МАТЕМАТИКА XIX ВЕКА

ГЕОМЕТРИЯ

●

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Под редакцией А. Н. КОЛМОГОРОВА и А. П. ЮШКЕВИЧА

УДК 51 (091)

Авторы книги:

доктор физ.-мат. наук Б. Л. ЛАПТЕВ
академик АПН СССР А. И. МАРКУШЕВИЧ
кандидат физ.-мат. наук Ф. А. МЕДВЕДЕВ
доктор физ.-мат. наук Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКЦИИ

Общие принципы, которыми руководствуются редакция и авторы настоящего издания, были изложены в предисловии к первой книге «Математики XIX века», содержавшей главы по истории математической логики, алгебры, теории чисел и теории вероятностей (М.: Наука, 1978). Обстоятельства, от редакции не зависящие, потребовали некоторых изменений в последовательности изложения истории отдельных дисциплин. Вторая книга содержит две главы: историю геометрии и историю теории аналитических функций (включая эллиптические и абелевы функции); объем каждой главы естественно повлек их деление на разделы. История дифференциального и интегрального исчисления, а также вычислительной математики, которую предполагалось поместить во второй книге, войдет в состав третьей.

Напомним читателям, что каждая книга содержит в приложении список важнейшей литературы и именной указатель. Названия журналов даются сокращенно, с указанием тома и года издания; если год фактического выхода в свет отличается от формального года издания, то последний приводится в скобках. Оригинальное название иностранных сочинений в тексте приводится только один раз, при первом упоминании. Оригинальная транскрипция фамилий иностранных ученых дана в именном указателе. «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия», изданная в 1970—1972 гг., цитируется сокращенно ИМ (с указанием тома и страницы), а первая книга настоящего труда — Кн. 1 (с указанием страницы).

Первая глава данной книги была прочитана проф. П. К. Рашевским, вторая — проф. Е. Д. Соломенцевым; книга же в целом — проф. А. Д. Соловьевым, которым авторы и редакция выражают благодарность за полезные советы и уточнения. Мы выражаем также благодарность проф. Татону (Франция), д-ру Э. Фельману (Швейцария) и К. Якобсу (ФРГ), любезно приславшим нам ряд портретов.

Одновременно с первой книгой «Математики XIX века» под редакцией Ж. Дьёдонне, члена Института Франции, вышла «Краткая история математики. 1700—1900» (Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700—1900. Paris: Hermann, 1978. Т. 1, 2). С основным содержанием этого труда советские читатели могут познакомиться по статье «Опыт истории математики нового времени» в «Вопросах истории естествознания и техники», 1980, вып. 3.

Редакция с глубоким прискорбием сообщает, что когда рукопись этой книги была закончена, скончался один из ее авторов, входивший и в состав редакции первых двух книг, академик АПН СССР Алексей Иванович Маркушевич (2.4.1908— 4.6.1979). Памяти этого выдающегося ученого и деятеля народного образования посвящены статьи и некрологи во многих советских журналах.

Следует заметить, что некоторые важные выводы своего исследования, а именно относящиеся к связям между докторской диссертацией Б. Римана и непосредственно предшествовавшими им по времени работами О. Коши и В. Пюизё, А. И. Маркушевич высказал в докладе, представленном Международному конгрессу математиков в Хельсинки (1978) и в расширенном виде опубликованном в XXV выпуске «Историко-математических исследований» (1980). Эти выводы были затем полностью подтверждены цюрихским ученым Э. Нойеншвандером, изучавшим бумаги Римана, относящиеся ко времени подготовки его докторской диссертации и хранящиеся в архиве Гёттингенского университета.

Москва, 3 июня 1980 г.

А. Н. Колмогоров
А. П. Юшкевич

Глава первая

ГЕОМЕТРИЯ

•

ВВЕДЕНИЕ

Хотя главные достижения математики XVIII в. были связаны с развитием математического анализа, в течение этого столетия были сделаны важные открытия и в геометрии. С развитием анализа прежде всего было связано развитие аналитической геометрии. Аналитическая геометрия на плоскости, появившаяся в работах Декарта и Ферма, получила в конце XVII и в первой половине XVIII в. значительное развитие в работах Ньютона, Германа, Стирлинга, Мопертюи, Крамера и приобрела вид, уже близкий к современному, во II томе «Введения в анализ бесконечных» Леонарда Эйлера (1748). В книге Клеро о кривых двоякой кривизны (1731) и в приложении ко II тому эйлеровского «Введения в анализ» была основана аналитическая геометрия в пространстве, получившая дальнейшее развитие в работах Монжа (1794—1805). В связи с развитием понятия функции геометры все шире пользуются геометрическими преобразованиями — Клеро и Эйлер основывают учение об аффинных преобразованиях, Даламбер и Эйлер — учение о конформных преобразованиях, Варинг и Монж рассматривают с разных точек зрения проективные преобразования. И. Бернулли, Клеро и Эйлер решили ряд задач дифференциальной геометрии пространственных кривых линий и, в частности, теории геодезических линий на поверхности, в «Исследованиях о кривизне поверхностей» (1767) Эйлера была основана дифференциальная геометрия поверхностей, получившая дальнейшее развитие в работах Монжа. Лакайль, Ламберт и особенно Монж значительно продвинули начертательную геометрию. В работах Эйлера о кёнигсбергских мостах и о многогранниках были решены первые задачи топологии. Существенное развитие получила, в частности в работах Эйлера и его учеников, сферическая геометрия и тригонометрия. Наконец, Саккери, Ламберт, Бертран, Лежандр и Гурьев продвинули и теорию параллельных линий, которая непосредственно подвела геометров к открытию неевклидовой геометрии. Кант и Даламбер поставили вопрос и о геометрии многомерных пространств, в первую очередь четырехмерного пространства.

Как и в других областях математики, в развитии геометрии в XIX в. можно проследить взаимодействие двух важнейших стимулов развития математики — необходимости разработки новых методов для решения задач, которые ставит перед математиками практика, и внутренней логики развития математики. Так, одним из важных стимулов развития дифференциальной геометрии было решение практических геодезических задач — прежде всего тех задач, с которыми столкнулся Гаусс при геодезической съемке Ганноверского королевства. Дальнейшие стимулы для развития этой теории дала геометрическая оптика. Возрождение проективной геометрии в начале XIX в. в значительной степени обязано «Начертательной геометрии» (1799) Монжа, решавшей задачи, необходимые для фортификации, а также для бурно развивающегося машиностроения. Векторное исчисление имело одним из своих истоков необходимость создания математического аппарата статики, кинематики и динамики; эти же механические дисциплины потребовали создания и винтового исчисления. Создания новых разделов геометрии требовало и развитие других математических дисциплин: появление кратных интегралов и алгебры форм, зависящих от многих переменных, сделало необходимым появление многомерной геометрии; теория многолистных поверхностей Римана потребовала разработки топологии; теория фуксовых групп дробно-линейных преобразований комплексного переменного привела к интерпретации Пуанкаре геометрии Лобачевского. Исключительную роль в создании теории групп преобразований сыграли успехи теории групп и ее применения к проблеме решения алгебраических уравнений в радикалах. Задача выяснения условий разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах послужила стимулом создания весьма важной для геометрии теории групп Ли. С другой стороны, изучение взаимной зависимости аксиом геометрии, и в частности постулата о параллельных Евклида, привело к открытию геометрии Лобачевского, после чего аналогичные задачи привели к открытию эллиптической и других геометрий. Задача обоснования проективной геометрии без помощи метрической привела к важнейшим открытиям. К новым замечательным геометрическим открытиям привело и решение задач дифференциальной и неевклидовой геометрии. В то же время создание новых геометрических систем с самого начала поставило задачи их приложения и в некоторых случаях экспериментальной проверки новых теорий — таковы были попытки Лобачевского экспериментально определить, какая геометрия имеет место в реальном мире, а также применение Риманом определенной им многомерной геометрии искривленных пространств к решению задачи, связанной с уравнением теплопроводности. В конечном счете выражением той же тенденции, хотя и в фантастической форме, были попытки Цёльнера экспериментально изучить «четвертое измерение» с помощью «естествознания в мире духов». Однако хотя геометрия XIX в. и продолжала многие тенденции XVIII в., развитие этой науки в XIX в. привело к существенным качественным отличиям новой геометрии от старой. Наиболее важным достижением новой геометрии было создание целого ряда неевклидовых и многомерных геометрий, основанных на различных группах преобразований. В результате к концу XIX в. геометрия, бывшая в начале века геометрией трехмерного евклидова пространства, превратилась в разветвленную систему геометрических дисциплин, пригодных для применения геометрических методов к многим областям математики и естествознания.

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИИ

Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия, появившаяся в XVII в. в работах Декарта и Ферма и получившая значительное развитие в XVIII в. в работах Эйлера, Монжа, Лагранжа и др., приобрела тот вид, который она имеет и в настоящее время, в «Приложениях алгебры к геометрии» Г. Монжа, о которых мы уже упоминали (см. ИМ, т. 3, с. 181). Там же (с. 182) мы указали на значение в развитии аналитической геометрии неоднократно переиздававшегося на протяжении всего XIX в. «Элементарного трактата о прямолинейной и сферической тригонометрии и о приложениях алгебры к геометрии» С. Ф. Лакруа (1765—1843) и на появление термина «аналитическая геометрия» в начале XIX в. Заметим, что, кроме «Очерка аналитической геометрии, приложенного к кривым и поверхностям второго порядка» Ж. Б. Био (1805; см. ИМ, т. 3, с. 183), этот термин фигурировал и в заголовке «Начал аналитической геометрии» (Éleménts de géométrie analytique. Paris, 1801) Ж. Гарнье (1766—1840).

В отличие от руководств Эйлера и Монжа книга Лакруа содержала основные задачи на прямую линию в форме, близкой к современной, эти задачи решались также Био и другими авторами французских учебников аналитической геометрии и в «Сборнике геометрических задач» (Sammlung geometrischer Aufgaben. Berlin, 1807) Мейера Гирша (1765—1851). Многие задачи аналитической геометрии, вошедшие в современные учебники, были впервые решены Габриэлем Ламе (1795—1870) в «Исследовании различных методов решения геометрических задач» (Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris, 1818). Здесь мы находим уравнение плоскости «в отрезках», т. е. в форме $x/a + y/b + z/c = 1$; аналогичное уравнение прямой мы находим впервые только в «Сборнике математических статей и заметок» (Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen. Berlin, 1821, Bd. 1) Августа Леопольда Крелле (1780—1855), немецкого математика, члена Берлинской академии наук с 1827 г., основавшего в 1826 г. много раз упоминавшийся нами «Journal für die reine und angewandte Mathematik», часто именовавшийся «Журнал Крелле». В книге Ламе было дано общее условие пересечения трех прямых в одной точке, в этой книге был впервые изложен весьма популярный у геометров XIX в. метод сокращенных обозначений, состоящий в том, что левые части уравнений прямых или кривых высшего порядка обозначаются буквами F_1 и F_2, уравнения произвольной прямой или кривой пучка, определяемого линиями $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$, записываются в виде $F_1 + \mu F_2 = 0$ и геометрические теоремы доказываются путем выявления геометрического смысла полученных таким образом аналитических соотношений. Этот метод впоследствии был распространен и на пучки плоскостей и поверхностей высшего порядка, а также на их связки $F_1 + \lambda F_2 + \mu F_3 = 0$ и т. д. Метод утратил свою популярность только после внедрения в аналитическую геометрию векторных методов в первой половине XX в.

Нормальное уравнение прямой $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ впервые появилось в «Началах геометрического анализа и алгебраического анализа» (Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique. Parise, 1809) Симона Люилье (1750—1840), а аналогичное нормальное уравненив плоскости и параметрическое уравнение прямой в пространстве — » «Лекциях о приложениях исчисления бесконечно малых к геометрии, (Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. Paris, 1826. T. 1) Огюстена Коши.

Вслед за французскими учебниками аналитической геометрии появляются на немецком языке «Аналитическая геометрия» (Analytische Geometrie. Wien, 1823) Йозефа фон Литтрова (1781—1840), уроженца Чехии, учившегося в Вене и Праге, работавшего в Кракове, Казани (с 1809 по 1816 г.), Будапеште и Вене, и «Начала аналитической геометрии» (Elemente der analytischen Geometrie. Leipzig, 1839, Bd. 1—2) Й. А. Грунерта (1797—1872), издателя математического журнала «Grunerts Archiv». В это же время появился русский «Курс аналитической геометрии» (Москва, 1836) Николая Дмитриевича Брашмана (1796—1866), также уроженца Чехии, учившегося в Вене, работавшего с 1823 по 1825 г. в петербургской Петропавловской школе, с 1825 по 1834 г. — в Казанском университете, а с 1834 г.— в Московском университете. Весьма популярны и переведены на многие европейские языки (в том числе на русский) были английские

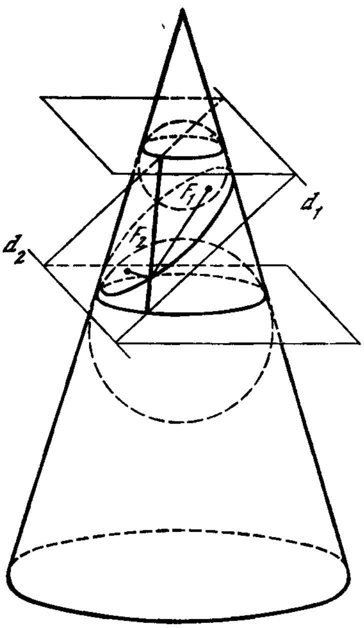


Рис. 1

руководства по аналитической геометрии ирландского математика и теолога Джорджа Сальмона (1819—1904) «Конические сечения» (Conic sections. Dublin, 1848, в русском переводе «Курс аналитической геометрии двух измерений». СПб., 1908) и «Аналитическая геометрия трех измерений» (Analytic geometry of three dimensions. Dublin, 1862; рус. пер. М., 1900).

Из отдельных частных моментов аналитической геометрии отметим результаты бельгийского математика и инженера Жерминаля Пьера Данделена (1794—1887), автора известного способа приближенного вычисления корней алгебраических уравнений (1826), позже независимо открытого Н. И. Лобачевским (1832) и подробно развитого швейцарским математиком К. Г. Греффе (1837). В работе «О некоторых замечательных свойствах параболической фокали» (Sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique.— Nouv. Mém. Acad. Bruxelles, 1882) Данделен доказал, что фокусы конического сечения могут быть определены как точки касания плоскости сечения со сферами (в случае параболы — с одной сферой), вписанными в конус и касающимися плоскости, а директрисы конического сечения являются линиями пересечения той же плоскости с плоскостями окружностей, по которым сферы касаются конуса (рис. 1). Эти факты позволяют особенно просто вывести фокальные и директориальные свойства конических сечений и различные уравнения этих кривых исходя из их геометрического определения.

В отличие от аналитической геометрии XVIII в. учение об алгебраических кривых и поверхностях высших порядков в XIX в. перестали относить к этому разделу геометрии, оно вошло в так называемую алгебраическую геометрию. После появления проективной геометрии, первоначально определенной на синтетическом пути, аналитические методы были распространены на проективную плоскость и пространство, в которых стали решать и задачи алгебраической геометрии. С другой стороны, в ходе разработки неевклидовой геометрии была создана и аналитическая геометрия неевклидовых пространств. Аналитические же методы лежали в основе изучения и многомерных пространств. Эти разновидности аналитической геометрии мы рассмотрим ниже, в разделах о проективной, неевклидовой и многомерной геометриях, сейчас же перейдем к непосредственному продолжению изучения истории аналитической геометрии трехмерного евклидова пространства — дифференциальной геометрии этого пространства.

Дифференциальная геометрия учеников Монжа

После Клеро и Эйлера центральное место в развитии дифференциальной геометрии в конце XVIII в. занимал Монж (см. ИМ, т. 3, с. 184—186, 191—195). Его труды, особенно его преподавательская деятельность

Ш. ДЮПЕН

в Военной академии в Мезьере (1768—1780) и в Политехнической школе (1795—1809) привлекли к нему большое число учеников и последователей, так что именно во Франции в эти годы и в первые десятилетия XIX в. особенно успешно развиваются геометрические исследования. Они проводятся как в области дифференциальной, так и в области проективной геометрии, начала которой были положены учеником Монжа Понселе.

Для дифференциально-геометрической школы Монжа характерной чертой является непосредственная геометричность мышления, как бы только подкрепляемая аналитическим аппаратом, т. е. координатным методом и результатами теории дифференциальных уравнений.

Из учеников Монжа по Мезьерской академии напомним имена Менье (см. ИМ, т. 3, с. 194—195) и Тенсо (см. ИМ, т. 3, с. 180—181, 192—193).

Среди учеников Монжа по Политехнической школе, развивавших его дифференциально-геометрические идеи, необходимо выделить Малюса, Ланкре, Родрига и Дюпена. Об исследованиях Малюса мы будем говорить ниже, в связи с теорией прямолинейных конгруэнций, одним из основоположников которой он был.

М. Ланкре (1774—1807) ввел в «Мемуаре о кривых двоякой кривизны» (Mémoire sur les courbes à double courbure.— Mém. présentés à l'Institut, 1806) как кривизну, так и кручение пространственной кривой, определив их как бесконечно малые углы поворота нормальной и соприкасающейся плоскостей и назвав их первым и вторым изгибанием (flexion). Впоследствии эти величины уже в конечной форме появляются у Коши в «Лекциях о приложениях исчисления бесконечно малых к геометрии»

(1826), а затем их роль окончательно выясняется в деривационных формулах Френе и Серре (1847).

Оленд Родриг (1794—1851), известный также как социалист-утопист, ученик А. К. Сен-Симона (1760—1825), в «Исследованиях по аналитической теории линий и радиусов кривизны поверхностей» (Recherches sur la théorie analytique de lignes et rayons de courbure des surfaces.— Bull. Soc. Philomatique, Paris, 1815) получил ряд результатов и формул, связанных с линиями кривизны, в частности так называемые «формулы Родрига». С помощью сферического отображения поверхности он, предваряя Гаусса, рассмотрел отношение соответствующих площадей и пришел к величине, названной впоследствии полной или гауссовой кривизной, и показал, что она равна произведению главных кривизн.

Яркий след в дифференциальной геометрии оставил Шарль Дюпен (1784—1873), публикация результатов которого надолго задерживалась, так как он был морским офицером и участвовал в длительных плаваниях. Его работы опубликованы в двух книгах: «Развитие геометрии» (Développement de géométrie. Paris, 1813) и «Приложения геометрии и механики» (Applications de géométrie et de mécanique. Paris, 1822). Еще в возрасте 16 лет он, рассматривая огибающую семейства шаров, касающихся трех данных шаров, пришел к понятию замечательной поверхности — циклиды (впоследствии названной его именем), оба семейства линий кривизны которой — окружности (опубл. в 1804 г.). Около 1807 г. он доказал прекрасную теорему, получившую его имя, о том, что поверхности триортогональной системы пересекаются по линиям кривизны. Это позволило трактовать линии кривизны эллипсоида, изучавшиеся Монжем, как пересечения эллипсоида с семействами софокусных с ним поверхностей второго порядка. Для изучения кривизн нормальных сечений поверхностей он ввел индикатрису, также носящую его имя, которая позволяет наглядно представить и проанализировать поведение кривизны нормального сечения поверхности при вращении секущей плоскости вокруг нормали. Отсюда вытекала классификация точек поверхности, не являющихся точками плоскостности, на три типа: эллиптический, гиперболический и параболический. Прояснился также геометрический смысл омбилических точек и асимптотических линий (последний термин введен Дюпеном). Он же впервые ввел понятие сопряженных линий (относительно асимптотической сети) и получил геометрическое доказательство теоремы Монжа, что поверхность, состоящая из омбилических точек, является сферой.

«Общие исследования о кривых поверхностях» Гаусса

Определяющее влияние на весь ход развития дифференциальной геометрии оказало появление замечательного труда Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях», опубликованного им по традиции науки XVII—XVIII вв. на латинском языке. Именно этот тщательно отделанный по форме и богатый новыми идеями труд придал рассмотренной в нем области геометрии близкий к современному облик и открыл широкий круг новых важных проблем, разработка которых стала предметом деятельности геометров в продолжение многих десятилетий.

Государственное поручение — провести точное измерение дуги меридиана Гёттинген — Альтона, а затем геодезическую съемку Ганноверского королевства заставило Гаусса обратиться к проблемам и практике геодезии. В 1820-х годах он создает принципы новой науки — высшей геодезии (опубл. в 1842, 1847 гг.), организует длившиеся более 15 лет полевые геодезические измерения, причем около пяти лет сам участвует в них и проводит вычислительные работы громадного объема. В ходе этих занятий он углубился в теорию поверхностей и открыл новую область исследований — внутреннюю геометрию поверхности.

В основу своих «Общих исследований о кривых поверхностях» (Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae, 1828) Гаусс положил параметрическое представление поверхности и соответствующее ему выражение линейного элемента. Он впервые четко сформулировал понятие внутренней геометрии поверхности и доказал, что мера кривизны (гауссова кривизна) является величиной, принадлежащей внутренней геометрии, т. е. не меняющейся при изгибаниях поверхности. Он разработал далее теорию геодезических линий, которые тоже принадлежат внутренней геометрии.

Из трех способов задания поверхности:

1) неявным уравнением

$$w(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

2) параметрическим представлением

$$x = x(p, q),\ y = y(p, q),\ z = z(p, q), \tag{2}$$

3) заданием z как функции x и y

$$z = z(x, y), \tag{3}$$

где третий способ является частным случаем как первого, так и второго, Гаусс пользуется преимущественно вторым, как наиболее соответствующим природе поверхности. До Гаусса параметрическое представление использовалось в отдельных случаях Эйлером (ИМ, т. 3, с. 190), но систематическое применение оно получило впервые у Гаусса.

Если одному из параметров, например q, придать фиксированное значение c, то уравнения (2) перейдут в параметрические уравнения линии (p-линия). Изменяя значение c, получаем семейство p-линий (т. е. линий $q = \text{const}$). Оба семейства вместе образуют криволинейную параметрическую сеть, которая служит координатной сетью в той области поверхности, где через каждую точку $M(p, q)$ проходит только по одной линии каждого семейства и линии различных семейств пересекаются не более чем в одной точке. Такая система координат (p, q) на поверхности получила название гауссовых криволинейных координат. Гаусс определил производные $a = dx/dp$, $b = dy/dp$, $c = dz/dp$, $a' = dx/dq$, $b' = dy/dq$, $c' = dz/dq$, в настоящее время рассматриваемые как частные производные координат радиус-вектора точки поверхности по p и q, а также функции $A = bc' - cb'$, $B = ca' - ac'$, $C = ab' - ba'$, в настоящее время рассматриваемые как координаты векторного произведения указанных векторов, являющегося вектором, направленным по нормали к поверхности, и вторые производные

$$\alpha = \frac{ddx}{dp^2},\quad \beta = \frac{ddx}{dp\,dq},\quad \gamma = \frac{ddx}{dq^2},\quad \alpha' = \frac{ddy}{dp^2},$$

$$\beta' = \frac{ddy}{dpdq},\quad \gamma' = \frac{ddy}{dq^2},\quad \alpha'' = \frac{ddz}{dp^2},\quad \beta'' = \frac{ddz}{dpdq},\quad \gamma'' = \frac{ddz}{dq^2}.$$

С помощью этих функций Гаусс построил две квадратичные формы

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2 \tag{4}$$

и

$$Ddp^2 + 2D'dpdq + D''dq^2, \tag{5}$$

где

$$E = aa + bb + cc,\ F = aa' + bb' + cc',\ G = a'a' + b'b' + c'c',$$
$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma,\ D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma',\ D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma''.$$

Первая из этих форм (теперь говорят «первая основная квадратичная дифференциальная форма поверхности») выражает квадрат линейного элемента ds^2 поверхности, т. е. квадрат расстояния ds между бесконечно близкими точками поверхности с координатами (p, q) и $(p + dp, q + dq)$. Эта форма играет основную роль в исследованиях Гаусса.

Вторая форма только множителем $AA + BB + CC = EG - FF$ отличается от второй основной квадратичной дифференциальной формы современной теории поверхностей.

Еще в 1816 г. Гаусс опирался на выражение линейного элемента при решении вопроса о конформном отображении двух поверхностей, т. е. отображении, сохраняющем подобие в бесконечно малом. Требование конформности сводится к пропорциональности линейных элементов этих поверхностей, т. е.

$$E/E' = F/F' = G/G'.$$

Эта проблема была им решена, и он представил решение на конкурс, объявленный Копенгагенским ученым обществом в 1822 г. Работа была отмечена премией и затем в 1825 г. опубликована.

Полезным нововведением Гаусса явилось и использование в геометрии сферического отображения, обычно применявшегося в астрономии. Каждой ориентированной прямой ставится в соответствие на единичной сфере точка, радиус-вектор которой параллелен этой прямой. Таким образом, область поверхности отображается с помощью нормалей в область на сфере. Опираясь на это отображение, Гаусс вводит понятие меры кривизны K (гауссова кривизна поверхности в данной точке) как отношение площадей соответствующих бесконечно малых областей на сфере и на поверхности. Иными словами, K является пределом отношения площадей соответствующих областей сферы и поверхности, когда область поверхности стягивается в точку.

Гаусс находит меру кривизны сначала для третьего случая (3) задания поверхности в виде

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}$$

и доказывает, что она равна произведению главных кривизн. Выше мы отметили, что определение меры кривизны и последний результат были найдены (хотя и мало использованы) Родригом еще в 1815 г., но Гауссу, по-видимому, это осталось неизвестным.

Далее Гаусс вычисляет выражение для K в случае общего параметрического задания поверхности (2) с помощью коэффициентов обеих форм (4) и (5) в виде

$$K = \frac{DD'' - D'D'}{EG - FF}.$$

Наконец, после весьма искусных вычислений Гаусс приходит к замечательному результату: найденное им общее выражение для K можно представить в виде

$$4(EG-FF)^2K=E\left(\frac{dE}{dq}\frac{dG}{dq}-2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq}+\left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)+$$
$$+F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq}-\frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp}-2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq}+4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq}-2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq}\right)+$$
$$+G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp}-2\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq}+\left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)-$$
$$-2(EG-FF)\left(\frac{ddE}{dq^2}-2\frac{ddF}{dp\,dq}+\frac{ddG}{dp^2}\right),$$

т. е. «мера кривизны» является функцией только коэффициентов первой формы и их производных. Эта формула, как указывает Гаусс, «приводит к *славной теореме* (theorema egregium): если кривая поверхность будет развернута на любую другую поверхность, то при этом мера кривизны в каждой ее точке остается неизменной»[1].

Впоследствии было выяснено, что эта теорема была доказана Гауссом еще в 1816 г., но в то время ему удавалось провести ее доказательство только в изометрических координатах, когда линейный элемент приводится к виду

$$ds^2=m^2(dp^2+dq^2).$$

Из своей «славной теоремы» Гаусс сделал следующий вывод: если одну поверхность удается развернуть (иначе говоря, наложить или изометрически отобразить) на другую, то в соответствующих точках мера кривизны у обеих поверхностей должна совпадать.

Ранее исследовался вопрос только о развертывании поверхности на плоскость. Он был решен Эйлером (см. ИМ, т. 3, с. 190), который нашел все такие «развертывающиеся» поверхности: цилиндры, конусы и поверхности, образованные касательными к пространственной кривой. Гаусс подчеркивает важность нового подхода к изучению свойств поверхностей, когда поверхность рассматривается как гибкое нерастяжимое тело, одно измерение которого считается исчезающе малым. Гибкая нерастяжимая тонкая пленка из металла дает представление о таком подходе к понятию поверхности и к задачам ее развертывания или изгибания.

Те свойства фигур, лежащих на поверхности, которые сохраняются при ее изгибаниях, образуют в своей совокупности так называемую внутреннюю геометрию поверхности. Изгибание — это изометрическое отображение, т. е. отображение, сохраняющее длины линий, и, следовательно, в соответствующих точках линейные элементы должны совпадать. Поэтому если соответствующим точкам отнести равные криволинейные координаты, то должны совпадать и коэффициенты первых квадратичных форм:

$$E=E',\ F=F',\ G=G'.$$

Отсюда вытекает, что углы и площади на поверхности (а для них Гаусс приводит соответствующие формулы) тоже сохраняются, т. е. эти понятия принадлежат внутренней геометрии.

«Славная теорема» установила новый неожиданный факт, что гауссова кривизна тоже принадлежит внутренней геометрии, и открыла возможности углубиться в вопросы изгибаемости поверхностей. Сам Гаусс не стал заниматься этими вопросами, предоставив эту проблему своим последователям.

[1] Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956, с. 140.

К внутренней геометрии принадлежит и понятие геодезической, т. е. кратчайшей, линии, так как при изгибании поверхности геодезические линии остаются геодезическими. Поэтому Гаусс, занимаясь вопросами внутренней геометрии, нашел уравнение геодезических линий в криволинейных координатах и изучил далее их поведение. Он ввел в рассмотрение геодезическую окружность, т. е. геометрическое место концов геодезических радиусов постоянной длины, выходящих из одной точки, и доказал ее ортогональность к радиусам. Он рассмотрел также полугеодезические системы координат на поверхности, аналогичные ортогональным декартовым и полярным, и нашел, что в таких системах линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = dr^3 + m^2 d\varphi^2,$$

что позволило сильно упростить уравнения геодезических линий. Пользуясь разложением в ряды, он нашел приближенные, полезные для применений в геодезии вычислительные формулы для некоторых геометрических величин, в частности для углов прямолинейного треугольника, полученного распрямлением сторон геодезического треугольника.

Большое значение для дальнейшего развития теории поверхностей имели и полученные Гауссом при промежуточных вычислениях деривационные формулы, дающие выражения вторых производных координат точки поверхности по криволинейным координатам p и q поверхности через первые производные этих координат и направляющие косинусы нормали к поверхности (перпендикуляра к касательной плоскости). Эти формулы вместе с выражением производных направляющих косинусов нормали можно рассматривать как дифференциальные уравнения, определяющие первые производные. В современных обозначениях, заменяя координаты точки радиус-вектором $\mathbf{r}$ этой точки, прямоугольные координаты которого совпадают с координатами точки, а направляющие косинусы нормали — единичным нормальным вектором $\mathbf{n}$, прямоугольные координаты которого совпадают с направляющими косинусами, мы выражаем первые и вторые производные координат векторами $\partial\mathbf{r}/\partial p$, $\partial\mathbf{r}/\partial q$, $\partial^2\mathbf{r}/\partial p^2$, $\partial^2\mathbf{r}/\partial p\partial q$, $\partial^2\mathbf{r}/\partial q^2$, и формулы Гаусса можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial p^2} = \begin{Bmatrix} pp \\ p \end{Bmatrix} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} + \begin{Bmatrix} pp \\ q \end{Bmatrix} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q} + D\mathbf{n},$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial p\,\partial q} = \begin{Bmatrix} pq \\ p \end{Bmatrix} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} + \begin{Bmatrix} pq \\ q \end{Bmatrix} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q} + D'\mathbf{n},$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q^2} = \begin{Bmatrix} qq \\ p \end{Bmatrix} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p} + \begin{Bmatrix} qq \\ q \end{Bmatrix} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q} + D''\mathbf{n},$$

где $\begin{Bmatrix} pp \\ p \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} pp \\ q \end{Bmatrix}, \ldots, \begin{Bmatrix} qq \\ q \end{Bmatrix}$ — функции введенных Гауссом коэффициентов E, F, G и их частных производных по p и q.

Найденная Гауссом замечательная теорема о сумме углов геодезического треугольника, заключающаяся в том, что избыток суммы углов такого треугольника над 180° в случае поверхности положительной кривизны или же недостаток в случае отрицательной кривизны равен площади сферического отображения этого треугольника, называемой Гауссом «полной кривизной» (curvatura integra) треугольника,

$$A + B + C - \pi = \int K d\sigma,$$

имеет прямую связь с его сохраняемыми при жизни в тайне размышлениями и расчетами, относящимися к неевклидовой геометрии. При геодезических измерениях он действительно находил углы громадного сферического треугольника, образованного вершинами трех гор, а затем вычислял углы прямолинейного треугольника с теми же длинами сторон, но заметного отклонения суммы углов последнего от 180° не обнаружил.

Миндинг и разработка проблем внутренней геометрии

Вскоре после появления труда Гаусса начинается постепенно расширяющаяся разработка проблем внутренней геометрии поверхности. Первые исследования, продолжающие идеи Гаусса в области теории поверхностей, появились в Германии. Это были работы молодого Ф. Г. Миндинга (с 1830 г.) и К. Г. Якоби (с 1836 г.). Но вообще среди немецких геометров эти идеи не нашли тогда широкого отклика, так как геометры, группировавшиеся вокруг журнала Крелле, были почти целиком поглощены вопросами проективной и алгебраической геометрий (см. ниже). Более широко, но значительно позднее идеи Гаусса были восприняты во Франции, где со времен Монжа вопросам геометрии уделялось особое внимание. Почва для восприятия этих идей была там уже подготовлена, и в трудах Лиувилля (с 1847 г.) и его учеников результаты Гаусса подверглись анализу, переработке и дальнейшему развитию.

Прежде всего охарактеризуем вклад в теорию поверхностей К. Г. Якоби (см. Кн. 1, с. 67), геометрические исследования которого проводились под непосредственным влиянием труда Гаусса. Хотя математические исследования Якоби относились главным образом к теории функций и теоретической механике, в своих лекциях по теории кривых и поверхностей в Кёнигсбергском университете он освещал проблемы внутренней геометрии. В работе «Доказательство и новое обобщение гауссовой теоремы о полной кривизне треугольника, образованного кратчайшими линиями на данной поверхности» (Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficies e lineis brevissimi formati.— J. für Math., 1837) и в «Замечании о геодезических линиях на эллипсоиде и о различных применениях замечательной аналитической подстановки» (Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und der verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.— J. für Math., 1839) Якоби проинтегрировал уравнения геодезических линий на трехосном эллипсоиде. Очень важный результат, касающийся поведения геодезических линий на поверхности и относящийся к геометрии в целом, был получен им в работе «К теории вариационного исчисления и дифференциальных уравнений» (Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.— J. für Math., 1838), где Якоби ввел для точки, лежащей на геодезической линии, понятие сопряженной ей точки и сформулировал условие, когда геодезическая линия является кратчайшей. В работе «О некоторых замечательных теоремах о кривых» (Über einige merkwürdige Curventheoreme.— Astron. Nachr., 1843) Якоби доказал интересную теорему о том, что сферическое изображение главных нормалей замкнутой пространственной кривой делит поверхность сферы на две равновеликие части.

Вклад Якоби в геометрию поверхностей был не особенно значителен. Своими основными результатами внутренняя геометрия поверхностей, и в частности теория изгибания поверхностей, обязана Миндингу. Современники оценили его работу совершенно недостаточно и подчас замалчивали их. В Германии работы Миндинга не нашли поддержки по упомянутым причинам, французские же геометры круга Лиувилля, даже повторяя иногда результаты Миндинга, обычно не цитировали его. Остановимся коротко на его биографии.

Фердинанд Готлиб Миндинг (1806—1885) родился в семье юриста. Блестяще окончив классическую гимназию в г. Гиршберге, он один год обучался в университете в Галле (1824), где посещал лекции по классической филологии и физике, а затем в Берлинском университете (1825—1828) слушал философию у Гегеля, филологию, посещая также естественнонаучные лекции. Математику он изучал самостоятельно и через год защитил в Галле докторскую диссертацию по интегральному исчислению. В 1830 г. он, пройдя соответствующие испытания, получил права преподавателя в качестве приват-доцента в Берлинском университете.

Он стал читать лекции по алгебре, математическому анализу и механике, причем с 1834 г. преподавал также в Берлинской высшей строительной школе и одновременно вел научные исследования. Однако попытка Миндинга получить профессуру после 10 лет работы в университете кончилась неудачей. Также неудачно завершилась попытка провести Миндинга в Берлинскую академию наук, хотя его кандидатура была выдвинута в 1842 г. П. Леженом-Дирихле. Тогда же были выдвинуты кандидатуры Крелле, Дирксена и Штейнера: предпочтение было отдано более старшим по возрасту и чину кандидатам.

И естественно, что когда Миндинг был приглашен (по рекомендации К. Г. Якоби) профессором на кафедру прикладной математики и механики в Дерптский (ныне Тартуский) университет, он выразил согласие и в 1844 г. покинул Германию. Дальнейшая его деятельность протекала в России, где он долгие годы успешно продолжал научную и педагогическую работу. Его учеником был К. М. Петерсон — инициатор Московской научной геометрической школы. Вместе со своими детьми Миндинг принял русское подданство. В 1865 г. он был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а в 1879 г.— почетным ее членом.

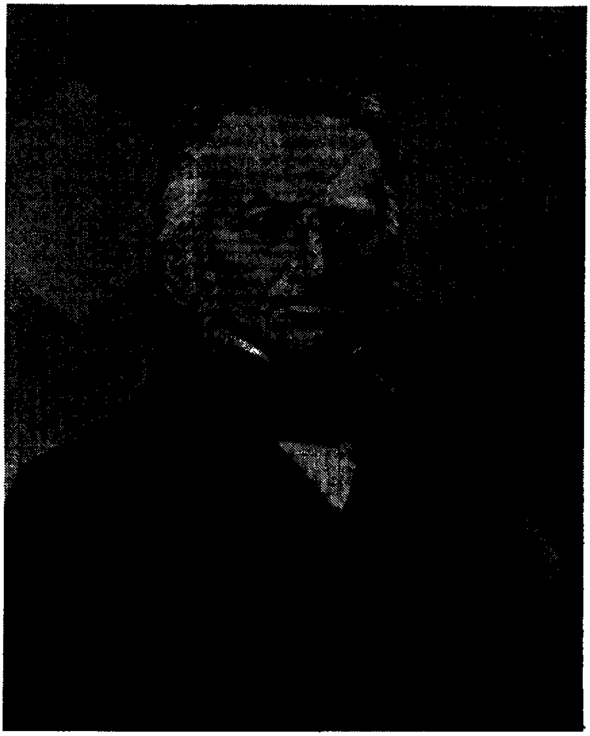
Мы рассмотрим работы Ф. Миндинга лишь по теории поверхностей. Хотя ему принадлежит ряд ценных исследований и в области алгебры и теории чисел, по вопросам интегрирования алгебраических функций и теории дифференциальных уравнений (за что ему в 1861 г. была присуждена Демидовская премия), однако важнейшие его открытия относятся к геометрии.

В «Замечании о развертывании кривых линий, принадлежащих поверхностям» (Bemerkungen über die Abwickelung krummer Linien von Flächen.— J. für Math., 1830), появившейся почти непосредственно вслед за трудом Гаусса, молодой Миндинг вносит ценное дополнение к понятиям внутренней геометрии. Он доказывает, что величина $1/\rho$, равная произведению кривизны $1/R$ кривой на косинус угла i, образованного соприкасающейся к кривой плоскостью с касательной плоскостью к поверхности

$$1/\rho = \cos i/R$$

(по современной терминологии — это проекция вектора кривизны на касательную плоскость), названная впоследствии Бонне *геодезической кривизной* (1848), принадлежит внутренней геометрии поверхности. Доказательство состояло в отыскании выражения для геодезической кривизны через E, F, G и их производные первого порядка.

К геодезической кривизне Миндинг пришел при решении методами вариационного исчисления изопериметрической задачи — найти на поверхности кратчайшую кривую, охватывающую данную площадь. В работе «О кривых кратчайшего периметра на кривой поверхности» (Über die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen.— J. für Math., 1830) Миндинг нашел, что если решение существует, то на экстремали $\cos i/R$ — величина постоянная, и высказал предположение, что



Ф. Г. МИНДИНГ

такая кривая должна быть геодезической окружностью. Для случая поверхностей постоянной кривизны он доказал это предположение в упомянутой выше работе (это справедливо, если кривизна положительна); вопрос был решен окончательно только в 1921 г. А. Бауле, показавшим, что лишь на поверхностях постоянной гауссовой кривизны все геодезические окружности имеют постоянную геодезическую кривизну.

Впоследствии в «Доказательстве одной геометрической теоремы» (Beweis eines geometrischen Satzes.— J. für Math., 1837) Миндинг предложил интересную геометрическую интерпретацию геодезической кривизны. Он показал, что ее можно определить как кривизну той плоской кривой, которая получится из данной, если наложить на плоскость развертывающуюся поверхность, являющуюся огибающей семейства плоскостей, касающихся поверхности в точках заданной кривой. Эта ценная идея Миндинга о способе развертывания линии, лежащей на поверхности (точнее, полосы поверхности), на плоскость была впоследствии применена Леви-Чивитой для введения фундаментального понятия — параллельного перенесения вектора вдоль кривой, лежащей на поверхности (1917).

Важнейшие результаты Миндинга в области внутренней геометрии относятся к проблеме изгибания поверхностей и были опубликованы в 1838—1840 гг. В работе «Как узнать, наложимы ли друг на друга две данные кривые поверхности; с замечаниями о поверхностях с постоянной мерой кривизны» (Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme, Flächen auf einander abwickelbar sind, nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichen Krümmungsmasse.— J. für Math., 1839)

Миндинг вывел окончательные условия, при которых одна поверхность может быть изгибанием другой. Общий вопрос о признаках необходимых и достаточных для налагаемости поверхностей был им почти полностью исчерпан. Кроме того, он рассмотрел ряд основных частных случаев. Однако один момент в его рассуждениях был упущен, а именно возможность особого решения уравнения в полных дифференциалах. Следовательно, его требования оказались несколько излишне жесткими, т. е. некоторые возможности упускались из вида. Через четверть века этот пропуск был выявлен и исправлен в работе О. Бонне (1865).

Прежде чем получить общие условия изгибаемости, Миндинг рассмотрел впервые в работе «Об изгибании некоторых поверхностей» (Über die Biegung gewisser Flächen.—J. für Math., 1838) изгибание общих линейчатых поверхностей в линейчатые и показал, что любая линейчатая поверхность может быть развернута на такую, направляющие векторы которой образуют круговой конус. Далее в работе «Об изгибании кривых поверхностей» (Über die Biegung krummer Flächen.— J. für Math., 1838) Миндинг рассмотрел изгибание некоторого семейства поверхностей вращения, включающего катеноид, и впервые указал его наложимость на прямой геликоид (пример, ставший классическим). Он доказал изгибаемость произвольных поверхностей вращения, сделав оговорку (без определенной ссылки), что «замкнутая в себе выпуклая поверхность как единое целое является, как известно, неизгибаемой»[2]. Эту гипотезу (она встречается и в опубликованных в 1862 г. посмертных трудах Эйлера), высказанную Миндингом, удалось доказать только в 1899 г. для аналитических поверхностей Г. Либману, а в общей постановке — А. В. Погорелову в работе «Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей» (Харьков, 1959).

