcal{H} \omega'$. (Докажите эти соотношения одновременно с помощью индукции

по доказательству в системе $CL\mathcal{H}\omega'$.) Кроме того, мы имеем выводимое правило

$$P \approx_\alpha Q, \alpha \leq \beta \Rightarrow P \approx_\beta Q$$

и аналогичные соотношения вида $\sim_\alpha, \alpha \leq \beta \Rightarrow \sim_\beta$ и $=_\alpha, \alpha \leq \beta \Rightarrow =_\beta$.

17.2.10. ЛЕММА. (i) $CL\mathcal{H}\omega \vdash P = Q \Leftrightarrow \exists \alpha (CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_\alpha Q)$.

(ii) $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P = Q \Leftrightarrow CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_0 Q$.

(iii) $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_\alpha Q \Leftrightarrow \exists P_1 \dots P_n (CL\mathcal{H}\omega' \vdash P \sim_\alpha P_1 \sim_\alpha \dots \sim_\alpha P_n \equiv Q)$.

(iv) $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P \sim_\alpha Q \Leftrightarrow$ для некоторого контекста $C[]$ и некоторых $P', Q' \in \mathcal{C}$ имеет место $P \equiv C[P'], Q \equiv C[Q']$ и $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P' \approx_\alpha Q'$.

(v) $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P \approx_\alpha Q$ и $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow (\forall Z \in \mathcal{C}^0) (\exists \gamma < \alpha) (CL\mathcal{H}\omega' \vdash PZ =_\gamma QZ)$.

Доказательство очевидно. $\square$

17.2.11. ЛЕММА. Пусть $R, R' \in \mathcal{C}^0$ и $CL\mathcal{H}\omega' \vdash R \approx_\alpha R'$ для $\alpha \neq 0$. Пусть $P, Q \in \mathcal{C}^0$. Тогда

(i) $[P \rightarrow_w Q \wedge (\forall L \subset P) (L =_w R)] \Rightarrow (\exists \gamma < \alpha) (CL\mathcal{H}\omega' \vdash \Phi_{R'}(P) =_\gamma \Phi_{R'}(Q))$.

(ii) То же для $\rightarrow_w$ вместо $\rightarrow$.

Доказательство. (i) Применяем индукцию по порождению отношения $\rightarrow_w$. Единственный нетривиальный случай — соотношение вида $\underline{LB} \rightarrow_w \underline{LB}$. Но в этом случае для некоторого $\gamma < \alpha$ имеем

$$CL\mathcal{H}\omega' \vdash \Phi_{R'}(\underline{LB}) \equiv R' \Phi_{R'}(B) =_\gamma R \Phi_{R'}(B) =_w L \Phi_{R'}(B),$$

так как $L =_w R$ по предположению. Ввиду соотношения $=_w \Rightarrow \approx_0 \Rightarrow =_\gamma$ все в порядке.

(ii) получается из (i) с помощью транзитивности и леммы 17.2.2(i). $\square$

17.2.12. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $F, R, R' \in \mathcal{C}^0$. Предположим, что $FR \rightarrow_w I$ и $CL\mathcal{H}\omega' \vdash R \approx_\alpha R'$ для $\alpha \neq 0$. Тогда $(\exists \gamma < \alpha) (CL\mathcal{H}\omega' \vdash FR'I =_\gamma I)$.

Доказательство. $FR \rightarrow_w I \Rightarrow$

$$\Rightarrow FR \rightarrow_w I' \cong I \text{ (по лемме 17.2.3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FRI \rightarrow_w I'I \rightarrow_w I \text{ (так как } I' \text{ должен иметь один из видов } \underline{SKK}, \underline{SKK} \text{ и т. д., и во всех этих случаях } I'I \rightarrow_w I) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma < \alpha) (CL\mathcal{H}\omega' \vdash FR'I =_\gamma I) \text{ (по предыдущей лемме). } \square$$

17.2.13. ЛЕММА. Пусть $P \in \mathcal{C}^0$. Тогда

$$CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_\alpha I \Rightarrow \exists n (PI \sim^n \rightarrow_w I).$$

Доказательство проводится индукцией по α . Поскольку будет применена еще одна (внутренняя) индукция для обоснования индукционного перехода, мы будем называть внешнюю индукцию α -индукцией.

Случай 1. $\alpha = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_\alpha I &\Rightarrow CL\mathcal{H} \vdash P = I \text{ (по лемме 17.2.10 (ii))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow CL \vdash P = I \text{ (по теореме 5.1.9 (для } CL))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P \rightarrow_w I \text{ (в силу CR для } \rightarrow_w). \end{aligned}$$

Случай 2. $\alpha > 0$. Из предположения $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_\alpha I$ следует по лемме 17.2.10(iii), что $\exists \vec{P}$

$$(1) \quad CL\mathcal{H}\omega' \vdash P \sim_\alpha P_1 \sim_\alpha \dots \sim_\alpha P_k \rightarrow_w I.$$

С помощью индукции по k мы покажем, что $(1) \Rightarrow \exists n (PI \sim^n \rightarrow_w I)$. Эту индукцию мы назовем k -индукцией.

Если $k = 0$, то все в порядке. Пусть $k > 0$. Тогда $CL\mathcal{H}\omega' \vdash P_{k-1} \sim_\alpha P_k \rightarrow_w I$. По лемме 17.2.10(iv)

$$P_{k-1} \equiv C[P'_{k-1}], \quad P_k \equiv C[P'_k] \quad \text{и} \quad CL\mathcal{H}\omega' \vdash P'_{k-1} \approx_\alpha P'_k$$

для некоторого контекста $C[]$. Положим $F \equiv \lambda^*x.C[x]$. Тогда $FP'_{k-1} =_w P_{k-1}$ и $FP'_k \rightarrow_w I$. В силу следствия 17.2.12 получаем, что

$$(\exists \gamma < \alpha) (CL\mathcal{H}\omega' \vdash P_{k-1}I =_0 FP'_{k-1}I =_\gamma I).$$

Отсюда по предположению α -индукции

$$\exists n (P_{k-1}II \sim^n \rightarrow_w I),$$

так что

$$\exists n (CL\mathcal{H}\omega' \vdash PII \sim^n \sim_\alpha P_1II \sim^n \sim_\alpha \dots \sim_\alpha P_{k-1}II \sim^n \rightarrow_w I).$$

Поэтому по предположению k -индукции

$$\exists n, n' (PI \sim^n I \sim^{n'} \rightarrow_w I),$$

т. е.

$$\exists n, n' (PI \sim^{n+n'+1} \rightarrow_w I). \quad \square$$

17.2.14. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $P \in \mathcal{C}^0$. Тогда

$$CL\mathcal{H}\omega' \vdash P =_\alpha I \Rightarrow \exists n (CL \vdash PI \sim^n = I).$$

Доказательство получается ссылкой на предыдущую лемму и лемму 17.2.10(i). $\square$

17.2.15. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $M \in \Lambda$. Тогда

$$\mathcal{H}\omega \vdash M = I \Rightarrow \exists n (\lambda \vdash M \sim^n I).$$

(ii) Теория $\mathcal{H}\omega$ непротиворечива.

Доказательство. (i) Допустим сначала, что $M \in \Lambda^0$. Тогда доказываемый результат получается из предыдущей леммы с помощью стандартных переводов множеств Λ и $\mathcal{E}$ друг в друга (применить теоремы 7.3.12 и 7.3.10).

Если терм M открытый, то пусть $F \equiv \lambda x. M$ — его замыкание. Тогда

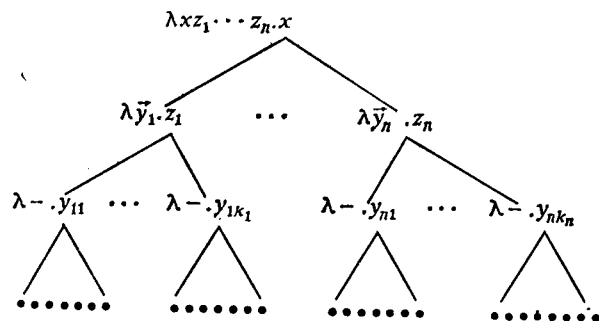
$$\begin{aligned} \mathcal{H}\omega \vdash Fx = I &\Rightarrow \mathcal{H}\omega \vdash F\tilde{\Omega} = I \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists n (\lambda \vdash F\tilde{\Omega} \sim^n I) \text{ (так как } F\tilde{\Omega} \in \Lambda^0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists n (\lambda \vdash Fx \sim^n I) \text{ (в силу предложения 14.3.24)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists n (\lambda \vdash M \sim^n I). \end{aligned}$$

(ii) Если бы теория $\mathcal{H}\omega$ была противоречива, мы имели бы $\mathcal{H}\omega \vdash \Omega = I$. Но тогда из (i) следовало бы, что $\exists n (\Omega \sim^n I)$ в противоречие с теоремой Чёрча — Россера. $\square$

Следующая лемма даст нам возможность усилить теорему 17.2.15. Метод доказательства заимствован из статьи Бергстры и Клопа [1980], § 4.

17.2.16. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda$ и $M \sim_s I$. Тогда $M \equiv_{\beta\eta} I \Rightarrow M \equiv_{\beta\eta} I$.

Доказательство. Из теоремы 16.2.7 и условия леммы следует, что $M \approx_{\eta} I$. Следовательно, дерево $BT(M)$ имеет вид



Это дерево р.п., так как оно принадлежит множеству $\Lambda_{\kappa\mathfrak{B}}$. Очевидно, что оно имеет рекурсивный индикатор переменных. Поэтому в силу теоремы 10.1.25 имеется терм $M_I \in \Lambda_I$, такой, что

$$(1) \quad BT(M_I) = BT(M).$$

Тогда, так как $\mathcal{B}$ есть λ -теория, получаем

$$(2) \quad BT(M_I) = BT(M).$$

Напомним, что в силу замечания, сделанного перед определением 10.1.18,

$$(3) \quad M \text{ имеет н. ф.} \Leftrightarrow BT(M) \text{ конечно и } \perp\text{-свободно.}$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} M \equiv_{\beta\eta} I &\Rightarrow BT(M_I) = BT(M) \text{ конечно и } \perp\text{-свободно (по (2), (3))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_I \text{ имеет н. ф. (в силу (3))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_I \text{ имеет н. ф. (в силу следствия 9.1.6)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow BT(M) = BT(M_I) \text{ конечно и } \perp\text{-свободно (в силу (1), (3))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M \text{ имеет н. ф. (в силу (3))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M \text{ имеет } \beta\eta\text{-н. ф. (в силу следствия 15.1.5)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M \equiv_{\beta\eta} I \text{ (так как иначе } M \not\sim_s I \text{ в силу следствия} \\ &\quad 10.4.3). \quad \square \end{aligned}$$

Собирая вместе основные результаты этого пункта, получаем следующее утверждение.

17.2.17. ТЕОРЕМА. Если $\mathcal{H}\omega \vdash M = I$, то $\lambda\eta \vdash M = I$. В частности, теория $\mathcal{H}\omega$ непротиворечива.

Доказательство. Если $\mathcal{H}\omega \vdash M = I$, то в силу теорем 17.2.8 и 17.2.15 мы имели бы $M \sim_s I$ и $M \sim^n I \equiv_{\beta\eta} I$ для некоторого n . Теперь многократное использование 17.2.16 дает $M \equiv_{\beta\eta} I$. $\square$

17.3. Частичная корректность ω -правила в $\lambda\eta$

В этом пункте будет доказано, что ω -правило имеет место для термов M, N в теории $\lambda\eta$, если хотя бы один из этих термов не является $\beta\eta$ -универсальным генератором. Доказательство занимает 17.3.1—17.3.24 (т. е. подпункт I). Однако в общем случае ω -правило не имеет места в $\lambda\eta$. Доказательство этого утверждения занимает 17.3.25—17.3.30 (т. е. подпункт II). Аналогичные результаты имеют место для правила термов в системе λ .

I. Истинность ω -правила в $\lambda\eta$ для термов, не являющихся универсальными генераторами.

Корректность ω -правила в системе $\lambda\eta$ для термов, не являющихся универсальными генераторами, доказана у Барендрегта [1974a]. Основная идея состоит в использовании замкнутых

термов порядка нуль, похожих на Ω : если $MZ = NZ$ для всех замкнутых термов Z , то и $M\Omega = N\Omega$. Так как Ω ведет себя почти как переменная, соблазнительно подставить вместо Ω новую переменную x и получить $Mx = Nx$, откуда по экстенциональности $M = N$. Однако есть и разница между термом Ω и новой переменной: в то время как новая переменная не может возникнуть в процессе редукции, терм Ω может. Поэтому приходится использовать другой терм Ξ порядка 0, который не порождается термом M или N . Если M или N — универсальный генератор, то такого терма Ξ нет, и доказательство разваливается. У Плоткина [1974] строятся два сложных универсальных генератора, для которых ω -правило не имеет места.

17.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\beta(\eta)\text{-}\mathcal{UG} = \{M \in \Lambda \mid M \text{ есть } \beta(\eta)\text{-универсальный генератор}\}$.

См. предложение 8.2.8, где построены универсальные генераторы. В упр. 17.5.13 показано, что

$$M \in \beta\text{-}\mathcal{UG} \not\Leftarrow M \in \beta\eta\text{-}\mathcal{UG}.$$

В этом пункте нужно понятие $\beta\eta$ -универсального генератора.

17.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $Z \in \Lambda$. Говорят, что Z имеет *порядок 0* (и пишут $Z \in 0$), если

$$\neg(\exists P \in \Lambda)(Z \rightarrow_{\beta} \lambda x.P).$$

Примеры. $x \in 0$, $\Omega \in 0$, $K^{\infty} \equiv \Theta K \notin 0$.

17.3.3. ЛЕММА. Пусть $Z \in 0$. Тогда

- (i) $\neg(\exists P \in \Lambda)(Z \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.P)$,
- (ii) $Z \rightarrow_{\beta\eta} Z' \Rightarrow Z' \in 0$,
- (iii) $ZM \rightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow \exists Z', M'[N \equiv Z'M' \text{ и } M \rightarrow_{\beta\eta} M' \text{ и } Z \rightarrow_{\beta\eta} Z']$,
- (iv) $(\forall M \in \Lambda)(ZM \in 0)$.

Доказательство. Заметим, что любой терм является либо переменной, либо аппликативным термом (вида MN), либо абстракционным термом (вида $\lambda x.M$).

(i) Допустим, что $Z \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.P$. Тогда откладывая η -редукцию с помощью следствия 15.1.6, мы имеем для некоторого терма Z'

$$Z \rightarrow Z' \rightarrow_{\eta} \lambda x.P.$$

По предположению терм Z' не является абстракционным. Очевидно, что Z' не является переменной, значит, он аппликативный. Но если $M \rightarrow_{\eta} N$ и M — аппликативный терм, то и N — аппликативный терм (это устанавливается индукцией по порождению отношения $\rightarrow_{\eta}$), что дает противоречие.

- (ii) непосредственно следует из (i).
- (iii) получается индукцией по длине редукции с использованием (i).
- (iv) Из (iii) следует, что если $ZM \rightarrow N$, то N — аппликативный терм. Следовательно, $ZM \in 0$. $\square$

Чтобы следить за тем, что происходит в редукции, которая заканчивается термом порядка 0, вводится вспомогательная система термов $\underline{\Lambda}$.

17.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество $\underline{\Lambda}$ (подчеркнутых λ -термов) индуктивно определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} M \in \underline{\Lambda} &\Rightarrow M \in \underline{\Lambda}, \\ M \in \underline{\Lambda}^0 &\Rightarrow \underline{M} \in \underline{\Lambda}, \\ M, N \in \underline{\Lambda} &\Rightarrow (MN) \in \underline{\Lambda}, \\ M \in \underline{\Lambda} &\Rightarrow (\lambda x.M) \in \underline{\Lambda}. \end{aligned}$$

(ii) Определения множества $FV(M)$ и операции $M[x := N]$ обобщаются на $\underline{\Lambda}$ очевидным образом. Заметим, что $FV(\underline{M}) = \emptyset$ и $\underline{M}[x := N] \equiv \underline{\bar{M}}$.

(iii) Отношение редукции $\beta\eta$ на множестве $\underline{\Lambda}$ определяется следующими правилами свертывания:

$$(\lambda x.M)N \rightarrow M[x := N], \quad \lambda x.Mx \rightarrow M, \quad \text{если } x \notin VF(M).$$

Как обычно, мы получаем для результирующего отношения $\rightarrow_{\beta\eta}$, что для любого контекста $C[\]$ с одной дырой

$$M \rightarrow_{\beta\eta} M' \Rightarrow C[M] \rightarrow_{\beta\eta} C[M'].$$

В частности, для $M, M' \in \underline{\Lambda}$ получаем

$$M \rightarrow_{\beta\eta} M' \Rightarrow \underline{M} \rightarrow_{\beta\eta} \underline{M'}.$$

17.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для $M, N \in \underline{\Lambda}$ отношение $M \subset N$ определяется таким образом, что единственным подтермом терма $\underline{L}$ оказывается $\underline{L}$. Точнее,

$$P \subset x \Leftrightarrow P \equiv x, \quad P \subset MN \Leftrightarrow P \subset M \text{ или } P \subset N \text{ или } P \equiv MN, \\ P \subset \lambda x.M \Leftrightarrow P \subset M \text{ или } P \equiv \lambda x.M, \quad P \subset \underline{M} \Leftrightarrow P \equiv \underline{M}.$$

(ii) Если $M \in \underline{\Lambda}$, то терм $|M| \in \Lambda$ определяется как M без подчеркиваний. $M \cong N$ означает, что $|M| \equiv |N|$.

17.3.6. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \underline{\Lambda}$. Тогда

- (i) $M \rightarrow_{\beta\eta} N \Leftrightarrow M \rightarrow_{\beta\eta} \underline{N}$.
- (ii) Если сверх того $M, N \in \underline{\Lambda}^0$, то $M \rightarrow_{\beta\eta} N \Leftrightarrow \underline{M} \rightarrow_{\beta\eta} \underline{N}$.

Доказательство проводится индукцией по порождению отношений $\rightarrow_{\beta\eta}$ и $\rightarrow_{\underline{\beta\eta}}$.

17.3.7. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $L, L' \in \Lambda$. Тогда

- (i) $L \subset M[x := N] \Rightarrow L \subset M$ или $L \subset N$,
- (ii) $L \subset M[x := L'] \Rightarrow L \subset M$.

Доказательство проводится индукцией по построению термина M . $\square$

17.3.8. ЛЕММА. (i) Пусть $M, M' \in \Lambda$ и $L' \in \Lambda$. Тогда

$$[M \rightarrow_{\beta\eta} M' \wedge L' \subset M'] \Rightarrow (\exists L \subset M) (L \rightarrow_{\beta\eta} L').$$

(ii) Пусть $M, L, L' \in \Lambda$ и $M' \in \Lambda$. Тогда

$$[ML \rightarrow_{\beta\eta} M' \wedge L' \subset M'] \Rightarrow L \rightarrow_{\beta\eta} L'.$$

Доказательство. (i) В силу транзитивности достаточно доказать это для случая, когда слева стоит $\rightarrow_{\beta\eta}$. Это делается индукцией по порождению отношения $\rightarrow_{\beta\eta}$ с использованием пункта (i) из предыдущей леммы.

(ii) получается непосредственно из (i). $\square$

17.3.9. ЛЕММА. Пусть $M, Z, L \in \Lambda$ и $Z \in 0$. Тогда

$$MZ \rightarrow_{\beta\eta} L \Rightarrow (\exists L' \in \Lambda) (\forall Z' \in \Lambda), \\ [ML \rightarrow_{\beta\eta} L' \cong L \wedge [Z' \subset L' \Rightarrow Z \rightarrow_{\beta\eta} Z']].$$

Доказательство. Назовем подчеркнутый терм P собственным, если $Q \subset P \Rightarrow Q \in 0$. Применяя индукцию по порождению отношения $\rightarrow_{\beta\eta}$, можно показать, что для любых $M, N \in \Lambda$ и $M' \in \Lambda$

$$[M \rightarrow_{\beta\eta} N, M \cong M' \text{ и } M' \text{ собственный}] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists N' \in \Lambda) [M' \rightarrow_{\beta\eta} N', N \cong N' \text{ и } N' \text{ собственный}].$$

После этого наше утверждение получается из п. (ii) предыдущей леммы. $\square$

17.3.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть x — произвольная переменная. Отображение $\varphi_x: \Lambda \rightarrow \Lambda$ (которое заменяет все подчеркнутые подтермы на x) определяется следующим образом:

$$\varphi_x(y) \equiv y, \quad \varphi_x(MN) \equiv \varphi_x(M) \varphi_x(N), \\ \varphi_x(\lambda y.M) \equiv \lambda y. \varphi_x(M), \quad \varphi_x(\underline{M}) \equiv \underline{x}.$$

17.3.11. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \rightarrow_{\beta\eta} N$. Если x — новая переменная, то $\varphi_x(M) \rightarrow_{\beta\eta} \varphi_x(N)$.

Доказательство проводится индукцией по порождению отношения $\rightarrow_{\beta\eta}$ с использованием следующей подлеммы:

$$z \neq y \Rightarrow \varphi_z(M[y := N]) \equiv \varphi_z(M)[y := \varphi_z(N)].$$

Эта подлемма доказывается индукцией по построению термина M . $\square$

17.3.12. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda$, $x \notin FV(M)$ и $Mx \rightarrow_{\beta\eta} N$. Тогда $(\exists M' \in \Lambda) ([N \equiv M'x, x \notin FV(M') \text{ и } M \rightarrow_{\beta\eta} M'] \text{ или } M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.N)$.

Доказательство тривиально. $\square$

Напомним, что для термина $M \in \Lambda$ его $\beta\eta$ -семейство — это множество

$$\mathcal{F}_{\beta\eta}(M) = \{N \in \Lambda \mid \exists M' (M \rightarrow_{\beta\eta} M' \text{ и } N \subset M')\}.$$

17.3.13. ЛЕММА. Пусть $M, N, Z \in \Lambda$ и $L \in \Lambda$. Тогда

$$[MN \rightarrow_{\beta\eta} L \text{ и } Z \subset L] \Rightarrow Z \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M).$$

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем считать, что из $N' \subset L$ следует $N' \equiv N$. Пусть x — новая переменная. Из леммы 17.3.11 и условия доказываемой леммы следует, что

$$Mx \rightarrow_{\beta\eta} \varphi_x(L).$$

По предыдущей лемме возможны два случая.

Случай 1. $\varphi_x(L) \equiv M'x$, где $M \rightarrow_{\beta\eta} M'$ и $x \notin FV(M')$. Тогда $L \equiv M'N$. Теперь если $Z \subset L$, то $Z \subset M'$, откуда $Z \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M)$.

Случай 2. $M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x. \varphi_x(L)$. В этом случае из $Z \subset L \equiv \varphi_x(L)[x := N]$ следует по лемме 17.3.7(ii), что $Z \subset \varphi_x(L) \subset \lambda x. \varphi_x(L)$, а потому и $Z \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M)$. $\square$

17.3.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Терм $M \in \Lambda$ называется Ω -термом, если он имеет вид $\Omega M'$.

(ii) Вхождение Z подтерма в терм M называется не- Ω -вхождением, если Z не имеет Ω -подтермов и не является подтермом никакого Ω -подтерма термина M .

(iii) Терм $U \in \Lambda$ является наследственно не- Ω -универсальным генератором, если U есть замкнутый β -универсальный генератор, такой что $\forall U' [U \rightarrow_{\beta\eta} U' \Rightarrow (\exists Z \subset U') [Z \in \beta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \text{ и } \text{имеет не-}\Omega\text{-вхождение в } U']]$.

(iv) Терм $\Xi \in \Lambda^0$ похож на переменную, если он имеет вид ΩU , где U есть наследственно не- Ω -универсальный генератор.

ПРИМЕР. Только второе из вхождений Z в терм $x(\Omega(MZ))Z$ является не- Ω -вхождением (в предположении, что Z не имеет Ω -подтермов).

17.3.15. ЛЕММА. (i) Терм, похожий на переменную, имеет порядок 0.

(ii) Если $\Xi \rightarrow_{\beta\eta} \Xi'$ и терм Ξ похож на переменную, то таков же и Ξ' .

(iii) Существует терм $\Xi \in \Lambda^0$, похожий на переменную.

Доказательство. Пункты (i), (ii) очевидны.

(iii) Пусть E перечисляет множество Λ^0 . Положим $F_x \equiv xTIE' \mid x$, где E' — н. ф., построенная в упр. 6.8.8 таким образом, что $E' \mid \rightarrow E$. Тогда F_x есть н. ф., и, так как $\ulcorner n \urcorner T \mid \rightarrow \mid$, мы получаем, что

$$F_x [x := \ulcorner n \urcorner] \rightarrow E \ulcorner n \urcorner.$$

Положим

$$A \equiv \lambda b x. bb \ulcorner 0 \urcorner (bb [F, x]) F_x, \quad B \equiv AA.$$

Тогда

$$B \ulcorner n \urcorner \rightarrow B \ulcorner 0 \urcorner (B \ulcorner n + 1 \urcorner) (E \ulcorner n \urcorner).$$

Следовательно, как и в предложении 8.2.8, терм $B \ulcorner 0 \urcorner$ — универсальный генератор. Мы утверждаем, что он наследственно не- Ω . Действительно, положим

$$P \rightarrow_k Q \Leftrightarrow \exists P_1 \dots P_k (P \equiv P_1 \rightarrow_{\beta\eta} \dots \rightarrow_{\beta\eta} P_k \equiv Q).$$

Допустим, что $B \ulcorner 0 \urcorner \rightarrow_{\beta\eta} U$. Тогда для некоторого k имеем $B \ulcorner 0 \urcorner \rightarrow_k U$. Так как A нормален, терм U имеет один из видов $B \ulcorner 0 \urcorner, (\lambda x. U' P Q) \ulcorner 0 \urcorner$ или $U' P Q$, где $B \ulcorner 0 \urcorner \rightarrow_r U'$ для некоторого $r < k$. Теперь индукцией по k получаем, что U содержит не- Ω -вхождение подтерма, который является β -универсальным генератором.

Наконец, возьмем $\Xi \equiv \Omega(B \ulcorner 0 \urcorner)$. $\square$

17.3.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $L \in \Lambda, L' \in \underline{\Lambda}$ и $L \cong L'$. Тогда L и L' совпадают с точностью до подчеркиваний, и мы можем дать следующие неформальные определения.

(i) Если Z' — вхождение подтерма в терм L' , то имеется единственное вхождение Z подтерма в L , которое *соответствует* Z' ; оно удовлетворяет условию $Z \cong Z'$.

Вместо формализации мы проиллюстрируем это определение на примере. Пусть $L \equiv S(KS)(SKK)$, $L' \equiv S(KS)(SKK)$. Тогда $L \cong L'$, S соответствует $\underline{S}$, KS соответствует $\underline{KS}$, и SKK соответствует $\underline{SKK}$.

(ii) Пусть $L'' \in \underline{\Lambda}$ — другой терм, такой что $L'' \cong L$. Скажем, что в L'' *больше подчеркиваний, чем в L'* (и будем писать $L' \triangleleft L''$), если для любого вхождения Z' подтерма в L' имеется вхождение Z'' подтерма в L'' , такое, что $Z' \subset Z''$ — вхождения подтермов в L , соответствующие вхождениям Z' и Z'' . Пусть, например, $L'' \equiv S(\underline{KS})(\underline{SKK})$. Тогда $L' \triangleleft L''$, где L' взят из предыдущего примера.

(iii) Пусть Z — вхождение подтерма в L . Тогда Z *точно подчеркнуто* в L' , если $\underline{Z}$ есть вхождение подтерма в L' и Z соответствует $\underline{Z}$. Скажем, что Z *подчеркнуто* в L' , если $Z \subset Z_1 \subset L$

и Z_1 точно подчеркнуто в L' . Скажем, что Z *содержит подчеркивание* в L' , если соответствующий ему подтерм $Z' \subset L'$ не принадлежит множеству Λ .

В предыдущем примере вхождение $KS \subset L$ точно подчеркнуто в L' , первое вхождение K в L подчеркнуто в L' и вхождение $SKK \subset L$ содержит подчеркивание в L' .

17.3.17. ЛЕММА. Пусть $L \in \Lambda, L', L'' \in \underline{\Lambda}$ и $L \cong L' \cong L''$.

(i) $L' \triangleleft L''$ и $L'' \triangleleft L' \Rightarrow L' \equiv L''$.

(ii) Если для любого вхождения Z подтерма в L' соответствующее вхождение Z в терм L подчеркнуто в L'' , то $L' \triangleleft L''$.

Доказательство очевидно. $\square$

17.3.18. ЛЕММА. (i) Пусть $L \in \Lambda, L' \in \underline{\Lambda}$ и $L \cong L'$. Предположим, что

(1) если Z — вхождение подтерма в L , точно подчеркнутое в L' , то Z — Ω -терм;

(2) если Z — вхождение в $\underline{L}$ подтерма, являющегося универсальным генератором, то Z *содержит подчеркивание* в L' .

Тогда любое вхождение Ξ в L , являющееся термом, похожем на переменную, подчеркнуто в L' .

(ii). Пусть $M \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{UG}$, а терм Ξ похож на переменную. Допустим, что $M\Xi \rightarrow_{\beta\eta} L'$ и $L \equiv \mid L' \mid$. Тогда $U \subset L$ точно подчеркнуто в L' т. и т. т., когда U — максимальный (по отношению $\subset$) подтерм терма L , похожий на переменную.

Доказательство. (i) Имеем $\Xi \equiv \Omega U$, где U — наследственно не- Ω -универсальный генератор. Следовательно, имеется не- Ω -вхождение Z подтерма в U , причем U является универсальным генератором (см. рис. 17.1).

$$L \equiv \dots \left(\overbrace{\Omega(\dots Z \dots)}^U \right) \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{Z_2}$$

Рис. 17.1

В силу (2) Z имеет линии в L' . Не может быть, чтобы некоторое вхождение Z_1 подтерма, содержащееся в Z , оказалось точно подчеркнутым в L' , так как в силу (1) Z_1 был бы тогда Ω -термом, хотя Z есть не- Ω -вхождение в L . Поэтому Z подчеркнуто в L' , т. е. имеется вхождение подтерма Z_2 , которое точно подчеркнуто в L' и таково, что $Z \subset Z_2 \subset L$. Мы утверждаем, что $\Xi \equiv \Omega U \subset Z_2$ (см. рис. 17.1).

Во-первых, из (1) следует, что Z_2 есть Ω -терм. Из того, что Z есть не- Ω -вхождение в U , получаем, что Z_2 не содержится в U . Поэтому U — собственный подтерм терма Z_2 , так как любые два подтерма либо дизъюнкты, либо сравнимы по отношению $\subset$. Значит, действительно $\Omega U \subset Z_2$.

Из только что доказанного утверждения следует, что Ξ подчеркнут в L' .

(ii) Мы проверим, что для L и L' выполнены условия (1) и (2) п. (i).

(1) Если $Z \subset L$ точно подчеркнуто в L' , то $Z \subset L'$, откуда в силу леммы 17.3.8(ii) получаем $\Xi \rightarrow_{\beta\eta} Z$, и, значит, Z есть Ω -терм.

(2) Если $Z \subset L$ есть универсальный генератор, то $Z \notin \mathcal{F}_{\beta\eta}(M)$ (иначе M был бы $\beta\eta$ -универсальным генератором). Пусть Z соответствует вхождению $Z' \subset L'$. Если $Z' \in \Lambda$, то $Z \equiv Z'$ и по лемме 17.3.13 $Z' \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M)$, что дает противоречие. Поэтому $Z' \in \Lambda - \Lambda$, т. е. Z имеет линии в L' .

Из (i) следует, что

$U \subset L$ точно подчеркнуто в L' т. и т. т., когда

$U \subset L$ максимально подчеркнуто в L' т. и т. т., когда

$U \subset L$ — максимальный подтерм, похожий на переменную. $\square$

17.3.19. Предложение. Пусть $M, N \in \Lambda$ таковы, что $M, N \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$. Пусть Ξ — терм, похожий на переменную. Тогда для некоторой новой переменной x

$$M\Xi =_{\beta\eta} N\Xi \Rightarrow Mx =_{\beta\eta} Nx.$$

Доказательство. Допустим, что $M\Xi =_{\beta\eta} N\Xi$. Тогда в силу свойства CR для $\beta\eta$ имеем для некоторого $L \in \Lambda$

$$M\Xi \rightarrow_{\beta\eta} L, \quad N\Xi \rightarrow_{\beta\eta} L.$$

Отсюда следует по леммам 17.3.9 и 17.3.15(i), что найдутся $L', L'' \in \Lambda$, такие, что $L \cong L' \cong L''$ и

$$M\Xi \rightarrow_{\beta\eta} L', \quad N\Xi \rightarrow_{\beta\eta} L'' \quad (\text{см. рис. 17.2}).$$

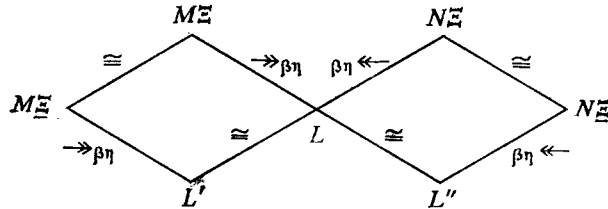


Рис. 17.2

По лемме 17.3.18(ii) получаем, что для вхождения $Z \subset L$ Z точно подчеркнуто в L' т. и т. т., когда

Z — максимальный подтерм терма L , похожий на переменную, т. и т. т., когда

Z точно подчеркнут в L'' .

Отсюда следует, что $L' \equiv L''$.

Пусть x — новая переменная. Тогда по лемме 17.3.11

$$Mx \equiv \varphi_x(M\Xi) \rightarrow_{\beta\eta} \varphi_x(L'), \quad Nx \equiv \varphi_x(N\Xi) \rightarrow_{\beta\eta} \varphi_x(L'').$$

Поэтому $Mx =_{\beta\eta} Nx$. $\square$

17.3.20. Следствие. Пусть $M, N \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$. Тогда ω -правило имеет место для M, N в $\lambda\eta$, т. е.

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (MZ =_{\beta\eta} NZ) \Rightarrow M =_{\beta\eta} N.$$

Доказательство получается непосредственно из предыдущего предложения, существования термов, похожих на переменные, и экстенциональности. $\square$

Плоткин указал на то, что ω -правило верно для M, N в $\lambda\eta$ уже при условии, что один из этих термов не является $\beta\eta$ -универсальным генератором. Это доказано в 17.3.21—17.3.24.

17.3.21. Лемма. Пусть $M \in \Lambda$ и переменная x произвольна. Тогда

- (i) $M\Omega \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \Rightarrow Mx \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$,
- (ii) $Mx \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \Rightarrow M \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$,
- (iii) $M \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \Rightarrow M[x := \Omega] \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$.

Доказательство. Пусть терм $U \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \cap \Lambda^0$ таков, что $\Omega \not\subset U$. Такой терм имеется ввиду леммы 17.3.15 или конструкции из предложения 8.2.8.

(i) Если $M\Omega \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$, то по определению $M\Omega \rightarrow_{\beta\eta} C[U]$. Обозначим последний терм через L . Тогда в силу леммы 17.3.9

$$(1) \quad M\Omega \rightarrow_{\beta\eta} L' \cong L.$$

По лемме 17.3.8(ii) получаем, что

$$(2) \quad P \subset L' \Rightarrow \Omega \rightarrow_{\beta\eta} P \Rightarrow \Omega \equiv P.$$

С другой стороны, лемма 17.3.11 и (1) дают

$$Mx \rightarrow_{\beta\eta} \varphi_x(L').$$

Так как $\Omega \not\subset U$, из (2) следует, что вхождение U в L не содержит подчеркивания в L' , а потому $U \subset \varphi_x(L')$. Но тогда $U \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(Mx)$, следовательно, и сам терм $Mx \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$.

(ii) В силу посылки доказываемой импликации имеем

$$Mx \rightarrow_{\beta\eta} C[U] \equiv L.$$

По лемме 17.3.12 возможны два случая.

Случай 1. $L \equiv L'x$ и $M \rightarrow_{\beta\eta} L'$. Тогда $U \subset L' \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M)$ и, следовательно, $M \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$.

Случай 2. $M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.L$. Тогда также $U \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M)$ и $M \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$.

(iii) В силу посылки доказываемой импликации $M \rightarrow_{\beta} C \rightarrow_{\beta\eta}[U] \equiv L$. Следовательно, $M[x := \Omega] \rightarrow_{\beta\eta} L[x := \Omega]$. Из $x \notin FV(U)$ получаем, что $U \in \mathcal{F}_{\beta\eta}(M[x := \Omega])$, значит, рассматриваемый терм является $\beta\eta$ -универсальным генератором. $\square$

17.3.22. Лемма. (i) $M\Omega \rightarrow_{\beta\eta} L \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \Rightarrow \exists L' (Mx \rightarrow_{\beta\eta} L' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G})$.

(ii) $Mx \rightarrow_{\beta\eta} L' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \Rightarrow \exists M' (M \rightarrow_{\beta\eta} M' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G})$.

Доказательство. (i) $M\Omega \rightarrow_{\beta\eta} L \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G} \Rightarrow$

$\Rightarrow M\Omega \rightarrow_{\beta\eta} L_1 \cong L$ (по лемме 17.3.9) $\Rightarrow$

$\Rightarrow Mx \rightarrow_{\beta\eta} \Phi_x(L_1) \equiv L'$ (по лемме 17.3.11).

Теперь $L \equiv \Phi_x(L_1)[x := \Omega]$. Отсюда следует в силу п. (iii) предыдущей леммы, что $L' \equiv \Phi_x(L_1) \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$.

(ii) Допустим, что $Mx \rightarrow_{\beta\eta} L' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$. По лемме 17.3.12 возможны два случая.

Случай 1. $L' \equiv M'x$ и $M \rightarrow_{\beta\eta} M'$. Тогда $M' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$ (так как в противном случае $M'x \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$), и все в порядке.

Случай 2. $M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.L'$. Тогда $\lambda x.L' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$ (так как в противном случае $L' \in \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$), и опять все в порядке. $\square$

17.3.23. Лемма. Если $M\Omega =_{\beta\eta} N\Omega$ и $M \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$, то

$$\exists N' (N \rightarrow_{\beta\eta} N' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}).$$

Доказательство. В силу условия и свойства CR для $\beta\eta$ имеем для некоторого терма L

$$M\Omega \rightarrow_{\beta\eta} L \leftarrow_{\beta\eta} N\Omega.$$

По лемме 17.3.21(i), (ii) имеем $M\Omega \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$, откуда $L \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$. Но тогда предыдущая лемма применима к соотношению $N\Omega \rightarrow_{\beta\eta} L \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$.

17.3.24. Теорема. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$. Тогда ω -правило для M имеет место в $\lambda\eta$, т. е.

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (MZ =_{\beta\eta} NZ) \Rightarrow M =_{\beta\eta} N.$$

Доказательство. По условию $M\Omega =_{\beta\eta} N\Omega$, откуда по предыдущей лемме получается $\exists N' (N \rightarrow_{\beta\eta} N' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G})$. Но тогда $M, N' \notin \beta\eta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$ и $(\forall Z \in \Lambda^0) (MZ =_{\beta\eta} N'Z)$. Поэтому в силу следствия 17.3.20 получаем $M =_{\beta\eta} N' =_{\beta\eta} N$. $\square$

Аналогичным образом можно доказать, что в теории λ имеет место правило термов

$(\forall Z \in \Lambda^0) (MZ = NZ \Rightarrow Mx = Nx)$ (x — новая переменная), если $M \notin \beta\text{-}\mathcal{U}\mathcal{G}$; см. упр. 17.5.11.

II. Некорректность ω -правила для $\lambda\eta$ в общем случае.

В этом подпункте будет изложен контрпример к ω -правилу в $\lambda\eta$, принадлежащий Плоткину [1974]. Будут построены два замкнутых терма Ξ, Ψ , такие, что

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\Xi Z =_{\beta\eta} \Psi Z), \text{ но } \Xi \neq_{\beta\eta} \Psi.$$

Из результатов подпункта I следует, что Ξ и Ψ должны быть сложными.

17.3.25. Лемма. Существуют $F, G \in \Lambda$, такие что

$$(i) Fxyz = Fx[Fx^+(Gx^+)zy](Ex),$$

$$(ii) Gx = Fx^+(Gx^+)(Ex^+)(Gx),$$

где $x^+ \equiv [F, x]$, т. е. x^+ непосредственно следует за x .

Доказательство. Пусть

$$A \equiv \lambda[ghyz.fx[fx^+(gx^+)zy](Ex),$$

$$B \equiv \lambda[ghx.fx^+(gx^+)(Ex^+)(gx).$$

По теореме о двойной неподвижной точке 6.5.1 имеются термы F, G , такие что $AFG = F, BFG = G$. Можно считать, что $F, G \in \Lambda^0$, откуда и получается нужный результат. $\square$

17.3.26. Определение (термы Плоткина). Пусть $F, G \in \Lambda^0$ — термы, построенные в доказательстве предыдущей леммы. Положим

$$\Xi \equiv F \circ^1 (G \circ^1), \quad \Psi \equiv \lambda x. \Xi 1.$$

17.3.27. Лемма. Введем обозначения $F_n \equiv F \circ^n 1$, $G_n \equiv G \circ^n 1$ и $E_n \equiv E \circ^n 1$. Тогда

$$\forall m \forall n (F_n G_n E_n =_{\beta} F_n G_n E_{n+m}).$$

Доказательство проводится индукцией по m . Случай $m = 0$ тривиален, поэтому считаем, что $m > 0$. Тогда

$$F_n G_n E_n = F_n [F_{n+1} G_{n+1} E_{n+1} G_n] E_n \text{ (по лемме 17.3.25 (ii))} =$$

$$= F_n [F_{n+1} G_{n+1} E_{n+1+m-1} G_n] E_n \text{ (по предположению индукции)} =$$

$$= F_n G_n E_{n+m}$$

по лемме 17.3.25(i). $\square$

17.3.28. Следствие $(\forall Z \in \Lambda^0) (\Xi Z = \Psi Z)$.

Доказательство. По лемме

$$\forall m (\Xi(E \circ^1) = \Xi(E \circ^m 1)).$$

Так как E перечисляет множество Λ^0 , имеем

$$(\forall Z, Z' \in \Lambda^0) (\Xi Z = \Xi Z' (= \Xi(E \circ^1))),$$

а потому

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\exists Z = \exists I = \Psi Z). \quad \square$$

17.3.29. ЛЕММА. (i) Для любой переменной $x \in_{\beta\eta} \Xi x$, т. е.

$$\Xi x \rightarrow_{\beta\eta} M \Rightarrow x \in FV(M).$$

(ii) $\Xi \neq_{\beta\eta} \Psi$.

Доказательство. (i) Попытавшись разобрать несколько случаев, читатель убедится, что все в порядке. Точное доказательство с использованием теоремы стандартизации составляет содержание упражнения 17.5.10.

(ii) Если $\Xi =_{\beta\eta} \Psi$, то $\Xi x = \Psi x = \exists I$, и в силу CR для $\beta\eta$ имеем

$$\Xi x \rightarrow_{\beta\eta} M \leftarrow_{\beta\eta} \exists I.$$

Но тогда $x \notin FV(M)$ в противоречие с (i). $\square$

17.3.30. ТЕОРЕМА. (i) $\lambda\eta \not\vdash \omega$.

(ii) $\lambda \not\vdash tr$.

Доказательство. (i) верно в силу следствия 17.3.28 и леммы 17.3.29(ii).

(ii) доказывается аналогично — см. упр. 17.5.11. $\square$

Из соотношений $\lambda\eta \not\vdash \omega$ и $\lambda \not\vdash tr$ следует, что модели $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$, $\mathfrak{M}^0(\lambda)$ не являются слабо экстенциональными λ -алгебрами, см. § 20.1.

17.4. ω -правило и теория $\mathcal{H}\eta$

В этом пункте сначала доказывается, что в $\mathcal{H}\eta$ ω -правило имеет место для M, N , если хотя бы один из этих термов находится в $\beta\eta\Omega$ -н. ф. Затем приводятся контрпримеры к ω -правилу в общем случае. Они гораздо более естественны, чем для $\lambda\eta$. Наконец, рассматриваются некоторые свойства теории $\mathcal{H}\omega$. Будет доказано, что для некоторого терма $\Pi \in \Lambda^0$ и для любых замкнутых термов F, G

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\mathcal{H}\omega \vdash F \ulcorner n \urcorner = G \ulcorner n \urcorner \Leftrightarrow \mathcal{H}\omega \vdash \Pi F = \Pi G).$$

Опираясь на этот факт и на некоторое «представление» чисел $\alpha \in \text{Seq}$, мы высказываем гипотезу, что $\mathcal{H}\omega$ — полное Π -множество.

17.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть M, N имеют $\beta\eta\Omega$ -н. ф. Тогда в $\mathcal{H}\eta$ для M и N имеет место ω -правило.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что M и N уже находятся в $\beta\eta\Omega$ -н. ф. Тогда

(1) $BT(M), BT(N)$ конечны и находятся в η -н. ф.

Допустим, что

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{H}\eta \vdash MZ = NZ).$$

Тогда по теореме 17.2.8 $M = N \in \mathcal{H}\omega \subseteq \mathcal{H}^*$, откуда по теореме 16.2.7 получаем

$$(2) \quad M \approx_{\eta} N.$$

Из (1) и (2) следует, что $BT(M) = BT(N)$, откуда $\mathcal{H}\eta \vdash M = N$.

17.4.2. ЛЕММА. Допустим, что

$$(1) (\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{H}\eta \vdash MZ = NZ),$$

$$(2) BT(M) \text{ конечно.}$$

Тогда $BT(N)$ конечно.

Доказательство — см. упр. 17.5.14. $\square$

17.4.3. СЛЕДСТВИЕ. В $\mathcal{H}\eta$ ω -правило имеет место для M, N , если M имеет $\beta\eta\Omega$ -н. ф.

Доказательство получается из предыдущей леммы и предложения 17.4.1 с использованием эквивалентности

$$M \text{ имеет } \beta\eta\Omega\text{-н. ф.} \Leftrightarrow BT(M) \text{ конечно.} \quad \square$$

Результаты о правиле термов в $\mathcal{H}$ приведены в упр. 17.5.15.

Теперь будут изложены два примера из статьи Барендрегта и др. [1978], показывающие, что $\mathcal{H}\eta \not\vdash \omega$. Как и в случае термов Плоткина, первый пример асимметричен. Второй пример симметричен; идея, приводящая к использованной в нем конструкции, применяется для представления в $\mathcal{H}\omega$ квантора всеобщности по $\mathbb{N}$.

$$17.4.4. \text{ ЛЕММА. } (\forall Z \in \Lambda^0) (\exists n \in \mathbb{N}) (\mathcal{H} \vdash Z\Omega^{\sim n} = \Omega).$$

Доказательство. Если Z неразрешим, то $\mathcal{H} \vdash Z = \Omega$. В противном случае Z имеет г. н. ф. $\lambda x_1 \dots x_n. x_i M_1 \dots M_m$. Тогда $\mathcal{H} \vdash Z\Omega^{\sim n} = \Omega$. $\square$

17.4.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть терм $A \in \Lambda^0$ таков, что

$$Ax \rightarrow \langle A(x\Omega) \rangle$$

(можно, например, взять $A \equiv \omega\omega$, где $\omega \equiv \lambda axz.z(aa(x\Omega))$). Тогда

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{H} \vdash AZ = A\Omega), \text{ но } \mathcal{H}\eta \not\vdash Ax = A\Omega.$$

Доказательство. Пусть $Z \in \Lambda^0$. Тогда

$$\begin{aligned} AZ &\rightarrow \langle A(Z\Omega) \rangle \rightarrow \langle \langle A(Z\Omega^{\sim 2}) \rangle \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle \dots \langle A(Z\Omega^{\sim n}) \rangle \dots \rangle = \\ &=_{\mathcal{H}} \langle \dots \langle A\Omega \rangle \dots \rangle \text{ (по лемме 17.4.4).} \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$A\Omega =_{\mathcal{H}} \langle A\Omega \rangle =_{\mathcal{H}} \dots =_{\mathcal{H}} \langle \dots \langle A\Omega \rangle \dots \rangle.$$

Если бы имело место $\mathcal{H}\eta \vdash Ax = A\Omega$, то в силу теоремы CR для $\beta\eta\Omega$ мы получили бы

$$Ax \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} M \beta\eta\Omega \leftarrow A\Omega$$

для некоторого M . Так как $A\Omega \in \Lambda^0$, то и $M \in \Lambda^0$. Однако в упр. 15.4.2(i) показано, что

$$Ax \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} M \Rightarrow x \in \text{FV}(M),$$

и, значит, мы получили противоречие. $\square$

17.4.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Существует терм $O \in \Lambda^0$, такой, что

$$(1) \quad Ox \uparrow n \twoheadrightarrow \lambda z. z\Omega \sim^n (Ox \uparrow n + 1 \uparrow z).$$

(ii) Если терм O удовлетворяет условию (1), то для любых x, y

$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{H} \vdash Ox \uparrow 0 \uparrow Z = Oy \uparrow 0 \uparrow Z).$$

(iii) Терм O , удовлетворяющий условию (1), можно выбрать таким образом, что для любых различных x, y выполнено

$$\mathcal{H} \not\vdash Ox \uparrow 0 \uparrow = Oy \uparrow 0 \uparrow.$$

Доказательство. (i) В силу предложения 6.1.6 существуют термы $F, O \in \Lambda^0$, такие, что

$$Fzn \twoheadrightarrow \text{если } \mathbf{Zero} \ n, \text{ то } z, \text{ иначе } Fzn^- \Omega,$$

$$Oxn \twoheadrightarrow \lambda z. Fzn (Oxn^+ z),$$

где $n^- \equiv nF$, предшественник числа n , а $n^+ \equiv [F, n]$ непосредственно следует за n . Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$Fz \uparrow n \uparrow \twoheadrightarrow z\Omega \sim^n,$$

откуда следует (1).

(ii) Пусть $Z \in \Lambda^0$. Тогда имеем в $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} Ox \uparrow 0 \uparrow Z &= Z (Ox \uparrow 1 \uparrow Z) = \\ &= Z (Z\Omega (Ox \uparrow 2 \uparrow Z)) = \\ &\quad \dots \\ &= Z (Z\Omega (\dots (Z\Omega \sim^n (Ox \uparrow n + 1 \uparrow Z)) \dots)) = \\ &= Z (Z\Omega (\dots (\Omega) \dots)) \quad (\text{по лемме 17.4.4}) = \\ &= Z (Z\Omega (\dots (Z\Omega \sim^{n-3} (Z\Omega \sim^{n-1})) \dots)) \end{aligned}$$

и аналогично для $Oy \uparrow 0 \uparrow Z$ (если $Z = \Omega$, $Z\Omega = \Omega$ или $Z\Omega \sim^2 = \Omega$, то вычисления несколько проще).

(iii) В упр. 15.4.2(ii) показано, что при естественном выборе терма O

$$(2) \quad Ox \uparrow 0 \uparrow \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} M \Rightarrow x \in \text{FV}(M).$$

Допустим теперь, что $Ox \uparrow 0 \uparrow = Oy \uparrow 0 \uparrow$. По теореме Чёрча — Россера для $\beta\eta\Omega$

$$Ox \uparrow 0 \uparrow \twoheadrightarrow_{\beta\eta\Omega} M \beta\eta\Omega \leftarrow Oy \uparrow 0 \uparrow$$

в противоречие с (2). $\square$

17.4.7. ТЕОРЕМА. (i) $\mathcal{H}\eta \not\vdash \omega$.

(ii) $\mathcal{H} \not\vdash tr$.

Доказательство. (i) сразу получается из предложения 17.4.5 или 17.4.6.

(ii) устанавливается аналогично. $\square$

Используя идею, приведшую к конструкции из предложения 17.4.6, можно построить нечто вроде квантора всеобщности для осмысленных ω -теорий. Используя его, можно дать представление произвольных Π_1^1 -множеств в таких теориях. Метод снова взят из статьи Барендрегта и др. [1978].

17.4.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть терм $A \in \Lambda^0$ таков, что

$$Af \uparrow n \uparrow \twoheadrightarrow \lambda y. [f \uparrow n \uparrow, y\Omega \sim^n (Af \uparrow n + 1 \uparrow y)].$$

Определим терм $\Pi \in \Lambda^0$ соотношением $\Pi \equiv \lambda f. Af \uparrow 0 \uparrow$.

17.4.9. ТЕОРЕМА. Для любой осмысленной λ -теории $\mathcal{T}$ и для произвольных $F, G \in \Lambda^0$

(i) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\mathcal{T} \vdash F \uparrow n \uparrow = G \uparrow n \uparrow) \Rightarrow \mathcal{T} \vdash \Pi F = \Pi G$,

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\mathcal{T} \vdash F \uparrow n \uparrow = G \uparrow n \uparrow) \Leftrightarrow \mathcal{T} \vdash \Pi F = \Pi G$.

Доказательство. (i) Предположим, что $\mathcal{T} \vdash F \uparrow n \uparrow = G \uparrow n \uparrow$ для всех n . Утверждение:

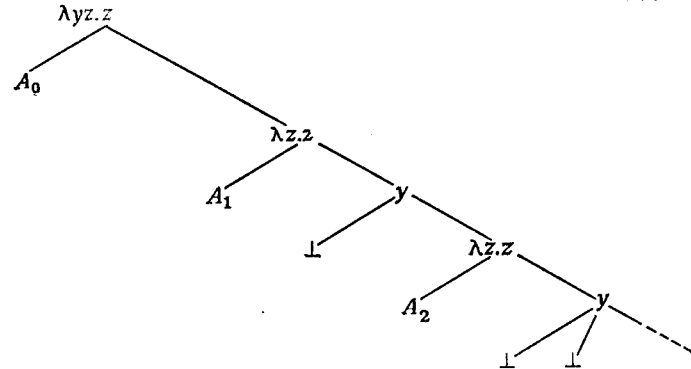
$$(\forall Z \in \Lambda^0) (\mathcal{T} \vdash \Pi F Z = \Pi G Z).$$

Действительно, для данного $Z \in \Lambda^0$ по лемме 17.4.4 $\mathcal{H} \vdash Z\Omega \sim^n = \Omega$ для некоторого n . Возьмем наименьшее такое n . Тогда в $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \Pi F Z &= AF \uparrow 0 \uparrow Z = \\ &= [F \uparrow 0 \uparrow, Z [F \uparrow 1 \uparrow, Z\Omega \dots [F \uparrow n \uparrow, \Omega] \dots]] = \\ &= [G \uparrow 0 \uparrow, Z [G \uparrow 1 \uparrow, Z\Omega \dots [G \uparrow n \uparrow, \Omega] \dots]] = \\ &= AG \uparrow 0 \uparrow Z = \Pi G Z. \end{aligned}$$

Поэтому по ω -правилу получаем $\mathcal{T}\omega \vdash PF = PG$.

(ii) $(\Leftarrow)$ доказывается с помощью техники выворачивания по Бёму. Заметим, что PF и PG имеют дерево Бёма вида



где A_n есть соответственно ВТ $(F \ulcorner n \urcorner)$ или ВТ $(G \ulcorner n \urcorner)$. Из предложения 10.3.7 и леммы 10.3.4 следует, что имеются контексты $C_n[\]$, такие, что $C_n[PF] = F \ulcorner n \urcorner$, и аналогично для PG .

Поэтому для всех n имеем

$$\mathcal{T}\omega \vdash F \ulcorner n \urcorner = C_n[PF] = C_n[PG] = G \ulcorner n \urcorner. \quad \square$$

Для того чтобы представить Π_1^1 -предикаты в $\mathcal{H}\omega$, мы построим сначала терм, который «кодирует» бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Для простоты предположим, что наша кодировка конечных последовательностей $\langle n_0, \dots, n_k \rangle$ такова, что $\text{Seq} = \mathbb{N}$. Пусть терм $\ulcorner \cdot \urcorner \in \Lambda^0$ λ -определяет операцию $*$ на кодах последовательностей, т. е. $\ulcorner s \urcorner \ulcorner s' \urcorner = \ulcorner s * s' \urcorner$. Будем писать $M * N$ вместо $\ulcorner MN \urcorner$. Для функций $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ будем обозначать код последовательности $\langle f(0), \dots, f(n-1) \rangle$ через $\bar{f}(n)$. В частности, $\bar{f}(0) = \langle \rangle$ есть код пустой последовательности.

17.4.10. Лемма. Существует терм $B \in \Lambda^0$, такой, что

$$B \ulcorner s \urcorner \Rightarrow [B \ulcorner s * 0 \urcorner, B \ulcorner s * 1 \urcorner, \dots].$$

Доказательство. Последовательность $b \ulcorner s * 0 \urcorner, b \ulcorner s * 1 \urcorner, \dots$ равномерна (через терм $\lambda n. b (\ulcorner s \urcorner * n)$). Следовательно, можно положить

$$B \equiv \Theta(\lambda b. [b \ulcorner s * 0 \urcorner, b \ulcorner s * 1 \urcorner, \dots]). \quad \square$$

Таким образом, терм $B \ulcorner \cdot \urcorner$ представляет множество Seq всех кодов конечных последовательностей: если обозначить $B \ulcorner n_1, \dots, n_k \urcorner$ через $Bn_1 \dots n_k$, то

$$\begin{aligned} B \ulcorner \cdot \urcorner &= \langle B0, B1, \dots \rangle = \\ &= \langle \langle B00, B01, \dots \rangle \langle B10, B11, \dots \rangle, \dots \rangle = \dots, \end{aligned}$$

Пусть $P(n)$ есть Π_1^1 -предикат. Тогда

$$(1) \quad P(n) \Leftrightarrow \forall \bar{f} \exists m R(\bar{f}(m), n)$$

для некоторого рекурсивного предиката R . Число $s \in \text{Seq}$ называется n -обеспеченным, если $(\exists s' < s) R(s', n)$; в противном случае оно n -необеспечено. В этой терминологии $P(n)$ имеет место т. и т. т., когда множество n -обеспеченных последовательностей фундировано (т. е. невозможно $s_0 < s_1 < s_2 < \dots$ ни для какой бесконечной последовательности n -обеспеченных чисел $s_i \in \text{Seq}$).

Теперь мы модифицируем конструкцию из леммы 17.4.10, чтобы закодировать множество всех n -необеспеченных кодов конечных последовательностей.

17.4.11. Лемма. Существует терм $\square$, такой что в $\mathcal{H}$

$$\square \ulcorner n \urcorner \ulcorner s \urcorner = \begin{cases} 1, & \text{если } s \text{ } n\text{-необеспечено,} \\ \Omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Понятие « s n -необеспечено» является рекурсивным и тем более рекурсивно перечислимым. Поэтому применима лемма 16.1.10. $\square$

Обозначение. $\square^n$ обозначает $\square \ulcorner n \urcorner$. Аналогичные обозначения применяются для других термов, построенных из $\square$.

17.4.12. Лемма. Имеется терм $B \in \Lambda^0$, такой, что

$$B^n \ulcorner s \urcorner \Rightarrow \square^n \ulcorner s \urcorner [B^n \ulcorner s * 0 \urcorner, B^n \ulcorner s * 1 \urcorner, \dots].$$

Доказательство такое же, как в лемме 17.4.10. $\square$

Таким образом, терм $B^n \ulcorner \cdot \urcorner$ представляет в $\mathcal{H}$ n -необеспеченные коды конечных последовательностей. Например,

$$\begin{aligned} B^n \ulcorner \cdot \urcorner &= [B^n 0, B^n 1, \dots] = \\ &= [[B^n 00, \Omega, B^n 02, \dots], [\Omega, B^n 11, \dots], \dots] = \dots, \end{aligned}$$

если $\langle 0, 1 \rangle$ и $\langle 1, 0 \rangle$ n -обеспечены.

17.4.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для данного Π_1^1 -предиката $P(n)$, удовлетворяющего приведенному выше соотношению (1), и соответствующего терма $\square$ можно построить терм $B \in \Lambda^0$, такой что

$$Bixs \Rightarrow \square xs \Pi (\lambda a. Bix(s * a)).$$

Положим $B_i^n \equiv B \ulcorner i \urcorner \ulcorner n \urcorner$. Тогда

$$(2) \quad B_i^n s \Rightarrow \square^n s \Pi (\lambda a. B_i^n(s * a)).$$

17.4.14. ТЕОРЕМА. Пусть $P(n)$ есть Π_1^1 -предикат, удовлетворяющий (1), а $B \in \Lambda^0$ — терм, удовлетворяющий (2). Тогда

$$P(n) \Rightarrow \mathcal{H}\omega \vdash B^n \ulcorner \cdot \urcorner = B_i^n \ulcorner \cdot \urcorner.$$

17.5.9. (i) Пусть Ξ — терм Плоткина, построенный в определении 17.3.26. Найти общий редукт термов $\Xi(E\Gamma 0\Gamma)$ и $\Xi(E\Gamma 3\Gamma)$.

(ii) Рассмотрим аппликативную систему термов с константами $\{F_n, G_n, E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и правилами редукции

$$F_n MN \rightarrow F_n [F_{n+1} G_{n+1} NM] E_n,$$

$$G_n \rightarrow F_{n+1} G_{n+1} E_{n+1} G_n.$$

Построить в этой системе общий редукт термов $F_0 G_0 E_0$ и $F_0 G_0 E_9$.

17.5.10 (Плоткин [1974]). Пусть F, G, Ξ взяты из определения 17.3.26. Цель этого упражнения — доказать лемму 17.3.29(i), т. е. утверждение

$$(+)\quad x \in_{\beta\eta} \Xi x.$$

(i) Пусть $y \in FV(N)$, $\sigma: FMNL \rightarrow_{\beta} Z$, $y \notin FV(Z)$. Показать, что имеется редукция $\sigma': N \rightarrow_{\beta} N'$, такая, что $y \notin FV(N')$ и $\|\sigma'\| < \|\sigma\|$.

(ii) Пусть $y \in FV(L)$, $\sigma: FMNL \rightarrow_{\beta} Z$, $y \notin FV(Z)$. Показать, что $y \notin_{\beta\eta} L$.

(iii) Показать, что имеет место $(\pm)$. [Использовать следствие 15.1.6.]

17.5.11. (i) Пусть M не является β -универсальным генератором и N произволен. Показать, что в λ имеет место правило термов для M и N (т. е. $[(\forall Z \in \Lambda^0)(MZ = NZ)] \Rightarrow Mx = Nx$).

(ii) Показать, что $\lambda \not\vdash tr$.

17.5.12. Пусть $\lambda\eta \vdash_k M = N$ означает, что равенство $M = N$ выводимо в $\lambda\eta$ с доказательством длины $\leq k$. Тогда ω -правило Париха для $\lambda\eta$ имеет вид

$$[(\exists k \in \mathbb{N})(\forall Z \in \Lambda^0)(\lambda\eta \vdash_k MZ = NZ)] \Rightarrow \lambda\eta \vdash M = N.$$

Показать, что оно выводимо для произвольных термов.

17.5.13 (Клоп). (i) Показать, что имеется $\beta\eta$ -универсальный генератор, не являющийся β -универсальным генератором. [Указание. Пусть U — какой-либо β -универсальный генератор. Пусть U^n получается из U заменой всех пассивных вхождений переменных z (т. е. вхождений не в подтерм вида (zN)) на $\lambda x.zx$. Тогда подойдет U^n .]

(ii) Пусть $M, N \notin \beta\text{-}\mathcal{US}$. Показать, что ω -правило в системе $\lambda\eta$ не имеет места в общем случае для M и N .

17.5.14. Показать, что если дерево $BT(M)$ конечно и $(\forall Z \in \Lambda^0)(\mathcal{H}\eta \vdash MZ = NZ)$, то и дерево $BT(N)$ конечно. [Указание. Использовать $Z \equiv P_n \equiv \lambda x_0 \dots x_n.(x_0, \dots, x_n)$ для больших n .]

17.5.15. (i) Показать, что если M, N являются $\beta\eta\Omega$ -н. ф., то в $\mathcal{H}$ имеет место правило термов для M и N .

(ii) Показать, что если заменить в (i) «находятся в $\beta\eta\Omega$ -н. ф.» на «имеют $\beta\eta\Omega$ -н. ф.», то результат перестанет быть верным.

17.5.16. Начертить $BT(B\Gamma\langle \rangle\Gamma)$ для терма B из леммы 17.4.10.

17.5.17 (классическая бар-индукция). Пусть $P(s)$ — предикат на числах из Seq . Предположим, что

- (1) $(\forall f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) P(\bar{f}(n))$,
- (2) $((\forall n \in \mathbb{N}) P(s * \langle n \rangle)) \Rightarrow P(s)$ для всех $s \in \text{Seq}$.

Показать, что имеет место $P(\langle \rangle)$.

17.5.18. Показать, что $\lambda I\eta \not\vdash \omega$.

17.5.19. Показать, что нет минимальной λ -теории $\supsetneq \lambda$.

17.5.20. Показать, что $\mathcal{H}\eta \not\vdash \omega$. [Указание. Применить лемму 16.4.4.]

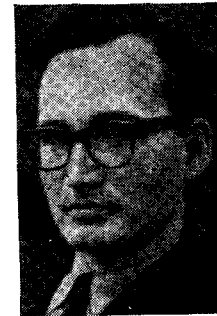
17.5.21. (i) Показать, что если $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ являются λ -теориями, то λ -теорией будет и $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$. (См. также упр. 5.6.13.)

(ii) В обозначениях диаграммы к теореме 17.4.16 показать, что

$$\lambda\eta \cap \mathcal{H} \neq \lambda, \quad \lambda\omega \cap \mathcal{H}\eta \neq \lambda\eta, \quad \mathcal{H}\eta \cap \mathcal{B} \neq \mathcal{H}, \quad \mathcal{B}\eta \cap \mathcal{H}\omega \neq \mathcal{H}\eta.$$

Часть V

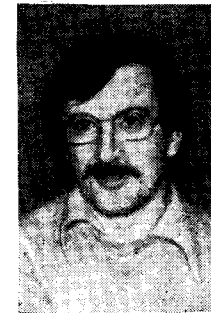
Модели



Скотт
(фотография
Б. Обрехта, 1969)



Хайланд
(фотография
миссис Д. ван Дален,
1975)



Плоткин
(фотография
автора, 1979)



Уордсворт
(1974)

Глава 18

Построение моделей

В главах 4 и 5 были введены модели из термов для непротиворечивых λ -теорий. Их построение начиналось с некоторого множества равенств, которые должны были выполняться в строящейся модели.

Для так называемых «математических» моделей ситуация обратная. Здесь мы начинаем со структуры, объекты которой можно интерпретировать и как функции, и как их аргументы. После этого можно изучать множество равенств, истинных в модели.

Первой математической моделью была D_∞ , построенная Скоттом в 1969 году как проективный предел полных решеток. Одна из причин, по которой эта конструкция достигла цели, состоит в том, что полные решетки с подходящими непрерывными отображениями образуют декартово замкнутую категорию, в которой функциональное пространство $[D \rightarrow D]$ имеет ту же мощность, что и D . А декартова замкнутость соответствует идее Шейнфинкеля, позволяющей сводить функции многих переменных к одноместным функциям.

Графическая модель $P\omega$, которую несколько легче построить, чем D_∞ , была введена независимо Плоткиным [1972] и Скоттом [1974].

Построение моделей D_∞ и $P\omega$ можно оформить и в декартово замкнутой категории **СРО** полных частично упорядоченных множеств. Мы так и поступим, потому что п.ч.у.м. полезны и для других моделей, например для $\mathfrak{B}$ и $\mathbb{T}^\omega$: см. Плоткин [1978] или Барендрегт и Лонго [1980], где описана последняя модель.

План этой главы таков. Общий метод построения λ -моделей, описанный в § 5.4, используется для построения графической модели $P\omega$ в § 18.1 и моделей D_∞ в § 18.2. Наконец, в § 18.3 вводится модель $\mathfrak{B}$, состоящая из бёмовских деревьев.

18.1. Графическая модель $P\omega$

В этом пункте будет показано, что множество всех подмножеств натурального ряда образует рефлексивное п.ч.у.м. Поэтому в силу § 5.4 эта система дает λ -модель,

18.1.1. **Определение.** $P\omega = \{x \mid x \subseteq \mathbb{N}\}$ — это множество-степень (т. е. множество всех подмножеств) множества $\mathbb{N}$, частично упорядоченное отношением включения $\subseteq$.

Графическая модель была независимо построена Плоткиным [1972] и Скоттом [1974]. Использованный ими метод основан на том, что непрерывную функцию на $P\omega$ можно закодировать множеством. Та же идея использована у Роджерса [1967], § 9.7, 9.8. Обсуждение см. у Скотта [1975], [1976].

$P\omega$ — алгебраическое п.ч.у.м. и всегда будет рассматриваться со своей топологией Скотта. Эта топология определяется конечной *положительной* информацией: ее базис образуют множества $O_e = \{x \mid e \subseteq x\}$ для конечных множеств e .

В противоположность этому, канторовская топология (топология произведения на $P\omega \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, где $\{0, 1\}$ имеет дискретную топологию) определяется конечной *положительной и отрицательной* информацией. Например, множество

$$\{x \in P\omega \mid 7 \in x, 13 \notin x\}$$

открыто в канторовской топологии, но не в топологии Скотта.

18.1.2. **Предложение.** Пусть $f: P\omega \rightarrow P\omega$.

(i) f непрерывна $\Rightarrow f$ монотонна;

(ii) f непрерывна $\Leftrightarrow f(x) = \bigcup \{f(e) \mid e \subseteq x, e \text{ конечно}\}$.

Доказательство. (i) получается из следствия 1.2.7.

(ii) получается из предложений 1.2.24 и 1.2.31. $\square$

18.1.3. **Определение.** (Кодирование упорядоченных пар и конечных множеств.)

(i) Для $n, m \in \mathbb{N}$ полагаем

$$(n, m) = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) + m.$$

(ii) Для $n \in \mathbb{N}$ следующим образом определим конечное множество e_n :

$$e_n = \{k_0, \dots, k_{m-1}\}, \text{ где } k_0 < k_1 < \dots < k_{m-1} \Leftrightarrow n = \sum_{i < m} 2^{k_i}.$$

Пример. Чтобы вычислить e_{13} , запишем 13 в двоичной системе счисления — получится 1101. Это дает $e_{13} = \{0, 2, 3\}$. Чтобы вычислить n, m , такие, что $(n, m) = 13$, нужно понять, что таблица

14				
9	13			
5	8	12		
2	4	7	11	
0	1	3	6	10

соответствует кодированию (n, m) . Следовательно, $(1, 3) = 13$. Заметим, что $(0, 0) = 0$, $e_0 = \emptyset$ и $e_1 = \{0\}$.

18.1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Функция $\lambda n, m. (n, m)$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$.

(ii) Функция $\lambda n. e_n$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{N}$ на множество $\{x \in P\omega \mid x \text{ конечно}\}$.

Доказательство общеизвестно. $\square$

Построение модели $P\omega$ можно провести для произвольных взаимно однозначных кодировок (n, m) и e_n . Однако для получения нужной структуры $P\omega$ существенным оказывается специальный вид кодирования — см. упр. 19.4.7.

Так как (в силу предложения 18.2.2) непрерывное отображение $f: P\omega \rightarrow P\omega$ определяется своими значениями на конечных множествах, такую функцию f можно закодировать элементом множества $P\omega$. Это дает непрерывное отображение

$$\text{graph}: [P\omega \rightarrow P\omega] \rightarrow P\omega$$

с очевидным «обращением», и можно применить результат из § 5.4. Напомним, что $[P\omega \rightarrow P\omega]$ является алгебраическим п. ч. у. м. с поточечным включением и наделено соответствующей топологией Скотта.

18.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для $f \in [P\omega \rightarrow P\omega]$ положим

$$\text{graph}(f) = \{(n, m) \mid m \in f(e_n)\}.$$

(ii) Пусть $u \in P\omega$. Определим $\text{fun}(u) \in [P\omega \rightarrow P\omega]$, полагая

$$\text{fun}(u)(x) = \{m \mid \exists e_n \subseteq x ((n, m) \in u)\}.$$

18.1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Отображение $\text{graph}: [P\omega \rightarrow P\omega] \rightarrow P\omega$ непрерывно.

(ii) $(\forall u \in P\omega) (\text{fun}(u) \in [P\omega \rightarrow P\omega])$.

(iii) $\text{fun}: P\omega \rightarrow [P\omega \rightarrow P\omega]$ непрерывно.

(iv) $(\forall f \in [P\omega \rightarrow P\omega]) (\text{fun}(\text{graph}(f)) = f)$.

(v) $(\forall u \in P\omega) (\text{graph}(\text{fun}(u)) \supseteq u)$.

Доказательство. (i) Пусть $F \subseteq [P\omega \rightarrow P\omega]$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{graph}(\sqcup F) &= \{(n, m) \mid m \in (\sqcup F)(e_n)\} = \{(n, m) \mid m \in \bigcup_{f \in F} f(e_n)\} = \\ &= \bigcup_{f \in F} \{(n, m) \mid m \in f(e_n)\} = \bigcup_{f \in F} \text{graph}(f). \end{aligned}$$

Следовательно, отображение graph непрерывно в силу предложения 1.2.6.

(ii) Пусть $g = \text{fun}(u)$, и множество $X \subseteq P\omega$ направлено. Тогда

$$\begin{aligned} g(\bigcup X) &= \{m \mid (\exists e_n \subseteq \bigcup X) ((n, m) \in u)\} = \\ &= \bigcup_{x \in X} \{m \mid (\exists e_n \subseteq x) ((n, m) \in u)\} = \bigcup_{x \in X} g(x) \end{aligned}$$

(среднее равенство следует из направленности множества X) и применимо предложение 1.2.6.

(iii) Пусть $U \subseteq P\omega$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{fun}(\bigcup U)(x) &= \{m \mid \exists e_n \subseteq x ((n, m) \in \bigcup U)\} = \\ &= \bigcup_{u \in U} \{m \mid (\exists e_n \subseteq x) ((n, m) \in u)\} = \\ &= \bigcup_{u \in U} (\text{fun}(u)(x)) = \left(\bigcup_{u \in U} \text{fun}(u) \right)(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $(\bigcup U) = \bigcup_{u \in U} \text{fun}(u)$, и потому отображение fun непрерывно.

(iv) Пусть $f \in [P\omega \rightarrow P\omega]$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{fun}(\text{graph}(f))(x) &= \{m \mid (\exists e_n \subseteq x) ((n, m) \in \text{graph}(f))\} = \\ &= \{m \mid (\exists e_n \subseteq x) (m \in f(e_n))\} = \\ &= \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\} = f(x) \end{aligned}$$

в силу предложения 18.1.2(ii). Поэтому $\text{fun}(\text{graph}(f)) = f$.

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad \text{graph}(\text{fun}(u)) &= \{(n, m) \mid m \in \text{fun}(u)(e_n)\} = \\ &= \{(n, m) \mid (\exists e_k \subseteq e_n) ((k, m) \in u)\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $p \in u$, где $p = (n, m)$. Тогда $p \in \text{graph}(\text{fun}(u))$, так как $e_n \subseteq e_n$ и $(n, m) = p \in u$. Поэтому $u \subseteq \text{graph}(\text{fun}(u))$. $\square$

Из результатов § 5.4 теперь следует, что $P\omega$ можно считать λ -моделью. Чтобы выразить это более явно, введем следующие обозначения:

18.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для $x, y \in P\omega$ положим

$$x \cdot y = \text{fun}(x)(y) = \{m \mid (\exists e_n \subseteq y) ((n, m) \in x)\}.$$

(ii) Для $f \in [P\omega^{k+1} \rightarrow P\omega]$ положим

$$\lambda^G x. f(x, \vec{y}) = \text{graph}(\lambda x. f(x, \vec{y})) = \{(n, m) \mid m \in f(e_n, \vec{y})\}.$$

18.1.8. СЛЕДСТВИЕ. (i) $P\omega = (P\omega, \cdot)$ есть λ -модель.

(ii) Представимые функции на $P\omega$ — это в точности непрерывные функции.

(iii) Интерпретация λ -термов в $P\omega$ индуктивно определяется следующим образом. Пусть ρ — оценка в $P\omega$.

$$\llbracket x \rrbracket_{\rho}^{P\omega} = \rho(x),$$

$$\llbracket MN \rrbracket_{\rho}^{P\omega} = \llbracket M \rrbracket_{\rho}^{P\omega} \cdot \llbracket N \rrbracket_{\rho}^{P\omega} = \{m \mid (\exists e_n \subseteq \llbracket N \rrbracket_{\rho}^{P\omega}) ((n, m) \in \llbracket M \rrbracket_{\rho}^{P\omega})\},$$

$$\llbracket \lambda x.M \rrbracket_{\rho}^{P\omega} = \lambda^G a. \llbracket M \rrbracket_{\rho(x:=a)}^{P\omega} = \{(n, m) \mid m \in \llbracket M \rrbracket_{\rho(x:=e_n)}^{P\omega}\}.$$

Доказательство. В силу предложения 18.1.6 $F = \text{fun}$, $G = \text{graph}$ является ретракцией, доказывающей, что $P\omega$ — рефлексивное п.ч.у.м. Следовательно, применимы определение 5.4.2 и теорема 5.4.4.

Следуя соглашению 5.3.8, мы пишем, например, «в $P\omega$ имеем

$$xa = \{m \mid (\exists e_n \subseteq a) ((n, m) \in x)\},$$

$$\lambda x.xa = \{(n, m) \mid m \in e_n a\} = \{(n, m) \mid (\exists e_n \subseteq a) ((n', m) \in e_n)\}.$$

18.1.9. Предложение. Пусть $a, b \in P\omega$ и $A, B \in \mathcal{T}(P\omega)$. Тогда в $P\omega$

$$(i) \quad a \subseteq \lambda x.ax = \text{graph}(\text{fun}(a));$$

$$(ii) \quad a \subseteq a', \quad x \subseteq x' \Rightarrow ax \subseteq a'x';$$

$$(iii) \quad \forall x (A \subseteq B) \Leftrightarrow \lambda x.A \subseteq \lambda x.B.$$

Доказательство. (i) $\lambda x.ax = \text{graph}(\lambda x.ax) =$
 $= \text{graph}(\text{fun}(a)) \supseteq a$ (в силу предложения 18.1.6(v)).

(ii) Операция аппликации непрерывна и потому монотонна.

(iii) $(\Leftarrow)$ Допустим, что $\lambda x.A \subseteq \lambda x.B$. Тогда

$$A = (\lambda x.A)x \subseteq (\lambda x.B)x \quad (\text{в силу (ii)}) = B.$$

$(\Rightarrow)$ Допустим, что $\forall x (A \subseteq B)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda x.A &= \{(n, m) \mid m \in A[x := e_n]\} \subseteq \\ &\subseteq \{(n, m) \mid m \in B[x := e_n]\} = \lambda x.B. \quad \square \end{aligned}$$

Легко показать, что модель $P\omega$ не экстенциональна, так что в общем случае $a \neq \lambda x.ax$; см. упр. 18.4.1.

18.1.10. Следствие. Пусть $f \in [P\omega \rightarrow P\omega]$ и $a = \text{graph}(f)$. Тогда в $P\omega$ имеем $a = \lambda x.ax$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lambda x.ax &= \text{graph} \circ \text{fun} \circ \text{graph}(f) = \\ &= \text{graph}(f) \quad (\text{в силу предложения 18.1.6(iv)}) = a. \quad \square \end{aligned}$$

18.1.11. Следствие. Пусть $M, M' \in \Lambda$ и $C[\] \in \Lambda[\]$. Тогда $P\omega \models M \subseteq M' \Rightarrow P\omega \models C[M] \subseteq C[M']$.

Доказательство проводится индукцией по структуре контекста $C[\]$. $\square$

Приводимое ниже определение и следующие за ним леммы полезны для анализа строения модели $P\omega$. При первом чтении можно опустить оставшуюся часть этого пункта.

18.1.12. Определение. Для $a \in P\omega$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$(a)_n = \{m \in a \mid m \leq n\}.$$

Очевидно, что $a = \bigcup_n (a)_n$.

18.1.13. Лемма. Кодирование конечных множеств e_k и упорядоченных пар (n, m) таково, что

$$(i) \quad m \in e_k \Rightarrow m < k,$$

$$(ii) \quad m \leq (n, m); \quad n \leq (n, m),$$

$$(iii) \quad m = (n, m) \Leftrightarrow m = n = 0,$$

$$(iv) \quad n = (n, m) \Leftrightarrow m = 0 \wedge n \in \{0, 1\}.$$

Доказательство нетрудно. $\square$

18.1.14. Следствие (основные равенства для $P\omega$).

$$(i) \quad d = \bigcup_n (d)_n; \quad ((d)_n)_m = (d)_{\min(n, m)},$$

$$(ii) \quad \emptyset d = \lambda d.\emptyset = \emptyset = (\emptyset)_n,$$

$$(iii) \quad (d)_0 c = (d)_0 \emptyset = ((d)_0 \emptyset)_0 = (d \emptyset)_0 = (d)_0,$$

$$(d)_{n+1} c = (d)_{n+1} (c)_n = ((d)_{n+1} (c)_n)_n \subseteq (d(c))_n.$$

Доказательство нетрудно. $\square$

Лемма 18.1.13, а потому и ее следствие существенно зависят от кодирования конечных множеств и упорядоченных пар — ср. упр. 19.4.7.

18.1.15. Следствие. В $P\omega$ имеем $I \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $I = \emptyset$, то

$$d = Id = \emptyset d = \emptyset \quad \text{для всех } d \in P\omega. \quad \square$$

Так как модель $P\omega$ не экстенциональна, одно и то же отображение $f \in [P\omega \rightarrow P\omega]$ может представляться несколькими элементами. Будет показано, что имеется наименьший представляющий элемент. Это будет полезно для характеристики равенства в $P\omega$.

18.1.16. Определение. (i) Пусть $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in P\omega$. Положим

$$\vec{a} \subseteq \vec{b} \text{ т. и т. т., когда } a_i \subseteq b_i \text{ для } 1 \leq i \leq p.$$

(ii) Пусть $X \subseteq P\omega^p$. Тогда $\vec{a}$ называется *минимальным элементом* множества X , если $\vec{a} \in X$ и $(\forall \vec{b} \in X) [\vec{b} \leq \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}]$.

18.1.17. Лемма. Пусть $f \in [P\omega^p \rightarrow P\omega]$. Тогда существует минимальный элемент $a \in P\omega$, такой, что

$$(\forall \vec{x} \in P\omega^p) (a\vec{x} = f(\vec{x})).$$

Доказательство. Будем применять обозначения $\langle n_1 \rangle = n_1$ и $\langle n_1, n_2, \dots, n_{k+1} \rangle = (n_1, \langle n_2, \dots, n_{k+1} \rangle)$ для $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$. Положим

$$a = \{ \langle k_1, \dots, k_p, m \rangle \mid m \in f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \text{ и } \vec{e}_k \text{ — минимальная такая } p\text{-членная система} \}.$$

Тогда нетрудное вычисление показывает, что a минимально представляет f . $\square$

18.1.18. Обозначения. (i) Через $\lambda \vec{x}. f(\vec{x})$ обозначается элемент a , построенный в предыдущей лемме.

(ii) $P_n^- \equiv \lambda x_0 \dots x_{n+1}. x_{n+1} x_0 \dots x_n$, т. е. это — минимальный вариант терма P_n , используемого в технике выворачивания по Бёму.

18.1.19. Следствие. $P\omega \models P_n^- a_0 a_1 \dots a_{n+1} = a_{n+1} a_0 \dots a_n$. $\square$

18.1.20. Лемма. Пусть $A_0, \dots, A_p, A'_0, \dots, A'_p \in \mathcal{F}(P\omega)$. Тогда

$$P\omega \models \lambda x_0 \dots x_q. P_n^- A_0 \dots A_p \not\models P_n^- A'_0 \dots A'_p$$

для $q \geq 0, p, p' \leq n$.

Доказательство. Нетрудное вычисление показывает, что в обозначениях из доказательства леммы 18.1.17 для $p \leq n$

$$(1) \quad P_n^- x_0 \dots x_p = \{ \langle k_{p+1}, \dots, k_{n+1}, m \rangle \mid \exists s_0 \dots s_p [\vec{e}_s, \vec{e}_k \text{ — минимальная } (n+2)\text{-членная система, такая, что } e_{s_0} \leq x_0, \dots, e_{s_p} \leq x_p \text{ и } m \in e_{k_{n+1}} e_{s_0} \dots e_{s_p} e_{k_{p+1}} \dots e_{k_n}] \}.$$

Мы покажем теперь, что для $a_0, \dots, a_p \in P\omega, p \leq n$,

$$(2) \quad P_n^- a_0 \dots a_p \neq \emptyset.$$

Действительно, в силу (1) имеем $\langle 0, 0, \dots, 0, 1, 0 \rangle \in P_n^- a_0 \dots a_p$, так как $e_1 = \{0\}$ и $\forall x (\{0\} x = \{0\})$.

Далее, из $A \in \mathcal{F}(P\omega)$ следует

$$(3) \quad P\omega \models (\lambda x. A) \emptyset \neq \emptyset \Rightarrow \exists m_0 \forall k ((k, m_0) \in \lambda x. A).$$

Действительно, пусть $m_0 \in (\lambda x. A) \emptyset$. Тогда в силу монотонности

$$m_0 \in (\lambda x. A) e_k = A[x := e_k] \text{ для всех } k.$$

Так как $\lambda x. A = \{ (k, m) \mid m \in A[x := e_k] \}$, мы получаем $\forall k ((k, m_0) \in \lambda x. A)$.

Аналогичным образом мы показываем, что

$$(4) \quad P\omega \models (\lambda \vec{x}. A) \vec{\emptyset} \neq \emptyset \Rightarrow \exists m_0 \forall k ((k, m_0) \in \lambda \vec{x}. A),$$

где $\vec{x} = x_0, \dots, x_q, \vec{\emptyset} = \emptyset, \dots, \emptyset$. В силу (2) получаем, что для $p \leq n$

$$(\lambda \vec{x}. P_n^- A_0 \dots A_p) \vec{\emptyset} = P_n^- A_0^* \dots A_p^* \neq \emptyset,$$

откуда в силу (4)

$$(5) \quad \exists m_0 \forall k ((k, m_0) \in \lambda \vec{x}. P_n^- A_0 \dots A_p).$$

С другой стороны, из условия минимальности в (1) следует, что

$$(6) \quad (k, m) \in P_n^- A'_0 \dots A'_p \text{ и } e_k \not\subseteq e_{k'} \Rightarrow (k', m) \notin P_n^- A'_1 \dots A'_p.$$

Теперь доказываемое в лемме утверждение следует из (5) и (6). $\square$

18.2. Модель D_∞

Скотт ([1969] и [1972]) показал, что любая полная решетка D может быть вложена в полную решетку D_∞ , такую, что

$$(+)\quad D_\infty \cong [D_\infty \rightarrow D_\infty].$$

Более того, многие другие рекурсивные уравнения в областях, похожие на (+), можно решить аналогичным образом — см. упр. 18.4.19 и 18.4.26. Из результатов § 5.4 следует, что D_∞ — экстенциональная λ -модель.

Эту конструкцию можно провести также для п.ч.у.м. вместо полных решеток. В рамках этого подхода символы $D, D', \dots$ будут обозначать п.ч.у.м., наделенные топологией Скотта.

18.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара отображений (φ, ψ) называется *проекцией* D' на D , если

(i) $\varphi: D \rightarrow D', \psi: D' \rightarrow D$ непрерывны,

(ii) $\psi \circ \varphi = \text{id}_D (= \lambda x \in D. x)$,

(iii) $\varphi \circ \psi = \text{id}_{D'}$, т. е. $(\forall x \in D') (\varphi(\psi(x)) \equiv x)$.

Очевидно, что если (φ, ψ) — проекция D' на D , то D изоморфен ретракту D' с ретракцией $\varphi \circ \psi$. Тогда с точностью до изоморфизма $D \subseteq D'$,

18.2.2. ЛЕММА. Пусть (φ, ψ) — проекция D' на D . Тогда существует проекция (φ^*, ψ^*) множества $[D' \rightarrow D']$ на $[D \rightarrow D]$,

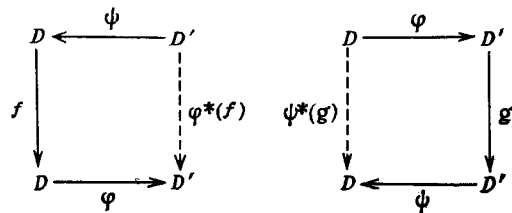


Рис. 18.1

определяемая следующим образом. Для $f \in [D \rightarrow D]$, $g \in [D' \rightarrow D']$ полагаем

$$\varphi^*(f) = \varphi \circ f \circ \psi, \quad \psi^*(g) = \psi \circ g \circ \varphi$$

(см. рис. 18.1).

Доказательство. Имеем

$$\varphi^*(f) = \lambda x' \in D'. \varphi(f(\psi(x))) = \lambda x' \in D'. \varphi(Ap(f, \psi(x))),$$

откуда непрерывность отображения φ^* следует в силу предложений 1.2.13 и 1.2.14. Аналогичным образом непрерывно ψ^* . Далее,

$$\psi^*(\varphi^*(f)) = \psi \circ \varphi \circ f \circ \psi \circ \varphi = f$$

и аналогично

$$\varphi^*(\psi^*(f)) \equiv f. \quad \square$$

Лемма 18.2.2 показывает, что в категории **СРО***, объектами которой являются п. ч. у. м., а морфизмами — проекции, операция F , определяемая соотношением

$$FD = [D \rightarrow D],$$

может рассматриваться как функтор — см. упр. 18.4.26.

Чтобы построить п. ч. у. м. D_∞ , изоморфное своему функциональному пространству, нужно найти неподвижную точку функтора F . Попробуем взять $D_\infty = \lim_n F^n D$. Однако как здесь понимать предел? Хорошо, пусть $p = (\varphi_0, \psi_0)$ — данная проекция FD на D . Тогда $(F^n D, F^n p)$ — проективная система в категории **СРО**, и мы можем определить проективный предел

$$D_\infty = \lim_{\leftarrow} (F^n D, F^n p).$$

Тогда

$$[D_\infty \rightarrow D_\infty] = FD_\infty = \lim_{\leftarrow} (F^{n+1} D, F^{n+1} p) \cong D_\infty.$$

Это мотивирует следующую конструкцию,

18.2.3. ЛЕММА. Пусть дано п. ч. у. м. D . Определим отображения $\varphi_0: D \rightarrow [D \rightarrow D]$, $\psi_0: [D \rightarrow D] \rightarrow D$ равенствами

$$\varphi_0(x) = \lambda y \in D.x, \quad \psi_0(f) = f(\perp).$$

Тогда (φ_0, ψ_0) — проекция $[D \rightarrow D]$ на D (которую мы будем называть стандартной).

Доказательство. Отображение φ_0 непрерывно. Действительно, для направленного множества X мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0(\bigsqcup X) &= \lambda y. \bigsqcup X = \\ &= \bigsqcup_{x \in X} \lambda y.x \quad (\text{по определению операции } \bigsqcup \text{ в функциональном пространстве}) \\ &= \bigsqcup \varphi_0(X). \end{aligned}$$

По аналогичным причинам непрерывно и ψ_0 . Далее,

$$\varphi_0(\psi_0(f)) = \varphi_0(f(\perp)) = \lambda x. f(\perp) \equiv \lambda x. f(x) \quad (\text{так как } f \text{ монотонна}) = f.$$

Тривиальным образом имеем $\psi_0 \circ \varphi_0 = \text{id}_D$. $\square$

18.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (построение D_∞). Пусть даны D и стандартная проекция $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$ функционального пространства $[D \rightarrow D]$ на D . Положим

$$\begin{aligned} D_0 &= D, \\ D_{n+1} &= [D_n \rightarrow D_n], \\ (\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}) &= (\varphi_n^*, \psi_n^*) \end{aligned}$$

— проекция D_{n+1} на D_n , полученная из (φ_n, ψ_n) с помощью леммы 18.2.2. Тогда

$$D_0 \xrightleftharpoons[\psi_0]{\varphi_0} D_1 \xrightleftharpoons[\psi_1]{\varphi_1} D_2 \dots$$

Рис. 18.2

Следовательно, $(D_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная система п. ч. у. м. Положим, наконец,

$$D_\infty = \lim_{\leftarrow} (D_n, \psi_n).$$

В оставшейся части этого пункта D обозначает фиксированное п. ч. у. м., а D_n, D_∞ — п. ч. у. м., построенные выше.

Обозначения. Для $D_\infty \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$ будут использоваться следующие обозначения. Пусть $x \in D_\infty$. Тогда

$$x_n = x(n), \quad x = \langle x_0, x_1, \dots \rangle = \langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \langle x_n \rangle.$$

18.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для $n, m \in \mathbb{N}$ определим отображение $\Phi_{nm}: D_n \rightarrow D_m$ следующим образом (проходя стрелки на рис. 18.2).

Если $n \leq m$, т. е. $m = n + k$ для некоторого k , то Φ_{nm} определяется индукцией по k :

$$\Phi_{nn} = \lambda x \in D_n. x, \quad \Phi_{n(n+1)} = \Phi_n \circ \Phi_{nn}.$$

Если $m \leq n$, т. е. $n = m + k$ для некоторого k , то Φ_{nm} снова определяется индукцией по k

$$\Phi_{(n+1)m} = \Phi_{nm} \circ \psi_n.$$

(ii) Отображение $\Phi_{\infty n}: D_\infty \rightarrow D_n$ определяется равенством $\Phi_{\infty n}(x) = x_n$.

(iii) Отображение $\Phi_{n\infty}: D_n \rightarrow D_\infty$ определяется равенством $\Phi_{n\infty}(x) = \langle \Phi_{ni}(x) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$.

18.2.6. ЛЕММА. (i) Для $0 \leq n \leq m \leq \infty$ пара $\langle \Phi_{nm}, \Phi_{mn} \rangle$ есть проекция D_m на D_n .

(ii) Для $0 \leq n \leq m \leq l \leq \infty$

$$\Phi_{ml} \circ \Phi_{nm} = \Phi_{nl}.$$

Доказательство стандартно. $\square$

В силу замечания, следующего за определением 18.2.1, мы получаем, что с точностью до изоморфизма

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_\infty.$$

На самом деле в категории **СРО** D_∞ — не только проективный предел последовательности $\lim_{\leftarrow} (D_n, \psi_n)$, но и инъективный предел

$$D_\infty \cong \lim_{\rightarrow} (D_n, \varphi_i).$$

См. упр. 18.4.17.

Начиная с этого места, каждый элемент $x \in D_n$ будет отождествляться с последовательностью $\Phi_{n\infty}(x) \in D_\infty$, как это обычно делается для инъективных пределов. Это позволяет дать более изящные формулировки свойств модели D_∞ .

18.2.7. ЛЕММА. (i) Если $x \in D_n$, то $x_n = x$.

(ii) Если $x \in D_n$, то $\varphi_n(x) = x$.

(iii) Если $x \in D_{n+1}$, то $\psi_n(x) \in x$.

Доказательство. (i) x в D_∞ есть $\langle \dots, \psi_{n-1}(x), x, \varphi_n(x), \dots \rangle$. Следовательно, $x_n = x$.

(ii) $\varphi_n(x)$ в D_∞ есть $\langle \dots, \psi_n(\varphi_n(x)), \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(\varphi_n(x)), \dots \rangle$. Так как $\psi_n(\varphi_n(x)) = x$, то эта последовательность совпадает с x в D_∞ .

(iii) доказывается аналогично (ii) с использованием $\Phi_n(\psi_n(x)) \in x$. $\square$

18.2.8. ЛЕММА. В D_∞

(i) $(x_n)_m = x_{\min(n, m)}$,

(ii) $n \leq m \Rightarrow x_n \subseteq x_m \subseteq x$,

(iii) $x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$,

(iv) $\perp_n$ — дно п. ч. у. м. D_n ,

(v) $\perp_n = \perp$.

Доказательство. (i) Если $m < n$, то

$$(x_n)_m = \Phi_{nm}x_n = \psi_{m+1} \circ \dots \circ \psi_{n-1}(x_n) = x_m,$$

так как $x \in D_\infty$. Если $m \geq n$, то по лемме 18.2.7(ii)

$$(x_n)_m = \varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_n(x_n) = x_n.$$

(ii) По лемме 18.2.7(iii)

$$x_m = \psi_m(x_{m+1}) \subseteq x_{m+1}.$$

Следовательно, $x_0 \subseteq x_1 \subseteq \dots$. Далее, имеем $x_n \subseteq x$, так как

$$\forall i ((x_n)_i = x_{\min(i, n)} \subseteq x_i).$$

(iii) В силу (ii) множество $X = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ направленно. Отсюда в силу предложения 1.2.19

$$\begin{aligned} \bigcup X &= \left\langle \bigcup_n (x_n)_i \right\rangle_{i \in \mathbb{N}} = \left\langle \bigcup_n x_{\min(n, i)} \right\rangle_{i \in \mathbb{N}} \quad (\text{в силу (i)}) = \\ &= \langle x_i \rangle_{i \in \mathbb{N}} \quad (\text{в силу (ii)}) = x. \end{aligned}$$

(iv) Пусть $\perp'_n$ — дно п. ч. у. м. D_n . Тогда снова в силу предложения 1.2.19

$$\perp = \bigcup \emptyset = \langle \bigcup \emptyset \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \langle \perp'_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}.$$

Следовательно, $\perp_n = \perp'_n$.

(v) В силу (ii) имеем $\perp_n \subseteq \perp \subseteq \perp_n$, откуда $\perp = \perp_n$. $\square$

Следующая лемма полезна для выяснения аппликативного поведения компонент x_n элемента $x \in D_\infty$.

18.2.9. ЛЕММА. Пусть $x, y \in D_\infty$. Тогда для всех $n, k \in \mathbb{N}$, таких, что $n \leq k$,

(i) $x_{n+1}(y_n) \subseteq x_{k+1}(y_k)$,

(ii) $(x_{n+1})_{k+1}(y_k) = x_{n+1}(y_n)$,

(iii) $(x_{k+1}(y_n))_n = x_{n+1}(y_n)$.

Доказательство. (i) Достаточно рассмотреть случай $k = n + 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1}(y_n) &= (\psi_{n+1}(x_{n+2}))(\psi_n(y_{n+1})) \text{ (так как } x, y \in D_\infty) = \\ &= \psi_n \circ x_{n+2} \circ \psi_n(\psi_n(y_{n+1})) = \psi_n(x_{n+2}(\psi_n \circ \psi_n(y_{n+1}))) \in \\ &\in \psi_n(x_{n+2}(y_{n+1})) \text{ (так как } (\psi_n, \psi_n) \text{ — проекция)} \in \\ &\in x_{n+2}(y_{n+1}) \text{ (по лемме 18.2.7 (iii)).} \end{aligned}$$

(ii) доказывается индукцией по $k \geq n$. Если $k = n$, все тривиально, поэтому рассмотрим переход от k к $k + 1$.

$$\begin{aligned} (x_{n+1})_{k+2}(y_{k+1}) &= \varphi_{k+1}((x_{n+1})_{k+1})(y_{k+1}) = \\ &= \varphi_k \circ (x_{n+1})_{k+1} \circ \psi_k(y_{k+1}) = \varphi_k((x_{n+1})_{k+1}(y_k)) = \\ &= (x_{n+1})_{k+1}(y_k) \text{ (по лемме 18.2.7 (ii))} = \\ &= x_{n+1}(y_n) \text{ (по предположению индукции).} \end{aligned}$$

(iii) доказывается индукцией по $k \geq n$. Случай $k = n$ тривиален, поэтому рассмотрим переход от k к $k + 1$.

$$\begin{aligned} (x_{k+2}(y_n)_{k+1})_n &= \Phi_{(k+1), n}(x_{k+2}(\varphi_k((y_n)_k))) = \\ &= \Phi_{kn} \circ \psi_k \circ x_{k+2} \circ \varphi_k((y_n)_k) = \\ &= \Phi_{kn}((\psi_{k+1}(x_{k+2}))((y_n)_k)) = \\ &= \Phi_{kn}(x_{k+1}(y_n)_k) = (x_{k+1}(y_n)_k)_n = \\ &= x_{n+1}(y_n) \text{ (по предположению индукции). } \square \end{aligned}$$

Теперь мы можем определить бинарную операцию, которая превратит D_∞ в экстенциональную λ -модель.

18.2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бинарная операция — аппликация определяется на D_∞ следующим образом:

$$(1) \quad x \cdot y = \bigsqcup_n x_{n+1}(y_n).$$

То есть для $x, y \in D$ имеем

$$(2) \quad x \cdot y = \bigsqcup_n \Phi_{n\infty}(\text{Ar}_n(\Phi_{\infty n+1}(x), \Phi_{\infty n}(y))),$$

где $\text{Ar}_n: [D_{n+1} \times D_n] \rightarrow D_n$ — каноническая аппликация, см. предложение 1.2.13.

Мы будем записывать это определение в виде (1). Полная формулировка — это (2).

18.2.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Аппликация непрерывна на D_∞ .

Доказательство. Применяем определение 18.2.10 в виде (2) и непрерывность операций Φ_{ij} и Ar_k , а также леммы 1.2.10 и 18.2.9 (i). $\square$

18.2.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Аппликация в D_∞ корректно определена в том смысле, что из $x \in D_{n+1}, y \in D_n$ следует $x \cdot y = x(y)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x_{n+1} \cdot y_n \text{ (по лемме 18.2.7 (i))} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} (x_{n+1})_{i+1}((y_n)_i) = \\ &= \bigsqcup_{i=0}^{\infty} x_{i+1}(y_i) \text{ (по лемме 18.2.8 (i))} = \\ &= x_{n+1}(y_n) \text{ (по лемме 18.2.9 (i)). } \square \end{aligned}$$

Следующие равенства важны для определения структуры модели D_∞ .

18.2.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для $x, y \in D_\infty$ и $n \in \mathbb{N}$

$$(i) \quad x_{n+1} \cdot y = x_{n+1} \cdot y_n = (x \cdot y)_n,$$

$$(ii) \quad x_0 \cdot y = x_0 = (x \cdot \perp)_0.$$

Доказательство. (i)

$$\begin{aligned} x_{n+1} \cdot y &= \bigsqcup_{i=0}^{\infty} (x_{n+1})_{i+1}(y_i) = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} (x_{n+1})_{i+1}(y_i) \text{ (по лемме 18.2.9 (i))} = \\ &= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} x_{n+1}(y_n) \text{ (по лемме 18.2.9 (ii))} = \\ &= x_{n+1} \cdot y_n \text{ (в силу предложения 18.2.12).} \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (x \cdot y)_n &= \left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} (x_{i+1} \cdot (y_n)_i) \right)_n = \\ &= \bigsqcup_{i=0}^{\infty} (x_{i+1} \cdot (y_n)_i)_n \text{ (в силу непрерывности)} = \\ &= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} (x_{i+1}((y_n)_i))_n \text{ (по лемме 18.2.9 (i))} = \\ &= \bigsqcup_i x_{n+1}(y_n) \text{ (по лемме 18.2.9 (iii))} = x_{n+1} \cdot y_n. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x_0 \cdot y &= (x_0)_1 \cdot y = (x_0)_1(y_0) \text{ (в силу (i) и предложения 18.2.12)} = \\ &= \varphi_0(x_0)(y_0) = x_0. \end{aligned}$$

Далее,

$$x_0 = \psi_0(x_1) = x_1(\perp) = x_1(\perp_0) = (x \cdot \perp)_0 \text{ (в силу (i)). } \square$$

18.2.14. ГЕОРЕМА (экстенциональность). Для $x, y \in D_\infty$ имеем

$$(i) \quad x \subseteq y \Leftrightarrow (\forall z \in D_\infty)(x \cdot z \subseteq y \cdot z),$$

$$(ii) \quad x = y \Leftrightarrow (\forall z \in D_\infty)(x \cdot z = y \cdot z).$$

Доказательство. (i) ($\Rightarrow$) следует из монотонности $\lambda x.(x \cdot z)$.

($\Leftarrow$) Допустим, что $\forall z(x \cdot z \subseteq y \cdot z)$. Тогда $x \cdot \perp \subseteq y \cdot \perp$, откуда в силу предложения 18.2.13(ii)

$$x_0 = (x \cdot \perp)_0 \subseteq (y \cdot \perp)_0 = y_0.$$

Далее, $x \cdot z_n \subseteq y \cdot z_n$. Отсюда в силу предложений 18.2.12 и 18.2.13(i) получаем

$$x_{n+1}(z_n) = (x \cdot z_n)_n \subseteq (y \cdot z_n)_n = y_{n+1}(z_n).$$

Теперь

$$\forall n (\forall z \in D_n) (x_{n+1}(z) \subseteq y_{n+1}(z)),$$

откуда $\forall n (x_{n+1} \subseteq y_{n+1})$, т. е. $x \subseteq y$.

(ii) получается непосредственно из (i). $\square$

18.2.15. ТЕОРЕМА (полнота). Положим для $f \in [D_\infty \rightarrow D_\infty]$

$$\square f = \bigsqcup_n (\lambda y \in D_n) (f(y))_n.$$

Тогда

$$(\forall y \in D_\infty) (f(y) = \square f \cdot y).$$

Доказательство. Заметим, что супремум в определении $\square f$ берется по направленному множеству. Заметим также, что для a_{ij} в п. ч. у. м.

$$\forall i, j \exists k (a_{ij} \subseteq a_{kk}),$$

откуда

$$\bigsqcup_{i,j} a_{ij} = \bigsqcup_k a_{kk}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \square f \cdot y &= \bigsqcup_m (\square f)_{m+1}(y_m) = \bigsqcup_m (\square f \cdot y_m)_m = \\ &= \bigsqcup_m ((\bigsqcup_n \lambda y \in D_n (f(y))_n) \cdot y_m)_m = \\ &= \bigsqcup_{m,n} ((\lambda y \in D_n (f(y))_n) \cdot y_m)_m = \\ &= \bigsqcup_m ((\lambda y \in D_m (f(y))_m) (y_m))_m = \\ &= \bigsqcup_m (f(y_m))_m = \bigsqcup_{k,l} (f(y_k))_l = \bigsqcup_k f(y_k) = f(y). \end{aligned}$$

Пояснения, которые должны обосновывать эти равенства, легко пишутся с помощью непрерывности (монотонности) участвующих здесь функций и сделанных выше замечаний. $\square$

18.2.16. ТЕОРЕМА. $D_\infty = [D_\infty \rightarrow D_\infty]$ с точностью до изоморфизма (точнее, гомеоморфизма, который, таким образом, является изоморфизмом частичных порядков).

Доказательство. Для $x \in D_\infty$ положим $F(x) = \lambda y \in D_\infty. x \cdot y$. Отображение F сюръективно по теореме 18.2.15, инъективно по теореме 18.2.14(ii) и непрерывно в силу предложения 18.2.11. Обращением F является по теореме 18.2.15 отображение

$$G = \lambda f. \bigsqcup_n \Phi_{n\infty} (\lambda y \in D_n. \Phi_{\infty n} (f(\Phi_{\infty n}(y))))),$$

которое непрерывно по лемме 1.2.10. Так как непрерывные отображения также и монотонны, рассматриваемые пространства являются изоморфными п. ч. у. м. $\square$

18.2.17. СЛЕДСТВИЕ. (i) $(D_\infty, \cdot)$ — экстенциональная λ -алгебра, в которой представимые функции — в точности непрерывные функции.

(ii) Интерпретация λ -термов в модели $(D_\infty, \cdot)$ выглядит следующим образом. Пусть ρ — оценка в D_∞ . Тогда

$$\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x), \quad \llbracket MN \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\rho \llbracket N \rrbracket_\rho,$$

$$\llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = \lambda^G d \in D_\infty. \llbracket M \rrbracket_{\rho(x:=d)},$$

где

$$\lambda^G d \in D_\infty. \llbracket M \rrbracket_{\rho(x:=d)} = G(\lambda d \in D_\infty. \llbracket M \rrbracket_{\rho(x:=d)}).$$

Доказательство получается ссылкой на следствие 5.4.4. $\square$

Здесь мы снова используем соглашение 5.3.8. Например, в D_∞

$$\lambda x. x = \bigsqcup_n (\lambda x \in D_n. x).$$

18.3. Модель $\mathfrak{B}$

Множество деревьев бёмовского типа $\mathfrak{B}$ будет превращено в λ -модель. Важную роль в этой конструкции будет играть теорема непрерывности. Для результирующей модели $\mathfrak{B}$ будет иметь место

$$\mathfrak{B} \models M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N).$$

18.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $A_n, A \in \mathfrak{B}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n = A$, если $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ и $\bigcup_n A_n = A$.

(ii) Пусть $M_n \in \Lambda, A \in \mathfrak{B}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n = A$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \text{BT}(M_n) = A$.

(iii) Пусть $M_n, M \in \Lambda$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n = M$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \text{BT}(M_n) = \text{BT}(M)$.

18.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$. Положим

(i) $A \cdot B = AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow (M_{A^n} M_{B^n})$, см. определение 10.1.16.

(ii) $\lambda x.A = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow (\lambda x.M_{A^n})$.

(iii) $A(x := B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow (M_{A^n} [x := M_{B^n}])$.

18.3.3. ЛЕММА. Пределы снизу, участвующие в определении 18.3.2, существуют.

Доказательство. (i) Так как $A^n \subseteq A^{n+1}$, мы имеем $M_{A^n} \subseteq M_{A^{n+1}}$ и аналогично для B^n . Из следствия 14.3.20 (iii) получаем

$$M_{A^n} M_{B^n} \subseteq M_{A^{n+1}} M_{B^{n+1}}.$$

Поэтому существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow (M_{A^n} M_{B^n})$.

(ii), (iii) устанавливаются аналогично. $\square$

Отметим, что $A(x := B)$ — это результат «буквальной подстановки B вместо x в A с последующим разворачиванием результирующего помеченного дерева». Например,

$$\begin{array}{c} (\lambda z.x) \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \quad x \end{array} \quad (y := \lambda w.w) = \lambda z.x \quad \begin{array}{c} \lambda w.w \\ \swarrow \quad \searrow \\ \lambda w.w \quad x, \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\lambda z.x) \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \quad x \end{array} \quad (x := \lambda w.w) = \lambda z.y \quad \begin{array}{c} \lambda w.w \\ \swarrow \quad \searrow \\ \lambda w.w \end{array}$$

18.3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда

$$\text{BT}(MN) = \text{BT}(M) \text{BT}(N), \quad \text{BT}(\lambda x.M) = \lambda x. \text{BT}(M),$$

$$\text{BT}(M[x := N]) = \text{BT}(M) (x := \text{BT}(N)).$$

(ii) Операции $\lambda AB.AB$, $\lambda A.(\lambda x.A)$ и $\lambda AB.A(x := B)$ непрерывны на $\mathfrak{B}$.