Общие условия наложимости двух поверхностей, иначе говоря условия эквивалентности первых дифференциальных квадратичных форм этих поверхностей, Миндинг получает, последовательно вводя величины, названные впоследствии дифференциальными инвариантами (или параметрами) Бельтрами, который применял их в своих работах, появившихся четверть века спустя. В итоге, основываясь на применении дифференциальных инвариантов, он отмечает, что вопрос о наложимости двух заданных поверхностей может быть решен без помощи интегрирования. В этой же работе Миндинг доказал теорему выдающегося значения: для двух поверхностей совпадение гауссовых кривизн в случае их постоянства является и достаточным условием наложимости, причем наложение может осуществляться бесконечным числом способов, зависящим от трех параметров. Здесь же он нашел уравнения поверхностей вращения постоянной кривизны и обобщенных винтовых поверхностей постоянной кривизны, и в частности поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Одна из них — поверхность, определяемая параметрическими уравнениями

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1/\mathrm{ch}\varphi, \quad z = \varphi - \mathrm{tg}\varphi,$$

получается от вращения вокруг оси Oz трактрисы — кривой, имеющей угловую точку на оси Ox, асимптотически приближающейся к оси Oz при стремлении z к $+\infty$ и $-\infty$ и характеризующейся тем, что отрезки касательных во всех ее точках от точки касания до оси Oz равны друг другу (рис. 2). Поверхность вращения, описанную Миндингом, называют, следуя Э. Бельтрами, *псевдосферой*.

[2] J. für Math., 1838, 18, S. 368.

Очень ценный материал содержит статья Миндинга «Дополнения к теории кратчайших линий на кривых поверхностях» (Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen.— J. für Math., 1840). Миндинг нашел тригонометрические соотношения в треугольнике, образованном геодезическими (кратчайшими) линиями на поверхностях постоянной гауссовой кривизны K, и заметил, что эти же формулы можно получить из соответствующих формул тригонометрии на сфере заменой радиуса сферы на величину $\sqrt{K}$, мнимую в случае отрицательной гауссовой кривизны K. Эта работа сыграла важную роль в интерпретации Бельтрами геометрии Лобачевского (1868) (см. раздел 4). Хотя работа Миндинга была напечатана в том же журнале, что и «Воображаемая геометрия» Лобачевского (1837), до работы Бельтрами математики не замечали, что эти соотношения одни и те же в геометрии Лобачевского для прямолинейных треугольников и во внутренней геометрии постоянной отрицательной кривизны для геодезических треугольников.

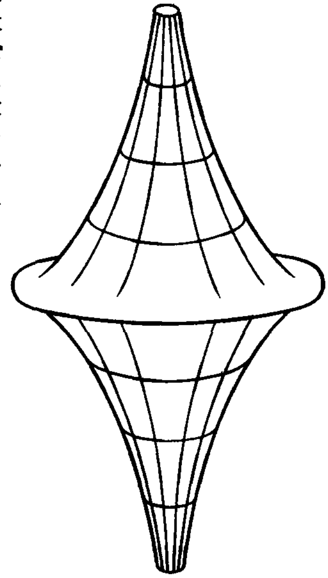


Рис. 2

Французская дифференциально-геометрическая школа

Исследования по математической физике, включая теорию упругости и теоретическую механику, получившие во Франции начиная с первых десятилетий XIX в. широкое развитие, требовали от исследователей создания или совершенствования целого ряда областей математики, в том числе и геометрии.

Типичными представителями такого теоретико-прикладного направления в дифференциальной геометрии были упоминавшийся выше Ламе и Сен-Венан.

Габриэль Ламе, воспитанник Политехнической школы, еще в молодые годы был приглашен в Россию и вел преподавание и инженерные расчеты в Петербурге в Институте инженеров путей сообщения (1820—1832). Вернувшись во Францию, он стал профессором Политехнической школы (1832—1863), был избран в Парижскую академию наук (1843). Математические открытия Ламе тесно связаны с исследованиями по теории упругости и математической физике. В «Мемуаре о криволинейных координатах» (Mémoire sur les coordonnées curvilignes.— J. math. pures et appl., 1840) Ламе впервые применил криволинейные координаты в пространстве, пользуясь ортогональной системой, так что элемент длины он записывал в виде

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Еще раньше в «Мемуаре об изотермических поверхностях в однородных телах при равновесии температуры» (Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de témperature.— J. math.

pures et appl., 1837) он ввел в прямоугольных координатах дифференциальные параметры (т. е. инварианты) скалярного поля

$$\Delta_1 F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

и

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Ламе написал ряд учебников по математической физике, по специальным функциям и их приложениям, где, в частности, ввел так называемые функции Ламе (см. «Лекции о криволинейных координатах и их различных приложениях» (Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859)). Эти книги пользовались большим успехом и долго служили учебными руководствами не только во Франции.

Адемар Жан Клод Барре де Сен-Венан (1797—1886) хотя и занимался в основном теорией упругости, где ему принадлежат известные уравнения Сен-Венана, но написал также в связи с изучением вопроса о равновесии проволоки (1843) обстоятельный «Мемуар о неплоских кривых линиях» (Mémoire sur les lignes courbes non planes.— J. Éc. Polyt., 1845), включающий изложение истории вопроса и некоторые новые теоремы. В частности, он впервые ввел привившийся впоследствии термин «бинормаль» для перпендикуляра к соприкасающейся плоскости. Однако деривационные формулы Френе—Серре тогда еще не были известны.

Особый интерес к развитию дифференциальной геометрии, проявившийся во Франции в 40-х годах XIX в., связан с именем Лиувилля, который упоминался нами и ранее (см. Кн. 1, с. 176—179) в связи с его работами о трансцендентных числах. Лиувилль в своих геометрических работах не только развивал направление Монжа, но и сочетал его с идеями Гаусса, перевод труда которого он опубликовал вместе с несколькими своими исследованиями в качестве приложения к своему переизданию классического «Приложения анализа к геометрии» (Application de l'Analyse à la Géométrie, 5-ème éd. Paris, 1850) Монжа, в котором дополнения Лиувилля составили треть книги. К геометрической школе Лиувилля относятся профессора Сорбонны Оссиан Бонне (1819—1892), известный также как астроном; академик Жозеф Альфред Серре (1819—1885), упоминавшийся нами в связи с его работами по алгебре (см. Кн. 1, с. 62, 65); академик Виктор Пюизё (1820—1883), известный своими работами по анализу, о которых говорится ниже (см. с. 179—188), а также как механик и астроном; профессор парижского Коллеж де Франс академик Жозеф Бертран (1822—1900), о работах которого по теории чисел и по теории вероятностей мы говорили в Кн. 1 (см. с. 163—165, 235—237); профессор Лионского университета Фредерик Френе (1816—1900); профессор Льёжского университета (Бельгия) Эжен Каталан (1819—1894), известный также своими работами по математическому анализу. В работах Лиувилля и его геометрической школы развиваются преимущественно проблемы внутренней геометрии и вопросы наложимости поверхностей. Мы уже упоминали (это случалось нередко), что они только слегка видоизменяли или повторяли результаты Миндинга, не ссылаясь на него. Так, Лиувилль придал выражению Гаусса для гауссовой кривизны более простой вид и нашел, повторяя результат Миндинга, уравнения поверхностей вращения как отрицательной, так и положительной постоянной кривизны. Изучая конформное отображение поверхностей в изотермических координатах, как это делал Гаусс, Лиувилль выделил примечатель-

Г. ЛАМЕ

ный класс поверхностей (поверхности Лиувилля), для которых линейный элемент может быть приведен к виду

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2).$$

На этих поверхностях геодезические линии могут быть найдены в квадратурах, причем к этому классу относятся как поверхности второго порядка, так и все поверхности вращения (дополнения к книге Монжа, 1850). В конкурсе, объявленном на 1860 г. Парижской академией наук по проблеме изгибания поверхностей, приняли участие два французских геометра: Эдмон Бур (1831—1866) и Бонне, а также итальянский геометр Дельфино Кодацци (1824—1873).

Премию получила работа Бура «Теория деформации поверхностей» (Théorie de la déformation des surfaces.— J. Éc. Polyt., 1862), остальные заслужили почетные отзывы. В этих работах дается вывод условий наложимости двух поверхностей, близкий к выводу Миндинга. Бур использует полугеодезические координаты и находит ряд новых случаев изгибания. Бонне в «Мемуаре о теории поверхностей, наложимых на данную поверхность» (Mémoire sur la théorie de surfaces applicables sur une surface donnée.— J. Éc. Polyt., 1865) уточняет результаты Миндинга, указывая на его упущение, упомянутое нами ранее. Далее он относит одну из поверхностей к асимптотическим координатам, в которых линейный элемент имеет простой вид

$$ds^2 = \lambda du dv,$$

но новых случаев изгибания ему найти не удается.

Подход Кодацци в опубликованном только после его смерти «Мемуаре, относящемся к наложению одних поверхностей на другие» (Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres.— Mém. div. savants. Acad. sci. Paris, 1883) аналогичен подходу Бура, причем в полученные им условия входят и геодезическая, и нормальная кривизны параметрических линий, что оказалось полезным для дальнейших исследований.

Среди интересных результатов Бонне в только что упомянутом его мемуаре необходимо отметить обобщение теоремы Гаусса о сумме углов геодезического треугольника. Эта «теорема Гаусса — Бонне» состоит

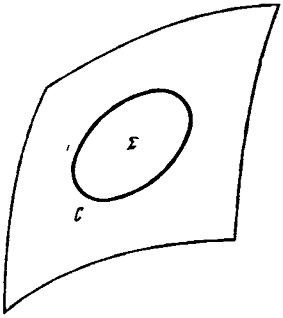


Рис. 3

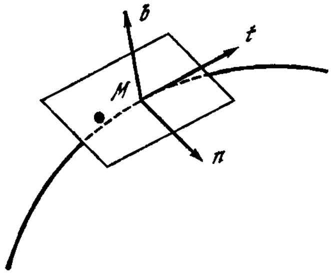


Рис. 4

в том, что для простого гладкого контура, ограничивающего область Σ регулярной поверхности,

$$\int_{\Sigma} K\, d\sigma + \oint_{C} \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi,$$

т. е. сумма «полной кривизны» области Σ и интеграла геодезической кривизны $1/\rho_g$ по ограничивающему контуру равна 2π (рис. 3).

В области теории пространственных кривых вскоре после упомянутой работы Сен-Венана был достигнут завершающий общую теорию прогресс. Френе в своей диссертации (1847), основная часть которой была опубликована в виде статьи «О кривых двоякой кривизны» (Sur les courbes à double courbure.— J. math. pures et appl., 1852), и независимо от него Ж. Серре в работе «О некоторых формулах, относящихся к теории кривых двоякой кривизны» (Sur quelques formules relatives à théorie des courbes à double courbure.— J. math. pures et appl., 1851) получили известные «формулы Серре — Френе» (называемые также «формулами Френе»). Формулы Серре — Френе, являющиеся аналогами формул Гаусса для поверхностей, связывают направляющие косинусы касательной, главной нормали и бинормали кривой и их производные по длине дуги кривой. В настоящее время, заменяя направляющие косинусы прямых единичными векторами этих прямых — векторами $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, направленными соответственно по касательной, главной нормали и бинормали кривой (рис. 4) (прямоугольные координаты которых совпадают с направляющими косинусами), формулы Френе записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \varkappa\mathbf{b}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n},$$

где k и $\varkappa$ — кривизна и кручение кривой, абсолютные значения которых равны модулям векторов $d\mathbf{t}/ds$ и $d\mathbf{b}/ds$, т. е. пределам отношений «угла смежности» $\Delta\alpha$ между касательными в двух близких точках и аналогичного угла $\Delta\beta$ между соприкасающимися плоскостями в этих точках к длине дуги Δs между этими точками при стягивании этой дуги в точку. На плоскости кривизна считается положительной, когда поворот от вектора $\mathbf{t}$ к вектору $\mathbf{n}$ происходит против часовой стрелки, и отрицательной, когда этот поворот происходит по часовой стрелке. В пространстве кривизна считается всегда положительной, но кручение считается положительным, когда соприкасающаяся с кривой винтовая линия правая, и отрицательным, когда эта винтовая линия левая. Формулы Серре — Френе можно рассматривать как дифференциальные уравнения, определяющие вектор $\mathbf{t}$, являющийся производной $d\mathbf{x}/ds$ радиус-вектора точки кривой по ее длине дуги, и, следовательно, саму кривую по функциям $k = k(s)$ и $\varkappa = \varkappa(s)$, образующим так называемые натуральные уравнения кривой. Так как векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ связаны дополнительными условиями $\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$, $\mathbf{tn} = \mathbf{tb} = \mathbf{nb} = 0$, вектор $\mathbf{t}$ определяется выбором начальных условий $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$ при $s = s_0$, т. е. вектор $\mathbf{t}$ определен с точностью до вращения в пространстве и, следовательно, вектор $\mathbf{x}$ определен с точностью до движения в пространстве.

Применение этих формул открыло естественный путь для исследования различных вопросов. Так, например, трактовка и отыскание кривых Бертрана, найденных им в «Мемуаре о теории кривых двоякой кривизны» (Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure.— J. math. pures et appl., 1850), могла теперь рассматриваться как задача, служащая упражнением студентам. Однако формулы Френе — Серре еще долго не включались в учебники. Так, они не вошли в подробную монографию однофамильца Ж. Серре профессора католического университета в Париже Поля Серре (1827—1898) «Новая геометрическая и механическая теория линий двоякой кривизны» (Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris, 1860) и даже в «Применение дифференциального и интегрального исчисления к общей теории поверхностей и линий двоякой кривизны» (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Berlin, 1872) профессора университета в Бреслау (ныне Вроцлав, ПНР) Фердинанда Иоахимсталя (1818—1861), написанное им по лекциям, читанным в 1856—1857 гг., и переиздававшееся еще в 1890 г.

Дифференциальная геометрия в начале второй половины XIX в.

Дифференциально-геометрические исследования, проводимые по-прежнему классическими методами математического анализа, стали успешно развиваться с середины XIX в. не только во Франции, но и в других странах Европы.

В Англии не было крупных творческих достижений в этой области, и геометры занимались больше вопросами линий и поверхностей второго порядка, за исключением создателя теории кватернионов У. Р. Гамильтона (см. Кн. 1), получившего в своих работах о лучах (1828—1837) важные результаты в области теории прямолинейных конгруэнций. Зато здесь были созданы прекрасные учебные книги по геометрии Дж. Сальмона, некоторые мы упомянули ранее.

В Германии Э. Куммер создал общую теорию прямолинейных конгруэнций (1860), о которой мы будем говорить ниже. Юлиус Вейнгартен (1836—1910), профессор Высшей технической школы в Берлине, разработал теорию W-поверхностей (для которых существует функциональная связь между главными радиусами кривизны) и занимался, опираясь на эту теорию, проблемами наложимости поверхностей. При этом в работе «Об одном классе поверхностей, наложимых друг на друга» (Über eine Klasse der Flächen die aufeinander abwickelbar sind.—J. für Math., 1861) Вейнгартен нашел выражения производных $\partial\mathbf{n}/\partial p$ и $\partial\mathbf{n}/\partial q$ через $\partial\mathbf{r}/\partial p$ и $\partial\mathbf{r}/\partial q$, причем коэффициенты этих выражений также являются функциями коэффициентов E, F, G и D, D', D''. Формулы Гаусса вместе с формулами Вейнгартена составляют систему дифференциальных уравнений, неизвестными которой служат $\partial\mathbf{r}/\partial p$, $\partial\mathbf{r}/\partial q$, $\mathbf{n}$, связанные, кроме того, соотношениями

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\right)^2=E,\qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q}=F,\qquad \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q}\right)^2=G,\qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\mathbf{n}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q}\mathbf{n}=0,\qquad \mathbf{n}^2=1,$$

Если выполнены условия интегрируемости этой системы уравнений, то векторы $\partial\mathbf{r}/\partial p$ и $\partial\mathbf{r}/\partial q$ определяются выбором начальных условий, т. е. эти векторы определены заданием коэффициентов E, F, G и D, D', D'' в виде функций от p и q с точностью до вращения в пространстве и, следовательно, вектор $\mathbf{r}$ определен с точностью до движения в пространстве. Таким образом, две квадратичные формы определяют поверхность с точностью до движения.

Теорема об определении поверхности двумя квадратичными формами с точностью до движения была впервые опубликована О. Бонне в упоминавшемся «Мемуаре о теории поверхностей, наложимых на данную поверхность» (1867). Еще ранее эта теорема была доказана Карлом Михайловичем Петерсоном (1828—1881), сыном латышского крестьянина, питомцем Дерптского университета, где одним из его учителей был Ф. Миндинг.

Эта теорема была доказана Петерсоном в его диссертации «Об изгибании поверхностей» (Über die Biegung der Flächen), написанной в 1853 г., но опубликованной (в русском переводе) только в 1952 г.; краткое и весьма неполное изложение этой диссертации было дано в 1901 г. историком математики П. Штеккелем на основании изучения рукописи этой диссертации А. Кнезером, работавшим профессором Дерптского университета в 1889—1900 гг., в журнале «Bibliotheca mathematica».

К. Петерсон также дополнил уравнение Гаусса, связывающее коэффициенты первой и второй форм поверхности еще двумя независимыми уравнениями, которые позднее получили название уравнений Майнарди — Кодацци, по имени итальянских геометров, получивших их независимо соответственно в 1857 и 1868 гг. Опираясь на упомянутые три уравнения, Петерсон доказал в диссертации теорему о том, что если коэффициенты двух квадратичных дифференциальных форм (первая должна быть знакоположительной) связаны такими соотношениями, то существует поверхность, для которой эти формы являются первой и второй дифференциальными формами, причем они определяют поверхность с точностью до ее движения в пространстве. Дальнейшие работы Петерсона относятся к времени его жизни в Москве, где он, преподавая математику в немецкой гимназии, вел активные научные исследования и явился одним из основателей Московского математического общества. Об этих работах Петерсона мы расскажем ниже.

Отметим также работы немецких и шведских геометров по теории минимальных поверхностей, т. е. поверхностей минимальной площади, ограниченных данным контуром. Профессор «главной школы» в Бремене Генрих Фердинанд Шерк (1798—1885), ученик Якоби по Кёнигсбергу, нашел уравнения пяти минимальных поверхностей еще в своих «Замечаниях о наименьших поверхностях внутри данных границ» (Bemerkungen

К. М. ПЕТЕРСОН

über die kleinste Flächen innerhalb gegebener Grenzen.— J. für Math., 1835).

В Швеции минимальными поверхностями занимался профессор университета в Упсале Эммануэль Габриэль Бьёрлинг (1808—1872). В работе «Об интегрировании уравнений в частных производных поверхности, у которой в какой-либо точке главные радиусы кривизны оба равны или противоположны по знаку» (In integrationem aequationis derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario.— Arch. Math. Phys., 1844) Бьёрлинг решил проблему нахождения всех минимальных поверхностей, проходящих через заданную полосу, т. е. через семейство гладко примыкающих друг к другу плоскостей, касающихся данной кривой; одним из характеристических признаков минимальных поверхностей является равенство нулю «средней кривизны» поверхности, т. е. суммы главных кривизн, а следовательно, и суммы главных радиусов кривизны.

В начавшемся в обстановке общего национального подъема и борьбы за объединение Италии прогрессе математических исследований большие успехи были достигнуты в области дифференциальной геометрии — о некоторых из них упоминалось выше. Антонио Мария Бордони (1789—1860) начал заниматься этим предметом еще в 20-х годах. Долгие годы он был профессором университета в Павии; познакомившись с трудами Лиувилля и идеями Гаусса, он привлек к их разработке своих коллег и учеников, из которых назовем упоминавшихся выше Анджело Майнарди (1800—1879) и Д. Кодацци, а также Франческо Бриоски (1824—1897), Луиджи Кремону (см. с. 111) и Эудженио Бельтрами (см. с. 69). Все эти математики впоследствии стали профессорами различных университетов Италии и принимали активное участие в общественной и государственной жизни этой страны. О результатах Майнарди и Кодацци мы говорили в связи с диссертацией К. М. Петерсона и конкурсом Парижской академии наук. Л. Кремона, о котором мы будем говорить ниже, бывший учеником Шаля, работал главным образом в области проективной и алгебраической геометрии. Бриоски был директором Миланской политехнической школы, вел исследования в области внутренней геометрии и теории определителей. Особенно ярким математиком был Бельтрами. С 1862 г. началась его профессорская деятельность в Болонье, Пизе, Риме, Павии и опять в Риме, где он был членом, а позднее президентом Национальной академии. Он интенсивно и плодотворно работал над развитием дифференциальной геометрии в духе Гаусса, занимаясь вопросами наложимости поверхностей и продолжая идеи Миндинга, о чем мы упоминали. В «Исследованиях по приложениям анализа к геометрии» (Ricerche di analisi applicata alla geometria.— G. mat. Napoli, 1864), отыскивая для квадратичных форм дифференциальные инварианты, он ввел два их вида, обобщающих параметры Ламе и получивших впоследствии название дифференциальных параметров Бельтрами. С современной точки зрения эти инварианты являются скалярным квадратом вектора градиента скалярного поля и дивергенцией градиента (т. е. оператором Лапласа) скалярного поля, выраженным в метрике внутренней геометрии поверхности. К найденной им интерпретации геометрии Лобачевского (1868) мы еще вернемся. Он развил также в духе Римана теорию многомерных пространств постоянной кривизны (1869), о которой мы также будем говорить ниже.

Дифференциальная геометрия в России

В России тоже появляются в эти годы исследования в области дифференциальной геометрии. Здесь особо следует подчеркнуть роль К. М. Петерсона, положившего начало образованию московской геометрической школы.

Наиболее важна работа Петерсона «Об отношениях и сродстве между кривыми поверхностями» (Мат. сб., 1866), посвященная изгибанию поверхностей и положившая начало большому циклу работ по проблеме изгибания на главном основании, т. е. с сохранением сопряженности некоторой сети на поверхности, первый пример которого для изгибания поверхностей вращения в поверхности вращения был найден Ф. Миндингом в упоминавшейся работе «Об изгибании кривых поверхностей» (1838). Дифференциальной геометрии была посвящена работа Петерсона «О кривых на поверхностях» (Мат. сб., 1867) и книга «О кривых и поверхностях» (Über Curven und Flächen. Moskau; Leipzig, 1868). Некоторые результаты этих работ Петерсона были позднее вновь получены Г. Дарбу и другими зарубежными геометрами, но после появления в 1905 г. в Тулузе переводов Э. Коссера основных статей Петерсона 1866—1867 гг. его работы получили всеобщее признание. Под влиянием Петерсона проблемами изгибания поверхностей заинтересовался Болеслав Корнелиевич Млодзеевский (1858—1923), питомец Московского университета и ученик знатока геометрии Василия Яковлевича Цингера (1836—1907), а впоследствии профессор Московского университета и организатор московской геометрической школы. Этими проблемами занимался и другой ученик В. Я. Цингера, Дмит-

О. И. СОМОВ

рий Федорович Егоров (1869—1931), который в начале 20-х годов XX в. вместе со своим учеником Н. Н. Лузиным основал знаменитую московскую школу теории множеств и теории функций, методы исследования которой были в значительной степени геометрическими.

В Петербурге академик Осип Иванович Сомов (1815—1876), также воспитанник Московского университета, развивал векторный анализ, применяя его к геометрии и механике. В работе «Об ускорениях высших порядков» (Зап. Акад. наук, 1864) Сомов построил аппарат дифференцирования вектор-функции и применил его к изучению пространственных кривых, используя подвижной трехгранник. В работе Сомова «Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких-либо координатах, ортогональных или косоугольных» (Зап. Акад. наук, 1865) решены векторными методами некоторые задачи теории поверхностей. Широко известна работа П. Л. Чебышева «О кройке одежды» (1878), посвященная проблеме «одевания поверхностей», в которой были введены сети, получившие имя Чебышева. О работах казанского геометра Ф. М. Суворова (1845—1911), занимавшегося трехмерными римановыми пространствами, мы будем говорить ниже.

Теория прямолинейных конгруэнций

В ИМ, т. 3 мы упоминали (см. с. 193), что в «Мемуаре о выемках и насыпях» Монжа (1794) было введено понятие прямолинейной конгруэнции — семейства прямых линий, зависящих от двух параметров. Монж рассматривает только «нормальные конгруэнции», т. е. конгруэнции нормалей к поверхности. Дальнейший стимул развития этой теории был дан оптикой. Здесь прежде всего следует упомянуть «Оптику» (Optique.— J. Éc. Polyt., 1808) Этьена Луи Малюса (1775—1812) и «Дополнение к очерку теории систем лучей» (Supplement to an essay on the theory of systems of rays.— Trans. Roy. Irish. Acad., 1830) У. Р. Гамильтона. «Оптика» Малюса содержит много чисто оптического материала (Малюс широко известен открытием явления поляризации света и другими открытиями в оптике), но значительная часть этого труда посвящена теории прямолинейных конгруэнций. Малюс показал, что не только нормальные конгруэнции прямых, но и конгруэнции прямых общего вида обладают тем свойством, что каждая прямая конгруэнции является пересечением двух ортогональных развертывающихся поверхностей, состоящих из прямых конгруэнции. Он изучал отражения и преломления конгруэнций и впервые рассматривал комплексы прямых, т. е. семейства прямых, зависящих от трех параметров. О нормальных конгруэнциях Малюс доказал, что это свойство сохраняется при отражении лучей конгруэнции от поверхности (одна ошибка Малюса в этом доказательстве была исправлена Дюпеном).

Из результатов Гамильтона, относящихся к теории прямолинейных конгруэнций, отметим «формулу Гамильтона», дающую зависимость «горловой точки» пары бесконечно близких лучей конгруэнции (предельного положения основания общего перпендикуляра двух лучей конгруэнции при стремлении их друг к другу) от направления в конгруэнции и критерий того, что конгруэнция является нормальной.

Теория конгруэнций и более общая «линейчатая геометрия» — геометрия многообразия всех прямых и семейств прямых, зависящих от различного числа параметров, были основаны Ю. Плюккером в «Системе пространственной геометрии в новой аналитической трактовке» (System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise. — J. für Math., 1846). Плюккер (о нем говориться ниже) предложил рассматривать в качестве элемента обычного пространства не точки и зависящие от того же числа параметров плоскости (точки определяются тремя координатами, а плоскости — отношениями трех коэффициентов их уравнений к четвертому), а прямые. Так как прямые задаются парами линейных уравнений

$$x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma,$$

они зависят от четырех параметров. Плюккеру принадлежат термины «комплекс» и «конгруэнция» (последний термин объясняется тем, что конгруэнции состоят из совпадающих прямых двух комплексов, и происходит от того же слова congruens — «совпадающий», что и термин «конгруэнтность»).

Дифференциальная геометрия конгруэнций прямых была построена аналогично дифференциальной геометрии поверхностей Гаусса в «Общей теории систем прямолинейных лучей» (Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.— J. für Math., 1874) Э. Куммера, о котором мы говорили в главе об алгебре (см. Кн. 1, с. 93—98). Куммер рассматривает конгруэнцию прямых и поверхность, пересекающую все ее прямые, и определяет две квадратичные формы, одна из которых отличается от второй квадратичной формы поверхности заменой направляющих косинусов нормали к поверхности направляющими косинусами луча конгруэнции, а вторая является метрической формой для «сферического изображения» конгруэнции, аналогичного гауссову сферическому изображению поверхности. Оказывается, что две формы Куммера, так же как две формы Гаусса, определяют конгруэнцию с точностью до движения в пространстве.

2. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Возникновение проективной геометрии

Проективная геометрия как самостоятельная дисциплина окончательно сформировалась в первой половине XIX в., хотя ее предыстория восходит еще к античной эпохе, что можно видеть из дошедшего до нас труда Паппа Александрийского (III в.) (см. ИМ, т. 1, с. 151). В дальнейшем элементы проективных понятий постепенно складываются в книгах по перспективе художников и архитекторов эпохи Возрождения (см. ИМ, т. 1, с. 321—323; т. 2, с. 121). Некоторые проективные понятия появляются у И. Кеплера (см. ИМ, т. 2, с. 117—121), И. Ньютона (см. ИМ, т. 2, с. 127—128) и Г. Лейбница (см. ИМ, т. 2, с. 126). В XVII в. Ж. Дезарг (1639) и, следуя ему, Б. Паскаль (1640) устанавливают ряд важных теорем, относящихся к проективным свойствам фигур, хотя самый предмет проективной геометрии еще не получает у них четкого определения (см. ИМ, т. 2, с. 121—128). После Дезарга и Паскаля более полутора столетия существенного продвижения в изучении проективных свойств не было, хотя уточнялись отдельные понятия. Так, в сочинениях по перспективе Б. Тейлора (1719) и И. Ламберта (1759) показано, что на плоскости все бесконечно удаленные точки схода лежат на одной бесконечно удаленной прямой (см. ИМ, т. 3, с. 196), в труде Э. Варинга (1762) появляется аналитическая запись коллинеации на плоскости (см. ИМ, т. 3, с. 173).

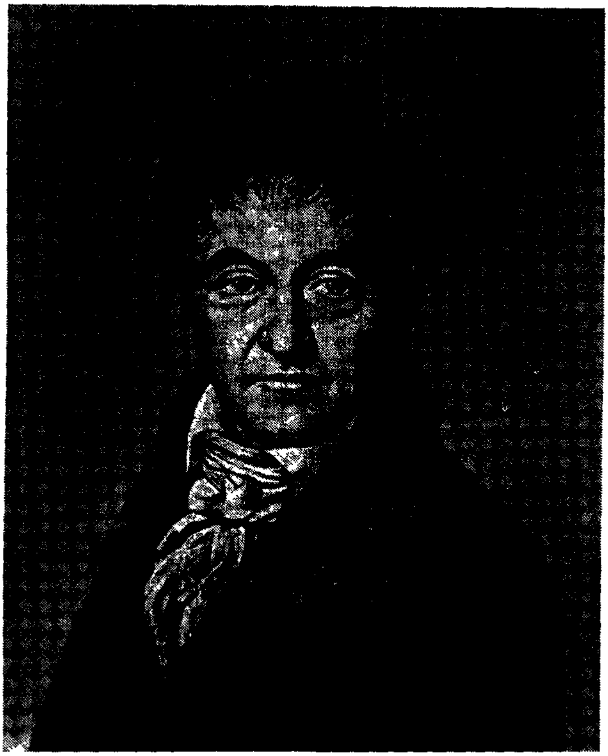
Новые успехи в этой области в начале XIX в. были теснейшим образом связаны с деятельностью Г. Монжа. Его начертательная геометрия возродила интерес к синтетическим методам и привлекла внимание к методу проектирования.

Как Л. Карно, так и Ш. Брианшон, Ж. Понселе, Ж. Жергонн и М. Шаль, внесшие важный вклад в развитие проективной геометрии, слушали лекции Г. Монжа, первый — в Мезьере, а остальные — в Париже, в Политехнической школе.

Лазар Карно (1753—1823), выдающийся деятель Французской буржуазной революции, прозванный «Организатором победы», военный и математик, опубликовал три геометрические работы: «О корреляции фигур в геометрии» (De la corrélation des figures en géométrie. Paris, 1801), «Геометрия положения» (Géométrie de position. Paris, 1803) и «Очерк о трансверсалях (Essai sur les transversales. Paris, 1806) (см. ИМ, т. 3, с. 198—200), в которых введены некоторые существенные для становления проективной геометрии идеи и понятия. Используя понятие непрерывного преобразования фигуры («корреляции» по его терминологии), он высказал так называемый принцип непрерывности («принцип корреляции»), согласно которому определенные свойства преобразованной фигуры можно находить и изучать по свойствам исходной (даже если «корреляция» приводит к мнимым величинам). Существенно отметить, что он впервые ввел в рассмотрение двойное (ангармоническое) отношение четырех точек прямой с учетом его знака, уточнив тем самым трактовку Паппа, и затем доказал инвариантность этого отношения для четверок точек, полученных при сечениях четырех прямых пучка различными секущими. Им были установлены на этом пути гармонические свойства полного четырехсторонника.

Карно всегда подчеркивал преимущества синтетического метода над аналитическим, тогда широко применявшимся, так как первый позволяет сразу охватить возможные частные случаи.

Шарль Жюльен Брианшон (1783—1864), капитан артиллерии, впоследствии профессор артиллерийской школы, нашел и доказал в мемуаре «О кривых поверхностях второго порядка» (Sur les surfaces courbes du se-



Л. КАРНО

cond ordre.— J. Éc. Polyt., 1806) теорему об описанном вокруг конического сечения шестистороннике, двойственную теореме Паскаля. При этом он опирался на полярное соответствие относительно конического сечения, сделав тем самым первый шаг к установлению общего принципа двойственности, тогда еще неизвестного.

Теорию полярного соответствия разрабатывали затем в 1810 г. Ф. Ж. Сервуа (1767—1847) и в 1812 г. Жозеф Диаз Жергонн (1771—1859), профессор математики в Ниме и Монпелье, основатель журнала «Annales de mathématiques», обычно называемого «Анналами Жергонна»; Сервуа ввел термин «полюс», а Жергонн — «поляра».

«Трактат о проективных свойствах фигур» Понселе

Определение проективной геометрии как науки о проективных свойствах фигур и систематическое изложение основных ее понятий и теорем, оказавшее громадное влияние на дальнейшее ее развитие, впервые были даны Понселе (см. ИМ, т. 3, с. 201).

Жан Виктор Понселе (1788—1867), военный инженер, учился в Политехнической школе, и его интерес к проблемам проективной геометрии, без сомнения, объясняется влиянием Монжа, непосредственным учеником которого он был, и Карно. Проработав некоторое время в военной Прикладной школе в Меце, Понселе в начале 1812 г. был призван в армию Наполеона, участвовал в походе на Россию и в ноябре 1812 г. попал в плен. Два года Понселе провел в Саратове, и вынужденный досуг позволил ему

Ж. В. ПОНСЕЛЕ

привести в порядок свои замыслы, относящиеся к проективной геометрии. Свои результаты он излагал товарищам по плену — питомцам Политехнической школы. В 1815 г. он возвратился в Мец и здесь оформил эти результаты в виде «Трактата о проективных свойствах фигур» (Traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822). Подзаголовок трактата «Труд, полезный для лиц, занимающихся приложениями начертательной геометрии и геометрическими действиями на местности» ясно указывает, что на формирование идей Понселе оказали существенное влияние методы начертательной геометрии Г. Монжа.

Появлению «Трактата» предшествовали отдельные работы Понселе, опубликованные в «Анналах Жергонна» (Ann. Math., 1817—1818), и представленный им в 1820 г. в Парижскую академию мемуар «О проективных свойствах конических сечений», отзыв Коши о котором был опубликован в том же журнале (1820—1821). Впоследствии Понселе работал профессором Прикладной школы в Меце, выпустил в 1826 г. «Курс механики», а в 1835 г. переехал в Париж, где стал профессором механики в Сорбонне и начальником Политехнической школы. В 1865—1866 гг. он выпустил второе издание «Трактата о проективных свойствах фигур».

«Трактат» Понселе произвел очень сильное впечатление на геометров, причем его название и послужило основанием для введения термина «проективная геометрия».

У Понселе явно определено понятие проективных свойств плоских фигур, т. е. свойств, сохраняющихся при проектированиях и сечениях. Тем самым предмет проективной геометрии выявлен на синтетическом пути. Понселе называет две фигуры «проективными», если одну можно перевести в другую цепью проектирований. Понселе называет проективной фигурой «фигуру, части которой имеют только графические зависимости...», т. е. зависимости, не уничтожаемые проектированием, а проективными отношениями или свойствами — «все отношения или свойства, имеющие место в одно и то же время и у данной фигуры, и у ее проекции» [3].

Понселе показывает, что коническое сечение (коника) является проективной фигурой и что для решения трудной задачи, относящейся к коникам, следует спроектировать конику в окружность, решить задачу для окружности и произвести обратное проектирование. Так как «точки схода» параллельных прямых на «картинной плоскости» не соответствуют действительным точкам проектируемой плоскости, Понселе дополнил все плоскости «идеальными» или «бесконечно удаленными точками», проектирующимися в «точки схода». Бесконечно удаленные точки Понселе вводил с помощью принципа корреляции Карно, который он называл «принципом непрерывности». Развивая идею Карно о «комплексной корреляции», Понселе ввел мнимые точки плоскости и, в частности, мнимые бесконечно удаленные точки, как, например, «циклические точки» — точки, принадлежащие всем окружностям плоскости; две коники могут пересечься в четырех вещественных или мнимых точках, а две окружности — в двух вещественных и в двух циклических точках. Понселе показал, что фокусы коники являются точками пересечения касательных к ней, проведенных из циклических точек. В книге Понселе исследовались также «проективные свойства» пространственных фигур. Наряду с проективными свойствами фигур Понселе ввел и «проективно-метрические» понятия, в определении которых участвует понятие длины (как, например, двойное отношение). На основе этих понятий развивается учение о проективных свойствах прямолинейных фигур (на плоскости) и конических сечений (включая теоремы Паскаля и Брианшона).

С помощью центрального проектирования плоскости на плоскость вводится понятие проективного соответствия (или преобразования) двух плоскостей, которое Понселе называет «гомографией», а также определяются проективные преобразования пространства, в частности гомологии, причем здесь используется понятие бесконечно удаленной плоскости пространства. Особое внимание уделено полярному преобразованию, с помощью которого осуществляется принцип двойственности, выражающий равноправную роль точек и прямых на плоскости. Сам термин (principe de dualité) принадлежит Жергонну, который оспаривал у Понселе первенство в установлении этого общего закона и обосновал его впоследствии в работе «О некоторых общих законах, управляющих линиями и поверхностями всех порядков» (Sur quelques lois génerales qui régissent les lignes et les surfaces de tous les ordres.—Ann. Math., 1826—1827), уже не прибегая к полярному соответствию, а исходя из начальных положений проективной геометрии.

Таким образом, трактат Понселе привел к завершению процесса первоначального формирования проективной геометрии. Был выявлен предмет этой науки и установлены основные ее понятия, законы и важнейшие теоремы, полученные применением синтетического метода. Однако в определении двойного отношения содержалось метрическое понятие длины отрезка.

---

[3] *Poncelet J. V.* Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur la terrain. Paris, 1865, p. 4—5.

Аналитическая проективная геометрия Мёбиуса и Плюккера

С конца 1820-х годов проблемы проективной геометрии на протяжении почти половины столетия становятся центральными для ряда немецких геометров — А. Ф. Мёбиуса, Я. Штейнера, Ю. Плюккера, О. Гессе, Х. Штаудта и других, объединенных участием в «Журнале Крелле» (Journal für die reine und angewandte Mathematik). Во Франции в области проективной геометрии работали Ж. В. Понселе, Ж. Д. Жергонн, М. Шаль и др., в Англии — А. Кэли, Дж. Сальмон и др.

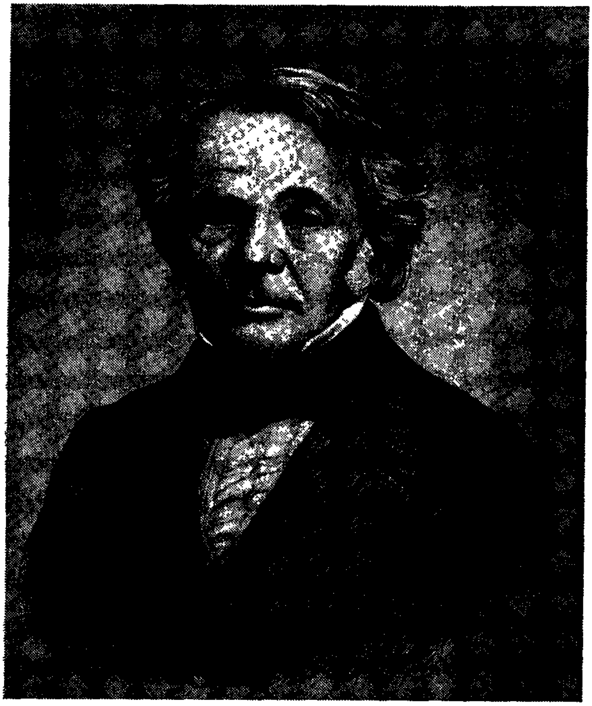
Синтетический метод был так тесно связан в работах Понселе, Штейнера и Шаля с самим предметом проективной геометрии, что ее нередко называли синтетической геометрией. Однако уже вскоре, начиная с работ Мёбиуса и Плюккера, в проективной геометрии началось применение и аналитических методов. Эти методы стали получать все большее распространение, хотя у геометров нередко возникали сомнения в правомерности введения однородных координат, поскольку при этом использовались не проективные понятия.

Однородные координаты, позволяющие характеризовать и бесконечно удаленные точки плоскости, были введены в 1827 г. Мёбиусом, притом весьма своеобразным способом, основанным на понятиях геометрической статики. Независимо от Мёбиуса и почти одновременно с ним опубликовали свои работы Карл Вильгельм Фейербах (1800—1834), брат философа Людвига Фейербаха, в Германии и Э. Бобилье (1797—1832) во Франции, в которых тоже использовались однородные координаты. Мы остановимся сначала на развитии проективной геометрии «аналитиками» — Мёбиусом и Плюккером, а затем перейдем к идеям и результатам «синтетиков» — Штейнера и Шаля.

Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868), сын учителя танцев в Шульцфорте, в студенческие годы слушал лекции Гаусса по астрономии в Гёттингенском университете (1813—1814) и с 1816 г. работал сначала астрономом-наблюдателем, а затем директором Плейсенбургской астрономической обсерватории в Лейпциге. Позднее он был одновременно профессором математики в университете.

Мёбиус опубликовал большое количество отдельных работ и заметок, содержащих ценные и красивые математические результаты, двухтомное «Руководство по статике» (Lehrbuch der Statik. Leipzig, 1837) и выдающуюся по богатству глубоких математических идей книгу «Барицентрическое исчисление» (Der barycentrische Calcül. Leipzig, 1827). Название книги Мёбиуса связано с вводимыми в ней «барицентрическими координатами» точек: если поместить в вершинах фиксированного треугольника $E_1E_2E_3$ массы m_1, m_2, m_3, то центр тяжести («барицентр») этих масс можно характеризовать числами m_1, m_2, m_3, определенными с точностью до общего множителя. Эти числа, называемые «барицентрическими координатами», представляют собой частный случай однородных координат точек. Если считать массы m_1, m_2, m_3 положительными, эти координаты определены только для внутренних точек треугольника; обращению в нуль одной координаты соответствуют точки сторон треугольника, а для точек плоскости, находящихся вне треугольника, следует приписывать хотя бы одной из масс m_1, m_2, m_3 отрицательные значения.