Доказательство. (i) Из $M^{(n)} \subseteq M$ получаем $M^{(n)} N^{(n)} \subseteq MN$, т. е. $\text{BT}(M^{(n)} N^{(n)}) \subseteq \text{BT}(MN)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \text{BT}(M) \text{BT}(N) &= \bigcup_n \text{BT}(M_{\text{BT}^n(M)} M_{\text{BT}^n(N)}) = \\ &= \bigcup_n \text{BT}(M^{(n)} N^{(n)}) \text{ (по определению 10.1.18)} \subseteq \\ &\subseteq \text{BT}(MN). \end{aligned}$$

Обратное включение следует из соотношения

$$(1) \quad \forall k \exists n (\text{BT}^k(MN) \subseteq \text{BT}(M^{(n)} N^{(n)})),$$

так как тогда

$$\text{BT}(MN) = \bigcup_k \text{BT}^k(MN) \subseteq \bigcup_n \text{BT}(M^{(n)} N^{(n)}) = \text{BT}(M) \text{BT}(N).$$

Чтобы установить (1), вспомним, что

$$O_{M, k} = \{N \in \Lambda \mid M^{(k)} \subseteq N\}$$

— базисные окрестности точки M . Для данного k имеем $MN \subseteq O_{MN, k}$. Следовательно, по теореме непрерывности имеем для некоторых k_1, k_2

$$O_{M, k_1} O_{N, k_2} \subseteq O_{MN, k}.$$

Пусть $n \geq k_1, k_2$. Тогда

$$M^{(n)} \in O_{M, k_1}, \quad N^{(n)} \in O_{N, k_2} \Rightarrow M^{(n)} N^{(n)} \in O_{MN, k} \Rightarrow (MN)^{(k)} \subseteq M^{(n)} N^{(n)}.$$

Это доказывает (1).

Доказательства остальных утверждений аналогичны.

(ii) Мы покажем, что $A \cdot B$ непрерывно по A . Пусть $A = \bigcup_k A_k$ — направленное объединение. Тогда

$$AB = \bigcup_n \text{BT}(M_{A^n} M_{B^n}), \quad \bigcup_k (A_k B) = \bigcup_{k, n} \text{BT}(M_{A_k^n} M_{B^n}).$$

Очевидно, что $\bigcup_k (A_k B) \subseteq AB$. Чтобы установить обратное включение, заметим, что

$$A^n \subseteq \bigcup_k A_k^n.$$

Так как A^n — компактный элемент модели $\mathfrak{B}$, то $A^n \subseteq A_k^n$ для некоторого k . Поэтому

$$M_{A^n} \subseteq M_{A_k^n} \Rightarrow M_{A^n} M_{B^n} \subseteq M_{A_k^n} M_{B^n} \Rightarrow \text{BT}(M_{A^n} M_{B^n}) \subseteq \text{BT}(M_{A_k^n} M_{B^n}),$$

откуда следует, что $AB \subseteq \bigcup_k (A_k B)$. Это показывает, что верно

$AB = \bigcup_k (A_k B)$, и непрерывность по A следует из предложения 1.2.6. Непрерывность по B доказывается аналогично. По лемме 1.2.12 все в порядке.

Аналогично доказывается непрерывность остальных операторов. $\square$

18.3.5. ЛЕММА. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow N_n = B$. Тогда

$$(i) \quad AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n N_n,$$

$$(ii) \quad \lambda x.A = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \lambda x.M_n,$$

$$(iii) \quad A(x := B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n [x := N_n].$$

Доказательство. (i)

$$\begin{aligned}
 AB &= \bigcup_n \text{BT}(M_n) \cdot \bigcup_{n'} \text{BT}(N_{n'}) = \\
 &= \bigcup_{n, n'} \text{BT}(M_n) \text{BT}(N_{n'}) \text{ (по непрерывности операции } \cdot \text{)} = \\
 &= \bigcup_n \text{BT}(M_n) \text{BT}(N_n) \text{ (так как } M_n, N_n \text{ линейно упорядочены} \\
 &\text{отношением } \sqsubseteq \text{)} = \\
 &= \bigcup_n \text{BT}(M_n N_n) \text{ (в силу предложения 18.3.4 (i)).}
 \end{aligned}$$

Поэтому $AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n N_n$.

(ii), (iii) доказываются аналогично. $\square$

Подстановки в деревья и операции на них взаимодействуют ожидаемым образом.

18.3.6. ЛЕММА. (i) $x(x := C) = C$.

(ii) $y(x := C) = y$.

(iii) $(AB)(x := C) = (A(x := C))(B(x := C))$.

(iv) $(\lambda y.A)(x := C) = \begin{cases} \lambda y.A, & \text{если } x = y, \\ \lambda y.A(x := C), & \text{если } x \neq y. \end{cases}$

Доказательство. x в (i) обозначает, разумеется, $\text{BT}(x)$. Так как все случаи похожи друг на друга, мы рассмотрим только (iii):

$$\begin{aligned}
 (AB)(x := C) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_A^n M_{B^n} [x := M_{C^n}] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_A^n [x := M_{C^n}] M_{B^n} [x := M_{C^n}] = \\
 &= (\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_A^n [x := M_{C^n}]) (\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_{B^n} [x := M_{C^n}]) = \\
 &= A(x := C) B(x := C),
 \end{aligned}$$

где многократно применяется лемма 18.3.5. $\square$

18.3.7. ЛЕММА. (i) $(\lambda x.A)x = A$.

(ii) $(\lambda x.A)B = A(x := B)$.

Доказательство. (i) $(\lambda x.A)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow (\lambda x.M_{A^n})x = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_{A^n} = A$.

(ii) Подставляем B вместо x в A и применяем лемму 18.3.6 и (i). $\square$

Теперь будет показано, что $\mathfrak{B}$ можно превратить в λ -модель.

18.3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для оценки ρ в модели $\mathfrak{B}$ следующим образом индуктивно определим значение $[M]_\rho$:

$$\begin{aligned}
 [x]_\rho &= \rho(x), \quad [c_A]_\rho = A, \quad [PQ]_\rho = [P]_\rho [Q]_\rho, \\
 [\lambda x.P]_\rho &= \lambda x. [P]_\rho(x := \text{BT}(x)).
 \end{aligned}$$

18.3.9. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda(\mathfrak{B})$. Запишем M в виде $M(\vec{x}, \vec{c}_A) = M(\vec{x}, \vec{y})[\vec{y} := \vec{c}_A]$, где явно выписаны все константы и свободные переменные. Тогда в $\mathfrak{B}$

$$[M]_\rho = \text{BT}(M(\vec{x}, \vec{y}))(\vec{x}, \vec{y} := \vec{\rho}(\vec{x}), \vec{A}),$$

где $(\vec{x}, \vec{y} := \vec{\rho}(\vec{x}), \vec{A})$ обозначает одновременную подстановку.

Доказательство проводится индукцией по построению терма M с использованием равенства $\text{BT}(P)(z := \text{BT}(z)) = \text{BT}(P)$, которое имеет место в силу предложения 18.3.4. $\square$

18.3.10. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}, \cdot, [\])$.

(i) $\mathfrak{B} - \lambda$ -модель.

(ii) $\mathfrak{B} \models M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N)$.

Доказательство. (i) Нетривиальна только проверка условий 4 и ξ из определений 5.3.1 и 5.3.2 соответственно.

Чтобы проверить 4, допустим, что $P \in \Lambda(\mathfrak{B})$. Для простоты записи предположим, что P не содержит констант. Пусть $(-)$ обозначает подстановку $(\vec{y} := \vec{\rho}(\vec{y}))$, где $\vec{y} = \text{FV}(P)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 [\lambda x.P]_\rho.A &= \text{BT}(\lambda x.P)(-).A \text{ (по лемме 18.3.9)} = \\
 &= (\lambda x.\text{BT}(P))(-).A \text{ (в силу предложения 18.3.4)} = \\
 &= \text{BT}(P)(x := A)(-) \text{ (по лемме 18.3.7 (ii))} = \\
 &= [P]_\rho(x := A) \text{ (по лемме 18.3.9)}.
 \end{aligned}$$

Проверяем условие ξ , используя аналогичные обозначения.

$$\begin{aligned}
 (\forall A \in \mathfrak{B})([M]_\rho(x := A) = [N]_\rho(x := B)) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow (\forall A \in \mathfrak{B})(\text{BT}(M)(x := A)(-) = \text{BT}(N)(x := A)(-)) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \text{BT}(M)(-) = \text{BT}(N)(-) \text{ (если взять } A = \text{BT}(x)) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \lambda x.\text{BT}(M)(-) = \lambda x.\text{BT}(N)(-) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \text{BT}(\lambda x.M)(-) = \text{BT}(\lambda x.N)(-) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow [\lambda x.M]_\rho = [\lambda x.N]_\rho.
 \end{aligned}$$

(ii) $\mathfrak{B} \models M = N \Rightarrow \forall \rho([M]_\rho = [N]_\rho) \Rightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N)$,

если взять $\rho(y) = \text{BT}(y)$. Обратно,

$$\begin{aligned}
 \text{BT}(M) = \text{BT}(N) &\Rightarrow \text{BT}(M)(-) = \text{BT}(N)(-) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow [M]_\rho = [N]_\rho \Rightarrow \mathfrak{B} \models M = N. \quad \square
 \end{aligned}$$

18.3.11. СЛЕДСТВИЕ. $\text{Th}(\mathfrak{B}) = \mathcal{A}$.

Замечание. Хотя $(\mathfrak{B}, \cdot)$ есть λ -модель с непрерывной (в топологии, заданной на $\mathfrak{B}$) операцией $\cdot$, не все непрерывные функции оказываются представимыми. См. упр. 18.4.25.

18.4. Упражнения

18.4.1. Показать, что $P\omega$ не является экстенсionalmenteй λ -алгеброй. В частности, $P\omega \models 1 = 1$, где $1 = \lambda x y. x y$.

18.4.2. Пусть $\top = N$ и $\perp = \emptyset$ — соответственно верхний и нижний элементы модели $P\omega$. Показать, что в $P\omega$

$$(I) \top x = \top = \lambda x. \top,$$

$$(II) \perp x = \perp = \lambda x. \perp.$$

Упражнения 18.4.3—18.4.9 принадлежат Скотту [1975], [1976].

18.4.3. Положим

$$F = \{a \in P\omega \mid a = 1a\} \text{ (функции),}$$

$$R = \{a \in P\omega \mid a = a \circ a\} \text{ (ретракции),}$$

$$C = \{a \in P\omega \mid 1 \subset a = a \circ a\} \text{ (операции замыкания).}$$

Тогда $F \cong R \cong C$. Для $a \in P\omega$ положим

$$\check{a} = \{x \in P\omega \mid ax = x\}.$$

(i) Показать, что

$$(1) a \in F \Rightarrow \check{a} \text{ — полная решетка,}$$

$$(2) a \in R \Rightarrow \check{a} \text{ — непрерывная решетка.}$$

$$(3) a \in C \Rightarrow \check{a} \text{ — алгебраическая решетка.}$$

(ii) Установить следующие импликации, обратные к (i).

(1) Если D — полная решетка и топология Скотта на D имеет счетный базис, то $(\exists a \in F) (\check{a} \cong D)$.

(2) Если D — непрерывная решетка и топология Скотта на D обладает счетным базисом, то $(\exists a \in R) (\check{a} \cong D)$.

(3) Если D — алгебраическая решетка, имеющая не более чем счетное множество компактных точек, то $(\exists a \in C) (\check{a} \cong D)$.

18.4.4. Для $a, b \in P\omega$ положим $a \circ \rightarrow b = \lambda x. b \circ x \circ a$.

(i) Показать, что из $f \in (a \circ \rightarrow b)$ и $x \in \check{a}$ следует $f \cdot x \in \check{b}$.

(ii) Для $X = F, R, C$ показать, что $(\forall a, b \in X) (a \circ \rightarrow b \in X)$.

(iii) Доказать, что $(\forall a, b \in R) ((a \circ \rightarrow b) \cong [\check{a} \rightarrow \check{b}])$.

[Указание. Положим $\psi(f) = \text{граф } \lambda x. f(a \cdot x)$ для $f \in [\check{a} \rightarrow \check{b}]$ и $\varphi(x) = \text{fup}(x) \upharpoonright \check{a}$ для $x \in (a \circ \rightarrow b)$.]

18.4.5. Показать, что $(\exists a \in P\omega) (C = \check{a})$. Следовательно, $(C, \subseteq)$ — полная решетка. [Указание. $x \in C \Leftrightarrow x = x \circ x \cup 1$.]

18.4.6. Положим для $a, b \in R$

$$a \circ \leq b \Leftrightarrow a = a \circ b = b \circ a.$$

Очевидно, что если $a \circ \leq b$, то $\check{a}$ — ретракт $\check{b}$. Показать, что $\circ \leq$ — частичный порядок на R (и даже на $P\omega$).

18.4.7. Показать, что

$$(i) (\exists a \in C) (F = \check{a}),$$

$$(ii) (\exists a \in F) (R = \check{a}) \text{ (см. также упражнение 18.4.10).}$$

18.4.8. Показать, что $(\exists a \in C) (C = \check{a})$ и, следовательно, C является алгебраической решеткой. [Указание. Положим $V = \lambda a x. Y_T(\lambda y. x \cup a \cdot y)$, где Y_T — комбинатор наименьшей неподвижной точки на $P\omega$.]

Тогда

$$(i) (\forall x \in P\omega) (Vx \in C).$$

$$(ii) x \in C \Leftrightarrow Vx = x. \text{ Следовательно, } \check{V} = C.$$

$$(iii) V \in C.]$$

18.4.9. (i) Показать, что $(\exists c \in C) [c = c \circ \rightarrow c \wedge \text{card}(\check{c}) > 1]$. [Указание. Рассмотреть $f = \lambda c \in C. c \circ \rightarrow c$ и $1_n = f^n(1)$. Показать, что $1_1 \subseteq 1_2 \subseteq \dots$; $1_1 \circ \leq 1_2 \circ \leq \dots$. Наименьшей неподвижной точкой отображения f в решетке $(C, \subseteq)$ является $c = \bigcup_{n \in N} 1_n$. Получить отсюда, что $\top, \perp \in C$.]

(ii) Получить из (i) с помощью упражнения 18.4.4(iii), что имеется полная подрешетка D модели $P\omega$, такая, что $D \cong [D \rightarrow D]$ и $\text{Card}(D) > 1$. По теореме 5.4.4 такая D дает экстенсionalmenteй λ -алгебру.

18.4.10 (Ершов). Показать, что $\neg(\exists a \in R) (R = \check{a})$. [Указание. Пусть $a \in R$. Элемент a называется неэкстенсивным, если для любого конечного $e \neq \emptyset$ мы имеем $e \not\subseteq a.e$. Элемент a называется конечным, если $(\forall x \in \check{a})$ (x конечно). Пусть $\sqcup$ и $\sqcap$ обозначают операции супремума и инфимума в R .

(i) Показать, что если $a, b \in R$, a неэкстенсивен и b конечен, то $a \sqcap b = \perp (= \emptyset)$.

(ii) Показать, что существует неэкстенсивный $a \in R$, такой, что $a \neq \perp$. [Положим $f(x) = \{m \mid (\exists n \in x) (m \leq n)\}$, где $\leq$ — линейное упорядочение множества N , имеющее порядковый тип Q (рациональных чисел). Тогда $f \in [P\omega \rightarrow P\omega]$. Берем $a = \text{граф}(f)$.]

(iii) Операция $\sqcap$ на R не является непрерывной. [Пусть $b_n = \lambda x. e_n$. Тогда $\bigcup_n b_n = \lambda x. \top = \top$. Если бы $\sqcap$ была непрерывной, то для неэкстенсивных a мы имели бы

$$a = a \sqcup \top = a \sqcup \bigcup_n b_n = \bigcup_n a \sqcap b_n = \perp,$$

в противоречие с (ii).]

(iv) Получить из (iii), что $(R, \subseteq)$ не является непрерывной решеткой. Нужное утверждение следует теперь из упр. 18.5.3(i).

18.4.11. Пусть $\langle n \rangle = n$, $\langle n_1, \dots, n_{k+1} \rangle = (n_1, \langle n_2, \dots, n_{k+1} \rangle)$, где $(\dots, \dots)$ — спаривающая функция для N . Показать, что в $P\omega$

(i) $x y_1 \dots y_k = \{m \mid (\exists e_{n_1} \subseteq y_1) \dots (\exists e_{n_k} \subseteq y_k) (\langle n_1, \dots, n_k, m \rangle \in x)\}$.

(ii) $\lambda x_1 \dots x_k. f(x_1, \dots, x_k) = \{\langle n_1, \dots, n_k, m \rangle \mid m \in f(e_{n_1}, \dots, e_{n_k})\}$, где $f \in [P\omega^k \rightarrow P\omega]$.

18.5.12 (Де Вриер). Показать, что теория $\lambda +$ взаимно однозначное спаривание (см. упр. 15.4.4) непротиворечива, найдя в $P\omega$ элементы d, d_1, d_2 , такие, что $d_i(dx_1x_2) = x_i$, $i = 1, 2$, и $d(d_1x)(d_2x) = x$. [Указание. Показать, что отображение $f(x_1, x_2) = \{2m \mid m \in x_1\} \cup \{2m + 1 \mid m \in x_2\}$ непрерывно и имеет непрерывные проекции.] См. также упр. 18.4.19.

18.4.13. (i) Пусть $I^{n+1} = \lambda x \in D_{n+1}. x$. Показать, что в D_∞

$$I = \langle \perp, I^1, I^2, \dots \rangle.$$

(ii) Пусть $K^{n+2} = \lambda x \in D_{n+1}. \lambda y \in D_n. \psi_n(x)$. Показать, что в D_∞

$$K = \langle \perp, I^1, K^2, K^3, \dots \rangle.$$

(iii) Пусть $S^{n+3} = \lambda x \in D_{n+2}. \lambda y \in D_{n+1}. \lambda z \in D_n. x(\varphi_n z)(y z)$,

$$S^2 = \lambda x \in D_1. \lambda y \in D_0. x \perp.$$

Показать, что в D_∞

$$S = \langle \perp, I^1, S^2, S^3, \dots \rangle.$$

18.4.14. Пусть $\omega^{n+1} = \lambda x \in D_n. \varphi_n(x)$. Показать, что в D_∞

$$\lambda x. x x = \langle \perp, \omega^1, \omega^2, \dots \rangle.$$

Получить отсюда, что в D_∞ имеем $\Omega = \perp$.

18.4.15 (Уодсворт). Показать, что в D_∞ в общем случае

$$(x \cdot y)_n \neq x_{n+1}(y_n).$$

[Указание. Взять $x = \lambda a.a a$, $y = 1$.]

18.4.16 (Скотт). Пусть $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность элементов модели D_∞ , и пусть $x = \bigcup_n x^n$. Показать, что

$$\forall n (x_n = x^n) \Leftrightarrow \forall n [x^n \in D_n \text{ и } \psi_n(x^{n+1}) = x^n].$$

18.4.17 (Скотт). (i) Показать, что в категории **СРО** объект D_∞ изоморфен инъективному пределу $\varinjlim (D_n, \varphi_n)$.

(ii) Показать, что в общем случае $D_\infty \neq \bigcup_n D_n$. [Указание. $I \notin \bigcup_n D_n$.]

Получить отсюда, что в категории частично упорядоченных множеств с морфизмами, сохраняющими направленные супремумы, $D_\infty \neq \varinjlim (D_n, \varphi_n)$.

18.4.18 (Скотт). Показать, что в D_∞

$$x \in D_0 \Leftrightarrow (\forall y \in D_\infty) (x \cdot y = x).$$

18.4.19 (Скотт). (i) Построить п. ч. у. м. E , такой, что $E \cong E \times E$. [Взять $E = D^0$.]

(ii) Пусть $E \in \mathbf{CPO}$. Построить $D \in \mathbf{CPO}$, такое, что $D \cong [D \rightarrow E]$. [Определить подходящий проективный предел.]

(iii) Пусть $D, E \in \mathbf{CPO}$ таковы, что $E \times E \cong E$ и $D \cong [D \rightarrow E]$. Показать, что $D \cong D \times D \cong [D \rightarrow D]$. Получить отсюда, что теория $\{\lambda x. f(x) + \text{взаимно однозначное спаривание}\}$ непротиворечива.

18.4.20 (Парк). Пусть Y_{Tarski} — оператор наименьшей неподвижной точки для п. ч. у. м. D_∞ , определенный в теореме 1.2.17. Пусть Y_{Curry} — образ терма $\lambda f. (\lambda x. f(x x)) (\lambda x. f(x x))$ в модели D_∞ . Показать, что в D_∞ имеет место

$$Y_{\text{Tarski}} = Y_{\text{Curry}}$$

(когда Y_{Tarski} рассматривается как элемент модели D_∞). См. также следующее упражнение и теорему 19.3.4, где дается другое доказательство.

[Указание. Очевидно, что $Y_{\text{Tarski}} \subseteq Y_{\text{Curry}}$. Пусть $f \in D_\infty$, $y = \lambda x. f(x x)$. Показать, что в D_∞

$$(i) y_{n+1} y_n = f_{n+1}(y_n y_{n-1}),$$

$$(ii) y_1 y_0 = f_1(f_0 \perp). \text{ Получить отсюда, что}$$

$$y_{n+1} y_n = f_{n+1}(f_n(\dots(f_1(f_0))\dots)) \equiv f^{n+1}(\perp).$$

Следовательно, $Y_{\text{Curry}} \cdot f \equiv Y_{\text{Tarski}} \cdot f$.

18.4.21 (Парк). (i) Пусть $a \in D_0$ — компактный элемент $\neq \perp$. Введем $\varphi'_0: D_0 \rightarrow D_1$, $\psi'_0: D_1 \rightarrow D_0$ равенствами

$$\varphi'_0(x) = f_{a,x}, \quad \psi'_0(x) = x(a),$$

где $f_{a,x}(y) = \text{если } y \sqsupseteq a, \text{ то } x, \text{ иначе } \perp$. Показать, что (φ'_0, ψ'_0) — проекция D_1 на D_0 .

(ii) Показать, что конструкцию, использованную при построении модели D_∞ , можно провести, применив исходную проекцию (φ'_0, ψ'_0) вместо (φ_0, ψ_0) . Это дает модель D_∞^a . Показать, что все результаты § 18.2, кроме леммы 18.2.8(v), проходят для D_∞^a . В частности, D_∞^a — экстенциональная λ -модель.

(iii) Показать, что $Y_{\text{Tarski}} \neq Y_{\text{Curry}}$ в D_∞^a .

[Указание. В D_∞^a имеем $Y_{\text{Curry}} 1 = a$, но $Y_{\text{Tarski}} 1 = \perp$.]

(iv) Пусть $M \in \Lambda^0$. Показать, что $M \sqsupseteq a$ в D_∞^a .

18.4.22* (Санчис [1979]). Для $x, y \in P\omega$ положим

$$x! y = \{m \mid \forall \alpha \exists k (\exists e_n \sqsubseteq y) (\langle \bar{\alpha}(k), n, m \rangle \in x)\}.$$

Здесь α пробегает $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, m, k, n пробегуют $\mathbb{N}$ и $\bar{\alpha}(k) = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(k-1) \rangle$. Будет показано, что $(P\omega, !)$ — комбинаторная алгебра.

Обозначения. $[xy_1 \dots y_n] = (\dots ((x! y_1)! y_2) \dots! y_n)$,

$$(xy_1 \dots y_n) = (\dots ((x \cdot y_1) \cdot y_2) \dots \cdot y_n),$$

где $\cdot$ обозначает обычную аппликацию в $P\omega$.

Рассмотрим отношения $R(x_1, \dots, x_p, m_1, \dots, m_q)$, где x_i пробегуют $P\omega$, а m_j пробегуют $\mathbb{N}$. Такое отношение называется H -отношением, если оно принадлежит классу, вводимому следующим индуктивным определением:

(1) $m \in x$ есть H -отношение. Если $R(m_1, \dots, m_p) \rightarrow$ р. п. отношение, то R является H -отношением.

(2) Класс H -отношений замкнут относительно конъюнкции, дизъюнкции и числовых кванторов.

(3) Если $R(\vec{x}, \vec{m}, \vec{n})$ есть H -отношение, то таково же и отношение $\forall \alpha \exists k R(\vec{x}, \vec{\alpha}(k), \vec{n})$.

(i) Показать, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$(\forall x \in P\omega) (\exists x' \in P\omega) \forall y_1 \dots y_k ((xy_1 \dots y_k) = [x' xy_1 \dots y_k]).$$

(ii) Если $R(\vec{y}, z, \vec{m})$, где $\vec{y}, z \in P\omega$, $\vec{m} \in \mathbb{N}$, есть H -отношение, то для некоторого $x \in P\omega$ имеем

$$[(xy)z] = \{\langle \vec{m} \rangle \mid R(\vec{y}, z, \vec{m})\},$$

где $\langle \vec{m} \rangle$ определено в упр. 18.4.11.

(iii) Если $R(\vec{y}, \vec{m})$ есть H -отношение, то для некоторого $x \in P\omega$ имеем $[xy] = \{\langle \vec{m} \rangle \mid R(\vec{y}, \vec{m})\}$.

(iv) Получить из предыдущего, что $(P\omega, !)$ — комбинаторная алгебра. Является ли она λ -алгеброй? Является ли она слабо экстенциональной?

18.4.23. Пусть $q > q'$ и $p, p' \leq n$. Показать, что

$$P\omega \models \lambda x_0 \dots x_q. P_n^{-\sigma_0} \dots \sigma_p \not\sqsubseteq \lambda x_0 \dots x_{q'}. P_n^{-\sigma'_0} \dots \sigma_{p'}.$$

18.4.24. Показать, что не все непрерывные отображения $f: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ предствимы. [Указание. Положить $f(A) = \text{если } A = \perp, \text{ то } \perp \text{ иначе } \lambda x.x$.]

18.4.25. Показать, что $(P\omega, \cdot, \lambda^-)$ не является λ -алгеброй.

18.4.26 (Скотт; Плоткин и Смит [1978]). (i) Определим **СРО*** как подкатегорию категории **СРО**, имеющую те же объекты и морфизмы

$\text{Hom}(D, D') = \{f \in [D \rightarrow D'] \mid (f, g) \text{ есть проекция } D' \text{ на } D \text{ для некоторого } g\}$.

Показать, что если f есть морфизм в **СРО***, то соответствующий g единствен (мы его обозначим через f^R).

(ii) Показать, что **СРО*** имеет инъективные пределы и

$$\varinjlim (D_i, f_i) = \varprojlim (D_i, f_i^R),$$

где инъективный предел берется в **СРО***, а обращение — в **СРО**.

(iii) Функтор $F: \mathbf{CPO}^* \rightarrow \mathbf{CPO}^*$ называется локально непрерывным, если

$$F\left(\bigcup f_n\right) = \bigcup F(f_n),$$

где последовательность $f_n \in [D \rightarrow D']$ направлена. Предположим, что

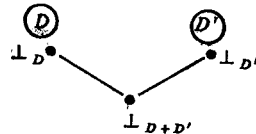
(1) F — локально непрерывный функтор на $\mathbf{CPO}^*$;

(2) $(\exists D_0 \in \mathbf{CPO}^*) \exists f (f \in \text{Hom}_{\mathbf{CPO}^*}(D_0, FD_0))$.

Показать, что тогда $D_\infty = FD_\infty$ для некоторого объекта $D_\infty \in \mathbf{CPO}^*$.

(iv) Показать, что построение модели Скотта D_∞ можно представить как применение п. (iii), рассматривая отображение $FD = [D \rightarrow D]$ как функтор в $\mathbf{CPO}^*$.

(v) Определим сумму $D + D'$ объектов $D, D' \in \mathbf{CPO}$ следующей диаграммой:



Иными словами, берем дизъюнктные копии и добавляем новый нижний элемент $\perp$.

Построить в $\mathbf{CPO}$ решения следующих «рекурсивных уравнений в областях»:

$$D = D_0 + [D \rightarrow D], \quad D = D \times ([D_0 \rightarrow D] + D), \quad \text{где } D_0 \text{ дано.}$$

18.4.27 (Скотт [1976]). Расширим множество Λ до множества LAMBDA , добавив константу 0, одноместные операции $+1$, -1 и трехместную операцию $\rightarrow$. Семантика этих новых символов в $P\omega$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \{0\}, \quad x + 1 = \{n + 1 \mid n \in x\}, \quad x - 1 = \{n \mid n + 1 \in x\}, \\ z \supset x, y &= \{n \in x \mid 0 \in z\} \cup \{m \in y \mid \exists k (k + 1 \in z)\}. \end{aligned}$$

Показать, что интерпретации термов из множества LAMBDA в $P\omega$ составляют в точности совокупность рекурсивно перечислимых множеств.

18.4.28. Пусть объект $D \in \mathbf{CPO}$ изоморфен множеству $\{f: D \rightarrow D \mid f \text{ монотонна}\}$ с поточечным частичным упорядочением. Показать, что в этом случае D тривиален.

18.4.29* (Энгелер [1979]). Пусть $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot \rangle$ — аппликативная структура. Показать, что $\mathfrak{M}$ может быть вложена в λ -модель. [Указание. Рассмотрим λ -модель D_A , введенную в § 5.4. Определим отображения $f_n, f: A \rightarrow P(B)$ следующим образом. $f_0(a) = \{a\}$; $f_{n+1}(a) = f_n(a) \cup \{\langle \{a'\}, b \rangle \mid a' \in A \wedge b \in \{f_n(a \cdot a')\}\}$; $f(a) = \bigcup_n f_n(a)$. Показать, что f вкладывает $\mathfrak{M}$ в D_A .]

18.4.30 (М. Боффа). Известно, что в теории множеств Цермело — Френкеля аксиому фундирования можно непротиворечиво заменить на ее полное отрицание, утверждающее что для любой модели $\langle A, R \rangle$ аксиомы экстенциональности найдется транзитивное множество T , такое, что $\langle A, R \rangle \cong \langle T, \in \rangle$. Эта замена не влияет на математическую силу теории множеств. Показать, что в получившейся теории доказуемо следующее утверждение. Любая экстенциональная аппликативная структура $\langle X, \cdot \rangle$ изоморфна такой, в которой совпадает с настоящей теоретико-множественной аппликацией (т. е. $x \cdot y = x(y)$).

18.4.31 (Скотт). Показать, что любую аппликативную структуру $(A, *)$ можно вложить в экстенциональную λ -модель. (См. также упражнение 5.8.5.)

[Указание. Положим $D_0 = A \cup \{\perp\}$ и частично упорядочим это множество таким образом, что $\perp \leq a$ для любого $a \in A$, но нет никаких других соотношений. Построим D_∞ , так что D_0 есть ретракт множества D_∞ : $p: D_\infty \rightarrow D_0$, $q: D_0 \rightarrow D_\infty$, $p \circ q = \text{id}_{D_0}$, а кроме того, $q(a)(x) = q(a)$ для всех $x \in D_0$ (см. предложение 18.2.13(ii)). Допустим, что A содержит по крайней мере 3 различных элемента 0, 1, 2. Показать, что имеется отображение $e: A \rightarrow D_\infty$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$e(a)(x) = \begin{cases} q(a), & \text{если } p \circ x \circ q(1) = 0, \\ q(2), & \text{если } p \circ x \circ q(1) = 1, \\ e(a * p \circ x \circ q(0)), & \text{если } p \circ x \circ q(1) = 2, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $e(a)e(b) = e(a * b)$ и e взаимно однозначно.]

Глава 19

Локальная структура моделей

В этой и следующей главах будет исследована структура нескольких λ -алгебр. Имеются два аспекта этой структуры — локальный и глобальный.

Локальная структура λ -алгебры $\mathfrak{M}$ — это

$$\text{Th}(\mathfrak{M}) = \{M = N \mid \mathfrak{M} \models M = N, \quad M, N \in \Lambda^0\}.$$

Будет найдена локальная структура моделей $P\omega$ и D_∞ . Локальная структура модели из термов для λ -теории $\mathcal{T}$ — это просто

$$\text{Th}(\mathfrak{M}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}.$$

Для модели $\mathfrak{B}$ локальная структура — это $\mathcal{B}$.

Глобальная структура модели состоит из свойств, истинных в $\mathfrak{M}$, вроде экстенциональности и других (не обязательно выражимых в языке первого порядка). Некоторые из этих глобальных свойств будут изучены в следующей главе.

19.1. Локальная структура модели $P\omega$.

Локальная структура модели $P\omega$ удобно характеризуется следующим образом:

$$P\omega \models M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N),$$

$$P\omega \models M \subseteq N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \subseteq \text{BT}(N).$$

Это — переформулировка в терминах бёмовских деревьев некоторых результатов Хайланда [1976].

$\lambda\perp$ -исчисление Уодсворта оказывается полезным инструментом при изучении значений термов в $P\omega$.

19.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть ρ — оценка в $P\omega$. Семантическая функция $[\]_\rho: \Lambda \rightarrow P\omega$ продолжается на множество $\Lambda\perp$ путем добавления равенства $[\perp]_\rho = \emptyset$ к пунктам из следствия 18.1.8(iii).

Заметим, что в силу этого определения $\perp$ -редукции $\perp x \rightarrow \perp$ и $\lambda x.\perp \rightarrow \perp$ соответствуют истинным равенствам $\emptyset x = \lambda x.\emptyset = \emptyset$. Поэтому

$$M =_{\beta\perp} N \Rightarrow P\omega \models M = N.$$

Терм $\perp$ не увеличивает выразительной силы λ -исчисления, ибо уже $[\Omega] = \emptyset$, как будет показано ниже.

Предполагается, что читатель помнит введенные в § 14.3 определения понятий и операций $N \subseteq M$, $\mathcal{A}(M)$ и $M^{[k]}$ для $M, N \in \Lambda\perp$.

19.1.2. ЛЕММА. $N \in \mathcal{A}(M) \Rightarrow P\omega \models N \subseteq M$.

Доказательство. Заметим, что (с точностью до β -равенства) M получается из N путем замены некоторых вхождений $\perp$ другими термами. Отсюда и получается наш результат. Пример: Пусть $M \rightarrow_{\beta} \lambda x.xM$. Тогда $\lambda x.x \perp \in \mathcal{A}(M)$ и $P\omega \models \lambda x.x \perp \subseteq \lambda x.xM = M$. $\square$

Мы имеем также

$$M \subseteq N \Rightarrow P\omega \models M \subseteq N$$

для всех $M, N \in \Lambda\perp$ — см. лемму 19.1.11. Однако, если терм M не имеет $\beta\perp$ -н. ф., это получается не так легко, как в предыдущей лемме.

Следующая теорема аппроксимации — важный этап характеристики (не)равенства в $P\omega$:

$$M = \bigcup \{N \mid N \in \mathcal{A}(M)\}.$$

Эта теорема была высказана Скоттом как гипотеза, доказана Хайландом и улучшена Уодсвортом. Ее доказательство использует теорему нормализации для $\lambda\perp^N$ -исчисления.

19.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семантическая функция $[\]_\rho: \Lambda\perp \rightarrow P\omega$ продолжается на множество $\Lambda\perp^N$ с помощью равенства

$$[M^n]_\rho = ([M]_\rho)_n,$$

см. определение 18.1.12.

19.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda\perp$. Индексирование терма M — это отображение I , сопоставляющее каждому подтерму терма M некоторый элемент множества $\mathbb{N}$. Через M' обозначается получающийся полностью индексированный терм.

19.1.5. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda\perp$. Тогда в $P\omega$

$$M = \bigcup \{M' \mid I \text{ — индексирование терма } M\}.$$

Доказательство проводится индукцией по построению терма M с использованием равенства $x = \bigcup_n (x)_n$. $\square$

19.1.6. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda \perp^N$, причем $M \rightarrow_{\text{lab}, \beta} N$. Тогда

- (i) $P\omega \models M \subseteq N$,
- (ii) $N \subseteq M$.

(Отметим различные порядки в (i) и (ii).)

Доказательство. (i) Основные равенства, приведенные в следствии 18.1.14, показывают, что в результате lab, β -редукции значение терма сохраняется или возрастает.

(ii) Аппроксимация появляется в свертываниях вроде

$$(\lambda x.P)^0 Q \rightarrow (P[x := \perp])^0.$$

В силу следствия 14.3.20 имеем $C[\perp] \subseteq C[Q]$ для всех Q . Поэтому

$$P[x := \perp]^0 \subseteq P[x := Q] \approx (\lambda x.P) Q. \quad \square$$

19.1.7. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda \perp^N$. Тогда существует терм $N \in \Lambda \perp^N$, такой, что

- (1) $P\omega \models M \subseteq N$,
- (2) $|N| \in \mathcal{A}(|M|)$.

Доказательство. Для данного M обозначим через N его lab, β -н. ф., которая существует по теореме 14.1.12. Тогда по предыдущей лемме $P\omega \models M \subseteq N$ и $N \subseteq M$, откуда $|N| \in \mathcal{A}(|M|)$. $\square$

19.1.8. ТЕОРЕМА АППРОКСИМАЦИИ. В $P\omega$ имеем для $M \in \Lambda \perp$

$$M = \bigcup \{N \mid N \in \mathcal{A}(M)\}.$$

Доказательство. В $P\omega$ имеем

$$\begin{aligned} M &= \{\bigcup M' \mid I \text{ — индексирование терма } M\} \text{ (по лемме 19.1.5)} \subseteq \\ &\subseteq \{L \in \Lambda \perp^N \mid |L| \in \mathcal{A}(M)\} \text{ (по лемме 19.1.7)} \subseteq \\ &\subseteq \bigcup \{N \in \Lambda \perp \mid N \in \mathcal{A}(M)\} \text{ (так как } P\omega \models L \subseteq |L|) \subseteq \\ &\subseteq M \text{ (по лемме 19.1.2)}. \quad \square \end{aligned}$$

19.1.9. СЛЕДСТВИЕ. В $P\omega$ имеем для $M \in \Lambda \perp$

$$M = \bigcup_k M^{[k]}.$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathcal{A}(M)$. Пусть все узлы дерева $\text{BT}(N)$ имеют глубину $< k$. Тогда $N \subseteq M^{[k]}$, откуда $P\omega \models N \subseteq M^{[k]}$ по лемме 19.1.2, и получается нужный результат. $\square$

Далее будет дано теоретико-модельное доказательство непротиворечивости системы $\mathcal{H}$.

19.1.10. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $M \in \Lambda$. Тогда

$$M \text{ неразрешим} \Leftrightarrow P\omega \models M = \emptyset.$$

(ii) $P\omega \models \mathcal{H}$, т. е. модель $P\omega$ осмысленна.

Доказательство. (i) $(\Rightarrow)$ Если M неразрешим, то $\mathcal{A}(M) = \{\perp\}$ и, следовательно, $[M] = \bigcup \{[\perp]\} = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Если бы M был разрешим, то для некоторых $\vec{x}, \vec{N}$ мы имели бы (согласно следствию 18.1.14)

$$P\omega \models I = (\lambda \vec{x}. M) \vec{N} = (\lambda \vec{x}. \emptyset) \vec{N} = \emptyset \vec{N} = \emptyset$$

в противоречие со следствием 18.1.15.

(ii) непосредственно получается из (i). $\square$

Теперь мы можем доказать обобщение формулировки леммы 19.1.2.

19.1.11. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda \perp$. Тогда

$$M \subseteq N \Rightarrow P\omega \models M \subseteq N.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} M \subseteq N &\Rightarrow \forall k (M^{[k]} \subseteq N) \Rightarrow \forall k (P\omega \models M^{[k]} \subseteq N) \text{ (по лемме 19.1.2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\omega \models M = \bigcup_k M^{[k]} \subseteq N \end{aligned}$$

по (следствию к) теореме аппроксимации. $\square$

Вспомним, как отношения между бёмовскими деревьями переносятся на термы. Например,

$$M \leq_{\eta} N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \leq_{\eta} \text{BT}(N).$$

Эти определения очевидным образом распространяются на множество $\Lambda \perp^N$.

19.1.12. ЛЕММА. Пусть $M \in \Lambda \perp$ и $x \leq_{\eta} M$. Тогда

$$P\omega \models x \subseteq M.$$

Доказательство. Если M есть конечное η -расширение переменной x , то нужный результат следует из предложения 18.1.9(i), т. е.

$$(1) \quad P\omega \models a \subseteq \lambda z. az.$$

В общем случае по предположению

$$M = \lambda a_1 \dots a_n. x M_1 \dots M_n.$$

С помощью индукции по k мы покажем, что $P\omega \models (x)_k \subseteq M$.

После этого нужный результат следует из равенства $x = \bigcup_k (x)_k$.

Пусть $k = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} x_j &\subseteq \lambda a_1 \cdots a_n \cdot (x)_0 a_1 \cdots a_n = \lambda a_1 \cdots a_n \cdot (x)_0 \perp \cdots \perp \subseteq \\ &\subseteq \lambda a_1 \cdots a_n \cdot x M_1 \cdots M_n = M \end{aligned}$$

в силу (1) и основных равенств (следствие 18.1.14). При переходе от k к $k+1$ снова получаем с помощью основных равенств, что

$$\begin{aligned} (x)_{k+1} &\subseteq \lambda a_1 \cdots a_n \cdot (x)_{k+1} a_1 \cdots a_n \subseteq \\ &\subseteq \lambda a_1 \cdots a_n \cdot (x)_{k+1} (a_1)_k (a_2)_{k-1} \cdots (a_n)_{k+1} \perp n. \end{aligned}$$

Так как $x \leq_\eta M$, то $a_i \leq_\eta M_i$, $1 \leq i \leq n$, откуда по предположению индукции

$$P\omega \models (x)_{k+1} \subseteq \lambda a_1 \cdots a_n \cdot x M_1 \cdots M_n = M. \quad \square$$

и потому

$$P\omega \models (x)_{k+1} \subseteq \lambda a_1 \cdots a_n \cdot x M_1 \cdots M_n = M. \quad \square$$

19.1.13. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda \perp$.

- (i) Если M находится в $\beta \perp$ -н. ф. и $M \leq_\eta N$, то $P\omega \models M \subseteq N$.
(ii) $M \leq_\eta N \Rightarrow P\omega \models M \subseteq N$.

Доказательство. (i) устанавливается индукцией по построению терма M . Если $M \equiv x$, то это просто лемма 19.1.12, поэтому предположим, что $M \equiv \lambda \vec{x}. y M_1 \cdots M_n$. По предположению

$$N = \lambda \vec{x} a. y N_1 \cdots N_n \vec{L},$$

где $\vec{M} \leq_\eta \vec{N}$ и $\vec{a} \leq_\eta \vec{L}$. Тогда по предположению индукции и предыдущей лемме в $P\omega$

$$M = \lambda \vec{x}. y \vec{M} \subseteq \lambda \vec{x} a. y \vec{M} a \subseteq \lambda \vec{x} a. y \vec{N} \vec{L} = N.$$

(ii) следует из (i) с помощью теоремы аппроксимации (см. доказательство леммы 19.1.11). $\square$

19.1.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda \perp$. Тогда

$$M \eta \sqsubseteq N \Rightarrow P\omega \models M \subseteq N.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} M \eta \sqsubseteq N &\Rightarrow M \leq_\eta M' \sqsubseteq N \text{ (для некоторого } M') \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\omega \models M \subseteq M' \subseteq N \end{aligned}$$

по леммам 19.1.11 и 19.1.13(ii). $\square$

Дальше мы покажем, что справедливо обращение предложения 19.1.14. Доказательство занимает 19.1.15—19.1.18.

19.1.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$, $\alpha \in \text{Seq}$.

(i) Будем писать $M \text{ sup}_\alpha N$, если $\text{BT}(M) \text{ sup}_\alpha \text{BT}(N)$ (см. определение 10.2.28(ii)).

(ii) Число p достаточно велико для α - M - N , если p больше, чем число узлов, непосредственно следующих за произвольным узлом $\beta \leq \alpha$ в $\text{BT}(M)$ или $\text{BT}(N)$.

(iii) α - M - N -подстановщик — это отображение $+: \Lambda \rightarrow \mathcal{T}(P\omega)$, такое, что для некоторых переменных $y_0, \dots, y_n$ и некоторого числа p , достаточно большого для α - M - N , мы имеем для всех $Q \in \Lambda$

$$Q^+ \equiv Q[y_0 := P_p^- y_0] \cdots [y_n := P_p^- y_n],$$

где объекты $P_p^- \in P\omega$ введены в определении 18.1.18.

Обозначения. Мы пишем $+ \in \alpha$ - M - N , если $+$ есть α - M - N -подстановщик.

19.1.16. ЛЕММА. Пусть $A, B \in \mathcal{T}(P\omega)$, причем

$$A \equiv x A_1 \cdots A_n, \quad B \equiv y B_1 \cdots B_m.$$

Тогда $P\omega \not\models A \subseteq B$, если $x \neq y$ или $n \neq m$.

Доказательство. Случай 1. $x \neq y$. Пусть $a, b \in P\omega$ таковы, что $a \not\subseteq b$. Берем $\rho(x) = \lambda a_1 \cdots a_n \cdot a$, $\rho(x) = \lambda b_1 \cdots b_m \cdot b$. Тогда $P\omega, \rho \not\models A \subseteq B$.

Случай 2. $x \equiv y$ и $n \neq m$. Предположим для простоты, что $n = m + 2$. Пусть $P\omega \models A \subseteq B$. Тогда

$$P\omega \models x A_1 \cdots A_{m+2} z z \omega \subseteq x B_1 \cdots B_m z z \omega.$$

Сделав подстановку $x := \lambda a_1 \cdots a_{m+3} \cdot a_{m+3}$, получим

$$P\omega \models z z \omega \subseteq \omega,$$

что противоречит случаю 1. $\square$

19.1.17. ЛЕММА. Пусть α — минимальный узел дерева $\text{BT}(N)$, такой, что $M \text{ sup}_\alpha N$. Тогда

$$(\forall + \in \alpha\text{-}M\text{-}N) (P\omega \not\models M^+ \subseteq N^+).$$

Доказательство проводится индукцией по длине k узла α . Самый запутанный случай $k = 0$, т. е. $\alpha = \langle \rangle$. Пусть $+ \in \langle \rangle$ - M - N . Допустим для проведения к противоречию, что

$$(1) \quad P\omega \models M^+ \subseteq N^+.$$

По условию леммы $M \text{ sup}_\alpha N$, т. е. $\text{BT}(M)$ не вкладывается в $\text{BT}(N)$. Поэтому M разрешим и имеет г. н. ф., которую мы запишем в виде

$$(2) \quad M = \lambda x_1 \cdots x_n \cdot y M_1 \cdots M_n,$$

Случай 1. Терм N неразрешим. Тогда по теореме 19.1.10 имеем $P\omega \models N^+ = \emptyset$, и из (1) следует, что $P\omega \models M^+ = \emptyset$. Тогда (применяя обе части к $x_1, \dots, x_n$ и делая подстановку $[y := P_p^- y]$, если она еще не была сделана), получаем

$$P\omega \models P_p^- y M_1^+ \dots M_m^+ = \emptyset \quad x_1 \dots x_n = \emptyset.$$

Поэтому

$$P\omega \models P_p^- M_1^+ \dots M_m^+ z_{m+1} \dots z_{p+1} = \emptyset,$$

откуда

$$P\omega \models z_{p+1} y M_1^+ \dots M_m^+ z_{m+1} \dots z_p = \emptyset$$

в силу следствия 18.1.19. Так как z_{p+1} можно интерпретировать произвольным образом, последнее соотношение ложно.

Случай 2. Терм N разрешим. Запишем его г.н.ф. в виде

$$(3) \quad N = \lambda x_1 \dots x_{n'} y' N_1 \dots N_{m'}.$$

По условию имеем $M \supset_{\alpha} N$, т. е.

$$\langle \lambda x_1 \dots x_n y, m \rangle \text{ не вкладывается в } \langle \lambda x_1 \dots x_{n'} y', m' \rangle.$$

Следовательно,

$$y \neq y' \text{ или } m - n \neq m' - n', \text{ или } n > n'.$$

Случай 2.1. $y \neq y'$. Пусть $n \geq n'$. Применяя обе части включения из (1) к $x_1, \dots, x_n$ и делая (если они еще не сделаны) подстановки $[y := P_p^- y]$, $[y' := P_p^- y']$, получаем

$$P\omega \models P_p^- y M_1^+ \dots M_m^+ \subseteq P_p^- y' N_1^+ \dots N_{m'}^+ x_{n'+1} \dots x_n.$$

Подставляя в эту формулу вместо переменных $x_{n'+1}, \dots, x_n$ и применяя обе части к достаточному количеству l , получаем

$$P\omega \models P_p^- y M_1^+ \dots M_m^+ l^{\sim k} \subseteq P_p^- y' N_1^+ \dots N_{m'}^+ l^{\sim k'}$$

для некоторых больших k, k' . Так как $p > m, m'$ (из-за $+ \in \alpha\text{-}M\text{-}N$), следствие 18.1.19 дает

$$P\omega \models l y M_1^+ \dots M_m^+ l^{\sim k-1} \subseteq l y' N_1^+ \dots N_{m'}^+ l^{\sim k'-1}$$

в противоречие с леммой 19.1.16.

Случай 2.2. $y \equiv y'$ и $n - m \neq n' - m'$. Применяя обе части включения из (1) к $x^{\sim k}$ с большим k (и делая, возможно, подстановку $[y := P_p^- y]$), получаем

$$P\omega \models P_p^- y M_1^+ \dots M_m^+ x^{\sim (k-n)} \subseteq P_p^- y N_1^+ \dots N_{m'}^+ x^{\sim (k-n')}.$$

Отсюда в силу следствия 18.1.19

$$P\omega \models x y M_1^+ \dots M_m^+ x^{\sim (k-n-1)} \subseteq x y N_1^+ \dots N_{m'}^+ x^{\sim (k-n'-1)},$$

что противоречит лемме 19.1.16, так как $m + k - n - 1 \neq m' + k - n' - 1$ из-за условий, определяющих случай 2.2.

Случай 2.3. $y \equiv y'$ и $n > n'$. Применяя обе части из (1) к $x_1, \dots, x_{n'}$ (и, возможно, делая подстановку

$$P\omega \models \lambda x_{n'+1} \dots x_n P_p^- y M_1^+ \dots M_m^+ \subseteq P_p^- y N_1^+ \dots$$

в противоречие с леммой 18.1.20. Тем самым закончено доказательство для случая $k = 0$.

Если $k > 0$, то $\alpha = \langle i \rangle * \beta$ и $BT(M)$ вкладывается в $BT(N)$. Из того, что $M \supset_{\alpha} N$, следует, что M, N разрешимы и (2) и (3) мы имеем

$$y \equiv y', n \leq n' \text{ и } m - n = m' - n' \quad (\text{откуда } m$$

Пусть $+ \in \alpha\text{-}M\text{-}N$, и снова предположим, что вып. По предположению индукции

$$(4) \quad (\forall + \in \beta\text{-}M_i\text{-}N_i) (P\omega \models M_i^+ \subseteq N_i^+).$$

Из (1) получаем уже знакомым способом, что

$$P\omega \models P_p^- y M_1^+ \dots M_m^+ x^{\sim n'-n} z^{\sim k} \subseteq P_p^- y N_1^+ \dots N_{m'}^+ z^{\sim k}$$

Следовательно,

$$P\omega \models z y M_1^+ \dots M_m^+ x^{\sim n'-n} z^{\sim k-1} \subseteq z y N_1^+ \dots N_{m'}^+ z^{\sim k-1}$$

Интерпретируя z как $\lambda a_0 a_1 \dots a_{k-1+m'} a_i$, получаем

$$P\omega \models M_i^+ \subseteq N_i^+.$$

Из $+ \in \alpha\text{-}M\text{-}N$ следует $+ \in \beta\text{-}M_i\text{-}N_i$, что противоречит

19.1.18. Предложение. $M^{\eta} \not\subseteq N \Rightarrow P\omega \models M \subseteq N$.

Доказательство. По условию нашего предложения имеем $M \supset_{\alpha} N$ для некоторого узла α минимальной длины. Тогда 19.1.17 следует (если взять пустую подстановку), что $\equiv N$. $\square$

Наконец, мы имеем теорему характеризации, установленную Хайландом [1976].

19.1.19. ТЕОРЕМА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ $P\omega$. Пусть Тогда

$$(i) \quad P\omega \models M \subseteq N \Leftrightarrow BT(M)^{\eta} \subseteq BT(N),$$

$$(ii) \quad P\omega \models M = N \Leftrightarrow BT(M) = BT(N).$$

Доказательство. (i) получается из предложения 19.1.18.

(ii) получается из (i) и леммы 10.2.24(i). $\square$

19.2. Локальная структура модели D_∞

Локальная структура модели D_∞ имеет следующую симпатичную характеристику. Для всех п. ч. у. м. D

- (i) $D_\infty \models M = N \Leftrightarrow \mathcal{H}^* \vdash M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) =_{\eta} \text{BT}(N)$.
- (ii) $D_\infty \models M \sqsubseteq N \Leftrightarrow \forall C [] [C[M] \text{ разрешим} \Rightarrow C[N] \text{ разрешим}] \Leftrightarrow \text{BT}(M) \sqsubseteq^{\eta} \text{BT}(N)$.

Отсюда следует, что структура модели D_∞ не зависит от D .

Доказательство проходит те же этапы, что и при анализе P_ω . Приведенные выше эквивалентности — это переформулировки (в терминах бёмовских деревьев) результатов, независимо полученных в 1972 г. Хайландом [1976] и Уодсвортом [1976]. Анализ модели P_ω был дан Хайландом позднее, в 1973 г. Формулировка в терминах бёмовских деревьев взята из статьи Барендрегта [1977]. См. также Накадзима [1975] и упр. 19.4.4.

19.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть ρ — оценка в D_∞ . Семантическая функция $[]_\rho: \Lambda \rightarrow D_\infty$ продолжается на $\Lambda_\perp$ и $\Lambda_\perp^N$ с помощью равенств

$$[\perp]_\rho = \perp, [M^n]_\rho = ([M]_\rho)_n.$$

19.2.2. ТЕОРЕМА аппроксимации для D_∞ . Пусть $M \in \Lambda_\perp$. Тогда в D_∞

$$M = \bigsqcup \{N \mid N \in \mathcal{A}(M)\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы аппроксимации для P_ω . Мы показываем, что для терма $M \in \Lambda_\perp$ в D_∞

$$M = \bigsqcup \{M' \mid I \text{ — индексирование для } M\}.$$

Аналогичным образом можно доказать леммы, соответствующие 19.1.2, 19.1.6 и 19.1.7, а из них следует нужный результат. $\square$

19.2.3. СЛЕДСТВИЕ. В D_∞ для $M \in \Lambda_\perp$

$$M = \bigsqcup_k M^{[k]}.$$

Доказательство такое же, как для следствия 19.1.9. $\square$

19.2.4. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $M \in \Lambda$. Тогда

$$M \text{ неразрешим} \Leftrightarrow D_\infty \models M = \perp.$$

(ii) $D_\infty \models \mathcal{H}\eta$; в частности, D_∞ осмыслена, а $\mathcal{H}\eta$ непротиворечива.

Доказательство. (i) доказывается так же, как теорема 19.1.10, с использованием равенств $\perp x = \lambda x. \perp = \perp$.

(ii) следует из (i) и того факта, что $D_\infty \models$ экстенциональность (см. теорему 18.2.14(ii)). $\square$

19.2.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда

$$D_\infty \models M \sqsubseteq N \Rightarrow \forall C [] [C[M] \text{ разрешим} \Rightarrow C[N] \text{ разрешим}].$$

Доказательство. Допустим, что $M \sqsubseteq N$ в D_∞ и выберем контекст $C [] \in \Lambda$. Если бы терм $C[N]$ был неразрешим, то в D_∞

$$\perp = C[N] \sqsupseteq C[M],$$

откуда $C[M] = \perp$, и, значит, $C[M]$ неразрешим. $\square$

19.2.6. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \Lambda_\perp$. Тогда

- (i) $M \sqsubseteq N \models D_\infty \models M \sqsubseteq N$,
- (ii) $M \leq_{\eta} N \Rightarrow D_\infty \models M \sqsubseteq N$,
- (iii) $M \leq_{\eta} N \Rightarrow D_\infty \models M = N$.