В настоящее время однородные координаты точек вводят, выбирая некоторую точку S вне плоскости $E_1E_2E_3$ и направляя по лучам SE_1, SE_2, SE_3 векторы $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$. Произвольный вектор $\mathfrak{m}$ пространства можно представить в виде суммы $m_1\mathfrak{e}_1 + m_2\mathfrak{e}_2 + m_3\mathfrak{e}_3$. Однородными координатами точки плоскости являются коэффициенты разложения m_1, m_2, m_3 произ-



А. Ф. МЁБИУС

вольного вектора $\mathbf{m}$, направленного по лучу SM, по векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Барицентрические координаты Мёбиуса можно рассматривать как предельный случай таких координат при удалении точки S в бесконечность; в этом случае векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, направленные по параллельным прямым, проходящим через точки E_1, E_2, E_3, следует рассматривать как скользящие векторы, и координаты m_1, m_2, m_3 имеет точка пересечения плоскости с линией скользящего вектора $m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3$, эквивалентного системе векторов, отличающихся от векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ множителями m_1, m_2, m_3. Аналогичные барицентрические координаты Мёбиус определяет и в пространстве с помощью тетраэдра $E_1E_2E_3E_4$. С помощью однородных координат можно характеризовать не только обычные точки плоскости, но и бесконечно удаленные точки плоскости при ее дополнении до проективной плоскости. В случае барицентрических координат координатами бесконечно удаленной точки прямой E_1E_2 являются числа m, $-m$, а для получения бесконечно удаленной точки произвольной прямой, проходящей через точку E_1, следует найти точку E_1' ее пересечения с прямой E_2E_3 и, поместив в точку E_1 произвольную массу, следует поместить в точки E_2, E_3 такие две массы, что их барицентром является точка E_1', а сумма масс в точках E_1, E_2 и E_3 равняется нулю.

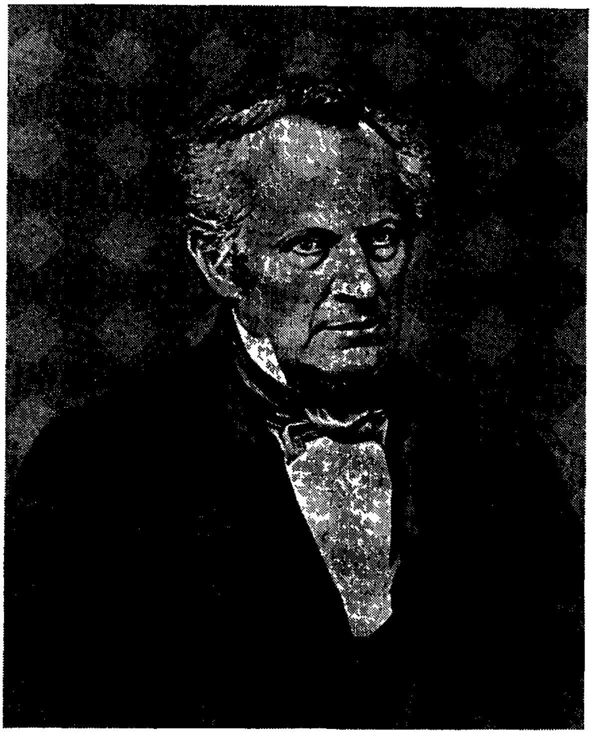
Барицентрические координаты позволили Мёбиусу сформулировать целый ряд аффинных и проективных свойств плоских и пространственных фигур. В связи с этим значительная часть «Барицентрического исчисления» посвящена аффинным и проективным преобразованиям, которые он впервые записал аналитически в однородных координатах, а также преобразованиям подобия и изометрическим преобразованиям. То, что мы называем геометрическим преобразованием, т. е. взаимно однозначное соответствие между двумя фигурами или областями пространства, Мёбиус именовал «сродством» (Verwandschaft), возможно, под влиянием эйлеровского термина «affinitas» (см. ИМ, т. 3, с. 168). Аффинное преобразование Мёбиус именовал «аффинным сродством», или «аффинитетом», а проективное преобразование — наиболее общее преобразование плоскости, при котором точки, лежащие на одной прямой (коллинеарные точки), переходят в точки, обладающие тем же свойством,— «коллинеарным сродством», или «коллинеацией». Конгруэнтные системы точек, следуя античной традиции, Мёбиус называл равными и подобными, причем рассматривал не только такие конгруэнтные системы, которые можно совместить непрерывным преобразованием, но и те, которые получаются друг из друга зеркальным отражением от плоскости. Мёбиус показал, не привлекая метрических понятий, что коллинеации на плоскости определяются произвольным заданием двух соответственных четверок точек, из которых никакие три точки не коллинеарны (в пространстве — двух аналогичных пятерок точек).

Тесно связанная с барицентрическим исчислением теория скользящих векторов в форме механических сил является предметом упомянутого «Руководства по статике» Мёбиуса, также весьма насыщенного геометрическим материалом. В частности, здесь рассматривались нуль-системы — специальные случаи коррелятивных преобразований пространства, переводящих точки в плоскости, при которых коллинеарные точки переходят в плоскости, проходящие через одну прямую; нуль-системы — преобразования такого типа, при которых точки переходят в плоскости, проходящие через эти точки,— следуют по простоте за полярными преобразованиями, т. е. переходами от точек к их полярным плоскостям относительно поверхностей второго порядка. До Мёбиуса нуль-системы рассматривались итальянским геометром Гаэтано Джорджини (1795—1874) в работе «О некоторых свойствах плоскостей моментов» (Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti.— Mem. Soc. ital. sci., Modena, 1828).

При изменении отрезков, площадей и объемов Мёбиус систематически пользовался принципом знаков, связывая знак с совпадением или несовпадением направления обхода измеряемой величины с предварительно выбранным «положительным» направлением. Благодаря этому он впервые дал полную теорию двойного отношения четверки точек на прямой и доказал его инвариантность при проективных преобразованиях.

Мёбиус впервые ввел в рассмотрение уникурсальные кривые (координаты которых задаются рациональными функциями параметра). Название этих кривых объясняется тем, что на проективной плоскости эти кривые можно провести одним росчерком пера. В частности, Мёбиус нашел рациональные параметрические представления конических сечений. На этом пути он впервые рассмотрел пространственные кривые третьего порядка и изучил их свойства.

Юлиус Плюккер (1801—1868), уроженец Эльберсфельда, учился в университетах Бонна и Парижа, защитил докторскую диссертацию в Бонне в 1825 г. С 1828 по 1831 г. он — экстраординарный профессор этого университета, а с 1832 по 1834 г.— Берлинского университета, который он покинул, так как подвергся нападкам последователей Штейнера, оберегавших чистоту синтетического метода. В 1836 г. он получил ординарную профессуру в Бонне по двум кафедрам — математики и физики, и с этого времени его научная деятельность активно протекала по этим двум направлениям. Так, в области физики ему принадлежат такие замечательные открытия, как обнаружение явления кристалломагнетизма (1847), изучение спектров электрических разрядов (1857), а исследуя влияние магнитного поля на



Ю ПЛЮККЕР

разряды, он почти вплотную подошел к открытию катодных лучей, завершенному его учеником Гитторфом. Однако наиболее значительны его достижения в геометрии. Если в своих ранних работах, продолжая идеи французских геометров, он проводит исследования синтетическим методом, то уже с 1828 г. вырабатывает свой «аналитико-геометрический» метод.

Основные идеи и результаты Плюккера изложены в пяти следующих больших трудах:

1. «Аналитико-геометрические исследования» (Analytisch-geometrische Entwicklungen. Essen, 1828—1831).

2. «Система аналитической геометрии (на плоскости)» (System der analytischen Geometrie. Berlin, 1835).

3. «Теория алгебраических кривых» (Theorie der algebraischen Curven. Bonn, 1839).

4. «Система аналитической геометрии в пространстве в новой аналитической трактовке» (System der Geometrie des Raumes in neuer analytische Behandlungweise. Bonn, 1846).

5. «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой как элемента пространства» (Neue Geometrie des Raumes gegründet auf Betrachtung der geraden Linien als Raumelement. Leipzig, 1868—1869).

В «Аналитико-геометрических исследованиях» Плюккер в отличие от Мёбиуса ввел совершенно общие однородные проективные координаты на плоскости, причем путь введения был иным. С аналитической точки зрения это просто три независимые линейные однородные функции трех декартовых однородных координат точек, заданные с точностью до общего множителя. С геометрической точки зрения, как показал Плюккер, эти три числа x_1, x_2, x_3 пропорциональны (с произвольным коэффициентом пропорциональности) расстояниям до сторон произвольно заданного треугольника, измеренным каждое своей единицей длины. Эти координаты получили название «треугольных», или «трилинейных». Аналогично в «Системе аналитической геометрии в пространстве» Плюккер ввел и однородные проективные координаты в пространстве.

Аналитический метод облегчил оперирование с бесконечно удаленными и мнимыми элементами и естественно привел к введению Плюккером линейных координат, т. е. координат прямой линии. Если уравнение прямой имеет вид $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, то тройка чисел (u_1, u_2, u_3) и будет линейными (или тангенциальными) координатами этой прямой. Рассматривая это уравнение как условие того, что переменная точка (x_1, x_2, x_3) лежит на фиксированной прямой (u_1, u_2, u_3), или как условие того, что переменная прямая (u_1, u_2, u_3) проходит через фиксированную точку (x_1, x_2, x_3), Плюккер сразу получил из симметрии выражения $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ обоснование принципа двойственности Понселе — Жергонна. Сходным образом Плюккер ввел координаты плоскости в пространстве и обосновал принцип двойственности в пространстве, в котором точке соответствует плоскость.

В своих геометрических исследованиях он с большим искусством применяет метод сокращенных обозначений, о котором мы говорили выше.

Существенно новой идеей, внесенной Плюккером в геометрию на аналитическом пути, является впервые указанная и осуществленная им возможность принимать в качестве элементов пространства вместо точек другие геометрические образы, например прямые, окружности и т. д. При этом естественно возникают многообразия бо́льших измерений (например, многообразие окружностей на плоскости имеет три измерения, многообразие сфер — четыре, многообразие прямых в пространстве имеет тоже четыре измерения и т. д.). Шесть однородных координат $p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$ прямой линии в пространстве, проходящей через точки (x_i) и (y_i), связанных одним квадратичным соотношением, получили впоследствии название «плюккеровых», хотя еще раньше они были введены Грассманом в «Учении о линейном протяжении» (1844).

Важный вклад Плюккер внес в общую теорию плоских алгебраических кривых высших порядков и в теорию геометрических преобразований, о чем будет говориться ниже.

Синтетическая проективная геометрия Штейнера и Шаля

Наиболее крупный вклад в развитие проективной геометрии синтетическими методами после Понселе внесли Штейнер и Шаль. Работы Штейнера появились первыми, а позднее результаты обоих геометров нередко пересекались.

Якоб Штейнер (1796—1863) родился в семье швейцарского пастуха и окончил начальную школу в 1815 г. Увлекшись реформаторскими педагогическими идеями своего учителя Песталоцци, он некоторое время работал учителем в его педагогическом институте, а затем переехал в Гейдельберг (1818—1821), где изучал главным образом работы французских геометров, зарабатывая на жизнь частными уроками. Штейнер полагал, что геометрию лучше всего можно постичь, напряженно размышляя, путем созерцания воображаемых образов. Он отвергал не только применение алгебры и анализа, но и чертежи. Интерес к педагогике Песталоцци, возникший в Берлине, побудил Штейнера переехать в Берлин, где он получил должность учителя, с большим успехом вел преподавание и интенсивно занимался научными исследованиями, помещая в журнале Крелле свои работы, начиная с первого года его издания (1826). Его основополагающий труд был опубликован в 1832 г. В 1834 г. Штейнер был избран в Берлинскую академию наук, а год спустя получил приглашение на должность профессора в Берлинский университет. В последние годы жизни он, занимаясь алгебраической геометрией образов высшего порядка, нередко публиковал только формулировки теорем без доказательств и без указаний на источники, которыми пользовался.

Согласно замыслу Штейнера, система проективной геометрии должна быть развита с помощью последовательного перехода от более простых начальных линейных геометрических форм к формам более сложным, а затем путем использования проективных зависимостей — и к образам более высоких порядков. Эти идеи изложены им в его основном сочинении «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander. Berlin, 1832). Образы первой ступени — это прямолинейный точечный ряд, пучок прямых, пучок плоскостей; образы второй ступени — точки и прямые одной плоскости, связка прямых и плоскостей; образы третьей ступени — точки и плоскости пространства. Далее устанавливается проективность основных образов первой ступени, характеризуемая равенством двойного отношения соответствующих элементов, которое вводится на основе метрических величин. Широко используется принцип двойственности. Рассматривается конструктивное осуществление проективных соотношений с помощью перспектив, т. е. проектирований и сечений.

С помощью двух проективных пучков прямых на плоскости строится образ высшего порядка — линия (или ряд) второго порядка как множество точек пересечения соответствующих лучей; сначала рассмотрена окружность, а затем это переносится и на общий случай конического сечения. По принципу двойственности вводятся и образы второго класса (пучок второго порядка) на плоскости. В итоге ряды и пучки первого порядка порождают различные ряды и пучки второго порядка (например, однополостный гиперболоид порожден двумя проективными пучками плоскостей) и открывается новый путь исследования их разнообразных свойств.

Существенным недостатком работ Штейнера являлось отсутствие четкого применения принципа знаков и употребления мнимых элементов.

В проективной геометрии Штейнера большой удельный вес играли конструктивные задачи, выполняемые одной линейкой или линейкой при наличии неподвижного круга. Задачи этих типов равносильны построению соответственно решений линейного и квадратного уравнений. К задачам второго типа относится построение неподвижных точек проективного соответствия в прямолинейном ряде точек. Так как задачи на построение конечного числа точек, разрешимые при помощи циркуля и линейки, являются задачами этих двух типов, отсюда вытекает, что всякая такая задача разрешима при помощи одной линейки при наличии начерченного круга. Такие построения, как мы видели, рассматривались Ламбертом и Понселе и являются частным случаем построений ал-Фараби, Абу-л-Вафы и Леонардо да Винчи (см. ИМ, т. 1, с. 230, 323). Этим построениям была посвящена специальная книга Штейнера «Геометрические построения, выполняемые посредством прямой линии и неподвижного круга» (Die geomet-

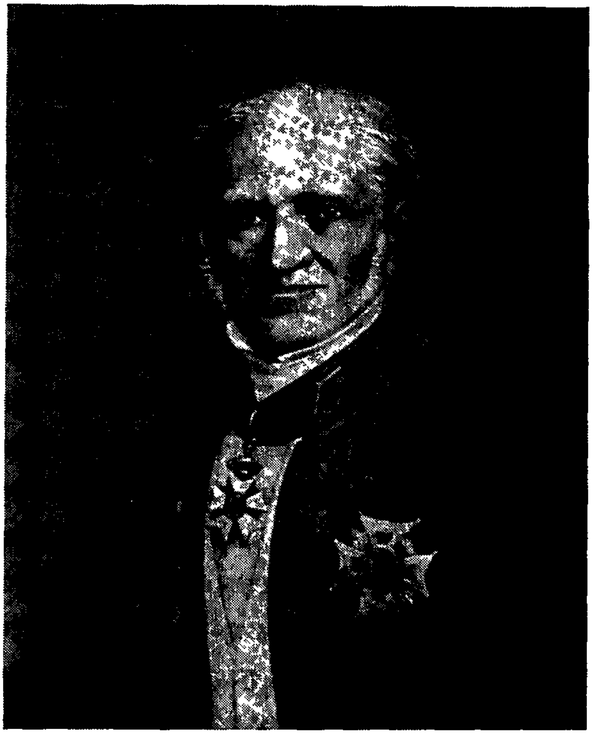
Я. ШТЕЙНЕР

rische Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linieund eines fes ten Kreises. Berlin, 1833).

Из других работ Штейнера следует упомянуть его работу о геометрических максимумах и минимумах (J. für Math., 1842), в которой, в частности, прекрасно исследована элементарными методами изопериметрическая задача, однако отсутствует доказательство существования решения, потребность в котором тогда еще не была замечена.

Мишель Шаль (1793—1880), будучи студентом Политехнической школы, еще застал последние годы преподавания Монжа и написал тогда работу об однополостном гиперболоиде (1813). Однако затем он отошел от научной жизни, поселился на родине в провинции и, занявшись банковской деятельностью, нажил большое состояние. Только почти через 25 лет, в 1837 г., появился его замечательный «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов», вызвавший широкий интерес и содержавший также ряд оригинальных результатов.

В 1841 г. Шаль получил профессуру по машиностроению в Политехнической школе, а с 1846 г. для него была создана в Сорбонне кафедра высшей геометрии. В 1839 г. Шаль был избран членом-корреспондентом Парижской академии наук, а в 1851 г.— академиком. В Сорбонне началась особенно интенсивная его научная и педагогическая деятельность, длившаяся более тридцати лет. Опубликовав ряд работ и «Трактат по высшей геометрии» (Traité de la Géométrie supérieure. Paris, 1852), он стал одним из ведущих французских геометров. Тем неприятнее было положение, в которое он попал в 1860-х годах. Интересуясь историей науки, Шаль приобрел у одного лица оригинал неизвестного письма Паскаля, в котором тот якобы предвосхищал теорию тяготения Ньютона, а также некоторые



М. ШАЛЬ

другие старинные рукописи. Шаль стал публиковать сенсационные выдержки из них в «Comptes rendus» Парижской академии наук, вызывавшие все большее недоумение и возражения в ученом мире. Через несколько лет выяснилось, что Шаль стал жертвой ловкого мошенника: экспертиза доказала, что все проданные последним документы — подделки.

В своих научных исследованиях Шаль следовал традициям французских геометров, применяя синтетические методы. Возможно, он пришел к своей системе проективной геометрии самостоятельно, независимо от Штейнера, но в работах этих авторов много общего. Так, в основу у обоих положена инвариантность двойного отношения четырех точек прямой и четырех прямых пучка, называемого Шалем ангармоническим отношением, причем само это отношение тоже вводится с помощью метрических понятий. Однако, подобно Мёбиусу, Шаль, рассматривая величины направленных отрезков, четко пользуется принципом знаков, так что его теория получает более совершенное изложение, чем у Штейнера. Конические сечения Шаль, подобно Штейнеру, изучает, рассматривая их образованными с помощью двух проективных пучков или рядов, но в отличие от Штейнера нередко говорит о геометрических соотношениях в мнимой области и рассматривает вещественные части в фигурах как случайно выделившиеся из мнимых. Шаль ввел в проективную геометрию общее понятие корреляции — коррелятивного преобразования пространства, частными случаями которого являются полярное преобразование и нуль-система, а также подробно изложил теорию коллинеаций, называемых им вслед за Понселе «гомографиями».

Х. ФОН ШТАУДТ

Особенно важную роль в распространении интереса к проективной геометрии сыграл учебник высшей геометрии Шаля, а также его «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов» (Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes de la géométrie. Paris, 1837), значительно больше половины которого занято его оригинальными заметками. Книга очень скоро была переведена на ряд европейских языков, в том числе на русский. Шаль впервые выявил роль многих предшественников современных ученых в создании проективной геометрии — Евклида, Паппа, Дезарга и других, проанализировал становление учения о полярном соответствии, а также принципов непрерывности и двойственности. Он показал глубокую связь между отдельными исследованиями, подчеркнул естественную мысль, что новые открытия подготовлены трудами предшественников. Однако Понселе и некоторые другие французские геометры встретили книгу Шаля недружелюбно, полагая, что он просто стремится принизить значение их работ.

Штаудт и обоснование проективной геометрии

В середине XIX в. происходили ожесточенные споры между сторонниками синтетического и аналитического методов в проективной геометрии, обвинявшими друг друга в смешении проективных и метрических понятий. Действительно, основное понятие, применяемое при синтетическом изложении проективной геометрии,— двойное отношение четырех точек прямой — вводилось с помощью рассмотрения длин отрезков. С другой стороны, введение проективных координат тоже основывалось или на понятиях расстояний до сторон треугольника, или на формулах, применяемых в статике, или осуществлялось несколько иначе, но всегда было связано с привлечением прямоугольных или косоугольных декартовых координат, определение которых содержало метрические понятия. Так возникла проблема освободить проективную геометрию от примеси метрических понятий, содержавшейся в ее началах.

Эта проблема привлекла внимание Штаудта, и на протяжении ряда лет он занимался ею, добиваясь в итоге существенного продвижения в создании чисто проективной геометрии, независимой от метрических понятий.

Христиан фон Штаудт (1798—1867), уроженец Ротенбурга, выходец из знатной семьи, был, как и Мёбиус, учеником Гаусса, который направлял его в области астрономии и теории чисел. Штаудт работал сначала в Вюрцбургском университете, затем в Нюрнбергском политехникуме, а с 1835 г. до конца жизни был профессором в Эрлангенском университете. В Эрлангене он сосредоточился на вопросах геометрии, здесь он написал книгу «Геометрия положения» (Geometrie der Lage. Nürnberg, 1847), название которой подчеркивает преемственность с книгой Карно, и три «Дополнения к геометрии положения» (Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg, 1856, 1857, 1860). Если проективная геометрия Понселе, Мёбиуса, Плюккера, Шаля и Штейнера была тесно связана с элементарной, а такой проективный инвариант четырех точек прямой или четырех прямых пучка, как двойное отношение этих четырех точек или прямых, определялся через отношения длин отрезков на прямой или синусов углов между прямыми пучка, то Штаудту удалось освободить проективную геометрию от элементарной геометрии. В «Геометрии положения» Штаудт вводит гармоническую четверку элементов независимо от понятия двойного отношения на чисто проективном пути с помощью полного четырехугольника, или четырехсторонника (рис. 5). Проективность двух форм первой ступени характеризуется сохранением гармонизма. Чтобы вывести основную теорему о том, что проективное соответствие двух образов первой ступени определяется произвольным заданием двух точек соответственных элементов, он доказывает предварительно лемму о двойных точках двух проективных рядов, лежащих на одной прямой, а именно, что число двойных точек в этом случае не может быть больше двух, если это соответствие нетождественно; следует отметить, что доказательство проведено недостаточно строго, так как аксиоматика непрерывности в те годы еще не была установлена. Из этих леммы и теоремы вытекает эквивалентность нового определения проективного соответствия с определением по Штейнеру, опирающимся на сохранение двойного отношения.

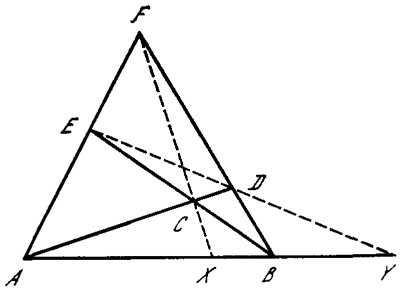


Рис. 5

Далее Штаудт определяет проективные соответствия образов второй и третьей ступеней — коллинеации и корреляции. Например, коллинеация двух плоскостей вводится как точечное взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняется прямолинейность точечного ряда. Аналогично определяются корреляции.

Поляритет выделяется из корреляции двух плоских полей с общим носителем как специальный частный ее случай.

Коническое сечение (учитывая и мнимые образы) вводится как множество точек, принадлежащих в заданном поляритете своим полярам. Аналогично вводятся поверхности второго порядка. На этой основе проведено изучение проективных свойств невырожденных образов второго порядка.

На чисто проективном пути Штаудт ставит в соответствие каждой точке проективной прямой действительное число или символ ∞. Построение такой проективной шкалы основано на том, что арифметические операции $x \to x + a$ и $x \to ax$ на обычной числовой прямой можно рассматривать как аффинные преобразования и, следовательно, как частные случаи проективных преобразований. Поэтому, поставив любым трем различным точкам проективной прямой в соответствие символы 0, 1 и ∞, можно для любых двух точек, соответствующих числам a и b, построить точки, соответствующие числам $a + b$, $a - b$, ab и a/b, и, следовательно, точки, соответствующие всем целым и рациональным числам, после чего с помощью предельного перехода строятся точки, соответствующие иррациональным числам. Тем самым Штаудт смог посредством чисто проективных операций дать чисто проективное определение однородных координат на плоскости и в пространстве. Для задания таких координат на плоскости, как показал Штаудт, достаточно задать вершины треугольника $E_1E_2E_3$ и некоторую точку E, не лежащую на прямых E_iE_j (в этом случае, поставив в соответствие точкам E_i и E_j символы 0 и ∞, а точке пересечения прямых E_iE_j и EE_k символ 1, мы определим на прямой E_iE_j проективную шкалу). Аналогично для задания таких координат в пространстве достаточно задать вершины тетраэдра $E_1E_2E_3E_4$ и некоторую точку E, не лежащую на плоскостях $E_iE_jE_k$. Определенное Штаудтом геометрическое исчисление получило название «исчисление вурфов»: словом «Wurf», т. е. бросок, Штаудт называет числа, которые сопоставляются проективно инвариантным способом четверкам точек на прямой. Можно показать, что вурф совпадает с двойным отношением рассматриваемой четверки точек, но строгое доказательство этого факта самому Штаудту вследствие упомянутых причин не удалось.

Опираясь на построение рациональной сети, введя с помощью вурфов проективные координаты без использования метрических понятий, Штаудт не смог, однако, достаточно строго определить иррациональные значения координат. Этот недостаток был отмечен и исправлен впоследствии Ф. Клейном в работе «О так называемой неевклидовой геометрии» (Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.— Math. Ann., 1871—1872).

В «Дополнениях к геометрии положения» Штаудт показал, что и мнимые точки, которые ранее вводились чисто аналитически, можно определить синтетически с помощью эллиптических инволюций на прямой, т. е. инволюционных проективных преобразований прямой, не имеющих действительных неподвижных точек. Заметим, что эллиптическая инволюция задается действительным образом, а именно двумя произвольными парами действительных точек, разделяющими друг друга (двойные точки инволюции одновременно гармонически делят обе эти пары точек). Чтобы отличить одну из пары комплексно-сопряженных точек от другой, Штаудт предложил задавать на прямой, носительнице инволюции, соответственно то или другое направление.

Проективная геометрия Кэли

В Англии развитие проективной геометрии стало опираться на аналитические методы.

Упомянутые нами выше учебники Дж. Сальмона по аналитической геометрии содержали много материала по проективной геометрии; ему же принадлежат весьма популярные руководства по алгебраической геометрии кривых высшего порядка и теории инвариантов: «Плоские кривые высших порядков» (Higher plane curves. Dublin, 1852) и «Современная высшая алгебра» (Modern higher algebra. Dublin, 1859). Сальмон вместе с А. Кэли и Дж. Сильвестром, по преимуществу алгебраистами, составляли, как указывалось, «инвариантную троицу», прозванную так за их работы по теории инвариантов.

Исключительно важные результаты были получены Артуром Кэли при разработке им теории алгебраических форм и координатного изложения проективной геометрии. После его геометрических исследований стало особенно ясным принципиальное значение обоснования чисто проективной геометрии.

Кэли ввел в рассмотрение так называемую проективную метрику в своем «Шестом мемуаре о формах» (A sixth memoir upon quantics.— Philos. Trans., 1859). Из этой работы вытекало после определенных дополнений и разъяснений Ф. Клейна (1871), что не только евклидова геометрия, но и другие метрические геометрии, называемые неевклидовыми (геометрии Лобачевского и Римана) могут рассматриваться как специальные виды общей проективной геометрии, когда пространство дополнено некоторым фиксированным образом второго порядка — по терминологии Кэли «абсолютом» (подробнее об этом см. ниже). Следует отметить, что еще до Кэли ученик Шаля Эдмон Лагерр (1834—1886) в «Заметке о теории фокусов» (Note sur la théorie des foyers.— Nouv. Ann. Math., 1853) нашел проективную форму для величины угла на евклидовой плоскости: согласно «формуле Лагерра» угол φ между двумя прямыми выражается через двойное отношение W этих прямых и двух мнимосопряженных «изотропных прямых» (прямых, соединяющих точку пересечения данных прямых с циклическими точками плоскости этих прямых) соотношением

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln W.$$

В этом смысле проективная геометрия содержит в себе метрическую, и поэтому обоснование ее следовало проводить, чтобы избежать логической ошибки порочного круга, независимо от метрических понятий.

Сам Кэли избежал этой ошибки, развивая проективную геометрию чисто аналитически. Например, он называл точкой на плоскости тройку чисел (x_1, x_2, x_3), не равных одновременно нулю и заданных с точностью до общего ненулевого множителя; аналогично определялась прямая (u_1, u_2, u_3). Условие расположения точки на прямой задается равенством $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ и т. д.

Дальнейшее развитие математики показало преимущество аналитических методов в геометрии. Несмотря на всю красоту доказательств некоторых теорем с помощью синтетических методов, на наглядность и особую радость, которые доставляет нам этот подход при внутреннем созерцании геометрических образов, и, наконец, на большую помощь пространственной интуиции в решении отдельных вопросов, в целом эти методы громоздки, труднодоступны и нередко исключают постановку и решение более общих проблем.

Так, например, глубокие общие принципы соподчинения отдельных геометрических дисциплин по группам и подгруппам преобразований были, как мы увидим, получены Ф. Клейном на аналитическом пути в его «Эрлангенской программе» 1872 г.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Алгебраические кривые

Аналитические методы с большим успехом применялись в алгебраической геометрии кривых и поверхностей высшего порядка и в развитии теории инвариантов, где собственно другие методы и неприменимы. В этой области работали К. Г. Якоби, О. Гессе, Г. Грассман, З. Г. Аронгольд, А. Кэли, Дж. Сильвестр, Дж. Сальмон, А. Клебш, П. Гордан, Э. Бельтрами, Л. Кремона и другие математики.

В XVIII в. теория кривых 3-го и 4-го порядков излагалась в ряде книг по аналитической геометрии вслед за теорией кривых 2-го порядка (см. ИМ, т. 3, с. 164). В курсы аналитической геометрии XIX в. включается только учение о прямых и кониках, теория же алгебраических кривых соединяется с проективной геометрией. Алгебраические кривые теперь, как правило, рассматриваются уже не на евклидовой или аффинной плоскости, а на проективной плоскости, причем для простоты выкладок эта плоскость предполагается комплексной. Классическим изложением такой теории является «Теория алгебраических кривых» (1839) Плюккера. Вводя линейные (тангенциальные) координаты прямых u_1, u_2, u_3, Плюккер рассматривает уравнение

$$\varphi (u_1, u_2, u_3) = 0,$$

определяющее однопараметрическое семейство прямых, как уравнение кривой, огибающей это семейство. Это уравнение называется *тангенциальным*, так как кривая здесь определяется не своими точками, а касательными. Степень точечного уравнения кривой называется ее *порядком*, а степень ее тангенциального уравнения называется *классом*. Плюккер показал, что на комплексной проективной плоскости порядок кривой n, ее класс m, число ее двойных точек δ, число ее точек возврата $\varkappa$, число ее двойных касательных ι и число ее точек перегиба τ при отсутствии других особенностей связаны формулами

$$m = n (n - 1) - 2\delta - 3\varkappa, \qquad n = m (m - 1) - 2\iota - 3\pi,$$
$$\tau = 3n (n - 2) - 6\delta - 8\varkappa, \qquad \varkappa = 3m (m - 2) - 6\iota - 8\pi,$$

которые теперь носят его имя.

Сравнивая числа параметров, от которых зависит кривая, с числом констант ее уравнения, Плюккер вскрыл ряд ошибок Эйлера в его классификации кривых 4-го порядка.

Риман в своей «Теории абелевых функций» (Theorie der Abelschen Funktionen. Göttingen, 1857) ввел важную характеристику плоских алгебраических кривых, обозначаемую им буквой p. Альфред Клебш (1833—1872), профессор Гёттингенского университета и основатель журнала «Mathematische Annalen», в работе «О плоских кривых, координаты которых являются рациональными функциями одного параметра» (Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.— J. für Math., 1864) назвал величину p *родом* (Geschlecht). Риман показал, что при $p = 0$ координаты кривой могут быть выражены рациональными функциями одного параметра; при $p = 1$ — эллиптическими интегралами, а при $p > 1$ — гиперэллиптическими абелевыми интегралами. Кривые нулевого порядка — это уникурсальные кривые, рассматривавшиеся Мёбиусом, кривые 1-го рода называются *эллиптическими*, или *бикурсальными*.

В работе «Об особенностях алгебраических кривых» (Über die Singularitäten algebraischer Curven.— J. für Math., 1865) Клебш показал, что у кривых, для которых справедливы формулы Плюккера, род p связан с числами n, m, δ, $\varkappa$, ι, τ соотношениями

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \varkappa = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Из других работ по теории плоских кривых упомянем работу профессора университета в Галле Густава Роха (1839—1866) «О числе произвольных постоянных в алгебраических функциях» (Über die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen.— J. für Math., 1865), в которой автор, развивая идеи «Теории абелевых функций» Римана, доказал теорему, известную под названием «теоремы Римана — Роха».

Алгебраические поверхности

В 1849 г. были опубликованы две статьи А. Кэли и Дж. Сальмона о тройных касательных плоскостях к поверхностям третьего порядка (Cambr. and Dublin Math. J., 1849). Кэли в своей статье установил, что на гладкой кубической поверхности расположено некоторое число прямых, а Сальмон доказал, что число этих прямых равно 27. Синтетической теории кубических поверхностей посвящена работа Я. Штейнера «О поверхностях третьей степени» (Über die Flächen dritten Grades.— J. für Math., 1856). 27 прямых на кубической поверхности вскоре стали предметом специальных исследований Штейнера (Monatsber. Preuss. Akad. Wiss., 1857), Л. Шлефли, о котором мы будем говорить ниже в связи с его работами по многомерной геометрии (Quart. J., 1858), Э. Жонкьера (Nouv. Ann. Math., 1859) и Дж. Сильвестра (C. r. Acad. sci., Paris, 1861), о котором мы говорили в главе об алгебре (см. Кн. 1, с. 78—80). Если вначале кубическая поверхность рассматривалась в комплексном пространстве, то Шлефли рассмотрел такие поверхности в вещественном пространстве, выделив в зависимости от вещественности и мнимости этих прямых и плоскостей, в которых лежат компланарные тройки этих прямых, пять классов вещественных поверхностей. 27 прямых на гладкой кубической поверхности в комплексном пространстве можно описать следующим образом: уравнение такой поверхности можно привести к каноническому виду $ace - bdf = 0$, где a, b, c, d, e, f — линейные многочлены. Если обозначить пересечение плоскостей $a = 0$ и $b = 0$ символом ab, то девять из 27 прямых на рассматриваемой поверхности — прямые ab, ad, af, cb, cd, cf, eb, ed и ef. Если обозначить три принадлежащие поверхности прямые, пересекающие прямые ab, cd, ef, через $(ab, cd, ef)_i$, где $i = 1, 2, 3$, то остальные 18 из этих 27 прямых — прямые $(ab, cd, ef)_i$, $(ad, cf, eb)_i$, $(af, cb, ed)_i$, $(ab, cf, ed)_i$, $(ad, cb, ef)_i$ и $(af, cd, eb)_i$.

В упомянутых и последовавших за ними работах было доказано, что эти 27 прямых составляют 45 компланарных троек и 36 так называемых двойных шестерок, также открытых Шлефли. Эти «двойные шестерки» обладают тем свойством, что каждая прямая каждой из этих шестерок не пересекается с одной из прямых каждой из остальных шестерок, но пересекается с остальными пятью прямыми каждой из этих шестерок.

Уже в первых работах Кэли и Сальмона рассматривались тройные касательные плоскости к этим поверхностям. В течение нескольких десятилетий XIX в. было найдено огромное количество свойств этих поверхностей. Пять видов вещественных гладких кубических поверхностей, открытых Шлефли, обладают соответственно 27, 15, 7, 3 и 3 вещественными прямыми и 45, 15, 5, 7 и 13 вещественными плоскостями компланарных прямых.

Значение, которое в XIX в. придавалось этим поверхностям, видно из слов Сильвестра о том, что, подобно тому как на могиле Архимеда были высечены изображения цилиндра, конуса и шара, на могилах Кэли и Сальмона следовало бы изобразить «кубическую икосигептаграмму», а после того как в 1869 г. профессору начертательной геометрии политехникума в Карлсруэ Христиану Винеру (1826—1896) удалось изготовить модель кубической поверхности со всеми 27 прямыми на ней, Сильвестр заявил, что это одно из открытий, «которое должно навсегда вписать 1869 год в летописи науки» [4]. Советский математик Ю. И. Манин, рассмотревший в своей монографии «Кубические формы» (1972) проблему 27 прямых на кубической поверхности с современной точки зрения, писал: «Конфигурации двадцати семи прямых на гладкой кубической поверхности посвящались целые книги... Их изысканная симметрия одновременно завораживает и раздражает» [5].

Общая теория алгебраических поверхностей в комплексном пространстве была построена учеником Клебша профессором Эрлангенского университета Максом Нётером (1844—1921), отцом знаменитой алгебраистки Эмми Нётер (1882—1935), в работах «К теории однозначного соответствия алгебраических образов» (Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.— Math. Ann., 1870—1875), «Обобщение теоремы Римана — Роха на алгебраические поверхности» (Extension du théorème de Riemann — Roch aux surfaces algébriques.— C. r. Acad. sci., Paris, 1886) и других, профессором Болонского и Римского университетов Федериго Энриквесом (1871—1946) во «Введении в геометрию на алгебраических поверхностях» (Introduzione alla geometria sopre le superficie algebraiche. Roma, 1896) и еще некоторыми учеными. После появления многомерной геометрии появилась и теория алгебраических многообразий пространств, которая имеет более алгебраический, чем геометрический характер.

Геометрические исчисления, связанные с алгебраической геометрией

От метода Плюккера подсчета чисел параметров алгебраических кривых и их уравнений происходит специальное направление алгебраической геометрии, называемое «исчислительной геометрией». Это направление было основано профессором «Иоганнеума» в Гамбурге Германом Шубертом (1848—1911) в «Исчислении исчислительной геометрии» (Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig, 1879).

В работе «n-Мерные обобщения основных числовых характеристик нашего пространства» (Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Abzahlen unseren Raumes.— Math. Ann., 1866) Шуберт перенес эти методы на многомерную геометрию и, в частности, установил, что размерность многообразия всех m-мерных плоскостей n-мерного пространства — так называемого грассманова многообразия (см. ниже) — равна $(m + 1)(n - m)$, а также нашел размерности названных его именем «шубертовых многообразий» — многообразий плоскостей, имеющих пересечения данных размерностей с системой вложенных друг в друга фиксированных плоскостей (такая система плоскостей в настоящее время называется флагом). Исследования Шуберта были продолжены профессором

[4] *Henderson A.* The twenty seven lines upon the cubic surface. Cambridge, 1911, p. 2—3; см. также: *Манин Ю. И.* Кубические формы. М., 1972, с. 195—196.
[5] *Манин Ю. И.* Там же, с. 121.

Копенгагенского университета Иеронимом Георгом Цейтеном (1839—1920), известным более как историк математики, в его «Учебнике исчислительных методов геометрии» (Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Leipzig, 1914). Принципы подсчета параметров, не имевшие достаточного обоснования у самого Шуберта, были обоснованы с помощью топологических методов знаменитым алгебраистом (также известным историком математики) Б. Л. Ван дер Варденом (1929).

В «Учении о протяжении» (1862) Г. Грассмана, о котором мы будем говорить более подробно ниже, было предложено оригинальное геометрическое исчисление, по существу относящееся к проективной геометрии и являющееся развитием «органической геометрии» Маклорена (см. ИМ, т. 3, с. 156). Если x — произвольная точка коники, a, b, c — три фиксированные точки той же коники, а A и B — две фиксированные прямые в плоскости этой же коники, то, находя пересечение прямой xa с прямой A, прямую, соединяющую полученную точку пересечения с b, точку пересечения полученной прямой с прямой B и прямую, соединяющую полученную точку пересечения с c, Грассман находит, что последняя прямая снова проходит через x и таким образом можно построить любую точку x коники. Грассман записал этот факт в виде равенства нулю «планиметрического произведения» $xaAbBcx = 0$ (рис. 6). Этот метод может быть применен для определения и построения любой алгебраической прямой. Например, кривая третьего порядка характеризуется равенством $xaAbxCcDdx = 0$.

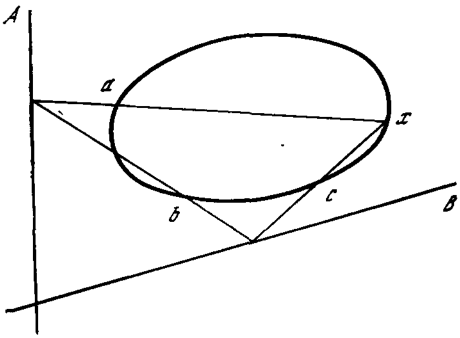


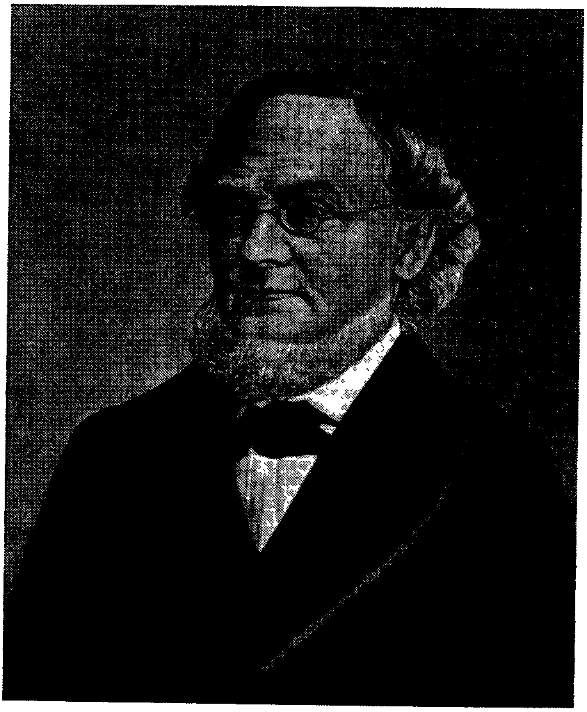
Рис. 6

«Учение о линейном протяжении» Грассмана

Мы уже упоминали о том, что в «Барицентрическом исчислении» Мёбиуса значительное место занимает изучение «аффинного сродства». Отметим, что Мёбиус систематически пользуется не только ориентированными длинами отрезков, но и ориентированными площадями плоских фигур и ориентированными объемами тел, причем «знак» площади треугольника определяется порядком перечисления его вершин или сторон, выходящих из одной вершины, а «знак» объема тетраэдра — порядком перечисления его ребер, выходящих из одной вершины. Мёбиус показывает, что при аффинных преобразованиях сохраняются как отношения ориентированных длин отрезков, так и отношения ориентированных площадей и объемов.

Важную роль в создании аффинной геометрии как отдельной ветви геометрии сыграло «Учение о линейном протяжении» (Lineale Ausdehnungslehre. Leipzig, 1844) Г. Грассмана.

Герман Грассман (1809—1877) родился в Штеттине (ныне Щецин в Польше) в пасторской семье, семейной традицией которой был интерес к наукам и искусствам. Вначале он изучал в Берлине богословие и филологию, математикой он стал заниматься в 1832 г. самостоятельно. В Берлине же Грассман начал работать учителем математики, а в 1836 г. вернулся в Штеттин, где работал учителем математики в гимназии в течение всей



Г. ГРАССМАН

своей жизни. Свой досуг Грассман посвящал разнообразным наукам. Наибольшее значение имели его математические исследования, но он занимался также физикой: учением об электрическом токе, теорией цветов и теорией гласных звуков, причем последние работы весьма высоко ценились знаменитым физиком и физиологом Гельмгольцем, который, как мы увидим ниже, занимался и геометрией. Грассман был также известным языковедом — знатоком санскрита и автором словаря к «Ригведам», он составил сборник немецких народных песен; в то же время он был редактором одной из штеттинских газет, активным масоном и религиозным деятелем. Во всех областях своей многосторонней деятельности Грассман оставил заметный след, и единственной областью, в которой Грассман был не на высоте, являлось преподавание в гимназии; он был рад, если его слушали хотя бы несколько гимназистов, и предоставлял остальным забавляться всеми доступными им способами.

Основными понятиями, введенными в «Учении о линейном протяжении», являются «протяженные образы», «протяженные величины» и «системы» различных ступеней — мы в настоящее время сказали бы: различных размерностей. «Протяженный образ» той или другой ступени — на современном языке многообразие, а «система» — линейное пространство. Сначала Грассман определяет протяженный образ первой ступени как «совокупность элементов, в которые образующий элемент переходит при непрерывном движении», и, в частности, определяет «простой протяженный образ — такой, который получается при непрерывном продолжении одного и того же основного изменения», т. е. ориентированную дугу непрерывной линии, частным случаем которой является прямолинейный отрезок. Отрезки считаются равными, если они порождены «одним и тем же изменением», и каждому классу равных ориентированных отрезков сопоставляется «протяженная величина или протяжение первой ступени», т. е. свободный вектор. Грассман определяет также «систему первой ступени — совокупность всех элементов, которые могут быть получены продолжением одного и того же или противоположного изменения», т. е. абстрактную прямую. Далее Грассманом определяется «система второй ступени», т. е. абстрактная двумерная плоскость: «Если я возьму теперь сначала два основных изменения различного рода и подвергну элемент первого основного изменения (или противоположного ему) произвольному продолжению, а измененный таким образом элемент подвергну второму способу изменения, также произвольно продолженному, то совокупность таким образом образуемых элементов я называю системой второй ступени» [6]. Далее совершенно аналогично Грассман определяет «системы» третьей и высших ступеней, т. е. трехмерное и многомерное пространства: «Если я возьму далее третье основное изменение, которое не переводит тот же начальный элемент в элемент этой системы второй ступени и которое я поэтому буду называть независимым от первых двух, и подвергну произвольный элемент этой системы второй ступени этому третьему изменению (или противоположному ему), произвольно продолженному, то совокупность таким образом образуемых элементов является системой третьей ступени» [7]. Плоскость обычного пространства представляет собой систему второй ступени, а «все бесконечное пространство» — систему третьей ступени.

Всяким двум «элементам» α и β Грассман ставит в соответствие «отрезок» $[\alpha\beta]$ и доказывает теорему: «Если $[\alpha\beta]$ и $[\beta\gamma]$ представляют произвольные изменения, то $[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$» [8]. Очевидно, что «отрезки» Грассмана — приложенные векторы, а его «изменения» — свободные векторы. Грассман применял эти понятия к «геометрии» (трехмерного пространства), ставя в соответствие каждой паре точек X, Y этого пространства «отрезок» $[XY]$, и к механике, представляя «отрезками» скорости, ускорения и силы.

Важной особенностью многомерной геометрии Грассмана является «внешнее произведение» отрезков: «под внешним произведением n отрезков понимается такая протяженная величина n-й ступени, которая получается, если каждый элемент первого отрезка образует второй, каждый таким образом образованный элемент образует третий и так далее» [9], иными словами, внешнее произведение двух отрезков — параллелограмм, внешнее произведение трех отрезков — параллелепипед, а внешнее произведение n отрезков — то, что в настоящее время называется n-мерным параллелепипедом. Грассман применяет внешнее произведение двух и трех отрезков к определению площади параллелограмма и объема параллелепипеда, а также к определению статического момента силы и условия равновесия сил в механике.

Впоследствии Грассман выпустил новую книгу под более коротким названием «Учение о протяжении» (Die Ausdehnungslehre. Leipzig, 1862), представляющую собой значительно переработанный вариант первоначального «Учения о линейной протяженности». В этой книге вводится понятие линейной зависимости величин

$$\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c} + \ldots$$

---

[6] *Grassmann H.* Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Leipzig, 1894, Bd. 1, Th. 1, S. 47.

[7] Ibid., S. 52.

[8] Ibid., S. 56.

[9] Ibid., S. 89—90.

(«a численно производится из величин **b**, **c**,. . . с помощью чисел $\beta, \gamma, \ldots$»), «единиц» (линейно независимых базисных элементов), «экстенсивных величин» — выражений, численно произведенных из системы единиц, которые Грассман записывает в виде $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots$ или сокращенно $\Sigma\alpha e$, суммы и разности экстенсивных величин $\Sigma\alpha e \pm \Sigma\beta e = \Sigma (\alpha \pm \beta)e$, произведения экстенсивной величины на число $\Sigma\alpha e\beta = \Sigma (\alpha\beta)e$; «внутреннего произведения» $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ двух экстенсивных величин и «внешних произведений» $[\mathbf{ab}]$, $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$. . . двух или нескольких экстенсивных величин. «Экстенсивные величины» Грассмана — это наши векторы абстрактного линейного пространства. С такими векторами связывались и конкретные представления о направленных отрезках, которые Грассман здесь называл Stab, буквально «палка». «Внутреннее произведение» двух экстенсивных величин — это по существу скалярное произведение векторов, а «внешние произведения» двух и трех экстенсивных величин — по существу соответственно векторное и смешанное произведения векторов. Грассман обозначал векторы, как это принято и в настоящее время, жирными буквами латинского алфавита.

Кроме умножения «экстенсивных величин», Грассман определил в этой книге и своеобразное умножение точек и прямых, о котором мы говорили выше. Книги Грассмана 1844 и 1862 гг., несмотря на почти совпадающие названия, существенно отличаются одна от другой. Если в первой книге преобладают словесные формулировки, то вторая книга написана языком формул; если в первой книге по существу излагается (многомерная) аффинная геометрия, то во второй — многомерная евклидова геометрия.

Грассман рассматривал свое векторное исчисление как реализацию идей Лейбница об «анализе положения» (см. ИМ, т. 2, с. 126—127), о которой говорилось в связи с проективной геометрией (см. ИМ, т. 3, с. 200) и будет еще сказано далее в связи с топологией; по-видимому, исчисление Грассмана ближе всего к замыслу Лейбница. Идее Лейбница Грассман посвятил специальную работу «Геометрический анализ, связанный с найденной Лейбницем Геометрической характеристикой» (Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Geometrische Charakteristik. Leipzig, 1847).

Векторы Гамильтона

Независимо от Грассмана к понятию вектора пришел У. Р. Гамильтон (см. Кн. 1, с. 72—74), которому принадлежит и самый этот термин. Понятие вектора у Гамильтона было тесно связано с введенными им кватернионами, и векторное исчисление он систематически изложил в «Лекциях о кватернионах» (1853). Гамильтон рассматривал кватернионы как формальные суммы действительных чисел, которые он называл «скалярами» (scalar, так как такие числа можно расположить подобно ступенькам лестницы — scala), и векторов $ai + bj + ck$ (от латинского vector — «переноситель», так как такие выражения определяли перенос из точки (x, y, z), названной им vehend — «переносимое», в точку $(x + a, y + b, z + c)$, называемую vectum — «перенесенное»,— эти три термина были аналогами терминов «делитель», «делимое» и «частное», но привился только термин «вектор»). Кватернион α Гамильтон рассматривал как сумму скаляра $S\alpha$ и вектора $V\alpha$ и изображал векторы ориентированными отрезками, идущими из «переносимого» в «перенесенное». В отличие от Грассмана, у которого применения векторного исчисления к аффинной геометрии были отделены от применений к метрической геометрии, векторное исчисление Гамильтона с самого начала носило метрический характер. Перемножая два вектора $\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $\beta = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, Гамильтон получал кватернион $\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta$. Скаляр

$$-S\alpha\beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

впоследствии был назван Дж. В. Гиббсом «скалярным произведением» векторов α и β, а вектор

$$V\alpha\beta = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\ i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ k$$

— «векторным произведением». Гамильтон широко применял векторную алгебру к механике и физике. Он впервые записал условие равновесия систем сил, определяемых векторами β_i, приложенными в точках с радиус-векторами α_i, в виде двух векторных равенств $\Sigma\beta_i = 0$ и $\Sigma V\alpha_i\beta_i = 0$.

Помимо векторной алгебры, Гамильтон основал также векторный анализ. Введя дифференциальный оператор $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$, названный им nabla от библейского «небела», музыкального инструмента типа арфы, имеющего треугольную форму, Гамильтон определил градиент скалярного поля a, дивергенцию и ротацию векторного поля α как формальные произведения ∇a, $S\nabla\alpha$ и $V\nabla\alpha$.

Векторный анализ Гамильтона был применен к теории электромагнитного поля английским физиком Джемсом Кларком Максвеллом (1831—1879) в его «Трактате об электричестве и магнетизме» (Treatise on Electricity and Magnetism. London, 1873), в котором было предсказано существование электромагнитных волн, впоследствии открытых Генрихом Герцем (1857—1894) и положенных в основу радиотехники. Трактат Максвелла привлек к векторному исчислению внимание физиков, и профессор математической физики в Йельском университете Джозайя Виллард Гиббс (1839—1903) в «Элементах векторного анализа» (Elements of Vector Analysis. New Haven, 1881—1884) и проживший почти всю жизнь в качестве частного лица английский инженер и физик, член Королевского общества (с 1891 г.) Оливер Хевисайд (1850—1925) в «Электромагнитной теории» (Electromagnetic Theory. London, 1903) объединили векторные исчисления Гамильтона и Грассмана и придали векторной алгебре ее современный вид.

Гамильтон ввел также линейные вектор-функции, которые он обозначал

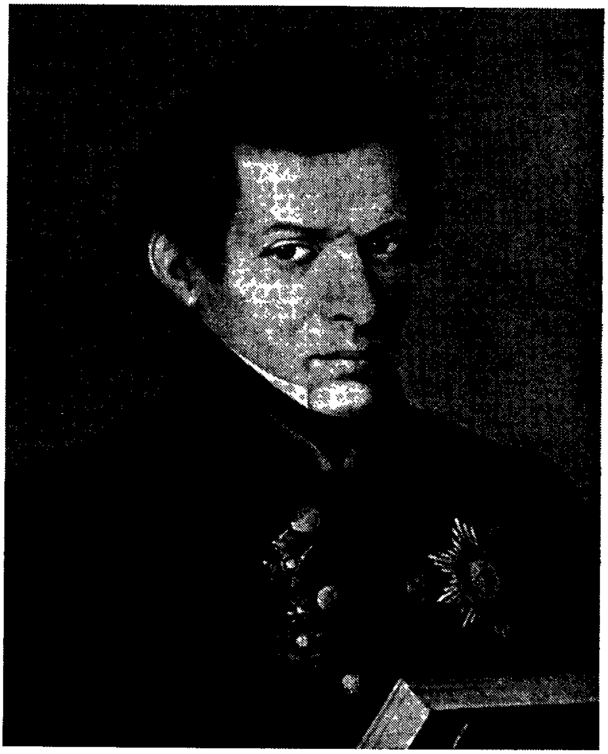
$$\Phi\xi = \alpha \cdot S\xi\beta + \alpha' \cdot S\xi\beta' + \alpha'' \cdot S\xi\beta'' + \ldots,$$

причем Гамильтон указывал, что сумму такого рода всегда можно привести к сумме трех слагаемых. В настоящее время функции такого рода записывают в виде

$$\Phi\mathbf{x} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\mathbf{x} + \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\mathbf{x} + \mathbf{a}''\cdot\mathbf{b}''\mathbf{x},$$

и оператор $\Phi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}' + \mathbf{a}''\cdot\mathbf{b}''$ называется линейным оператором, его называют также аффинором и гомографией, а выражение вида $\Phi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ называют диадным, операторным или тензорным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (выражение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ называется диадой). Линейные операторы образуют кольцо, изоморфное кольцу матриц, порядок которых равен числу измерений пространства. Гамильтон доказал ряд теорем о линейных операторах, равносильных теоремам Кэли о матрицах. В частности, к этим теоремам относится уравнение Гамильтона — Кэли

$$\Phi^3 - (\mathrm{Sp}\Phi)\Phi^2 + (\mathrm{Inv}\ \Phi)\ \Phi - (\mathrm{Det}\ \Phi)\ \mathrm{I} = 0,$$



Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

которому удовлетворяют линейные операторы трехмерного пространства и матрицы третьего порядка.

Линейные операторы и операторные произведения вновь появились в «Элементах векторного анализа» Гиббса.

4. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Николай Иванович Лобачевский и открытие неевклидовой геометрии

Многовековые попытки доказательства V постулата Евклида привели к появлению в начале XIX в. новой геометрии, отличающейся от евклидовой тем, что в ней V постулат не выполняется. Эта геометрия носит в настоящее время имя Лобачевского, который впервые опубликовал работу с ее изложением.

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) родился в Нижнем Новгороде (ныне Горький) в семье мелкого чиновника. Рано лишившись мужа, мать Лобачевского добилась принятия его в Казанскую гимназию. После ее окончания Лобачевский в 1807 г. поступил в открывшийся незадолго до этого Казанский университет, с которым был связан затем всю жизнь. Большое влияние на Лобачевского оказал приглашенный в Казань в 1808 г. друг Гаусса профессор М. Ф. Бартельс (1769—1836), впоследствии работавший в университете в Дерпте (ныне Тарту). Отлично учившийся молодой Лобачевский раздражал реакционное университетское начальство «мечтательным о себе самомнением, упорством, неповиновением», а также «возмутительными поступками», в которых автор одного из рапортов о нем усматривал «признаки безбожия» [10]. Однако профессора, и в первую очередь Бартельс, заступились за строптивого студента, и в 1811 г. Лобачевский благополучно окончил университет, получив звание магистра. Став преподавателем университета, Лобачевский продолжал некоторое время работать под руководством Бартельса. В 1816 г. он назначается экстраординарным профессором, в 1822 г. избирается ординарным профессором, в 1820 г.— деканом физико-математического факультета, а в 1827 г.— ректором университета. На этом посту, который он занимал до 1845 г., Лобачевский проявляет себя как блестящий организатор. Он спас университет во время пожара и эпидемии холеры; под его руководством было выстроено большинство университетских зданий и комплектовалась библиотека, носящая теперь его имя. Большое влияние оказал Лобачевский также на преподавание почти на всех факультетах. В 1845 г. Лобачевский прекратил работу в университете, но до конца жизни был одним из руководителей обширного Казанского учебного округа.

Одной из предпосылок геометрических открытий Лобачевского был его материалистический подход к проблемам познания. Лобачевский был твердо уверен в объективном и не зависящем от человеческого сознания существовании материального мира и в возможности его познания. В речи «О важнейших предметах воспитания» (Казань, 1828) Лобачевский сочувственно приводит слова Ф. Бэкона: «Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на все вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно» — и далее указывает, что сами правила логических умозаключений являются отражениями реальных закономерностей мира: «Разум, это значит, известные начала суждения, в которых как бы отпечатались первые действующие причины Вселенной и которые соглашают, таким образом, все наши заключения с явлениями в природе» [11]. В своем сочинении «О началах геометрии», являющемся первой публикацией открытой им геометрии, Лобачевский писал: «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами; врожденным — не должно верить» [12]. Тем самым Лобачевский отвергал идею об априорном характере геометрических понятий, поддерживавшуюся И. Кантом, из которой делался вывод о том, что единственной мыслимой геометрией является геометрия Евклида.

Первое геометрическое сочинение Лобачевского — «Геометрия», написанное в 1823 г., было напечатано только после его смерти. Это оригинальное учебное пособие отражает раздумья Лобачевского об основаниях геометрии. К этому же времени относится одна из попыток Лобачевского доказать V постулат.

К 1826 г. Лобачевский пришел к убеждению в том, что V постулат не зависит от остальных аксиом геометрии Евклида и 11(23) февраля 1826 г. сделал на заседании факультета доклад «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», в котором были изложены начала открытой им «воображаемой геометрии», как он называл систему, позднее названную геометрией Лобачевского. Доклад

---

[10] *Каган В. Ф.* Лобачевский. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 58.

[11] *Модзалевский Л. Б.* Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 323.

[12] *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. М.: Гостехиздат, 1946, т. 1, с. 186.

1826 г. вошел в состав первой публикации Лобачевского по неевклидовой геометрии — статьи «О началах геометрии», напечатанной в журнале Казанского университета «Казанский вестник» в 1829—1830 гг. Дальнейшему развитию и приложениям открытой им геометрии были посвящены мемуары «Воображаемая геометрия», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», опубликованные в «Ученых записках Казанского университета» соответственно в 1835, 1836 и 1835—1838 гг. Переработанный текст «Воображаемой геометрии» появился во французском переводе в «J. für Math.» в Берлине, в Берлине же в 1840 г. вышли отдельной книгой на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien) Лобачевского. Наконец, в 1855 и 1856 гг. он издал в Казани на русском и французском языках «Пангеометрию» (т. е. «Всеобщую геометрию»). Геометрия Лобачевского получила всеобщее признание математиков только после его смерти. Коллега Лобачевского по Казанскому университету] Петр Иванович Котельников (1809—1879) в своей актовой речи 1842 г. открыто заявил: «Не могу умолчать о том, что тысячелетние тщетные попытки доказать со всей математической строгостью одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудили достопочтенного заслуженного профессора нашего университета предпринять изумительный труд — построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых — труд, который рано или поздно найдет своих ценителей» [13]. Высоко оценил «Геометрические исследования» Гаусс, который провел Лобачевского (1842) в члены-корреспонденты Гёттингенского ученого общества, бывшего по существу Академией наук Ганноверского королевства. Однако в печати с оценкой новой геометрической системы Гаусс не выступил.

Исследования Гаусса по неевклидовой геометрии

Высокая оценка открытия Лобачевского Гауссом была связана с тем, что Гаусс, еще с 90-х годов XVIII в. занимавшийся теорией параллельных линий, пришел к тем же выводам, что и Лобачевский. Свои взгляды по этому вопросу Гаусс не публиковал, они сохранились только в его черновых записках и в немногих письмах к друзьям. В 1799 г. Гаусс писал своему соученику по Гёттингенскому университету Фаркашу (Вольфгангу) Бояи (1775—1856) о своих занятиях теорией параллельных линий: «Правда, я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство V постулата, но это не доказывает в моих глазах ровно ничего: например, если бы кто-либо мог доказать, что возможен такой прямоугольный треугольник, площадь которого больше любой заданной, то я был бы в состоянии строго доказать всю геометрию. Большинство сочтет это за аксиому, я же — нет. Так, могло бы быть, что площадь всегда будет ниже некоторого данного предела, сколько бы удаленными в пространстве ни были три вершины треугольника. Таких положений я имею много, но ни одно из них не нахожу удовлетворительным» [14]. В 1804 г. Гаусс пишет Ф. Бояи о его попытке доказательства V постулата в «Тео-

---

[13] Обозрение преподавания лекций в Казанском университете на 1842—1843 академический год. Речь ординарного профессора Котельникова и отчет за 1841—1842 год. Казань, 1842, с. 17—18.

[14] Об основаниях геометрии, с. 101—102.

рии параллельных» (Theoria parallelarum. Maros Vasarhelyini, 1804): «Твой метод меня не удовлетворяет... Однако я еще надеюсь, что когда-нибудь и еще до моего конца эти подводные камни позволят еще перебраться через них» [15]. Как видно, в это время Гаусс еще не оставил попыток доказать V постулат. В 1816 г. в письме к астроному Х. Л. Герлингу (1788—1864), установив, что при отказе от V постулата должна существовать абсолютная мера длины, Гаусс заявлял: «Я не нахожу в этом ничего противоречивого. Было бы даже желательно, чтобы геометрия Евклида не была бы истинной, потому что мы тогда располагали бы общей мерой a priori» [16]. Эти слова показывают, что в 1816 г. Гаусс еще считает геометрию Евклида «истинной» в смысле физической реальности. Но уже в 1817 г. в письме к астроному В. Ольберсу (1758—1840) Гаусс пишет: «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка. Может быть, в другой жизни мы придем к взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До сих пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто a priori, а скорее с механикой» [17]. Отсюда виден источник сомнений Гаусса: первоначально он был сторонником мнения Канта об априорности математических понятий, но, размышляя о теории параллельных, пришел к выводу, что во всяком случае в геометрии такая априорность не имеет места. Возможно, что именно по этой причине Гаусс не публиковал своих парадоксальных открытий. В 1818 г. в письме к Герлингу он писал: «Я радуюсь, что Вы имеете мужество высказаться так, как если бы Вы признавали ложность нашей теории параллельных, а вместе с тем и всей нашей геометрии. Но осы, гнездо которых Вы потревожите, полетят Вам на голову» [18]; по-видимому, под «потревоженными осами» Гаусс имел в виду сторонников традиционных взглядов на геометрию, а также априоризма математических понятий.

Янош Бояи

Независимо от Лобачевского и Гаусса к открытию неевклидовой геометрии пришел и замечательный венгерский математик Янош Бояи (1802—1860), сын Ф. Бояи. Я. Бояи родился в трансильванском городе Марош-Вашархей (ныне Тыргу-Муреш в Румынии). После окончания военно-инженерной академии в Вене он служил в крепости Темешвар (ныне Тимишоара). Я. Бояи заинтересовался проблемой параллельных под влиянием отца и уже в 1823 г. писал ему: «Правда, я не достиг еще цели, но получил весьма замечательные результаты — из ничего я создал целый мир» [19]. Отец, отчаявшийся в своих попытках доказательства V постулата, умолял сына оставить эти занятия: «Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий на этом пути: я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь, и всякий светоч, всякую радость моей жизни я в ней похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен его страшиться, как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя — оно тебе погубит всю радость жизни. Эта беспросветная мгла может поглотить тысячу ньютоновых башен и никогда на земле не прояснится; никогда несчастный род

[15] Там же, с. 102.
[16] Там же.
[17] Там же, с. 103.
[18] Там же.
[19] *Больаи Я.* Appendix. М.; Л.: Гостехиздат, 1950, с. 18.

человеческий не достигнет совершенной истины, даже в геометрии!»[20] Когда Я. Бояи пришел к тем же идеям, что Лобачевский и Гаусс, отец не понял его, однако предложил напечатать краткое изложение его открытия в виде приложения к своему руководству по математике, вышедшему в 1832 г. Полное название труда Я. Бояи — «Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)» (Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidis (a priori haud unquam decidenda) independentem), и его обычно называют коротко «Аппендикс». В 1833 г. Я. Бояи вышел в отставку. Открытие Я. Бояи не было признано при его жизни; Гаусс, которому Ф. Бояи послал «Аппендикс», понял его, но никак не способствовал признанию открытия Я. Бояи. В 1837 г. Я. Бояи участвовал в конкурсе на премию Лейпцигского ученого общества им. Яблоновского по вопросу об «усовершенствовании геометрической теории мнимых чисел». В своей работе Я. Бояи переоткрыл «теорию пар» Гамильтона, опубликованную в 1833—1835 гг.; написанная чрезмерно сжато, да еще со ссылками на «Аппендикс», недоступный жюри конкурса, эта работа не была оценена по достоинству. Все это привело Я. Бояи к тяжелой моральной депрессии, из которой он по существу не выходил до конца жизни.

«Аппендикс» Я. Бояи также был написан чрезвычайно сжато, с применением многих условных обозначений; это объяснялось тем, что Ф. Бояи выделил сыну для изложения его открытия слишком мало места. Поэтому уяснить суть открытия Я. Бояи по его изложению было нелегко. Пожалуй, единственным человеком, понявшим это сочинение при жизни автора, был Гаусс. В письме Гаусса к Герлингу, написанном сразу же после получения «Аппендикса», говорилось: «Я считаю этого молодого геометра фон Бояи гением первой величины»[21]. Однако самому Ф. Бояи Гаусс написал: «Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что я эту работу не должен хвалить, то ты, конечно, на мгновение поразишься, но иначе я не могу; хвалить ее значило бы хвалить самого себя: все содержание сочинения, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют давность в 30—35 лет»[22]. Впоследствии, познакомившись с «Геометрическими исследованиями» Лобачевского, Гаусс посоветовал отцу и сыну Бояи прочесть это сочинение. Прочтя работу Лобачевского, Я. Бояи высказал нелепое предположение: «Гаусс — колосс, и без того владевший такими сокровищами,— не мог примириться с тем, что кто-то в этом вопросе его предвосхитил, и так как он уже не был в состоянии этому воспрепятствовать, то он сам обработал теорию и выпустил в свет под именем Лобачевского»[23].

Геометрия Лобачевского

В мемуаре «О началах геометрии» (1829) Лобачевский прежде всего воспроизвел свой доклад 1826 г. В начале этой части Лобачевский писал: «Кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных ли-

[20] Там же, с. 18—19.
[21] Об основаниях геометрии, с. 112.
[22] Там же, с. 113.
[23] *Больаи Я.* Appendix, с. 31.

ний»[24]. Далее следуют приведенные выше слова о «первых понятиях», с которых начинается какая-нибудь наука.

Определив затем основные понятия геометрии, не зависящие от V постулата, и заметив, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$, как это имеет место у сферических треугольников, Лобачевский заявлял: «Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму $= \pi$ или $< \pi$. То и другое может быть принято без всякого противоречия впоследствии, от чего и происходят две Геометрии: одна, употребительная доныне по своей простоте, соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая, воображаемая, более общая и потому затруднительная в своих вычислениях, допускает возможность зависимости линий от углов»[25].

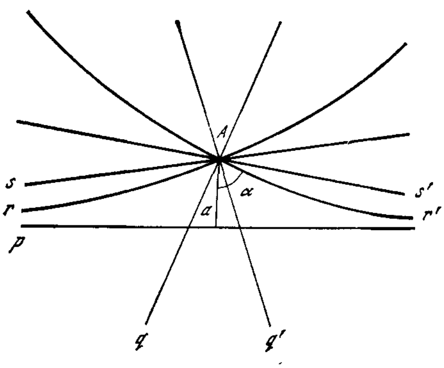


Рис. 7

Лобачевский указывает, что в «воображаемой геометрии» сумма углов треугольника всегда $< \pi$ и две прямые могут не пересекаться в случае, когда они образуют с секущей углы, в сумме меньшие π. Параллельные прямые определяются как такие, которые не пересекаются, но могут быть получены предельным переходом из пересекающихся. Через каждую точку плоскости проходят две прямые, параллельные данной прямой, лежащей в этой плоскости; эти прямые делят пучок прямых, проходящих через данную точку, на четыре области, в двух из которых проходят прямые, пересекающие данную прямую, а в двух — прямые, которые не пересекают эту прямую и не могут быть получены предельным переходом из пересекающих — такие прямые называются расходящимися; параллельные прямые разграничивают пересекающие прямые от расходящихся (см. рис. 7, где условно изображены прямые r и r', проведенные через точку A параллельно прямой p, прямые q и q', проведенные через точку A и пересекающие прямую p, и прямые s и s', расходящиеся с прямой p). Угол α между прямой, проведенной через точку A параллельно прямой p, и перпендикуляром, опущенным из A на p, Лобачевский называет «углом параллельности» и показывает, что функция $\alpha = \Pi(a)$, выражающая зависимость этого угла от длины a перпендикуляра, может быть (в современных обозначениях) записана в виде

$$\Pi(a) = 2\operatorname{arctg} e^{-a/q}, \qquad (1)$$

где q — некоторая постоянная. При $a \neq 0$ угол параллельности всегда острый, причем он стремится к $\pi/2$ при $a \to 0$, постоянная же q может служить на плоскости Лобачевского абсолютной единицей длины, аналогичной абсолютной единице угла в евклидовом пространстве. Лобачевский устанавливает также, что расходящиеся прямые обладают общим перпендикуляром и удаляются друг от друга по обе стороны от него, а две параллельные прямые приближаются друг к другу и расстояния точек одной из них от другой стремятся к 0 при неограниченном удалении этих точек. Сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше π,

[24] *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч., т. 1, с. 185.
[25] Там же, с. 194—195.

и если δ — «угловой дефект» треугольника, т. е. разность между π и суммой его углов, то площадь треугольника S равна

$$S = q^2\delta, \tag{2}$$

где q — та же постоянная, что и в формуле (1).

Круг при стремлении его радиуса к бесконечности переходит в системе Лобачевского не в прямую, а в особенного рода кривую «предельную круга» — в настоящее время такие кривые называют орициклами, от греческих слов, эквивалентных термину Лобачевского. Сфера при тех же обстоятельствах переходит не в плоскость, а в кривую поверхность, которую Лобачевский назвал «предельной сферой», а в настоящее время именуют орисферой. Лобачевский отмечает, что на орисфере имеет место евклидова геометрия, причем роль прямых на ней играют орициклы. Это позволяет Лобачевскому, опираясь на евклидову тригонометрию на орисфере, вывести тригонометрию на плоскости в его геометрической системе. Название «воображаемая геометрия» подчеркивает, что эта геометрия относится к евклидовой, «употребительной», по терминологии Лобачевского, как мнимые числа, «воображаемые», по его терминологии, к действительным. Слова «понятия приобретаются чувствами, врожденным не должно верить» указывают на то, что Лобачевский, не обнаружив противоречия в следствиях из предположения о невыполнении V постулата, пришел к выводу о том, что евклидова геометрия не является единственно мыслимой. Лобачевский сразу же поставил вопрос об экспериментальной проверке того, какая геометрия имеет место в реальном мире — «употребительная» или «воображаемая», для чего он решил измерить сумму углов треугольника с очень большими сторонами. Однако, вычислив по последнему астрономическому календарю сумму углов треугольника, образованного двумя диаметрально противоположными положениями Земли на ее орбите и Сириусом и считая один из углов этого треугольника прямым, а другой — равным углу параллельности, Лобачевский нашел, что эта сумма отличается от π на разность, меньшую ошибки угломерных инструментов в его время. «После того,— пишет Лобачевский,— можно вообразить, сколько эта разность, на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии и дозволяет принятые начала последней рассматривать как бы строго доказанными» [26].

Это объясняет, что под «строгим доказательством теоремы о параллельных линиях» в докладе 1826 г. Лобачевский понимал невозможность установить экспериментальным путем, какая из двух геометрий имеет место в реальном мире, откуда вытекает, что на практике можно пользоваться «употребительной геометрией», не рискуя впасть в ошибку.

Наиболее полным изложением системы Лобачевского являются его «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838). Это сочинение начинается словами: «Прикосновение составляет отличительную принадлежность тел и дает им название геометрических, когда в них удерживаем это свойство, не принимая в рассуждение все другие, существенные ли то будут или случайные...» [27]. Далее определяются сечения тел, пространства, конгруэнтность тел («одинаковость») и их равновеликость («равенство»), «три главных сечения», делящих тело на восемь частей, а с их помощью — поверхности, линии и точки; расстояния, а затем сферы; плоскости (геометрические места точек, равноудаленных от двух точек) и прямые. Таким образом, изложение геометрии у Лобачевского основы-

[26] Там же, с. 209.
[27] Там же, т. 2, с. 168.

вается на чисто топологических свойствах прикосновения и сечения, конгруэнтность тел и равенство отрезков определяются по существу с помощью движения. Далее Лобачевский подробно излагает открытую им геометрию, а в конце работы пишет: «В природе мы познаем только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство само собой, отдельно для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии». Мысль о возможности различных геометрических свойств в различных участках пространства и их зависимости от «сил», т. е. от материи, является далеким предвосхищением идей общей теории относительности Эйнштейна. Далее Лобачевский высказывает предположение, что его геометрия, возможно, имеет место «либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений» [28].

В позднейших работах Лобачевский ввел координаты и вычислил из геометрических соображений целый ряд новых определенных интегралов, которым он специально посвятил работу «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (Учен. зап. Казан. ун-та, 1836); многие из них были включены в изданные голландским математиком Давидом Бьеренс де Хааном (1822—1895) «Таблицы определенных интегралов» (Tables d'intégrales définies, 1858), а затем и в позднейшие справочники.

«Абсолютная геометрия» Я. Бояи

Мы уже указывали, что «Аппендикс» Я. Бояи написан весьма экономно, с применением ряда сокращенных обозначений: Бояи обозначал бесконечную прямую, проходящую через точки a и b, через $\widetilde{ab}$, луч с вершиной a, проходящий через точку b, через $a\tilde{b}$, угол со сторонами $a\tilde{b}$ и $a\tilde{c}$ через abc, прямой угол R. Начало «Аппендикса» гласит: «Если прямую $a\tilde{m}$ не пересекает прямая $b\tilde{n}$ той же плоскости, но ее пересекает всякая прямая $b\tilde{p}$ (в abn), то будем это обозначать так: $b\tilde{n} \parallel\!| \, a\tilde{m}$. Ясно, что такая $b\tilde{n}$ *существует* и при любой точке b (вне $\widetilde{am}$) только одна, причем $bam + abn$ не $> R$, ибо если вращать bc вокруг b до тех пор, пока станет $bam + abc = 2R$, то в какой-то момент $b\tilde{c}$ *впервые* не пересечет $a\tilde{m}$ и тогда $bc \parallel\!| \, am$. Вместе с тем ясно, что $bn \parallel\!| \, em$, где бы ни находилась e на $\widetilde{am}$» [29]. Здесь речь идет о параллельных прямых bc и am в случае выполнения V постулата («XI аксиомы» по терминологии Бояи) — в смысле евклидовой геометрии, в случае невыполнения V постулата — в смысле геометрии Лобачевского. Уже здесь мы встречаемся с характерной для Бояи формулировкой, пригодной для обеих геометрий. Бояи стремится сформулировать в таком виде как можно более фактов обеих геометрий, так, например, он формулирует теоремы синусов обеих геометрий в виде

$$\frac{\sin A}{\bigcirc a} = \frac{\sin B}{\bigcirc b} = \frac{\sin C}{\bigcirc c},$$

где $\bigcirc r$ — длина окружности радиуса r. Бояи называет евклидову геометрию «системой Σ», а новую геометрию — «системой S», то же, что выполняется в обеих системах, он называет «абсолютным», это и есть, как гласит название его сочинения, «наука о пространстве, абсолютно истинная, не

---

[28] Там же, с. 159—160.

[29] Об основаниях геометрчи, с. 72.

зависящая от истинности или ложности XI аксиомы Евклида». Современный термин «абсолютная геометрия», происходящий от этого термина Бояи, не вполне совпадает с ним: мы понимаем под абсолютной геометрией те факты, которые не зависят от выполнения или невыполнения V постулата, Бояи же облекал в «абсолютные» формулировки и факты, различные в обеих геометриях.

Непротиворечивость геометрии Лобачевского

Выведя уже в своей первой работе «О началах геометрии» формулы тригонометрии своей новой системы, Лобачевский заметил, что «эти уравнения переменяются в... (уравнения) сферической Тригонометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, но в обыкновенной Геометрии и сферической Тригонометрии везде входят одни содержания [т. е. отношения] линий: следовательно, обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой» [30]. Это означает, что если мы запишем теорему косинусов, теорему синусов и двойственную теорему косинусов сферической тригонометрии для сферы радиуса r в виде

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A,$$

$$\frac{\sin A}{\sin(a/r)} = \frac{\sin B}{\sin(b/r)} = \frac{\sin C}{\sin(c/r)},$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos(a/r),$$

то формулы тригонометрии Лобачевского можно записать в том же виде, заменив стороны a, b, c треугольника произведениями ai, bi, ci; так как умножение сторон a, b, c на i равносильно умножению на i радиуса сферы, то, полагая $r = qi$ и воспользовавшись известными соотношениями

$$\cos(ix) = \operatorname{ch} x, \qquad \sin(ix) = i\operatorname{sh} x,$$

мы можем переписать соответственные формулы тригонометрии Лобачевского в виде

$$\operatorname{ch}\frac{a}{q} = \operatorname{ch}\frac{b}{q}\operatorname{ch}\frac{c}{q} - \operatorname{sh}\frac{b}{q}\operatorname{sh}\frac{c}{q}\cos A,$$

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh}(a/q)} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh}(b/q)} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh}(c/q)},$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\operatorname{ch}(a/q).$$

Сам Лобачевский пользовался не функциями $\operatorname{ch}x$ и $\operatorname{sh}x$, а комбинациями введенной им функции $\Pi(x)$ с тригонометрическими функциями; постоянная q в этих формулах — та же, что и в формулах (1) и (2).

Фактически Лобачевский доказал непротиворечивость своей системы тем, что ввел как на плоскости, так и в пространстве координаты и таким образом построил арифметическую модель плоскости и пространства Лобачевского. Однако сам Лобачевский видел свидетельство непротиворечивости открытой им геометрии в указанной связи формул его тригонометрии с формулами сферической тригонометрии. Этот вывод Лобачевского неправомерен. В своем мемуаре он доказал, что формулы сферической тригонометрии вытекают из его геометрии, между тем, чтобы утверж-

[30] *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч., т. 1, с. 206.

дать, что из непротиворечивости тригонометрических формул вытекает непротиворечивость геометрии Лобачевского, надо было бы доказать, что все предложения последней можно вывести из ее тригонометрических формул и «абсолютной геометрии» — предложений, не зависящих от V постулата. Такое доказательство Лобачевский попытался провести в «Воображаемой геометрии», где он писал: «Теперь, оставляя геометрические построения и выбирая краткий обратный путь, намерен я показать, что главные уравнения, которые нашел я [в цитированной выше работе] для зависимости боков и углов треугольника в воображаемой Геометрии, могут быть приняты с пользою в Аналитике и никогда не приведут к заключениям ложным в каком бы то ни было отношении»[31].

Далее Лобачевский присоединяет тригонометрические формулы к предложениям абсолютной геометрии и выводит из этого утверждения, что сумма углов треугольника $< \pi$, что, как известно, эквивалентно постулату Лобачевского. Однако и эти рассуждения не представляют законченного доказательства непротиворечивости, так как сами формулы сферической тригонометрии, из которых следует, что сумма углов треугольника $> \pi$, если рассматривать их как формулы плоской тригонометрии, противоречат аксиомам абсолютной геометрии. Фактически эти соображения Лобачевского доказывают только непротиворечивость его тригонометрических формул.

Однако, отправляясь от соображений Лобачевского, но пользуясь методами, в его время неизвестными, можно дать полное доказательство непротиворечивости его геометрии. Для этого следует воспользоваться введенной Понселе в его «Трактате о проективных свойствах фигур» идеей мнимых точек пространства. Если дополнить действительное евклидово пространство всеми его мнимыми точками, мы получим комплексное евклидово пространство. Всякую алгебраическую и аналитическую линию и поверхность в действительном пространстве можно рассматривать как часть линии и поверхности в комплексном пространстве, определяемых теми же уравнениями, расстояния между точками и углы между прямыми в комплексном пространстве выражаются теми же формулами, что и в действительном пространстве; поэтому выражаются теми же формулами, что и на действительной сфере, тригонометрические соотношения на сфере комплексного пространства. Таким образом, геометрия плоскости Лобачевского осуществляется на сфере мнимого радиуса qi в подпространстве комплексного пространства, прямоугольные координаты x, y точек которого действительны ($x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$), а координаты z — чисто мнимы ($z = -\bar{z}$). Это подпространство можно рассматривать как действительное аффинное пространство, в котором определено расстояние d между точками с прямоугольными координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 по формуле

$$d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

Такое пространство было определено значительно позже А. Пуанкаре (1906) и Г. Минковским (1908) в связи с интерпретацией специальной теории относительности и в настоящее время называется *псевдоевклидовым пространством*. Сферы радиуса qi в этом пространстве имеют вид двуполостных гиперболоидов (геометрия плоскости Лобачевского осуществляется на каждой из полостей такого гиперболоида), в этом пространстве имеются также сферы действительного радиуса, имеющие вид однополостных гиперболоидов, и сферы нулевого радиуса, имеющие вид конусов.

---

[31] Там же, т. 3, с. 49.

Эта интерпретация, наглядно доказывающая непротиворечивость планиметрии Лобачевского, объясняет, почему формулы тригонометрии Лобачевского получаются из формул сферической тригонометрии заменой радиуса сферы на qi. Эта сфера чисто мнимого радиуса и есть та «мнимая сфера», о которой, как писал И. Г. Ламберт, он «почти должен был бы сделать вывод — заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере» (см. ИМ, т. 3, с. 218).

Отметим, что интерпретация плоскости Лобачевского на сфере чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве обладает также такими свойствами, что движения плоскости Лобачевского изображаются вращениями сферы, окружности — сечениями сферы евклидовыми плоскостями, кривые, являющиеся геометрическими местами точек, равноотстоящих от прямых («эквидистанты»),— сечениями сферы псевдоевклидовыми плоскостями, орициклы — сечениями сферы изотропными плоскостями (получаемыми предельными переходами и из евклидовых, и из псевдоевклидовых). Вместо рассмотрения одной полости сферы мнимого радиуса в ряде случаев оказывается более удобным интерпретировать плоскость Лобачевского в виде полной сферы, но с отождествленными диаметрально противоположными точками. Пространство Лобачевского допускает аналогичную интерпретацию в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве, применяемом для интерпретации пространства-времени специальной теории относительности.

Координаты x, y, z, точки сферы мнимого радиуса можно рассматривать как однородные координаты соответственной точки плоскости Лобачевского. Такими координатами (из других соображений) пользовался К. Вейерштрасс в своем семинаре по геометрии Лобачевского, который он вел около 1870 г. в Берлинском университете, вследствие чего их называют вейерштрассовыми координатами [32].