Доказательство. (i), (ii). Как и для модели P_ω , сначала рассматриваем случай, когда M находится в $\beta_\perp$ -н.ф. Тогда применима теорема аппроксимации.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad M \leq_{\eta} N &\Rightarrow \forall k \exists M_0 (M_0 \twoheadrightarrow_{\eta} M \text{ и } M_0^{(k)} = N^{(k)}) \text{ (по лемме} \\ 10.2.26) &\Rightarrow \forall k (D_\infty \models N^{(k)} = M_0^{(k)} \sqsubseteq M_0 = M) \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_\infty \models N = \bigsqcup_k N^{(k)} \sqsubseteq M, \end{aligned}$$

и нужный результат следует из (ii). $\square$

19.2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $M \sqsubseteq^{\eta} N \Rightarrow D_\infty \models M \sqsubseteq N$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} M \sqsubseteq^{\eta} N &\Rightarrow M \leq_{\eta} M' \sqsubseteq N' \geq_{\eta} N \text{ для некоторых } M', N' \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_\infty \models M = M' \sqsubseteq N' = N \end{aligned}$$

по предыдущей лемме. $\square$

19.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

$$\forall C [] [C[M] \text{ разрешим} \Rightarrow C[N] \text{ разрешим}] \Rightarrow M \sqsubseteq^{\eta} N.$$

Доказательство. Если $M \not\sqsubseteq^{\eta} N$, то $\text{BT}(M) \not\sqsubseteq^{\eta} \text{BT}(N)$ и, значит, по лемме 10.2.30 $M \not\sim_{\alpha} N$ и $M|\alpha \downarrow$ для некоторого узла $\alpha \in \text{Seq}$. Взяв узел α минимальной длины, мы видим, что $\mathcal{F} = \{M, N\}$ согласовано вдоль α . В силу предложения 10.3.13 имеется α - $\mathcal{F}$ -точное бёмовское преобразование π . Это значит, что $M^{\pi} \sim N^{\pi}$ и M^{π} разрешим. Но тогда по лемме 10.4.1(ii) мы имеем для некоторого π'

$$M^{\pi'} \text{ разрешим и } N^{\pi'} \text{ неразрешим.}$$

Поэтому

$C_{\pi'}[M]$ разрешим и $C_{\pi'}[N]$ неразрешим

по лемме 10.3.4. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему Хайланда и Уодсворта о характеристизации модели D_{∞} .

19.2.9. ТЕОРЕМА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ D_{∞} . Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда для любого п. ч. у. м. D

(i) $D_{\infty} \models M \equiv N \Leftrightarrow \forall C[] [C[M] \text{ разрешим} \Rightarrow C[N] \text{ разрешим}] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{BT}(M) \equiv^{\eta} \text{BT}(N)$.

(ii) $D_{\infty} \models M = N \Leftrightarrow \mathcal{H}^* \vdash M = N \Leftrightarrow \text{BT}(M) =_{\eta} \text{BT}(N)$.

Доказательство. (i) получается из следствия 19.2.5 и предложений 19.2.7, 19.2.8.

(ii) Из (i) имеем

$$\begin{aligned} D_{\infty} \models M = N &\Leftrightarrow \forall C[] [C[M] \text{ разрешим} \Leftrightarrow C[N] \text{ разрешим}] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{H}^* \vdash M = N \text{ (по лемме 16.2.2)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{BT}(M) \equiv^{\eta} \text{BT}(N) \equiv^{\eta} \text{BT}(M) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{BT}(M) =_{\eta} \text{BT}(N) \end{aligned}$$

по определению $=_{\eta}$. $\square$

Теорему характеристики можно переформулировать в терминах деревьев бёмовского типа. Напомним, что для $A \in \mathfrak{B}$ дерево $\infty \eta A$ — это его бесконечная η -н. ф. (см. предложение 10.2.15). Не всегда $\infty \eta \text{BT}(M) \equiv \mathfrak{B} \Lambda$.

19.2.10. Следствие.

$$D_{\infty} \models M = N \Leftrightarrow \infty \eta \text{BT}(M) = \infty \eta \text{BT}(N).$$

Доказательство получается с помощью теоремы 10.2.31. $\square$

Соответствующее утверждение для $\equiv$ неверно — см. упр. 19.4.8.

Из теоремы характеристики следует, что $D_{\infty} \models I = J$, где $J = \Theta(\lambda j x y. x(jy))$ — см. пример 10.2.9. Это равенство было найдено Уодсвортом [1971] с использованием специально подобранного вычисления.

Следующее следствие из доказательства теоремы характеристики было отмечено Уодсвортом [1976] и Накадзимой [1975].

19.2.11. Следствие. $D_{\infty} \models \omega$. Иными словами, для любых $M, N \in \Lambda$

$$[(\forall Z \in \Lambda^0) (D_{\infty} \models MZ = NZ)] \Rightarrow D_{\infty} \models M = N.$$

Доказательство. Пусть $M, N \in \Lambda^0$. Рассуждаем в D_{∞} . Допустим, что $(\forall Z \in \Lambda^0) (MZ = NZ)$, но $M \neq N$. Пусть для определенности $M \not\sqsubseteq N$. Тогда по теореме 19.2.12

$\exists C[] (C[M] \text{ разрешим, а } C[N] \text{ неразрешим})$.

Это утверждение доказывается с помощью техники выворачивания по Бёму. Поэтому, так как M, N замкнуты, мы имеем (см. лемму 10.3.4(ii))

$C[M] = MP_1 \cdots P_m$ разрешим,

$C[N] = NP_1 \cdots P_m$ неразрешим.

Не умаляя общности, можно считать, что термы $\vec{P}$ замкнуты (в противном случае надо подставить в них что-нибудь). Одна из посылок рассматриваемого правила ω имеет вид $M\vec{P} = N\vec{P}$, откуда $\perp \neq M\vec{P} = N\vec{P} = \perp$, где последнее равенство получается по теореме 19.2.4(i), что дает противоречие.

Мы показали теперь, что $D_{\infty} \models \omega^0$. Из предложения 5.3.20 следует, что $D_{\infty} \models \omega$. $\square$

В упр. 19.4.6 показано, что $D_{\infty} \not\models \omega$ -аксиома.

Познакомившись с теоремами характеристики для $P\omega$ и D_{∞} , можно спросить, существует ли λ -модель $\mathfrak{M}$, являющаяся п. ч. у. м. и такая, что

$$\mathfrak{M} \models M \equiv N \Leftrightarrow \text{BT}(M) \equiv \text{BT}(N).$$

Это верно для модели Плоткина $\mathbb{T}^{\omega}$ — см. Барендрегт и Лонго [1980].

19.3. Непрерывные λ -модели

Справедливость теоремы аппроксимации — важная черта моделей $P\omega$ и D_{∞} . Поэтому Уэлч [1975] ввел понятие «непрерывной семантики», сводящееся приблизительно к следующему.

19.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывная λ -модель — это структура $\mathfrak{M} = (X, \cdot, \equiv)$, такая, что

(1) $\mathfrak{M} = (X, \equiv)$ есть п. ч. у. м.

(2) $\mathfrak{M} = (X, \cdot)$ есть λ -модель, в которой операция $\cdot$ непрерывна (в топологии Скотта, индуцированной отношением $\equiv$).

(3) Для любого терма $M \in \Lambda$ множество $\{M^{[n]} | n \in \mathbb{N}\}$ направлено, и в $\mathfrak{M}$ мы имеем $M = \bigsqcup_n M^{[n]}$. Здесь $\bigsqcup$ — операция взятия супремума в $\mathfrak{M}$, а все вхождения константы $\perp$ в $M^{[n]}$ нужно интерпретировать как наименьший элемент $\mathfrak{M}$.

Из (2) следует, что в непрерывной λ -модели все представимые функции непрерывны.

19.3.2. Факт. P_ω , D_∞ и $\mathfrak{B}$ — непрерывные λ -модели.

Доказательство. Свойства (1), (2) для моделей P_ω и D_∞ — это основные теоремы из § 18.1, 18.2. Свойство (3) — это теоремы аппроксимации для этих моделей (следствия 19.1.9, 19.2.3). Для модели $\mathfrak{B}$ свойства (1), (2), (3) — это основные теоремы § 18.3. Свойство (2) нетривиально и выражает непрерывность операции аппликации на бёмовских деревьях. $\square$

Не требуется, чтобы в непрерывной λ -модели все непрерывные функции были представимы. В действительности для $\mathfrak{B}$ это не так — см. упр. 18.4.24.

19.3.3. Предложение. Пусть $\mathfrak{M}$ — непрерывная λ -модель и $M, N \in \Lambda$. Тогда

$$\text{BT}(M) = \text{BT}(N) \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N.$$

В частности, $\mathfrak{M}$ осмысленна.

Доказательство очевидно, так как $M^{[n]}$ — усеченные бёмовские деревья. $\square$

Напомним, что $Y \in \Lambda$ называется комбинатором неподвижной точки, если $(\forall F \in \Lambda) (YF = F(YF))$. Для $f \in \mathfrak{M}$ положим $Y^*f = \bigcup_n f^n(\perp)$. Тогда Y^* — комбинатор наименьшей неподвижной точки — см. теорему 1.2.17.

Следующая теорема Уэлча [1975] удобным образом обобщает результаты Морриса [1968] и Парка [1976]. Первоначальные доказательства требовали некоторых вычислений — см. упражнение 18.4.20.

19.3.4. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ — непрерывная λ -модель. Тогда все комбинаторы неподвижной точки в Λ равны в $\mathfrak{M}$ и представляют комбинатор наименьшей неподвижной точки Y^* .

Доказательство. Допустим, что $Y \in \Lambda$ — комбинатор неподвижной точки. Тогда

$$Yf = f(Yf).$$

Как и в доказательстве леммы 6.5.3, получаем, что

$$Y = \lambda f. Yf = \lambda f. f(Yf).$$

Следовательно, $\text{BT}(Y)$ имеет вид

$$\begin{array}{c} \lambda f. f \\ | \\ f \\ | \\ \vdots \end{array}$$

Из предыдущего предложения теперь следует, что все комбинаторы неподвижной точки равны в $\mathfrak{M}$. Далее для $f \in \mathfrak{M}$ мы имеем в $\mathfrak{M}$

$$Yf = \left(\bigcup_n Y^{[n]} \right) f = \bigcup_n (Y^{[n]} f) = \bigcup_n f^n(\perp) = Y^*(f).$$

Следовательно, Y представляет Y^* . $\square$

В общем случае непрерывное отображение $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ не является представимым. Доказанная теорема утверждает, что $Y^* \in [\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}]$ не только представим, но и определим.

19.3.5. Следствие (Моррис [1968]). Пусть $Y \in \Lambda$ — комбинатор неподвижной точки. Тогда

$$(\forall FM \in \Lambda) [FM = M \Rightarrow YF \sqsubseteq M],$$

т. е. YF есть $\sqsubseteq$ -наименьшая неподвижная точка для F .

Доказательство. Взять $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ в предыдущей теореме. $\square$
См. упр. 16.5.5, где приведена первоначальная формулировка теоремы Морриса.

19.3.6. Следствие (Парк [1976]). Пусть $\mathfrak{M}$ — это P_ω или D_∞ . Пусть $Y_{\text{Tarski}} \in \mathfrak{M}$ — элемент, представляющий Y^* — комбинатор наименьшей неподвижной точки. Пусть Y_{Curry} — образ некоторого комбинатора неподвижной точки $\in \Lambda$ в модели $\mathfrak{M}$. Тогда $Y_{\text{Curry}} = Y_{\text{Tarski}}$.

Доказательство (только для P_ω , так как для D_∞ оно еще легче). По теореме 19.3.4

$$\forall f (Y_{\text{Tarski}} f = Y^*(f) = Y_{\text{Curry}} f),$$

откуда в силу слабой экстенциональности $\lambda f. Y_{\text{Curry}} f = \lambda f. Y_{\text{Tarski}} f$, и потому $Y_{\text{Curry}} = Y_{\text{Tarski}}$. (Заметим, что для элемента Y , который равен Y_{Curry} или Y_{Tarski} , мы имеем $Y = \lambda f. Yf$; в первом случае потому, что $Y = \lambda f. f(Yf)$; во втором потому, что $Y = \text{graph}(Y^*)$.) $\square$

19.4. Упражнения

19.4.1. Для $M \in \Lambda^0$ показать непосредственно, что

$$M \text{ неразрешим} \Rightarrow M = \emptyset \text{ в } P_\omega.$$

19.4.2 (Уодсворт). Пусть $J = \Theta(\lambda jxy. x(jy))$. Показать, что $D_\infty \models I = J$. Получить отсюда, что ни для какого подмножества $E \subseteq D_\infty$ не может выполняться

$$[M]^{D_\infty} \in E \Leftrightarrow M \text{ имеет н. ф.}$$

для всех $M \in \Lambda^0$,

19.4.3 (Уодсворт). (i) Пусть $M \in \Lambda^0$ разрешим. Показать, что имеется последовательность $M_n \in \Lambda^0$, такая что в D_∞ выполнено (1) $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$; (2) $M = \bigcup_n M_n$; (3) $\forall n (M \neq M_n)$.

[Указание. Пусть N — бесконечное η -расширение терма M . Берем $M_n = N^{(n)}$.]

(ii) Пусть $M, N \in \Lambda^0$. Допустим, что $D_\infty \models \perp \neq M \subseteq N$. Показать, что существует последовательность $N_n \in \Lambda^0$, такая что в D_∞ мы имеем

$$(1) \quad N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots; \quad (2) \quad N = \bigcup_n N_n; \quad (3) \quad \forall n (M \not\subseteq N_n).$$

(iii) Показать, что для $M, N \in \Lambda^0$ в D_∞ мы имеем $M \ll N \Rightarrow M = \perp$.

Получить отсюда, что D_∞^0 не может быть непрерывной решеткой.

19.4.4 (Накадзима [1975]). Сейчас мы определим для $M \in \Lambda$ дерево Накадзимы $NT(M)$. Это будет помеченное дерево с бесконечным ветвлением.

$NT(M) = \perp$, если M неразрешим,

$$NT(M) = \lambda \tilde{x} z_0 z_1 \dots y$$

$$NT(M_1) \dots NT(M_m) NT(z_0) NT(z_1) \dots$$

если M имеет г. н. ф. $\lambda \tilde{x}. y M_1 \dots M_m$, где $z_0, z_1, \dots$ — бесконечный список новых переменных. $NT(M)$ — это, так сказать, максимальное бесконечное η -расширение дерева $BT(M)$. Как и в случае λ -термов и бёмовских деревьев, деревья Накадзимы рассматриваются с точностью до замены связанных переменных.

Определим отношение $\subseteq$ так же, как для бёмовских деревьев. Показать, что

$$(i) \quad D_\infty \models M \subseteq N \Leftrightarrow NT(M) \subseteq NT(N),$$

$$(ii) \quad D_\infty \models M = N \Leftrightarrow NT(M) = NT(N).$$

19.4.5. Показать, что $\perp$ — единственный определимый элемент множества D_∞ в D_0 . [Указание. Использовать упр. 18.4.18.]

19.4.6. Показать, что $D_\infty \not\models \omega$ -аксиома, т.е. что в общем случае для $M, N \in \Lambda$ неверно

$$D_\infty \models \left[\bigwedge_{Z \in \Lambda^0} MZ = NZ \right] \rightarrow M = N.$$

[Указание. Рассмотреть $x = \lambda z. (z_0)$ и $y = \lambda z. \perp$.]

19.4.7 (Батен, Бурбом). Модель $(P\omega, \cdot)$ зависит от кодирования (n, m) пар натуральных чисел и от кодирования e_k конечных множеств. Пусть $C: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ — произвольная взаимно однозначная функция.

(i) Показать, что, используя C как спаривающую функцию и старые e_k , можно определить графическую модель $P\omega_C$. Пусть $[M]_C$ — значение замкнутого терма M в модели $P\omega_C$.

(ii) Показать, что

$$a \in [\Omega]_C \Rightarrow \exists k (C(k, a) \in e_k), \quad e_k = \{C(k, a) \Rightarrow a \in [\Omega]_C\}.$$

(iii) Показать, что для любого $x \in P\omega$ имеется спаривающая функция C , такая что в $P\omega_C$ верно $\Omega = x$.

[Батен и Бурбом [1979] доказали несколько более сильное утверждение, а именно

$$(\forall M \in \Lambda^0) \exists C (P\omega_C \models \Omega = M),$$

из которого следует $(\forall M \in \Lambda^0) \text{Con}(\Omega = M)$. См. предложение 15.3.9.]

19.4.8. Показать, что

$$\infty \eta (BT(M)) \subseteq \infty \eta (BT(N)) \Rightarrow D_\infty \models M \subseteq N,$$

но обратная импликация не имеет места.

19.4.9. (i) Показать, что множество $[M]^{P\omega}$ для $M \in \Lambda^0$ всегда рекурсивно перечислимо.

(ii) (Джанини и Лонго [1983]). Показать, что для замкнутого терма M , имеющего нормальную форму, множество $[M]^{P\omega}$ рекурсивно.

(iii) Построить замкнутый терм M , такой что $[M]^{P\omega}$ не рекурсивно.

19.4.10. (i) (Барендрегт и Лонго [1982]) Для $A = (x, y) \in P\omega^2$ будем писать $A_- = x$, $A_+ = y$. Пусть $E_n = (e_{(n_0)}, e_{(n_1)})$ — перечисление всех конечных элементов множества $P\omega^2$. Для $A, B \in P\omega^2$ положим $A \subseteq B \Leftrightarrow A_- \subseteq B_-$ и $A_+ \subseteq B_+$. Для $A \in P\omega^2$ и непрерывной по Скотту функции $f: P\omega^2 \rightarrow P\omega^2$ положим

$$F(A) = \lambda B \in P\omega^2. AB, \text{ где}$$

$$AB = (\{m \mid (\exists E_n \in B) (n, m) \in A_-\}, \{m \mid (\exists E_n \in B) (n, m) \in A_+\});$$

$$G(f) = (\{(n, m) \mid m \in f(E_n)_-\}, \{(n, m) \mid m \in f(E_n)_+\}).$$

Показать, что F, G превращают $P\omega^2$ в λ -модель.

(ii) (Скотт) Показать, что имеется спаривающая функция $C: \omega^2 \rightarrow \omega$, такая что $P\omega_C = P\omega^2$, см. упр. 19.4.7. [Указание. Положим

$$C(n, 2m) = 2(n, m), \text{ где } (n, m) \text{ — обычная спаривающая функция,}$$

$$C(n, 2m+1) = 2(n, m) + 1;$$

$$\Phi(x) = (\{n \mid 2n \in x\}, \{n \mid 2n+1 \in x\}).]$$

Глава 20

Глобальная структура моделей

Глобальная структура λ -алгебры $\mathfrak{M}$ состоит из отличных от равенств свойств, которые истинны в $\mathfrak{M}$. В этой главе рассматриваются некоторые из этих свойств.

20.1. Экстенциональность, категоричность

Из теоретико-доказательственных рассуждений части IV вытекает несколько результатов об экстенциональности моделей из термов. Например, модель $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ экстенциональна т. и т.т., когда $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) \models \omega$, т. и т.т., когда $\mathcal{T} \models \omega$. Из $\lambda\eta \not\models \omega$ следует, что модель $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$ не является (слабо) экстенциональной. Аналогичным образом из $\lambda \not\models tr$ следует, что модель $\mathfrak{M}^0(\lambda)$ не является слабо экстенциональной.

20.1.1. ТЕОРЕМА. (i) $\mathfrak{M}(\lambda\eta) \models ext$ и $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta) \not\models ext$.

(ii) $\mathfrak{M}(\mathcal{H}\eta) \models ext$ и $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}\eta) \not\models ext$.

Доказательство. (i) сразу получается из следствия 5.3.25, теоремы 17.3.30 и предложения 4.1.18(iii).

(ii) получается аналогично с помощью теоремы 17.4.7. $\square$

20.1.2. СЛЕДСТВИЕ. (i) $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta) \not\models c. \varepsilon$; $\mathfrak{M}^0(\lambda) \not\models c. \varepsilon$.

(ii) $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}\eta) \not\models c. \varepsilon$; $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}) \not\models c. \varepsilon$.

Доказательство. (i)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\lambda\eta) \models ext &\Rightarrow \mathfrak{M}(\lambda\eta) \models 1 = 1 \text{ (по теореме 5.2.10)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathfrak{M}^0(\lambda\eta) \models 1 = 1 \Rightarrow \mathfrak{M}^0(\lambda\eta) \not\models c. \varepsilon, \end{aligned}$$

так как в противном случае было бы $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta) \models ext$.

По теореме 17.3.30(ii) имеем $\lambda \not\models tr$. Иными словами,

$$(\exists MN \in \Lambda^0) [\forall Z \in \Lambda^0 (\lambda \vdash MZ = NZ) \text{ и } \lambda \not\models Mx = Nx].$$

Следовательно, $\mathfrak{M}^0(\lambda) \models \forall x (Mx = Nx)$, но $\mathfrak{M}^0(\lambda) \not\models \lambda x. Mx = \lambda x. Nx$.

(ii) доказывается аналогично с помощью теоремы 17.4.7. $\square$

20.1.3. ЛЕММА. (i) $P\omega^0 \models \eta$, т. е. $P\omega^0 \models \forall x (x = \lambda z. xz)$.

(ii) $P\omega^0 \not\models 1 = 1$.

(iii) $P\omega^0 \not\models c. \varepsilon$.

Доказательство. (i) Пусть $M \in \Lambda^0$. Если M разрешим, то по теореме 8.3.14 терм M имеет г.н.ф., откуда $\lambda z. Mz = M$.

Если M неразрешим, то $P\omega \models M = \emptyset$ и нужное утверждение получается из $P\omega \models \emptyset = \lambda z. \emptyset z$ с помощью следствия 18.1.14(ii).

(ii) В силу следствия 18.1.8(i) и упр. 18.4.1 имеем $P\omega \models c. \varepsilon$ и $P\omega \not\models ext$. Отсюда по теореме 5.2.10 получаем $1 \neq 1$ в $P\omega$, а значит, и в $P\omega^0$.

(iii) В силу (i) $P\omega^0 \models \forall x (x = \lambda y. xy)$. В силу (ii) $P\omega^0 \not\models \lambda x. x = \lambda xy. xy$. Отсюда $P\omega^0 \not\models c. \varepsilon$. $\square$

20.1.4. СЛЕДСТВИЕ. Модели $P\omega$ и $P\omega^0$ не экстенциональны, но по разным причинам:

(i) $P\omega \models c. \varepsilon$ и $P\omega \not\models \eta$,

(ii) $P\omega^0 \not\models c. \varepsilon$ и $P\omega^0 \models \eta$.

Доказательство очевидно. $\square$

Рассмотрим ситуацию для моделей D_∞ .

20.1.5. ТЕОРЕМА. Пусть D — п.ч.у.м. Тогда

(i) $D_\infty \models ext$, $D_\infty \models \omega$, но $D_\infty \not\models \omega$ -аксиома.

(ii) $D_\infty^0 \models ext$.

Доказательство. (i) получается из теоремы 18.2.14, леммы 19.2.11 и пр. 19.4.6.

(ii) получается из (i) и предложения 5.3.23(iii). $\square$

В заключение еще несколько отрицательных результатов.

20.1.6. ФАКТ. (i) В общем случае (как и следовало ожидать)

$$\mathfrak{M}^0 \models ext \not\Rightarrow \mathfrak{M} \models ext.$$

(ii) Существует жесткая λ -алгебра $\mathfrak{M}$, такая, что

(1) $\mathfrak{M}$ нельзя гомоморфно отобразить на экстенциональную λ -алгебру;

(2) $\mathfrak{M}$ нельзя вложить в экстенциональную λ -алгебру.

Доказательство — см. упр. 20.6.3 и 20.6.5. $\square$

Для типового λ -исчисления ситуация иная — см. предложение A.1.15 в приложении A.

Теперь мы приведем некоторые результаты о категоричности моделей. Экстенциональные λ -модели (λ -алгебры, комбинаторные алгебры) категоричны тривиальным образом. Следующие

результаты заимствованы из статьи Лонго [1983], где они доказаны в более общей постановке.

20.1.7. ТЕОРЕМА. (i) (Брюс, Лонго) $P\omega$ — категоричная λ -модель.

(ii) $P\omega$ не категорична как комбинаторная алгебра.

Доказательство. (i) Скажем, что множество $x \in P\omega$ насыщенно, если $(n, m) \in x \wedge e_n \subseteq e_{n'} \Rightarrow (n', m) \in x$.

Шаг 1. Допустим, что x, x' насыщенны и $\forall y (xy = x'y)$. Тогда $x = x'$.

Доказательство.

$$(n, m) \in x \Rightarrow m \in xe_n = x'e_n \Rightarrow (\exists e_{n'} \subseteq e_n) ((n', m) \in x') \Rightarrow \\ \Rightarrow (n, m) \in x' \text{ в силу насыщенности.}$$

Поэтому $x \subseteq x'$, откуда $x = x'$ в силу симметрии. $\square_1$

Пусть теперь G удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 5.6.8 для $P\omega$.

Шаг 2. (i) $a = \{(n, m)\} \Rightarrow (n, m) \in G(F(a))$.

(ii) $\forall x (f(x) \subseteq g(x)) \Rightarrow G(f) \subseteq G(g)$.

Доказательство. (i)

$$G(F(a))e_n = ae_n = \{m\} \Rightarrow (\exists e_{n'} \subseteq e_n) (n', m) \in G(F(a)) \Rightarrow \\ \Rightarrow m \in G(F(a))e_{n'} = ae_{n'} \Rightarrow \\ \Rightarrow n = n' \text{ (так как в противном случае} \\ ae_{n'} = \emptyset) \Rightarrow (n, m) \in G(F(a)).$$

(ii) Допустим, что $\forall x (f(x) \subseteq g(x))$. Заметим, что $G(f) = 1_G \text{ graph}(f)$, где $\text{graph}(f) = \{(n, m) \mid m \in f(e_n)\}$ — обычный график в $P\omega$. Поэтому $G(f) = 1_G \text{ graph}(f) \subseteq 1_G \text{ graph}(g) = G(g)$. $\square_2$

Шаг 3. Множество $G(f)$ насыщенно.

Доказательство. Допустим, что $(n, m) \in G(f)$ и $e_n \subseteq e_{n'}$. Тогда

$$(n', m) \in G \circ F(\{(n', m)\}) \text{ (в силу 2 (i))} \subseteq G \circ F(\{(n, m)\}) \\ \text{(в силу (2) (ii))} \subseteq G \circ F(G(f)) \text{ в силу (2) (ii)} = G(f). \square_3$$

Пусть, наконец, G, G' удовлетворяют условиям 1, 2 теоремы 5.6.8. Тогда $G(f)(x) = f(x) = G'(f)(x) = G(f) = G'(f)$ (по 3.1) $\Rightarrow G = G'$. Поэтому по теореме 5.6.8(iii) $P\omega$ — категоричная λ -модель.

(ii) В силу (i) (шаг 3) множество $k = [K]^{P\omega}$ насыщенно. Очевидно, что k непусто; пусть $(n, m) \in k$. Пусть $e_n \not\subseteq e_{n'}$. Тогда $(n', m) \in k$ и $k' = k - \{(n', m)\}$ действует (экстенционально) так же, как k . Следовательно, k не единствен. $\square$

20.1.8. ТЕОРЕМА. (i) D_A не является категоричной λ -моделью. (ii) $P\omega$ и D_A не изоморфны как комбинаторные алгебры.

Доказательство. (i) Отображение G в D_A определяется равенством $G(f) = \{(\beta, b) \mid b \in f(\beta)\}$. Но годится также и $G'(f) = G(f) \cup A$.

(ii) следует из (i) и теоремы 20.1.7(ii). $\square$

У Лонго [1983] показано также, что $P\omega$ и D_A для счетного A вкладываются друг в друга как аппликативные структуры.

20.2. Свойство области

Результаты этого пункта заимствованы из статьи Барендрегта и др. [1976а].

20.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра. Внешнее отображение

$$\varphi: \mathfrak{M}^k \rightarrow \mathfrak{M}$$

представимо элементом $a \in \mathfrak{M}$, если $(\forall \vec{b} \in \mathfrak{M}) (\varphi(\vec{b}) = a\vec{b})$. Если, кроме того, φ представимо некоторым термом $F \in \mathfrak{M}^0$, то говорят, что оно *определимо*.

20.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра.

(i) Пусть $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$. Область (значений) отображения φ — это множество

$$\text{Ra}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in \mathfrak{M}\}.$$

(ii) $\mathfrak{M}$ обладает *свойством области*, если для любого определимого $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ мощность множества $\text{Ra}(\varphi)$ равна либо 1, либо $\text{Card}(\mathfrak{M})$.

(iii) Если $F \in \Lambda^0$, то $\text{Ra}^{\mathfrak{M}}(F)$ или просто $\text{Ra}(F)$ обозначает $\text{Ra}(\varphi)$, где $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ — функция, определяемая термом F .

Сначала мы покажем, что свойство области выполняется для моделей из открытых термов. Напомним, что если $\mathcal{T}$ — некоторая λ -теория, то $x \in_{\mathcal{T}} \mathfrak{M}$ т. и т. т., когда $\forall N [N =_{\mathcal{T}} M \Rightarrow x \in \text{FV}(N)]$.

20.2.3. ЛЕММА. Пусть $F \in \Lambda^0$ и $x \in_{\mathcal{T}} Fx$. Тогда $y \in_{\mathcal{T}} Fy$ для любой переменной y .

Доказательство. Допустим, что $y \notin_{\mathcal{T}} Fy$, т. е. $\mathcal{T} \vdash Fy = M$ и $y \notin \text{FV}(M)$. Мы можем считать, что $x \notin \text{FV}(M)$. [Иначе рассмотрим $M' = M[x := I]$. Тогда в силу предложения 4.1.3 имеем $\mathcal{T} \vdash Fy = M'$ и, кроме того, $y \notin \text{FV}(M')$, $x \notin \text{FV}(M')$.] Теперь

$$\mathcal{T} \vdash Fx = Fy[y := x] = M[y := x] = M.$$

Так как $x \notin \text{FV}(M)$, это противоречит тому, что $x \in_{\mathcal{T}} Fx$. $\square$

20.2.4. Предложение. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория. Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ обладает свойством области.

Доказательство. Пусть $F \in \Lambda^0$. Рассмотрим Fx для некоторой переменной x .

Случай 1. $x \notin \mathcal{FV}(F)$. Утверждение. $Ra(F)$ — одноэлементное множество. Действительно, допустим, что $\mathcal{T} \vdash Fx = M$, где $x \notin \mathcal{FV}(M)$. Тогда в силу предложения 4.1.3

$$\mathcal{T} \vdash FZ = M \text{ для всех } Z \in \Lambda.$$

Следовательно, F постоянен.

Случай 2. $x \in \mathcal{FV}(F)$. Утверждение. Множество $Ra(F)$ бесконечно. Действительно, по лемме 20.2.3 имеем $y \in \mathcal{FV}(Fy)$ для любой переменной y . Но тогда $\mathcal{T} \not\vdash Fy = Fy'$ для $y \neq y'$, ибо иначе $y \in \mathcal{FV}(Fy')$. Поэтому $Ra(F)$ содержит бесконечное множество $\{Fx \mid x \text{ — переменная}\}$. $\square$

Теперь мы снова сформулируем теорему 17.1.16 и приведем ее первоначальное доказательство (не упоминая топологии).

20.2.5. Теорема. Пусть $\mathcal{T}$ есть р.п. λ -теория. Тогда $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ обладает свойством области.

Доказательство. Пусть $F \in \Lambda^0$. Предположим, что в $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$

$$Ra(F) = \{M_1, \dots, M_n\}, \quad n > 1.$$

Положим

$$\Lambda_i^0 = \{M \in \Lambda^0 \mid FM = M_i \text{ в } \mathfrak{M}^0(\mathcal{T})\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Тогда Λ^0 — дизъюнктное объединение множеств Λ_i^0 . Кроме того, каждое из Λ_i^0 р.п. ($M \in \Lambda_i^0$ т. и т. т., когда $\mathcal{T} \vdash FM = M_i$). Но тогда множество

$$\Lambda^0 - \Lambda_1^0 = \Lambda_2^0 \cup \dots \cup \Lambda_n^0$$

также р.п., а значит, Λ_1^0 рекурсивно. Так как Λ_1^0 очевидным образом замкнуто относительно равенства, это противоречит теореме Скотта 6.6.2. Отсюда следует, что множество $Ra(F)$ бесконечно. Так как $\text{Card}(\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})) = \aleph_0$, все в порядке. $\square$

Эта теорема применима, например, к $\mathfrak{M}^0(\lambda)$ и $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$.

Следующий результат принадлежит Уодсворту.

20.2.6. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ — непрерывная λ -модель. Тогда $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^0$ обладают свойством области.

Доказательство. Пусть $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ определяется термом $F \in \Lambda^0$. Рассмотрим $\text{BT}(Fx)$.

Случай 1. $x \notin \text{BT}(Fx)$. Тогда $\text{BT}(Fx) = \text{BT}(Fy)$, откуда в силу предложения 19.3.3 следует $\mathfrak{M} \models Fx = Fy$, т. е. $Ra(f)$ имеет мощность 1.

Случай 2. $x \in \text{BT}(Fx)$. Тогда в силу следствия 10.3.9 для некоторых $\vec{P}, \vec{Q} \in \Lambda$ имеем $Fx\vec{P} = x\vec{Q}$. Так как $a\vec{Q}$ принимает произвольные значения из $\mathfrak{M}$, когда a пробегает $\mathfrak{M}$, мы получаем, что $Ra(f)$ имеет мощность $\text{Card}(\mathfrak{M})$.

Доказательство для $\mathfrak{M}^0$ то же самое. $\square$

В формулировке свойства области существенно условие, что $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ определимо, а не просто представимо.

20.2.7. Предложение. Пусть $\mathfrak{M} = P\omega$. Тогда имеется представимое отображение $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, такое что $\text{Card}(Ra(\varphi)) = 2$.

Доказательство. Полагаем

$$\varphi(a) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{если } a \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда (так как множество $\{a \in P\omega \mid a \neq \emptyset\}$ открыто) отображение φ непрерывно, а потому представимо. Очевидно, что $Ra(\varphi) = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. $\square$

20.2.8. Гипотеза. Модель $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H})$ обладает свойством области.

См. упр. 20.6.9—20.6.11, содержащие некоторые доводы в пользу этой гипотезы.

20.3. Результаты о неопределимости

Этот пункт содержит некоторые результаты о неопределимости в $\mathfrak{M}^0(\lambda)$, а также в $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$. Доказывается, что не существует дискриминатора для замкнутых н. ф.

20.3.1. Определение. Пусть $\mathcal{N} \subseteq \Lambda^0$ — некоторое множество н. ф.

(i) Дискриминатор для $\mathcal{N}$ — это функция $\delta_{\mathcal{N}}: \mathfrak{M}^0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{M}^0(\lambda)$, такая что для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{N}$

$$\delta_{\mathcal{N}}(M_1, M_2) = \begin{cases} \mathbf{T}, & \text{если } M_1 \equiv M_2, \\ \mathbf{F} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(ii) δ -символ Чёрча — это $\delta_{\mathcal{N}}$, где $\mathcal{N}$ — множество всех замкнутых н. ф.

Из обобщенной теоремы Бёма следует, что для любого конечного $\mathcal{N} \subseteq \{M \in \Lambda^0 \mid M \text{ находится в } \beta\eta\text{-н. ф.}\}$ определим дискриминатор $\delta_{\mathcal{N}}$. Ниже будет показано, что δ -символ Чёрча неопределим. (Неопределим даже $\delta_{\mathcal{N}}$ для $\mathcal{N} = \{M \in \Lambda^0 \mid M \text{ находится в } \beta\eta\text{-н. ф.}\}$.) Другое доказательство приводимой ниже леммы см. в упр. 15.4.9.

20.3.2. ЛЕММА. Пусть $0=1$, $n+1=Kn$. Тогда $0, 1, \dots$ не является адекватной цифровой системой.

Доказательство. Мы покажем, что функция sg не является λ -определимой, т. е. что ни для какого термина $F \in \Lambda^0$ не имеет места

$$(1) \quad Fn = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Действительно, если F удовлетворяет условию (1), то он не постоянен. Отсюда в силу следствия 10.3.9 и упр. 10.6.13 для некоторых $\vec{P}, \vec{Q} \in \Lambda$

$$Fx\vec{P} = xQ_1 \dots Q_q.$$

Но тогда для всех $n \geq q+1$

$$1\vec{P} = Fn\vec{P} = n\vec{Q} = n - q,$$

т. е. $n = m$ для достаточно больших n, m в противоречие с тем фактом, что цифры n — различные н. ф. и потому не конвертируемы друг в друга. $\square$

Приводимое ниже следствие получено независимо Уодсвортом и автором.

20.3.3. Следствие. δ -символ Чёрча не является λ -определимым.

Доказательство. Если $\delta \in \Lambda$ удовлетворяет для всех н. ф. $M, N \in \Lambda^0$ условию

$$\delta MN = \begin{cases} T, & \text{если } M \equiv N, \\ F, & \text{если } M \not\equiv N, \end{cases}$$

то терм $\lambda x.\delta x001$ будет представлять функцию sg относительно цифровой системы $0, 1, \dots$, что дает противоречие. $\square$

См. п. 15.3, где показано, что δ -символ Чёрча можно без противоречия добавить к системе λ . Там показано также, что результирующая система станет противоречивой, если аксиомы для δ сформулировать недостаточно тщательно.

20.3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ — р. н. λ -теория и $0, 1, \dots$ — некоторая адекватная цифровая система. Пусть $\varphi: \mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ — характеристическая функция множества $\{n | n \in \mathbb{N}\}$, т. е.

$$\varphi(M) = \begin{cases} T, & \text{если } M = n \text{ для некоторого } n, \\ F & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда φ неопределима в $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$.

Доказательство получается ссылкой на теорему об области 20.2.5. $\square$

В упр. 20.6.13 и 20.6.14 этот результат уточнен следующим образом. Невозможен терм $F \in \Lambda^0$, такой, что для всех $M \in \Lambda^0$

$$\begin{aligned} FM &\text{ имеет н. ф.,} && \text{если } M = n \text{ для некоторого } n, \\ FM &\text{ не имеет н. ф. в противном случае,} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} FM &\text{ разрешим,} && \text{если } M = n \text{ для некоторого } n, \\ FM &\text{ неразрешим} && \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

20.4. Локальная и глобальная представимость

Результаты этого пункта заимствованы из статьи Барендрегта и др. [1978]. Введение следующих понятий подсказано понятиями из работы Фолькена [1978], см. добавление 2 в конце книги.

20.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$. Тогда функция φ называется *локально представимой*, если для каждого $b \in \mathfrak{M}$ представима функция $\psi_b: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, определяемая равенством $\psi_b(a) = \varphi(a).b$. Иными словами, для некоторого элемента $\psi(b) \in \mathfrak{M}$ и для всех $a \in \mathfrak{M}$

$$(1) \quad \varphi(a).b = \psi(b).a.$$

Если (1) выполнено для всех $a, b \in \mathfrak{M}$, то φ называется *двойственной к φ* .

(ii) Модель $\mathfrak{M}$ называется *богатой*, если все локально представимые функции $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ представимы.

20.4.2. ЛЕММА. Пусть $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$.

(i) φ локально представима т. и т. т., когда она имеет двойственную функцию ψ .

(ii) Если φ представима, то она имеет двойственную функцию, которая также представима.

(iii) Пусть $\mathfrak{M} \models \text{ext}$. Тогда φ имеет не более одной двойственной функции.

Доказательство. (i) Импликация $(\Leftarrow)$ тривиальна. $(\Rightarrow)$ получается по аксиоме выбора.

(ii) Пусть $\varphi(x) = ax$ для всех $x \in \mathfrak{M}$. Возьмем $\psi(y) = \lambda x.axu$. Тогда для всех $x, y \in \mathfrak{M}$

$$\varphi(x)y = axy = \psi(y)x.$$

Следовательно, φ двойственна φ и представима термом $\lambda ux.axu$.

(iii) Пусть две функции ψ, ψ' двойственны функции φ . Тогда для всех $x, y \in \mathfrak{M}$

$$\psi(y)x = \varphi(x)y = \psi'(y)x,$$

откуда по экстенциональности получаем $\psi(y) = \psi'(y)$, т. е. $\psi = \psi'$. $\square$

20.4.3. Предложение. Если $\mathfrak{M}$ богата, то $\mathfrak{M}$ экстенциональна.

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{M}$ не экстенциональна. Тогда существуют $c, c' \in \mathfrak{M}$, такие, что для всех $x \in \mathfrak{M}$ верно $cx = c'x$ и $c \neq c'$. Определим функции $\varphi, \psi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ равенствами

$$\varphi(a) = \begin{cases} c', & \text{если } a = c, \\ c & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $\psi(b) = K(cb)$. Тогда для всех $a, b \in \mathfrak{M}$

$$\varphi(a)b = cb = \psi(b)a.$$

Следовательно, ψ двойственна функции φ . Но φ не может быть представимой, так как она не имеет неподвижных точек. $\square$

Из результатов § 20.1 следует, например, что модели $\mathfrak{M}(\lambda)$, $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$, $P\omega$, $P\omega^0$ не богаты.

20.4.4. Теорема. Модель D_∞ богата.

Доказательство. Пусть функция $\varphi: D_\infty \rightarrow D_\infty$ локально представима. Тогда φ имеет двойственную функцию ψ . Чтобы показать, что φ представима, достаточно в силу теоремы 19.3.15 показать, что она непрерывна. Пусть множество $X \subseteq D_\infty$ направленно. Тогда для всех $b \in D_\infty$

$$\begin{aligned} \varphi(\bigsqcup X)b &= \psi(b)\bigsqcup X = \bigsqcup_{a \in X} \psi(b)a = \bigsqcup_{a \in X} \varphi(a)b = \\ &= \left(\bigsqcup_{a \in X} \varphi(a) \right) b = (\bigsqcup \varphi(X))b, \end{aligned}$$

откуда в силу экстенциональности модели D_∞ получаем $\varphi(\bigsqcup X) = \bigsqcup \varphi(X)$ для любого направленного $X \subseteq D_\infty$. Это и значит, что φ непрерывна. $\square$

20.4.5. Теорема. Если $\mathfrak{M}$ — жесткая λ -алгебра и $\mathfrak{M} \models \mathcal{A}$, то $\mathfrak{M}$ не богата.

Доказательство. Пусть $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — отображение, не представимое в $\mathfrak{M}$, т. е. такое, что ни для какого $H \in \Lambda^0$ не имеет места

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\mathfrak{M} \models H^n = \ulcorner \chi(n) \urcorner).$$

Так как жесткие модели бесконечны, такое отображение χ существует. Пусть $A_n(x, y)$ обозначает терм $x\Omega^{\sim n}(y\Omega^{\sim n}(\ulcorner \chi(n) \urcorner))$.

Определение. Последовательность термов $\{A_n\}_n$ называется равномерной относительно $\mathfrak{M}$, если для некоторого $F \in \Lambda$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\mathfrak{M} \models F^n = A_n).$$

В этом случае можно закодировать (по образцу определения 8.2.3) последовательность A_n термом $[A_n]_{n \in \mathbb{N}}$, таким, что

$$(\forall m \in \mathbb{N}) (\mathfrak{M} \models \pi_m([A_n]_{n \in \mathbb{N}}) = A_m).$$

Хотя последовательность $\{A_n(x, y)\}_n$ не равномерна, для каждого $M \in \Lambda^0$ последовательность $\{A_n(M, y)\}_n$ равномерна относительно $\mathfrak{M}$. Это происходит потому, что $\mathfrak{M}$ осмысленна и, следовательно, по лемме 17.4.4

$$(\forall M \in \Lambda^0) (\exists k \in \mathbb{N}) (\mathfrak{M} \models M\Omega^{\sim k} = \Omega),$$

поэтому в $\mathfrak{M}$ последовательность $\{A_n(M, y)\}_n$ имеет вид

$$\{M(y(\ulcorner \chi(0) \urcorner)), M\Omega(y\Omega(\ulcorner \chi(1) \urcorner)), \dots$$

$$\dots, M\Omega^{\sim k-1}(y\Omega^{\sim k-1}(\ulcorner \chi(k-1) \urcorner)), \Omega, \Omega, \dots\},$$

а почти постоянная последовательность очевидным образом равномерна. Аналогичным образом при любом $N \in \Lambda^0$ последовательность $\{A_n(x, N)\}_n$ равномерна относительно $\mathfrak{M}$. Теперь положим для $M, N \in \Lambda^0$

$$\varphi(M) = \lambda y. [A_n(M, y)]_n, \quad \psi(N) = \lambda x. [A_n(x, N)]_n.$$

Так как $\mathfrak{M}$ жесткая, то $\varphi, \psi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$. Отметим, что φ и ψ двойственны:

$$\varphi(M)N = [A_n(M, N)]_n = \psi(N)M.$$

Поэтому f локально представима. В предположении, что $\mathfrak{M}$ богата, имеем в ней для некоторого $F \in \Lambda^0$

$$FMN = \varphi(M)N = [A_n(M, N)]_n.$$

Но тогда $\pi_n(F(K^n I)(K^n I)) = \ulcorner \chi(n) \urcorner$, и отсюда следует представимость функции χ в $\mathfrak{M}$, что дает противоречие. $\square$

Из предыдущего следует, например, что модель D_∞^0 не богата.

Теперь будет введено условие на $\mathcal{T}$, обеспечивающее богатство модели $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Это понятие принадлежит Г. Любу и Виссеру.

20.4.6. Определение. λ -теория $\mathcal{T}$ прилична, если для любых переменных x, y и термов $M \in \Lambda$

$$x \in_{\mathcal{T}} M \Rightarrow x \in_{\mathcal{T}} My.$$

20.4.7. Лемма. Пусть $\mathcal{T}$ прилична.

(i) Пусть x, y — различные переменные. Тогда

$$x \in_{\mathcal{T}} M \Leftrightarrow x \in_{\mathcal{T}} My.$$

(ii) Пусть φ, ψ — двойственные функции на $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Пусть $x \neq y$, $x \neq y'$. Тогда

$$x \in_{\mathcal{T}} \varphi(y) \Leftrightarrow x \in_{\mathcal{T}} \psi(y')$$

(где, разумеется, $\varphi(y)$ означает $\varphi([y]_{\mathcal{T}})$ и $x \in_{\mathcal{T}} [M]_{\mathcal{T}}$ т. и т. т., когда $x \in_{\mathcal{T}} M$).

Доказательство. (i) $(\Leftarrow)$ Пусть $x \notin_{\mathcal{T}} M$. Тогда $(\exists M' =_{\mathcal{T}} M)$ $x \notin \text{FV}(M')$. Но тогда $x \notin \text{FV}(M'y)$ и $M'y =_{\mathcal{T}} My$. Следовательно, $x \notin_{\mathcal{T}} My$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad x \in_{\mathcal{T}} \varphi(y) &\Leftrightarrow x \in_{\mathcal{T}} \varphi(y) y' \text{ (в силу (1))} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in_{\mathcal{T}} \psi(y') y \text{ (в силу двойственности)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in_{\mathcal{T}} \psi(y') \text{ (в силу (i)).} \quad \square \end{aligned}$$

20.4.8. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{T}$ — экстенциональная приличная λ -теория. Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ богата.

Доказательство. Пусть $\varphi: \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ локально представима и ψ — функция, двойственная φ . Утверждение. Для некоторой переменной x и для любых $M \in \Lambda$ в $\mathcal{T}$.

$$(1) \quad \varphi(x) [x := M] = \varphi(M).$$

Действительно, если v — любая переменная, $x \neq v$ и $x \notin_{\mathcal{T}} \varphi(v)$, то по лемме 20.4.7(ii)

$$(2) \quad x \neq z \Rightarrow x \notin_{\mathcal{T}} \psi(z).$$

Для данного M можно найти переменную y , такую, что

$$y \notin_{\mathcal{T}} M, \varphi(M), x, \varphi(x).$$

Тогда

$$(3) \quad x \neq y \text{ и } x \notin_{\mathcal{T}} \psi(y)$$

в силу (2). Теперь из (3) получаем

$$\begin{aligned} (\varphi(x) [x := M]) y &= (\varphi(x) y) [x := M] = (\psi(y) x) [x := M] = \\ &= \psi(y) M = \varphi(M) y, \end{aligned}$$

откуда (1) следует по экстенциональности.

Из (1) получаем, что $\varphi(M) = (\lambda x. \varphi(x)) M$, т. е. φ представима. $\square$

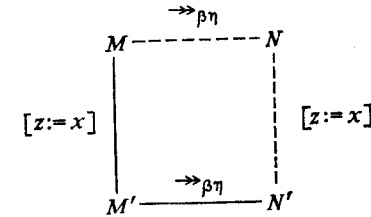
20.4.9. Лемма. $\lambda\eta$ и $\mathcal{H}\eta$ приличны.

Доказательство проведем только для $\lambda\eta$, так как для $\mathcal{H}\eta$ оно аналогично (и использует понятие редукции $\beta\Omega\eta$).

$$\text{Шаг 1. } x \in_{\lambda\eta} M \Leftrightarrow (\forall N \in \Lambda) [M \rightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow x \in \text{FV}(N)].$$

Доказательство получается ссылкой на теорему Чёрча — Росера. $\square_1$

Шаг 2. Пусть $M' \equiv M [z := x]$ и $M' \rightarrow_{\beta\eta} N'$. Тогда $\exists N [M \rightarrow_{\beta\eta} N]$ и $N' \equiv N [z := x]$.



Доказательство проводится индукцией по длине редукции $M' \rightarrow_{\beta\eta} N'$. $\square_2$

Шаг 3. $x \in_{\lambda\eta} M \Rightarrow x \in_{\lambda\eta} M [z := y]$ для $z \neq x$.

Доказательство получается ссылкой на шаги 1, 2. $\square_3$

Шаг 4. $x \in_{\lambda\eta} \lambda y. P \Rightarrow x \in_{\lambda\eta} P$ и $x \neq y$.

Доказательство. Очевидно, что $x \neq y$. Допустим, что $P =_{\beta\eta} N$. Тогда $\lambda y. P =_{\beta\eta} \lambda y. N$, откуда в силу условия шага 4 имеем $x \in \text{FV}(\lambda y. N) \subseteq \text{FV}(N)$. Поэтому $x \in_{\lambda\eta} P$. $\square_4$

Шаг 5. $x \in_{\lambda\eta} M \Rightarrow x \in_{\lambda\eta} My$.

Доказательство. Допустим, что $x \in_{\lambda\eta} M$ и $My \rightarrow_{\beta\eta} N$. Мы хотим доказать, что $x \in \text{FV}(N)$.

Случай 1. $N \equiv M'y$, где $M \rightarrow_{\beta\eta} M'$. Так как $x \in_{\lambda\eta} M$, то и $x \in \text{FV}(M') \subseteq \text{FV}(N)$.

Случай 2. $M \rightarrow \lambda z. M'$ и $My \rightarrow (\lambda z. M') y \rightarrow M' [z := y] \rightarrow N$. Так как $x \in_{\lambda\eta} M$, то также и $x \in_{\lambda\eta} \lambda z. M'$, откуда $x \in_{\lambda\eta} M'$ в силу шага 4 и $x \neq z$. Поэтому $x \in_{\lambda\eta} M' [z := y]$ в силу шага 3, а потому $x \in \text{FV}(N)$. $\square_5$

20.4.10. Следствие. Модели $\mathfrak{M}(\lambda\eta)$, $\mathfrak{M}(\mathcal{H}\eta)$ богаты.

Неизвестно, существуют ли жесткие богатые модели. Единственный имеющийся кандидат — модель $\mathfrak{M}^0(\lambda\eta)$.

20.5. Топология деревьев на моделях

Напомним, как определяется топология деревьев на множестве Λ . Сначала множество $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}, \subseteq)$ наделяется топологией Скотта. Затем Λ наделяется наименьшей топологией, в которой непрерывно отображение $\text{BT}: \Lambda \rightarrow \mathfrak{B}$. Аналогично определяется топология деревьев на Λ^0 . Очевидно, что Λ^0 — подпространство пространства Λ .

Пусть $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — модель из термов для λ -теории $\mathcal{T}$. Каноническое отображение $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ определяется равенством

$\varphi(M) = [M]_{\mathcal{T}}$. Для λ -алгебры $\mathfrak{M}$ каноническое отображение $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow \mathfrak{M}^0$ определяется равенством $\varphi(M) = [M]_{\mathfrak{M}}$.

20.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория. Пусть $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — каноническое отображение. Топология деревьев на $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ — это фактортопология топологии деревьев на Λ относительно отображения φ . Иными словами, множество $O \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ открыто, если открыто множество $\varphi^{-1}(O) \subseteq \Lambda$.

(ii) Пусть $\mathfrak{M}^0$ — жесткая λ -алгебра. Пусть $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow \mathfrak{M}^0$ — каноническое отображение. Топология деревьев на $\mathfrak{M}^0$ — это фактортопология топологии деревьев на Λ^0 относительно отображения φ .

Заметим, что если $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ — некоторые λ -теории, то каноническое отображение $\varphi_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}: \mathfrak{M}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T}')$ непрерывно по лемме 4.1.20.

Имеются два способа введения топологии деревьев на $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$. Это множество можно рассматривать как подпространство в $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ или как жесткую λ -алгебру. Однако оба этих определения совпадают в силу следующей леммы.

20.5.2. ЛЕММА. Топология деревьев на $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ — это топология деревьев на $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$, релятивизированная к $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$.

Доказательство получается из того, что топологически Λ^0 является подпространством пространства Λ . $\square$

20.5.3. ЛЕММА. (i) (Уодсворт) В D_{∞}^0 элемент 1 не изолирован ни в топологии Скотта, ни в топологии деревьев.

(ii) В $P\omega^0$ элемент 1 не изолирован в топологии Скотта.

Доказательство. (i) Допустим, что множество $\{1\}$ открыто по Скотту. Так как в D_{∞} мы имеем $1 = J = \bigcup_n J^{(n)}$ (см. пример 10.2.9), отсюда следовало бы, что $\exists n (J^{(n)} \subseteq \{1\})$, а это дает противоречие. Аналогично доказывается, что $\{1\}$ не открыто в топологии деревьев.

(ii) Если бы $\{1\}$ было открыто по Скотту в $P\omega^0$, то из $1 \subseteq J$ следовало бы, что $J \subseteq \{1\}$, а это дает противоречие. $\square$

В $P\omega^0$ элемент 1 изолирован в топологии деревьев — см. предложение 20.5.8.

20.5.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть $\mathcal{T} = \lambda, \lambda\eta, \mathcal{H}, \mathcal{H}\eta, \mathcal{B}$ или $\mathcal{B}\eta$. Тогда каноническое отображение $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ открыто.

(ii) Каноническое отображение $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow P\omega^0$ открыто (в топологии деревьев на $P\omega^0$).

(iii) Каноническое отображение $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow D_{\infty}^0$ не является открытым (в топологии деревьев на D_{∞}^0).

Доказательство. Утверждение. Пусть $\mathcal{T} = \lambda, \lambda\eta, \mathcal{H}, \mathcal{H}\eta, \mathcal{B}$ или $\mathcal{B}\eta$. Тогда

(1) $M =_{\mathcal{T}} M'$ и $M' \subseteq N' \Rightarrow \exists N (N =_{\mathcal{T}} N' \text{ и } M \subseteq N)$.

(2) Если $M =_{\mathcal{T}} M'$ и $M' = \bigcup_i M_i$, то для любого i $\exists N_i (N_i = M_i)$ и $M = \bigcup_i N_i$.

Для $\mathcal{T} = \lambda, \mathcal{H}, \mathcal{B}$ это тривиально, так как

$$M =_{\mathcal{T}} N \Rightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N).$$

При добавлении η также не возникает трудностей (см. упр. 20.6.16).