Распространение идей геометрии Лобачевского

Новая система геометрии не получила признания при жизни ее творцов. За исключением упомянутого выступления П. И. Котельникова, мы не знаем других официальных положительных отзывов о Лобачевском как о творце новой геометрии. На «Аппендикс» Я. Бояи и вовсе не имелось откликов. Гаусс же, как говорилось, избегал публикации своих открытий, ограничиваясь беглыми замечаниями в письмах к немногим друзьям. Положение изменилось только в 60-х гг. XIX в. В 1860—1865 гг., вскоре после смерти Гаусса, была издана его переписка с астрономом Г. Х. Шумахером (1780—1850) и, в частности, письмо Гаусса по поводу «Геометрических исследований» Лобачевского. «Это сочинение,—писал здесь Гаусс,— содержит в себе основания той геометрии, которая должна была бы иметь место и притом составляла бы строго последовательное целое, если бы евклидова геометрия не была бы истинной... Лобачевский называет ее «воображаемой геометрией»; Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашел для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шел я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение» [33].

---

[32] *Каган В. Ф.* Основания геометрии. М.; Л., 1949, ч. 1, с. 341.
[33] Об основаниях геометрии, с. 119—120.

В 1865 г. появляется «Заметка о воображаемой геометрии Лобачевского» (Note on Lobatschewsky's imaginary geometry.— Philos. Mag. London) А. Кэли. В этой заметке Кэли сравнивает тригонометрические формулы Лобачевского и сферической тригонометрии, и, хотя, как видно из заметки, сути открытия Лобачевского Кэли не понял, его заметка способствовала признанию этого открытия.

В 1866 г. в Бордо и Париже появляется французский перевод «Геометрических исследований» Лобачевского вместе с извлечением из переписки Гаусса с Шумахером, выполненный профессором университета в Бордо Гильомом Жюлем Оюэлем (1823—1866), а в 1867 г. в Париже выходит «Критический очерк об основных принципах геометрии» (Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie) Оюэля, содержащий изложение основных идей Лобачевского. Основы геометрии Лобачевского изложил профессор университета в Гиссене Рихард Бальцер (1818—1887) во 2-м издании его «Элементов математики» (Die Elemente der Mathematik. Dresden, 1867). В том же году профессор Неаполитанского университета Джузеппе Баттальини (1826—1894) опубликовал статью «О воображаемой геометрии Лобачевского» (Sulla geometria imaginaria de Lobatschewsky.— G. mat. Napoli, 1867) и итальянский перевод «Пангеометрии», а в 1868 г.— итальянский перевод «Аппендикса» Бояи. В 1868 г. профессор Московского высшего технического училища Алексей Васильевич Летников (1837—1888) поместил в III томе «Математического сборника» русский перевод «Геометрических исследований» Лобачевского с предисловием, в котором геометрические труды Лобачевского характеризуются как «весьма замечательные, но мало известные», а профессор Эраст Петрович Янишевский опубликовал в Казани «Историческую записку о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского». И наконец, в том же 1868 г. выходит статья Э. Бельтрами об интерпретациях геометрии Лобачевского. Благодаря этим публикациям к 1870 г. геометрия Лобачевского становится известной во всех странах Европы; тогда же, как мы упоминали, эта геометрия становится предметом специального семинара К. Вейерштрасса в Берлинском университете.

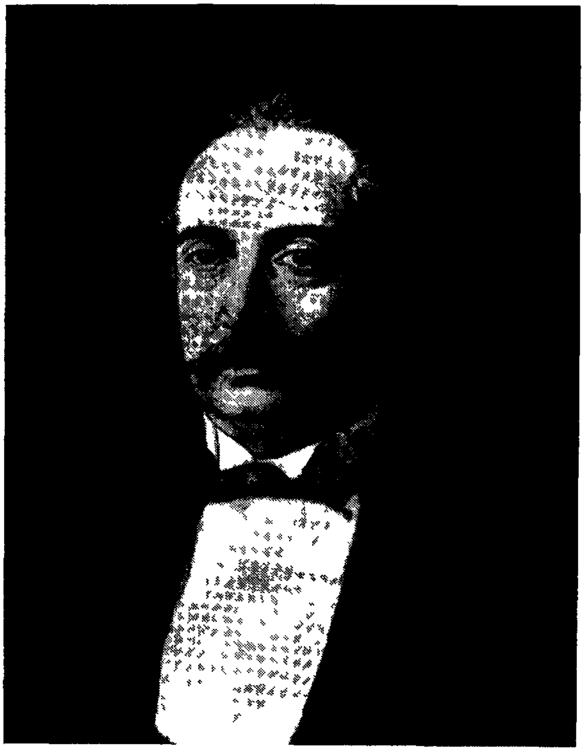
Большую роль в распространении идей геометрии Лобачевского сыграли профессора Казанского университета Федор Матвеевич Суворов, магистерская диссертация которого «О характеристике систем трех измерений» (1871) была посвящена трехмерным римановым пространствам — непосредственному обобщению трехмерного пространства Лобачевского, и особенно Александр Васильевич Васильев (1853—1929). Питомец Петербургского университета, Васильев работал доцентом, а затем профессором Казанского университета с 1874 по 1907 г., затем он переехал в Петербург. Алгебраист по основной специальности, Васильев был математиком широких интересов и впоследствии издавал (совместно с П. С. Юшкевичем (1873—1945)) сборники «Новые идеи в математике» (Петербург, 1912—1915), познакомившие русского читателя с идеями теории множеств и обоснования анализа, теории групп, геометрическими работами Ф. Клейна, теорией относительности и другими важными открытиями математики того времени. Васильев был также историком математики, ему принадлежит ряд исследований творчества Лобачевского и исторический очерк «Целое число» (Петроград, 1922). Он был первым председателем Казанского физико-математического общества, выделившегося в 1890 г. из Казанского общества естествоиспытателей. Именно под руководством Васильева Казанское физико-математическое общество выступило инициатором издания первого полного собрания геометрических сочинений Лобачевского, вышедшего под редакцией Васильева (Казань, 1883—1886), празднования

А. В. ВАСИЛЬЕВ

100-летия со дня рождения Лобачевского (1893), продемонстрировавшего международное признание открытия неевклидовой геометрии, и международных конкурсов имени Лобачевского, которые высоко подняли международный авторитет Казанского университета. Первое присуждение премии имени Лобачевского состоялось в 1897 г., премия была присуждена Софусу Ли за третий (геометрический) том его «Теории групп преобразований»; при втором присуждении (1900) премию получил В. Киллинг за цикл работ по неевклидовым пространственным формам и группам Ли (1883—1896). При третьем присуждении (1904) этой премии был удостоен Д. Гильберт за «Основания геометрии» и другие геометрические работы (1895—1900). Впоследствии премия имени Лобачевского присуждалась таким крупным ученым, как Ф. Шур, Г. Вейль, Э. Картан и А. Д. Александров.

Интерпретация Бельтрами

Самым убедительным аргументом в пользу новой геометрии были появившиеся в это время интерпретации этой геометрии в евклидовом пространстве. Первые две такие интерпретации были предложены профессором математики и механики в Болонье и Риме Эудженио Бельтрами (1835—1900) в «Опыте интерпретации неевклидовой геометрии» (Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea.— G. mat. Napoli, 1868), в котором он отправлялся от работ Миндинга. В этой работе Бельтрами вычислил линейный элемент (квадрат дифференциала дуги) плоскости Лобачевского в координатах u, v, равных расстояниям точки от двух взаимно



Э. БЕЛЬТРАМИ

перпендикулярных прямых, деленным на r (в настоящее время эти координаты называют «бельтрамиевыми»), и нашел, что в этой системе координат линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = r^2 \frac{(a^2 - u^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (a^2 - v^2)\,dv^2}{a^2 - u^2 - v^2}.$$

Вычисляя далее гауссову кривизну поверхности с таким линейным элементом, Бельтрами обнаружил, что гауссова кривизна плоскости Лобачевского во всех ее точках равна одному и тому же числу — $1/r^2$, т. е. что плоскость Лобачевского можно рассматривать как поверхность постоянной отрицательной кривизны.

Так как всякую поверхность с точки зрения ее внутренней геометрии можно рассматривать как интерпретацию любой поверхности, наложимой на нее, а необходимым и достаточным условием наложимости поверхностей является равенство гауссовых кривизн в соответственных точках поверхностей, Бельтрами сделал вывод, что плоскость Лобачевского может быть интерпретирована любой поверхностью постоянной отрицательной кривизны.

Бельтрами установил, что поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, рассмотренные Миндингом, изометричны частям плоскости Лобачевского, заключенным между двумя пересекающимися прямыми и ортогональной к ним окружностью, между двумя расходящимися прямыми, их общим перпендикуляром и ортогональной к ним эквидистантой и между двумя параллельными прямыми и ортогональным к ним орициклом. Впоследствии (1900) Гильберт доказал, что всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве изометрична только части или нескольким частям плоскости Лобачевского, но ни одна такая поверхность не изометрична плоскости Лобачевского целиком.

С другой стороны, рассматривая точки евклидовой плоскости с координатами, численно равными «бельтрамиевым координатам» u, v плоскости Лобачевского, Бельтрами получает вторую интерпретацию. Так как координаты u, v связаны условием

$$u^2 + v^2 < a^2, \tag{3}$$

при этой интерпретации вся плоскость Лобачевского изображается внутренностью круга, ограниченного окружностью

$$u^2 + v^2 = a^2. \tag{4}$$

Бельтрами показал, что прямые линии плоскости Лобачевского при этом изображаются хордами этого круга (рис. 8), а расстояние точки P с координатами (u, v) до начала координат 0 равно

$$\rho = \frac{r}{2} \ln \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}. \tag{5}$$

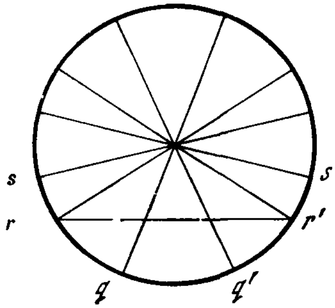


Рис. 8

Хотя Бельтрами не дал формулы для расстояния между двумя произвольными точками и не выяснил, как в его интерпретации изображаются движения плоскости Лобачевского, эта интерпретация Бельтрами явилась первым, правда неполным, доказательством непротиворечивости всей плоскости Лобачевского.

Интерпретация Кэли

Ответ на вопросы, не решенные Бельтрами, по существу заключался в вышедшем за десять лет до его работы и уже упоминавшемся (см. с. 48) «Шестом мемуаре о формах» (1859) Артура Кэли (см. Кн. 1, с. 64—65), где было введено понятие о проективной метрике на плоскости.

Кэли записывает уравнение коники на проективной плоскости с проективными координатами x, y, z в виде

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2 = 0$$

и ставит в соответствие каждым двум точкам P и P' с координатами x, y, z и x', y', z' этого абсолюта расстояние Dist (P, P'), которое он записывает в виде

$$\cos^{-1} \frac{(a, \ldots \between x, y, z \between x', y', z')}{\sqrt{(a, \ldots \between x, y, z)^2} \sqrt{(a, \ldots \between x', y', z')^2}}$$

($\cos^{-1}$ — английское обозначение арккосинуса).

Из доказанного Кэли ранее вытекает, что для точек одной прямой

$$\text{Dist}(P, P') + \text{Dist}(P', P'') = \text{Dist}(P, P'').$$

Кэли замечает, что «общие формулы не получают существенного изменения, но зато сильно упрощаются по форме, если за точечное уравнение абсолюта взять

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

... Тогда мы имеем для расстояния между двумя точками (x, y, z) и (x', y', z')

$$\cos^{-1}\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$[34].

Он указывает, далее, что «если (x, y, z) — обычные прямоугольные координаты в пространстве, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

тогда точка, имеющая координаты (x, y, z), будет точкой сферической поверхности, и (поскольку определенное Кэли расстояние является сферическим расстоянием) «мы имеем систему сферической геометрии; и здесь выявляется, что абсолютом в такой системе является (сферическая) коника, представляющая собой пересечение сферы с концентрическим конусом или исчезающей сферой»[35]. Под «сферической коникой» Кэли понимал тот мнимый круг, по которому бесконечно удаленная плоскость, дополняющая евклидово пространство до проективного, пересекается со всеми сферами евклидова пространства и с мнимым конусом $x^2+y^2+z^2=0$, который Кэли называет «концентрическим конусом» и «исчезающей сферой». Тем самым метрика Кэли осуществляется на бесконечно удаленной плоскости, представляющей собой проективную плоскость, и на сфере обычного пространства с отождествленными диаметрально противоположными точками. В настоящее время проективная плоскость с определенной таким образом метрикой называется *эллиптической плоскостью*; по причинам, которые будут ясны ниже, эту плоскость называют также *неевклидовой плоскостью Римана*, хотя на самом деле с гораздо бо́льшим основанием эту плоскость следует называть плоскостью Кэли.

Кэли замечает также, что «в обычной геометрии плоскости абсолют вырождается в пару точек, а именно в пару точек пересечения бесконечно удаленной прямой с исчезающим кругом, или, что то же самое, абсолют является двумя круговыми точками в бесконечности. Общая теория соответствующим образом модифицируется, а именно, здесь для точек уже не существует расстояния, подобного квадранту, и расстояние между двумя прямыми не может быть никоим образом сравниваемо с расстоянием между точками»[36]. «Расстояние между прямыми» — это угол между прямыми евклидовой плоскости или расстояние между двумя параллельными прямыми. Говоря о вырождении коники в пару точек, Кэли имеет в виду конику как совокупность прямых, т. е. пучок второго порядка, который может выродиться в пару обычных действительных или мнимых пучков. Кэли не изучает случаев, когда коника вещественная или когда она распадается на пару действительных пучков, приводящих к геометриям, которые в настоящее время называются гиперболической (геометрией Лобачевского) и псевдоевклидовой. Однако ему было ясно большое значение определенных им проективных метрик, и в конце мемуара он писал: «Метрическая геометрия является, таким образом, частью проективной геометрии, и проективная геометрия представляет всю геометрию»[37].

---

[34] Там же, с. 243.
[35] Там же, с. 244.
[36] Там же, с. 245.
[37] Там же, с. 245—246.

Интерпретация Клейна

Связь между проективными метриками Кэли и геометрией Лобачевского была установлена немецким геометром Феликсом Клейном (1849—1925). Уроженец Дюссельдорфа, Клейн учился в Боннском университете, где был учеником Плюккера и в 1866—1868 гг. его ассистентом по кафедре физики. Затем Клейн работал в качестве профессора в Эрлангенском университете (1872—1875), в Высшей технической школе в Мюнхене (1875—1880), в Лейпцигском университете (1880—1886) и с 1888 г. в Гёттингенском университете. В 1871 г. он установил упомянутую связь между геометрическими теориями Лобачевского и Кэли, о чем подробно говорится ниже. Выяснив, что группа движений пространства Лобачевского, а также группы движений евклидова пространства и других проективных метрик являются подгруппами группы проективных преобразований пространства, Клейн пришел к общей идее о роли групп преобразований в геометрии, высказанной им в лекции при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета («Эрлангенской программе»). Клейн сыграл важную роль в усвоении математиками идей неевклидовой геометрии и теории групп, в создании теории непрерывных групп и изучении дискретных групп геометрических преобразований, в частности так называемых фуксовых групп (теорию которых он разрабатывал в бурном соревновании с Пуанкаре), а также групп симметрий правильных фигур (одна из его книг посвящена группе симметрий правильного икосаэдра). С 1876 г. в течение сорока лет Клейн был главным редактором издававшихся в Лейпциге «Mathematischen Annalen». Нельзя не упомянуть еще его активного участия в известной многотомной «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» (Leipzig, 1898—1934. Bd. 1—6) и реформе преподавания математики в средней и высшей школе.

В своих «Лекциях о развитии математики в XIX столетии», читанных во время первой мировой войны и изданных Р. Курантом и О. Нейгебауэром в 1926 г., Клейн описывает открытие своей интерпретации следующим образом: он познакомился с теорией Кэли по упоминавшейся нами книге Сальмона «Конические сечения», немецкий перевод которой появился к этому времени, а после этого, зимой 1869—1870 гг., впервые услышал о геометрии Лобачевского от своего друга Штольца. «Из этих кратких сведений я довольно мало понял, но тотчас же у меня возникла идея, что тут существует некоторая зависимость. В феврале 1870 г. я читал доклад в семинаре Вейерштрасса о мероопределении Кэли и закончил его вопросом, не существует ли совпадения между идеями Кэли и Лобачевского. Я получил ответ, что это — две далеко отстоящие по идее системы» [38]. Клейн пишет, что сначала позволил переубедить себя и вернулся к этим идеям только летом 1871 г. в спорах с тем же Штольцем. В результате Клейн в том же году опубликовал статью «О так называемой неевклидовой геометрии», где показал, что в случае, когда «абсолют» Кэли — действительная коника, часть проективной плоскости, находящаяся внутри этой коники, изометрична плоскости Лобачевского. Эта работа вызвала возражения с многих сторон и, в частности, обвинения в порочном круге, поскольку проективную геометрию обычно излагали на основе евклидовой. Однако к этому времени появилась теория Штаудта, с помощью которой проективной геометрии можно было дать обоснование, независимое от евклидовой. Этой проблеме Клейн посвятил вторую часть указанной статьи (1872). Клейн несколько видоизменяет определение Кэли и расстоянием

[38] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М ;Л: Гостехиздат, 1937, ч. 1, с. 189.

Ф. КЛЕЙН

между точками A и B называет $c \ln W$, где W — двойное отношение точек A и B и точек пересечения прямой AB с абсолютом, а углом между прямыми a и b называет $c' \ln W'$, где W' — двойное отношение прямых a и b и касательных к абсолюту, проведенных из точки их пересечения. Клейн показывает, что в случае, когда обе постоянные c и c' равны $i/2$, получается эллиптическая плоскость, в случае же, когда $c = 1/2$, а $c' = i/2$ — плоскость Лобачевского, причем параллели Лобачевского —это прямые, пересекающиеся в точке коники. Движения эллиптической плоскости и плоскости Лобачевского при этом изображаются коллинеациями, переводящими в себя мнимую или действительную конику. Заменяя конику мнимой и овальной поверхностями второго порядка (квадриками), Клейн получает эллиптическое пространство и пространство Лобачевского. При этом интерпретация Бельтрами плоскости Лобачевского является частным случаем интерпретации Клейна, когда коника является окружностью на евклидовой плоскости, и тем самым решается вопрос о том, как изображаются движения плоскости Лобачевского в интерпретации Бельтрами. Случая вещественной постоянной c' — идеальной области плоскости Лобачевского и псевдоевклидовой плоскости — Клейн здесь не рассматривает.

Эллиптическая геометрия

Мы уже упоминали, что эллиптическая геометрия, т. е. геометрия с проективной метрикой, абсолютом которой служит мнимая коника или квадрика, для случая плоскости была определена в «Шестом мемуаре о формах» Кэли (1859). Трехмерная эллиптическая геометрия была опреде-

У. К. КЛИФФОРД

лена Клейном в статье «О так называемой неевклидовой геометрии» (1871), он же предложил термин «эллиптическая геометрия» наряду с иногда применяемым для геометрии Лобачевского термином «гиперболическая геометрия».

Важнейшие факты геометрии эллиптического пространства были открыты упоминавшимся нами (см. Кн. 1, с. 75—76) в связи с его работами по алгебре Уильямом Кингдоном Клиффордом (1845—1879), о котором Клейн писал: «Я вспоминаю о нем с особой радостью, как о человеке, который сразу до конца понял меня, а вскоре и продолжил мои исследования»[39]. В своем «Предварительном очерке бикватернионов» (Preliminary sketch of biquaternions.— Proc. Math. Soc. London, 1873) Клиффорд прежде всего определил полюсы и полярные плоскости относительно абсолюта, а также прямые, взаимно полярные относительно абсолюта, отметив, что две точки, полярно сопряженные относительно абсолюта, «отстоят друг от друга на квадрант» (т. е. на $(\pi/2)r$ или при $r = 1$ на $\pi/2$). Для каждых двух прямых имеются два общих перпендикуляра, на которых осуществляются наименьшее и наибольшее расстояния между этими прямыми, и выделяет случай, когда можно провести бесконечно много общих перпендикуляров равной длины. В последнем случае две данные прямые и их поляры являются прямолинейными образующими одной квадрики, и Клиффорд называет такие прямые параллельными. Далее доказывается, что «ряд параллельных линий, пересекающих данную линию, образует построенную по некоторому закону поверхность с кривизной, равной нулю.

[39] Там же, с. 189.

Геометрия этой поверхности та же, что у конечного параллелограмма, противоположные стороны которого рассматриваются как тождественные»[40]. «Параллели» Клиффорда в настоящее время называются паратактичными прямыми; в отличие от параллелей евклидовой («параболической») геометрии и геометрии Лобачевского, пересекающихся в точке бесконечно удаленной плоскости или в точке «абсолюта», паратактичные прямые — скрещивающиеся прямые, однако так же, как евклидовы параллели, паратактичные прямые — равноотстоящие прямые. Поверхность, построенную Клиффордом, можно определить как геометрическое место точек, равноотстоящих от прямой и от ее поляры, эта поверхность — линейчатая квадрика, получающаяся при вращении одной из двух паратактичных прямых вокруг другой, ее прямолинейные образующие обоих семейств паратактичны ее осям. Эта поверхность, изометричная ромбу евклидовой плоскости с отождествленными противоположными сторонами, представляет простейший пример пространства с евклидовой геометрией, обладающей конечным объемом; это и вместе с тем самый простой пример решения так называемой задачи Клиффорда — Клейна о нахождении пространств с евклидовой метрикой, неизометричных евклидову пространству в целом.

5. МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Формулы многомерной геометрии у Якоби

Мы видели, что идеи многомерной геометрии неоднократно высказывались различными математиками в их попытках геометрической интерпретации сначала алгебраических степеней выше 3-й (см. ИМ, т. 1, с. 230, 278, 299—301), а затем задач механики (см. ИМ, т. 3, с. 183). Однако настоящая геометрия многомерных пространств возникла только тогда, когда стало необходимо геометрически интерпретировать функции многих переменных в связи с развитием теории алгебраических форм от n переменных и n-кратных интегралов. Теорией n-кратных интегралов занимались многие математики первой половины XIX в.— М. В. Остроградский, К. Г. Якоби и др.

Из работ этого времени, посвященных n-кратным интегралам, в данной связи существенна упоминавшаяся выше статья Якоби «О преобразовании двух произвольных однородных функций второго порядка линейными подстановками в две другие, содержащие только квадраты переменных; с различными теоремами о преобразовании и вычислении кратных интегралов» (1834) (см. Кн. 1, с. 67). Здесь, помимо задачи о вычислении кратных интегралов, решается и важная проблема теории алгебраических форм: «разыскать такие линейные подстановки

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \ldots + \alpha_n' x_n,\\
y_2 &= \alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 + \ldots + \alpha_n'' x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= \alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{(n)} x_n,
\end{aligned}
$$

для которых выполнялось бы

$$y_1y_1 + y_2y_2 + \ldots + y_ny_n = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n\text{»}$$ [41].

[40] *Клиффорд В.* Здравый смысл точных наук. М., 1910, с. 333. (1-е англ. изд. 1885).
[41] *Jacobi C. G. J.* Gesammelte Werke. Berlin, 1884. Bd. 3, S. 199.

Такая подстановка как показывает Якоби, удовлетворяет уравнениям

$$\alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda + \alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda + \ldots + \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\lambda = 0,$$
$$\alpha'_\varkappa \alpha'_\varkappa + \alpha''_\varkappa \alpha''_\varkappa + \ldots + \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\varkappa = 1,$$

представляющим условие ортогональности матрицы $(\alpha^{(\lambda)}_\varkappa)$. Далее решается задача, указанная в названии работы, т. е. находится линейная подстановка $x_\varkappa = \sum\limits_\lambda b^{(\lambda)}_\varkappa y_\lambda$, приводящая одновременно две квадратичные формы

$$V = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa x_\lambda, \qquad W = \sum_{\varkappa, \lambda} b_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

к виду

$$V = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \ldots + G_n y_n y_n,$$
$$W = H_1 y_1 y_1 + H_2 y_2 y_2 + \ldots + H_n y_n y_n.$$

Эту линейную подстановку можно трактовать как подстановку, одновременно приводящую к каноническому виду уравнения двух квадрик $V = 1$ и $W = 1$.

Самой замечательной частью работы Якоби является вычисление «$(n - 1)$-кратного интеграла, распространенного на все положительные значения вещественных переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих уравнению

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots + x_n x_n = 1».$$

Решение Якоби имеет вид: «если n четно, то

$$S = \frac{(\pi/2)^{n/2}}{(n-2)(n-4)\ldots 2},$$

а если n нечетно, то

$$S = \frac{(\pi/2)^{(n-1)/2}}{(n-2)(n-4)\ldots 3}»[42].$$

Эти интегралы представляют собой выражения объемов поверхностей сегментов сферы радиуса 1 в n-мерном евклидовом пространстве, высекаемых из сферы телесным углом $x_i \geqslant 0$. Для получения объема поверхности всей сферы следует умножить эти выражения на 2^n, а в случае сфер радиуса r эти выражения следует умножить на r^{n-1}.

Отметим, что, решая по существу задачи многомерной геометрии, Якоби (как и Остроградский) совершенно не пользовался геометрической терминологией.

Аналитическая геометрия n измерений Кэли

Терминология многомерной геометрии появилась впервые в математическом сочинении в небольшом мемуаре А. Кэли «Главы аналитической геометрии n измерений» (Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions.— Philos. Mag. London, 1843); впрочем, сама работа чисто алгебраическая и термин «геометрия n измерений», кроме заголовка в ней, больше не встречается. В работе рассматриваются системы однородных уравнений

[42] Ibid., S. 267.

с n переменными

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_1x_1 + K_2x_2 + \ldots + K_nx_n = 0$$

и «взаимные уравнения» по отношению к этим системам, определяемые некоторой однородной функцией второго порядка $U = {}^1/_2[\Sigma\,(\alpha^2)x_\alpha^2 + 2\Sigma\,(\alpha\beta)x_\alpha x_\beta]$; левые части «взаимных уравнений» суть определители из частных производных $\partial U/\partial x_\alpha$ и коэффициентов уравнений данной системы. Кэли показывает, что, если данная система имеет r независимых уравнений, во взаимной системе их будет $n - r$. С точки зрения многомерной проективной геометрии переменные $x_1, x_2, \ldots x_n$ можно рассматривать как координаты точек $(n - 1)$-мерного пространства, система r независимых уравнений определяет $(n - r - 1)$-мерную плоскость в этом пространстве, функция U определяет квадрику $U=0$, а взаимные уравнения определяют $(r-1)$-мерную плоскость, являющуюся полярной для $(n - r - 1)$-мерной плоскости по отношению к квадрике. Сам Кэли не владеет еще многомерной геометрической терминологией, но то, что он имеет в виду ту картину, которую мы описали, видно из его слов в конце работы: «В случае четырех переменных изложенные выше исследования доказывают следующие свойства квадрик» [43], после чего следуют примеры теорем о квадриках, прямых и плоскостях трехмерного проективного пространства.

Возможно, что Кэли пришел к идеям многомерной геометрии под влиянием кватернионов Гамильтона: уже в 1845 г. Кэли публикует упоминавшуюся нами в Кн. 1 (с. 74) работу «Об эллиптических функциях Якоби и о кватернионах» (On Jacobi's elliptic functions and on quaternions.— Philos. Mag. London), где не только рассматривает кватернионы, но и обобщает их на октавы («числа Кэли»), которые можно интерпретировать в виде векторов 8-мерного пространства.

Многомерная геометрия Грассмана

Первым фундаментальным исследованием по многомерной геометрии было упоминавшееся «Учение о линейном протяжении» Грассмана (1844), в котором была развита аффинная геометрия не только трехмерного, но и многомерного пространства. По-видимому, существенную роль в том, что именно Грассману удалось создать развернутое учение о многомерном пространстве, сыграло то, что Грассман не находился под влиянием других крупных математиков своего времени, а также его склонность к философским обобщениям.

Определив «образы первой ступени», «образы второй ступени» и «образы третьей ступени», Грассман замечает: «Так как этот способ образования по идее применим без всякого ограничения, то я могу этим способом определить системы произвольно высоких ступеней... дальше геометрия не идет, но абстрактная наука не знает границ» [44]. Как видно, под геометрией Грассман понимал только геометрию обычного пространства, к которому только он и относил термин «пространство», а то, что мы называем геометрией многомерных пространств, он называл «учением о протяжении», сами же многомерные пространства он называл «системами» ступеней >3.

---

[43] *Cayley A.* Collected mathematical papers. Cambridge, 1889, vol. 1, p. 62.
[44] *Grassmann H.* Gesammelte mathematische und physikalische Werke, S. 52—53.

В «Учении о протяжении» (1862) Грассман определил n-мерное линейное пространство и «внешние произведения» векторов этого пространства, называемые в настоящее время простыми n-векторами. Грассман представлял внешние произведения в виде внешних произведений базисных векторов, которые он называл «единицами». Коэффициенты этих линейных комбинаций в настоящее время называют *грассмановыми координатами* m-мерных плоскостей n-мерного пространства; эти координаты являются основным средством изучения m-мерных плоскостей n-мерных пространств, чем и объясняется то, что многообразия таких плоскостей в настоящее время называют грассмановыми многообразиями. Сложение и умножение «экстенсивных величин» привели Грассмана к алгебре «знакопеременных чисел», о которой мы говорили выше.

«Новая геометрия пространства» Плюккера

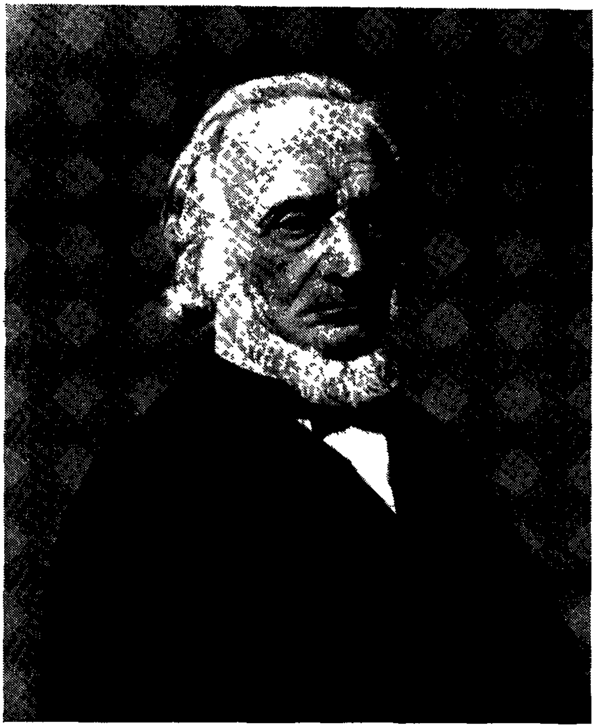
Другой подход к понятию многомерного пространства был предложен Плюккером в его упоминавшейся нами «Системе пространственной геометрии» (1846), где он предложил рассматривать в качестве основного элемента обычного пространства не точки, а прямые, многообразие которых четырехмерно.

Идеи линейчатой геометрии Плюккера получили дальнейшее развитие в его «Новой геометрии пространства, основанной на рассмотрении прямой линии в качестве пространственного элемента» (1868—1869), II том этой книги, вышедшей посмертно, был подготовлен к печати учеником Плюккера Ф. Клейном. Здесь были введены плюккеровы координаты, являющиеся частными случаями грассмановых при $n = 3$, $m = 1$: если прямая проходит через точки с проективными координатами x_i и y_i, то плюккеровы координаты этой прямой — $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, эти координаты, как и x_i и y_i, определены с точностью до множителя, причем при замене точек с координатами x_i и y_i на точки с координатами $z_i = \alpha x_i + \beta y_i$ и $t_i = \gamma x_i + \delta y_i$ они умножаются на $\alpha\delta - \beta\gamma$; координаты p_{ij} связаны также соотношением $p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$.

Плюккер определил «линейные комплексы» — комплексы, задающиеся одним линейным соотношением между координатами p_{ij}, и «линейные конгруэнции», определяемые двумя комплексами (такие конгруэнции подразделяются на гиперболические — совокупности прямых, пересекающих две скрещивающиеся прямые, эллиптические — совокупности прямых, соединяющие мнимосопряженные точки двух мнимосопряженных прямых, и параболические — касающиеся линейчатой квадрики в точках одной ее прямолинейной образующей; последний случай является предельным для первых двух).

«Теория многократной континуальности» Шлефли

В 1851 г. профессор университета в Берне Людвиг Шлефли (1814—1895) закончил обширное исследование, посвященное многомерной евклидовой геометрии, которую он представил Венской академии наук, однако полностью труд Шлефли был опубликован лишь 50 лет спустя. Впрочем, важнейшие результаты этого труда были опубликованы Шлефли в статьях «Редукция кратного интеграла, содержащего в качестве частных случаев дугу круга и площадь сферического треугольника» (Reduction d'un intégrale multiple qui comprend l'arc du circle et l'aire du triangle sphérique comme cas particuliers.— J. math. pures et appl., 1855) и «О кратном



Л. ШЛЕФЛИ

интеграле $\int\limits^{n} dx\,dy\ldots dz$ с пределами $p_1 = a_1x + b_1y + \ldots + h_1z \geqslant \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ p_3 \geqslant 0,\ \ldots,\ p_n \geqslant 0$ и $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$» (On the multiple integral $\int\limits^{n} dx\,dy\ldots dz$ whose limits are... — Quart. J. Math., 1858—1860). Книга Шлефли называется «Теория многократной континуальности» (Theorie der vielfachen Kontinuität. Basel, 1901) и ставит своей целью «обосновать и выработать новую ветвь анализа, которая, как бы являясь аналитической геометрией n измерений, содержит таковую для плоскости и пространства в качестве частных случаев для $n = 2, 3$» [45]. Шлефли указывает, что аналогом точки обычного пространства у него является «решение» (Lösung), определяемое значениями n переменных $x, y, \ldots$ Совокупность всех решений Шлефли называет «n-кратной тотальностью», если же даны 1, 2, 3, . . . уравнения, то совокупность их решений он называет «(n — 1)-кратным, (n — 2)-кратным, (n — 3)-кратным ... континуумом». Как мы видим, Шлефли, как и Грассман, не пользуется терминологией многомерной геометрии. Далее Шлефли вводит в рассматриваемом им пространстве «косоугольные» системы «переменных», в которых расстояние между двумя «решениями» равно

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \ldots + 2k\,(x' - x)(y' - y) + \ldots},$$

и «прямоугольные» системы «переменных», в которых это расстояние равно

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \ldots}\ .$$

[45] *Schläfli L.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Basel, 1950, Bd. 1, S. 171.

Для двух линейных полиномов

$$p = ax + by + cz + \ldots + hw \text{ и } p' = a'x + b'y + \ldots + h'w$$

Шлефли определяет совокупность «решений», для которых одновременно $p > 0$ и $p' > 0$. Считая, что эта совокупность решений относится ко всей «неограниченной тотальности», как дробь к целому, и что знаменатель этой дроби 2π, он называет числитель «углом полиномов p и p'» и обозначает его $\sphericalangle(p, p')$. Шлефли определяет этот угол по формуле

$$\cos \sphericalangle(p, p') = \frac{aa' + bb' + cc' + \ldots + hh'}{\sqrt{a^2 + b^2 + \ldots + h^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + \ldots + h'^2}},$$

где оба корня в знаменателе предполагаются положительными.

С нашей точки зрения, «полиномы» Шлефли — $(n-1)$-мерные плоскости, а определенный им угол — угол между этими плоскостями. Шлефли называет плоскости любых размерностей «линейными континуумами», кривые поверхности — «высшими континуумами», причем «однократные континуумы» (линии) он называет «путями», а «линейные однократные континуумы» (прямые линии) — «лучами». Шлефли определяет далее параллельные плоскости и многомерные параллелограммы, которые он называет «параллелосхемами». Он доказывает, что «мера параллелосхемы равна определителю ортогональных проекций его ребер»[46], т. е., если «проекции» ребер «параллелосхемы» равны $\overset{i}{x}_0, \overset{i}{x}_1, \ldots, \overset{i}{x}_n$, ее объем равен определителю матрицы $(\overset{i}{x}_j)$. Далее Шлефли определяет многомерные многогранники, которые он называет «полисхемами», и находит объемы многомерных пирамид и других многогранников, а также доказывает, что «мера произвольного замкнутого n-кратного континуума равна квадратному корню из суммы квадратов его проекций»[47]. Далее доказывается обобщенная теорема Эйлера: для односвязного многогранника n-мерного пространства числа N_p p-мерных граней (при $p = 0$ — вершин, при $p = 1$ — ребер) связаны соотношением

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots - (-1)^p N_p + \ldots + (-1)^n N_{n-1} - \\ - (-1)^n = 0$$

(при $n = 2$ частным случаем этой формулы является равенство $N_0 = N_1$, а при $n = 3$ — теорема Эйлера $N_0 - N_1 + N_2 = 2$).

В последующем изложении доказывается, что при $n \geqslant 5$ имеются только три типа правильных многогранников — многомерные обобщения тетраэдра, куба и октаэдра, имеющие соответственно $n + 1$ вершин и граней, 2^n вершин и $2n$ граней и $2n$ вершин и 2^n граней, а при $n = 4$ имеются шесть видов правильных многогранников: к указанным трем видам, наличным и при $n = 4$, добавляются многогранник с 24 вершинами и 24 гранями, со 120 вершинами и 300 гранями и с 300 вершинами и 120 гранями. Во второй части своего сочинения, посвященной «учению о сферических континуумах», Шлефли, в частности, находит объем поверхности многомерной сферы, сводящийся к приведенным нами выше интегралам, вычисленным Якоби; в третьей части он рассматривает «квадратичные континуумы», т. е. многомерные квадрики, и, в частности, находит центр и главные оси «квадратичного континуума».

Работы Шлефли не получили широкой известности при его жизни, и правильные многогранники n-мерного пространства, описанные Шлефли

---

[46] Ibid., S. 182.
[47] Ibid., S. 183.

в его работе 1858—1860 гг., в течение второй половины XIX в. были открыты еще раз профессором университета в Беркли (Калифорния) Вашингтоном Ирвингом Стрингхемом (1847—1909) в работе «Правильные фигуры в n-мерном пространстве» (Regular figures in n-dimensional space.— Amer. J. Math., 1880) и профессором Берлинского университета Рейнгольдом Гоппе (1816—1900) в работах «Правильные линейно ограниченные фигуры четырех измерений» (Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen.— Arch. Math. Phys., 1882) и «Правильные линейно ограниченные фигуры любого числа измерений» (Die regelmässige linear begrenzte Figuren jeder Anzahl der Dimensionen.— Arch. Math. Phys., 1882).

Значительно более общее, чем у Грассмана и Шлефли, понятие об «n-кратно протяженном многообразии» было предложено Б. Риманом в 1854 г. в его речи «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», к которой мы обратимся далее.

Многомерная геометрия Клейна и Жордана

Существенный вклад в распространение идеи многомерного пространства внес Ф. Клейн, описав в своей «Эрлангенской программе» (1872) различные группы преобразований трехмерных пространств; в заключительном параграфе он писал: «Как осуществить перенесение предыдущего пространства на понятие чистого многообразия, представляется очевидным» [48]. В 70-х годах Клейн написал ряд работ по многомерной геометрии и, в частности, опубликовал статью, где доказывал, что замкнутая кривая с узлами в трехмерном пространстве может быть освобождена от узлов в четырехмерном пространстве и то же относится к зацепленным окружностям в трехмерном пространстве (1876). Позднее Клейн вспоминал: «И тут опять [как и в случае неевклидовой геометрии.— *Ред.*] помехой на пути развития этих целей явились философы; этим последним не хватало понимания того имманентного значения, которое присуще математическим теориям... Но, кроме сопротивления со стороны философов, утверждающих... что n-мерное пространство есть бессмыслица, возникла еще одна неожиданная трудность, как раз противоположного характера. Появились философы-энтузиасты, которые из существования и плодотворности математической теории сделали вывод о существовании некоего действительного четырехмерного пространства, существующего в природе, откуда и вытекала, по их мнению, возможность экспериментального доказательства его существования» [49]. Далее Клейн рассказывает об астрономе и физике Ф. Цёльнере (1834—1882) и американском спирите Слэде, «замечательно ловком фокуснике, который, между прочим, был через несколько лет разоблачен». Клейн рассказал Цёльнеру о своей работе 1876 г. Это сообщение, пишет Клейн, «Цёльнер встретил с непонятным для меня энтузиазмом. Он решил, что получил в руки средство для экспериментального доказательства «существования четвертого измерения», и предложил Слэду выполнить на практике освобождение замкнутой нити от узлов. Слэд принял это предложение... и действительно ему удалось вскоре выполнить это к великому удовольствию Цёльнера. Что в этом опыте участвовала разорванная нить, место разрыва которой Цёльнер должен был сжать обеими большими пальцами, в то время как Слэд держал свою руку поверх его рук,— об этом я упомяну только вскользь» [50].

---

[48] Об основаниях геометрии, с. 424—425.
[49] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии, с. 207.
[50] Там же, с. 208.

«Опыты» Цёльнера описаны и в статье Фридриха Энгельса «Естествознание в мире духов»: «Теперь, согласно новейшим торжествующим сообщениям из мира духов, господин профессор Цёльнер обратился к одному или нескольким медиумам, чтобы с их помощью установить дальнейшие подробности относительно местонахождения четвертого измерения. Успех при этом был поразительный... Духи доказывают существование четвертого измерения, как и четвертое измерение свидетельствует о существовании духов» [51].

В 1875 г. Камилл Жордан (см. Кн. 1, с. 65—67) опубликовал «Очерк геометрии n измерений» (Essai sur la géométrie à n dimensions.— Bull. Soc. Math. France, 1875; краткое сообщение под тем же названием: C. r. Acad. sci. Paris, 1872). В отличие от большинства работ по многомерной геометрии того времени Жордан постоянно пользовался обычными терминами: «Мы будем рассматривать точку в пространстве n измерений как то, что определяется координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Линейное уравнение между координатами определяет *плоскость*, k совместных линейных уравнений — *k-плоскость*, $n - 1$ уравнений — *прямую*, расстояние между двумя точками будет $\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots}$ и т. д.» [52].

Эта терминология совпадает с современной во всем, за исключением термина «k-плоскость», под которой в настоящее время понимается не $(n - k)$-мерная, а k-мерная плоскость.

Разобрав условия параллельности и перпендикулярности и преобразования координат, Жордан находит метрические инварианты «k-плоскости» и «l-плоскости» — стационарные углы и кратчайшее расстояние: «система, состоящая из k-плоскости P_k и l-плоскости P_l, проходящих через точку пространства, имеет ρ различных инвариантов, где ρ — наименьшее из чисел k, l, $n - k$, $n - l$. Эти инварианты можно рассматривать как углы между многомерными плоскостями (multiplans)» [53]. Квадраты косинусов этих углов определяются как собственные числа некоторой матрицы ρ-го порядка. Жордан определяет также кратчайшее расстояние непересекающихся P_k и P_l. Далее Жордан находит каноническую форму вращения в n-мерном пространстве, т. е. канонический вид ортогональной матрицы.

Риманова геометрия

Новый раздел многомерной геометрии был основан Б. Риманом (см. ИМ, т. 3) в его знаменитой речи «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen), прочитанной 10 июня 1854 г. в Гёттингенском университете в качестве пробной лекции. На лекции присутствовал Гаусс, к которому преимущественно она и была обращена. Риман начинает с того, что «образование понятия величины возможно лишь в том случае, если предпослано некоторое общее понятие, связанное с допущением ряда различных состояний. В зависимости от того, существует или не существует непрерывный переход от одного состояния к другому, мы имеем дело с непрерывным или прерывным многообразием; отдельные состояния называются в первом случае точками, во втором — элементами многообразия» [54]. Риман определяет размерность непрерывного многообразия следующим образом:

---

[51] *Энгельс Ф.* Диалектика природы. М.: Госполитиздат, 1948, с. 36—37.
[52] *Jordan C.* Oeuvres. Paris, 1962, t. 3, p. 3.
[53] Ibid., p. 5.
[54] *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, с. 280.

«Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причем от одного состояния определенным образом можно переходить ко всякому другому; тогда все эти состояния образуют просто протяженное или однократно протяженное многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны — вперед и назад» [55]. Переводя это множество состояний непрерывным образом в другое множество состояний, Риман определяет «дважды протяженное многообразие», из него аналогично получает «трижды протяженное многообразие», а повторяя эту операцию n раз,— «n-кратно протяженное многообразие». Это понятие по существу совпадает с «протяжением» Грассмана и «континуальностью» Шлефли, однако, если Грассман и Шлефли, определив многомерное пространство весьма общего вида, затем фактически ограничивались многомерным аффинным или евклидовым пространством, Риман определил метрику на «n-кратно протяженном многообразии», не сводящуюся к евклидовой и по существу являющуюся обобщением гауссовой внутренней геометрии поверхности. Именно, определив n-кратно протяженное многообразие, Риман поставил вопрос о «метрических отношениях, возможных на таких многообразиях», и о возможности «результаты вычислений выражать в геометрической форме». Указав, что «для того и другого прочное основание заложено в знаменитом сочинении о кривых поверхностях г. тайного советника Гаусса» [56], Риман рассмотрел сначала весьма общие предположения, а затем ограничился случаем, когда дифференциал дуги ds, т. е. расстояние между точками с координатами x_i и $x_i + dx_i$, является однородной алгебраической функцией от дифференциалов с коэффициентами, являющимися функциями только координат x_i. Далее, переходя к простейшим возможным случаям, Риман находит, что таков случай

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

где $g_{ij} = g_{ji}$ — непрерывные и дважды дифференцируемые функции переменных x_i, а квадратичная форма — положительно определенная. Риман указывает, что, «в частности, для пространства, если определить положение точки прямоугольными координатами, мы имеем $ds = \sqrt{\sum (dx)^2}$» [57]; под «пространством» Риман, как и Грассман, понимал трехмерное евклидово пространство. Общее выражение Римана для ds^2 является обобщением первой квадратичной формы Гаусса для поверхности. Благодаря условию Римана определенное им n-мерное пространство можно рассматривать в малых участках как n-мерное евклидово пространство.

Интегрируя ds вдоль линий, Риман получал длины линий в определенном им пространстве. Среди различных линий, соединяющих две точки, особое место занимают кратчайшие (геодезические), определяемые дифференциальными уравнениями, аналогичными дифференциальным уравнениям геодезических линий на поверхностях. С помощью геодезических линий можно весьма наглядно определить важнейшее понятие геометрии пространств, рассматривавшихся Риманом,— кривизну пространства в точке в данном двумерном направлении. Для этого следует из данной точки провести две геодезические, касающиеся данного двумерного на-

[55] Там же, с. 281.
[56] Там же, с. 283.
[57] Там же, с. 284.

правления, соединить две точки этих линий третьей геодезической и измерить сумму углов $A + B + C$ и площадь полученного «геодезического треугольника» ABC. Кривизной пространства в данной точке в данном двумерном направлении называется предел отношения углового избытка геодезического треугольника $A + B + C - \pi$ к его площади при стягивании треугольника в данную точку; угловой избыток и, следовательно, кривизна могут быть как положительными, так и отрицательными. Риман определяет кривизну в данном двумерном направлении, рассматривая бесконечно малые геодезические треугольники: в окрестности точки, в которой он хочет определить кривизну, Риман вводит координаты x_i, равные в этой точке 0 и связанные с расстоянием s точек этой окрестности от данной точки соотношением $s = \sum\limits_i x_i^2$ (в настоящее время их называют римановыми координатами). В этих координатах линейный элемент вблизи данной точки принимает вид

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 + \sum_i \sum_j \sum_k c_{ij,\,k} x_k dx_i\, dx_j + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l c_{ij,\,kl} x_k x_l\, dx_i\, dx_j + \ldots,$$

где $c_{ij,\,k}$ и $c_{ij,\,kl}$ — значения частных производных $\partial g_{ij}/\partial x_k$ и $\partial^2 g_{ij}/\partial x_k \partial x_l$ в данной точке. Риман замечает, что в силу того, что его координатные линии геодезические, все $c_{ij,\,k} = 0$, а члены второго порядка в разложении ds^2 образуют квадратичную форму от выражений $x_i dx_j - x_j dx_i$. Если для единообразия обозначать бесконечно малые величины x_i через δx_i, то эти выражения можно записать в виде $\Delta x_{ij} = \delta x_i dx_j - \delta x_j dx_i$ и рассматривать как координаты параллелограмма, построенного на векторах $\{dx_i\}$ и $\{\delta x_i\}$. Поэтому члены второго порядка в разложении ds^2 можно записать в виде

$$\Delta\sigma^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l R_{ij,\,kl} \Delta x_{ij} \Delta x_{kl}.$$

Далее Риман рассматривает, как он выражается, частное от деления $\Delta\sigma^2$ на площадь треугольника с вершинами $(0, 0, \ldots, 0)$, $(x_1, x_i, \ldots, x_n)$ и $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ — треугольника, построенного на тех же векторах $\{dx_i\}$ и $\{\delta x_i\}$, т. е., как сказали бы мы, предел указанного частного при стягивании этого треугольника в точку. Эту величину Риман и называет мерой кривизны; она отличается от определенной нами выше кривизны пространства в данной точке в данном двумерном направлении (совпадающей в случае поверхности с гауссовой мерой кривизны) только коэффициентом.

Искривленные многомерные пространства, определенные Риманом в речи 1854 г., в настоящее время называют *римановыми пространствами*, а их геометрию — *римановой геометрией*.

Величины $R_{ij,\,kl}$ образуют так называемый *тензор кривизны*, или *тензор Римана*. Как координаты всякого тензора, они обладают тем свойством, что при преобразовании координат x_i их выражения в новых координатах являются линейными комбинациями их выражений в старых координатах, откуда вытекает, что если они равны 0 в некоторой системе координат, то они равны нулю в любой системе координат.

Риману удалось применить идеи предложенной им геометрии для решения практической задачи. Этому применению посвящено написанное в 1861 г. его «Математическое сочинение, в котором содержится попытка дать ответ на вопрос, предложенный знаменитейшей Парижской академией: „Определить, каково должно быть тепловое состояние однородного твердого тела, чтобы система изотермических кривых, заданная в определенный момент времени, оставалась системой изотермических кривых в любой момент времени таким образом, чтобы температура точки выражалась в виде функции времени и еще двух независимых переменных“».

Работа Римана, присланная на конкурс не вполне законченной и написанная крайне сжато, не была понята жюри конкурса и премии не получила. Рукопись была впервые опубликована в первом собрании сочинений Римана (1876). Риман приводит здесь дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial s_i}\Big(\sum_j b_{ij}\frac{\partial u}{\partial s_i}\Big)=h\frac{\partial u}{\partial t}$$

к наиболее простому виду, эта задача равносильна преобразованию квадратичной формы $\sum\limits_i\sum\limits_j b_{ij}ds_i ds_j$ к сумме квадратов. Необходимое и достаточное условие для возможности такого преобразования состоит в равенстве нулю выражения

$$K=\frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_i\sum\limits_j\sum\limits_k\sum\limits_l (ij,kl)\,(ds_i\delta s_j-ds_j\delta s_i)\,(ds_k\delta s_l-ds_l\delta s_k)}{\Big(\sum\limits_i\sum\limits_j b_{ij}\,ds_i\,ds_j\Big)\Big(\sum\limits_i\sum\limits_j b_{ij}\delta s_i\delta s_j\Big)-\Big(\sum\limits_i\sum\limits_j b_{ij}\,ds_i\delta s_j\Big)^2},$$

не изменяющегося при замене переменных. По поводу этого выражения, обозначаемого им (III), Риман пишет: «Выражение $\sqrt{\sum\limits_i\sum\limits_j b_{ij}\,ds_i\,ds_j}$ можно рассматривать как линейный элемент в общем n-кратно протяженном пространстве, лежащем за пределами нашей интуиции. Если в этом пространстве из точки $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ провести всевозможные кратчайшие линии, начальные направления которых характеризуются отношениями

$$\alpha ds_1+\beta\delta s_1:\ \alpha ds_2+\beta\delta s_2:\ \ldots:\ \alpha ds_n+\beta\delta s_n$$

(причем α и β — произвольные величины), то эти линии образуют некоторую поверхность, которую можно представить себе расположенной в обычном пространстве нашей интуиции. В таком случае выражение (III) будет являться мерой кривизны упомянутой поверхности в точке $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$» [58].

Величины (ij, kl) — так называемые четырехзначковые символы Римана — те же, которые мы выше обозначали через $R_{ij,kl}$, выражаются через коэффициенты g_{ij} основной квадратичной формы Римана и их производных. В настоящее время они записываются в виде

$$R_{ij,kl}=\sum_h\Big(\frac{\partial\Gamma^h_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x_j}+\sum_r\Gamma^h_{ir}\Gamma^r_{jk}-\sum_r\Gamma^h_{jr}\Gamma^r_{ik}\Big)g_{hl},$$

где величины Γ^i_{jk} определяются соотношениями

$$\sum_l g_{il}\Gamma^l_{jk}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}\Big) \qquad (6)$$

---

[58] *Риман Б.* Сочинения, с. 412.

(Риман обозначал величины Γ^i_{jk} через p_{ijk}); с помощью величин Γ^i_{jk} уравнение геодезических линий риманова пространства записывается в виде

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+\sum_j\sum_k\Gamma^i_{jk}\frac{dx_j}{dt}\,\frac{dx_k}{dt}=0. \tag{7}$$

Это уравнение определяет параметр t геодезических линий с точностью до преобразования $t\to at+b$.

Риман специально рассмотрел искривленные многомерные пространства ненулевой постоянной кривизны, обладающие той же степенью подвижности, что и евклидово пространство. Когда мера кривизны равна α, выражение для ds может быть приведено к виду

$$\left(1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2\right)^{-1}\sqrt{\sum dx^2}\,.$$

При $n=2$ получается данное Миндингом выражение линейного элемента поверхности постоянной кривизны через гауссову кривизну этой поверхности.

Примером n-мерного риманова пространства постоянной положительной кривизны является сфера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве, примером n-мерного риманова пространства постоянной отрицательной кривизны является n-мерное пространство Лобачевского, определенное впервые Э. Бельтрами в «Основной теории пространств постоянной кривизны» (Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante.— Ann. Mat., 1868).

Идея Римана о комплексных параметрах евклидовых движений

Последняя часть работы Римана озаглавлена «Применение к пространству»; мы уже отмечали, что определяемое в работе многомерное пространство Риман называет «многообразием», а под словом «пространство», он имеет в виду пространство реального мира. Перечислив «условия, необходимые и достаточные для определения метрических соотношений в пространстве»: равенство нулю меры кривизны в каждой точке для каждого двумерного направления, постоянство меры кривизны в пространстве и «независимость длины линий» от их места, он делает вывод, что «перемещения или изменения местоположения являются комплексными величинами, выражающимися через три независимые единицы» [59]. Последние слова Римана означают конечность числа параметров, от которых зависят движения пространства, или, как стали говорить после усвоения геометрами понятия группы, конечность числа параметров группы движений пространства. Однако выражение движений пространства с помощью комплексных величин, выражающихся через «три независимые единицы», было найдено только в самом конце XIX в. в работе казанского профессора Александра Петровича Котельникова (1865—1944) «Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике» (Казань, 1895) и вскоре после него в «Геометрии динам» (Geometrie der Dynamen. Leipzig, 1902) профессора университета в Грейфсвальде Эдуарда Штуди (1862—1922). В этих работах было показано, что многообразие ориентированных прямых трехмерного евклидова пространства можно отобразить на сферу в трехмерном евклидовом пространстве, но не вещественном,

---

[59] Там же, с. 289.

а построенном над особым видом комплексных чисел, введенных У. Клиффордом в упоминавшемся нами «Предварительном очерке бикватернионов»; эти числа, называемые в настоящее время «дуальными числами» (термин Штуди), можно определить как выражения вида $a + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$. При этом, как показали Котельников и Штуди, дуальное расстояние между двумя точками этой сферы, изображающими две прямые, составляющими угол φ и кратчайшее расстояние d, равно дуальному числу $\varphi + \varepsilon d$, а движения евклидова пространства изображаются вращениями дуальной сферы и, следовательно, зависят от трех дуальных параметров. Возможно, что Риман догадывался об этих трех параметрах, хотя ему и не была ясна природа тех комплексных чисел, через которые выражаются движения евклидова пространства.

Идеи Римана о физическом пространстве

Далее, затронув «распространение пространственных построений в направлении неизмеримо большого», Риман пишет: «Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом — вопросы праздные. Иначе обстоит дело с вопросами о неизмеримо малом. От той точности, с которой нам удается проследить явления в бесконечно малом, существенно зависит наше знание причинных связей. Успехи в познании механизма внешнего мира, достигнутые на протяжении последних столетий, обусловлены почти исключительно благодаря точности того построения, которое стало возможно в результате открытия анализа бесконечно малых и применения основных простых понятий, которые были введены Архимедом, Галилеем и Ньютоном и которыми пользуется современная физика. В тех же областях естествознания, где еще отсутствуют основные понятия, которые позволили бы произвести аналогичные построения, явления с целью установления причинных связей исследуются в пространственно бесконечно малом, насколько это осуществимо посредством микроскопа. Поэтому вопросы о метрических отношениях пространства в неизмеримо малом не принадлежат к числу праздных.

Если допустим, что тела существуют независимо от места их нахождения, так что мера кривизны везде постоянна, то из астрономических наблюдений следует, что она не может быть отлична от нуля; или, если она отлична от нуля, то по меньшей мере можно сказать, что часть Вселенной, доступная телескопам, ничтожна по сравнению со сферой той же кривизны» [60].

Последние слова Римана показывают, что он, подобно Лобачевскому, интересовался измерением сумм углов космических треугольников «в части Вселенной, доступной телескопам», и знал, что результаты этих измерений не давали в то время повода сомневаться, что эти суммы углов равны 180°. Далее Риман, опять-таки как и Лобачевский, допускает, что «в неизмеримо малом» геометрия может быть отлична от геометрии «в целом»: «Эмпирические понятия,— пишет Риман,— на которых основывается установление пространственных метрических отношений,— понятия твердого тела и светового луча, по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления» [61]. Как мы видим, Риман не только учитывает молекулярное и

---

[60] Там же, с. 290—291.
[61] Там же, с. 291.

атомистическое строение вещества, но в эпоху почти безраздельного господства волновой теории света возвращается к корпускулярным представлениям о свете, что сближает его с современными представлениями о свете как о потоке фотонов.

Упомянув, что в начале «речи» он заметил, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия этот принцип привносится в пространство извне (т. е. в случае дискретного многообразия можно определить расстояния в нем, измеряя их «шагами» между дискретными точками, а в случае непрерывного многообразия надо задавать коэффициенты метрической формы в функции координат точек), Риман пишет: «Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководствуясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведенные в настоящей работе, именно имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связей вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его нам не дает повода сегодняшний день» [62].

В этих словах Риман гениально предвосхитил и «возникновение метрических отношений» благодаря гравитационным свойствам масс, установленные общей теорией относительности Эйнштейна, и идеи дискретного, или «квантованного», пространства, которые обсуждаются в современной физике.

Работы Кристоффеля, Липшица и Суворова по римановой геометрии

Исследования Римана были продолжены профессором в политехникуме Цюриха, а затем университета в Страсбурге Эльвином Бруно Кристоффелем (1829—1900), который в статье «О преобразовании однородных дифференциальных выражений второй степени» (Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.— J. für Math., 1869) рассмотрел условия совпадения римановой геометрии, определяемой формой $\Sigma\Sigma g_{ij}dx_i dx_j$, с геометрией, определяемой формой $\Sigma\Sigma h_{ij}dx_i dx_j$. Если Риман ставил задачу обобщения на многомерные пространства внутренней геометрии поверхностей Гаусса, то задача Кристоффеля представляла собой обобщение задачи наложения поверхностей. Условие совпадения геометрий, которое нашел Кристоффель, состоит в совпадении дифференциальных форм $\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma R_{ij,\,kl}dx_i dx_k \delta x_j \delta x_l$, вычисленных для двух данных квадратичных форм. Кристоффель обозначил величины Γ^i_{jk} через $\left\{ {jk \atop i} \right\}$, а величины $\Gamma_{jk,\,l} = \Sigma g_{il}\Gamma^l_{jk}$ через $\left[{jk \atop i} \right]$, вследствие чего эти величины часто называют «трехзначковыми символами Кристоффеля» соответственно первого и второго рода.

Одновременно с Кристоффелем аналогичные задачи были решены профессором университета в Бонне Рудольфом Липшицем (1832—1903) в «Ис-

[62] Там же, с. 291—292.

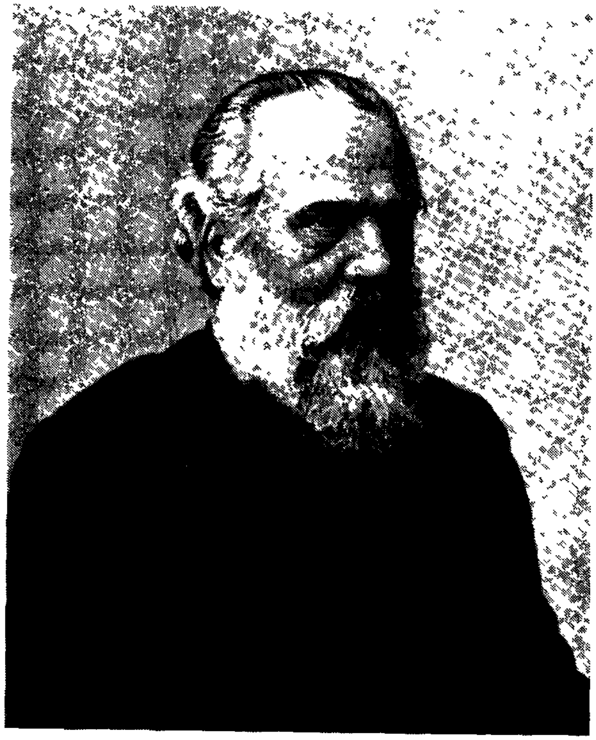
Э. Б. КРИСТОФФЕЛЬ

следованиях, относящихся к целым однородным функциям и дифференциалам» (Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen.— J. für Math., 1870).

Ту же задачу для трехмерных римановых пространств независимо от Кристоффеля и Липшица решил Федор Матвеевич Суворов (1845—1911), уроженец Пермской губернии, ученик П. И. Котельникова, профессор Казанского университета, много сделавший для популяризации открытия Лобачевского. Задаче эквивалентности двух квадратичных дифференциальных форм трехмерных римановых пространств посвящена магистерская диссертация Суворова «О характеристиках систем трех измерений», опубликованная по-русски в Казани в 1871 г. и в кратком изложении по-французски в Париже в 1873 г. (докторская диссертация Суворова, защищенная в 1884 г., была посвящена мнимым точкам и прямым на плоскости и их применению для построения коник).

Многомерная теория кривых

Создание многомерной евклидовой геометрии быстро привело к построению дифференциальной геометрии в многомерном пространстве. К. Жордан в работе «О теории кривых в пространстве n измерений» (Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions.— C. r. Acad. sci. Paris, 1874) построил многомерный аналог формул Серре — Френе. Жордан рассматривает кривую в n-мерном евклидовом пространстве, задавая ее функциями $x_1 = f_1(s), \ldots, x_n = f_n(s)$ в прямоугольных координатах, принимая за параметр s длину дуги. О переменной точке кривой с координатами $X_1, \ldots, X_n$, «бесконечно близкой к предыдущей», Жордан пишет: «Ее коор-



Ф. М. СУВОРОВ

динаты с учетом бесконечно малых порядка $n - k + 1$ будут удовлетворять системе линейных уравнений, совокупность этих уравнений определяет соприкасающуюся k-плоскость к данной кривой»[63]. Напомним, что «k-плоскостью» Жордан называет пересечение k «плоскостей», по современной терминологии «гиперплоскостей» (($n - 1$)-мерных плоскостей), и, следовательно, «соприкасающаяся k-плоскость» Жордана — соприкасающаяся ($n - k$)-мерная плоскость кривой, т. е. предельное положение ($n - k$) мерной плоскости, проходящей через $n - k + 1$ точек кривой при стягивании всех этих точек в одну точку, при $k = n - 1$ это касательная прямая. Далее Жордан формулирует важное свойство «соприкасающихся k-плоскостей»: «Две последовательные соприкасающиеся k-плоскости пересекаются по соприкасающейся ($k + 1$)-плоскости»[64]. Выражение «две последовательные соприкасающиеся k-плоскости» условно, так как на самом деле между всякими двумя соприкасающимися плоскостями любой размерности можно построить соприкасающуюся плоскость той же размерности, точка соприкосновения которой находится между точками соприкосновения первых двух плоскостей, однако сформулированное Жорданом утверждение имеет точный смысл, состоящий в том, что если мы рассмотрим $n - k + 2$ точки кривой и проведем через первые и последние из них ($n - k$)-мерные плоскости, а через все эти точки ($n - k + 1$)-мерную плоскость, то при стягивании всех этих $n - k + 2$ точек в одну ($n - k + 1$)-мерная плоскость, обе ($n - k$)-мерные плоскости и ($n - k - 1$)-

[63] *Jordan C.* Oeuvres. Paris, 1964, t. 4, p. 337.
[64] Ibid.

мерная плоскость пересечения двух $(n-k)$-мерных плоскостей перейдут соответственно в $(n-k+1)$-мерную, $(n-k)$-мерную и $(n-k-1)$-мерную соприкасающиеся плоскости, в то время как в общем случае две $(n-k)$-мерные плоскости n-мерного пространства пересекаются по $(n-2k)$-мерной плоскости и при стремлении одной из $(n-k)$-мерных плоскостей к другой это пересечение переходит в $(n-2k)$-мерную плоскость.

Далее Жордан пишет: «Можно отнести точки пространства к новой системе прямоугольных координат, аналогичной системе, которую рассмотрел Серре для обычного пространства, а именно: 1) соприкасающуюся плоскость в точке $x_1, \ldots, x_n$; 2) плоскость, перпендикулярную к предыдущей, содержащую соприкасающуюся 2-плоскость (biplan); 3) плоскость, перпендикулярную к соприкасающейся 2-плоскости, содержащей соприкасающуюся 3-плоскость (triplan), и т. д. до плоскости, перпендикулярной касательной. Новые координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ будут связаны со старыми ортогональными соотношениями

$$X_\rho = a_{\rho 1}\xi_1 + \ldots + a_{\rho n}\xi_n\text{»}\ [65].$$

Слова «ортогональные соотношения» означают, что матрица $(a_{\rho\sigma})$ — ортогональная матрица и, следовательно, столбцы $a_{\rho 1}, \ldots, a_{\rho n}$ этой матрицы можно рассматривать как координаты векторов ортонормированного базиса. Далее Жордан пишет: «Рассмотрим теперь точку кривой, бесконечно близкую к предыдущей, получаемую заменой s на $s + ds$. Проведем через эту точку новую систему прямоугольных координат, аналогичную предыдущей, пусть $\xi_1 + d\xi_1, \ldots, \xi_n + d\xi_n$ — координаты по отношению к новым осям. Тогда будут иметь место соотношения

$$\frac{d\xi_1}{ds} = c_1\xi_2, \ldots, \frac{d\xi_\rho}{ds} = -c_{\rho-1}\xi_{\rho-1} + c_\rho\xi_{\rho+1}, \ldots, \frac{d\xi_n}{ds} = -c_{n-1}\xi_{n-1} + 1,$$

где коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ по определению будут *кривизнами* данной кривой в точке $x_1, \ldots, x_n$.

Непосредственно выводятся формулы

$$\frac{da_{\rho 1}}{ds} = c_1 a_{\rho 2}, \ldots, \frac{da_{\rho\sigma}}{ds} = -c_{\sigma-1}a_{\rho,\sigma-1} + c_\sigma a_{\rho,\sigma+1}, \ldots, \frac{dx_\rho}{ds} = a_{\rho n},$$

позволяющие выразить последовательные производные координат x_ρ в функции коэффициентов a, кривизн и их производных» [66].

Если мы запишем векторы $\{a_{\rho 1}\}, \ldots, \{a_{\rho n}\}$, которые, как мы видели, составляют ортонормированный базис, в виде $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, а вектор $\{x_\rho\}$ в виде $\mathbf{x}$, последние формулы Жордана можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{a}_1}{ds} = c_1\mathbf{a}_2, \ldots, \frac{d\mathbf{a}_\sigma}{ds} = -c_{\sigma-1}\mathbf{a}_{\sigma-1} + c_\sigma\mathbf{a}_{\sigma+1}, \ldots,$$
$$\frac{d\mathbf{a}_n}{ds} = -c_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{a}_n.$$

В настоящее время векторы $\mathbf{a}_\sigma$ обозначают $\mathbf{t}_{n-\sigma+1}$, а «кривизны» c_σ Жордана обозначают $-k_{n-\sigma}$, причем кривизну k_i называют i-й кривизной кривой, поэтому найденные Жорданом формулы в настоящее время записывают в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{t}_1, \quad \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = k_1\mathbf{t}_2, \ldots, \frac{d\mathbf{t}_i}{ds} = -k_{i-1}\mathbf{t}_{i-1} + k_i\mathbf{t}_{i+1}, \ldots, \frac{d\mathbf{t}_n}{ds} = -k_{n-1}\mathbf{t}_{n-1}.$$

---

[65] Ibid., p. 337—338.
[66] Ibid.

Эти формулы и являются многомерным обобщением формул Серре — Френе. Геометрический смысл кривизны k_1 очевиден — это модуль вектора dt_1/ds, равный пределу отношения угла $\Delta\alpha_1$ между касательными в двух близких точках кривой к длине Δs дуги между этими точками; очевиден и геометрический смысл абсолютного значения кривизны k_{n-1} — это модуль вектора dt_n/ds, равный пределу отношения угла $\Delta\alpha_{n-1}$ между соприкасающимися $(n-1)$-мерными плоскостями в двух близких точках кривой к длине Δs дуги между этими точками. Жордан указывает геометрический смысл и всех промежуточных кривизн k_i: «Угол φ_k двух последовательных соприкасающихся k-плоскостей дается весьма простой формулой

$\varphi_k = ds \cdot c_k$» [67].

Смысл этой краткой формулировки состоит в том, что если мы снова рассмотрим $n-k+2$ точки кривой, проведем через первые и последние из них $(n-k)$-мерные плоскости и обозначим угол между ними через $\Delta\alpha_k$, то предел отношения этого угла к длине Δs дуги между первыми двумя из этих точек при стягивании всех этих точек в первую точку равен кривизне k_{n-k}, т. е., иными словами, кривизна k_i является пределом отношения угла между i-мерными соприкасающимися плоскостями кривой в двух близких точках к длине Δs дуги между этими точками.

Выше мы видели, что Жордан в 1872 г. определил стационарные углы между m-мерными плоскостями n-мерного евклидова пространства. Приведенный здесь результат Жордана показывает, что если мы возьмем две соприкасающиеся m-мерные плоскости в двух близких точках и найдем стационарные углы этих плоскостей, то отношения всех этих углов, кроме одного, к длине Δs дуги между этими точками при стягивании этих точек в одну стремятся к нулю, а отношение последнего из этих углов к Δs стремится к кривизне k_{n-k}.

Заметим, что у Жордана все кривизны c_i — числа одного знака, но он пользовался как правыми, так и левыми системами координат; в настоящее время пользуются только правыми системами координат, но приписывают кривизне k_{n-1} положительный или отрицательный знак, в первом случае соприкасающаяся с кривой винтовая линия с постоянными кривизнами k_i является правой винтовой линией, во втором случае — левой.

В конце заметки Жордан находит кратчайшее расстояние между двумя соприкасающимися плоскостями разных размерностей в двух бесконечно близких точках кривой, обобщив тем самым классическую задачу Бонне о нахождении кратчайшего расстояния между касательными в двух бесконечно близких точках кривой в обычном пространстве и расстояния между точкой этой кривой и соприкасающейся плоскости в бесконечно близкой точке.

Отметим, что сам Жордан не дал вывода ни найденного им обобщения формул Френе и других найденных им свойств кривых, ни геометрического смысла кривизн. В настоящее время многомерные формулы Френе выводятся во всех руководствах по многомерной дифференциальной геометрии; напротив, найденный Жорданом геометрический смысл кривизн k_i обычно не упоминается в этих руководствах, хотя после установления эффективных алгоритмов вычисления стационарных углов m-мерных плоскостей в n-мерном пространстве проверка этого факта не вызывает затруднений.

---

[67] Ibid., p. 338.

Многомерная теория поверхностей

В том же 1874 г. в работе «Обобщение теоремы Эйлера о кривизне поверхностей» (Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces. — C. r. Acad. sci. Paris, 1874) Жордан положил начало дифференциальной геометрии m-мерных поверхностей в n-мерном пространстве. Рассматривая касательные m-мерные плоскости к поверхности в двух ее бесконечно близких точках, Жордан определяет стационарные углы этих плоскостей и доказывает, что на поверхности имеются m взаимно ортогональных направлений, в которых предел отношения суммы $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_m^2$ к длине дуги между точками касания имеет стационарное значение. Сущность этой теоремы состоит в том, что рассматриваемая Жорданом сумма $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_m^2$ представляет собой квадрат расстояния между m-мерными плоскостями n-мерного пространства, проходящими через одну точку, в инвариантной относительно группы вращений пространства римановой метрике в многообразии указанных плоскостей (это риманово пространство является одним из простейших примеров симметрического пространства Э. Картана) и метрика в многообразии m-мерных плоскостей индуцирует метрику m-мерного риманова пространства в многообразии касательных плоскостей. Если мы обозначим метрические формы Римана рассматриваемой m-мерной поверхности и m-мерного риманова пространства в многообразии плоскостей соответственно через $\Sigma\Sigma g_{ij}du_idu_j$ и $\Sigma\Sigma h_{ij}du_idu_j$, то, так как эти формы положительно определенные, в каждой точке поверхности существует такой базис, в котором обе формы одновременно принимают канонический вид $\Sigma g_{ii}du_i^2$ и $\Sigma h_{ii}du_i^2$; векторы базиса ортогональны в обеих метриках. Сам Жордан формулирует эту теорему следующим образом: «k-поверхность, расположенная в пространстве $m + k$ измерений, обладает в каждой точке m ортогональными измерениями, такими, что сумма квадратов углов, образованных двумя последовательными касательными плоскостями, деленная на ds^2, будет максимальной или минимальной» [68]. Под k-поверхностью Жордан в соответствии со своей терминологией понимает пересечение k гиперповерхностей, т. е. m-мерную поверхность $(m + k)$-мерного пространства, «две последовательные касательные k-плоскости» — условное выражение, означающее две касательные m-мерные плоскости в двух бесконечно близких точках поверхности, под выражением «максимальна или минимальна» Жордан имеет в виду при $m > 2$ выполнение только необходимого условия экстремума, т. е. то, что указанное отношение принимает стационарное значение.

В следующем году учитель гимназии в Плауэне Рихард Беец (1827—1902) в работе «К теории меры кривизны многообразий высшего порядка» (Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. — Z. Math. Phys., 1875—1876) построил теорию $(n - 1)$-мерной поверхности в n-мерном пространстве. Беец определил на этой поверхности первую и вторую квадратичную формы, первая из которых совпадает с формой Римана. В современных обозначениях, если радиус-вектор $\mathbf{x}$ точки поверхности является функцией ее криволинейных координат $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, а частные производные $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}$ и единичный вектор нормали к поверхности — векторы $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{ij}$ и $\mathbf{n}$, коэффициенты этих форм могут быть записаны в виде скалярных произведений $g_{ij} = \mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ и $b_{ij} = \mathbf{n}\mathbf{x}_{ij}$.

[68] Ibid., p. 343.

В этом случае найденное Беецем условие

$$b_{ij}b_{kl} - b_{ik}b_{jl} = R_{il,\, jk}$$

представляет собой одно из условий интегрируемости многомерных аналогов деривационных формул Гаусса и Вейнгартена. Беец обнаружил, что в общем случае при $n > 3$ это условие позволяет выразить коэффициенты b_{ij} второй формы через коэффициенты g_{ij} первой формы и их производные, откуда вытекает, что в общем случае $(n - 1)$-мерная поверхность в n-мерном пространстве неизгибаема. Вывод о неизгибаемости даже бесконечно малого куска поверхности показался Беецу настолько нелепым, что он заключил отсюда, что доказанная им теорема свидетельствует о... противоречивости многомерной геометрии.

Многомерная проективная геометрия

Во второй половине XIX в. наряду с многомерной евклидовой и неевклидовой геометриями стали разрабатывать и многомерную проективную геометрию. Большей частью изучалось многомерное комплексное проективное пространство и алгебраические линии и поверхности в нем, что позволило распространить на многомерный случай алгебраическую геометрию линий проективной плоскости и линий и поверхностей проективного пространства. Эти работы, как говорилось, относятся более к алгебре, чем к геометрии. К многомерной алгебраической геометрии относится упоминавшаяся нами выше работа Г. Шуберта «n-Мерные обобщения основных числовых характеристик нашего пространства».

Терминология многомерной геометрии

Мы видели, что творцы многомерной геометрии Грассман, Шлефли и Риман пользовались своеобразной терминологией: вместо слова «пространство» говорили «протяжение», «континуум», «тотальность» или «многообразие», вместо точка — «решение» или «состояние» и т. д. и вообще избегали применения слова «геометрия» к многомерной геометрии. Но к концу XIX в. обычная геометрическая терминология, примененная к многомерным пространствам впервые К. Жорданом, употребляется все чаще и чаще. Совершенно не отличается от современной терминология книги профессора университета в Гронингене (Голландия) Питера Хендрика Схоуте (1846—1913) «Многомерная геометрия» (Mehrdimensionale Geometrie. Leipzig, 1902—1905), содержащей систематическое изложение как аналитической, так и синтетической геометрии n-мерного евклидова пространства.

В 1895 г. А. Пуанкаре в своем знаменитом мемуаре «Analysis situs» писал: «Геометрия n измерений занимается исследованием действительности; в этом теперь никто не сомневается. Тела в гиперпространстве поддаются точным определениям, подобно телам из обычного пространства, и если мы не можем их изобразить, то можем себе представить и изучать. И если, например, механика более трех измерений должна быть осуждена, как не имеющая смысла, положение гипергеометрии является совершенно иным.

Действительно, геометрия не имеет своей единственной целью непосредственное описание тел, воспринимаемых нашими органами чувств: прежде всего она является аналитическим исследованием некоторой группы и, следовательно, ничто не препятствует изучению новых групп, аналогичных и более общих.

Однако сразу же возникает вопрос: надо ли заменять язык аналитического исследования языком геометрии, который теряет свои преимущества, как только исчезает возможность пользоваться чувствами? Оказывается, что этот новый язык более точен; кроме того, аналогия с обычной геометрией может создать ассоциации плодотворных идей и подсказать полезные обобщения»[69].

Отметим, что здесь Пуанкаре еще пользуется терминами «гиперпространство» и «гипергеометрия», хотя в самом мемуаре он систематически пользуется термином «пространство n измерений»; слово «действительность» Пуанкаре применяет здесь в совершенно реалистическом духе, несмотря на его конвенционалистские установки в теории познания.

В то же время даже в конце XIX — начале XX в. некоторые крупнейшие ученые все еще относились к многомерной геометрии, как и к теории функций, крайне отрицательно, полагая, что от них невозможно ожидать каких-либо приложений к конкретным задачам классической математики и естествознания[70]. Однако многомерные пространства самой различной природы и даже бесконечномерные «гильбертовы» и другие пространства получили в XX в. широкое развитие и применение как в математике, так и в физике.

6. ТОПОЛОГИЯ

Топология Гаусса

Идея Лейбница об «анализе положения» (см. ИМ, т. 2, с. 126—127) не раз упоминалась математиками XVIII и первой половины XIX в. Правда, Карно и Штаудт понимали эту идею как идею о неметрической, прежде всего проективной геометрии, а Грассман — как идею векторного исчисления, но еще Эйлер назвал свою работу о «кёнигсбергских мостах» «Решением задачи, относящейся к геометрии положения» (см. ИМ, т. 3, с. 204—205), понимая термин Лейбница топологически.

В том же смысле понимал этот термин и Гаусс. К 1794 г. относятся рисунки различных видов узлов в бумагах Гаусса, узлам же посвящены в них заметки «К геометрии положения» (Zur geometria situs) и «К геометрии положения для двух измерений пространства» (Zur Geometrie der Lage für zwei Raumdimensionen).

В тетради, относящейся к электродинамике, Гаусс писал в 1833 г.: «О геометрии положения (geometria situs), которую предчувствовал Лейбниц и на которую только некоторые геометры (Эйлер, Вандермонд) бросали лишь слабый взгляд, мы знаем через полтораста лет немногим больше, чем ничего»[71], и далее он решает задачу, пограничную между «геометрией положения» и «геометрией величины», состоящую в определении числа зацеплений двух бесконечных или замкнутых линий. При этом Гаусс

---

69 *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1972, т. 2, с. 457.

70 См., например: *Ляпунов А. М.* Жизнь и труды П. Л. Чебышева.— В кн.: *Чебышев П. Л.* Избранные математические труды. М.; Л., 1946, с. 19—20; при этом, отметив отрицательное отношение П. Л. Чебышева и его учеников к «псевдогеометрическим изысканиям в пространствах четырех и большего числа измерений», Ляпунов высоко отозвался о «глубоких геометрических исследованиях Н. И. Лобачевского», который, по его мнению, «подобно П. Л. Чебышеву, оставался всегда на реальной почве».

71 Запись опубликована Максвеллом: *Maxwell C.* Treatise on electricity and magnetism. Oxford, 1881, vol. 1, p. 43.

замечает, что интеграл

$$\iint \frac{(x'-x)(dy\,dz'-dz\,dy')+(y'-y)(dz\,dx'-dx\,dz')+(z'-z)(dx\,dy'-dy\,dx')}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},$$

где x, y, z — координаты точек, пробегающих первую линию, а x', y', z' — координаты точек, пробегающих вторую линию, равен $4\pi m$, где m — число зацеплений линий. В приведенной цитате Гаусс наряду с работой Эйлера о «кёнигсбергских мостах» имел в виду «Замечание к проблемам положения» (Remarques sur les problèmes de situation.— Hist. Acad. sci. Paris, 1771 (1774)) Т. Вандермонда, посвященное задаче о «ходе конем» в шахматной игре, решенной Эйлером в 1759 г.

К 1840 г. относится заметка Гаусса, в которой он вводит понятие одномерного и двумерного многообразий, которые он называет «чертой» (Zug) и «слоем» (Schicht), и ставит вопрос о разложении «слоя», ограниченного несколькими «чертами», на несколько «слоев», ограниченных одной «чертой», — фактически здесь возникает та задача о связности поверхности, которую позже решал Риман и которая впоследствии стала одной из важнейших задач комбинаторной топологии.

Свои заметки по топологии, так же как и по неевклидовой геометрии, Гаусс не публиковал, но иногда упоминал о своих мыслях по этому вопросу в письмах друзьям.

Обобщения теоремы Эйлера о многогранниках в начале XIX в.

Существенную роль в создании топологии сыграли различные обобщения теоремы Эйлера о многогранниках, согласно которой число вершин N_0, число ребер N_1 и число граней N_2 выпуклого многогранника связаны соотношением

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

Мы уже указывали (см. ИМ, т. 3, с. 202), что эта теорема верна не только для выпуклых многогранников, но и для всех многогранников, поверхности которых находятся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии со сферой, т. е. гомеоморфны сфере, а также для любых замкнутых поверхностей, гомеоморфных сфере. При этом в случае поверхностей роль граней, ребер и вершин играют области поверхности, гомеоморфные внутренности круга, дуги общих границ пар таких областей и точек, принадлежащие к границам трех и более областей.

Первая попытка обобщения теоремы Эйлера на многогранники более сложного вида была предпринята французским математиком и механиком, профессором Политехнической школы Луи Пуансо (1777—1859) в работе «О многоугольниках и многогранниках» (Sur les polygones et les polyèdres.— J. Éc. Polyt., 1810). В этой работе Пуансо открыл заново два звездчатых многогранника, обнаруженных еще Кеплером, а также два новых звездчатых многогранника, взаимных по отношению к первым двум, и показал, что для двух из этих многогранников, для которых $N_0 = 12$, $N_1 = 30$, $N_2 = 12$, имеет место не соотношение Эйлера, а соотношение

$$2N_0 + N_2 = N_1 + 6.$$

Отметим, что в предисловии к этой работе Пуансо применяет тот же термин «géométrie de situation», который мы встречали у Вандермонда, однако связывает его только с задачей Эйлера о кёнигсбергских мостах и не видит связи между «геометрией положения» и свойствами многогранников.

О. Коши в «Исследованиях о многогранниках» (Recherches sur les polyèdres.— J. Éc. Polyt., 1813) доказал, что для сети многоугольников, гомеоморфной внутренности круга, имеет место соотношение

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1,$$

и применил это соотношение к доказательству теоремы Эйлера, а также доказал, что для N_3 многогранников имеет место соотношение

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 1.$$

В том же году появился «Мемуар о полиэдрометрии» (Mémoire sur la polyédrométrie.— Ann. Math., 1813) профессора Женевского университета Симона Люилье (1750—1840), в котором были найдены условия, при которых справедлива теорема Эйлера, и установлено, что для многогранников с p сквозными отверстиями («многогранников p-го рода») имеет место более общее соотношение

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 2p$$

(см. ИМ, т. 3, с. 203).