(i) Допустим, что множество $O \subseteq \Lambda$ открыто. Тогда $\varphi(O) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ открыто т. и т.т., когда открыто множество $O' = \varphi^{-1}(\varphi(O)) \subseteq \Lambda$. Но в силу (1), (2) множество O' действительно открыто.

(ii) доказывается аналогично.

(iii) Множество $\{1\} \subseteq \Lambda$ открыто, а множество $\{\llbracket 1 \rrbracket^{\mathcal{D}_{\infty}}\}$ — нет (по предыдущей лемме). $\square$

Если $\mathfrak{M} = P\omega$ или D_{∞} , то каноническое отображение $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow \mathfrak{M}^0$ не открыто в топологии Скотта на $\mathfrak{M}$. Это снова происходит потому, что точка 1 изолирована в Λ , но не в $P\omega^0$ или D_{∞}^0 .

20.5.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ — одна из теорий, упомянутых в предыдущем предложении, или $\mathfrak{M} = P\omega^0$. Тогда аппликация (а значит, и любая определяемая функция) непрерывна в топологии деревьев.

Доказательство. Пусть φ — каноническое отображение на $\mathfrak{M}$. Пусть $a_1, a_2 \in \mathfrak{M}$ и $\varphi(M_i) = a_i$. Пусть $a_1 a_2 \in O \subseteq \mathfrak{M}$, где множество O открыто. Тогда множество $\varphi^{-1}(O) \subseteq \Lambda$ открыто и содержит терм $M_1 M_2$. Так как аппликация непрерывна на множестве Λ по теореме 14.3.22, найдутся открытые множества $O_1 \ni M_1, O_2 \ni M_2$, такие, что $O_1 O_2 \subseteq \varphi^{-1}(O)$. Но тогда $\varphi(O_1) \varphi(O_2) \subseteq O$, а в силу предыдущего предложения множества $\varphi(O_i)$ — окрестности точек a_i . $\square$

20.5.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M}$ — жесткая λ -алгебра или модель из термов $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ с топологией деревьев. Тогда

$\mathfrak{M}$ полусмысленна $\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ не является недискретной.

Доказательство будет дано для случая жесткой λ -алгебры. Случай $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ аналогичен. Пусть $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow \mathfrak{M}$ — каноническое отображение.

($\Rightarrow$) Так как $\mathfrak{M}$ полусмысленна, то для множества $\text{SOL}^0 = \{M \in \Lambda^0 \mid M \text{ разрешим}\}$

$$\varphi^{-1}(\varphi(\text{SOL}^0)) = \text{SOL}^0.$$

Поэтому в силу примера 10.2.5 множество $\varphi(\text{SOL}^0) \subseteq \mathfrak{M}$ открыто и не совпадает ни с $\emptyset$, ни с $\mathfrak{M}$.

($\Leftarrow$) Для приведения к противоречию допустим, что $\mathfrak{M}$ не является ни полуосмысленной, ни недискретной. Тогда

- (1) $(\exists O \in \mathfrak{M})(\emptyset \neq O \neq \mathfrak{M}, O \text{ открыто}),$
- (2) $(\exists M \in \text{SOL}^0)(\exists N \in \Lambda^0 - \text{SOL}^0)(\mathfrak{M} \models M = N).$

В силу (2)

$$\vec{OQ}(M\vec{Q} = 1, N\vec{Q} \text{ неразрешим}).$$

Отсюда

$$(\forall P \in \Lambda^0)(M\vec{Q}P = P, N\vec{Q}P \text{ неразрешим}).$$

Поэтому

- (3) $(\forall P \in \Lambda^0)(\exists Q \in \Lambda^0 - \text{SOL}^0)(\mathfrak{M} \models P = Q).$

В силу (1) множество $\varphi^{-1}(O) \neq \emptyset$ открыто в Λ^0 . Пусть $P \in \varphi^{-1}(O)$. В этом случае в силу (3) мы имеем $P' \in \varphi^{-1}(O)$ для некоторого неразрешимого терма P' . Но тогда $\varphi^{-1}(O) = \Lambda^0$ по лемме 10.2.11, так как для всех $R \in \Lambda^0$ мы имеем $P' \subseteq R$. Следовательно, $O = \mathfrak{M}$, что дает противоречие. $\square$

Точка x топологического пространства X называется *точкой компактификации*, если единственной окрестностью этой точки является само пространство X .

20.5.7. Следствие. Пусть $\mathfrak{M}$ — жесткая λ -алгебра или модель из термов с топологией деревьев. Если $\mathfrak{M}$ полуосмысленна, то для любого λ -терма M

M неразрешим $\Leftrightarrow M$ — точка компактификации в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}$ — жесткая λ -алгебра, так как второй случай аналогичен. Пусть $\varphi: \Lambda^0 \rightarrow \mathfrak{M}$ — каноническое отображение.

($\Rightarrow$) Пусть M неразрешим и $\varphi(M) \in O \subseteq \mathfrak{M}$, где множество O открыто. Тогда $M \in \varphi^{-1}(O)$ и $\varphi^{-1}(O)$ открыто в Λ^0 . В силу леммы 10.2.6 имеем $\varphi^{-1}(O) = \Lambda^0$ и поэтому $O = \mathfrak{M}$.

($\Leftarrow$) Допустим, что M разрешим. Тогда $M \in \text{SOL}^0$ и

$$\varphi(M) \in \varphi(\text{SOL}^0) \neq \mathfrak{M},$$

и так же, как в предыдущем доказательстве, получаем, что множество $\varphi(\text{SOL}^0)$ открыто. $\square$

20.5.8. Предложение. Пусть $\mathcal{T} = \lambda, \lambda\eta, \mathcal{H}, \mathcal{H}\eta, \mathcal{B}$ или $\mathcal{B}\eta$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ или $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$ и снабжено топологией деревьев. Тогда

M имеет н.ф. $\Leftrightarrow M$ изолирован в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Мы используем следующие свойства модели $\mathfrak{M}$.

- (1) $\mathfrak{M}$ полуосмысленна.
- (2) $\mathfrak{M} \models M = N \Rightarrow \text{BT}(M), \text{BT}(N)$ одновременно конечны или бесконечны. Очевидно, что это выполнено для всех $\mathfrak{M}$, упомянутых в условии. Для определенности предположим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$ для одной из перечисленных выше теорий $\mathcal{T}$. Пусть $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathfrak{M}$ — каноническое отображение и $O = \varphi^{-1}(\varphi(M)) \subseteq \Lambda$.
- ($\Rightarrow$) Допустим, что M имеет н.ф. Мы проверим оба условия леммы 10.2.6, чтобы показать, что множество O открыто.

Допустим, что $M' \in O, M' \subseteq N$, и покажем, что $N \in O$.

Утверждение. Дерево $\text{BT}(M') \perp$ -свободно. В противном случае мы, применяя технику выворачивания по Бёму, имели бы для некоторого контекста $C[]$

$C[M']$ неразрешим, $C[M]$ разрешим

(так как M имеет н.ф.), что противоречит (1). Из нашего утверждения и того, что $M' \subseteq N$, следует $N \approx M'$. Из (2) и конечности $\text{BT}(M)$ вытекает, что дерево $\text{BT}(N) = \text{BT}(M')$ конечно, откуда $M' =_{\beta} N$ и, следовательно, $\mathfrak{M} \models N = M$, т. е. $N \in O$.

Допустим, что $M' \in O$ и $\text{BT}(M') = \bigcup_i \text{BT}(M_i)$ (где супремум направлен), и покажем, что $\exists i (M_i \in O)$. Дерево $\text{BT}(M')$ снова конечно и потому является компактной точкой в $\mathfrak{B}$. Поэтому для некоторого i имеем $\text{BT}(M') = \text{BT}(M_i)$. Дерево $\text{BT}(M')$ опять $\perp$ -свободно, откуда $M' =_{\beta} M_i$ и, значит, $M_i \in O$.

($\Leftarrow$) Допустим, что точка M изолирована в $\mathfrak{M}$. Тогда множество $O \subseteq \Lambda$ открыто. Мы утверждаем

- (3) $\text{BT}(M)$ конечно,
- (4) $\text{BT}(M)$ $\perp$ -свободно.

Чтобы доказать (3), заметим, что $\text{BT}(M) = \bigcup_n \text{BT}(M^{(n)})$. Так как $M \in O$ и O открыто, то $\exists n (\text{BT}(M) = \text{BT}(M^{(n)}))$, т. е. дерево $\text{BT}(M)$ конечно. Предположим, что (4) неверно. Тогда $\exists M^* (M \subseteq M^* \text{ и } \text{BT}(M^*) \text{ бесконечно})$. Но тогда $M^* \in O$, откуда $\mathfrak{M} \models M = M^*$ в противоречие с (2) и (3).

В силу (3), (4) терм M имеет конечное $\perp$ -свободное бёмовское дерево, а потому имеет н.ф. $\square$

Предложение 20.5.8 ложно для D_{∞}^0 в силу леммы 20.5.3.

В качестве приложения мы получаем следующее обобщение леммы о генеричности 14.3.24.

20.5.9. Следствие. Пусть $\mathfrak{M}$ — одна из моделей, упомянутых в предложении 20.5.8. Предположим, что $F \in \Lambda^0, M$ неразрешим

и N имеет н. ф. Тогда

$$\mathfrak{M} \models FM = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x (Fx = N).$$

Доказательство. В силу предложения 20.5.8 терм N является в $\mathfrak{M}$ изолированной точкой. В силу непрерывности F (следствие 20.5.5) имеется окрестность O точки M , такая, что $F(O) = \{N\}$. Но M является точкой компактификации по следствию 20.5.7, поэтому O — вся модель. $\square$

20.6. Упражнения

20.6.1. Показать, что если $\mathfrak{M}$ — жесткая осмысленная λ -алгебра, то $\mathfrak{M} \models \eta$.
20.6.2. Показать, что $P\omega \models tr$. [Указание. Рассмотреть $F = \lambda xz.zxx$ и $F' = \lambda xz.zx(\lambda v.xv)$.]

20.6.3. Показать, что в общем случае $\mathfrak{M}^0 \models ext \not\models \mathfrak{M} \models ext$.

20.6.4. Показать, что если $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}\eta$, то $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$ не может быть вложена в экстенциональную λ -алгебру.

20.6.5. Показать, что существует λ -алгебра $\mathfrak{M}$, которая не может быть ни вложена в экстенциональную λ -алгебру, ни спроектирована на нее. [Указание. Использовать следствие 15.3.7.]

20.6.6. Пусть φ — определенное отображение на $\mathfrak{M}^0(\lambda)$, такое, что $\varphi(M)$ имеет н. ф. для всех M . Показать, что φ постоянно.

20.6.7. (i) (Чёрч). Добавим к λ -исчислению новую константу δ и аксиомы

$$(1) \quad \delta MN = \begin{cases} T, & \text{если } M \equiv N, \\ F, & \text{если } M \not\equiv N. \end{cases}$$

где M, N пробегает замкнутые β -н. ф., не имеющие подтермов вида δPQ . Показать, что это расширение (называемое $\lambda\delta$ -исчислением) непротиворечиво.

(ii) Показать, что если в (1) не требовать, чтобы M, N были замкнутыми термами, то результирующая система противоречива.

(iii) Показать, что не существует непротиворечивого расширения $\mathcal{T}$ системы λ , в котором для некоторой константы δ и любых термов $M, N \in \Lambda^0$ было бы выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \vdash \delta MN = T, & \text{ если } \mathcal{T} \vdash M = N, \\ \mathcal{T} \vdash \delta MN = F, & \text{ если } \mathcal{T} \not\vdash M = N. \end{aligned}$$

20.6.8 (Де Йонг). Пусть $\mathfrak{M}$ обладает свойством области, и пусть φ — определенное отображение на $\mathfrak{M}^k$. Показать, что область значений φ бесконечна или одноэлементна.

20.6.9. Если $F \in \Lambda^0$ и $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра, положим

$$F^*\mathfrak{M} = \{Fa \in \mathfrak{M} \mid a \in \mathfrak{M}\}.$$

Построить термы F , такие, что

(i) $F^*\mathfrak{M}^0(\lambda)$ бесконечно, но $F^*\mathfrak{M}^0(\mathcal{H})$ одноэлементно.

(ii) $F^*\mathfrak{M}^0(\mathcal{H})$ бесконечно, но $F^*\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}^*)$ одноэлементно.

20.6.10. Показать, что невозможен терм $F \in \Lambda^0$, такой, что в $\mathcal{H}$

$$FM = \begin{cases} I, & \text{если } M \in \Lambda^0 \text{ разрешим,} \\ \Omega, & \text{если } M \in \Lambda^0 \text{ неразрешим.} \end{cases}$$

[Указание. Использовать свойство области для D_∞^0 .]

20.6.11. (i) Пусть последовательность M_n равномерна по n . Построить терм $F \in \Lambda^0$, такой, что

$$F^n x \rightarrow \langle F^{n+1} (xM_n) \rangle$$

(напомним, что $\langle P \rangle = \lambda z.zP$). Пусть $G = F^n 0$.

(ii) Если $M_n \equiv \Omega$ для всех n , то какова мощность $Ra(G)$ в $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H})$?

(iii) Тот же вопрос, если $M_n \equiv I$ для всех n .

(iv) Тот же вопрос, когда M_n — последовательность $\Omega, I, \Omega, I, \dots$.

(v) Тот же вопрос, когда M_n — последовательность $\Omega, x, \Omega, x, \dots$.

(vi) Тот же вопрос, когда M_n — последовательность $\Omega, x! \Omega, \Omega, x! \Omega \sim^2, \Omega, x! \Omega \sim^3, \dots$.

(vii) Тот же вопрос для $M_n \equiv E^n 1$.

В следующем упражнении используются определения, сформулированные перед упр. 6.8.18. Нумерованное множество $\gamma = (S, \nu)$ позитивно, если множество $\{(n, m) \mid \nu(n) = \nu(m)\}$ рекурсивно перечислимо. Множество γ полно и имеет специальный элемент a , если

$$(\forall \psi \in P) (\exists f \in F) [(\forall x \in \text{Dom}(\psi)) (\nu(f(x)) = \nu(\psi(x))) \wedge$$

$$\wedge (\forall x \notin \text{Dom}(\psi)) (\nu(f(x)) = a)].$$

20.6.12. (i) Показать, что $(\mathfrak{M}^0(\lambda), \nu_E)$, где $\nu_E(n) = E^n 1$ — позитивное предполное нумерованное множество.

(ii) Показать, что $(\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}), \nu_E)$ — полное нумерованное множество со специальным элементом Ω .

(iii) Пусть γ, γ' — нумерованные множества, где γ позитивно и предполно. Пусть $\mu \in \text{Mog}(\gamma, \gamma')$. Тогда область значений μ бесконечна или одноэлементна.

20.6.13. (i) Показать, что невозможен терм $F \in \Lambda^0$, такой, что для всех $M \in \Lambda^0$

FM имеет н. ф., если $M = \ulcorner n \urcorner$ для некоторого n ,

FM не имеет н. ф. в противном случае.

(ii) Доказать (i) для любой адекватной цифровой системы. [Указание. Из доказательства леммы 20.3.2 получается, что $K^n I$ для некоторого n не принадлежит данной системе.]

20.6.14. (i) Показать, что невозможен терм $F \in \Lambda^0$, такой, что для всех $M \in \Lambda^0$

FM разрешим, если $M = \ulcorner n \urcorner$ для некоторого n ,

FM неразрешим в противном случае.

(ii) Доказать (i) для любой адекватной цифровой системы.

20.6.15. Показать, что

(i) M имеет конечное бёмовское дерево $\Leftrightarrow M$ компактен в $\mathfrak{B}$;

(ii) M имеет $\perp$ -свободное бёмовское дерево $\Leftrightarrow M$ максимален в $\mathfrak{B} \Leftrightarrow M$ максимален в D_∞^0 .

(iii) I не максимален ни в $P\omega^0$, ни в D_∞^0 .

20.6.16. Для $\mathcal{T} = \lambda\eta, \mathcal{H}\eta$ или $\mathcal{B}\eta$ доказать выполнение условий (1), (2) из доказательства предложения 20.4.4.

20.6.17. (i) Показать, что не все непрерывные отображения $\varphi: \mathfrak{M}^0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{M}^0(\lambda)$ представимы. [Указание. См. указание к упр. 18.4.24.]

(ii) Показать то же для $\mathfrak{M}(\lambda)$.

20.6.18. Показать, что на $\mathfrak{B}^0$ топология Скотта совпадает с топологией деревьев.

20.6.19. Исследовать взаимоотношения между топологией Скотта и топологией деревьев на $P\omega^0$ и D_∞^0 .

20.6.20. Показать, что модель $\mathfrak{M}(\mathcal{B}\eta)$ богата.

20.6.21. Показать, что $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}) \models \text{ext-правило}$, но $\mathfrak{M}^0(\mathcal{H}) \not\models \text{ext-аксиома}$.

20.6.22 (Лонго [1983]). Показать, что если $A \neq \emptyset$, то $P\omega \hookrightarrow D_A$ (как аппликативные структуры). [Указание. Для $n \in \omega$ будем писать $n = (n_1, n_2, \dots, n_k, 0) = (n_1, (n_2, \dots, (n_k, 0) \dots))$, где $k > 0$ и $n_k \neq 0$. Аналогично в модели D_A будем писать $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, b)$ вместо $(\beta_1, (\beta_2, \dots, (\beta_n, b) \dots))$. Пусть $a \in A$. Определим отображения

$$[\]: \omega \rightarrow D_A,$$

$$f: \{e \in \omega \mid e \text{ конечно}\} \rightarrow \{\beta \in B \mid \beta \text{ конечно}\},$$

$$h: \omega \rightarrow B$$

следующим образом:

$$[0] = \{a, (\emptyset, a), (\emptyset, \emptyset, a), \dots\},$$

$$f(\emptyset) = \emptyset,$$

$$h(0) = a,$$

$$[(n_1, \dots, n_k, 0)] = \{(f(e_{n_1}), \dots, f(e_{n_k}), b) \mid b \in [0]\},$$

$$f(e_n) = \{h(m_1), \dots, h(m_q)\}, \text{ если } e_n = \{m_1, \dots, m_q\},$$

$$h(n_1, \dots, n_k, 0) = (f(e_{n_1}), \dots, f(e_{n_k}), a).$$

Определим, наконец, отображение $\varphi: P\omega \rightarrow D_A$ равенством $\varphi(x) = \{[n] \mid n \in x\}$.

(ii) Показать, что если A счетно, то $D_A \hookrightarrow P\omega$ (как аппликативные структуры). [Указание. Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Определим $m: B \rightarrow \omega$ равенствами

$$m(a_n) = (1, n),$$

$$m(\beta; b) = (\sum \{2^{m(b')} \mid b' \in \beta\}, m(b)).$$

Отображение $\psi: D_A \rightarrow P\omega$ определяется так: $\psi(d) = \{m(b) \mid b \in d\}$.

Комбинаторные группы

Операция композиции $x \circ y = \lambda z.x(yz)$ ассоциативна. Любая комбинаторная алгебра $\mathfrak{M}$ с этой операцией является полугруппой. Если сверх того $\mathfrak{M} \models \eta$, то в этой полугруппе 1 является единичным элементом. Комбинаторная группа модели $\mathfrak{M}$ состоит из единичных элементов этого моноида. Мы найдем структуру комбинаторных групп для нескольких λ -алгебр — см. добавление 3 в конце книги.

21.1. Комбинаторные полугруппы

Для данной λ -алгебры $\mathfrak{M}$, такой что $\mathfrak{M} \models \eta$, можно следующим образом ввести полугруппу и группу.

21.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot \rangle$ есть λ -алгебра, удовлетворяющая η .

(i) Полугруппа алгебры $\mathfrak{M}$ — это структура

$$S(\mathfrak{M}) = \langle X, \circ, 1 \rangle,$$

где в $\mathfrak{M}$ мы имеем $a \circ b = \lambda z.a(bz)$ и $1 = \lambda z.z$. Очевидно, что операция $\circ$ ассоциативна, а из η следует, что 1 является (двусторонней) единицей.

(ii) Группа алгебры $\mathfrak{M}$ — это подгруппа $S(\mathfrak{M})$, состоящая из обратимых элементов:

$$G(\mathfrak{M}) = \langle \{a \in S(\mathfrak{M}) \mid (\exists b \in S(\mathfrak{M})) (a \circ b = b \circ a = 1)\}, \circ \rangle.$$

Очевидно, что $G(\mathfrak{M})$ — наибольшая группа, содержащаяся в $S(\mathfrak{M})$.

(iii) Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория и $\mathcal{T} \vdash \eta$. Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) \models \eta$ и $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}) \models \eta$, и мы полагаем

$$S(\mathcal{T}) = S(\mathfrak{M}(\mathcal{T})), \quad G(\mathcal{T}) = G(\mathfrak{M}(\mathcal{T})),$$

$$S^0(\mathcal{T}) = S(\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})), \quad G^0(\mathcal{T}) = G(\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})).$$

Замечание. Очевидно, что любой гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ индуцирует гомоморфизмы $\varphi_S: S(\mathfrak{M}) \rightarrow S(\mathfrak{M}')$ и $\varphi_G: G(\mathfrak{M}) \rightarrow G(\mathfrak{M}')$.

Если φ сюръективен, то сюръективен и φ_S , но для φ_S это верно не всегда. Элемент $\varphi_S(a) \in S(\mathfrak{M}')$ может быть обратим, хотя $a \in S(\mathfrak{M})$ необратим.

Примером является $G(\mathcal{H}^*)$, которая оказывается собственным расширением (канонического образа) группы $G(\lambda\eta)$.

Следуя Чёрчу [1937], мы называем структуры $S(\mathfrak{M})$ комбинаторными полугруппами, а структуры $G(\mathfrak{M})$ — комбинаторными группами. Для нескольких алгебр $\mathfrak{M} \models \eta$ мы найдем структуру групп $G(\mathfrak{M})$. Для всех известных жестких алгебр $\mathfrak{M}$ группа $G(\mathfrak{M})$ оказывается алгоритмически разрешимой. В противоположность этому полугруппа $S(\mathfrak{M})$ никогда не является разрешимой.

21.1.2. ТЕОРЕМА (Чёрч [1937]). $S^0(\lambda\eta)$ — рекурсивно представленная полугруппа с четырьмя образующими и неразрешимой проблемой тождества.

Доказательство. Положим

$$C_* \equiv \lambda xy.yx, \quad B \equiv \lambda xyz.x(yz).$$

Тогда в $\lambda\eta$ доказуемо

$$(1) \quad C_*xy = C_*y \circ C_*x \circ B,$$

$$(2) \quad C_*x \circ C_* = x.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{X} = \{C_*K, C_*S, B, C_*\} \subseteq S^0(\lambda\eta).$$

Так как $\{K, S\}$ является базисом для Λ^0 , из (1) следует, что $C_*M \in \{C_*K, C_*S, B\}^+$ для каждого $M \in S^0(\lambda\eta)$, где $\mathcal{X}^+$ означает множество, порожденное образующими $\mathcal{X}$, см. определение 8.1.1. Отсюда и из (2) имеем $S^0(\lambda\eta) \subseteq \mathcal{X}^+$. Поэтому $S^0(\lambda\eta)$ конечно порождена.

Теперь мы видим, что соотношение $A = B$ верно в $S^0(\lambda\eta)$, если оно доказуемо в $\lambda\eta$. Поэтому полугруппа $S^0(\lambda\eta)$ рекурсивно представлена.

Обратно, для любых $M_1, M_2 \in \Lambda^0$ мы имеем

$$\lambda\eta \vdash M_1 = M_2 \Leftrightarrow S^0(\lambda\eta) \models M_1^* = M_2^*,$$

где M_i^* обозначает терм M_i , записанный через порождающие элементы с помощью композиции (например, $KS^* \equiv C_*S \circ C_*K \circ B \circ C_* = KS$ в силу (1) и (2)). Так как система $\lambda\eta$ неразрешима по теореме 6.6.6, проблема тождества для $S^0(\lambda\eta)$ также неразрешима. $\square$

Неизвестно, является ли $S^0(\lambda\eta)$ конечно представимой. Однако в силу аналога теоремы Хигмена для полугрупп (см. Мурский [1967]) $S^0(\lambda\eta)$ может быть вложена в конечно представленную полугруппу.

21.1.3. Следствие. Пусть $\mathfrak{M} \models \eta$. Тогда $S(\mathfrak{M})$ неразрешима. Если, кроме того, $\mathfrak{M}$ жесткая, то $S(\mathfrak{M})$ конечно порождена.

Доказательство. Для данной λ -алгебры $\mathfrak{M}$ и термов $M_1, M_2 \in \Lambda^0$

$$\mathfrak{M} \models M_1 = M_2 \Leftrightarrow S(\mathfrak{M}) \models M_1^* = M_2^*.$$

Так как $\text{Th}(\mathfrak{M})$ неразрешима по теореме 6.6.6, то неразрешима и $S(\mathfrak{M})$.

Если $\mathfrak{M}$ жесткая, то $S(\mathfrak{M})$ — гомоморфный образ полугруппы $S^0(\lambda\eta)$ и потому порожден образом множества $\mathcal{X}$. $\square$

Следующее утверждение доказано Бёмом.

21.1.4. Следствие. $S^0(\lambda\eta)$ может быть порождена двумя элементами. То же верно для любой полугруппы $S(\mathfrak{M}^0)$.

Доказательство. Заметим, что в $\lambda\eta$

$$(3) \quad B = S \circ K,$$

$$(4) \quad C_*x \circ K = I.$$

Положим $H \equiv C_*S \circ (C_*(K \circ C_*K))$. Тогда

$$(5) \quad \begin{aligned} H \circ C_* &= C_*S \circ (C_*(K \circ C_*K)) \circ C_* = \\ &= C_*S \circ K \circ C_*K \text{ (по (2) и теореме 21.1.2)} = \\ &= C_*K \text{ (по (4)).} \end{aligned}$$

Далее,

$$H \circ K = C_*S \circ (C_*(\dots)) \circ K = C_*S \circ I \text{ (по (4))} = C_*S.$$

Отсюда

$$(6) \quad \begin{aligned} C_*S &= H \circ K = H \circ C_*K \circ C_* \text{ (по (2))} \\ &= H \circ H \circ C_* \circ C_* \text{ (по (5)).} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} B &= S \circ K \text{ (по (3))} = C_*S \circ C_* \circ C_*K \circ C_* \text{ (по (2))} = \\ &= H^2 \circ C_*^3 \circ H \circ C_*^2 \text{ (по (6), (5)).} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\{C_*K, C_*S, B, C_*\} \subseteq \{H, C_*\}^+,$$

откуда мы получаем, что $S^0(\lambda\eta)$ порождена термами H и C_* , так же, как в доказательстве теоремы 21.1.2.

Как и раньше, отсюда следует, что $S(\mathfrak{M}^0)$ порождена элементами $\{[H]^{\mathfrak{M}}, [C_*]^{\mathfrak{M}}\}$. $\square$

21.2. Характеризация обратимости

Чтобы исследовать структуры нескольких комбинаторных групп, мы изучим понятие обратимости.

21.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{T}$ есть λ -теория. Тогда терм $M \in \Lambda$ называется $\mathcal{T}$ -обратимым, если $(\exists N \in \Lambda) (\mathcal{T} \vdash M \circ N = N \circ M = I)$.

У Дедзани-Чанкальини [1976] дана характеристика $\lambda\eta$ -обратимости для термов, имеющих н. ф. Бергстра и Клоп [1980] показывают, что предположение о нормальности можно снять. Для этого сначала дается характеристика понятия $\mathcal{H}^*$ -обратимости на языке бёмовских деревьев. Мы следуем их изложению, которое использует несколько идей Дедзани-Чанкальини.

21.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \in \Lambda$.

(i) M называется *свободноголовым*, если M имеет г. н. ф. со свободной головной переменной. Эта свободная головная переменная называется *свободной головой* терма M .

(ii) *Свободноголовый частный случай* терма M — это любой терм вида $M^\bullet \equiv M[\vec{y} := \vec{N}]$, где все термы $\vec{N}$ свободноголовые.

(iii) Переменные $M^\bullet$, $M^\blacksquare$ пробегает свободноголовые частные случаи терма M .

21.2.3. ЛЕММА. (i) Если M имеет свободную голову u и N имеет свободную голову v , то $M[u := N]$ имеет свободную голову v .

(ii) M свободноголовый $\Rightarrow M^\bullet$ свободноголовый.

Доказательство. (i) Пусть $M = \lambda \vec{x}. u \vec{P}$, $N = \lambda \vec{y}. v \vec{Q}$. Тогда

$$M[u := N] = \lambda \vec{x}. (\lambda \vec{y}. v \vec{Q}) \vec{P} = \lambda \vec{x} \dots v \dots$$

(ii) Если вместо свободной головы терма M не делается никаких подстановок, то все уже в порядке. В противном случае ссылаемся на п. (i). $\square$

21.2.4. ЛЕММА. (i) Допустим, что

$$\mathcal{H}^* \vdash \lambda z x_1 \dots x_n. z (P_1 x_1) \dots (P_n x_n) = I$$

и $x_i \notin FV(P_i)$ для $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$\mathcal{H}^* \vdash P_i = I, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(ii) Допустим, что

$$\mathcal{H}^* \vdash \lambda z x_1 \dots x_n. y Q_1 \dots Q_m = I.$$

Тогда $y \equiv z$, $m = n$ и $\mathcal{H}^* \vdash Q_i = x_i$.

Доказательство. По условию и теореме 19.2.12

$$I \approx_{\eta} \lambda z x_1 \dots x_n. z (P_1 x_1) \dots (P_n x_n).$$

Следовательно,

$$\lambda z x_1 \dots x_n. z x_1 \dots x_n \approx_{\eta} \lambda z x_1 \dots x_n. z (P_1 x_1) \dots (P_n x_n)$$

и потому $x_i \approx_{\beta} P_i x_i$, $1 \leq i \leq n$. Снова по теореме 19.2.12 получаем, что $\mathcal{H}^* \vdash x_i = P_i x_i$, откуда

$$\mathcal{H}^* \vdash I = \lambda x_i. x_i = \lambda x_i. P_i x_i = P_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(ii) доказывается аналогично. $\square$

21.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пишем $\mathcal{H}^*(M, N)$, если $\mathcal{H}^* \vdash M \circ N = N \circ M = I$.

(ii) Говорим, что M имеет тип I, если M имеет г. н. ф.

$$\lambda z x_1 \dots x_n. z P_1 \dots P_m, \quad n, m \geq 0.$$

(iii) Пишем $\mathcal{H}^*(M, N)^\bullet$, если M, N имеют тип I и для некоторых свободноголовых частных случаев этих термов мы имеем

$$\mathcal{H}^* \vdash M^\bullet \circ N^\bullet = N^\blacksquare \circ M^\blacksquare = I.$$

21.2.6. ЛЕММА. $\mathcal{H}^*(M, N) \Rightarrow \mathcal{H}^*(M, N)^\bullet$.

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{H}^*(M, N)$. Во-первых, мы утверждаем, что M, N разрешимы. Действительно, в $\mathcal{H}^*$ имеем $M \circ N = I$, откуда $M(N) = I$. Таким образом, терм M $\mathcal{H}^*$ -разрешим, а значит, и просто разрешим в силу предложения 17.1.4; то же верно для N .

Далее мы утверждаем, что M, N имеют тип I. Действительно, по теореме 8.3.14 терм M имеет г. н. ф., которую мы запишем в виде

$$M = \lambda x_1 \dots x_n. v M_1 \dots M_m.$$

Если $v \neq x_1$, то

$$\mathcal{H}^* \vdash I = M \circ N = \lambda z. M(Nz) = \lambda z x_2 \dots x_n. v M_1^* \dots M_m^*$$

в противоречие с леммой 21.2.4(ii). Следовательно, $v \equiv x_1$ и M имеет тип I; то же верно для N .

Последнее условие из определения $\mathcal{H}^*(M, N)^\bullet$ выполнено тривиально, так как верно $\mathcal{H}^*(M, N)$. $\square$

21.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть S_n — группа перестановок n элементов, и пусть $\pi \in S_n$. Тогда $\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$ обозначает терм

$$\lambda z. x_1 \dots x_n. z (M_{1x_{\pi(1)}}) \dots (M_{nx_{\pi(n)}}).$$

21.2.8. Основная лемма. Пусть $\mathcal{H}^*(M, N)^\bullet$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$, некоторых $\pi, \sigma \in S_n$ и некоторых $M_1, \dots, M_n, N_1, \dots, N_n \in \Lambda$ имеем

$$(i) M =_{\beta\eta} \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle, \quad N =_{\beta\eta} \langle \sigma | N_1, \dots, N_n \rangle.$$

$$(ii) \pi = \sigma^{-1}.$$

$$(iii) \mathcal{H}^*(M_i, N_{\pi i})^\bullet \text{ для } 1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. По предположению M и N имеют тип I. Поэтому, сделав, если нужно, η -расширения, получаем

$$(1) \quad \begin{aligned} M &=_{\beta\eta} \lambda z x_1 \dots x_n \cdot z P_1 \dots P_{m_1}, \\ N &=_{\beta\eta} \lambda z y_1 \dots y_n \cdot z Q_1 \dots Q_{m_2} \end{aligned}$$

для некоторых n, m_1, m_2 .

Утверждение 1. Все термы P_i, Q_i разрешимы. Кроме того, $n = (m_1 + m_2)/2$.

Доказательство. Действительно, для некоторых частных случаев $M^\bullet, N^\bullet$

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}^* \vdash I &= M^\bullet \circ N^\bullet = \lambda z x_1 \dots x_n \cdot z P_1^{\bullet\blacksquare} \dots P_{m_1}^{\bullet\blacksquare} = \\ &= \begin{cases} \lambda z x_1 \dots x_n \cdot z Q_1^{\bullet\blacktriangle} \dots Q_{m_2}^{\bullet\blacktriangle} P_{n+1}^{\bullet\blacksquare} \dots P_{m_1}^{\bullet\blacksquare}, & \text{если } m_1 \geq n, \\ \lambda z x_1 \dots x_n y_{m_1+1} \dots y_n \cdot z Q_1^{\bullet\blacktriangle} \dots Q_{m_2}^{\bullet\blacktriangle}, & \text{если } m_1 \leq n, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$(3) \quad ()^* = () [y_1, \dots, y_n := P_1^{\bullet\blacksquare}, \dots, P_n^{\bullet\blacksquare}],$$

и аналогично для $()^\blacktriangle$.

Пусть для определенности $m_1 \geq n$. По лемме 21.2.4(ii) имеем $n = m_2 + m_1 - n$, т. е. $n = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ и

$$(4) \quad \mathcal{H}^* \vdash Q_i^{\bullet\blacktriangle} = x_i \quad \text{для } 1 \leq i \leq m_2.$$

Следовательно, каждый из термов Q_i ($\mathcal{H}^*$ -)разрешим в силу леммы 8.3.3 и предложения 17.1.4. Аналогичным образом разрешимы термы P_i . $\square_1$

Из утверждения 1 и теоремы 8.3.14 следует, что термы P_i, Q_i имеют г. н. ф., которые мы запишем в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} P_i &= \lambda \vec{p}_i \cdot u_i \dots, \quad 1 \leq i \leq m_1, \\ Q_i &= \lambda \vec{q}_i \cdot v_i \dots, \quad 1 \leq i \leq m_2; \end{aligned}$$

и тогда (1) принимает вид

$$(6) \quad \begin{aligned} M &=_{\beta\eta} \lambda z x_1 \dots x_n \cdot z (\lambda \vec{p}_1 \cdot u_1 \dots) \dots (\lambda \vec{p}_{m_1} \cdot u_{m_1} \dots), \\ N &=_{\beta\eta} \lambda z y_1 \dots y_n \cdot z (\lambda \vec{q}_1 \cdot v_1 \dots) \dots (\lambda \vec{q}_{m_2} \cdot v_{m_2} \dots). \end{aligned}$$

В силу соглашения о переменных $\{\vec{x}\} \cap \{\vec{v}\} = \{\vec{y}\} \cap \{\vec{u}\} = \emptyset$.

Утверждение 2. В (6)

$$(i) \quad \{u_1, \dots, u_{m_1}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\},$$

$$(ii) \quad \{v_1, \dots, v_{m_2}\} \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Доказательство. (i) Имеем в $\mathcal{H}^*$ (при $m_1 \geq n$) для $1 \leq i \leq m_2$

$$(7) \quad x_i = Q_i^{\bullet\blacktriangle} \text{ (в силу (4))} = (\lambda \vec{q}_i \cdot v_i \dots)^\bullet [\vec{y} := \vec{P}^{\bullet\blacksquare}] \quad \text{(в силу (3), (5)).}$$

Сначала мы покажем, что v_i — свободная головная переменная терма $Q_i^{\bullet\blacktriangle}$. Предположим, что это не так и головная переменная есть a_i . В силу соглашения о переменных имеем $a_i \notin \{\vec{x}, \vec{y}\}$. Но тогда в силу (7) $x_i = \lambda \vec{r}_i \cdot a_i \dots$ в противоречие с леммой 21.2.4(ii).

Поэтому (7) приобретает вид $x_i = (\lambda \vec{s}_i \cdot v_i \dots)^\bullet [\vec{y} := \dots]$. Так как $v_i \neq x_i$, то $v_i \in \{\vec{y}\}$. В случае $m_1 \leq n$ рассуждение аналогично.

(ii) доказывается аналогично. $\square_2$

В силу утверждения 2 имеются отображения

$$\pi: \{1, \dots, m_1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad \sigma: \{1, \dots, m_2\} \rightarrow \{1, \dots, n\},$$

такие, что $u_i \equiv x_{\pi i}$, $v_i \equiv y_{\sigma i}$ для всех рассматриваемых i .

Утверждение 3. (i) $m_1 = m_2 = n$.

(ii) $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi = \text{id}$ на $\{1, \dots, n\}$. Следовательно, π, σ — перестановки и $\pi = \sigma^{-1}$.

Доказательство. (i), (ii). Пусть $\mathcal{H}^* \vdash M^\bullet \circ N^\bullet = I$. В силу (6) и утверждения (2)

$$\begin{aligned} M^\bullet &=_{\beta\eta} \lambda z x_1 \dots x_n \cdot z (\lambda \dots x_{\pi 1} \dots) \dots (\lambda \dots x_{\pi m_1} \dots), \\ N^\bullet &=_{\beta\eta} \lambda z y_1 \dots y_n \cdot z (\lambda \dots y_{\sigma 1} \dots) \dots (\lambda \dots y_{\sigma m_2} \dots). \end{aligned}$$

Допустим, что $m_1 < n$. Тогда $m_2 > n$ в силу утверждения 1 и потому $\sigma i = \sigma j \leq n$ для некоторых $i, j \leq m_2$. Теперь в $\mathcal{H}^*$ имеем

$$\begin{aligned} I &= M^\bullet \circ N^\bullet = \lambda z x_1 \dots x_n \cdot N^\bullet z (\lambda \dots x_{\pi 1} \dots) \dots (\lambda \dots x_{\pi m_1} \dots) = \\ &= \lambda z x_1 \dots x_n y_{m_1+1} \dots y_n \cdot z (\lambda \dots y_{\sigma 1} \dots) \dots (\lambda \dots y_{\sigma m_2} \dots), \end{aligned}$$

где

$$y_{\sigma i}^* = \begin{cases} x_{\pi \sigma i}, & \text{если } \sigma i \leq m_1, \\ y_{\sigma i} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По лемме 21.2.4(ii) последовательность $x_1, \dots, x_n, y_{m_1+1}, \dots, y_n$ совпадает с $y_{\sigma 1}^*, \dots, y_{\sigma m_2}^*$, но это невозможно ввиду $\sigma i = \sigma j$.

Поэтому $m_1 \geq n$. Теперь имеем в $\mathcal{H}^*$

$$1 = M^\bullet \circ N^\bullet = \lambda z x_1 \dots x_n z (\lambda \dots y_{\sigma 1}^* \dots) \dots \\ \dots (\lambda \dots y_{\sigma m_2}^* \dots) (\lambda \dots x_{\pi(n+1)} \dots) \dots (\lambda \dots x_{\pi m_1} \dots),$$

где $y_{\sigma i}^* = x_{\pi \sigma i}$. Значит, по лемме 21.2.4(ii) последовательность $x_1, \dots, x_n$ совпадает с $x_{\pi \sigma 1}, \dots, x_{\pi \sigma m_2}, x_{\pi(n+1)}, \dots, x_{\pi m_1}$.

Отсюда следует, что $\pi \sigma i = i$ для $1 \leq i \leq m_2$.

Мы доказали в предположении $\mathcal{H}^* \vdash M^\bullet \circ N^\bullet = 1$, что $m_1 \geq n$ и $\pi \sigma i = i$ для $1 \leq i \leq m_2$.

Аналогично можно доказать в предположении $\mathcal{H}^* \vdash N^\bullet \circ M^\bullet = 1$, что $m_2 \geq n$ и $\sigma \pi i = i$ для $1 \leq i \leq m_1$.

Так как $n = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ в силу утверждения 1, мы получаем, что $m_1 = m_2 = n$ и что $\delta \circ \pi = \pi \circ \sigma = \text{id}$ на $\{1, \dots, n\}$. $\square_3$

Положим

$$M_i = \lambda x_{\pi i} P_i, \quad N_i = \lambda y_{\sigma i} Q_i$$

для $1 \leq i \leq n$. В силу утверждения 3 получаем, что $x_{\pi i}$ — свободная голова терма P_i , поэтому все M_i имеют тип I. То же верно для N_i .

Утверждение 4. (i) $M =_\eta \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$, $N =_\eta \langle \sigma | N_1, \dots, N_n \rangle$.

(ii) $\mathcal{H}^*(M_i, N_{\pi i})^\bullet$ для $1 \leq i \leq n$.

Доказательство. (i)

$$\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle = \lambda z x_1 \dots x_n z (M_1 x_{\pi 1}) \dots (M_n x_{\pi n}) = \\ = \lambda z x_1 \dots x_n z P_1 \dots P_n =_{\beta \eta} M.$$

Аналогично получаем $\langle \sigma | N_1, \dots, N_n \rangle =_{\beta \eta} N$.

(ii) По предположению имеем для некоторых свободноголовых частных случаев $M^\bullet, N^\bullet$

$$= M^\bullet \circ N^\bullet = \lambda z x_1 \dots x_n N^\bullet z (M_1^\bullet x_{\pi 1}) \dots (M_n^\bullet x_{\pi n}) = \\ = \lambda z x_1 \dots x_n z (N_1^\bullet (M_{\sigma 1}^\bullet x_{\pi \sigma 1})) \dots (N_n^\bullet (M_{\sigma n}^\bullet x_{\pi \sigma n})) = \\ = \lambda z x_1 \dots x_n z ((N_1^\bullet \circ M_{\sigma 1}^\bullet) x_1) \dots ((N_n^\bullet \circ M_{\sigma n}^\bullet) x_n)$$

(так как $\pi \circ \sigma = \text{id}$), где $X^\bullet \equiv X[z := N^\bullet z]$ — свободноголовый частный случай. Поэтому в силу леммы 21.2.4(i) для всех i

$$\mathcal{H}^* \vdash N_i^\bullet \circ M_{\sigma i}^\bullet = 1,$$

т. е. $\mathcal{H}^*(N_i^\bullet, M_{\sigma i}^\bullet)$, но так как $\pi = \sigma^{-1}$, это то же, что и

$$(8) \quad \mathcal{H}^* \vdash N_{\pi i}^\bullet \circ M_i^\bullet = 1.$$

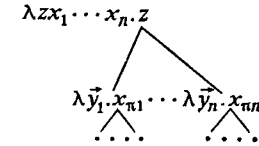
Аналогичным образом из $\mathcal{H}^* \vdash N^\bullet \circ M^\bullet = 1$ следует, что

$$(9) \quad \mathcal{H}^* \vdash M_i^\bullet \circ N_{\pi i}^\bullet = 1$$

для некоторых свободноголовых частных случаев $^\bullet, ^\bullet \Delta$. Так как M_i, N_i имеют тип I, отсюда следует, что $\mathcal{H}^*(M_i, N_{\pi i})^\bullet$ для всех i . $\square_4$

Теперь утверждение основной леммы следует из утверждений 3 и 4. $\square$

21.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Говорят, что дерево бёмовского типа A является *наследственной перестановкой* (и пишут $A \in \mathcal{HP}$), если A имеет вид

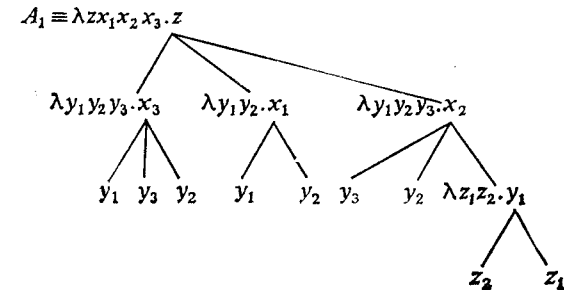


т. е. любая переменная, связанная символом λ , встречается ровно один раз, и, за исключением головной переменной z , любая связанная переменная встречается на один уровень ниже того места, где она связана.

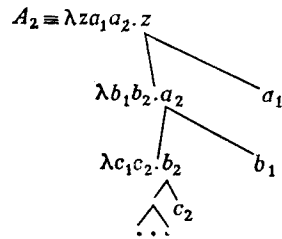
(ii) Говорят, что A — *конечная наследственная перестановка* (и пишут $A \in \mathcal{FHP}$), если $A \in \mathcal{HP}$ и A конечно.

(iii) $\text{HP} = \{M \in \Lambda \mid \text{BT}(M) \in \mathcal{HP}\}$. Множество FHP определяется аналогично.

21.2.10. ПРИМЕРЫ. (i) Следующее дерево принадлежит классу $\mathcal{FHP}$:



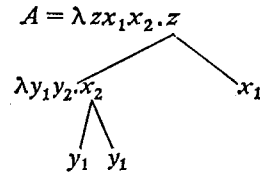
(ii) Следующее дерево принадлежит классу $\mathcal{HP}$:



21.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Говорят, что A находится в $\mathcal{HP}$ до уровня k (и пишут $A \in_k \mathcal{HP}$), если $(\exists B \in \mathcal{HP}) (A =_k B)$ (т. е. эти деревья равны на уровнях $< k$).

(ii) $M \in_k \text{HP}$, если $\text{BT}(M) \in_k \mathcal{HP}$.

ПРИМЕР. Пусть



Тогда $A \in_2 \mathcal{HP}$, но $A \notin_3 \mathcal{HP}$.

21.2.12. ЛЕММА. Пусть $\pi \in S_n$. Тогда

$$M_1, \dots, M_n \in_k \text{HP} \Rightarrow \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle \in_{k+1} \text{HP}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{array}{c}
 \text{BT}(\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle) = \lambda z x_1 \dots x_n . z \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \text{BT}(M_1 x_{\pi 1}) \dots \text{BT}(M_n x_{\pi n})
 \end{array}$$

21.2.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\mathcal{H}^*(M, N) \Rightarrow M \in \text{HP}$.

Доказательство. Индукцией по k мы покажем, что

$$(1) \quad \mathcal{H}^*(M, N)^\bullet \Rightarrow M \in_k \text{HP}.$$

Случай $k=0$ тривиален, так как всегда $A =_0 B$. Пусть $k > 0$, и предположим, что $\mathcal{H}^*(M, N)^\bullet$. Тогда по основной лемме 21.2.8 мы имеем $M =_{\beta\eta} \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$, $N =_{\beta\eta} \langle \sigma | N_1, \dots, N_n \rangle$ и $\mathcal{H}^*(M_i, N_{\pi i})^\bullet$ для $1 \leq i \leq n$. Следовательно, по предположению индукции $M_i \in_k \text{HP}$ для $1 \leq i \leq n$. Поэтому $M \in_{k+1} \text{HP}$ в силу предыдущей леммы.

Теперь имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^*(M, N) &\Rightarrow \mathcal{H}^*(M, N)^\bullet \text{ (по лемме 21.2.6)} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall k (M \in_k \text{HP}) \text{ (в силу (1))} \Rightarrow M \in \text{HP}. \quad \square
 \end{aligned}$$

21.2.14. ЛЕММА. (i) Пусть $\pi \in S_n$. Тогда

$$\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle =_{\beta\eta} \langle \pi^* | M_1, \dots, M_n, 1, \dots, 1 \rangle,$$

где $1_1 \equiv \dots \equiv 1_k \equiv 1$, а $\pi^* \in S_{n+k}$ — продолжение перестановки π , такое, что $\pi^*(n+i) = n+i$ для $1 \leq i \leq k$.

(ii) Пусть $\pi, \sigma \in S_n$. Тогда

$$\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle \circ \langle \sigma | N_1, \dots, N_n \rangle = \langle \pi \circ \sigma | N_1 \circ M_{\sigma 1}, \dots, N_n \circ M_{\sigma n} \rangle.$$

Доказательство. (i) $\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle =$

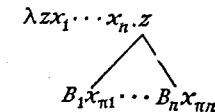
$$\begin{aligned}
 &= \lambda z x_1 \dots x_n . z (M_1 x_{\pi 1}) \dots (M_n x_{\pi n}) = \\
 &=_{\beta\eta} \lambda z x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots x_{n+k} . z (M_1 x_{\pi 1}) \dots (M_n x_{\pi n}) x_{n+1} \dots x_{n+k} = \\
 &= \langle \pi^* | M_1, \dots, M_n, 1, \dots, 1 \rangle.
 \end{aligned}$$

(ii) $\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle \circ \langle \sigma | N_1, \dots, N_n \rangle =$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda z . \langle \pi | M_1, \dots \rangle (\langle \sigma | N_1, \dots \rangle z) = \\
 &= \lambda z . (\lambda z x . z (M_1 x_{\pi 1}) \dots) (\langle \sigma | N_1, \dots \rangle z) = \\
 &= \lambda z x . \langle \sigma | N_1, \dots \rangle z (M_1 x_{\pi 1}) \dots (M_n x_{\pi n}) = \\
 &= \lambda z x . (\lambda z y . z (N_1 y_{\sigma 1}) \dots) z (M_1 x_{\pi 1}) \dots = \\
 &= \lambda z x . z (N_1 (M_{\sigma 1} x_{\pi \sigma 1})) \dots (N_n (M_{\sigma n} x_{\pi \sigma n})) = \\
 &= \langle \pi \circ \sigma | N_1 \circ M_{\sigma 1}, \dots, N_n \circ M_{\sigma n} \rangle. \quad \square
 \end{aligned}$$

Можно дать следующие определения множеств $\mathcal{HP}$ и HP в стиле неформального определения бёмовских деревьев 10.1.3.

21.2.15. ЗАМЕЧАНИЕ. (i) Пусть $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ и $\pi \in S_n$. Определим $\langle \pi | B_1, \dots, B_n \rangle \in \mathcal{B}$, полагая его равным



Тогда имеем для $A \in \mathcal{B}$

$$A \in \mathcal{HP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists n \geq 0) (\exists \pi \in S_n) (\exists B_1, \dots, B_n \in \mathcal{HP}) (A = \langle \pi | B_1, \dots, B_n \rangle).$$

(Чтобы соблюсти единообразие обозначений, можно положить $\langle \emptyset | \rangle = \lambda x . x$.)

(ii) Аналогично для $M \in \Lambda$

$$M \in \text{HP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists n \geq 0) (\exists \pi \in S_n) (\exists M_1, \dots, M_n \in \text{HP}) (M = \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle).$$

Теперь для деревьев из $\mathcal{HP}$ будет определено «формальное обращение». Это определение будет неформальным, и его можно уточнить тем же способом, которым неформальное определение 10.1.3 бёмовского дерева было уточнено в определении 10.1.4.

21.2.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $A \in \mathcal{HP}$. Формальное обращение дерева A (обозначаемое через A^{-1}) определяется следующим образом. Если $A = \langle \pi | B_1, \dots, B_n \rangle$, то

$$A^{-1} = \langle \pi^{-1} | B_{\pi^{-1}1}^{-1}, \dots, B_{\pi^{-1}n}^{-1} \rangle,$$

в частности

$$(\lambda x.x)^{-1} = \langle \emptyset | \rangle^{-1} = \langle \emptyset | \rangle = \lambda x.x.$$

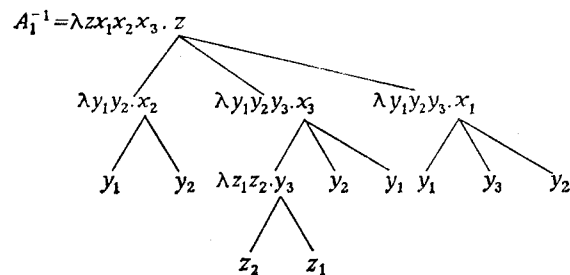
(ii) Пусть $M \in \text{HP}$. Тогда формальное обращение термина M (обозначаемое через M^{-1}) — это такой терм, что $\text{BT}(M^{-1}) = \text{BT}(M)^{-1}$. Заметим, что $\text{BT}(M)$, а потому и $\text{BT}(M)^{-1}$ — рекурсивно перечислимое дерево без свободных переменных. Поэтому терм M^{-1} с нужным свойством существует по теореме 10.1.23.

Очевидно, что для $M = \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle \in \text{HP}$

$$M^{-1} = \langle \pi^{-1} | M_{\pi^{-1}1}^{-1}, \dots, M_{\pi^{-1}n}^{-1} \rangle.$$

21.2.17. ПРИМЕР. В обозначениях примера 21.2.10

(i)



(ii) $A_2^{-1} = A_2$.

21.2.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $M \in \text{HP}$. Тогда $\mathcal{H}^*(M, M^{-1})$.

Доказательство. Для $N \in \Lambda$ положим

$$N =_k I \Leftrightarrow \exists I' (\text{BT}(N) =_k \text{BT}(I') =_\eta \text{BT}(I)).$$

Тогда

$$(1) \quad \forall k (N =_k I \Rightarrow \text{BT}(N) =_\eta \text{BT}(I)).$$

Индукцией по k мы покажем

$$(2) \quad M \circ M^{-1} =_k I \quad \text{и} \quad M^{-1} \circ M =_k I.$$

Если $k = 0$, это тривиально, поэтому рассмотрим переход от k к $k + 1$. Положим $M = \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$. Тогда мы имеем $M^{-1} = \langle \pi^{-1} | M_{\pi^{-1}1}^{-1}, \dots \rangle$. Следовательно, по лемме 21.2.14(ii)

$$M \circ M^{-1} = \langle \text{id}_n | M_{\pi^{-1}1}^{-1} \circ M_{\pi^{-1}1}, \dots \rangle.$$

По предположению индукции $M_j^{-1} \circ M_j =_k I$ для $1 \leq j \leq n$. Поэтому $M \circ M^{-1} =_{k+1} I$. Аналогично рассуждаем и для $M^{-1} \circ M$.

В силу (1) и (2) имеем

$$\text{BT}(M \circ M^{-1}) =_\eta \text{BT}(I) =_\eta \text{BT}(M^{-1} \circ M),$$

откуда по теореме 19.2.12 следует, что

$$\mathcal{H}^* \vdash M \circ M^{-1} = M^{-1} \circ M = I. \quad \square$$

Мы получаем таким образом характеризацию $\mathcal{H}^*$ -обратимости, принадлежащую Бергстре и Клопу [1980].

21.2.19. ТЕОРЕМА. Терм $M \in \Lambda$ $\mathcal{H}^*$ -обратим т. и т.т., когда $M \in \text{HP}$.

Доказательство получается ссылкой на предложения 21.2.13 и 21.2.18. $\square$

Теперь мы хотим исследовать $\mathcal{T}$ -обратимость для различных λ -теорий $\mathcal{T}$.

Напомним, что глубина бёмовского дерева A — это величина $d(A) = \sup \{ \text{lh}(\alpha) \mid \alpha \in A \}$ и что $d(M) = d(\text{BT}(M))$.