Как и теорема Эйлера, теорема Люилье имеет место не только для многогранников, но и для любых поверхностей, гомеоморфных многогранникам, p-го рода. Заметим, что в случае звездчатых многогранников, для которых имеет место приведенное выше соотношение Пуансо, $2N_0 + N_2 - N_1 = 6 - 2p$.

«Предварительные исследования по топологии» Листинга

Термин «топология» появился впервые в «Предварительных исследованиях по топологии» (Vorstudien zur Topologie.— Götting. Studien, 1847) гёттингенского математика и физика, ученика Гаусса, Иоганна Бенедикта Листинга (1808—1882). Этот термин, ныне общепринятый, но применявшийся до 20-х годов XX в. довольно редко, является новообразованием, придуманным самим Листингом; этим словом, состоящим из греческих слов τόπος — место и λόγος — учение, Листинг предложил заменить термин Лейбница «geometria situs», поскольку слово геометрия напоминает об измерении, не играющем никакой роли в топологии, и к тому же термин Лейбница «géométrie de position» уже применялся для обозначения проективной геометрии. Называя свойства фигур, сохраняющиеся при непрерывных преобразованиях, «модальными», Листинг писал: «Под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов, или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве, независимо от отношений мер и величин» [72]. В «Предварительных исследованиях по топологии» основным объектом исследования являются «линейные комплексы, т. е. любые прямые или кривые линии или совокупности линий» [73]. Листинг рассматривает заузление, сцепление и сплетение и другие виды взаимного расположения линейных комплексов. Изложение Листинга сопровождается большим числом примеров из биологии и техники.

---

[72] *Листинг И. Б.* Предварительные исследования по топологии. М., 1932, с. 35.
[73] Там же, с. 106.

И. Б. ЛИСТИНГ

В 1862 г. Листинг опубликовал «Перепись пространственных комплексов или обобщение теоремы Эйлера о многогранниках» (Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von der Polyedern.— Abh. Ges. Wiss. Göttingen, 1862). Под «пространственным комплексом» Листинг понимает «всякую конфигурацию точек, линий и поверхностей в пространстве, линии и поверхности могут быть по желанию прямыми и кривыми, открытыми и замкнутыми, ограниченными и неограниченными» [74]. Впрочем, Листинг считает «составляющими» пространственных комплексов не только точки, линии и поверхности, но и тела. Слово «перепись» (Census) в названии труда Листинга обозначает классификацию комплексов. Из вводимых здесь классов комплексов упомянем «диафрагму» — поверхность, ограничиваемую замкнутой кривой (Листинг определяет «простое зацепление» двух замкнутых кривых как такое их расположение, что каждая из них пересекается с диафрагмой, ограничиваемой другой), и «диаграмму» — линейный комплекс, являющийся «скелетом» пространственного комплекса. В этой работе Листинг доказывает целый ряд теорем о пространственных комплексах, одна из которых представляет собой перенос теоремы Эйлера о многогранниках на пространственные комплексы, гомеоморфные сфере. Листинг указывает также комплексы, для которых эта теорема неверна. В этой же работе Листинг описывает так называемый лист Мёбиуса — одностороннюю поверхность, которую

[74] Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen, 1862, Bd. 10, S. 97.

можно получить, отождествляя точки конечного прямого кругового цилиндра, симметричные относительно центра симметрии, или склеивая соответственные точки половины такого цилиндра (рис. 9).

«Теория элементарного сродства» Мёбиуса

А. Ф. Мёбиус описал «лист Мёбиуса» впервые в работе, представленной в 1861 г. Парижской академии, на конкурсную тему «Усовершенствовать в нескольких важных пунктах геометрическую теорию многогранников». Работа Мёбиуса, написанная на плохом французском языке и содержащая много новых идей, не была понята жюри и наряду с остальными работами, присланными на конкурс, не была удостоена премии. Содержание этой работы было опубликовано Мёбиусом в статьях «Теория элементарного сродства» (Theorie der elementaren Verwandschaft.— Ber. Verh. Sächs. Leipzig, 1863) и «Об определении объема полиэдра» (Über die Bestimmung der Inhaltes eines Polyeders.— Ber. Verh. Sächs. Leipzig, 1865).

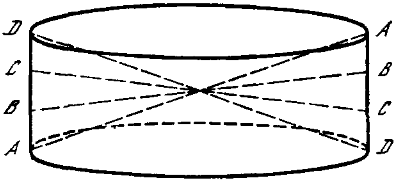


Рис. 9

Мы встречались с термином «сродство», говоря о проективной и аффинной геометрии Мёбиуса, и видели, что он употреблял этот термин в значении геометрического преобразования. В «Теории элементарного сродства» Мёбиус понимает слово «сродство» в том же смысле. Здесь это взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование: «Две фигуры называются находящимися в элементарном сродстве, если всякий бесконечно малый элемент одной фигуры соответствует бесконечно малому элементу другой таким образом, что два граничащих друг с другом элемента первой фигуры соответствуют двум граничащим друг с другом элементам второй» [75].

Далее Мёбиус проводит классификацию гомеоморфных между собой поверхностей, выделяя, в частности, «унионы», «бинионы», «термионы» и т. д., находящиеся в «элементарном сродстве» с поверхностями, ограниченными одной, двумя, тремя и т. д. кривыми. Далее для поверхностей различных классов доказываются теоремы Эйлера и Люилье.

Во второй статье в связи с уточнением понятия объема многогранника вводятся понятия ориентации многогранника и поверхности. Именно в этой связи как пример неориентируемой поверхности приводится «лист Мёбиуса» и с его помощью строятся примеры «неориентированных многогранников», для которых несправедливы теоремы Эйлера и Люилье и нельзя определить объема.

Топология поверхностей в «Теории абелевых функций» Римана

Совсем с других позиций подошел к топологической классификации поверхностей Б. Риман. В своей «Теории абелевых функций» (Theorie der Abelschen Funktionen.— J. für Math., 1857) Риман писал: «Изучая функции, возникающие при интегрировании полных дифференциалов, нельзя обойтись без некоторых предложений, относящихся к analysis situs. Под этим наименованием, использованным Лейбницем (хотя и не

[75] *Möbius A. F.* Gesammelte Werke. Leipzig, 1886, Bd. 2, S. 517.

совсем в том смысле), следует, как я полагаю, понимать ту часть учения *о непрерывно меняющихся величинах*, *в которой переменные величины не* рассматриваются как существующие независимо от их положения и связанные числовыми соотношениями, но изучаются совершенно независимо от числовых соотношений, только лишь с точки зрения возникающих между ними пространственных соотношений взаимного расположения и связности» [76].

Благодаря авторитету Римана лейбницевский термин «analysis situs» в течение более чем 50 лет был наиболее употребительным названием этой области математики.

С алгебраическими функциями $y = f(x)$, неявно заданными алгебраическими уравнениями $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен от комплексных переменных x, y, Риман связывает «многолистную поверхность»,

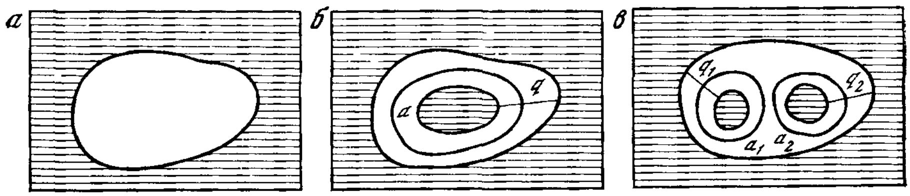


Рис. 10

состоящую из нескольких «листов», переходящих один в другой в «точках ветвления». Эти поверхности, называемые в настоящее время «римановыми поверхностями», Риман подразделяет на «односвязные, на которых любая замкнутая кривая полностью ограничивает некоторую часть поверхности (такова, например, поверхность круга), и многосвязные, указанным свойством не обладающие (такова, например, поверхность кольца, образованного двумя концентрическими окружностями)» [77], и указывает, что с помощью системы разрезов многосвязная поверхность может быть превращена в односвязную.

Для наглядности Риман приводит примеры односвязной, двусвязной и трехсвязной поверхности.

«*Односвязная поверхность*. Разбивается на отдельные части любым разрезом. Всякая замкнутая кривая образует полную границу части поверхности (рис. 10, *а*).

Двусвязная поверхность. Всякий, не разбивающий ее на куски разрез q превращает ее в односвязную. Всякая замкнутая кривая совместно с кривой a образует полную границу некоторой части поверхности (рис. 10, *б*).

Трехсвязная поверхность. На этой поверхности всякая замкнутая кривая совместно с кривыми a_1 и a_2 образует полную границу некоторой части поверхности. Каждый не разбивающий ее разрез превращает ее в двусвязную поверхность, а два таких разреза q_1 и q_2 — в односвязную (рис. 10, *в*)» [78].

Мы уже упоминали, что для плоских кривых Риман ввел характеристику p, названную впоследствии А. Клебшем «родом кривой»; эта характеристика равна половине числа разрезов, с помощью которых можно превратить эту поверхность в односвязную: так как римановы поверхности

[76] *Риман Б*. Сочинения, с. 90—91.
[77] Там же, с. 92.
[78] Там же, с. 95.

замкнуты, это число разрезов необходимо четно. Для поверхности сферы $p = 0$, для поверхности тора $p = 1$, для поверхности шара с несколькими ручками p равно числу ручек. В настоящее время число p называется родом поверхности; в случае многогранников это число совпадает с родом многогранника, определенным Люилье.

В «Теории абелевых функций» Риман доказывает, что род p римановой поверхности, число n ее листов и число w ее точек ветвления связаны соотношением

$$w - 2n = 2p - 2,$$

и отмечает, что «это соотношение в сущности неметрического характера и принадлежащее к области analysis situs» [79].

Многомерная топология Римана — Бетти

Найденные топологические свойства поверхностей Риман перенес и на многомерные многообразия. В приложенном к речи «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» обзоре Риман делает замечание к первому разделу этой речи, озаглавленному «Понятие n-кратно протяженной величины»: «Раздел 1 является одновременно введением к исследованиям по analysis situs» [80]. В 1876 г. в собрании его сочинений были опубликованы «фрагменты, относящиеся к analysis situs», где топологические свойства двумерной поверхности обобщаются на n-мерное многообразие, называемое им «n-мерником» (n-Streck). Здесь Риман определяет «n-мерники», в настоящее время называемые *гомологичными*: «n-мерник A называется переводимым в другой n-мерник B, если A и части B совместно образуют полную границу внутреннего $(n + 1)$-мерника», и дает важнейшее определение: «Если внутри непрерывно протяженного многообразия с помощью m определенных частей n-мерников, которые сами по себе не являются ограничивающими, каждый неограниченный n-мерник становится ограничивающим, то это многообразие имеет связность порядка $m + 1$ в n-й размерности. Непрерывно протяженное многообразие называется *односвязным*, если порядок связности в каждой размерности равен единице» [81]. Легко видеть, что для двумерной поверхности рода p порядок связности Римана равен $2p + 1$. Риман выясняет также зависимости порядка связности границы многообразия от порядка связности самого этого многообразия.

Идеи Римана о «связностях» многомерных многообразий были изложены его другом, профессором университета и директором Высшей нормальной школы в Пизе Энрико Бетти (1823—1892) в работе «О пространствах произвольного числа измерений» (Sopra gli spazî di un numero qualunque di dimensioni.— Ann. mat., 1871). Бетти называет «пространствами» (spazî) многообразия в многомерных евклидовых пространствах. Бетти обозначал порядок связности m-го рода (в n-й размерности) $p_m + 1$, в случае $p_m = 0$ он называл связность простой m-го рода.

Идеи Римана и Бетти послужили основой для создания в конце XIX в. комбинаторной топологии А. Пуанкаре.

---

[79] Там же, с. 111.
[80] Там же, с. 292.
[81] Там же, с. 294.

Топологические теоремы Жордана

Существенный вклад в решение различных задач топологии внес К. Жордан. В работе «О деформации поверхности» (Sur la déformation des surfaces.— J. math. pures et appl., 1866) Жордан распространил поставленную Гауссом задачу нахождения необходимых и достаточных условий наложимости двух гибких и нерастяжимых поверхностей друг на друга без складок и разрывов на растяжимые поверхности и доказал, что для того, чтобы две гибкие и растяжимые поверхности или их части были бы наложимы друг на друга без складок и разрывов, необходимо и достаточно, чтобы число контуров, ограничивающих части поверхностей, было бы одним и тем же (если поверхности замкнуты, это число равно нулю) и чтобы максимальное число замкнутых контуров, не пересекающих никакую часть ни себя, ни друг друга, которые можно провести на каждой из этих поверхностей, не деля ее на две отдельные области, было бы одним и тем же для обеих поверхностей. Доказательство Жордана основано на разложении обеих поверхностей на бесконечно малые элементы, причем смежные элементы одной поверхности соответствуют смежным элементам другой. Совпадение терминологии с работой Мёбиуса 1863 г. об «элементарном сродстве» делает весьма вероятным влияние этой работы Мёбиуса на Жордана. В другом мемуаре того же года «О контурах, проведенных на поверхностях» (De contours tracés sur les surfaces.— J. math., 1866) Жордан поставил вопрос о контурах на поверхности, переводимых друг в друга непрерывной деформацией на поверхности; эта задача, получившая впоследствии название задачи о гомотопных контурах на поверхности, была обобщена на многомерные многообразия Пуанкаре в его «Analysis situs».

К. Жордану принадлежит также знаменитая теорема о том, что замкнутая непрерывная плоская кривая разделяет плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю, причем внутренняя область всегда содержит круг конечного радиуса. Эта теорема была доказана Жорданом в добавлении к III тому его «Курса анализа для Политехнической школы» (Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Paris, 1887, T. 3), озаглавленном «Заметка о некоторых положениях теории функций». Доказательство Жордана основано на том, что, рассматривая замкнутую непрерывную плоскую кривую C без кратных точек, он для всякого сколь угодно малого ε строит многоугольники, один из которых содержит кривую C, а другой содержится внутри нее, причем все точки этих многоугольников находятся на расстоянии, меньшем ε, от кривой C, затем он строит последовательности таких многоугольников для уменьшающихся значений ε. Внешними точками кривой C он называет те точки, которые начиная с некоторого номера многоугольников становятся внешними точками по отношению к ним, аналогично определяются внутренние точки кривой C. Наконец, точками самой кривой C называются точки, являющиеся внешними для всех многоугольников, находящихся внутри кривой C, и внутренними для всех многоугольников, находящихся вне кривой.

«Бутылка Клейна»

Раздел «Analysis situs» имеется и в «Эрлангенской программе» Ф. Клейна, посвященной выяснению роли групп различных геометрических преобразований для геометрии (см. ниже). Этот раздел геометрии Клейн характеризует как такой, где «отыскивают то, что остается неизменным при преобразованиях, составленных из бесконечно малых деформаций» [82].

[82] Об основаниях геометрии, с. 420.

В «Замечаниях о связности поверхностей» (Bemerkungen über Zusammenhang der Flächen.— Math. Ann., 1874) Клейн доказывает, что проективная плоскость гомеоморфна листу Мёбиуса, склеенному с кругом. Если лист Мёбиуса можно получить, отождествляя точки конечного цилиндра, симметричные относительно его центра симметрии, то проективную плоскость можно получить, отождествляя диаметрально противоположные точки сферы, или, что с топологической точки зрения то же самое, отождествляя точки конечного цилиндра с двумя основаниями, симметричные относительно его центра симметрии; при этом отождествлении боковая поверхность цилиндра даст лист Мёбиуса, а основания — круг. Отсюда видно, что проективная плоскость — односторонняя замкнутая поверхность; сам Клейн отождествлял диаметрально противоположные точки двуполостного и однополостного гиперболоидов.

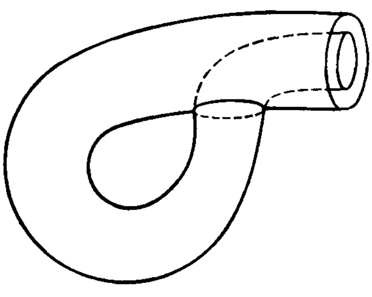


Рис. 11

В своем курсе лекций «О теории Римана алгебраических функций и их интегралов» (Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig, 1882) Клейн поместил специальную главу «Классификация замкнутых поверхностей по числу p». Поставив вначале задачу о взаимно однозначном конформном отображении поверхностей, Клейн замечает, что «еще более важно определить элемент, инвариантный не только при конформных преобразованиях, но равным образом при взаимно однозначных преобразованиях. Это риманово p — число разрезов, которые можно проделать на поверхности без того, чтобы она распалась на куски» [83]. Клейн уточняет, что он имеет в виду преобразования, определяемые непрерывными функциями. Далее, ссылаясь на работу Жордана «О деформации поверхностей», Клейн вводит понятие нормальной поверхности — эталона, которому гомеоморфны все поверхности с различными числами p: «Сфера и тор будут служить нормальными поверхностями для $p = 0$ и $p = 1$. Для больших значений p (в качестве нормальных поверхностей) можно рассматривать сферу, снабженную p ручками» [84].

В этой же работе определяется так называемая бутылка Клейна — односторонняя поверхность, о которой, как пишет Клейн, «можно составить себе представление, если вывернуть кусок каучуковой трубки и заставить его пересечься с самим собой таким образом, чтобы при соединении его концов его внешняя сторона соединилась бы с внутренней» [85] (рис. 11).

Значительный вклад в топологию внес ученик Клейна Вальтер фон Дик (1956—1934), работавший главным образом в Мюнхене, автор работ «Об Analysis situs трехмерных пространств» (On the Analysis situs of threedimensional spaces. London, 1884) и «Дополнения к Analysis situs» (Beiträge zur Analysis situs.— Math. Ann., 1885, 1888, 1889). В этих работах фон Дик доказал, что характеристика Эйлера n-мерной сферы равна 2 при четном n и 0 при нечетном n, характеристика Эйлера n-мерного

[83] *Klein F.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin, 1923, Bd. 3, S. 526.
[84] Ibid., S. 512.
[85] Ibid., S. 571.

проективного пространства равна 1 при четном n и 0 при нечетном n, причем в первом случае проективное пространство неориентируемо, а во втором случае ориентируемо.

Создание комбинаторной топологии как науки было завершено А. Пуанкаре в его неоднократно упоминавшемся мемуаре (Analysis situs, 1895) и пяти дополнениях к нему (1899—1902).

7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Геометрические преобразования у Мёбиуса

В рассмотренных ранее работах А. Ф. Мёбиуса существенную роль играет понятие «сродства» в самых различных видах «равенства» (конгруэнтности), «подобия», «аффинности», «коллинеации» (проективности) и «элементарного сродства» (гомеоморфизма). Каждый вид «сродства» является случаем следующего. Поэтому Клейн писал: «Хотя Мёбиус еще не владел понятием группы в его современной формулировке, но понятие „сродства" является эквивалентным ему; Мёбиус является, таким образом, предшественником „Эрлангенской программы"» [86].

Отметим также работу Мёбиуса «Теория кругового сродства в чисто геометрическом изложении» (Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung.— Ber Verh. Sächs. Leipzig, 1855), в которой развивается теория круговых преобразований на плоскости, т. е. преобразований, порождаемых инверсиями относительно окружностей; в аналитическом изложении эти преобразования можно трактовать как дробно-линейные преобразования плоскости комплексного переменного.

Теория круговых преобразований Мёбиуса была вскоре обобщена на пространство, причем наиболее существенной здесь является теорема неоднократно упоминавшегося нами Ж. Лиувилля (см. Кн. 1, с. 176—179), опубликованная им в одном из дополнений к его изданию 1850 г. «Приложения анализа к геометрии Г Монжа». Здесь Лиувилль доказал, что конформные преобразования в пространстве порождаются инверсиями относительно сфер: на плоскости конформные преобразования определяются произвольными аналитическими функциями комплексного переменного и составляют значительно более широкий класс, чем круговые преобразования, так что конформные преобразования пространства являются аналогами не конформных, а круговых преобразований плоскости.

Статья Гельмгольца «О фактах, лежащих в основании геометрии»

Существенную роль во внедрении в геометрию понятия группы преобразований сыграла статья известного немецкого физиолога, физика и математика Германа Гельмгольца (1821—1894) «О фактах, лежащих в основании геометрии» (Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.— Gött. Nachr., 1868). Уже название этой статьи, перекликающееся с названием речи Римана 1854 г., указывает на связь между этими двумя работами. Гельмгольц писал: «Моя ближайшая цель состояла, как и у Римана, в том, чтобы исследовать, какие особенности пространств принадлежат каждому зависящему от многих переменных непрерывно изме-

[86] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии, с. 153. Здесь слово Verwandschaft («сродство») переведено словом «близость».

Г. ГЕЛЬМГОЛЬЦ

няющемуся многообразию, различия которого допускают количественное сравнение, и какие из них, напротив, не будучи обусловлены этим общим характером, свойственны только пространству.

Я имел как раз в физиологической оптике два примера, допускающих пространственное представление переменных многообразий, именно систему цветов, упоминаемую и Риманом, и измерения поля зрения глазомером. Оба многообразия представляют известные основные различия и наводили меня на сравнение»[87]. Далее Гельмгольц отметил, что многие полученные им результаты совпадали с результатами Римана и что хотя публикация речи Римана отняла у него в ряде случаев «право первенства», зато это совпадение явилось для него «важным залогом верности» пути, избранного им «в области вопросов, дискредитированных прежними неудачными попытками». Далее Гельмгольц указывает, что его исследование отличается от изысканий Римана тем, что он более подробно изучил влияние вводимых им ограничений, отличающих действительное пространство от других «многократно протяженных многообразий», на обоснование того, что ds^2 есть однородная функция второй степени от дифференциалов координат. На первое место из этих ограничений Гельмгольц ставит требования «свободной подвижности твердых фигур без изменения формы во всех частях пространства», т. е. наличие движений, осуществляющих совмещение конгруэнтных фигур.

В основу исследования Гельмгольц кладет следующие «гипотезы»: «I. *Пространство n измерений есть n-кратно протяженное многообра-*

[87] Об основаниях геометрии, с. 367.

зие... II. Допускается существование подвижных, но неизменяемых (твердых) тел или систем точек... III. Допускается вполне свободная подвижность твердых тел... IV. Если твердое тело вращается около $n-1$ точек, выбранных так, что положение тела зависит только от одной независимой переменной, то вращение без поворота назад приводит тело в конце в то начальное положение, из которого оно вышло... V. Пространство имеет три измерения. VI. Пространство бесконечно протяженно» [88]. В заключение Гельмгольц пишет: «Исследования Римана и мои, вместе взятые, показывают, таким образом, что выше данные постулаты... составляют достаточное основание для развития учения о пространстве». К последним словам делает примечание: «Они не отделяют геометрии Евклида от геометрии Лобачевского» [89].

Странное в 60-х годах XIX в. выражение «пространство n измерений» объясняется тем, что последующие гипотезы, как мы видели, сводят это «пространство» к одному из двух трехмерных пространств, претендующих на описание реального пространства,— к пространствам Евклида и Лобачевского. III гипотеза Гельмгольца требует наличия в пространстве группы геометрических преобразований, не только переводящих каждую точку пространства в любую другую его точку, но и переводящих каждый линейный элемент, выходящий из первой точки, в любой линейный элемент, выходящий из второй точки. Если принять требование Римана, чтобы ds^2 выражался квадратичной формой от дифференциалов координат, коэффициенты которой являются функциями только координат точки, то I—III гипотезы Гельмгольца выделяют из определенных таким образом римановых пространств пространства постоянной кривизны, т. е. евклидово пространство, пространство Лобачевского и эллиптическое пространство. Как видно из этих гипотез, Гельмгольц заранее не предполагает (подобно Риману), что указанная квадратичная форма является положительно определенной; без такого предположения I—III гипотезам Гельмгольца удовлетворяют также псевдоевклидово пространство и сфера вещественного радиуса в псевдоевклидовом пространстве. Эта возможность исключается IV гипотезой Гельмгольца: в псевдоевклидовом пространстве наряду с евклидовыми плоскостями имеются псевдоевклидовы плоскости, окружности которых имеют вид гипербол, и вращение в такой плоскости не может привести к начальному положению «без поворота назад»; то же имеет место и на упомянутых сферах. VI гипотеза Гельмгольца исключает эллиптическую геометрию.

Основоположник теории непрерывных групп Софус Ли в 1886 г. писал, что эта «знаменитая работа Гельмгольца... рассматривает задачу, стоящую в теснейшей связи с новой теорией групп преобразований» [90], и далее предлагает свое решение этой задачи, основанное на его собственной теории.

«Эрлангенская программа» Клейна

Мы уже несколько раз упоминали «Эрлангенскую программу» (Erlanger Programm) — лекцию, прочитанную Ф. Клейном в 1872 г. при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета. Полное название этой лекции — «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872). Открытие в 1871 г. проективной интерпретации геометрии Лобачевского показало, что группа движений про-

[88] Там же, с. 368—382.
[89] Там же, с. 382.
[90] Там же, с. 383.

странства Лобачевского является подгруппой группы коллинеаций проективного пространства, переводящей в себя «абсолют» пространства Лобачевского. С другой стороны, группа движений евклидова пространства является подгруппой группы подобий («главной группы» евклидова пространства), являющейся в свою очередь подгруппой группы аффинных преобразований — подгруппы той же группы коллинеаций. В то же время группы движений и подобий евклидова пространства являются подгруппами группы конформных преобразований пространства (в случае плоскости — группы круговых преобразований). Группа движений эллиптического пространства также является подгруппой группы коллинеаций. Сопоставив эти факты, Клейн пришел к выводу, что всякая геометрия по существу представляет собой учение об инвариантах той или иной группы преобразований.

Клейн начинает свою «Эрлангенскую программу» с определения группы преобразований: «Наиболее существенное понятие, необходимое для дальнейшего изложения, есть понятие о группе пространственных изменений.

Произвольное число преобразований пространства дает, складываясь, снова преобразование пространства. Если данный ряд преобразований обладает тем свойством, что каждое изменение, получаемое от последовательного применения нескольких преобразований, принадлежащих этому ряду, само входит в его состав, то мы называем этот ряд группой преобразований» [91].

В качестве примеров групп преобразований приводятся «совокупность всех движений» пространства (Клейн замечает, что «каждое движение рассматривается как операция, выполненная над всем пространством») и «совокупность коллинеаций». Клейн указывает, что вращения около точки образуют подгруппу группы движений, а корреляции («двойственные преобразования») сами не образуют группу, но образуют ее вместе с коллинеациями.

Указав, что геометрические свойства образов не зависят от положения, занимаемого образом в пространстве, от его абсолютной величины и от ориентации в расположении его частей, т. е. не изменяются при движениях и подобиях пространства, а также при отражениях и при всех преобразованиях, состоящих из них, Клейн приходит к выводу, что «геометрические свойства не изменяются от преобразований главной группы и, обратно, можно сказать: геометрические свойства характеризуются их неизменяемостью от преобразований главной группы» [92]. От «пространства», т. е. трехмерного евклидова пространства, Клейн переходит к произвольному «многообразию»: «По аналогии с пространственными преобразованиями мы говорим о преобразованиях многообразия; они также образуют группы. Только уже нет более, как в пространстве, группы, которая выделялась бы по своему значению между остальными,— каждая группа равнозначна всякой другой. Как обобщение геометрии получается, таким образом, следующая многообъемлющая задача:

Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы.

Применительно к современной терминологии, которую, впрочем, обыкновенно прилагают только к определенной группе — группе всех линейных преобразований, можно выразиться еще так:

[91] Там же, с. 401.
[92] Там же, с. 402.

Дано многообразие и в нем группа преобразований. Требуется развить теорию инвариантов этой группы» [93].

Вслед за тем рассматриваются «группы преобразований, из которых одна объемлет другую» как в «пространстве», так и в «различных многообразиях»: группа движений, «главная группа», группы аффинных преобразований, коллинеаций и всех проективных преобразований (коллинеаций и корреляций), а также «группы преобразований посредством обратных радиусов» (группы, порожденные инверсиями, т. е. группы круговых преобразований плоскости и конформных преобразований пространства). Клейн указывает также на расширение «положенной в основу группы коллинеарных и двойственных преобразований введением в нее соответственно мнимых преобразований. Этот шаг обусловливает предварительное расширение класса собственных элементов пространства присоединением мнимых элементов» [94].

Принципы перенесения

В «Эрлангенской программе» рассматриваются случаи изоморфизма групп преобразований, позволяющих интерпретировать одну геометрию в другую; такие интерпретации Клейн вслед за Л. О. Гессе называет «перенесениями» одной геометрии в другую. Термин «перенесение» был введен Людвигом Отто Гессе (1811—1874), о котором мы говорили в главе об алгебре (см. Кн. 1, с. 78) в связи с введенным им инвариантом, называемым по его имени «гессианом». Это было сделано Гессе в работе «Об одном принципе перенесения» (Über einen Übertragungsprinzip.— J. für Math., 1866). «Перенесение» Гессе основано на том, что если спроектировать прямую проективной плоскости из точки некоторой коники на эту конику (эта проекция является аналогом стереографической проекции прямой на окружность на евклидовой плоскости), то коллинеации прямой изображаются коллинеациями плоскости, переводящими в себя конику, и обратно. Это изображение определяет изоморфизм группы коллинеаций прямой и группы коллинеаций плоскости, переводящих в себя конику.

Группа коллинеаций проективной прямой определяет на ней геометрию бинарных форм, т. е. линейных форм $\sum\limits_i a_i x^i$ от двух проективных координат точек прямой. Клейн формулирует принцип перенесения Гессе следующим образом: «Теория бинарных форм и проективная геометрия систем точек на коническом сечении — одно и то же, т. е. каждой бинарной теореме соответствует теорема о подобного рода точечных системах и обратно» [95]. Рассматривая пары действительных и мнимосопряженных точек коники и переходя от этих пар точек к соединяющим их прямым, а затем к полюсам этих прямых относительно коники, Клейн придает этому принципу новую форму: «Теория бинарных форм и проективная геометрия плоскости, которую изучаем, полагая в основу некоторое коническое сечение, эквивалентны между собой» или в силу интерпретации Клейна геометрии Лобачевского, которую Клейн называет здесь «общей проективной метрической геометрией», «теория бинарных форм и общая проективная метрическая геометрия на плоскости — одно и то же» [96]. Клейн указывает также, что вместо конического сечения в плоскости можно взять кривую третьего порядка в пространстве и т. д., имея в виду

[93] Там же.
[94] Там же, с. 406.
[95] Там же, с. 409.
[96] Там же, с. 410.

интерпретацию плоскости Лобачевского на так называемой норм-кривой трехмерного и многомерного пространства, т. е. кривой, параметрическое уравнение которой в проективных координатах приводится к виду $x_0 = 1,\ x_1 = t,\ x_2 = t^2,\ \ldots,\ x_n = t^n$.

Другим примером «перенесения», рассмотренным в «Эрлангенской программе», является «перенесение Плюккера», основанное на плюккеровых координатах $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. Мы видели, что эти координаты определяются с точностью до общего множителя и связаны квадратичным соотношением $p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$. Поэтому плюккеровы координаты можно рассматривать как проективные координаты точки квадрики в шестимерном проективном пространстве. Называя линейные формы от четырех переменных x_0, x_1, x_2, x_3 кватернарными, Клейн приходит к выводу, что «теория кватернарных форм совпадает с проективным мероопределением в многообразии шести однородных переменных» [97], имея в виду, что указанную квадрику можно рассматривать как абсолют шестимерного пространства с проективной метрикой.

Стереографически проектируя овальную квадрику на плоскость, Клейн замечает, что при этом группа коллинеаций пространства, переводящих в себя овальную квадрику с сохранением центра проекции, изображается «главной группой» плоскости, а группа всех коллинеаций пространства, переводящих в себя овальную квадрику, изображается группой круговых преобразований плоскости, дополненной одной бесконечно удаленной точкой (как расширенная плоскость комплексного переменного, а не прямой, как проективная плоскость). Поэтому Клейн приходит к выводу, что «элементарная геометрия плоскости и проективное исследование поверхности второго порядка с присоединением одной из ее точек — одно и то же» [98] и «геометрия обратных радиусов на плоскости и проективная геометрия на поверхности второго порядка тождественны между собой» [99]. Аналогично, стереографически проектируя овальную квадрику в четырехмерном проективном пространстве на трехмерную плоскость в этом пространстве, Клейн замечает, что группа всех коллинеаций четырехмерного пространства, переводящих в себя овальную квадрику, изображается группой конформных преобразований трехмерного пространства, дополненного одной бесконечно удаленной точкой, и приходит к выводу, что «геометрия обратных радиусов в пространстве сводится к проективному исследованию многообразия, представляемого квадратичным уравнением между пятью однородными переменными» [100]. В этих интерпретациях точки трехмерного и четырехмерного пространств изображаются окружностями плоскости или сферами трехмерного пространства, изображающимися на квадриках сечениями полярными плоскостями этих точек. Проективные координаты этих точек совпадают с так называемыми тетрациклическими координатами соответственных окружностей или пентасферическими координатами соответственных сфер, введенными французским геометром Гастоном Дарбу (1842—1917) в работе «Об одном замечательном классе алгебраических кривых и о теории мнимостей» (Sur une classe remarquable de courbes algébriques et sur la théorie des imaginaires. Bordeaux, 1873), вследствие чего это перенесение часто называют «перенесением Дарбу».

Интерпретацию овальной квадрики на плоскости Клейн формулирует и иначе, замечая, что плоскость, дополненную одной бесконечно удален-

---

[97] Там же, с. 410.
[98] Там же, с. 409.
[99] Там же, с. 413.
[100] Там же, с. 413.

ной точкой, можно рассматривать как расширенную плоскость комплексного переменного и как комплексную проективную прямую: «Теория бинарных форм изображается геометрией обратных радиусов на вещественной плоскости так, что при этом представляются и комплексные значения переменных» [101], а рассматривая овальную квадрику как сферу, Клейн формулирует эту же интерпретацию в виде: «Теория бинарных форм комплексного переменного получает свое изображение в проективной геометрии на шаровой поверхности» [102].

Наряду с конформными преобразованиями пространства, являющимися точечными преобразованиями пространства, дополненного одной бесконечно удаленной точкой, переводящими сферы в сферы (считая плоскости частными случаями сфер), Клейн рассматривает еще две группы преобразований сфер — так называемую группу высшей геометрии сфер Ли, определенную С. Ли в работе «О комплексах, в особенности о комплексах прямых и сфер с приложениями к теории дифференциальных уравнений в частных производных» (Über Komplexe, insbesonders Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1872). Преобразования этой группы переводят сферы в сферы с сохранением их касания, причем и плоскости и точки считаются частными случаями сфер. Группа конформных преобразований — подгруппа этой группы, переводящая точки в точки, эти преобразования сохраняют углы между сферами. Другая подгруппа этой группы, переводящая плоскости в плоскости (продолжая считать точки частными случаями сфер),— группа преобразований Лагерра, определенная Э. Лагерром в работе «О геометрии направлений» (Sur la géométrie de la direction.— Bull. Soc. math. France, 1880), эта группа сохраняет касательное расстояние между сферами (отрезок общей касательной двух одинаково ориентированных сфер между их точками касания).

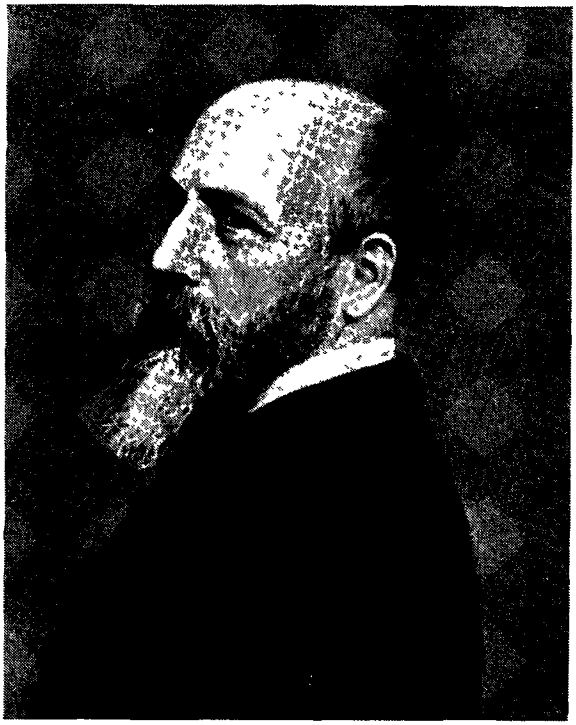
Кремоновы преобразования

Важное значение в алгебраической геометрии играют так называемые *бирациональные*, или *кремоновы*, *преобразования*, называемые по имени итальянского геометра Луиджи Кремоны (1830—1903), основоположника итальянской геометрической школы, участника войны за независимость Италии, а после ее объединения в 1860 г. одного из организаторов высшего образования и научных исследований. Уроженец Павии, Кремона был профессором Болонского университета и Миланского технического института, а с 1873 г. директором Политехнической школы в Риме, объединенной с естественнонаучным факультетом университета. «Кремоновым преобразованиям» посвящена работа Кремоны «О геометрических преобразованиях плоских фигур» (Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.—Mem. di Bologna, 1863) и многие работы последующих лет. Кремона известен также как основоположник графических методов решения задач статики, так называемой графостатики.

Бирациональные преобразования представляют собой преобразования проективной плоскости или проективного пространства, выражающиеся рациональными функциями проективных координат и обладающие тем свойством, что обратные преобразования также выражаются рациональными функциями тех же координат. Простейшим бирациональным преобразованием является инверсия относительно окружности. Другим прос-

---

[101] Там же, с. 414.
[102] Там же.



Л. КРЕМОНА

тейшим бирациональным преобразованием проективной плоскости является преобразование $x_i' = 1/x_i$, изучавшееся впервые Плюккером в 1830 г. К бирациональным преобразованиям относятся также те преобразования, с помощью которых еще Ньютон (см. ИМ, т. 2, с. 114—117) получал из эллипса, параболы и гиперболы кривые третьего порядка, которые он называл «гиперболизмами» соответственных коник. Как видно из этих примеров, при бирациональных преобразованиях порядок алгебраических кривых не сохраняется, сохраняется же, как показал Кремона, род p алгебраических кривых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В развитии геометрии в XIX в. можно проследить три основные линии: 1) углубление геометрических методов и результатов, относящихся к геометрии обычного пространства, прежде всего в области дифференциальной геометрии: в течение этого века была создана теория инвариантов и форм, определяющих с точностью до движения в этом пространстве пространственную кривую (Серре и Френе), поверхность (Гаусс и Вейнгартен, Петерсон и Бонне) и прямолинейную конгруэнцию (Куммер), изучено значительное количество специальных типов кривых, поверхностей и конгруэнций, получила значительное развитие теория изгибания поверхностей; 2) расширение представлений о пространстве: основным здесь является открытие неевклидовой геометрии (Лобачевский, Бояи, Гаусс, Кэли, Клейн). Появление новой неевклидовой геометрии привело к тому, что проективная геометрия, первоначально бывшая теорией проективных свойств фигур в обычном пространстве (Понселе, Мёбиус, Плюккер, Штейнер, Шаль), превратилась в геометрию проективного пространства (Штаудт, Кэли). В XIX в. на этом же пути появились аффинная и конформная геометрии (Мёбиус, Лиувилль) и заложены основы для создания симплектической геометрии (Мёбиус), а также многомерные евклидовы и аффинная геометрии (Кэли, Грассман), а затем и многомерные проективная и неевклидовы геометрии (Риман, Бельтрами). Теория внутренней геометрии поверхности (Гаусс, Миндинг, Лиувилль, Бонне) привела к появлению геометрии многомерных римановых пространств. Изучение топологических свойств кривых и поверхностей (Гаусс, Листинг, Мёбиус, Риман) привело к появлению топологии многомерных многообразий (Риман, Бетти); 3) проникновение в геометрию алгебраических методов: сюда относится прежде всего развитие алгебраической геометрии кривых и поверхностей (Плюккер, Риман, Клебш), геометрия групп преобразований (Гельмгольц, Клейн, Ли), приведшее к определению Клейном различных геометрий как теорий инвариантов тех или иных групп преобразований.

Если первая линия развития геометрии была в значительной степени исчерпана в XIX в., хотя интересные исследования по геометрии трехмерного евклидова пространства, в частности по изгибанию поверхностей, а также по аксиоматике этого пространства, получившие значительное развитие в конце XIX в., продолжались в XX в., то основным содержанием развития геометрии в XX в. стало развитие второй и третьей линий. Расширение понятия о пространстве в XX в. происходило в нескольких направлениях, по существу унаследованных у геометров XIX в.: в начале века появляется общее понятие о топологическом пространстве (Хаусдорф и др.), а затем уточняется понятие о топологическом многообразии (Л.Э.Брауэр), на топологические пространства весьма общего типа переносятся понятия комбинаторной топологии Пуанкаре (П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин, Дж. Александер, Х. Хопф и др.). Открытие специальной теории относительности Эйнштейна (1905) вызывает новый интерес к неевклидовым геометриям, в начале века начинает разрабатываться геометрия псевдоевклидова пространства, описывающая пространство-время специальной теории относительности (Пуанкаре, Минковский, Клейн, Зоммерфельд), а затем геометрия галилеева пространства, описывающая пространство-время классической механики Галилея — Ньютона (А. П. Котельников), что приводит к появлению новых классов проективных метрик (В. Бляшке, Д. М. Ю. Соммервилль). Еще большее значение для геометрии имеет открытие общей теории относительности Эйнштейна (1916): это открытие вызывает новый интерес к римановой геометрии, где Леви-Чивита открывает параллельный перенос (1917), возникает геометрия псевдориманова пространства, описывающая пространство-время общей теории относительности, совершенствуется изобретенный в конце XIX в. тензорный анализ Г. Риччи. Попытки создания общей теории поля приводят к открытию пространств аффинной связности (Г. Вейль, Я. А. Схоутен, Э. Картан), а затем и пространств проективной и конформной связности (Э. Картан): эти пространства относятся к аффинному проективному и конформному пространствам, как риманово к евклидову; эти теории в свою очередь приводят к созданию общего понятия пространства однородной связности. Возникает теория дифференцируемых многообразий (О. Веблен, Дж.Уайтхед), на основе которой уточняется теория пространств со связностями, и возникает теория расслоенных пространств. Слившись с топологией, теория дифференцируемых многообразий порождает дифференциальную топологию. На основе применения топологических методов возникает «дифференциальная геометрия в целом» как в трехмерном евклидовом, так и в многомерных и неевклидовых пространствах (А. Д. Александров). Значительное развитие получает проективно-дифференциальная геометрия (Г. Фубини, Э. Чех, С. П. Фиников). Особенно следует отметить плодотворное привлечение методов геометрии пространств аффинной связности к этой геометрии (А. П. Норден); возникает аффинно-дифференциальная геометрия (В. Бляшке, П. А. Широков), конформно-дифференциальная геометрия и геометрии многообразий, погруженных в другие пространства с группами преобразований. Алгебраические методы, начавшие проникать в геометрию в XIX в., становятся теперь одним из основных методов исследования. Алгебраическая геометрия получает дальнейшее развитие и, слившись с топологией, порождает алгебраическую топологию. Значительное развитие получает применение к геометрии групп Ли. На этом пути возникают теория симметрических пространств (П. А. Широков, Э. Картан) и редуктивных пространств (К. Номидзу, П. К. Рашевский). Если классические проективная, неевклидовы, конформная геометрии являются геометриями простых групп Ли, то в XX в. строятся геометрии остальных простых групп Ли (Э. Штуди, Г. Фубини, Дж. Л. Кулидж, Э. Картан, К. Шевалле), а затем геометрии и квазипростых групп Ли, из которых ранее рассматривались только евклидова и псевдоевклидовы геометрии, и геометрии более сложных групп. Многие из геометрий простых, квазипростых и т. д. групп Ли являются геометриями над алгебрами, что вызвало необходимость в создании общей теории пространств над алгебрами и более общими кольцами; другим стимулом к созданию этой теории послужили работы Д. Гильберта по основаниям геометрии, в результате которых в конце XIX — начале XX в. появились геометрии над конечными полями (Дж. Фано, О. Веблен), получившие неожиданное применение в комбинаторном анализе и математической статистике.