21.2.20. ЛЕММА. (i) $d(\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle) \geq m + 1 \Leftrightarrow d(M_i) \geq m$ для некоторого i .

Пусть $M, N \in \text{HP}$. Тогда

$$(ii) \quad d(M) \geq m \Rightarrow d(M \circ N) \geq m, \quad d(N \circ M) \geq m.$$

$$(iii) \quad d(M) = \infty \Rightarrow d(M \circ N) = d(N \circ M) = \infty.$$

Доказательство. (i) получается по определению.

(ii) устанавливается индукцией по m . Если $m = 0$, то все тривиально, поэтому рассмотрим переход от m к $m + 1$.

Пусть $d(M) \geq m + 1$. Тогда $M = \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$, где $M_i \in \text{HP}$ для $1 \leq i \leq n$. В силу (i) имеем $d(M_{i_0}) \geq m$ для некоторого i_0 . Пусть $N = \langle \sigma | N_1, \dots, N_{n'} \rangle$. В силу леммы 21.2.14 можно считать, что $n = n'$ и

$$N \circ M = \langle \sigma \circ \pi | M_1 \circ N_{\pi 1}, \dots, M_n \circ N_{\pi n} \rangle.$$

По предположению индукции $d(M_{i_0} \circ N_{i_0}) \geq m$, откуда $d(N \circ M) \geq m + 1$ в силу (i); аналогично оценивается $d(M \circ N)$.

(iii) непосредственно получается из (ii). $\square$

Дальше мы приводим характеризацию $\lambda\eta$ -обратимости, при надлежащую Дедзани, Бергстре и Клопу.

21.2.21. ТЕОРЕМА. Терм M $\lambda\eta$ -обратим $\Leftrightarrow M \in \text{FHP}$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если M $\lambda\eta$ -обратим, то M $\mathcal{H}^*$ -обратим, и по теореме 21.2.19 мы имеем $M \in \text{HP}$. Допустим, что $M \notin \text{FHP}$. Тогда $d(M) = \infty$, откуда по лемме 21.2.20(iii)

$$(1) \quad d(M \circ N) = \infty \text{ для } N \in \text{HP}.$$

С другой стороны, для некоторого $N \in \Lambda$ в $\lambda\eta$ имеем $M \circ N = N \circ M = I$. Тогда и $N \in \text{HP}$. В силу следствия 15.1.5 терм $M \circ N$ имеет β -н. ф., так что дерево $\text{BT}(M \circ N)$ конечно в противоречие с (1).

$(\Leftarrow)$ Если $M \in \text{FHP}$, то $k = d(M) < \infty$. Индукцией по k мы покажем, что в $\lambda\eta$

$$M \circ M^{-1} = M^{-1} \circ M = I,$$

и тогда все будет в порядке. Если $k = 0$, то $M = I$ и $M^{-1} = I$. Рассмотрим переход от k к $k + 1$. Тогда $M = \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$, где $d(M_i) \leq k$ для $1 \leq i \leq n$ и $M^{-1} = \langle \pi^{-1} | M_{\pi^{-1}1}^{-1}, \dots, M_{\pi^{-1}n}^{-1} \rangle$. В $\lambda\eta$

$$\begin{aligned} M \circ M^{-1} &= \langle \pi \circ \pi^{-1} | M_{\pi^{-1}1}^{-1} \circ M_{\pi^{-1}1}, \dots \rangle \text{ (по лемме 21.2.14(ii))} = \\ &= \langle \text{id} | I, \dots, I \rangle \text{ (по предположению индукции)} = \\ &= \langle \emptyset | \rangle = I \text{ (по лемме 21.2.14(i)).} \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $M^{-1} \circ M = I$. $\square$

Используя теоретико-доказательственный анализ системы $\mathcal{H}\omega$, мы получаем приводимые ниже следствия. Результат (ii), вероятно, имеет место также для $\mathcal{B}\eta$ и $\mathcal{B}\omega$.

21.2.22. Следствие. (i) Пусть $\mathcal{T}$ есть λ , $\mathcal{H}$ или $\mathcal{B}$. Тогда

$$M \in \Lambda \quad \mathcal{T}\text{-обратим} \Leftrightarrow M =_{\mathcal{T}} I.$$

(ii) Пусть $\mathcal{T}$ есть $\lambda\eta$, $\lambda\omega$, $\mathcal{H}\eta$, $\mathcal{H}\omega$. Тогда

$$M \in \Lambda \quad \mathcal{T}\text{-обратим} \Leftrightarrow M \in \text{FHP}.$$

Доказательство. (i) Импликация $(\Leftarrow)$ тривиальна. $(\Rightarrow)$. Заметим, что

$$(1) \quad \mathcal{T} \vdash M = N \Rightarrow \text{BT}(M) = \text{BT}(N).$$

Если M $\mathcal{T}$ -обратим, то M $\mathcal{H}^*$ -обратим и, значит, $M \in \text{HP}$. Допустим, что $M \neq_{\mathcal{T}} I$. Тогда $M = \langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle$ с $n > 0$. Но тогда для обращения N терма M в $\mathcal{T}$ мы имеем $I = M \circ N = \lambda z.M(Nz) = \lambda z.x.Nz(M_1 x_{\pi 1}) \dots$ в противоречие с (1).

(ii) $(\Leftarrow)$ Если $M \in \text{FHP}$, то по предыдущей теореме терм M $\lambda\eta$ -обратим, значит, и $\mathcal{T}$ -обратим.

$(\Rightarrow)$ Если M $\mathcal{T}$ -обратим, то для некоторого $N \in \Lambda$ в $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}\omega$ мы имеем $M \circ N = N \circ M = I$. Но тогда по теореме 17.2.17 то же верно и в $\lambda\eta$, т. е. M $\lambda\eta$ -обратим. Следовательно, $M \in \text{FHP}$ по предыдущей теореме. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если терм M $\mathcal{T}$ -обратим, то M $\mathcal{T}$ -взаимно однозначен (в очевидном смысле). Неизвестно, верно ли обратное (в $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$). См. также упр. 21.4.2, 21.4.3.

21.3. Группы $G(\lambda\eta)$ и $G(\mathcal{H}^*)$

Из следствия 21.2.22 вытекает, что

$$G(\lambda) = G(\mathcal{H}) = G(\mathcal{B}) = \{e\} \text{ — тривиальная группа,}$$

$$G(\lambda\eta) = G(\lambda\omega) = G(\mathcal{H}\eta) = G(\mathcal{H}\omega),$$

$$G(\mathcal{H}^*) \cong G(\lambda\eta).$$

В этом разделе будет найдена теоретико-групповая структура $G(\lambda\eta)$ и $G(\mathcal{H}^*)$. Сначала напомним следующие теоретико-групповые понятия.

21.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) S_{ω} — это группа всех перестановок множества $\mathbb{N}$ (т. е. взаимно однозначных отображений $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$).

$S_{\omega} = \{\pi \in S_{\omega} | \pi(k) = k, \text{ за исключением конечного числа } k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Если H — группа с единицей e , то H^{ω} — группа бесконечных последовательностей $\{\langle h_0, h_1, \dots \rangle | h_k \in H\}$ с покоординатным умножением.

$$H^{\omega} = \{\vec{h} \in H^{\omega} | h_k = e \text{ для всех, кроме конечного множества } k \in \mathbb{N}\}.$$

(iii) Каждая перестановка $\pi \in S_{\omega}$ следующим образом индуцирует автоморфизм на H^{ω} :

$$\pi \langle h_0, h_1, \dots \rangle = \langle h_{\pi 0}, h_{\pi 1}, \dots \rangle.$$

Обозначение. $\vec{h}^{\pi} = \pi \vec{h}$ для $\vec{h} \in H^{\omega}$.

(iv) Полупрямое произведение S_{ω} и H^{ω} (обозначаемое через $S_{\omega} \otimes H^{\omega}$) — это

$$\{ \langle \pi, \vec{h} \rangle | \pi \in S_{\omega}, \vec{h} \in H^{\omega} \}$$

с умножением¹⁾

$$\langle \pi, \vec{h} \rangle \langle \sigma, \vec{g} \rangle = \langle \pi\sigma, \vec{g} \vec{h}^{\sigma} \rangle.$$

¹⁾ Обычно вводят умножение формулой $\langle \pi\sigma, \vec{h}^{\sigma} \vec{g} \rangle$, но так как группа X с умножением $\cdot$ изоморфна группе X с умножением $x \odot y = y \cdot x$ (с изоморфизмом $\lambda z.z^{-1}$), то результат тот же самый.

(v) *Индуктивная* (соответственно *проективная*) *система групп* — это последовательность $(H_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, такая что каждая из H_n — группа и отображение $f_n: H_n \rightarrow H_{n+1}$ (соответственно $f_n: H_{n+1} \rightarrow H_n$) является гомоморфизмом.

(vi) Если (H_n, f_n) — индуктивная система групп, положим

$$f_{n, n+k} = f_{n+k-1} \circ \dots \circ f_{n+1} \circ f_n: H_n \rightarrow H_{n+k}$$

(где $f_{n, n}$ — тождественная функция на H_n).

Для $a, b \in \bigcup H_n$ (скажем, $a \in H_{n_1}$, $b \in H_{n_2}$) положим

$$a \sim b \Leftrightarrow (\exists m \geq n_1, n_2) (f_{n_1, m}(a) = f_{n_2, m}(b)).$$

Тогда $\sim$ — отношение эквивалентности. Через $[a]$ обозначается класс элемента a в $\bigcup H_n$.

Индуктивный предел системы (H_n, f_n) (обозначаемый через $\varinjlim (H_n, f_n)$ или $\varinjlim H_n$) — это группа $\bigcup H_n / \sim$ с умножением

$$[a][b] = [f_{n_1, m}(a) f_{n_2, m}(b)]$$

для некоторого $m \geq n_1, n_2$.

(vii) *Проективный предел* проективной системы (H_n, f_n) (обозначаемый через $\varprojlim (H_n, f_n)$ или $\varprojlim H_n$) — это

$$\{ \langle h_0, h_1, \dots \rangle \mid (\forall k \in \mathbb{N}) [h_k \in H_k \text{ и } f_k(h_{k+1}) = h_k] \}$$

с покомпонентным умножением.

21.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Группа $\langle H, \cdot, {}^{-1} \rangle$ *рекурсивна*, если имеется частичная сюръекция $v: \mathbb{N} \rightarrow H$ и общерекурсивные функции m, i , такие, что

$$v(m(n_1, n_2)) \cong v(n_1) \cdot v(n_2),$$

$$v(i(n)) \cong v(n)^{-1},$$

где $\cong$ означает, что если левая или правая часть определена, то определена и другая часть, и они равны. В этом случае говорят, что H *рекурсивна* (посредством отображений v, m, i).

(ii) *Индуктивная* (или *проективная*) *система групп* (H_n, f_n) *равномерно рекурсивна*, если каждая H_n *рекурсивна* (посредством отображений v_n, m_n, i_n), причем

(1) функции $\lambda n x y. m_n(x, y)$ и $\lambda n x. i_n(x)$ *рекурсивны*,

(2) существует общерекурсивная функция $\lambda n x. \psi_n(x)$, такая, что для всех $n, x \in \mathbb{N}$ имеем $f_n(v_n(x)) \cong v_{n+1}(\psi_n(x))$ (соответственно $f_n \circ v_{n+1} = v_n \circ \psi_n$).

(iii) Пусть (H_n, f_n) — равномерно рекурсивная индуктивная система групп. Тогда *рекурсивный индуктивный предел* системы (H_n, f_n) (обозначаемый через $\varinjlim^r (H_n, f_n)$ или $\varinjlim^r H_n$) состоит из множества

$$\{ \langle h_n \rangle \in \varinjlim H_n \mid \forall n (v_n(g(n)) = h_n) \text{ для некоторой рекурсивной } g \}$$

с покомпонентным умножением. Очевидно, что $\varinjlim^r H_n$ — подгруппа $\varinjlim H_n$.

21.3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть (H_n, f_n) — равномерно рекурсивная индуктивная система групп. Тогда $\varinjlim H_n$ *рекурсивен*.

(ii) Пусть (H_n, f_n) — равномерно рекурсивная проективная система групп. Тогда $\varprojlim^r H_n$ *рекурсивен*.

Доказательство. Пусть (H_n, f_n) равномерно рекурсивна посредством функций $v_n, m_n(x, y), i_n(x)$ и $\psi_n(x)$.

(i) Положим $v(\langle x, n \rangle) \cong [v_n(x)]$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартная спаривающая функция для натуральных чисел. Тогда отображение $v: \mathbb{N} \rightarrow \varinjlim H_n$ сюръективно. Положим

$$m(\langle x, n_x \rangle, \langle y, n_y \rangle) = \langle m_n(\psi_{n_x, n-1}(x), \psi_{n_y, n-1}(y)), n \rangle,$$

где $n = \max\{n_x, n_y\}$, а функции $\psi_{n, m}$ определены через ψ_n так же, как $f_{n, m}$ определены через f_n . Тогда очевидно, что функция m рекурсивна и обладает требуемым свойством. Аналогично можно найти i .

(ii) Положим

$$v(n) = \begin{cases} \langle \{n\}(k) \rangle_{k \in \mathbb{N}}, & \text{если эта последовательность принадлежит } \varprojlim^r H_n \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда v — частичная сюръекция. Положим

$$m(n_1, n_2) = \lambda k. m_k(\{n_1\}(k), \{n_2\}(k)),$$

где $\lambda k. \dots$ — (построенный каноническим образом) гёделевский номер частично рекурсивной функции $\lambda k. \dots$. Тогда m общерекурсивна и представляет умножение в группе $\varprojlim^r H_n$. Аналогично можно построить i . $\square$

21.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) С помощью индукции по n мы следующим образом определим группы G_n :

$$G_0 = \{e\} \text{ — тривиальная группа,}$$

$$G_{n+1} = S_\omega \otimes G_n^\omega.$$

(ii) Для каждого n имеется канонический гомоморфизм $f_n: G_n \rightarrow G_{n+1}$, определяемый равенствами

$$f_0(e) = e_1 \text{ — единичный элемент группы } G_1,$$

$$f_{n+1}(\langle \pi, \vec{x} \rangle) = \langle \pi, \langle f_n(x_i) \rangle_i \rangle,$$

где $\langle \pi, \vec{x} \rangle = \langle \pi, \langle x_i \rangle_i \rangle$ — произвольный элемент группы G_{n+1} .

(iii) Для каждого n имеется канонический гомоморфизм $g_n: G_{n+1} \rightarrow G_n$, определяемый равенствами

$$g_0 = \lambda x.e, \\ g_{n+1}(\langle \pi, \vec{x} \rangle) = \langle \pi, \langle g_n(x_i) \rangle_i \rangle.$$

Заметим, что (G_n, f_n) — индуктивная система, а (G_n, g_n) — проективная система, причем $g_n \circ f_n$ есть тождественная функция на G_n при всех n .

21.3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Группа S_ω рекурсивна.

(ii) Если H — рекурсивная группа, то рекурсивны H^ω и $S_\omega \otimes H^\omega$.

(iii) (G_n, f_n) и (G_n, g_n) — равномерно рекурсивные системы.

Доказательство. (i) Определим отображение $v: \mathbb{N} \rightarrow S_\omega$ равенствами

$$v(n) = \begin{cases} \pi_n, & \text{если } n = \langle n_0, \dots, n_{k-1} \rangle \in \text{Seq} \text{ и отображение} \\ \pi_n(i) = \begin{cases} n_i, & \text{если } i < k, \\ i & \text{в противном случае} \end{cases} \text{ взаимно} \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases} \text{однозначно,}$$

Очевидно, что v сюръективно. В силу тезиса Чёрча можно найти подходящие m и i .

(ii) Предположим, что H рекурсивна. Рекурсивность H^ω устанавливается аналогично (i). Для $S_\omega \otimes H^\omega$ положим $v(n) \cong \langle v_1((n)_0), v_2((n)_1) \rangle$, где v_1, v_2 — функции, перечисляющие S_ω и H^ω . Тогда $v: \mathbb{N} \rightarrow S_\omega \otimes H^\omega$ — частичная сюръекция, и опять можно построить m и i в силу тезиса Чёрча.

(iii) Так как G_n, f_n и g_n определены индуктивно, последовательности (G_n, f_n) и (G_n, g_n) равномерно рекурсивны. $\square$

21.3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) $\vec{G} = \varinjlim G_n$.

(ii) $\vec{G} = \varprojlim G_n$.

(iii) $\vec{G}^r = \varprojlim^r G_n$.

Мы покажем, что для $\mathcal{T} = \lambda\eta, \lambda\omega, \mathcal{H}\eta, \mathcal{H}\omega$ имеет место $G(\mathcal{T}) \cong \vec{G}$. Кроме того, $G(\mathcal{H}^*) \cong \vec{G}^r$.

21.3.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем следующие множества $F_k \subseteq G(\lambda\eta)$:

$$F_0 = \{1\}, \\ F_{k+1} = \{\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle \mid n \in \mathbb{N}, \pi \in S_n, M_1, \dots, M_n \in F_k\}.$$

21.3.8. ЛЕММА. (i) $F_k = (F_k, \circ)$ — подгруппа группы $G(\lambda\eta)$.

(ii) $G(\lambda\eta) = \bigcup_k F_k$.

(iii) $\forall k (F_k \subseteq F_{k+1})$.

Доказательство. (i) Индукция по k показывает, что термы, определяющие группы F_k , принадлежат множеству FHP, следовательно, $F_k \subseteq G(\lambda\eta)$. По лемме 21.2.14 множества F_k замкнуты относительно $\circ$, а в силу определения 21.2.16 — относительно $^{-1}$. Поэтому $(F_k, \circ)$ — подгруппа группы $G(\lambda\eta)$.

(ii) Для каждого $M \in \text{FHP}$ имеем $M \in F_k$, где $k = d(M)$.

(iii) также устанавливается индукцией по k с использованием равенства $1 =_{\beta\eta} \langle \text{id} | 1 \rangle$ для обоснования базиса. $\square$

21.3.9. ЛЕММА. Пусть (G_k, f_k) понимаются так же, как в определении 21.3.4, а i_k — вложение $F_k \subseteq F_{k+1}$. Тогда индуктивные системы (G_k, f_k) и (F_k, i_k) изоморфны.

Доказательство. Определим индукцией по k отображения $h_k: F_k \rightarrow G_k$:

$$h_0(1) = e_0,$$

$$h_{k+1}(\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle) = \langle \pi^\infty, \langle h_k(M_1), \dots, h_k(M_n), e_k, e_{k+1}, \dots \rangle \rangle,$$

где π^∞ — каноническое вложение π в S_ω , а e_k — единица группы G_k . С помощью стандартного рассуждения (использующего лемму 21.2.14) устанавливается, что h_k — изоморфизмы, такие что $h_{k+1} \circ i_k = f_k \circ h_k$ для всех k . $\square$

21.3.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $G(\lambda\eta) \cong \vec{G}$.

Доказательство. $G(\lambda\eta) \cong \varinjlim (F_k, i_k)$ (по лемме 21.3.8) = $\varinjlim (G_k, f_k)$ (по лемме 21.3.9) = $\vec{G}$. $\square$

21.3.11. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $\mathcal{T} = \lambda\eta, \lambda\omega, \mathcal{H}\eta, \mathcal{H}\omega$. Тогда $G(\mathcal{T}) \cong \vec{G}$.

(ii) Пусть $\mathcal{T} = \lambda, \mathcal{H}$ или $\mathcal{B}$. Тогда $G(\mathcal{T}) = \{e\}$, т. е. является тривиальной группой.

Доказательство. (i) В силу следствия 21.2.22 (ii)

$$G(\mathcal{T}) = \text{FHP} / =_{\mathcal{T}}.$$

Но для $M, N \in \text{FHP}$

$$M =_{\lambda\eta} N \Rightarrow M =_{\mathcal{T}} N \Rightarrow M =_{\mathcal{H}} N \Rightarrow M \approx_{\eta} N \Rightarrow M =_{\lambda\eta} N,$$

так как M, N имеют конечные бёмовские деревья. Поэтому

$$G(\mathcal{T}) = \text{FHP} / =_{\lambda\eta} = G(\lambda\eta),$$

и нужный результат следует из предыдущего предложения.

(ii) доказывается аналогично с помощью следствия 21.2.22(i). $\square$

Теперь будет доказано, что $G(\mathcal{H}^*) \cong \hat{G}^r$. Доказательство занимает 21.3.12—21.3.16.

21.3.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Индукцией по k определим следующие гомоморфизмы $j_k: F_{k+1} \rightarrow F_k$:

$$j_0(x) = 1, \\ j_{k+1}(\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle) = \langle \pi | j_k(M_1), \dots, j_k(M_n) \rangle.$$

Стандартным образом доказывается, что j_k корректно определены и действительно являются гомоморфизмами.

21.3.13. ЛЕММА. (F_k, j_k) — индуктивная система групп, изоморфная системе (G_k, g_k) .

Доказательство проводится с помощью тех же отображений h_k , что и в доказательстве леммы 21.3.9. $\square$

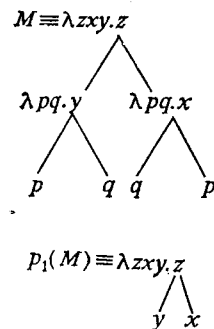
21.3.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим отображения

$$p_k: \text{HP} \rightarrow \text{HP} \text{ и } q_k: G(\mathcal{H}^*) \rightarrow F_k$$

равенствами

$$p_0(M) = 1, \\ p_{k+1}(\langle \pi | M_1, \dots, M_n \rangle) = \langle \pi | p_k(M_1), \dots, p_k(M_n) \rangle, \\ q_k([M]_{\mathcal{H}^*}) = [p_k(M)]_{\lambda\eta}.$$

ПРИМЕР. Если



то

21.3.15. ЛЕММА. (i) Отображения p_k, q_k корректно определены.

(ii) q_k — гомоморфизмы, такие, что $j_k \circ q_{k+1} = q_k$ для всех k .

Доказательство. (i) доказывается стандартным образом. При рассмотрении p_k пользуемся замечанием 21.2.15(ii).

При рассмотрении q_k показываем индукцией по k , что

$$M =_{\mathcal{H}^*} N \Rightarrow p_k(M) =_{\lambda\eta} p_k(N).$$

(ii) устанавливается совершенно стандартным образом. $\square$

21.3.16. ТЕОРЕМА. $G(\mathcal{H}^*) \cong \hat{G}^r$.

Доказательство. Определим отображение

$$l: G(\mathcal{H}^*) \rightarrow \varprojlim (F_k, j_k)$$

равенством $l(a) = \langle q_0(a), q_1(a), \dots \rangle$. Согласно лемме 21.3.15(ii) и тезису Чёрча, отображение l — корректно определенный гомоморфизм.

Если $a \neq a'$, то это обстоятельство явствует из рассмотрения конечных уровней деревьев, соответствующих a и a' . Следовательно, $q_k(a) \neq q_k(a')$ для некоторого k . Поэтому l инъективно.

По теореме 10.1.23 (о существовании для рекурсивных деревьев) отображение l сюръективно. Поэтому l является изоморфизмом и

$$G(\mathcal{H}^*) \cong \varprojlim F_k \cong \varprojlim G_k = \hat{G}^r$$

по лемме 21.3.13. $\square$

Из предыдущего следует, что $\hat{G}^r \hookrightarrow G(D_\infty)$. В упр. 21.4.5 будет показано, что верно даже $\hat{G} \hookrightarrow G(D_\infty)$. В общем случае это включение строгое.

21.4. Упражнения

21.4.1. Показать, что $S(\mathfrak{M})$ не может порождаться одним элементом.

21.4.2 (Клоп). Показать, что отображение, определяемое термом $\lambda zab.z(\lambda f.fab)$ в $\mathfrak{M}(\lambda\eta)$, сюръективно, но не инъективно.

21.4.3* (Клоп). Пусть $M_1 \equiv \lambda za.z(\lambda f.a(f(aa)))$ и $M_2 \equiv \lambda zab.z(ba)(ab)$. Показать, что в $\mathfrak{M}(\lambda\eta)$ терм M_1 (т.е. соответствующее отображение) сюръективен, но не инъективен, а терм M_2 инъективен, но не сюръективен.

21.4.4 (Клоп). (i) Показать, что группа $G(\lambda\eta)$ локально конечна (т.е. любая ее конечно порожденная подгруппа конечна).

(ii) Показать, что $G(\mathcal{H}^*)$ имеет элементы бесконечного порядка.

21.4.5. (i) Показать, что $\hat{G}$ нельзя вложить в $G(D_\infty)$.

(ii) (Скотт). Показать, что $\text{Aut}(D)$ (т.е. группу автоморфизмов п.ч.у.м.) можно вложить в $G(D_\infty)$.

(iii) Показать, что в общем случае подгруппа группы $G(D_\infty)$, порожденная $\hat{G}$ и $\text{Aut}(D)$, не исчерпывает всей группы.

(iv) Пусть D — п.ч.у.м. с двумя элементами. Верно ли, что $G(D_\infty) \cong \hat{G}$?

21.4.6. (i) Показать, что каноническая топология на $\mathfrak{M}(\mathcal{H}^*)$ индуцирует на $G(\mathcal{H}^*)$ топологию, которая превращает ее во вполне несвязную топологическую группу.

(ii) Показать, что для любого $a \in G(\mathcal{H}^*)$ последовательность $a, a^2, a^3, \dots$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к e (единичному элементу).

21.4.8 (Бём и Дедзани-Чанкальни [1974]). (i) Показать, что если $F \in \Lambda^0$ имеет левый обратный в $S(\lambda)$, то F инъективен на $\mathcal{M}(\lambda)$ и $\mathcal{M}^0(\lambda)$, но обратная импликация неверна.

(ii) Показать, что $F \in \Lambda^0$ имеет правый обратный в $S(\lambda)$ т. и т. т., когда F сюръективен на $\mathcal{M}(\lambda)$. То же верно для $\mathcal{M}^0(\lambda)$.

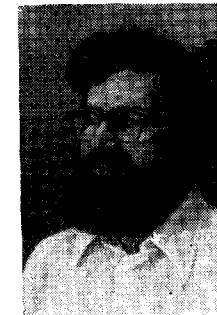
(iii) Показать, что $F \in \Lambda^0$ имеет правый обратный в $S(\lambda)$ т. и т. т., когда F имеет вид $\lambda x x N$.

(iv) Показать, что $F \in \Lambda^0$ имеет левый обратный в $S(\lambda)$ т. и т. т., когда некоторый терминальный узел α дерева $BT(Fx)$ имеет метку со свободной головной переменной x , но ни для какого $\beta < \alpha$ это не имеет места.

(v) Получить отсюда, что F обратим в $S(\lambda)$ т. и т. т., когда F взаимно однозначен на $\mathcal{M}(\lambda)$ или $\mathcal{M}^0(\lambda)$ т. и т. т., когда $F = I$.

21.4.9. Показать, что $F \in \Lambda^0$ определяет взаимно однозначную функцию на $\mathcal{M}(\lambda\eta)$ т. и т. т., когда F $\lambda\eta$ -обратим. [Для $\mathcal{M}^0(\lambda\eta)$ — это открытый вопрос.]

Приложения



Селдин

Приложения А и В содержат краткие заметки о двух разделах, не рассмотренных в этой книге, — *типовом лямбда-исчислении и иллативной комбинаторной логике*. В приложении С рассматриваются переменные и обосновывается наше соглашение о переменных 2.1.13. Доказательства приводятся редко; зачастую даются ссылки на литературу.

Приложение А

Типовое лямбда-исчисление

А.1. Чистое типовое лямбда-исчисление

А.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество типов Тур индуктивно определяется следующим образом:

- (1) $0 \in \text{Тур}$.
- (2) $\sigma, \tau \in \text{Тур} \Rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \in \text{Тур}$.

Подразумеваемая интерпретация типов такова:

А.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X — любое множество. Определим множества X_σ индукцией по $\sigma \in \text{Тур}$:

$$X_0 = X,$$

$$X_{\sigma \rightarrow \tau} = X_\tau^{X_\sigma} \text{ — совокупность всех теоретико-множественных функций из } X_\sigma \text{ в } X_\tau.$$

А.1.3. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) В литературе применяются обозначения, отличные от $(\sigma \rightarrow \tau)$, например $(\sigma\tau)$, $(\sigma)\tau$, $\sigma(\tau)$ или $F\sigma\tau$.

(ii) 0 иногда называется *основным типом* (или *типом индивидов*).

Иногда допускается несколько основных типов.

(iii) $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n$ — это сокращение для $(\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow (\dots \rightarrow \sigma_n)))$. Заметим, что каждый тип имеет вид $\sigma = \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n \rightarrow 0$, где $n \geq 0$.

(iv) Иногда правило (2) из определения типов заменяется правилом

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau \in \text{Тур} \Rightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_n; \tau) \in \text{Тур}.$$

Интерпретация задается равенством

$$X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n; \tau)} = X_\tau^{X_{\sigma_1} \times \dots \times X_{\sigma_n}}$$

(где $\times$ обозначает декартово произведение). Ввиду принадлежащего Шейнфинкелю сведения функции нескольких переменных к одноместным тип $(\sigma_1, \dots, \sigma_n; \tau)$ можно заменить на $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \tau$, и поэтому типы $(;)$ постулируются не всегда.

А.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Типовое λ -исчисление (обозначаемое через λ^τ) — это теория, определяемая следующим образом:

(i) λ^τ имеет такой алфавит:

$v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots$ — переменные для каждого типа $\sigma \in \text{Тур}$,

$\lambda, (,)$ — вспомогательные символы.

(ii) Множество *термов типа σ* (обозначаемое через Λ_σ) индуктивно определяется следующим образом:

$$v_i^\sigma \in \Lambda_\sigma,$$

$$M \in \Lambda_{\sigma \rightarrow \tau}, N \in \Lambda_\sigma \Rightarrow (MN) \in \Lambda_\tau,$$

$$M \in \Lambda_\tau, x \in \Lambda_\sigma \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda_{\sigma \rightarrow \tau},$$

где x пробегает переменные. Мы часто пишем $M \in \sigma$ вместо $M \in \Lambda_\sigma$.

Множество типовых λ -термов (обозначаемое через Λ^τ) — это $\bigcup \{\Lambda_\sigma \mid \sigma \in \text{Тур}\}$.

(iii) Формулы системы λ^τ — это равенства $M = N$, где $M, N \in \Lambda_\sigma$ и тип $\sigma \in \text{Тур}$ произволен.

(iv) Понятия свободной и связанной переменной, замкнутые термы и подстановка определяются очевидным образом. Λ_σ^0 обозначает множество замкнутых термов типа σ .

(v) Система λ^τ аксиоматизируется правилами и аксиомами для равенства (включая правило ξ — см. определение 2.1.4) и схемой аксиом

$$(\beta) \quad (\lambda x.M)N = M[x := N]$$

(где типы таковы, что термы корректно построены).

(vi) Система $\lambda\eta^\tau$ — это λ^τ плюс схема

$$(\eta) \quad \lambda x.Mx = M, \text{ если } x \notin \text{FV}(M).$$

А.1.5. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Типовая комбинаторная логика (обозначаемая через CL^τ) — это комбинаторный вариант системы λ^τ . Она имеет исходные константы

$$K_{\sigma\tau} \in \sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma), \quad S_{\sigma\tau\rho} \in (\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho))$$

для всех типов $\sigma, \tau, \rho \in \text{Тур}$ и схемы аксиом

$$K_{\sigma\tau}MN = M, \quad S_{\sigma\tau\rho}MNL = ML(NL),$$

где M, N, L имеют подходящие типы.

(ii) Заметим, что типы комбинаторов K и S переходят в истинные высказывания, если $\rightarrow$ понимается как импликация. Эта мысль разъясняется в § А.3.

(iii) При наличии экстенциональности теории λ^τ и CL^τ становятся эквивалентными. Имеется и комбинаторный вариант системы $CL_\tau + A_\beta$ (см. теорему 7.3.10), который эквивалентен системе λ_τ ; см. Санчис [1967].

(iv) Имеются также и теории λI^τ и $CL I^\tau$.

Доказуемое равенство в теориях λ и $\lambda\eta$ можно анализировать с помощью понятий редукции β и $\beta\eta$ соответственно. Нечто похожее верно для λ^τ и $\lambda\eta^\tau$.

А.1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеется понятие редукции $\beta(\eta)$, адекватное для $\lambda(\eta)^\tau$, т. е. обладающее свойством Чёрча — Россера.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Следующая теорема отмечает существенное различие между λ^τ и λ .

А.1.7. ТЕОРЕМА. (i) *Любой терм $M \in \Lambda^\tau$ имеет н. ф.*

(ii) *$\lambda(\eta)^\tau$ сильно нормализуема, т. е. любая $\beta(\eta)$ -редукция λ^τ -терма заканчивается.*

Доказательство. (i) Это впервые доказано Тейтом, см. Ганди [1980].

(ii) Это следует из аналогичного утверждения для более сильной системы $\mathcal{T}$ (см. теорему А.2.3). $\square$

В частности, в λ^τ не существует оператора неподвижной точки.

А.1.8. СЛЕДСТВИЕ. *Доказуемое в $\lambda(\eta)^\tau$ равенство разрешимо.*

Доказательство. $\lambda(\eta)^\tau \vdash M = N$, если M, N имеют одинаковые $\beta(\eta)$ -н. ф. Кроме того, эти н. ф. могут быть эффективно найдены в силу предыдущей теоремы. У Стетмена [1979] доказано, что разрешающий метод не элементарен по Кальмару. $\square$

Некоторым бестиповым λ -термам, например $\lambda x.x$, можно назначить типы: $\lambda x^\sigma.x^\sigma \in \sigma \rightarrow \sigma$. Это возможно для любого σ . В этой ситуации говорят, что $\sigma \rightarrow \sigma$ — возможный тип для $\lambda x.x \in \Lambda$. Другие λ -термы, например $\lambda x.xx$, не имеют типов.

А.1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $M \in \Lambda_\sigma$. Тогда $|M| \in \Lambda$ — это результат стирания всех типов в M . Говорят, что $|M|$ *типизируем*¹⁾ и что σ — возможный тип для $|M|$.

(ii) Если $\sigma \in \text{Тур}$, то частный случай σ^* типа σ — это любой результат замены всех вхождений типа 0 в σ любым другим типом. Например, $\sigma \rightarrow \sigma$ — частный случай типа $0 \rightarrow 0$ и типа 0.

А.1.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) *Множество типизируемых λ -термов рекурсивно.*

(ii) *Если терм $M \in \Lambda$ типизируем, то можно эффективно найти единственный тип $\sigma \in \text{Тур}$, такой, что любой возможный*

¹⁾ Чаше говорят, что $|M|$ стратифицируем. — Прим. перев.

тип для M является частным случаем типа σ . [Этот тип σ называется главной типовой схемой терма M .]

Доказательство. См. Хиндли [1969]. $\square$

Цифры Чёрча $c_n \equiv \lambda f.x.f^n x$ имеют тип $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \rightarrow 0$. Поэтому c_n можно рассматривать и в Λ^τ . Естественно возникает вопрос о том, какие числовые функции на этих цифрах определены в λ^τ .

Обобщенные полиномы — это наименьший класс числовых функций, содержащий проекции, константы, функцию sg (такую, что $sg(0) = 0$, $sg(n+1) = 1$) и замкнутый относительно сложения и умножения функций.

Следующий результат получен независимо Швихтенбергом и Стетменом.

А.1.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *На цифрах Чёрча λ^τ -определимы в точности обобщенно полиномиальные функции.*

Доказательство. См. Швихтенберг [1975/76]. $\square$

Из моделей типовой теории мы для простоты рассмотрим только типовые комбинаторные алгебры и типовые экстенциональные λ -алгебры.

А.1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{M} = \langle \{A_\sigma \mid \sigma \in \text{Тур}\}, \{\cdot_{\sigma\tau} \mid \sigma, \tau \in \text{Тур}\} \rangle$, где A_σ — множества и $\cdot_{\sigma\tau}: A_\sigma \rightarrow \tau \times A_\sigma \rightarrow A_\tau$ — отображение (аппликация).

Будем писать $x \in \mathfrak{M}$, если $x \in A_\sigma$ для некоторого σ . В этом случае мы пишем также $x \in \mathfrak{M}_\sigma$ и говорим, что x имеет тип σ .

(i) $\mathfrak{M}$ есть комбинаторная типовая структура, если A_0 имеет более одного элемента и для любого $\sigma, \tau, \rho \in \text{Тур}$ имеются элементы

$$k_{\sigma\tau}, s_{\sigma\tau\rho} \in \mathfrak{M}, \text{ удовлетворяющие равенствам,} \\ k_{\sigma\tau}xy = x, \quad s_{\sigma\tau\rho}xyz = xz(yz)$$

для всех x, y, z подходящих типов.

(ii) $\mathfrak{M}$ — экстенциональная типовая структура, если для любых $x, x' \in \mathfrak{M}_{\sigma \rightarrow \tau}$ мы имеем также

$$[(\forall z \in \mathfrak{M})(x.z = x'.z)] \Rightarrow x = x'.$$

Если M — комбинаторная (экстенциональная) типовая структура, то мы можем определить отношение

$$\mathfrak{M} \models M = N$$

для типовых комбинаторных термов M, N (соответственно для $M, N \in \Lambda^\tau$) одного и того же типа.

Для комбинаторных типовых структур

$$CL^\tau \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N,$$

а для экстенциональных —

$$\lambda\eta^\tau \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models M = N.$$

Для λ^τ легче найти модели, чем для λ .

А.1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X — множество, содержащее более чем один элемент. Полная типовая структура над X — это

$$\mathfrak{M}(X) = \langle \{X_\sigma \mid \sigma \in \text{Typ}\}, \{\cdot_{\sigma\tau} \mid \sigma, \tau \in \text{Typ}\} \rangle,$$

где множества X_σ введены в определении А.1.2 и $\cdot_{\sigma\tau}$ — очевидное отображение аппликации.

Очевидно, что $\mathfrak{M}(X)$ — экстенциональная типовая структура.

А.1.14. ЗАМЕЧАНИЕ. Определение А.1.13 может быть релятивизировано к любой декартово замкнутой категории $\mathcal{C}$ с объектом X , таким, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ имеет более одного элемента. Результирующая типовая структура обозначается через $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}(X)$. Она не обязательно экстенциональна.

Следующее предложение принадлежит Цукеру, см. Трулстра [1973], теорема 2.4.5. Оно утверждает, что любую комбинаторную типовую структуру можно обрушить таким образом, что она станет экстенциональной. Ситуация с нетиповыми структурами иная — см. упр. 20.6.5.

А.1.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Имеется равномерный метод перестройки любой комбинаторной типовой структуры $\mathfrak{M}$ в экстенциональную типовую структуру $\mathfrak{M}^E$, такую, что

$$(1) \quad \mathfrak{M} \models M = N \Rightarrow \mathfrak{M}^E \models M = N.$$

$\mathfrak{M}^E$ называется экстенциональным коллапсом структуры $\mathfrak{M}$.

Эскиз доказательства. Индукцией по σ определим отношение $=_\sigma$ для $x, y \in \mathfrak{M}_\sigma$:

$$\begin{aligned} x =_{0y} &\Leftrightarrow x = y, \\ x =_{\sigma \rightarrow \tau} y &\Leftrightarrow (\forall z z' \in \mathfrak{M}_\sigma) [z =_\sigma z' \Rightarrow xz =_\tau yz']. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathfrak{M}_\sigma = \{x \in \mathfrak{M}_\tau \mid x =_\sigma x\}, \quad \mathfrak{M}_\sigma^E = \mathfrak{M}_\sigma \text{ с точностью до } =_\sigma.$$

Тогда множества $\mathfrak{M}_\sigma^E$ образуют экстенциональную типовую структуру, удовлетворяющую (1). $\square$

Другие типовые структуры — это совокупность HRO наследственно рекурсивных операторов и совокупность НЕО наследственно эффективных операторов, определенные у Трулстры [1973], § 2.4.

А.1.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Для $n, m \in \mathbb{N}$ пусть $\{n\}(m)$ обозначает результат применения n -й частично рекурсивной функции к числу m . Будем писать $n \cdot m$ вместо $\{n\}(m)$. Положим

$$A_0 = \mathbb{N},$$

$$A_{\sigma \rightarrow \tau} = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \in A_\sigma) (n \cdot m \in A_\tau \text{ (и определено)})\}.$$

Тогда $\text{HRO} = \langle \{A_\sigma\}, \{\cdot_{\sigma\tau}\} \rangle$, где $\cdot_{\sigma\tau}$ — это $\cdot$ для всех σ, τ .

(ii) $\text{HEO} = \text{HRO}^E$.

А.1.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) HRO — комбинаторная типовая структура.

(ii) HEO — экстенциональная типовая структура.

Эскиз доказательства. (i) Элементы $k_{\sigma\tau}$ и $s_{\sigma\tau\rho}$ могут быть найдены (независимо от σ, τ, ρ) с помощью s - m - n -теоремы.

(ii) следует из предложения А.1.15. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное выше определение семейства HEO не вполне совпадает с первоначальным — см. Трулстра [1973], теорема 2.4.12.

Наконец, имеются модели из термов.

А.1.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathfrak{M}(CL^\tau)$, $\mathfrak{M}(\lambda^\tau)$ и $\mathfrak{M}(\lambda\eta^\tau)$ — открытые модели из термов, определяемые очевидным образом. [Моделей из замкнутых термов не существует, так как нет замкнутых термов типа 0.]

Очевидно, что $\mathfrak{M}(CL^\tau)$ и $\mathfrak{M}(\lambda^\tau)$ — комбинаторные типовые структуры. $\mathfrak{M}(\lambda\eta^\tau)$ — экстенциональная типовая структура.

Имеется следующий результат о полноте, установленный Фридманом и Стетменом.

А.1.19. ТЕОРЕМА. Пусть M, N — термы одного типа. Тогда

(i) $\lambda\eta^\tau \vdash M = N \Leftrightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{N}) \models M = N$.

(ii) Для любых $M, N \in \Lambda^\tau$ имеется $n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\lambda\eta^\tau \vdash M = N \Leftrightarrow \mathfrak{M}(\{0, \dots, n\}) \models M = N.$$

Доказательство. (i) См. Фридман [1975], с. 27.

(ii) См. Стетмен [1982], теорема 2. Число n зависит только от M . $\square$

А.1.20. СЛЕДСТВИЕ. Пусть M, N пробегают λ^τ -термы. Тогда отношение

$$\mathfrak{M}(\mathbb{N}) \models M = N$$

разрешимо.

Доказательство получается ссылкой на теорему А.1.19 и следствие А.1.8. $\square$

В противоположность этому, Фридман [1975], теорема 5, установил следующее,

А.1.21. ТЕОРЕМА. Пусть M, N пробегают (открытые) λ^r -термы. Тогда предикат

$$\mathfrak{M}(\mathbb{N}) \models M \neq N$$

не является арифметическим.

Следующий материал заимствован из статьи Стетмена [1982].

А.1.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X — некоторое множество переменных (причем не менее чем две из них имеют тип 0). Тогда

(i) $\mathcal{F}_0(X)$ — подструктура модели $\mathfrak{M}(\lambda\eta^r)$, состоящая из значений $[M]$, таких, что $FV(M) \subseteq X$.

(ii) $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}_0(X)^E$.

А.1.23. ТЕОРЕМА. (i) Если X — множество типовых переменных, содержащее хотя бы по одной переменной типов $0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0, \dots$, то $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}_0(X)$ с точностью до изоморфизма. Следовательно, для любых $M, N \in \Lambda^r$

$$\lambda\eta^r \vdash M = N \Leftrightarrow \mathcal{F}(X) \models M = N.$$

(ii) Если X содержит только переменные типа 0 и не менее двух, то

$$\text{Con}(\lambda\eta^r + M = N) \Leftrightarrow \mathcal{F}(X) \models M = N.$$

Доказательство. См. Стетмен [1982], предложения 5 и 8. $\square$

Из предыдущего следует, например, что $\mathcal{F}(\{x^0, y^0\})$ — экстенциональная типовая структура, в которой нельзя произвести новых отождествлений термов. Это аналог бестиповой модели $\mathfrak{M}(\mathcal{H}^*)$ в типовом λ -исчислении.

Наконец, упомянем один результат о спаривающих функциях.

А.1.24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Спаривание в λ^r для типов σ, τ — это тройка D, D_1, D_2 , такая, что для некоторого типа ρ

(1) $D \in \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho, D_1 \in \rho \rightarrow \sigma, D_2 \in \rho \rightarrow \tau$.

(2) $D_i(DM_1M_2) = M_i$ для всех $M_1 \in \sigma, M_2 \in \tau$.

(ii) Спаривание сюръективно, если, кроме того,

$$D(D_1M)(D_2M) = M \text{ для всех } M \in \rho.$$

А.1.25. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) В λ^r нет в общем случае спаривания для типов σ и τ .

(ii) В $\lambda\eta^r$ есть спаривание для всех типов σ и τ .

(iii) В $\lambda\eta^r$ нет сюръективного спаривания для всех типов.

Доказательство см. Барендрегт [1974]. $\square$

Доказательство п. (iii) предложения А.1.25 — типичное приложение бестипового λ -исчисления к типовому λ -исчислению: если бы D, D_1, D_2 годились для $\lambda\eta^r$, то эти термы без типов работали бы для $\lambda\eta$. Но тогда Ω дает противоречие,

А.2. Прimitивно рекурсивные функционалы

Гёдель [1958] дал доказательство непротиворечивости арифметики, использующее функционалы высших типов. Основная идея состоит в устранении переменных кванторов $\forall x \exists y P(x, y)$ в арифметических формулах путем их замены на $\exists f \forall x P(x, fx)$. Если это преобразование итерируется, нам требуются функционалы высших типов. Таким образом Гёдель переводил любую арифметическую формулу A в формулу вида

$$A^D = \exists \vec{x} \forall y A_D(\vec{x}, y),$$

где A_D бескванторная. Он показал, что если A доказуема в интуиционистской арифметике, то A^D становится истинной, когда $\vec{x}, y$ пробегают класс «конструктивных функционалов». (Изложение см. у Трулстры [1973], гл. III § 5, и Хиндли и др. [1972], гл. 11.) Позднее стало понятно, что этот класс функционалов можно описать, расширив λ^r цифрами, операцией следования и оператором рекурсии. Результирующая система называется гёделевской системой $\mathcal{T}$ примитивно рекурсивных функционалов.

А.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гёделевская система $\mathcal{T}$ — это расширение системы λ^r , определяемое следующим образом:

(i) Множество термов системы $\mathcal{T}$, записываемое в виде $\Lambda\mathcal{T} = \bigcup \{\Lambda\mathcal{T}_\sigma \mid \sigma \in \text{Typ}\}$, определяется путем добавления к Λ^r констант

$$0 \in \Lambda\mathcal{T}_0, S^+ \in \Lambda\mathcal{T}_{0 \rightarrow 0},$$

$$R_\sigma \in \Lambda\mathcal{T}_{\sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow 0 \rightarrow \sigma) \rightarrow 0 \rightarrow \sigma}$$

и замыкания относительно аппликации и λ -абстракции.

(ii) Формулы системы $\mathcal{T}$ — это равенства между элементами множества $\Lambda\mathcal{T}$. Теория $\mathcal{T}$ аксиоматизируется правилами и аксиомами для равенства, β -конверсией и следующими схемами для примитивной рекурсии высших типов:

$$R_\sigma MN0 = M,$$

$$R_\sigma MN(S^+x) = N(R_\sigma MNx)x,$$

где $M, N \in \Lambda\mathcal{T}$ имеют подходящие типы, а x — переменная типа 0.

(iii) $\mathcal{T}\eta$ — расширение системы $\mathcal{T}$ с помощью η -конверсии.

А.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. На $\Lambda\mathcal{T}$ имеются понятия редукции $\beta\mathcal{T}$ и $\beta\eta\mathcal{T}$, которые соответствуют доказуемому равенству в $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}\eta$ и обладают свойством Чёрча — Россера.

Следующий результат доказан независимо Драгалиным [1968], Хинатой [1967], Ханатани [1966], Санчисом [1967], Шёнфилдом [1967] и Тейтом [1967] (!).

А.2.3. ТЕОРЕМА (сильная нормализация для $\mathcal{T}$). Для термов из $\Lambda\mathcal{T}$ любая $\beta\eta\mathcal{T}$ -редукция заканчивается.

Докладательство. Введем следующие классы термов:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{M \in \Lambda\mathcal{T}_0 \mid \beta\eta\mathcal{T}\text{-SN}(M)\}, \\ C_{\sigma \rightarrow \tau} &= \{M \in \Lambda\mathcal{T}_{\sigma \rightarrow \tau} \mid (\forall N \in C_\sigma) (MN \in C_\tau)\}, \\ C &= \bigcup \{C_\sigma \mid \sigma \in \text{Typ}\}, \\ C_\sigma^* &= \{M \in \Lambda\mathcal{T}_\sigma \mid \text{любой частный случай терма } M, \text{ полученный подстановкой элементов класса } C \text{ вместо свободных переменных, принадлежит } C\}. \end{aligned}$$

Тогда мы показываем одновременной индукцией по σ , что

- (1) $M \in C_\sigma \Rightarrow \beta\eta\mathcal{T}\text{-SN}(M)$,
- (2) $\lambda x_1^{\sigma_1} \dots \lambda x_n^{\sigma_n}. 0 \in C_\sigma$, если $\sigma = \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n \rightarrow 0$.

Наконец, мы показываем индукцией по M , что

- (3) $M \in \Lambda\mathcal{T}_\sigma \Rightarrow M \in C_\sigma^*$.

В силу (1) и (3) любой терм из $\mathcal{T}$ сильно нормализуем. $\square$

Термы $0, 1 \equiv S+0, 2 \equiv S+1, \dots$ служат цифрами в $\mathcal{T}$. Константы R_σ введены, чтобы определить примитивную рекурсию. Очевидно, что все примитивно рекурсивные функции $\mathcal{T}$ -определимы на цифрах $0, 1, \dots$. Но так как σ в R_σ может быть произвольным, $\mathcal{T}$ -определимыми оказываются далеко не только примитивно рекурсивные функции.

А.2.4. ПРИМЕР. У Петер [1967] приводится следующий пример функции, не являющийся примитивно рекурсивной (упрощение функции Аккермана):

$$\begin{aligned} \psi(0, n) &= n + 1, \\ \psi(m + 1, 0) &= \psi(m, 1), \\ \psi(m + 1, n + 1) &= \psi(m, \psi(m + 1, n)). \end{aligned}$$

Легко представить функцию ψ в системе $\mathcal{T}$. Положим

$$\psi_m(n) = \psi(m, n).$$

Если ψ_m представлена термом Fm , то ψ_{m+1} представляется термом $R(Fm1)$ ($lab.Fm(a)$), который мы представим в виде $G(Fm)$. Поэтому терм $F \equiv RS^+(\lambda ab.G(a))$ представляет функцию ψ .

Следующий результат дает точную характеристику $\mathcal{T}$ -определимых функций. α -рекурсивные функции на $\mathbb{N}$ для ординала $\alpha \leq \varepsilon_0$ — это функции, определимые с помощью трансфинитной рекурсии до α . Множество $<\alpha$ -рекурсивных функций состоит из всех β -рекурсивных функций для некоторого $\beta < \alpha$.

А.2.5. ТЕОРЕМА. $\mathcal{T}$ -определимые числовые функции — это в точности $<\varepsilon_0$ -рекурсивные функции.

Доказательство. См. Крайзель [1959], Швихтенберг [1975], а также Терлув [1983]. $\square$

Замечательный факт об определимости в $\mathcal{T}$ приведен в упр. 2 после приложений. Теперь мы обратимся к моделям системы $\mathcal{T}$.

А.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Модель системы $\mathcal{T}$ — это комбинаторная типовая структура $\mathfrak{M}$, такая, что имеются $0, s^+, r_\sigma \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющие аксиомам для R_σ .

(ii) Экстенциональная модель системы $\mathcal{T}$ — это модель, являющаяся еще и экстенциональной типовой структурой.

(iii) ω -модель системы $\mathcal{T}$ — это модель $\mathfrak{M}$ системы $\mathcal{T}$, такая, что $\mathfrak{M}_0 = \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Заметим, что так как в $\mathcal{T}$ имеются замкнутые термы любого типа, становится осмысленным определение внутренности $\mathfrak{M}^0$ модели $\mathfrak{M}$.

А.2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $\mathfrak{M}(\mathcal{T}\eta)$ — экстенциональная модель системы $\mathcal{T}$.

(ii) HRO, $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}\eta)$, $\mathfrak{M}^0(\mathbb{N})$ — не экстенциональные ω -модели системы $\mathcal{T}$.

(iii) NEO и $\mathfrak{M}(\mathbb{N})$ — экстенциональные ω -модели системы $\mathcal{T}$.

Доказательство. (i) устанавливается легко, см. следствие 5.3.25.

(ii) Очевидно, что эти структуры — ω -модели. HRO не экстенциональна, так как имеются различные рекурсивные индексы одной и той же функции, например $\lambda x.0$. Модель $\mathfrak{M}^0(\mathcal{T}\eta)$ не экстенциональна — достаточно рассмотреть $\lambda x.0$ и $\lambda x.x \div x$. Неэкстенциональность модели $\mathfrak{M}^0(\mathbb{N})$ доказана в заключительных упражнениях.

(iii) очевидно. $\square$

В противоположность следствию А.1.20 имеет место такой результат.

А.2.8. ТЕОРЕМА. Отношение $\mathfrak{M}(\mathbb{N}) \models M = N$ для $M, N \in \Lambda\mathcal{T}$ является Π_1^1 -полным.

Доказательство. См. Фридман [1975]. $\square$

Наконец, мы кратко рассмотрим некоторые расширения системы $\mathcal{T}$.

Бар-рекурсия

Спектор [1962] распространил гёделевское доказательство непротиворечивости на анализ. Для этого потребовались «бар-рекурсивные» функционалы. Эти функционалы можно описать

с помощью системы $\mathcal{TB}$, которая получается добавлением к теории $\mathcal{T}$ так называемого бар-рекурсора.

$\mathbb{M}(\mathbb{N})$ не является моделью системы $\mathcal{TB}$, так как бар-рекурсор предполагает непрерывность рассматриваемых функционалов (в специальном смысле). Семейства НРО, НЕО также не являются моделями системы $\mathcal{TB}$, как показал Крайзель [1959].

Тейт [1971] показал, что теорема о сильной нормализации верна и для $\mathcal{TB}$. Поэтому $\mathbb{M}^0(\mathcal{TB})$ есть ω -модель системы $\mathcal{TB}$. Другую модель для $\mathcal{TB}$ образуют счетные функционалы Клини и Крайзеля. Эту модель можно описать как $\mathbb{M}_C(\mathbb{N})$, где C — декартово замкнутая категория предельных пространств, см. Хайланд [1975].

Информация о бар-рекурсии имеется также у Говарда [1968], Скарпеллини [1971], Лукхардта [1973], Ершова [1973/75], Диллера и Фогеля [1975] и Фогеля [1976].

Бесконечные термы

Система $\mathcal{T}^\infty$ получается с помощью следующего добавочного правила образования термов. Если $t_0, t_1, \dots$ — термы типа σ , то $\langle t_0, t_1, \dots \rangle$ — терм типа $0 \rightarrow \sigma$. Для этих новых термов постулированы следующие аксиомы:

$$\langle \vec{t} \rangle n = t_n, \quad \langle \vec{t} \rangle MN = \langle \vec{t} N \rangle M.$$

С помощью ординалов до ε_0 Тейт [1965] показывает, что термы из $\mathcal{T}$ нормализуемы, и связывает это с доказательством непротиворечивости арифметики, использующим ω -правило и устранение сечения.

Интуиционистская арифметика всех конечных типов

HA^ω — это теория, получаемая добавлением логики и аксиом Пеано к системе $\mathcal{T}$. Эта теория называется *интуиционистской арифметикой (всех) конечных типов*. Она изучается в книге Трулстра [1973].

LCF

Теория «Логика для вычислимых функций» (Logic for Computable Functions) была задумана Скоттом. Милнер с сотрудниками расширил ее в несколько этапов до машинной системы LCF, которая способна полуавтоматически доказывать свойства программ (такие, как корректность).

Часть LCF — это теория $\text{PP}\lambda$, которая получается, когда $\mathcal{T}$ расширяется следующим образом.

(1) Добавляются новые типы (разрешается образование прямого произведения $\sigma \times \tau$ и дизъюнктивной суммы $\sigma \oplus \tau$).

(2) Для каждого типа σ имеется комбинатор неподвижной точки $Y_\sigma \in (\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma$, такой, что $Y_\sigma M = M(Y_\sigma M)$. Этот пункт порождает термы без н. ф.

(3) Эта теория вкладывается в логику предикатов. Легко построить модель теории $\text{PP}\lambda$. Достаточно начать с произвольного п. ч. у. м. X и образовать $X_0 = X$, $X_{\sigma \rightarrow \tau} = X_\sigma \rightarrow X_\tau$.

Система LCF сконструирована для диалогового доказательства теорем о программах. Программы и их свойства записываются в $\text{PP}\lambda$. Диалог состоит из стратегий доказательства, которые задает человек, и вычислений (например, свертываний λ -термов), которые делает машина. Особая часть системы LCF состоит из метаязыка ML, на котором можно записывать стратегии доказательства. См. Гордон и др. [1979], где имеется введение в предмет и обширная литература.

А.3. Формулы-типы

В книге Карри и др. [1958] было отмечено, что типы комбинаторов $K_{\sigma\tau}$ и $S_{\sigma\tau\rho}$ (см. замечание А.1.5(i)) — это истинные формулы логики высказываний, если $\rightarrow$ интерпретируется как импликация. Тейт [1965] указал на тесную связь между β -редукцией типовых термов и устранением сечения в выводах. Эти наблюдения вдохновили в 1969 г. Говарда [1980] на построение соответствия между типовыми термами и выводами с помощью так называемых *формул-типов*: последняя формула вывода Π рассматривается как тип этого вывода. Аппликация соответствует правилу модус поненс, а λ -абстракция — освобождению от допущений (в натуральном выводе).

Де Брёйн [1970] независимо ввел язык Automath для машинной проверки математических доказательств. Automath — это типовое λ -исчисление, где типы снова являются (типовыми) λ -термами. Понятие формулы-типа играет существенную роль при переводе реальных доказательств в этот язык. Дополнительная информация имеется в статьях де Брёйна [1980] (обзор), Цукера [1977] и ван Бентхема Юттинга [1979] (перевод настоящей математики), ван Далена [1980] (теоретические аспекты языка Automath и родственных языков). Селдин [1979] вводит систему, называемую обобщенной функциональностью. Она по существу совпадает с одним из языков семейства Automath.

Еще один независимый подход к формулам-типам дает работа Жирара [1971]. Он рассматривает типовое λ -исчисление с операциями на типах, включая λ -абстракцию. (В противоположность этому языку Automath допускают только свободные переменные в термах, играющих роль типов.) Это соответствует кванторам по предикатам в логике второго порядка. Дав изобретательное доказательство сильной нормализации для рас-

смаатриваемых термов, Жирар получил доказательство теоремы об устранимости сечения для анализа и теории типов.

Идея формул-типов породила несколько исследований, связывающих λ -исчисление, теорию доказательств и теорию категорий — см. Ламбек [1980], Манн [1975] и Сабо [1978] (изложение на русском языке — Минц [1979].—*Ред.*). См. также Поттингер [1977]. Еще одно направление — связь между подсистемами логики и ограниченными вариантами типового λ -исчисления (например релевантной логикой и типовым M -исчислением) — см. Хеллман [1977].

Приложение В

Иллативная комбинаторная логика

Как было упомянуто в гл. 1, одной из целей, которую ставили основатели λ -исчисления и комбинаторной логики, было подведение оснований под математику. Мы собираемся показать с некоторыми подробностями, что если не проявить должного внимания, то применение этого аппарата может привести к противоречиям. Вывод так называемого парадокса Карри интересен сам по себе, так как он тесно связан с теоремой Лёба [1955] (таким же образом, каким парадокс лжеца связан с теоремой Гёделя о неполноте), см. ван Бентхем [1978].

В.1. Определение. (i) *Иллативная комбинаторная логика* (обозначаемая через **ICL**) — это теория, алфавит которой получается добавлением *логических констант* к алфавиту системы **CL**.

(ii) Термы системы **ICL** определяются индуктивно.

(1) Любая переменная или константа есть терм.

(2) Если M, N — термы, то (MN) — терм.

(iii) Формулы системы **ICL** определяются следующим образом:

(1) Если M, N — термы системы **ICL**, то $M = N$ — формула.

(2) Если M — терм системы **ICL**, то M — формула.

В.2. Замечания. (i) В школе Карри формула M записывается в виде $\vdash M$. Так как это не имеет в виду доказуемости M , мы предпочитаем наши обозначения. Подразумеваемая интерпретация M — это « M истинно».

(ii) Иллативная теория может быть основана и на λ -исчислении.

В.3. Определение. (i) **ICL₀** — это иллативная комбинаторная логика, основанная на следующем множестве логических констант:

$$\{K, S, F, Q, E, \Xi, \Pi, P\}.$$

(ii) Следующие сокращения дают некоторое понятие о подразумеваемой интерпретации этих констант:

$$\begin{aligned} M \in N & \text{— это } NM, & M \rightarrow N & \text{— это } PMN, \\ M \subseteq N & \text{— это } \Xi MN, & N^M & \text{— это } FMN, \\ \forall x M & \text{— это } \Pi(\lambda^*x.M). \end{aligned}$$

(iii) Теория ICL_0 аксиоматизируется следующими правилами вывода и аксиомами:

(1) Аксиомы и правила вывода для равенства, включая

$$\frac{M \quad M = N}{N}$$

(2) Комбинаторные аксиомы

$$KMN = M, \quad SMNL = ML(NL).$$

(3) Следующие правила введения и удаления для каждой логической константы ($\neq E$) в стиле натурального вывода (см. Генцен [1969]). В правилах введения для F , Ξ и P происходит освобождение от некоторых допущений.

	Удаление	Введение
Q	$\frac{QMN}{M = N}$	$\frac{M = N}{QMN}$
P	$\frac{M \rightarrow N, M}{N}$	$\frac{[M]}{\vdots}$ $\frac{\vdots}{N}$ $\frac{N}{M \rightarrow N}$
Ξ	$\frac{M \subseteq N \quad Z \in M}{Z \in N}$	$\frac{[x \in M]}{\vdots}$ $\frac{\vdots}{x \in N}$ $\frac{x \in N}{M \subseteq N}, \quad x \text{ — новая переменная}$
Π	$\frac{M \in \Pi}{N \in M}$	$\frac{x \in M}{M \in \Pi}, \quad x \text{ — новая переменная}$
F	$\frac{Z \in N^M \quad U \in M}{ZU \in N}$	$\frac{[x \in M]}{\vdots}$ $\frac{\vdots}{Zx \in N}$ $\frac{Zx \in N}{Z \in N^M}, \quad x \text{ — новая переменная}$
E		$M \in E$

В.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Константы E, F, P и Π можно определить через остальные (K, S, Q, Ξ) таким образом, что соответствующие правила станут выводимы.

Доказательство. Положим $E \equiv \lambda^*x.Qxx$, $F \equiv \lambda^*xyz.\Xi x(y \circ z)$, $P \equiv \lambda^*xy.\Xi(Kx)(Ky)$ и $\Pi \equiv \Xi E$. Тогда легко получаются правила для введенных таким образом констант. Рассмотрим, например, F

Удаление

$$\frac{\begin{array}{c} Z \in N^M \\ Z \in FMN \\ \Xi M(N \circ Z) \\ M \subseteq N \circ Z \end{array}}{\frac{U \in N \circ Z}{N(ZU)}} \quad U \in M$$

$$\frac{N(ZU)}{ZU \in N}$$

Введение $[x \in M] \quad (1)$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ Zx \in N \\ x \in N \circ Z \end{array}}{\frac{M \subseteq (N \circ Z)}{Z \in N^M}} \quad (1) \quad \square$$

Замечание. Можно также определить Ξ через F . Если, например, положить $\Xi \equiv \lambda^*xy.FxyI$ или $\Xi \equiv \lambda^*xy.FxIy$, то правила для Ξ будут выполнены.

Система вроде ICL называется противоречивой, если в ней выводима любая формула M . Следующее утверждение известно под названием парадокса Карри.

В.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Система ICL_0 противоречива. В действительности для вывода противоречия нужно только правило P .

Доказательство. Пусть M — произвольный терм. По теореме о неподвижной точке построим терм X , такой, что

$$X = X \rightarrow M.$$

Тогда приводимая ниже фигура — вывод формулы M .

$$\begin{array}{c}
 \frac{(1) \quad [X] \quad \frac{[X]}{X \rightarrow M} \quad (1)}{M} \quad (1) \\
 \frac{X \quad X \rightarrow M}{M}
 \end{array}$$

[Взяв $M \equiv QPQ$, мы можем вывести и равенство $P = Q$.] $\square$

Карри и его школа предложили для борьбы с этим парадоксом ввести константу H , такую что подразумеваемая интерпретация формулы $X \in H$ — это « X есть предложение», и подходящим образом ограничить правила для логических констант классом H . Тогда приведенное выше противоречие исчезает, так как для $X = X \rightarrow M$ мы не можем показать, что X есть предложение. К сожалению, ряд получающихся в результате систем все еще не свободен от противоречия — см., например, Бандер [1974]. С другой стороны, те из построенных на этом пути систем (например, у Карри и др. [1972]), которые доказуемо непротиворечивы, оказываются слишком слабыми, чтобы служить основанием логики.

Акцель [1980] также предлагает избегать парадоксов путем введения класса предложений. Так как его подход семантический (он основан на произвольных λ -моделях), его теория непротиворечива.

Другой подход применяется в работах Фефермана [1975], [1980], где аппликация — частично определенный оператор. Тогда парадоксы устраняются за счет того, что парадоксальный объект не обязан быть определенным.

Приложение С

Переменные

В этом приложении рассматриваются свободные и связанные переменные и излагается теоретическая основа рассмотрения термов с точностью до α -конгруэнтности. Это делается двумя методами — методом Карри и методом де Брёйна. Последний имеет дополнительное преимущество — он полезен для реализации λ -конверсии на ЭВМ.

В античной математике (формальные) переменные практически не использовались. Под влиянием Виета в конце XVI столетия переменные стали стандартным инструментом математики. Было, однако, много недоразумений по поводу природы переменных. Например, целочисленная переменная была «изменяющейся величиной», которая иногда четна, иногда нечетна и может быть «зафиксирована» на время доказательства. Такие сущности, однако, не существуют.

Фреге и Пирс прояснили истинную природу переменных: это — синтаксические объекты, и следует различать *свободные* и *связанные* переменные.

Свободная переменная — это синтаксический объект, встречающийся обычно в некотором контексте, вместо которого подставлять можно другие синтаксические объекты. Когда терм, содержащий свободные переменные, интерпретируется в некоторой структуре $\mathcal{M}$, нужно выбрать элементы области $\mathcal{M}$, чтобы интерпретировать эти переменные.

С другой стороны, связанные переменные не допускают ни подстановки, ни выбора интерпретации. В следующих примерах переменная x связанная:

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx; \quad \sum_{x=0}^{100} x^2 + 1; \quad \exists x (x^2 + 1 = 0); \quad \lambda x. x^2 + 1.$$

Если терм t подставляется (без предосторожностей) вместо свободных вхождений переменной y в выражение $A \equiv A(y)$, то некоторые переменные в t могут стать связанными. Пусть $A(y)$ — истинная формула

$$\int_0^1 (x^2 + y) \, dx = y + \frac{1}{3}.$$

и пусть $t \equiv x$; тогда $A(x)$ — ложная формула

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = x + \frac{1}{3}.$$

Это явление называется *коллизией переменных*.

Говорят, что *подстановка* терма t вместо y в A *корректна* (и пишут $t-y-A$), если никакая свободная переменная терма t не становится связанной после подстановки t вместо (свободных вхождений) переменной y в A . Очевидно, что не имеет места

$$x - y - \int_0^1 (x^2 + y) dx = y + \frac{1}{3}.$$

Именно эта подстановка вызвала только что упомянутую коллизию переменных. Переименовывая связанные переменные в A , мы всегда можем избежать коллизии переменных. Например,

$$x - y - \int_0^1 (u^2 + y) du = y + \frac{1}{3}.$$

В λ -исчислении подстановка является фундаментальной операцией. Чтобы обеспечить корректность подстановки, термы рассматриваются с точностью до переименования связанных переменных, т. е. с точностью до $\equiv_\alpha$ (см. определение 2.1.11). Поэтому сами λ -термы оказываются представителями объектов, которые нас интересуют. Таким образом, возникает необходимость проверки того, что операции на термах задают корректно определенные операции на классах $\equiv_\alpha$ -эквивалентности. Для аппликации и λ -абстракции это очевидно. Для подстановки нужно показать, что

$$M \equiv_\alpha M', \quad N \equiv_\alpha N' \Rightarrow M[x := N] \equiv_\alpha M'[x := N'].$$

Но в определении подстановки 2.1.15 уже было использовано соглашение о переменных. Здесь образуется порочный круг, и, следовательно, мы должны бросить свежий взгляд на λ -термы и определение подстановки. Будут описаны два различных подхода. Первый заимствован из книги Карри и др. [1958], второй — из работы де Брёйна [1972].

Карри определял подстановку следующим образом.

С.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда результат подстановки $M[x := N]$ вводится следующим индуктивным определением:

M	$M[x := N]$
x	N
$y \neq x$	y
$M_1 M_2$	$M_1[x := N] M_2[x := N]$
$\lambda x. M_1$	$\lambda x. M_1$
$\lambda y. M_1, y \neq x$	$\lambda z. M_1[y := z][x := N]$,

где $z \equiv y$, если $x \notin FV(M_1)$ или $y \notin FV(N)$; в противном случае z — первая переменная из последовательности $v_0, v_1, v_2, \dots$, не входящая ни в M_1 , ни в N .

Легко видеть, что это — корректное определение индукцией по $\|M\|$ (отметим, что $\|M_1[y := z]\| = \|M_1\|$). С помощью этого понятия подстановки определяется отношение эквивалентности $\equiv_\alpha$.

С.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для определенных выше понятий подстановки и α -конгруэнтности

$$M \equiv_\alpha M' \text{ и } N \equiv_\alpha N' \Rightarrow M[x := N] \equiv_\alpha M'[x := N'].$$

Доказательство. См. Карри и др. [1958], с. 94—104. $\square$

Если соблюдать соглашение о переменных, то определение 2.1.15 дает ту же самую подстановку, что и определение Карри С.1. Таким образом, в этом случае мы можем работать с обычными λ -термами как с представителями $\equiv_\alpha$ -классов и обращаться с ними без особых предосторожностей.

В работе де Брёйна [1972] принят другой подход. Он был введен для автоматической обработки термов, нужной при реализации языка Automath (см. § A.3). Отношение $\equiv_\alpha$ относительно сложно для ЭВМ. Поэтому для λ -термов введена иная система записи, которая приводит к так называемым *безымянным термам*. Безымянный λ -терм — это синтаксический объект, в котором связанные переменные не имеют имен. Эти объекты вводятся таким образом, что целый класс α -конгруэнтности обычных λ -термов соответствует в точности одному безымянному терму. Точное определение таково.

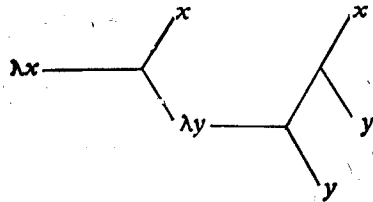
С.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Множество безымянных термов, обозначаемое через Λ^* , имеет следующий алфавит:

$$\lambda, (,), 1, 2, 3, \dots,$$

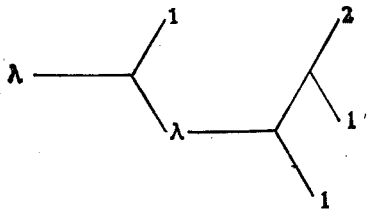
(ii) Λ^* индуктивно определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} n &\in \Lambda^* \text{ для } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \\ A, B &\in \Lambda^* \Rightarrow (AB) \in \Lambda^*, \\ A &\in \Lambda^* \Rightarrow \lambda A \in \Lambda^*. \end{aligned}$$

Интуитивный смысл безымянных термов ясен из следующих примеров. Рассмотрим терм $M \equiv \lambda x.x(\lambda y.xuy)$. В древовидной форме этот терм можно записать следующим образом:

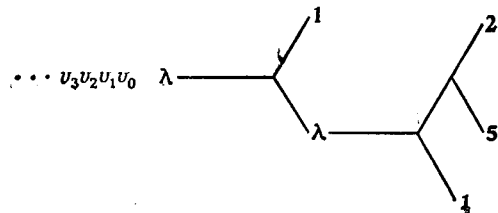


M соответствует безымянному терму M^* с деревом



т. е. терму $M^* \equiv \lambda 1(\lambda 211)$, если использовать те же соглашения об опускании скобок, что и для λ -термов. Вхождение числа n в M^* соответствует тому обстоятельству, что переменная, находящаяся на том же месте в M , связана λ -символом, находящимся на расстоянии n (по некоторому пути в дереве) от этого места.

Если число n , встречающееся в безымянном терме, больше, чем число λ -символов (которое мы обозначим через k), находящихся ближе него к корню дерева, то n символизирует свободную переменную v_{n-k-1} . Рассмотрим, например, $N \equiv \lambda x.x(\lambda y.xv_2y)$. В безымянной записи он переходит в $N^* \equiv \lambda 1(\lambda 251)$. Смысл этого безымянного терма можно легко определить, если записать его в виде



и считать также свободные переменные, расположенные у корня этого дерева. Таким образом, мы видим, что $\lambda x.xv_3(\lambda y.xuy)$ соответствует $\lambda 15(\lambda 215)$. Заметим, что и $\lambda x.xv_2$, и $\lambda y.yv_2$ соответствуют $\lambda 14$: в Λ^* не обязательно давать имена связанным переменным.

С.4. Предложение. *Имеется каноническое отображение $\ast: \Lambda \rightarrow \Lambda^*$, такое, что*

$$\ast(M) \equiv \ast(N) \Leftrightarrow M \equiv_{\alpha} N.$$

Доказательство неявно содержится у де Брёйна [1972]. См. также приведенные выше примеры. $\square$

Таким образом, множество Λ^* изоморфно $\Lambda/\equiv_{\alpha}$, и безымянные термы рассматриваются как «настоящие» термы. Различие с методом Карри состоит в том, что элементы множества Λ^* имеют конкретные обозначения и что подстановку на Λ^* можно определить непосредственно (а не через подстановку на множестве Λ).

С.5. Предложение. *Имеется операция подстановки $A[x := B]$, определенная для $A, B \in \Lambda^*$ и такая, что для $M, N \in \Lambda$*

$$\ast(M[x := N]) \equiv \ast(M)[x := \ast(N)],$$

где первое вхождение $[x :=]$ обозначает наивную подстановку согласно определению 2.1.15 для термов M, N , удовлетворяющих соглашению о переменных.

Доказательство неявно содержится в работе де Брёйна [1972]. $\square$

С.6. Комментарий. При выполнении подстановки в Λ^* нужно производить некоторые сдвиги. Например, $\lambda 12[v_0 := \lambda 13] \equiv \lambda 1(\lambda 14)$, т. е. $\lambda 13$ переходит после подстановки в $\lambda 14$. Это преобразование соответствует подстановке $\lambda x.xv_0[v_0 := \lambda y.yv_2] \equiv \lambda x.x(\lambda y.yv_2)$.

Мораль всего этого такова. Безымянные термы хороши для машинных преобразований и метаматематических рассуждений; для пользователя-человека они не очень удобны. Поэтому лучше работать с обычными λ -термами, рассматривая их неявно как представителей соответствующих термов из Λ^* . Если мы соблюдаем соглашения о переменных, подстановку можно производить наивным образом на уровне представителей. То же верно для аппликации и абстракции.

Заключительные упражнения

1 (Крайзель). Цель этого упражнения — показать, что $\mathfrak{M}^0(N)$ — структура $\mathcal{T}$ -определимых элементов в $\mathfrak{M}(N)$ — не является экстенсией.

(i) Пусть $1 = 0 \rightarrow 0$, $2 = 1 \rightarrow 0$ и $3 = 2 \rightarrow 0$ — типы. Определим $d_n, d_\infty \in \mathfrak{M}^0(N)_1$ и $f \in \mathfrak{M}^0(N)_{2 \rightarrow 1}$ следующим образом:

$$d_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < n, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$d_\infty(x) = 0,$$

$$f_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \neg (\exists y \leq x+1) (F(d_\infty) = F(d_y)), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Показать, что если $F \in \mathfrak{M}(N)_2$ непрерывен в бэровской топологии, то

$$F(d_0) \neq F(d_\infty) \Rightarrow F(f_F) \neq F(d_\infty),$$

а для разрывных F это в общем случае ложно. [Указание. Заметить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d_\infty$, и рассмотреть $\mu m[F(d_m) = F(d_\infty)]$.]

(ii) Построить элемент $\Phi \in \mathfrak{M}^0(N)_3$, который не постоянен, но таков, что для непрерывных $F \in \mathfrak{M}(N)_2$ верно $\Phi F = 0$.

(iii) Показать, что если $F \in \mathfrak{M}^0(N)_2$, то F непрерывен.

(iv) Получить из предыдущего, что структура $\mathfrak{M}^0(N)$ не экстенсимальна.

2 (Бергстра). Пусть F пробегает $\mathfrak{M}(N)_2$, и пусть d_n имеет тот же смысл, что и в упр. 1. Показать, что предикат

$$(\exists n \in N) (Fd_n = 0)$$

примитивно рекурсивен (т. е. определим в $\mathcal{T}$). [Указание (Терлув). Построить примитивно рекурсивные Φ, Ψ , такие, что

$$\Phi F n = \text{если } (\exists k \leq n) (Fd_k = 0), \text{ то } 1, \text{ иначе } 0,$$

$$\Psi F n = \text{если } (\exists k \leq n+1) (Fd_k = 0), \text{ то } 1, \text{ иначе } 0.$$

Рассмотрев $n_0 = \mu n[Fd_n = 0]$, показать, что

$$\exists n (Fd_n = 0) \Leftrightarrow [F(\Phi F) \neq F(\Psi F) \vee Fd_0 = 0].$$

3. Попытаться решить открытые вопросы λ -исчисления; см. Проблемы [1975], [1980].

Добавления

1. Интересная информация о различиях между частичными и тотальными комбинаторными алгебрами была получена Клопом [1982].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Частичная комбинаторная алгебра — это структура $\mathfrak{A} = \langle X, \cdot, k, s \rangle$, где $\cdot : X^2 \rightarrow X$ — частичное отображение, удовлетворяющее для всех x, y следующим условиям:

$$kxy \simeq x, \quad sxyz \simeq xz(yz), \quad kx \downarrow, \quad sx \downarrow, \quad sxy \downarrow.$$

[Здесь $t \downarrow$ означает, что t определен; $t \simeq s$ означает $(t \downarrow \Leftrightarrow s \downarrow \text{ и } t \downarrow \Rightarrow t = s)$.]

Алгебра $\mathfrak{A}$ тотальна, если xy всегда определено.

(ii) $\mathfrak{A}$ пополнима, если имеется тотальная комбинаторная алгебра $\mathfrak{A}'$, такая что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$.

(iii) $\mathfrak{A}$ имеет однозначные головные нормальные формы, если для любых x, y элементы k, s, kx, sx, sxy попарно различны и

$$sxy = sx'y' \Rightarrow x = x' \text{ и } y = y'.$$

ТЕОРЕМА. (i) Не любая частичная комбинаторная алгебра пополнима.

(ii) Если $\mathfrak{A}$ имеет однозначные головные нормальные формы, то $\mathfrak{A}$ пополнима.

(iii) Если $\mathfrak{A} \models s(kk)k = s(ks)(s(kk)k)$, в частности, если $\mathfrak{A}$ — частичная λ -алгебра, то $\mathfrak{A}$ уже тотальна.

Частичное доказательство. (i) Пусть $1 = s(sk)$. Клоп показал, что теория частичных комбинаторных алгебр совместима с соотношениями

$$(*) \quad AC \neq BC \text{ и } 1A = 1B,$$

где A, B, C — некоторые константы. Заметим, что $1Ax = Ax$ выполнено, только если $x(Ax) \downarrow$. Частичная комбинаторная алгебра $\mathfrak{A}$ с элементами a, b, c , удовлетворяющими соотношению (*), неполнима, так как $1A = 1B \Rightarrow AC = BC$, если операция $\cdot$ тотальна.

(iii) Заметим, что всегда верно $s(kk)kxyz = x$, но $s(ks)(s(kk)k)xyz \simeq kx(yz)$. Следовательно, $yz \downarrow$ для любых y, z . Поэтому $\mathfrak{A}$ тотальна. $\square$

2. Койманс следующим образом улучшил понятие богатой модели. Пусть $\varphi: \mathfrak{M}^2 \rightarrow \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра. φ представимо по каждой из своих переменных в отдельности, если $\mathfrak{A}b.\varphi(a, b)$ и $\mathfrak{A}a.\varphi(a, b_0)$ представимы для любых $a_0, b_0 \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}$ называется процветающей, если из представимости по переменным в отдельности следует (обычная) представимость. Тогда имеем

$\mathfrak{M}$ богата $\iff \mathfrak{M}$ процветающая и экстенциональная.

Методами § 20.4 можно показать, что

$\mathfrak{M}^0(\mathcal{B})$ непрощающая,

$\mathfrak{M}(\lambda)$ процветающая.

3. Вместо того, чтобы определять $S(\mathfrak{M})$ для $\mathfrak{M} \models \eta$ (т.е. $\mathfrak{M} \models \forall x(x = \lambda y.xy)$), мы можем следующим образом определить эти группы для произвольных $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть λ -алгебра. Положим

$$\mathfrak{M}^n = \{a \in \mathfrak{M} \mid 1a = a\},$$

$$S(\mathfrak{M}) = \langle \mathfrak{M}^n, 0, 1 \rangle; \quad G(\mathfrak{M}) = \{a \in S(\mathfrak{M}) \mid a \text{ обратим}\}.$$

Это — моноид (полугруппа с двусторонней единицей). Тогда становится осмысленным определение $S(\mathcal{T})$ и $G(\mathcal{T})$ также и для неэкстенциональных $\mathcal{T}$. При таком определении

$$G(\lambda) = G(\mathcal{H}) = G(\mathcal{B}) = \{e\},$$

т.е. тривиальная группа, как отмечено в начале § 21.3.

4. В этом издании добавлены новые ссылки на литературу. Они попадают на границу (иногда весьма широкую) между λ -исчислением и следующими дисциплинами.

- (i) Информатика:
недетерминизм
функциональное
программирование
системы продукций

Ашкрофт и др. [1980];
Берклинг и др. [1982];
Тернер [1979];
Бергстра и др. [1982];
Дершовиц [1982];
Юэ [1977];
Юэ и др. [1980].

- (ii) Типы:
семантика типов

Барендрегт и др. [1983];
Коппо и др. [1983];
Коппо [1983];
Донахью [1979];
Хиндли [1982], [1983];

типовое λ -исчисление
второго порядка
типовое λ -исчисление

- (iii) Логика и математика

Форчун и др. [1980];
Швихтенберг [1982];
Стетмен [1980], [1982].
Бизон [1984];
Бандер [1980], [1981];
Шовен [1979];
Фитч [1980];
Феферман [1982];
Кузичев [1980], [1983];
Мартин-Лёф [1982];
Резус [1982a].

- (iv) Нумерованные множества и
теория рекурсии

Барендрегт и др. [1983];
Джаннини и др. [1983].

Дальнейшие ссылки на литературу можно найти в библиографии Резуса [1982].

- Акцель (Aczel P.)
[1980] Frege structures and the notions of proposition, truth and set. В кн.: Барвайз и др. [1980], с. 31—60.
- Арбиб, Мейнс (Arbib M. A., Manes E. G.)
[1975] Arrows, Structures and Functors. Academic Press, New York.
- Аусьелло, Бём (Ausiello G., Böhm C. (eds.))
[1978] Automata, Languages and Programming. Fifth Colloquium, Udine, Italy, July 1978, Lecture Notes in Computer Science 62, Springer-Verlag, Berlin.
- Ашкрофт, Хеннеси (Ashcroft E. A., Hennessy M. C.B.)
[1980] A mathematical semantics for a non deterministic typed lambda calculus. Theor. Comput. Sci. 11, pp. 227—245.
- Бандер (Bunder M. W.)
[1974] Some inconsistencies in illative combinatory logic. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 20, pp. 71—73.
[1980] The naturalness of illative combinatory logic as a basis for mathematics. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 55—64.
[1981] Predicate calculus and naive set theory based on pure combinatory logic. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 21, pp. 169—177.
- Барвайз (ред.) (Barwise J. (ed.))
[1977] Handbook of Mathematical Logic, Studies in Logic 90, North Holland Amsterdam. [Имеется перевод: Справочная книга по математической логике в 4-х т. — М.: Наука, 1982—1983.]
[1977a] An introduction to first order logic. В кн.: Барвайз [1977], с. 5—46.
- Барвайз и др. (ред.) (Barwise J. et al.-Barwise J., Keisler H. J., Kunen K. (eds.))
[1980] The Kleene Symposium. Studies in Logic 101. North-Holland, Amsterdam.
- Барендрегт (Barendregt H. P.)
[1971] Some Extensional Term Models for Combinatory Logics and λ -calculi. Dissertation. University of Utrecht.
[1973] Combinatory logic and the axiom of choice. Indag. Math. 35, pp. 203—221.
[1973a] A characterization of terms of the λ -I-calculus having a normal form. J. Symbolic Logic, 38, 441—445.
[1974] Pairing without conventional restraints. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 20, pp. 289—306.
[1974a] Combinatory logic and the ω -rule. Fundamenta Math. 82, pp. 199—215.
[1975] Normed uniformly reflexive structures. В кн.: Бём [1975], с. 272—286.
[1976] A global representation of the recursive functions in the lambda calculus. Theor. Comput. Sci. 3, pp. 225—242.
[1977] The type free lambda calculus. В кн.: Барвайз [1977], с. 1092—1132.
- Барендрегт и др. (Barendregt H. P. et al. = Barendregt H. P., Bergstra J., Klop J. W., Volken H.)
[1976] Some notes on lambda reduction. In: Degrees, reductions and representability in the lambda calculus. Preprint no. 22, University of Utrecht, Department of Mathematics, pp. 13—53.
[1976a] Representability in lambda algebras. Indag. Math. 38, pp. 377—387.
[1978] Degrees of sensible lambda theories. J. Symbolic Logic 43, pp. 45—55.
- Барендрегт, Койманс (Barendregt H. P., Koymans K.)
[1980] Comparing some classes of lambda calculus models. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 287—302.
- Барендрегт, Коппо, Дедзани-Чанкальини (Barendregt H. P., Coppo M., Dezani-Ciancaglini M.)
[1983] A filter lambda model and the completeness of type assignment. J. Symbolic Logic, to appear.
- Барендрегт, Лонго (Barendregt H. P., Longo G.)
[1980] Equality of λ -terms in the model T^0 . В кн.: Хиндли, Селдин [1982], с. 287—302.
[1982] Recursion theoretic operators and morphisms of numbered sets. Fund. Math. CXIX, to appear.
- Батен, Бурбом (Baeten J., Boerboom B.)
[1979] Ω can be anything it should'nt be. Indag. Math. 41, pp. 111—120.
- Бел М. (Bel M.)
[1977] An intuitionistic combinatory theory not closed under the rule of choice. Indag. Math. 39, pp. 69—72.
- Беманн (Behmann H.)
[1922] Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. Math. Annalen 86, pp. 163—229.
- Бём (Böhm C.)
[1968] Alcune proprietà delle forme β - η normali nel λ -K-calcolo. Pubblicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo. n. 696, Roma (19).
- Бём (ред.) (Böhm S. (ed.))
[1975] λ -calculus and Computer Science Theory. Proceedings of the Symposium held in Rome. March 25—27, 1975, Lecture Notes in Computer Science 37, Springer-Verlag, Berlin.
- Бём, Дедзани-Чанкальини (Böhm C., Dezani-Ciancaglini M.)
[1972] Can syntax be ignored during translation? В кн.: Нива [1972], с. 197—207.
[1974] Combinatorial problems combinator equations and normal forms. В кн.: Локс [1974], с. 185—199.
[1975] λ -Terms as total or partial functions on normal forms. В кн.: Бём [1975], с. 96—121.
- ван Бентхем Ю. Ф. А. К. (van Benthem J. F. A. K.)
[1978] Four paradoxes. J. Philos. Logic 7, pp. 49—72.
- ван Бентхем Юттинг Л. С. (van Benthem Jutting L. S.)
[1979] Checking Landau's «Grundlagen» in the Automath System. Mathematical Centre Tracts, Mathematical Centre, Amsterdam.
- Бергстра, Клоп (Bergstra J., Klop J. W.)
[1979] Church—Rosser strategies in the lambda calculus. Theor. Comput. Sci. 9, pp. 27—38.
[1980] Invertible terms in the lambda calculus. Theor. Comput. Sci. 11, pp. 19—37.
[1982] Strong normalization and perpetual reductions in the lambda calculus. J. Information Processing and Cybernetics, 18, no. 7—8 pp. 403—417.

- [1982a] Conditional rewrite rules: confluency and termination. Preprint, Mathematical Center, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, The Netherlands.
- Бёрдж (Burge W.)
- [1978] Recursive Programming Techniques. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Берклинг, Фер (Berkling K. J., Fehr E.)
- [1982] A modification of the lambda calculus as a base for functional programming languages. В кн.: Нильсен, Шмидт [1982], с. 35—47.
- Берри (Berry G.)
- [1978] Séquentialité de l'évaluation formelle des λ -expressions. In: Proc. 3-e Colloque International sur la Programmation, Paris, mars 1978, Dunod, Paris.
- Бизон (Beeson M.)
- [198—] Foundations of constructive mathematics. Mathematical studies, Springer, Berlin, to appear.
- Боллобаш (Bollobás B.)
- [1979] Graph Theory, Springer-Verlag, Berlin.
- Боффа, ван Дален, Мак-Алун (ред.) (Boffa M., van Dalen D., McAloon K. (eds.))
- [1980] Logic Colloquium'78, Studies in Logic 97. North-Holland, Amsterdam.
- де Брёйн (de Bruijn N. G.)
- [1970] The mathematical language Automath, its usage and some of its extensions, in: Symposium on Automatic Demonstration, IRIA, Versailles Dec. 1968, Lecture Notes in Mathematics 125, Springer-Verlag, Berlin, pp. 25—61.
- [1972] Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation. Indag. Math. 34, pp. 381—392.
- [1980] A survey of the project Automath. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 579—607.
- Вагнер (Wagner E.)
- [1969] Uniform reflexive structures: on the nature of Gödelizations and relative computability. Trans. Amer. Math. Soc. 144, pp. 1—41.
- Вегнер (Wegner P.)
- [1972] The Vienna Definition Language, ACM Computing Surveys 4.
- Виссер (Visser A.)
- [1980] Numerations, λ -calculus and arithmetic. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 259—284.
- Ганди (Gandy R. O.)
- [1980] An early proof of normalisation by A. M. Turing. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 453—456.
- Ганди, Йетс (ред.) (Gandy R. O., Yates C. M. E. (eds.))
- [1971] Logic Colloquium'69. Studies in Logic 61, North-Holland, Amsterdam.
- Гейтинг (ред.) (Heyting A. (ed.))
- [1959] Constructivity in Mathematics. North-Holland, Amsterdam.
- Гентзен (Gentzen G.)
- [1969] The Collected Papers of Gerhard Gentzen, Edited by M. E. Szabo, North-Holland, Amsterdam, [Переводы большинства работ имеются в кн.: Идельсон, Минц [1967].]
- Гёдель (Gödel K.)
- [1958] Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica 12, pp. 280—287. [Имеется перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Идельсон, Минц [1967], с. 299—305.]

- Гийом (ред.) (Guillaume M. (ed.))
- [1977] Colloque International de Logique. Clermont-Ferrand, 18—25 Juillet 1975, CNRS, Paris.
- Гирц и др. (Gierz G. et al. = Gierz G., Lawson J. D., Hofmann K. H., Mislove M., Keimel K., Scott D. S.)
- [1980] A Compendium of Continuous Lattices. Springer-Verlag, Berlin.
- Говард (Hoyard W.)
- [1968] Functional interpretation of bar induction by bar recursion. Comp. Math. 20, pp. 107—124.
- [1980] The formulae-as-types notion of construction. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 479—490.
- Гордон (Gordon M. J. C.)
- [1973] Evaluation and Denotation of Pure LISP: a Worked Example in Semantics, Dissertation, University of Edinburgh.
- [1979] The Denotational Description of Programming Languages Springer-Verlag, Berlin.
- Гордон и др. (Gordon M. J. C. et al. = Gordon M. J. C., Milner R., Wadsworth C.)
- [1979] Edinburgh LCF. A Mechanical Logic of Computation. Lecture Notes in Computer Science 78. Springer-Verlag, Berlin.
- ван Дален (van Daalen D. T.)
- [1980] The Language Theory of Automath, Dissertation, Technological University Eindhoven.
- ван Дален и др. (van Dalen D. et al. = van Dalen D., Doets H. C., de Swart H. C. M.)
- [1978] Sets. Naive, Axiomatic and Applied. Pergamon Press, New York.
- Дедзани-Чанкальини (Dezani-Ciancaglini M.)
- [1976] Characterization of normal forms possessing inverse in the λ - β - η -calculus. Theor. Comput. Sci. 2, pp. 323—337.
- Дедзани-Чанкальини, Монтанари (ред.) (Dezani-Ciancaglini M., Montanari U. (eds.))
- [1982] International symposium on programming. Lecture Notes in Computer Science 137, Springer-Verlag, Berlin.
- Деккер (ред.) (Dekker J. C. E. (eds.))
- [1962] Recursive function theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 5, Amer. Math. Soc. Providence, RI.
- Дершовиц (Dershowitz N.)
- [1982] Orderings for term rewriting systems. Theor. Comput. Sci. 17, pp. 279—301.
- Джаннини, Лонго (Giannini P., Longo G.)
- [1983] Effectively given domains and lambda calculus semantics. Preprint, Dipt. Informatica, Corso Italia 40, 561100, Pisa, Italy.
- Диллер, Мюллер (ред.) (Diller J., Müller G. H. (eds.))
- [1975] ISILC. Proof Theory Symposium. Lecture Notes in Mathematics 500, Springer-Verlag, Berlin.
- Диллер, Фогель (Diller J., Vogel H.)
- [1975] Intensionale Funktionalinterpretation der Analysis. В кн.: Диллер, Мюллер [1975], с. 56—72.
- Донахью (Donahue J.)
- [1979] On the semantics of «data type». SIAM J. Comp. 8, 544—560.
- Драгалин А. Г.
- [1968] Вычислимость примитивно рекурсивных термов конечного типа и примитивно рекурсивная реализация. — Записки научн. сем. Лен. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 8, с. 32—45.
- Ершов Ю. Л.
- [1973/75/77] Theorie der Numerierungen. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 19 (1973), S. 289—388; 21 (1975); S. 473—584; 23 (1977), S. 289—371

- [1977] Теория нумераций. — М.: Наука.
- Жиар (Girard J.-Y.)
- [1971] Une extension de l'interprétation de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types. В кн.: Фенстад [1971], с. 63—92.
- Идельсон А. В., Минц Г. Е. (ред.)
- [1967] Математическая теория логического вывода. — М.: Наука.
- Кальмар (Kalmár L.)
- [1937] Zurückführung des Entscheidungsproblem auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. *Comp. Math.* 4, pp. 137—144.
- Кангер (ред.) (Kanger S. (ed.))
- [1975] Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium. *Studies in Logic* 82, North-Holland, Amsterdam.
- Карри (Curry H. B.)
- [1930] Grundlagen der Kombinatorischen Logik. *Amer. J. Math.* 52, pp. 509—536, 789—834.
- Карри и др. (Curry H. B. et al. = Curry H. B., Feys R., Craig W.)
- [1958] *Combinatory Logic*, Vol. I. North-Holland, Amsterdam.
- Карри и др. (Curry H. B. et al. = Curry H. B., Hindley J. R., Seldin J. P.)
- [1972] *Combinatory Logic*, Vol. II. *Studies in Logic* 65, North-Holland, Amsterdam.
- Келли (Kelley J. L.)
- [1955] *General Topology*. D. van Nostrand, Princeton. [Имеется перевод: Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1981.]
- Клини (Kleene S. C.)
- [1936] λ -definability and recursiveness. *Duke Math. J.* 2, pp. 340—353.
- [1952] *Introduction to Metamathematics*. P. Noordhoff N. V., Groningen [Имеется перевод: Клини С. К. Введение в метаматерику. — М.: ИЛ, 1957]
- [1961/1962] Lambda definable functionals of finite types. *Fundamenta Math.* 50, pp. 281—303.
- Клини, Россер (Kleene S. C., Rosser J. B.)
- [1935] The inconsistency of certain formal logics. *Annals of Math.* (2) 36, pp. 630—636.
- Клоп (Klop J. W.)
- [1975] On solvability by λ -I-terms. В кн.: Бём [1975], с. 342—345.
- [1980] *Combinatory reduction systems*. *Mathematical Centre Tracts* 127, Amsterdam.
- [1980a] Reduction cycles in combinatory logic. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 193—214.
- [1982] Extending partial combinatory algebras. *Bull. European Ass. Theor. Comput. Sci.* 16, pp. 30—34.
- Кнастер (Knaster B.)
- [1928] Un théorème sur les fonctions d'ensembles. *Annales. Soc. Pol. Math.* 6, pp. 133—134.
- Кнут (Knuth D. E.)
- [1970] Examples of formal semantics, in: Engeler E. (ed.). *Symposium on Semantics and Algorithmic Languages*, *Lectures Notes in Mathematics* 188, Springer-Verlag, Berlin.
- Койманс (Koymans K.)
- [1979] *Lambda Calculus Models*, Master thesis, University of Utrecht, Mathematisch Inst.
- [1983] Models of the lambda calculus. *Inform. Control*, to appear.
- Коппо (Coppo M.)
- [198—] Completeness of type assignment in continuous lambda models. *Theor. Comput. Sci.*, to appear.

- Коппо и др. (Coppo M., Dezani-Ciancaglini N., Ronci della Rocca S.)
- [1978] Semiseparability of finite sets of terms in Scott's D_∞ -models of the λ -calculus. В кн.: Ауснелло, Бём [1978], с. 142—164.
- Коппо и др. (Coppo M. et al. = Coppo M., Dezani-Ciancaglini M., Venneri B.)
- [1980] Principal type schemes and λ -calculus semantics. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 535—560.
- Коппо и др. (Coppo M. et al. = Coppo M., Dezani-Ciancaglini M., Honsell F., Longo G.)
- [1983] Extended type structures and filter lambda models. В кн.: Лонго и др. [1983].
- Коэн и др. (ред.) (Cohen L. J. et al. = Cohen L. J., Los J., Pfeiffer H., Podewski K.-P. (eds.))
- [1982] *Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*. North-Holland, Amsterdam.
- Крайзель (Kreisel G.)
- [1959] Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types. В кн.: Гейтинг [1959], с. 101—128.
- [1971] Some reasons for generalizing recursion theory. В кн.: Ганди, Ире [1971], с. 139—198.
- Кроссли (ред.) (Crossley J. N. (ed.))
- [1975] *Algebra and Logic*. *Lecture Notes in Mathematics* 450, Springer-Verlag, Berlin.
- Кроссли, Дамметт (ред.) (Crossley J. N., Dummett M. A. E. (eds.))
- [1965] *Formal Systems and Recursive Functions*. *Pros. 8th Logic Colloquium*, Oxford, July 1963, North-Holland, Amsterdam.
- Кузичев А. С. (Kuzichev A. S.)
- [1980] Sequential systems of lambda conversion and of combinatory logic. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 141—155.
- [1983] Арифметически непротиворечивые λ -теории бестиповой логики. — *ДАН СССР*, т. 268, № 2, с. 288—292.
- Ламбек (Lambek J.)
- [1980] From λ -calculus to cartesian closed categories. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 375—402.
- Ламбек, Скотт (Lambek J., Scott P. J.)
- [1982] *Cartesian closed categories and lambda calculus*, preprint. Dept. of Mathematics, McGill University, Montreal, Canada.
- Ландин (Landin P. J.)
- [1965] A correspondence between ALGOL 60 and Church's lambda notation. *Comm. Assoc. Comput. Math.* 8, pp. 89—101, 158—165.
- [1966] A λ -calculus approach, in: *Advances in Programming and Non-numerical Computation*. Pergamon Press, New York, pp. 97—141.
- [1966a] The next 700 programming languages. *Comm. Assoc. Comput. Math.* 9, pp. 157—164.
- Леви (Lévy J.-J.)
- [1975] An algebraic interpretation of the λ - β - $\mathcal{K}$ -calculus and a labelled λ -calculus. В кн.: Бём, [1975], с. 147—165.
- [1978] Réductions correctes et optimales dans le lambda calcul, Thèse de doctorat d'état. Université Paris VII.
- [1980] Optimal reductions in the lambda calculus. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 159—192.
- Лёрчер (Lercher B.)
- [1963] *Strong Reduction and Recursion in Combinatory Logic*. Dissertation, The Pennsylvania State University.
- [1967] The decidability of Hindley's axioms for strong reduction. *J. Symbolic Logic* 32, pp. 237—239.
- Лёб (Löb M. H.)
- [1955] A solution of a problem of Henkin. *J. Symbolic Logic* 20, pp. 115—118.

- Ловер (Lawvere F. W. (ed.))
[1972] Toposes, Algebraic Geometry and Logic. Lecture Notes in Mathematics 274, Springer-Verlag, Berlin.
- Лонго (Longo G.)
[1983] Set theoretical models of lambda calculus: theories, expansions and isomorphisms. Ann. Pure Appl. Logic 24, pp. 153—188.
- Лонго и др. (ред.) (Longo G. et al. = Longo G., Lolli G., Marcija A. (eds.))
[1983] Logic Colloquium'82. North-Holland, Amsterdam.
- Лукс (ред.) (Loeckx J. (ed.))
[1974] Automata, Languages and Programming. 2nd Colloquium, University of Saarbrücken, 1974, Lecture Notes in Computer Science 14, Springer-Verlag, Berlin.
- Лукхардт (Luckhardt H.)
[1973] Extensional Gödel Functional Interpretation. A Consistency Proof of Classical Analysis. Lecture Notes in Mathematics 306, Springer-Verlag, Berlin.
- Маккарти (McCarthy J.)
[1962] The LISP 1.5 Programmer's Manual. MIT Press, Cambridge, MA.
- Маклейн (MacLane S.)
[1972] Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, Berlin.
- Манн (Mann C. R.)
[1975] The connection between equivalence of proofs and cartesian closed categories. Proc. London Math. Soc. (3) 31, pp. 289—310.
- Мартин-Лёф (Martin-Löf P.)
[1982] Constructive mathematics and computer programming. В кн.: Коэн и др. [1982], с. 153—178.
- Мейер (Meyer A.)
[1982] What is a model of the lambda calculus? Information Control 52, pp. 87—122.
- Мереди́т, Прайор (Meredith C. A., Prior A. N.)
[1963] Notes on the axiomatics of propositional calculus. Notre Dame J. Formal Logic 4, pp. 172—187.
- Милн, Стрейчи (Milne R. J., Strachey C.)
[1976] A Theory of Programming Language Semantics, 2 vols. Chapman and Hall, London; Wiley, New York.
- Ми́нц Г. Е.
[1979] Теория категорий и теория доказательств. — В кн.: Актуальные проблемы логики и методологии науки. — Киев: Наукова думка, с. 252—278.
- Мичке (Mitschke G.)
[1976] λ -Kalkül, δ -Konversion und axiomatische Rekursionstheorie. Preprint Nr. 274, Technische Hochschule, Darmstadt. Fachbereich Mathematik, 77 pp.
- [1979] The standartization theorem for the λ -calculus. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 25, pp. 29—31.
- Моррис (Morris J. H.)
[1968] Lambda Calculus Models of Programming Languages. Dissertation, M. I. T.
- Мурский В. Л.
[1967] Изоморфная вложенность полугрупп со счетным множеством определяющих соотношений в конечно представимые полугруппы. Матем. заметки, т. I, с. 217—224.
- Накадзима (Nakajima R.)
[1975] Infinite normal forms for the λ -calculus. В кн.: Бём [1975], с. 62—82.
- Нива (ред.) (Nivat M. (ed.))
[1972] Automata, Languages and Programming. North-Holland, Amsterdam.

- Нильсен, Шмидт (ред.) (Nielsen N., Schmidt E. M. (eds.))
[1982] Automata, Languages and Programming. Lecture Notes in Computer Science 140, Springer-Verlag, Berlin.
- Ньюман (Newman M. N. A.)
[1942] On theories with a combinatorial definition of «Equivalence». Ann. of Math. (2) 43, pp. 223—243.
- О'Доннелл (O'Donnell M. J.)
[1977] Computing in Systems Described by Equations. Lecture Notes in Computer Science 58, Springer-Verlag, Berlin.
- Оллонгрен (Ollongren A.)
[1975] A Definition of Programming Languages by Interpreting Automata. Academic Press, New York and London.
- Парих Р. (ред.) (Parikh R. (ed.))
[1975] Logic Colloquium, Symposium on Logic Held at Boston, 1972—1973. Lecture Notes in Mathematics 453, Springer-Verlag, Berlin.
- Парк (Park D.)
[1976] The Y-combinator in Scott's Lambda Calculus Models (revised version). Theory of Computation Report No. 13; University of Warwick, Dept. of Comput. Sci.
- Петер (Péter R.)
[1967] Recursive Functions. Academic press, New York and London. [Имеется перевод предыдущего издания: Петер Р. Рекурсивные функции. — М.: ИЛ, 1954.]
- Плоткин (Plotkin G. D.)
[1972] A Set-theoretical Definition of Application. School of Artificial Intelligence, Memo MIP-R-95, University of Edinburgh.
- [1974] The λ -calculus is ω -incomplete. J. Symbolic Logic 39, pp. 313—317.
- [1975] Call-by-name, call-by-value and the λ -calculus. Theor. Comput. Sci. 1, pp. 125—159.
- [1976] A powderdomain construction. SIAM J. Comput. 5, pp. 452—487.
- [1977] LCF as a programming language. Theor. Comput. Sci. 5, pp. 223—257.
- [1978] $\mathbb{T}$ as a universal domain. J. Comput. Syst. Sci. 17, pp. 209—236.
- Плоткин, Смит (Plotkin G. D., Smyth M. B.)
[1978] The category-theoretic solution of recursive domain equations. DAI Research Report 60, University of Edinburgh.
- ван дер По́ль и др. (van der Poel W. L., et al. = van der Poel W. L., Schaap C. E., van der Mey G.)
[1980] New Arithmetical Operators in the Theory of Combinators. Indag. Math. 42, pp.
- Поттингер (Pottinger G.)
[1977] Normalization as a homomorphic image of cut elimination. Ann. Math. Logic 12, pp. 323—357.
- Проблемы (Problems)
[1975] Open problems. В кн.: Бём [1975], с. 367—370.
- [1980] Open problems. Bull. European Ass. Comput. Sci. 13(5), pp. 308—319.
- Резус (Rezus A.)
[1982] A bibliography of lambda calculi, combinatory logic and related topics. Mathematical Centre Tracts, Amsterdam.
- [1982a] On a theorem of Tarski. Libertas Math. 2, pp. 63—97.
- Рейнольдс (Reynolds J. C.)
[1970] GEDANKEN—A simple typeless language based on principle of completeness and reference concept. Comm. Assoc. Comput. Mach. 13(5), pp. 308—319.

- Роджерс (Rogers H.)
 [1967] Theory of Recursive Functions and Effective Operations. McGraw Hill, New York. [Имеется перевод: Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.]
 [1973] The manipulation systems and the Church-Rosser theorem. J. Assoc. Comput. Mach. 20, pp. 160—187.
- Россер (Rosser J. B.)
 [1935] A mathematical logic without variables. Annals of Math. (2) 36, pp. 127—150; Duke. Math. J. 1, pp. 328—355.
- Роуз, Шепердсон (ред.) (Rose H. E., Sheperdson J. C. (eds.))
 [1975] Logic Colloquium'73. Studies in Logic 80, North-Holland, Amsterdam.
- Сабо (Szabo M. E.)
 [1978] Algebra of Proofs. Studies in Logic 88, North-Holland, Amsterdam.
- Санчис (Sanchis L. E.)
 [1967] Functionals defined by recursion. Notre Dame J. Formal Logic 8, pp. 161—174.
 [1979] Reducibilities in two models for combinatory logic. J. Symbolic Logic 44, pp. 221—234.
- Селдин (Seldin J. P.)
 [1976/7] Recent advances in Curry's program. Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino 35, pp. 77—88.
 [1979] Progress report on generalized functionality. Ann. Math. Logic 17, pp. 29—59.
- Скарпеллини (Scarpellini B.)
 [1971] A model for bar recursion of higher types. Comp. Math. 23, pp. 123—153.
- Скотт (Scott D. S.)
 [1963] A system of functional abstraction (unpublished).
 [1969] Models for the λ -calculus. Manuscript (unpublished), 53 pp.
 [1972] Continuous lattices. В кн.: Ловер [1972], 97—136.
 [1973] Models for various type free calculi. В кн.: Супис и др. [1973], с. 157—187.
 [1974] The language LAMBDA (abstract). J. Symbolic Logic 39, pp. 425—427.
 [1975] Lambda calculus and recursion theory. В кн.: Кангер [1975], с. 154—193.
 [1975a] Combinators and classes. В кн.: Бём [1975], с. 1—26.
 [1975b] Some philosophical issues concerning theories of combinators. В кн.: Бём [1975], с. 346—366.
 [1976] Data types as lattices. SIAM J. Comput. 5, pp. 522—587.
 [1980] Lambda calculus: some models, some philosophy. В кн.: Барвайз и др. [1980], с. 223—266.
 [1980a] Relating theories of the λ -calculus. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 403—450.
 [1982] Domains for denotational semantics. В кн.: Нильсен, Шмидт [1982], с. 577—613.
- Скотт, Стрейчи (Scott D. S., Strachey C.)
 [1971] Toward a mathematical semantics for computer languages. Proc. Symp. on Computers and Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, 21, pp. 19—46.
- Спектор К. (Spector C.)
 [1962] Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. В кн.: Деккер [1962], с. 1—27.

- Степлз (Staples J.)
 [1975] Church — Rosser theorems for replacement systems. В кн.: Кроссли, [1975], с. 291—307.
- Стетмен (Statman R.)
 [1979] The typed λ -calculus is not elementary recursive. Theor. Comput. Sci. 9, pp. 73—81.
 [1980] On the existence of closed terms in the typed lambda calculus I. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 511—534.
 [1981] On the existence of closed terms in the typed lambda calculus II: transformations of unification problems. Theor. Comput. Sci. 15, pp. 329—338.
 [1982] Completeness, invariance and λ -definability. J. Symbolic logic 47, no. 1, pp. 17—26.
- Стой (Stoy J. E.)
 [1977] Denotational Semantics, The Scott-Strachey approach to Programming Languages. MIT Press, Cambridge.
- Стронг (Strong H.)
 [1968] Algebraically generalized recursive function theory. IBM J. Research Develop. 12, pp. 465—475.
- Супис и др. (ред.) (Suppes P. et al. = Suppes P., Henkin L., Joja A., Moisil, Gr. C. (eds.))
 [1973] Logic, Methodology and Philosophy of Science IV. Studies in Logic 74, North-Holland, Amsterdam.
- Тарский (Tarski A.)
 [1955] A lattice-theoretical fixed point theorem and its applications. Pacific J. Math. 5, pp. 285—309.
- Тейт (Tait W.)
 [1965] Infinitely long terms of transfinite type. В кн.: Кроссли, Дамметт [1965], с. 176—185.
 [1967] Intensional interpretations of functionals of finite type I. J. Symbolic Logic 32, pp. 198—212.
 [1971] Normal form theorem for barrecursive functions of finite type. В кн.: Фенстад [1971], с. 353—367.
- Терлуw (Terluw J.)
 [1982] On difinition trees of ordinal recursive functionals: reduction of orders by means of type level raisings. J. Symbolic Logic 47, no. 2, pp. 295—403.
- Тернер (Turner D. A.)
 [1979] A new implementation technique for applicative languages. Software — Practice and Experience 9, pp. 31—49.
- Трулстра (ред.) (Troelstra A. S. (ed.))
 [1973] Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. Lecture Notes in Mathematics 344, Springer-Verlag, Berlin.
- Трулстра (Troelstra A. S.)
 [1975] Nonextensional equality. Fundamenta Math. 82, pp. 307—322.
- Трулстра, ван Дален (ред.) (Troelstra A. S., van Dalen D. (eds.))
 [1982] The L. E. J. Brouwer centenary symposium. North-Holland, Amsterdam.
- Тьюринг (Turing A. M.)
 [1936] On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc. 42, pp. 230—265.
 [1937] Computability and λ -definability. J. Symbolic Logic 2, pp. 153—163.
 [1937a] The ν -functions in λ -K-conversion. J. Symbolic Logic 2, p. 164.
- Уодсворт (Wadsworth C. P.)
 [1971] Semantics and Pragmatics of the Lambda-calculus. Dissertation, Oxford University.

- [1976] The relation between computational and denotational properties for Scott's D_{∞} -models of the lambda-calculus. *SIAM J. Comput.* 5, pp. 488—521.
- [1980] Some unusual λ -calculus numeral systems. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 215—230.
- Уэлч (Welch P. H.)
- [1975] Continuous semantics and inside out reductions. В кн.: Бём [1975], с. 122—146.
- Фенстад (ред.) (Fenstad J. E. (ed.))
- [1971] Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium. *Studies in Logic* 63, North-Holland, Amsterdam.
- Феферман (Feferman S.)
- [1975] A language and axioms for explicit mathematics. В кн.: Кроссли [1975], с. 87—139.
- [1980] Constructive theories of functions and classes. В кн.: Боффа и др. [1980], с. 159—224.
- [1982] Towards useful type-free theories I. Preprint, Dept. Mathematics, Stanford, Ca 94305 USA.
- Фитч (Fitch F. B.)
- [1974] Elements of combinatory Logic. Yale University Press, New Haven and London.
- [1980] An extension of a system of combinatory logic. В кн.: Хиндли, Селдин [1980], с. 125—140.
- Фогель (Vogel H.)
- [1976] Ein Starker Normalisationssatz für die Bar-rekursiven Funktionale. *Arch. Math. Logik* 18, pp. 81—84.
- Фолькен (Volken H.)
- [1978] Formale Stetigkeit und Modelle des Lambda-Kalküls. Dissertation. Eidgen. Technische Hochschule, Zürich.
- Форчун и др. (Fortune S. et al. = Fortune S., Leivant D., O'Donnell M.)
- [1980] The expressiveness of simple and second order type structures. Research Report RC8542, IBM Research Center, Yorktown Heights, NY 10598, USA.
- Фреге (Frege G.)
- [1893/1903] Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Jena; reprint: Olms, Hildesheim, 1962.
- Фридман (Friedman H.)
- [1975] Equality between functionals. В кн.: Парих [1975], с. 22—37.
- Хайланд (Hyland J. M. E.)
- [1973] A simple proof of the Church — Rosser theorem. Typescript, Oxford University, 7 pp.
- [1975] Recursion Theory on the Countable Functionals. Dissertation, Oxford University.
- [1975a] A survey of some useful partial order relations on terms of the lambda calculus. В кн.: Бём [1975], с. 83—95.
- [1976] A syntactic characterization of the equality in some models of the λ -calculus, *J. London Math. Soc.* (2), 12, pp. 361—370.
- Халмош (Halmos P. R.)
- [1960] Naive Set Theory. D. van Nostran, Princeton.
- Ханатани (Hanatani Y.)
- [1966] Calculabilité des fonctionnels recursives primitives de type fini sur les nombres naturels. *Ann. Japan. Ass. Philos. Sci.* 3, pp. 19—30.
- Харари (Harary F.)
- [1969] Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 3rd Ed. 1977.
- Хелман (Helman G.)
- [1977] Restricted Lambda-abstraction and Interpretation of Some Non-classical Logics. Dissertation, University of Pittsburgh.

- Хината (Hinata S.)
- [1967] Calculability of primitive recursive functionals of finite type. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, A*, 9, pp. 218—235.
- Хиндли (Hindley J. R.)
- [1964] The Church — Rosser Property and a Result in Combinatory Logic. Dissertation, University of Newcastle-upon-Tyne.
- [1967] Axioms for strong reduction in combinatory Logic. *J. Symbolic Logic* 32, pp. 224—236.
- [1969] The principal type scheme of an object in combinatory logic. *Trans. Amer. Math. Soc.* 146, pp. 29—60.
- [1977] Combinatory reductions and lambda-reductions compared. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 23, pp. 169—180.
- [1978] Reductions of residuals are finite. *Trans. Amer. Math. Soc.* 240, pp. 345—361.
- [1982] The simple semantics for Coppo — Dezani — Salle type assignment. В кн.: Дедзани, Монтанари [1982], с. 212—226.
- [1983] The completeness for typing lambda terms. *Theor. Comput. Sci.* 22 (to appear).
- Хиндли и др. (Hindley J. R. et al. = Hindley J. R., Lercher B., Seldin J. P.)
- [1972] Introduction to Combinatory Logic. Cambridge University Press, London.
- Хиндли, Лонго (Hindley J. R., Longo G.)
- [1980] Lambda calculus models and extensionality. *Z. Math. Logik Grundl. Math.* 26, pp. 289—310.
- Хиндли, Селдин (ред.) (Hindley J. R., Seldin J. P. (eds.))
- [1980] To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda-Calculus and Formalism. Academic Press, New York and London.
- Цукер (Zucker J.)
- [1975] Formalization of classical mathematics in Automath. В кн.: Гийом [1977], с. 135—145.
- Чёрч (Church A.)
- [1932/3] A set of postulates for the foundation of logic. *Annals of Math.* (2) 33, pp. 346—366 and 34, pp. 839—864.
- [1936] An unsolvable problem of elementary number theory. *Amer. J. Math.* 58, pp. 354—363.
- [1936a] A note on the Entscheidungsproblem. A correction. *J. Symbolic Logic* 1, pp. 40—41, 101—102.
- [1937] Combinatory logic as a semigroup (abstract). *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, p. 333.
- [1941] The Calculi of Lambda Conversion. Princeton University Press, Princeton.
- [1956] Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press, Princeton. [Имеется перевод: Чёрч А. Введение в математическую логику. — М.: ИЛ, 1960.]
- Чёрч, Клини (Church A., Kleene S. C.)
- [1937] Formal definitions in the theory of ordinal numbers. *Fund. Math.* 28, pp. 11—21.
- Чёрч, Россер (Church A., Rosser J. B.)
- [1936] Some properties of conversion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 39, pp. 472—482.
- Швихтенберг (Schwichtenberg H.)
- [1975] Elimination of higher type levels in definitions of primitive recursive functions by means of transfinite recursion. В кн.: Поуэ, Шенердсон [1975], с. 279—303.
- [1975/6] Definierbare funktionen in λ -Kalkül mit Typen. *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.* 17, (3—4), pp. 113—114.
- [1982] Complexity of normalization in the pure typed lambda calculus. В кн.: Трулстра, ван Дален [1982], с. 453—458.

- Шейнфинкель М. И.
[1924] Über die Bausteine der mathematischen Logik. Math. Annalen 92, pp. 305—316.
- Шенфилд (Schoenfield J. R.)
[1967] Mathematical Logic. Addison-Wesley, Reading, Ma. [Имеется перевод: Шенфилд Дж. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.]
- Шовен (Chauvin A.)
[1979] Theory of objects and set theory: introduction and semantics. Notre Dame J. Formal Logic 20, pp. 37—54.
- Шроэр (Schroer D. E.)
[1965] The Church — Rosser Theorem. Dissertation, Cornell University, Ithaca NY.
- Энгелер (Engeler E.)
[1981] Algebras and combinators. Algebra Universalis, no. 3, pp. 389—392.
- Эндертон (Enderton H. B.)
[1972] A Mathematical Introduction to Logic. Academic Press, New York and London.
- Юэ (Huet G.)
[1977] Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems. 18-th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 30—45.
- Юэ, Оппен (Huet G., Oppen C.)
[1980] Equations and rewrite rules, a survey. Technical Report CSL—111, SRI International.
- Якопини (Jacopini G.)
[1975] A condition for identifying two elements of whatever model of combinatory logic. В кн.: Бём [1975], с. 213—219.

Предметный указатель

- алгебраическое п. ч. у. м. 28
- а. н. ф. см. аппроксимативная нормальная форма
- аппликативная структура 101
- — экстенциональная 93, 101
- аппроксимативная нормальная форма 366
- аппроксимация 366
- базис 172
- бесконечная η -нормальная форма 241
- бесконечное η -расширение 238
- бесконечный терм 558
- η -редукт 237
- блок 265
- оригинальный 104, 246
- вкладывается 104, 246
- внутренность 110
- вхождение 37
- выворачивание по Бёму 249, 252
- вытаскивание на бесконечность 230
- генератор 176
- универсальный 177
- г. н. ф. см. головная нормальная форма
- головная нормальная форма 52, 180
- — — главная 184
- — — с оригинальной головой 251
- — — λ -свободная 251
- переменная 180
- редукция 180
- головной редекс 180
- гомоморфизм 104, 106
- готовое множество 255
- готовый терм 251
- граф (редукционный) 67
- группа алгебры 525
- комбинаторная 526
- рекурсивная 540
- двойственная функция 513
- декартово замкнутая категория 119
- произведение 119
- декс (-часть) 340
- дерево 205
- Бёма см. дерево бёмовское
- бёмовского типа 226
- бёмовское 58, 221
- лежащее в основе 220, 224
- Накадзимы 504
- помеченное 220
- похожее на λI -дерево 233
- частично помеченное 224
- эффективное бёмовское 225
- диаграмма 308
- расщепляющаяся 307
- элементарная 307
- дискретное множество 268
- дискриминатор 511
- длина редукционной цепочки 328
- терма 35
- дно 22
- замкнутость относительно аппликации 207
- — композиции 144, 186
- — минимизации 144, 186
- — правила 91
- — примитивной рекурсии 144, 186
- — равенства 151
- — — комбинаторов 152
- замкнутый терм 36
- замыкание 36, 335
- рефлексивное 62
- совместимое 62
- транзитивное 62
- изоморфизм 104
- иллативная комбинаторная логика 47, 561
- индексирование 491
- индикатор переменных 232
- интерпретация 101, 114
- истинностные значения 141, 195
- $\lambda(\beta)$ -исчисление 35
- $\lambda(\beta)\eta$ -исчисление 43
- $\lambda I(\beta)$ -исчисление 48
- $\lambda I(\beta)\eta$ -исчисление 49

$\lambda K(\beta)$ -исчисление 35
 $\lambda K(\beta)$ - η -исчисление 43
 каноническое отображение 94
 категория декартово замкнутая 119
 — — — строго конкретная 124
 квази-левая редукция 188
 квази- GK -редукция 333
 когерентное п. ч. у. м. 30
 код конечной последовательности 11
 — — — (не)обеспеченный 459
 комбинатор 36
 — неподвижной точки 54, 140
 — — — бёмовский 150
 — собственный 191
 комбинаторная алгебра 92, 103
 — — экстенциональная 93
 — группа 526
 — логика 47, 56, 158
 — модель 129
 — — устойчивая 129
 — полнота 42, 102
 — полугруппа 136, 525
 комбинаторные аксиомы 107, 167
 коммутирующие отношения 75
 компактный элемент 28
 композиция 142
 β -конверсия 35
 η -конверсия 43
 конвертируемость 35, 63
 конечность разверток 292
 контекст 41
 — кратно нумерованный 374
 критическая последовательность 210

 левый редекс 187
 лемма о генеричности 373
 — — кубе 317
 — Хиндли — Розена 76
 локально представимое отображение 135, 513
 локальный K 215

 магическая тройка 461
 мальцевское многообразие 94
 метка 220, 224
 модель из замкнутых термов 93, 109
 — — открытых термов 93, 109
 — — термов 93, 109
 — вторая Клини 218
 — первая Клини 218
 мультимножество 266
 мультимножество 310

 направленное множество 22
 наследственно не- Ω -универсальный генератор 447
 находится левее 187

независимое множество 420
 непротиворечивая теория 44
 неразрешимый терм 52, 178
 несравнимые термы 45
 не- Ω -терм 447
 нормальная форма 45, 64
 — — аппроксимативная 366
 — — бесконечная 241
 — — головная 52, 180
 β -нормальная форма 45
 $\beta\eta$ -нормальная форма 45
 нумерованное множество 156
 — — позитивное 523
 — — полное 523
 — — предполное 157
 н. ф. см. нормальная форма

 обеспеченное число 459
 область (значений) 509
 оболочка Каруби 125
 операция замыкания 384
 λ -определимая функция 50, 51, 186
 λI -определимая функция 195
 определимое отображение 509
 оригинальное множество 261
 осмысленная λ -теория 410
 остаток 286
 отделимое множество 258, 260
 I -отделимое множество 264
 $\mathcal{T}$ -отделимое множество 430
 откладывание δ -редукции 405
 — η -редукции 386
 — Ω -редукции 84, 391
 — η - и Ω -редукции 392
 отношение конгруэнтности 61
 — равенства 61
 — редукции 62
 — совместимое 61
 отображение алгебраическое 103
 — определимое 509
 — представимое 103, 509
 оценка 101

 парадоксальный комбинатор 141
 переменная 34, 565
 — свободная 36, 565
 — связанная 36, 565
 перестановка конечная наследствен-
 ная 137, 533
 — наследственная 137, 533
 перестановщик 251
 перечисление 173
 п. о. см. полуосмысленная теория
 поддерево 205, 227
 подстановка 39
 подстановочное отношение 66
 подстановщик 495
 подструктура 104

подтерм 37
 — активный 37
 — пассивный 37
 — подчеркнутый 445
 — соответствующий 448
 — точно подчеркнутый 448
 подчеркнутый CL -терм 436
 — λ -терм 445
 подъем 286, 309, 360
 полезный узел 260
 полная решетка 22
 полное нумерованное множество 523
 — частично упорядоченное множе-
 ство 22
 полнота комбинаторная 42, 102
 — по Гильберту — Посту 95
 — редукций изнутри 364
 полугруппа комбинаторная 525
 — модели 525
 полуосмысленная теория 20, 429
 полупрямое произведение 539
 понятие редукции 62
 порожденное множество 172
 правило свертывания 64
 — слабой экстенциональности 44
 — термов 91
 — ext 91, 161
 — ξ 91
 ω -правило 91
 — Париха 462
 превосходит 246
 преддиаграмма 309
 представимое отображение 103, 509
 преобразование 250
 — бёмовское 250, 264
 — разрешающее 250, 264
 приличная теория 515
 примитивно рекурсивные функцио-
 налы 555
 причина пометки 375
 проверка на нуль 143, 148
 проективный предел 27, 540
 — — рекурсивный 137, 540
 проектирование 286, 309, 360
 проекции 119
 проекция 471
 противоречивая теория 44
 п. ч. у. м. 22
 — — — алгебраическое 28
 — — — когерентное 30

 равенство (отношение) 62
 равенство (формула) 44
 — замкнутое 44
 равномерная последовательность 57,
 175, 514
 равномерно рекурсивная система 540
 развертка 79, 288
 — полная 288

 различимое множество 261
 — — нормальное 265
 разрежение редукции 320
 разрешимый терм 52, 57, 70, 178
 I -разрешимый терм 194
 K -разрешимый терм 194
 $\mathcal{T}$ -разрешимый терм 430
 расширение 131, 236, 237, 238
 ре(-часть) 340
 регулярное множество 271
 редекс 64
 — внутренний 299
 — головной 180
 — зацикливающий 346
 — левый 187
 — обеспеченный 319
 — пустой 305
 — сворачиваемый 319
 — специальный 340, 344
 I -редекс 80, 297
 K -редекс 297
 редукт 63
 редукции сильно эквивалентные 314
 — слабо эквивалентные 304
 — H -эквивалентные 304
 редукционная диаграмма 80
 — стратегия 81, 327
 — — частичная 335
 — цепочка 66
 редукция 66
 — внутренняя 299
 — головная 180
 — изнутри 364
 — квазиголовная 352
 — квазилевая 188
 — левая 328
 — не затрагивающая множества 370
 — одношаговая 305
 — пустая 66
 — сильная 161
 — слабая 161
 — собственная 66
 — стандартная 80, 298
 β -редукция 63
 $\beta\eta$ -редукция 75
 δ -редукция 399
 η -редукция 63
 Ω -редукция 63
 редуцируется 63
 рекурсивные функции 145
 ретракт 28
 ретракция 28
 рефлексивное п. ч. у. м. 116
 решетка алгебраическая 30
 — непрерывная 30
 — полная 22
 ромба свойство 65
 — — слабое 69
 р. п. = рекурсивно перечислимое

свертка 64
 свертывания правило 64
 свойство области 509
 селектор 251
 семейство 177
 сильно нормализуемое отношение 68
 — нормализуемый терм 68
 — эквивалентные редукции 314
 скелет терма 352
 слабая экстенциональность 44
 слабое свойство ромба 69
 — — Чёрча — Россера 69
 совместное подмножество 30
 согласованные множества термов 255
 — наборы термов и переменных 42
 — термы 255
 соглашение о переменных 38
 спаривание 142
 — сюръективное 142, 554
 спаривающая функция *см.* спарива-
 ние
 спектр терма 351
 специальное множество 266
 стандартизация 320
 стратегия 326
 — Гросса — Кнута 331
 — зацикливающая 327
 — кофинальная 327
 — левой редукции 328
 — нормализующая 327
 — одношаговая 326
 — рекурсивная 326
 — скелетная 352
 — со свойством Чёрча — Россера 327
 — эффективная 326
 — B -(1)-оптимальная 328
 — (1)-оптимальная 328

теорема аппроксимации 492, 498
 — непрерывности 372
 — нормализации 329
 — об области значений 435
 — — устойчивости 378
 — о двойной неподвижной точке 149
 — — конечности разверток 292, 316
 — — консервативности 345
 — — кратной неподвижной точке 149
 — — неподвижной точке 36, 55
 — — — бесконечная 191
 — — — вторая 151
 — — — для п. ч. у. м. 26
 — — последовательности вычислений 377
 — — рекурсии
 — — сильной нормализации 359 (для помеченной редукции), 556 (для гёделевской системы $\mathcal{T}$)
 — — стандартизации 301

теорема Скотта 434
 — характеристики 497, 500
 — Чёрча — Россера 74 (для β), 78 (для $\beta\eta$), 162 (для CL), 284 (че-
 рез лемму о полосе), 294 (через
 конечность разверток), 316 (силь-
 ная форма), 360 (через помеченную
 редукцию), 395 (для $\beta(\eta)\Omega$)
 теория непротиворечивая 44
 — полная по Гильберту — Посту 95
 — существенно неразрешимая 153
 терм абстракционный 179
 — аппликационный 179
 — безымянный 567
 — замкнутый 36
 — легкий 402
 — минимальный 334
 — над аппликативной структурой 101
 — перечисляющий множество 173
 — Плоткина 453
 — помеченный 353
 — порядка 0 444
 — похожий на переменную 447
 — производный 340
 — свободногоголовый 528
 — типа 1 529
 — типа σ 549
 — R -бесконечный 68
 — $\mathcal{T}$ -легкий 432
 — $\mathcal{T}$ -обратимый 528
 термы конгруэнтные 38
 — порожденные множеством 172
 тип 548
 — основной 548
 типовая комбинаторная логика 549
 — структура комбинаторная 551
 — — экстенциональная 551
 типовое λ -исчисление 549
 топология Виссера 433
 — гиперсвязная 433
 — деревьев 59, 136, 234, 518
 — Скотта 22
 точное преобразование 255

удовлетворять правилу 112
 узел дерева 205
 — — виртуальный 241
 универсальный генератор 177
 условное выражение 142
 устойчивый элемент 131

формальное обращение 536
 формулы-типы 559
 функтор декартов 127
 функция алгебраическая 103
 — исходная 144
 — представляемая 103
 — предшествования 143
 — следования 148

функция числовая частичная 185
 — λ -определимая 50, 51, 186

цикл 335
 цифровая система 55, 147
 — — адекватная 148
 — — нормальная 148
 цифры 54, 143, 195
 — стандартные 148
 — Чёрча 195

частный случай 250
 — — свободноголовый 528
 Чёрча — Россера свойство 65
 — — теорема *см.* теорема Чёрча —
 Россера
 чистая комбинаторная логика 47

ширина F -редукционной цепочки 328

эквивалентность г. н. ф. 242
 — — — — по разрешимости 388
 — редукций сильная 314
 — термов 242
 экстенциональная теория 91
 экстенциональность *см.* аппликативная
 структура, комбинаторная алгебра,
 λ -модель
 экстенциональный коллапс 552

B -оптимальная стратегия 328
 B -1-оптимальная стратегия 328
 CL -терм 158
 CPO 26

$CR = \text{Чёрч} - \text{Россер}$
 F -(редукционная) цепочка 327
 fun 466
 I -базис 200
 I -равномерная последовательность
 203
 R -бесконечный терм 68
 x -прямой блок 266

α -конверсия 38
 α -конгруэнтность 38
 α -постоянный терм 375
 α - λ -точное преобразование 255
 δ -символ Чёрча 400
 λ -алгебра 106
 — богатая 136
 — жесткая 110
 λ -модель 107
 — категоричная 131
 — непрерывная 134, 501
 — системы $\mathcal{T}$ 557
 — — — экстенциональная 557
 λ -определимая функция 143
 λI -определимая функция 195
 λ -теория 88
 — осмысленная 90, 410
 — полуосмысленная 90
 λ -терм 36
 — замкнутый 36
 — помеченный 353
 λ' -терм 281
 λI -терм 48
 $\lambda \perp$ -терм 365
 Ω -терм 447
 ω -модель системы $\mathcal{T}$ 557

Символы распределены по следующим категориям: термы, множества термов, операции на термах, отношения между термами, редукция, деревья, теории, модели и прочие символы.

Для большинства символов приведены определения, для остальных — типичный контекст, в котором они используются.

Термы

λ -термы

I	$\equiv \lambda x.x$	43
K	$\equiv \lambda xy.x$	43
S	$\equiv \lambda xyz.xz(yz)$	43
B	$\equiv \lambda xyz.x(yz)$	200
C	$\equiv \lambda xyz.xzy$	200
I	$\equiv \lambda xy.xy$	89
Ω	$\equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$	141
Y	$\equiv \lambda f.(\lambda x.f(x))(\lambda x.f(x))$	140
	$Yf = f(Yf)$	
Θ	$\equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$	141
	$\Theta f \rightarrow f(\Theta f)$	
T	$\equiv \lambda xy.x (\equiv K)$ (истина)	141
F	$\equiv \lambda xy.y$ (ложь)	141
U_i^n	$\equiv \lambda x_0 \dots x_n.x_i$	142
π_i^n	$\pi_i^n[M_0, \dots, M_n] = M_i \quad (1 \leq i \leq n)$	142
P_i^n	$P_i^n(M_0, \dots, M_n) = M_i \quad (1 \leq i \leq n)$	142
$\ulcorner n \urcorner$	n -я цифра	143
S^+	$S^+\ulcorner n \urcorner = \ulcorner n+1 \urcorner$	143
P^-	$P^-\ulcorner n+1 \urcorner = \ulcorner n \urcorner$	143
Zero	Zero (x) = T , если $x = \ulcorner 0 \urcorner$, = F , если $x = \ulcorner n+1 \urcorner$	143
E	$(\forall M \in \Lambda^0)(\exists n \in \mathbb{N})(E\ulcorner n \urcorner = M)$	174
$E_{\vec{x}}$	$(\forall M \in \Lambda^0(\vec{x}))(\exists n \in \mathbb{N})(E_{\vec{x}}\ulcorner n \urcorner = M)$	174
c_n	$\equiv \lambda f.x.f^n x$ (цифры Чёрча)	148
$C[]$	контекст, т. е. λ -терм с дырами	41

M_a	BT(M_a) — это поддереву BT(M) исходящее из узла a	227
P_n	$\equiv \lambda x_1 \dots x_n.\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ $\equiv \lambda x_1 \dots x_{n+1}.x_{n+1}x_1 \dots x_n$	251
CL-термы		
I	$IP = P$	159
K	$KPQ = P$	158
S	$SPQR = PR(QR)$	158
B	$BPQR = P(QR)$	199
C	$CPQR = PRQ$	199
$K_{\sigma\tau}, S_{\sigma\tau}$	типовые комбинаторы	549
R_o	рекурсор	555
λI-термы		
T_I	см. T	195
F_I	см. F	195
c_n^I	$\equiv \ulcorner n \urcorner$, ср. c_n	195
Zero_I	см. Zero	195
$U_{I,i}^n$	см. U_iⁿ	195
$P_{I,i}^n$	см. P_iⁿ	196
S_I^+	см. S⁺	196
J	$\equiv \lambda abcd.ab(adc)$	200
X_I	одноточечный базис для Λ_I	201
E_I	см. E	202
$E_{I,\vec{x}}$	см. E_{$\vec{x}$}	203
Множества термов		
Λ	множество λ -термов	34
Λ^0	множество замкнутых λ -термов	36
$\Lambda^0(\vec{x})$	$\equiv \{M \in \Lambda \mid FV(M) \subseteq \{\vec{x}\}\}$	36
$\mathcal{X}^+$	наименьшее множество $\mathcal{Y}$, такое, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ и $M, N \in \mathcal{Y} \Rightarrow MN \in \mathcal{Y}$	172
$M \in \mathcal{X}$	$\exists N (N =_R M \wedge M \in \mathcal{X})$	69
$R\text{-NF}$	множество термов, находящихся в R -нормальной форме	69
$R\text{-NF}^0$	$= R\text{-NF} \cap \Lambda^0$	69
SOL	множество разрешимых термов	235
R-UG	множество R -универсальных генераторов	177
HNF	множество термов в головной нормальной форме	180
HP	множество наследственных перестановок	533

ЕНР	множество конечных наследственных перестановок	533
SO	множество разрешающих термов	205
$\overrightarrow{SO}$	множество разрешающих последовательностей	206
$SO_{n,m}$	$\bigcup_{n,m} SO_{n,m} = SO$	207
$\mathcal{C}$	множество комбинаторных термов	158
$\mathcal{C}^0$	множество замкнутых комбинаторных термов	158
Λ_I	множество λI -термов	48
Λ_K	$= \Lambda$, множество λ -термов	48
$\Lambda_I^0(\vec{x})$	$= \{M \in \Lambda_I \mid FV(M) = \vec{x}\}$	193
$\Lambda \perp$	множество $\lambda \perp$ -термов	365
λI^N	множество помеченных $\lambda \perp$ -термов	353
$\mathcal{P}\mathcal{N}$	множество сильно $lab.\beta$ -нормализуемых термов	356
$\Lambda \delta$	множество $\lambda \delta$ -термов	399
Λ'	множество термов с индексированными λ -символами	281
Λ^τ	множество типовых λ -термов	549
Операции на термах		
$MN_1 \dots N_n$	$= (\dots (MN_1) \dots M_n)$	34
$M\vec{N}$	$= MN_1 \dots N_n$, если $\vec{N} = N_1, \dots, N_n$	34
$\lambda x_1 \dots x_n.M$	$= (\lambda x_1 (\lambda x_2 \dots (\lambda x_n.M) \dots))$	34
$\vec{\lambda x}.M$	$= \lambda x_1 \dots x_n.M$, если $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$	34
$F^n(M)$	$F^0(M) = M$; $F^{n+1}(M) = F(F^n(M))$	37
$FM^{\sim n}$	$FM^{\sim 0} = F$; $FM^{\sim n+1} = FM^{\sim n}M$	37
$FV(M)$	множество свободных переменных термина M	36
$M[x := N]$	результат подстановки N вместо (свободных вхождений) x в M	42
$M[\vec{x} := \vec{N}]$	$= M[x_1 := N_1] \dots [x_n := N_n]$; если используются эти обозначения, то подразумевается, что $\vec{x}$ не встречаются среди $FV(\vec{N})$	42
$M(\vec{N})$	$= M[\vec{x} := \vec{N}]$	42
$C[M]$	результат помещения M в дыру контекста $C[]$	41
$\# M$	гёделевский номер термина M	151

$\ulcorner M \urcorner$	$= \ulcorner \# M \urcorner$	151
M^+	$= S^+ M$	143
M^-	$= S^- M$	143
если B , то X , иначе Y	$= BXY$	142
$\langle M_0, \dots, M_n \rangle$	$= \lambda x.xM_0 \dots M_n$	142
$[M, N]$	$= \langle M, N \rangle = \lambda x.xMN$	142
$[M_0, \dots, M_n]$	$= [M_0, [M_1, \dots, M_n]]$	142
$[M_n]_{n \in \mathbb{N}}$	$= A^0 0^1$, где $A^n 0^1 = [M_n, A^{n+1} 0^1]$	175
$[M_0, M_1, \dots]$	$= [M_n]_{n \in \mathbb{N}}$	176
μP	$= \ulcorner \mu m.P^{\ulcorner m \urcorner} \urcorner = T^1$, т. е. цифра, соответствующая наименьшему m , такому, что верно $P^{\ulcorner m \urcorner} = T$ (если такое m существует)	146
$\mu_I P$	то же для λI -исчисления	198
$\ M \ $	число символов в M	35
$M \tilde{\lambda} \vec{N} \tilde{\lambda}$	$= M[x_1, \dots, x_n := N_1 \dots N_n] N_{n+1} \dots N_{n+k}$	210
$\langle \pi \mid M_1, \dots, M_n \rangle$	$= \lambda z.x_1 \dots x_n.z(M_1 x_{\pi 1}) \dots (M_n x_{\pi n})$, где π — перестановка множества $\{1, \dots, n\}$	529
$\mathcal{F}_R(M)$	$= \{N \mid \exists M' (N \subseteq M \wedge M \twoheadrightarrow_R M')\}$ — R -семейство термина M , т. е. множество подтермов R -редуктов термина M	177
$M^{(k)}$	λ -терм, соответствующий $BT^k(M)$	228
$M^{[k]}$	$\lambda \perp$ -терм, соответствующий $BT^k(M)$	366
$\mathcal{A}(M)$	множество аппроксимативных нормальных форм термина M	366
$ M $	M без всяких пометок (для $M \in \Lambda \perp^N$)	354
$M[\perp := N]$	результат замены всех $\perp$ в терме M на N	366
$d(M)$		356
$n(M)$		348
$n_x(M), m_x(M)$		213
$\bigcup \mathcal{X}$	супремум (по отношению $\subseteq$) множества $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$	367
$\bigcap \mathcal{X}$	инфимум (по отношению $\subseteq$) множества $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$	377
$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow M_n$	предел возрастающей последовательности M_n	479
$\lambda^* x.P$		159
$\lambda_1 x.P$		163
$\lambda_2 x.P$		169
$()_\lambda, ()_{\lambda I}$	переводы $\mathcal{C}$ в Λ и $\mathcal{C}_I$ в Λ_I	163, 200
$()_{CL}, ()_{CL_I}$	переводы Λ в $\mathcal{C}$ и Λ_I в $\mathcal{C}_I$	163, 200
$Cpl(M, \mathcal{F})$	результат полного развертывания $\mathcal{F}$ в M	294

Отношения между термами

$M \equiv N$	синтаксическое тождество	34
$M \subset N$	M — подтерм терма N	37
$M \# N$	$\lambda + M = N$ противоречиво	45
$\infty_R(M)$	имеется бесконечная R -редукционная цепочка, начинающаяся термом M	68
$SN_R(M)$	все R -редукционные цепочки, начинающиеся термом M , обрываются (M сильно R -нормализуем)	68
$x \in_R M$	$\forall N [N =_R M \Rightarrow x \in FV(N)]$	87
$x \in_{\mathcal{F}} M$	$\forall N [N =_{\mathcal{F}} M \Rightarrow x \in FV(N)]$	89
$\vec{M} = \vec{N}$	если $M = M_1, \dots, M_n$ и $N = N_1, \dots, N_m$, то $n = m$ и $M_1 = N_1, \dots, M_n = N_n$	42
$M \sim_s N$	M и N эквивалентны по разрешимости, т. е. $\forall C[] [C[M]]$ разрешим $\Leftrightarrow \Leftrightarrow C[N]$ разрешим	388
$M \sim N$	либо оба терма M, N неразрешимы, либо $M = \lambda x_1 \dots x_n. x_i. M_1 \dots M_n$, $N = \lambda x_1 \dots x_n. x_i. N_1 \dots N_m$, $n - m = n' - m'$ и $x_i = x'_i$	242
$M \sim_a N$	$BT(M) \sim_a BT(N)$	249
$\sqcup$	включение SO-термов	209
$\sqcup \downarrow$	включение SO-последовательностей	209
$\bigcup$	супремум SO-термов	209
$\bigcup \downarrow$	супремум $\vec{SO}$ -последовательностей	209
$M \approx N$	$BT(M) = BT(N)$	234
$M \sqsubseteq N$	$BT(M) \subseteq BT(N)$	234
$M \overset{\eta}{\sqsubseteq} N$	$BT(M) \overset{\eta}{\subseteq} BT(N)$	249
$M \overset{\eta}{\sqsubseteq} \overset{\eta}{N}$	$BT(M) \overset{\eta}{\subseteq} \overset{\eta}{BT(N)}$	249
$M \leq_{\eta} N$	$BT(M) \leq_{\eta} BT(N)$	249
$M \approx_{\eta} N$	$BT(M) =_{\eta} BT(N)$	249
$M \sqcap N \approx L$	$BT(M) \cap BT(N) = BT(L)$	376
$M \uparrow N$	$\exists L [M \sqsubseteq L \wedge N \sqsubseteq L]$	376
$M \geq_{\infty} N$	$\forall * [\infty(N^*) \Rightarrow \infty(M^*)]$	346

Редукции

Понятия редукции

$\text{Ha } \Lambda$		
β	$(\lambda x.M) N \rightarrow M[x := N]$	62
η	$\lambda x.Mx \rightarrow M$, если $x \notin FV(M)$	75

$\beta\eta$	$\beta \cup \eta$	75
Ω	$M \rightarrow \Omega$, если M неразрешим и $M \neq \Omega$	388
$\text{Ha } \Lambda'$		
β_0	$(\lambda_i x.M) N \rightarrow M[x := N]$	282
β_1	$(\lambda x.M) N \rightarrow M[x := N]$	282
β'	$\beta_0 \cup \beta_1$	282
$\text{Ha } \Lambda \perp$		
$\perp_1$	$\perp M \rightarrow \perp$	365
$\perp_2$	$\lambda x. \perp \rightarrow \perp$	365
$\perp$	$\perp_1 \cup \perp_2$	365
$\beta \perp$	$\beta \cup \perp$	365
$\text{Ha } \Lambda \perp^N$		
β_+	$(\lambda x.M)^{n+1} N \rightarrow (M[x := N^n])^n$	355
$\beta_{\perp}$	$(\lambda x.M)^0 N \rightarrow (M[x := \perp])^0$	355
$\perp$	$\begin{cases} \perp M \rightarrow \perp \\ \lambda x. \perp \rightarrow \perp \\ \perp^n \rightarrow \perp \end{cases}$	355
$label$	$(M^n)^m \rightarrow M^{\min(n, m)}$	349
$lab.\beta$	$\beta_+ \cup \beta_{\perp} \cup \perp \cup label$	350
$+$	$\beta_{\perp} \cup \perp \cup label$	350
$\text{Ha } \mathcal{C}$		
w	$\begin{cases} KPQ \rightarrow P \\ SPQR \rightarrow PR(QR) \end{cases}$	151
s	сильная редукция	151
$\text{Ha } \mathcal{C}_1$		
w_1	$\begin{cases} IP \rightarrow P \\ BPQR \rightarrow P(QR) \\ CPQR \rightarrow PRQ \\ SPQR \rightarrow PR(QR) \end{cases}$	189
$\text{Ha } \Lambda \vec{\delta}$		
δ_C	$\begin{cases} \delta MN \rightarrow T, \text{ если } M \text{ и } N \text{ — совпадающие замкнутые } \beta\delta_C\text{-нормальные формы,} \\ \delta MN \rightarrow F, \text{ если } M \text{ и } N \text{ — различные замкнутые } \beta\delta_C\text{-нормальные формы} \end{cases}$	396
δ_H	$\delta MM \rightarrow M$	399
δ_S	$\delta MM \rightarrow \epsilon$	399
SP	$\begin{cases} \delta_i(\delta M_1 M_2) \rightarrow M_i \ (i = 1, 2) \\ \delta(\delta_1 M)(\delta_2 M) \rightarrow M \end{cases}$	399

На'редукционных цепочках

K (K-н. ф. — это стандартные редукции) 361

Понятия, производные от понятия редукции R

$\rightarrow_R$	одношаговая R -редукция	62
$\twoheadrightarrow_R$	многошаговая R -редукция	62
$\equiv_R$	R -конвертируемость	62
$M \xrightarrow{\Delta}_R N$	N получается из M путем сворачивания R -редекса Δ	66
$\xRightarrow{\emptyset}_R$	одношаговая или пустая R -редукция	305
$\xRightarrow{=}R$	пустая R -редукция	305
$\xRightarrow{\neq \emptyset}_R$	непустая R -редукция	66
$\xRightarrow{=}R$	R - $\equiv$ — редукция (экстенционально — то же самое, что $\twoheadrightarrow_R$)	305
R -н.ф.	R -нормальная форма	64
$M \in_R \mathcal{R}$	$\exists M' (M' \equiv_R M \wedge M' \in \mathcal{R})$	69
$\mathcal{F}_R(M)$	R -семейство терма M , т. е. $\{N \mid \exists M' (M \twoheadrightarrow_R M' \wedge N \subset M')\}$	177
$\infty_R(M)$	имеется бесконечная R -редукция, начинающаяся термом M	68
$SN_R(M)$	M сильно R -нормализуем, т. е. все R -редукции, начинающиеся с M , обрываются	68
$R \in SN$	R сильно нормализуемо, т. е. $\forall M SN_R(M)$	68
$R \in CR$	R обладает свойством Черча — Россера	65

Редукционные цепочки

$\sigma + \rho$ $\sigma + \rho: M \rightarrow \dots \rightarrow M_n \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\rho} M_k$ 67

σ/ρ проекция σ на ρ (для σ, ρ с общим началом) 305

$lmc(\sigma)$ самый левый редекс, сворачиваемый в σ 319

$|\sigma|$ σ без меток и индексов 286, 360

Специальные редукции

$\xrightarrow{l}$	левая редукция	329
$\xrightarrow{h}$	головная редукция	180
$\xrightarrow{i}$	внутренняя редукция	299

$\xrightarrow{s}$	стандартная редукция	298
$\xrightarrow{dev}$	развертка	288
$\sigma: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{cpl} N$	σ — полная развертка $(M, \mathcal{F})$	288
$M \xrightarrow{i} N$	для некоторого множества $\mathcal{F}$ редексов из M и некоторой цепочки σ имеем $\sigma: (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{cpl} N$	294
$M \xrightarrow{не \mathcal{F}} N$	имеется редукция $\sigma: M \twoheadrightarrow N$, которая не сворачивает ни элементы множества $\mathcal{F} \subseteq M$, ни их остатки	370
<i>Редукционные стратегии</i>		
F_l	левая стратегия	328
F_{gk}	стратегия Гросса — Кнута	331
$L_F(M)$	длина F -цепочки	328
$B_F(M)$	максимальная ширина F -цепочки, начинающейся термом M , т. е. $\max\{\ N\ \mid N \text{ находится в } F\text{-цепочке терма } M\}$	328
$F \leq_L G$	$\forall M (L_F(M) \leq L_G(M))$	328
$F \leq_B G$	$\forall M (B_F(M) \leq B_G(M))$	328
<i>Другие понятия, связанные с редукциями</i>		
$\diamond$	свойство ромба для бинарных отношений	65
$\mathcal{F} \subseteq M$	$\mathcal{F}$ — множество редексов, содержащихся в M	286
$(M, \mathcal{F})$	для множества $\mathcal{F} \subseteq M$, — это λ' -терм, получающийся из M путем приписывания индекса 0 всем редексам из $\mathcal{F}$	286
FD	конечность разверток, т. е. $(\forall M \in \Lambda') SN_{\beta_0}(M)$	292
FD!	FD и все максимальные развертки оканчиваются одним и тем же термом	293
$cpl(M, \mathcal{F})$	результат полной развертки множества $\mathcal{F} \subseteq M$	293
<i>Деревья</i>		
$T(P)$	дерево терма $P \in SO$	205
$T(\vec{P})$	дерево последовательности $\vec{P} \in \vec{SO}$	205
$BT(M)$	бёмовское дерево терма M	221
$BT^e(M)$	эффективное бёмовское дерево терма M	225
$BT^k(M)$	усеченное бёмовское дерево (глубины k)	228

$\mathfrak{B}$	множество деревьев бёмовского типа	226
$\Lambda \mathfrak{B}$	множество бёмовских деревьев	226
$ A $	лежащее в основе обнаженное дерево	224
$FV(A)$	свободные переменные дерева A	229
$\infty \eta(A)$	бесконечная η -нормальная форма дерева A	241
$A \alpha$	метка в (виртуальном) узле α дерева A	242
$A =_k B$	A и B равны до глубины k	228
$A \subseteq B$	включение деревьев бёмовского типа	233
$A \geq_{\eta} B$	бесконечная η -редукция деревьев бёмовского типа	238
$A \eta \subseteq B$	$(\exists A' \geq_{\eta} A) (A' \subset B)$	244
$A \eta \subseteq^{\eta} B$	$(\exists A' \geq_{\eta} A) (\exists B' \geq_{\eta} B) (A' \subseteq B')$	244
$A \supset_{\alpha} B$	A превосходит B в узле α	246
$A \sim_{\alpha} B$	A, B эквивалентны в узле α	243
A_{α}	поддерево, исходящее из узла α	227
$\alpha(A)$	глубина дерева A	226
$A.B$	аппликация	480
$\lambda x.A$	абстракция	480
$A(x := B)$	подстановка	480
$\lim \uparrow A_n$	предельный переход	479
$\overrightarrow{\mathcal{H}\mathcal{P}}$	$(\subseteq \mathfrak{B})$ наследственные перестановки	533
$\mathcal{F}\mathcal{H}\mathcal{P}$	$(\subseteq \mathfrak{B})$ наследственные конечные перестановки	533
$M(A)$	λ -терм, соответствующий конечному дереву $A \in \mathfrak{B}$, например	
	$M(\lambda x.x) = \lambda x.x\Omega x$	228
	$\swarrow \quad \searrow$ x	
$M[A]$	$\lambda \perp$ -терм в н. ф., соответствующий конечному дереву $A \in \mathfrak{B}$, напр.	
	$M[\lambda x.x] = \lambda x.x \perp x$	366
	$\swarrow \quad \searrow$ x	
Теории		
λ	λ -исчисление, аксиоматизирующее отношение $=_{\beta}$	35
$\mathcal{H}$	аксиоматизируемая путем приравнивания всех неразрешимых термов	89, 410
$\mathcal{H}^*$	аксиоматизируемая множеством $\{M = N M \sim_s N\}$	415
$\mathfrak{B}$	аксиоматизируемая множеством $\{M = N BT(M) = BT(N)\}$	424
$\mathcal{F}^+$	аксиоматизируемая множеством равенств $\mathcal{F}$	88
$\mathcal{F}\eta$	теория $\mathcal{F}$, расширенная отношением $=_{\eta}$	89

$\mathcal{F}R$	теория $\mathcal{F}$, расширенная правилом R	92
CL	комбинаторная логика	158
CL_I	I -вариант CL	199
CL_K	$= CL$	199
A_{β}	$CL + A_{\beta}$ эквивалентна λ	164, 167
$A_{\beta\eta}$	$CL + A_{\beta\eta}$ эквивалентна $\lambda\eta$	167
λI	λI -исчисление	193
λK	$= \lambda$	193
λ^{τ}	типовое λ -исчисление	549
CL^{τ}	типовая комбинаторная логика	549
$\mathcal{T}$	гёделевская теория примитивно рекурсивных функционалов	555
$\Lambda \mathcal{T}$	множество термов теории $\mathcal{T}$	555
$\mathcal{T}B$	$\mathcal{T} +$ бар-рекурсия	558
Правила		
ext	экстенциональность, т. е.	
	$Mx = Nx, x \notin FV(MN) \Rightarrow M = N$	43, 91
ξ	$M = N \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N$	35, 91
ω	$MZ = NZ$ для всех $Z \in \Lambda^0 \rightarrow M = N$	91
tr	$MZ = NZ$ для всех $Z \in \Lambda^0 \Rightarrow Mx = Nx$	91
Модели		
$\mathfrak{M}(\mathcal{T})$	модель из открытых термов для λ -теории $\mathcal{T}$	93
$\mathfrak{M}^0(\mathcal{T})$	модель из замкнутых термов для λ -теории $\mathcal{T}$	93
$\mathfrak{I}(\mathfrak{M})$	термы над $\mathfrak{M}$	101
$\Delta(\mathfrak{M})$	$= \Lambda(\{c_a a \in \mathfrak{M}\})$	105
$*$	$*: \Lambda(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathfrak{I}(\mathfrak{M})$	105
$\llbracket \cdot \rrbracket_{\rho}^{\mathfrak{M}}$	интерпретация элементов множества $\Lambda(\mathfrak{M}), \mathfrak{I}(\mathfrak{M})$	101, 106
$\rho(x := a), \rho(\vec{x} := \vec{a})$	модифицированная оценка	102
$\mathfrak{M}, \rho \models M = N$	истинность в $\mathfrak{M}$	104
$\mathfrak{M} \models M = N$		
$P\omega$	графиковая модель	465
(n, m)	кодирование пар $\in \mathbb{N}^2$	465
e_n	кодирование конечных множеств $\subseteq \mathbb{N}$	465
$\lambda^{\square}$		467
λ^{-}		470
D_{∞}	λ -модель, построенная из п. ч. у. м.	473
$\Phi_{n, m}, \Phi_{n, \infty}, \Phi_{\infty, m}$		474
$Ra^{\mathfrak{M}}(\varphi)$	область значений φ	509
$Ra^{\mathfrak{M}}(F)$	область значений терма $F(= \Lambda)$, рассматриваемого как функция на $\mathfrak{M}$	525

Оглавление

$S(\mathfrak{M})$	полугруппа λ -алгебры $\mathfrak{M}$, в которой $1=1$	525
$G(\mathfrak{M})$	группа такой λ -алгебры	
$S(\mathcal{T})$	$= S(\mathfrak{M}(\mathcal{T}))$	525
$G(\mathcal{T})$	$= G(\mathfrak{M}(\mathcal{T}))$	525
HRO	модель теории λ^r	553
NEO	экстенциональная модель теории λ^r	553
$\mathfrak{M}^E$	экстенциональный коллапс модели λ^r	552
$[D \rightarrow D']$	$= \{f: D \rightarrow D' \mid f \text{ непрерывна}\}$ для п. ч. у. м. D, D'	24
$\lim (D_i, f_i)$	проективный предел п. ч. у. м.	27
Прочие символы		
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел	11
$\mu x \dots$	наименьшее $x \in \mathbb{N}$, такое, что ...	11
$P(\mathbb{N}), P\omega$	два обозначения множества всех подмножеств $\mathbb{N}$	11
$\lambda x \dots$	лямбда-абстракция в метаязыке	11
$X \hookrightarrow Y$	множество частичных отображений X в Y	30
Логика		
$\neg$	не	11
$\wedge$	и	11
$\vee$	или	11
$\Rightarrow$	влечет	11
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда (т. и т. т.)	11
$\forall$	для всех	11
$\exists$	существует	11
$\exists!$	существует ровно один	11
<i>Коды конечных последовательностей</i>		
$\langle \rangle$	код пустой последовательности	11
$\langle n_1, \dots, n_k \rangle$	код последовательности $n_1, \dots, n_k$	11
Seq	множество кодов конечных последовательностей, т. е. $\{\langle n_1, \dots, n_k \rangle \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$	11
$lh(\alpha)$	длина последовательности, кодируемой числом α	11
*	соединение последовательностей (конкатенация)	11
$\alpha \leq \beta$	α — начальный отрезок последовательности β	11
$\alpha < \beta$	$\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$	11

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие автора к русскому изданию	8
Предисловие	9
Указания читателю	11
Часть I. На пути к теории	13
Глава 1. Введение	14
1.1. Аспекты лямбда-исчисления	14
1.2. Полные частично упорядоченные множества и топология Скотта	21
1.3. Упражнения	31
Глава 2. Конверсия	34
2.1. Лямбда-термы и конверсия	34
2.2. Некоторые варианты теории λ	46
2.3. Обзор части II	54
2.4. Упражнения	59
Глава 3. Редукция	61
3.1. Понятие редукции	61
3.2. Бета-редукция	70
3.3. η -редукция	75
3.4. Обзор части III	79
3.5. Упражнения	85
Глава 4. Теории	88
4.1. Лямбда-теории	88
4.2. Обзор части IV	95
4.3. Упражнения	97
Глава 5. Модели	99
5.1. Комбинаторные алгебры	101
5.2. Лямбда-алгебры и лямбда-модели	105
5.3. Синтаксические модели	113
5.4. Модели в конкретных декартово замкнутых категориях	116
5.5. Модели в произвольных декартово замкнутых категориях	119
5.6. Другие описания моделей. Категоричные модели	127
5.7. Обзор части V	133
5.8. Упражнения	138

Часть II. Конверсия	139
Глава 6. Классическое лямбда-исчисление	140
6.1. Комбинаторы неподвижной точки	140
6.2. Стандартные комбинаторы	141
6.3. Лямбда-определимость	143
6.4. Цифровые системы	147
6.5. Еще о неподвижных точках; гёделевские номера	149
6.6. Результаты о неразрешимости	151
6.7. Отступление: рефлексивные предложения и теорема о рекурсии	153
6.8. Упражнения	155
Глава 7. Теория комбинаторов	158
7.1. Комбинаторная логика	158
7.2. Редукция для CL	161
7.3. Соотношение между CL и λ	163
7.4. Упражнения	163
Глава 8. Классическое лямбда-исчисление (продолжение)	172
8.1. Базисы и перечисления	172
8.2. Равномерность; бесконечные последовательности	175
8.3. Разрешимость; головные нормальные формы	178
8.4. Лямбда-определимость частичных функций	185
8.5. Упражнения	190
Глава 9. λI -исчисление	192
9.1. Общие соображения	192
9.2. Определимость	194
9.3. Комбинаторы	199
9.4. Разрешимость	207
9.5. Упражнения	217
Глава 10. Деревья Бёма	220
10.1. Основные факты	220
10.2. Сравнение деревьев Бёма. Топология деревьев на Λ	233
10.3. Техника выворачивания по Бёму	249
10.4. Отделимость термов	258
10.5. Отделимость в λI -исчислении	264
10.6. Упражнения	274
Часть III. Редукция	277
Глава 11. Фундаментальные теоремы	279
11.1. Теорема Чёрча — Россера	279
11.2. Конечность разверток	285
11.3. Теорема о консервативности для λI	295
11.4. Стандартизация	298
11.5. Упражнения	303
Глава 12. Сильно эквивалентные редукции	304
12.1. Редукционные диаграммы	304
12.2. Сильные варианты теорем CR и FDI	313
12.3. Сильный вариант теоремы стандартизации	319
12.4. Упражнения	324

Глава 13. Редукционные стратегии	326
13.1. Классификация стратегий	326
13.2. Эффективные нормализующие и кофинальные стратегии	328
13.3. Рекурсивная CR-стратегия	334
13.4. Эффективная зацикливающая стратегия	340
13.5. Оптимальные стратегии	346
13.6. Упражнения	351
Глава 14. Помеченная редукция	353
14.1. Сильная нормализация	353
14.2. Приложения	359
14.3. Непрерывность	365
14.4. Последовательность вычислений и устойчивость	374
14.5. Упражнения	382
Глава 15. Другие понятия редукции	384
15.1. $\beta\eta$ -редукция	384
15.2. $\beta\eta\Omega$ -редукция	388
15.3. Дельта-редукция	399
15.4. Упражнения	406
Часть IV. Теории	409
Глава 16. Осмысленные теории	410
16.1. Теория $\mathcal{H}$	410
16.2. Теория $\mathcal{H}^*$	415
16.3. $2^{\aleph_0}$ осмысленных теорий	420
16.4. Теория $\mathcal{H}$	424
16.5. Упражнения	428
Глава 17. Другие лямбда-теории	429
17.1. Полуосмысленные и р.п. теории	429
17.2. Омега-теории	436
17.3. Частичная корректность ω -правила в $\lambda\eta$	443
17.4. ω -правило и теория $\mathcal{H}\eta$	454
17.5. Упражнения	461
Часть V. Модели	463
Глава 18. Построение моделей	464
18.1. Графическая модель $P\omega$	464
18.2. Модель D_{∞}	471
18.3. Модель $\mathfrak{F}$	479
18.4. Упражнения	484
Глава 19. Локальная структура моделей	490
19.1. Локальная структура модели $P\omega$	490
19.2. Локальная структура модели D_{∞}	498
19.3. Непрерывные λ -модели	501
19.4. Упражнения	504
Глава 20. Глобальная структура моделей	506
20.1. Экстенциональность, категоричность	506
20.2. Свойство области	509

20.3. Результаты о неопределимости	511
20.4. Локальная и глобальная представимость	513
20.5. Топология деревьев на моделях	517
20.6. Упражнения	522
Глава 21. Комбинаторные группы	525
21.1. Комбинаторные полугруппы	525
21.2. Характеризация обратимости	528
21.3. Группы $G(\lambda\eta)$ и $G(\mathcal{H}^*)$	539
21.4. Упражнения	545
Приложения	547
Приложение А. Типовое ламбда-исчисление	548
А.1. Чистое типовое ламбда-исчисление	548
А.2. Прimitивно рекурсивные функционалы	555
А.3. Формулы-типы	559
Приложение В. Иллативная комбинаторная логика	561
Приложение С. Переменные	565
Заключительные упражнения	570
Добавления	571
Литература	574
Предметный указатель	587
Указатель обозначений	592

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Хендрик Питер Барендрегт
ЛАМБДА-ИСЧИСЛЕНИЕ
Его синтаксис и семантика

Научн. ред. Г. М. Цукерман
Мл. научн. ред. Л. А. Королева
Художник Л. Муратова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Е. С. Потапенкова
Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 3803

Сдано в набор 17.02.84. Подписано к печати 18.02.85. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 19,00 бум. л. Усл. печ. л. 38,00. Усл. кр.-отт. 38,00. Уч.-изд. л. 32,41. Изд. № 1/2764. Тираж 4800 экз. Зак. 223. Цена 3 р. 70 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.