Особо следует отметить выросшую из исследований по теории функций в конце XIX в. (С. Пинкерле) и по теории интегральных уравнений в начале XX в. (Гильберт) теорию бесконечномерных пространств (Гильберт, С. Банах), с одной стороны, являющихся одним из объектов изучения топологии XX в., а с другой — объектом новой математической дисциплины, возникшей в начале XX в. на стыке математического анализа, геометрии и алгебры,— функционального анализа.

Глава вторая

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

•

Итоги развития теории аналитических функций в XVIII в.

Аппарат степенных рядов для представления функций и решения разнообразных задач математики и механики систематически использовался Ньютоном начиная с 60-х годов XVII в. Однако завершение техники операций со степенными рядами падает на долю XVIII в., когда к средствам, употреблявшимся Ньютоном, присоединяются еще ряды Тейлора и Лагранжа. В XVIII в. для представления функций наряду со степенными рядами применяются также, главным образом по инициативе Эйлера, бесконечные произведения, разложения на простейшие дроби, интегральные представления (гамма-функция, эллиптические интегралы), а также непрерывные (цепные) дроби.

Строя аналитические выражения из элементарных функций одного или нескольких переменных посредством сложения, вычитания, умножения и деления, возвышения в степень и извлечения корня, решения уравнений (алгебраических) и интегрирования, Эйлер и его современники должны были получать функции, аналитические всюду, за исключением изолированных особых точек, в окрестности которых функции все же допускали разложения в степенной ряд (содержащий дробные и отрицательные степени). Вот почему, понимая функцию вообще как аналитическое выражение, они имели достаточное основание считать ее аналитической функцией. Факты иного рода, где аналитическое выражение, например в виде сходящегося ряда элементарных функций, представляло неаналитическую функцию, являлись исключительными в практике математиков того времени (тригонометрические ряды у Д. Бернулли); эти «исключения» математический анализ XVIII в. не мог охватить и, как правило, не считал нужным оговаривать. Аналитически представимые функции суть функции аналитические — вот одно из основных (не сформулированных, впрочем, именно в этих терминах) положений математического анализа XVIII в.; оно молчаливо признавалось и почти всеми математиками первой четверти XIX в. В конце XVIII в. оно было принято Лагранжем в качестве исходной точки для построения дифференциального и интегрального исчисления («Теория аналитических функций», 1797).

Принципиально новым моментом в математическом анализе XVIII в. являлось использование комплексных значений независимого переменного. В самом начале первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер подчеркивал, что «даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменной величины», и далее давал множество примеров плодотворности такого широкого толкования переменной. Таким образом, переменная величина здесь у Эйлера являлась комплексной переменной. Любопытно отметить, что во втором томе, где переменной величине придается геометрическое истолкование, понятие о ней суживается до объема действительной переменной [1]. Почти через 30 лет после выхода в свет «Введения в анализ бесконечных» Лагранж в письме к итальянскому математику Лорнья от 20 декабря 1777 г. имел уже веские основания говорить: «Одним из важнейших шагов, сделанных анализом в последнее время, я считаю то, что его более не затрудняют мнимые величины и что вычисления с ними производятся так же, как и с действительными величинами» [2].

Трудами Эйлера теория элементарных функций комплексного переменного получила полное развитие и завершение к середине XVIII в. Эйлер существенно расширил также привычный набор аналитических функций, введя гамма-функцию, дзета-функцию, цилиндрические функции, и установил основные соотношения для них и для функций, уже встречавшихся у других авторов (эллиптические интегралы, простейшие функции типа тэта-функций). Правда, все эти неэлементарные функции он рассматривал, как правило, только для дей твительных значений независимого переменного.

Вслед за Ник. Бернулли Эйлер установил, что уравнение $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ является условием, при котором $vdx + udy$ есть полный дифференциал некоторой функции (см. ИМ, т. 3, с. 342). Даламбер первым, а за ним и Эйлер в связи с задачами гидромеханики пришли к системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

и получили пары решений этой системы в виде действительной и мнимой частей аналитической функции $f(z) = u + iv$ комплексного переменного. При этом именно в работах Эйлера выявляется общий характер этого результата, так как для получения u и v он берет в качестве $f(z)$ не отдельные элементарные функции, как Даламбер, а общую аналитическую функцию, заданную степенным рядом с любыми (действительными) коэффициентами.

В работах по интегральному исчислению (доложены Петербургской академии наук в 1777 г. и опубликованы в 1793 и 1797 гг.) Эйлер установил равенство

$$\int f(z)\,dz = \int (u\,dx - v\,dy) + i\int (v\,dx + u\,dy),$$

где $f(z) = u + iv$. Не хватало только представления об интегралах от функций комплексного переменного, вычисленных вдоль некоторой кривой, чтобы увидеть здесь интегральную теорему Коши о независимости интеграла от пути интегрирования.

Пользуясь последним соотношением, Эйлер вновь показал, что действительная и мнимая части (аналитической) функции комплексного переменного удовлетворяют уравнениям (1). Кроме того, он впервые использовал прием отделения действительной и мнимой частей в интеграле от комплексной функции для вычисления интегралов от действительных функций (см. ИМ, т. 3, с. 365—368). Именно этот прием послужил в последующем отправным пунктом в исследованиях Коши.

Наконец, Эйлер в связи с задачей о построении географических карт изучал задачу конформного отображения поверхностей в общей постановке и использовал для этой цели комплексное переменное.

В исследованиях Эйлера, а также Даламбера и позднее Лагранжа, связанных с различными применениями комплексных чисел к решению задач,

---

[1] Ср.: *Маркушевич А.* Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 119.

[2] *Lagrange J. L.* Oeuvres. Paris, 1892, t. 14, p. 261.

формулируемых непосредственно в терминах действительных чисел, комплексные числа выступают обычно как пары действительных чисел, имеющих определенный конкретный смысл, например как пары, составленные из абсциссы и ординаты точки на плоскости, из проекций скорости частицы жидкости на координатные оси или пары функций. Таким образом, различные конкретные интерпретации комплексных чисел (в частности, геометрическая) осваиваются в математике начиная с середины XVIII в.

Однако здесь отсутствует еще в явном виде наглядное представление о комплексном переменном как о векторе или о точке, перемещающейся по плоскости, а также отсутствует наглядное истолкование операций над комплексными числами.

Резюмируя, можно сказать, что в XVIII в. был накоплен обширный фактический материал для построения теории аналитических функций и выявлена плодотворность их изучения как функций комплексного переменного. И основную ведущую роль в этой работе играл Леонард Эйлер.

Развитие концепции комплексного числа

В дальнейшей истории теории аналитических функций существенную роль играло развитие и распространение представлений о комплексных числах как о векторах или точках плоскости. Весьма близок к таким представлениям был Эйлер в тех работах, где он переходил от записи комплексного числа в виде $x \pm \sqrt{-1}\, y$ к тригонометрической форме комплексного числа $s(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega)$ (например, в гидродинамических исследованиях, выполненных около 1755 г.). В работе «О представлении сферической поверхности на плоскости» (1777, 1778) (см. ИМ, т. 3, с. 170) он переходит от точек (x, y) плоскости (географической карты) к комплексным числам $x + iy$, выражает последние через долготу и широту точек сферы, а затем снова возвращается к координатам x и y.

Однако в явной и систематической форме геометрическое изображение комплексных чисел в виде направленных отрезков и соответствующее истолкование действий над ними впервые встречаются в работе датского геодезиста К. Весселя (1745—1818) «Об аналитическом представлении направления», напечатанной на датском языке в 1799 г. (Om directionens analytiske Betegning, et Forsög anwendt fornemmeling til plane og sphaeriske Polygoners Oplösning.— Danske Vid. Selsk. Skr. N. Samml., 1799, 5).

К сожалению, это сочинение своевременно не было замечено математиками и его содержание было оценено по достоинству лишь 100 лет спустя (см. ИМ, т. 3, с. 63—65).

Геометрическое представление комплексных чисел было рассмотрено также в работах французского аббата А. Бюэ (1748—1826) и швейцарца Ж. Аргана (1768—1822). Работы эти, относящиеся к 1806 г. и написанные независимо от Весселя, также оставались долгое время малоизвестными, во всяком случае недостаточно влиятельными, если можно так выразиться. И это несмотря на полемику на страницах журнала «Annales de Gergonne» (1813—1815. Т. 4—5), вызванную публикацией в этом журнале заметки Ж. Ф. Франсе (1775—1833), пришедшего к сходным идеям. Арган выступил в этом журнале по указанному поводу два раза, восстанавливая свой приоритет и воспроизводя с некоторыми уточнениями краткое и элегантное доказательство основной теоремы высшей алгебры, предложенное им в работе 1806 г. Во второй из своих заметок Арган, в частности, ввел термин «модуль комплексного числа $a + bi$» в его современном значении (см. ИМ, т. 3, с. 65—67). Термин этот вошел во всеобщее употребление благодаря тому, что им стал пользоваться Коши начиная с «Алгебраического анализа» (1821).

Впрочем, в первой четверти XIX в. многие математики были весьма близки к геометрическому представлению комплексных чисел. Всеобщую известность и признание представление комплексных чисел в виде точек плоскости получило с 1831 г., когда была опубликована работа Гаусса «Теория биквадратичных вычетов», включавшая обоснование комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Гауссу принадлежит самый термин «комплексные числа». В своих неопубликованных работах Гаусс обнаруживает владение геометрическими представлениями комплексных чисел начиная с юношеского «Дневника».

На грани XVIII и XIX столетий стоит докторская диссертация Гаусса, посвященная доказательству так называемой основной теоремы высшей алгебры и напечатанная в 1799 г. При этом Гаусс широко использует геометрические представления, сводя проблему к доказательству существования точек пересечения определенных алгебраических кривых на плоскости. Доказательство это, основанное на верной идее, однако, далеко не безупречно.

Позднее Гаусс неоднократно возвращался к этой теореме, придав ей формулировку, ставшую классической (каждое алгебраическое уравнение степени не ниже первой имеет по крайней мере один корень, действительный или мнимый), и предлагая другие доказательства ее[3]. Так называемое третье доказательство (опубликовано в 1816 г.) хотя и изложено без прямого использования комплексных чисел и геометрических представлений, по сути дела дает пример применения принципа аргумента к основной теореме высшей алгебры[4].

Сложный и долгий путь к геометрическому истолкованию комплексных чисел проделал Коши. Понимание им комплексных чисел менялось почти на протяжении всей его творческой деятельности. В «Алгебраическом анализе» (1821) он относит «мнимые выражения» (т. е. комплексные числа) и «мнимые уравнения» (т. е. равенства, содержащие комплексные числа) к разряду символических, понимая под последними такие, которые «взятые буквально не точны или лишены смысла, но из которых можно выводить точные результаты, модифицируя и меняя по определенным правилам либо сами уравнения, либо символы, в них содержащиеся»[5]. Он уточняет, что «всякое мнимое уравнение — это только символическое представление двух уравнений между двумя действительными количествами».

Почти через четверть века Коши вновь обращается к выяснению понятия комплексного числа. Соответствующие статьи содержатся в сборниках, объединенных общим названием «Упражнения по анализу и математической физике» (Exercices d'analyse et de physiquex mathematique. Paris, 1840—1847. T. 1—4), в «Oeuvres» они занимают соответственно четыре тома (XI—XIV) второй серии. Так как нам придется неоднократно ссылаться на них, мы будем коротко называть их просто «Упражнения» (Exercices) с указанием тома и года первой публикации. В «Мемуаре о функциях мнимых переменных» (Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires. Exercices, 1844. T. 3) он повторяет прежнюю концепцию, ссылаясь на «Алгебраический анализ». В промежутке между этими двумя работами Коши доказал теорему о независимости интеграла по пути интегрирования, построил теорию вычетов с ее приложениями, получил интегральную

[3] См. Кн. 1, с. 46—49.
[4] Ср.: *Маркушевич А.* Работы Гаусса по математическому анализу.— В кн.: Карл Фридрих Гаусс. М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 185—187.
[5] *Cauchy A. L.* Oeuvres complètes. Paris, 1882, sér. 2, t. 3, p. 153.

О. КОШИ

формулу и из нее вывел разложение в степенной ряд (обо всем этом см. ниже). И все же он не перестает подчеркивать, что мнимые числа, «понимаемые буквально и истолковываемые сообразно с общепринятыми условиями, не обозначают ничего и не имеют смысла. Знак $\sqrt{-1}$ является некоторым образом только орудием, инструментом вычисления...» [6]. Вместе с тем он продолжает искать иное, содержательное понимание комплексных чисел. Таким поискам посвящено несколько работ, помещенных в четвертом томе «Упражнений», публиковавшемся выпусками начиная с 1847 г.

В «Мемуаре о теории алгебраических сравнений, заменяющей теорию мнимых» (Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques, substituée à la théorie des imaginaires. Exercices, 1847. T. 4) Коши предлагает рассматривать i как «действительное, но неопределенное количество», а каждое «мнимое уравнение» как полиномиальное сравнение по модулю $i^2 + 1$. Например, правило умножения комплексных чисел, записываемое им теперь в виде

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\, i,$$

означает здесь лишь то, что разность двух многочленов слева и справа от знака сравнения $\simeq$ делится на $i^2 + 1$.

Таким образом, Коши здесь строит поле разложения многочлена, не предполагая заранее существования поля комплексных чисел. В общем виде такую конструкцию осуществил Л. Кронекер в 1882 г. Впрочем, ту

---

[6] Ibid., p. 361—362.

же идею можно усмотреть еще во втором доказательстве Гаусса (1814—1815) [7].

В конце концов Коши останавливается все же на геометрическом представлении, отдавая ему преимущество перед предыдущим, алгебраическим. Именно в «Мемуаре о геометрических количествах» (Mémoire sur les quantités géométriques. Exercices, 1847. T. 4) он, отметив своих предшественников и среди них Бюэ и Аргана (однако Гаусса он здесь не называет), предлагает «после новых и зрелых размышлений»... полностью отказаться от знака $\sqrt{-1}$ и заменить теорию мнимых выражений теорией количеств, которые Коши называет «геометрическими». При этом геометрическое количество r_p является вектором с длиной r (называемой модулем) и полярным углом p (аргумент или азимут).

Впрочем, в заметке «О геометрическом количестве $i = 1_{\pi/2}$ и о приведении любого геометрического количества к виду $x + yi$» (Sur la quantité géométrique $i = 1_{\pi/2}$, et sur la réduction d'une quantité géométrique quelconque à la forme $x + yi$. Exercices, 1847. T. 4) Коши восстанавливает привычную форму комплексного числа. При этом он называет геометрическое количество $x + yi$ аффиксом точки A (x, y).

Упомянем еще помещенную все в том же четвертом томе «Упражнений» заметку «О функциях геометрических количеств» (Sur les fonctions des quantités géométriques). Если $z = x + iy$ — аффикс подвижной точки A и $Z = X + iY$ — аффикс движущейся точки B, то «Z должно считаться функцией z, когда значение z определяет значение Z. Но для этого достаточно, чтобы X и Y были определенными функциями x и y. Тогда также положение движущейся точки A будет определять всегда положение движущейся точки B» [8].

Итак, Коши узаконил здесь, наконец, наглядное представление о функции комплексного переменного, которым он фактически (не вполне осознанно) пользовался в своих предыдущих исследованиях и которое, как увидим ниже, представлялось вполне естественным Гауссу еще в 1811 г.

Комплексное интегрирование

Наибольшее значение для построения основ теории аналитических функций комплексного переменного имели исследования, в которых применялись и развивались эйлеровы методы вычисления определенных интегралов с использованием комплексного переменного.

Лаплас в цикле работ, начинающемся с «Мемуара о приближении формул, являющихся функциями весьма больших чисел» (1782—1783, 1785—1786) и завершающемся «Аналитической теорией вероятностей» (1812; см. ИМ, т. 3, с. 148—150), развивает метод решения линейных разностных и дифференциальных уравнений, основанный на замене неизвестной функции $y(s)$ интегралами вида $\int \varphi(x)\, x^s dx$ или $\int \varphi(x)\, e^{-sx} dx$, где $\varphi(x)$ — новая неизвестная функция. Здесь мы встречаемся со знаменитым преобразованием Лапласа. Указанные интегралы берутся между пределами, удовлетворяющими некоторому уравнению — уравнению пределов, вообще неалгебраическому. Нередко корни этого уравнения оказываются мнимыми, а иногда и вовсе не существуют, что не мешает Лапласу говорить о них, как о мнимых (традиция XVIII века!). В последнем случае речь идет, впрочем, об указании таких способов стремления к бесконечно-

---

[7] См. статью: *Башмакова И. Г.* О доказательстве основной теоремы алгебры.— ИМИ, 1957, вып. 10, с. 257—304, а также Кн. 1, с. 49.

[8] *Cauchy A. L.* Oeuvres complètes, sér. 2, t. 4, p. 309.

сти переменного интеграции, при которых левая часть «уравнения пределов» стремится к нулю. Так, например, если уравнение пределов имеет вид $e^{-x^2} = 0$, то в качестве пределов интеграла берутся $x = -\infty$ и $x = +\infty$, причем интегрирование ведется вдоль действительной оси (или вдоль кривых, асимптотически к ней приближающихся). В других случаях Лаплас полагает $x = -\mu + \varpi\sqrt{-1}$ и изменяет ϖ от $-\infty$ до $+\infty$, что соответствует интегрированию вдоль прямой, параллельной мнимой оси. Получив интегралы с «мнимыми пределами», Лаплас подвергает их различным преобразованиям, основанным на замене переменного интегрирования, и приходит к интегралам от действительных функций действительного переменного. Лаплас отмечает, что переходы от действительного к мнимому позволили ему найти значения многих определенных интегралов, и оценивает роль этих переходов как своего рода индукцию, признавая необходимой дополнительную проверку результатов, получаемых на этом пути. Он указывает, что Эйлер одновременно с ним использовал переход от действительного к мнимому для вычисления интегралов, но что полученные Эйлером результаты вышли в свет позднее соответствующих результатов Лапласа.

В «Аналитической теории вероятностей» Лапласа впервые встречаются выражения коэффициентов степенного ряда через интегралы от суммы ряда, взятые по окружности в комплексной плоскости (впрочем, сам Лаплас не пользуется геометрическим языком). А именно, заменяя в равенстве $u = y_0 + y_1t + y_2t^2 + \ldots + y_xt^x + y_{x+1}t^{x+1} + \ldots + y_\infty t^\infty$ (так Лаплас записывает степенной ряд) t^x на $e^{x\varpi\sqrt{-1}}$, т. е. полагая $t = e^{\varpi\sqrt{-1}}$, умножая обе части равенства на $e^{-x\varpi\sqrt{-1}}\,d\varpi$ и интегрируя по ϖ от 0 до 2π, он получает

$$y_x = \frac{1}{2\pi}\int U\,d\varpi\,(\cos x\varpi - \sqrt{-1}\sin x\varpi),$$

где U — результат подстановки $t = e^{\varpi\sqrt{-1}}$ в выражение для суммы ряда. Очевидно, что интеграл в правой части есть

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{U\,dt}{t^{x+1}},$$

т. е. формулы Лапласа совпадают с позднее выведенными интегральными формулами Коши для коэффициентов степенного ряда.

Примечательно, что Пуассон, сам использовавший, следуя Эйлеру, метод «перехода от действительного к мнимому», указывает в 1815 г., что переход этот может приводить к неверным результатам потому, что «аналитическое выражение интеграла не всегда равно сумме дифференциалов» («Продолжение мемуара об определенных интегралах» (Suite du mémoire sur les intégrales définies.— J. Éc. Polyt., 1815, 17)). Возникающие здесь вопросы он подробно рассматривает в работе 1820 г. «Об интегралах от функций, которые обращаются в бесконечность между пределами интегрирования, и об употреблении мнимых при вычислении интегралов» (Sur les intégrales des fonctions qui passent par l'infini entre des limites de l'intégration, et sur l'usage des imaginaires dans la détermination des intégrales définies.— J. Éc. Polyt., 1820). Анализируя формулу

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

Пуассон замечает прежде всего, что она может привести к ошибкам, если $f'(x)$ обращается в ∞. На это еще раньше указывал Лагранж, приводя пример интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$[1], для которого формула дает неверный результат: —2. Все же и в таких случаях, продолжает Пуассон, можно пользоваться общей формулой, если «поступать так, чтобы переменная x переходила от предела a к пределу b через ряд мнимых значений, тогда $f'(x)$ не будет более бесконечной ни для какого из промежуточных значений и определенный интеграл будет иметь свой обычный смысл», т. е. его можно будет рассматривать как сумму дифференциалов $f'(x)\,dx$ и поэтому применять указанную формулу. В виде примера Пуассон вычисляет $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$, полагая $x = e^{iz}$, где действительное переменное z меняется от $(2n+1)\pi$ до 0, и получает значение $-(2n+1)\pi i$. Это же значение, по Пуассону, получается, если для вычисления интеграла воспользоваться первообразной функцией $\ln x$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{-1}^{1} = -\ln(-1) = -(2n+1)\pi i.$$

Очевидно, что Пуассон стоит на верном пути [9]. Однако суть дела, и притом в более полном и совершенном виде, была высказана еще в 1811 г. Гауссом в его замечательном письме к Бесселю от 19 декабря 1811 г., которое, к сожалению, впервые было опубликовано вместе со всей перепиской двух ученых только в 1880 г.

«...Что нужно понимать под $\int \varphi(x)\,dx$ для $x = a + bi$? Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a + bi$) переходит к $x = a + bi$, и тогда сложить все $\varphi(x)\,dx$. Так смысл вполне установлен. Но переход может совершиться бесконечно многими способами. Так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно сделать зримой (sinnlich machen) посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, определяемая абсциссой a и ординатой b, будет как бы представлять величину $a + bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a + bi$ совершается поэтому по линии и, следовательно, возможен бесконечно многими способами. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \varphi(x)\,dx$ при двух различных переходах сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя линиями, представляющими переход, функция $\varphi(x)$ нигде не равна ∞. Это прекрасная теорема [10], нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, касающимися разложений в ряды. Переход в каждой точке следует производить всегда так, чтобы ни разу не затронуть места, где $\varphi(x) = \infty$. Я настаиваю на том, что такие точки следует обходить потому, что для них, очевидно, первоначальное основное понятие интеграла $\int \varphi(x)\,dx$ теряет ясность и легко приводит к противоречиям.

[9] Ср.: *Юшкевич А. П.* О возникновении понятия об определенном интеграле Коши.— Труды ИИЕиТ АН СССР, 1947, 1, с. 397—401.

[10] При этом, собственно говоря, еще предполагается, что сама $\varphi(x)$ является однозначной (einförmige) функцией от x или, по крайней мере, что для ее значений внутри всей этой части плоскости принята только одна система значений без нарушений непрерывности.— *Прим. Гаусса.*

Вместе с тем, впрочем, отсюда ясно, как функция, порожденная посредством интеграла $\int \varphi(x)\,dx$, может иметь многие значения для одного и того же значения x, а именно в зависимости от того, будет ли при переходе допущен однократный или многократный обход вокруг точки, в которой $\varphi(x) = \infty$, или же такого обхода совсем не будет. Если, например, $\log x$ [11] определить посредством $\int \frac{dx}{x}$, начиная от $x = 1$, то можно прийти к $\log x$ или не огибая точку $x = 0$, или посредством однократного или многократного обхода вокруг нее; каждый раз будет добавляться константа $+2\pi i$ или $-2\pi i$; отсюда совершенно ясны различные логарифмы каждого числа. Если же $\varphi(x)$ не становится бесконечной ни для одного конечного значения x, то интеграл всегда является только однозначной функцией x» [12].

Здесь впервые встречается полное объяснение многозначности логарифма, определяемого как $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$. Очевидно, подобными же соображениями Гаусс пользовался и для того, чтобы выяснить природу многозначности эллиптических интегралов, без чего нельзя уяснить себе двоякопериодичность эллиптических функций (см. ниже, с. 127—132).

Интегральная теорема Коши. Вычеты

Первое исследование Коши, имеющее значение для истории функций, это его «Мемуар о теории определенных интегралов» (Mémoire sur les integrales définies. Oeuvres, sér. 1, t. 1) (представлен в Академию в 1814 г., напечатан в 1825 г.). В этом мемуаре Коши не достает еще того отчетливого понимания всей проблемы комплексного интегрирования, которое обнаруживается в цитированном письме Гаусса. Соответствующая картина складывалась перед глазами Коши постепенно, в течение почти трех десятилетий. Однако его труды были опубликованы в свое время (хотя и с отмеченным промедлением). И поэтому именно они, а не идеи Гаусса легли в фундамент систематического построения общей теории. К вычислению определенных интегралов, чему посвящен мемуар 1814 г., Коши привели гидродинамические изыскания. Отправной пункт мемуара — соотношение

$$\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\,dx = \int\limits_{y_0}^{Y}\int\limits_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Оно было указано Эйлером еще в 1769 г. (опубликовано в 1770 г.). Коши использует его здесь лишь как средство вычисления однократных интегралов, т. е. как прием интегрирования по параметру. В этом смысле его рассматривал также и сам Эйлер (1774). С тех пор он, а также Лаплас дали много примеров применения этого приема. Коши отправляется от двух функций: $S(x, y)$ и $V(x, y)$, являющихся действительной и мнимой частями выражения $F(x, y)$:

$$F(x + iy) = S + iV.$$

Тогда, как это показал еще Эйлер в 1777 г.:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

---

[11] Так Гаусс обозначал натуральный логарифм.

[12] Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bessel. Leipzig, 1880, S. 155—160; см. также: *Gauss C. F.* Werke. Göttingen, 1866, Bd. 10(1), S. 366—368.

Коши интересует здесь только первое из двух соотношений. Полагая

$$f(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x},$$

он получает

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial V}{\partial y}\, dy\, dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial S}{\partial x}\, dx\, dy,$$

или

$$\int_{x_0}^{X} [V(x, Y) - V(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{Y} [S(X, y) - S(x_0, y)]\, dy. \quad (3)$$

Последнее соотношение позволяет Коши сводить вычисление одного определенного интеграла к вычислению другого. С этой точки зрения аналогичная формула

$$\int_{x_0}^{X} [S(x, Y) - S(x, y_0)]\, dx = -\int_{y_0}^{Y} [V(X, y) - V(x_0, y)]\, dy, \quad (4)$$

получаемая, если сделать иной выбор

$$f(x, y) = \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

не дает ничего нового. Лишь в 1822 г. Коши приходит к мысли соединить соотношения (3) и (4) в одно, в котором фигурирует непосредственно комплексная функция $F(x + iy)$. Соответственно этому он в 1825 г. перед печатью добавляет к мемуару 1814 г. сноску, где, умножая (3) на i и складывая с (4), приходит к равенству

$$\int_{x_0}^{X} F(x + iY)\, dx - \int_{x_0}^{X} F(x + iy_0)\, dx = \int_{y_0}^{Y} F(X + iy)\, i\, dy - \int_{y_0}^{Y} F(x_0 + iy)\, i\, dy,$$

которое представляет окончательно в виде [13]

$$\int_{y_0}^{Y} F(x_0 + iy)\, dy + \int_{x_0}^{X} F(x + iY)\, dx = \int_{x_0}^{X} F(x + iy_0)\, dx + \int_{y_0}^{Y} F(X + iy)\, dy. \quad (5)$$

Последнее соотношение представляет, очевидно, интегральную теорему Коши в простейшем частном случае интегрирования по прямоугольному контуру. Этот геометрический смысл Коши указал в изданном отдельной брошюрой «Мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. Paris, 1825). Однако, прежде чем перейти к обзору последнего, закончим рассмотрение мемуара 1814 г.

Предшественники Коши, пользуясь соотношением (2), требовали только одного — чтобы пределы интеграции были постоянными, т. е. чтобы двойное интегрирование распространялось на площади прямоугольника. Коши отметил необходимость дополнительного требования: функция $f(x, y)$ не должна обращаться в ∞ внутри прямоугольника и на его сторонах.

---

[13] Это же соотношение Коши приводит в заметке 1822 г. и в «Кратком изложении лекций по исчислению бесконечно малых» (1823).

В случаях же, когда это требование не выполнено, интегралы в левых и правых частях равенств (3) и (4) могут отличаться друг от друга и возникает задача отыскания новых формул, учитывающих разность между этими интегралами. Именно таким формулам, послужившим началом позднейшей теории вычетов и их приложениям к вычислению многочисленных определенных интегралов, как известных ранее, так и новых, и посвящена большая часть мемуара 1814 г.

В уже упомянутом «Мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825) Коши определяет с самого начала интеграл

$$\int\limits_{x+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)\,dz$$

по аналогии с интегралом от функций действительного переменного как *предел интегральной суммы*. Чтобы уточнить построение такой суммы, следует положить $x = \varphi(t)$ и $y = \chi(t)$ $(x + iy = z)$, где $\varphi(t)$ и $\chi(t)$— функции, монотонные и непрерывные при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \chi(t_0) = y_0, \quad \varphi(T) = X, \quad \chi(T) = Y.$$

Выбор таких функций, очевидно, эквивалентен заданию некоторой кривой, соединяющей на плоскости точки (x_0, y_0) и (X, Y); на это Коши указывает в другом месте того же мемуара. Таким образом, определенный им интеграл от комплексной функции является интегралом вдоль некоторой кривой и посредством уравнений этой кривой сводится к обыкновенному определенному интегралу, который сокращенно записывается им так:

$$\int\limits_{t_0}^{T} (x' + \sqrt{-1}\,y') f(x + \sqrt{-1}\,y)\,dt.$$

После этого Коши формулирует свою основную теорему: «*Если* $f(x + y\sqrt{-1})$ *конечна и непрерывна для* $x_0 \leqslant x \leqslant X$ *и* $y_0 \leqslant y \leqslant Y$, *то значение интеграла не зависит от природы функций* $x = \varphi(t)$ *и* $y = \chi(t)$» (т. е., скажем мы, не зависит от вида кривой интегрирования, соединяющей в прямоугольнике $x_0 \leqslant x \leqslant X$, $y_0 \leqslant y \leqslant Y$ вершины (x_0, y_0) и (X, Y)). Это и есть интегральная теорема Коши, сформулированная для случая прямоугольной области.

При доказательстве Коши пользуется производной от $f(z)$ и, строго говоря, опирается на непрерывность этой производной. Однако в формулировке теоремы (впрочем, так же как и в цитированном выше письме Гаусса к Бесселю) о существовании производной и тем более о ее непрерывности ничего не говорится. Это связано с убеждением Коши, что непрерывная функция всегда дифференцируема, причем ее производная может стать разрывной лишь в тех точках, где сама функция разрывна. Оно, по-видимому, основано на том, что в большинстве случаев (по крайней мере в первые десятилетия научной деятельности) Коши, говоря о функциях, имеет в виду аналитические выражения, для которых существование производной вытекает из правил дифференциального исчисления. Связанное с этим убеждение в непрерывности производной от непрерывной функции покоится на восходящей к Эйлеру традиции рассматривать аналитические выражения как функции комплексного переменного. Поэтому отсутствие производной, например, у функции $f(x) = x\sin(1/x)$ при $x = 0$ объясняется тем, что функция эта разрывна при $x = 0$ как функция комплексного переменного. Немногим сложнее объясняется обращение в бесконечность при $x = 0$ производной от $f(x) = \sqrt{x}$. И много позднее (см., например, его статью «О непрерывных функциях алгебраических и геометрических количеств» (Sur les fonctions continues de quantités algébriques ou géométriques. Exercices, 1847. Т. 4)) Коши продолжает настаивать, что его определение непрерывности предполагает однозначность функции и что точки, в которых функция становится многозначной, хотя бы она оставалась конечной, он рассматривает как точки разрыва непрерывности. С этой точки зрения функция $\sqrt{x}$ не является непрерывной в точке $x = 0$. В пояснение позиции Коши заметим, что в комплексной плоскости не существует окрестности начала координат, в которой можно выделить непрерывную и однозначную ветвь функции $\sqrt{x}$.

Доказательство интегральной теоремы Коши проводит посредством приемов вариационного исчисления: он заменяет функции $\varphi(t)$ и $\chi(t)$, определяющие кривую, на близкие к ним $\varphi(t) + \varepsilon u(t)$ и $\chi(t) + \varepsilon v(t)$ и, вычисляя соответствующую вариацию интеграла, убеждается, что она равна нулю [14].

В своих первых работах Коши еще недалеко уходит от своих предшественников, прибегая к комплексному переменному в анализе лишь как к вспомогательному средству формального характера, позволяющему решать трудные задачи интегрального исчисления.

Подобная же позиция выражена в следующем отрывке из отзыва Лакруа и Лежандра о мемуаре Коши «Об определенных интегралах», согласующемся с соответствующим мнением Лапласа: «Некоторые исследования в интегральном исчислении приводят иногда к результатам, в которых переход от действительного к мнимому употребляется как некий род индукции, который, не будучи достаточно очевидным сам по себе, требует подтверждений посредством прямых и строгих доказательств» [15].

Постепенно, однако, исследования Коши и других ученых приводят к такому исключительному богатству фактов и новых результатов, что становится ясным, что речь идет не о некоем роде индукции, играющем чисто вспомогательную роль и вдобавок не очень надежном, но об имеющей право на самосостоятельное существование дисциплине — теории функций комплексного переменного.

На протяжении 1826—1829 гг. Коши создает теорию вычетов. Название *вычет* (буквально: остаток) объясняется, по-видимому, тем, что Коши пришел к этому понятию, отыскивая разность между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общие начало и конец, между которыми заключаются полюсы функции. В таком виде вычеты можно усмотреть еще в «Мемуаре о теории определенных интегралов» (1814). В «Мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825) он

---

[14] В содержательном труде М. Клайна «Математическая мысль от древности до современности» (Mathematical thought from ancient to modern times. New York, 1972) утверждается (см. с. 636—637), что рассматриваемый здесь мемуар Коши не публиковался до 1874 г.! Это явная ошибка. Журнальная публикация, указываемая Клайном (Bull. Sci. Math., 1874, 7, p. 265—304; 1875, 8, p. 43—55, 148—159), является перепечаткой брошюры, которая, как указано выше, была издана впервые в Париже в 1825 г. Однако есть косвенные основания судить о том, что эта замечательная работа не вызвала к себе большого интереса со стороны современников. Так, прошло около двух десятков лет со времени ее выхода в свет, а ее издатель Башелье (Bachelier) все еще называет ее в списке предлагаемых покупателям трудов Коши (другие работы Коши из того же списка, уже распроданные, снабжены пометкой: epuisé). Подобный список предшествует титульному листу каждого из четырех томов «Excercices» 1840—1847 гг.

[15] *Cauchy A. L.* Oeuvres complètes, sér. 1, t. 1, p. 321.

уделяет наибольшее внимание анализу случаев, когда $f(z)$ обращается в ∞ внутри или на сторонах прямоугольника. Здесь интегралы по разным путям имеют вообще неравные значения, и Коши вычисляет разности между ними, делая различные предположения. Пусть, например, $f(z)$ обращается в ∞ лишь в одной точке (a, b), лежащей между двумя путями интегрирования, причем существует конечный предел

$$\mathfrak{f} = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} [(x-a) + (y-b)\sqrt{-1}]\, f(x + y\sqrt{-1}).$$

Тогда он доказывает, что разность между интегралами равна $\pm 2\pi\sqrt{-1}\,\mathfrak{f}$. Величина $\mathfrak{f}$ представляет простейший пример вычета.

Самый термин и формальное определение вычета встречается впервые в статье «О новом роде исчисления, аналогичного исчислению бесконечно малых» (Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal. Exercices de mathématiques. Paris, 1826. T. 1). Вот таким образом Коши вводит и определяет это понятие: «Если, после того как найдены значения x, обращающие $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1 + \varepsilon)$ по возрастающим степеням этого количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением на конечный коэффициент, который мы назовем вычетом функции $f(x)$, относящимся к частному значению x_1 переменной x» [16].

Вслед за этой статьей Коши написал большое количество других, помещенных в этом и следующих томах «Exercices de mathématiques (anciens exercices)» (1826—1829), в которых он рассматривал приложения теории к вычислению интегралов, дифференциальным уравнениям, разложению функций в ряды и бесконечные произведения, к теории уравнений и т. д.

Эллиптические функции в работах Гаусса

«С круговыми и логарифмическими функциями,— писал Гаусс Г. Х. Шумахеру 17 сентября 1808 г.[17],— мы умеем теперь обходиться, как с единожды один, но великолепный золотой рудник, хранящий сокровенное высших функций, остается пока почти terra incognita. Я очень много работал над этим прежде и со временем дам собственный большой труд об этом, на что я намекал еще в моих «Disquisitiones arithmeticae», с. 593 [18]. Приходишь в изумление от чрезвычайного богатства новых в высшей степени интересных истин и соотношений, доставляемых этими функциями (к ним принадлежат, между прочим, и те, с которыми связано спрямление эллипса и гиперболы)...»

Итак, речь идет о том, чтобы расширить возможности математического анализа путем присоединения к элементарным функциям других важных классов функций, которые должны быть освоены так же хорошо, как это удалось достигнуть для функций элементарных. Процесс этот, как мы упоминали, совершался на протяжении всего XVIII в. Но в XIX в. он

---

[16] Ibid., sér. 2, t. 6, p. 23.

[17] *Gauss C. F.* Werke, Bd, 10 (1), S. 243—245.

[18] Ibid., Bd. 1, S. 412—413. Гаусс указывает там, что принципы излагаемой им теории деления круга могут быть применены не только к круговым функциям, но и к другим трансцендентным, например зависящим от интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, однако изучение таких функций — задача другого обширного труда.

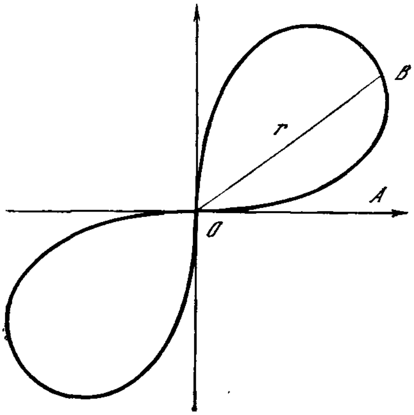


Рис. 12

приобрел новые качества. На изучении специальных классов проверялась сила общих методов теории аналитических функций. Вместе с тем это изучение позволяло накапливать новые факты и закономерности и ставить новые вопросы, служащие важным стимулом дальнейшего развития общей теории.

Началом изучения специальных функций Гауссом послужило построение теории довольно частного класса эллиптических функций — функций лемнискатических. При всех аналогиях с тригонометрическими функциями, облегчивших первые поиски молодому Гауссу (начиная с 1796 г.), лемнискатические функции позволили обнаружить все своеобразие эллиптических функций. Их свойства и сегодня могут служить хорошей пропедевтикой к изучению общей теории эллиптических функций [19].

Лемнискатический синус $r = \sin \operatorname{lemn} S$ (обозначение Гаусса) определяется как функция, обратная интегралу, выражающему длину дуги лемнискаты $r^2 = \sin 2\theta$: $\widehat{OAB} = S = \int\limits_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ (рис. 12).

Если положить, что $\frac{\varpi}{2} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ — четверть длины всей лемнискаты, то лемнискатический косинус вводится соотношением

$$\cos \operatorname{lemn} S = \sin \operatorname{lemn} (\varpi/2 - S).$$

Применяя метод Эйлера, изложенный в V—VI главах I части I тома «Интегрального исчисления» (1768), к интегрированию уравнения

$$d\sigma + ds = \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} + \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = 0$$

(σ и s — две дуги, сумма длин которых постоянна), Гаусс получает теорему сложения для лемнискатического синуса в виде

$$\sin \operatorname{lemn} (\sigma + s) = \frac{\rho\sqrt{1-r^4} + r\sqrt{1-\rho^4}}{1 + r^2\rho^2},$$

где $\rho = \sin \operatorname{lemn} \sigma$, $r = \sin \operatorname{lemn} s$. Отсюда выводится алгебраическое соотношение между лемнискатическими синусом и косинусом и подтверждается существование действительного периода 2ϖ (очевидное геометрически). Чтобы определить функции чисто мнимого аргумента, в качестве предела интеграла $\int\limits_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ берется чисто мнимое число $r = iv$, тогда

$$\int\limits_0^{iv} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = i \int\limits_0^{v} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}} = iy;$$

откуда $v = \sin \operatorname{lemn} y$ и $iv = \sin \operatorname{lemn} (iy) = i \sin \operatorname{lemn} y$.

[19] См.: *Маркушевич А. И.* Замечательные синусы (введение в теорию эллиптических функций). 2-е изд. М.: Наука, 1975.

Остается применить теорему сложения, чтобы получить определение функции комплексного аргумента $z = x + iy$

$$\sin \operatorname{lemn}(x + iy) = \frac{u\sqrt{1-v^4} + iv\sqrt{1-u^4}}{1-u^2v^2}, \tag{6}$$

где $u = \sin \operatorname{lemn} x$, $\quad v = \sin \operatorname{lemn} y$.

Сравнение этой формулы с аналогичной формулой для тригонометрического синуса

$$\sin (x + iy) = u\sqrt{1 + v^2} + iv\sqrt{1 - u^2}, \; u = \sin x, \quad v = \operatorname{sh} y$$

сразу вскрывает два коренных различия между $\sin z$ и $\sin \operatorname{lemn} z$. Во-первых, $\sin z$ всюду конечная (целая) функция, тогда как $\sin \operatorname{lemn} z$ имеет бесконечное множество полюсов (в точках, где $u = \pm 1$ и $v = \pm 1$), т. е. является мероморфной по современной терминологии. Для Гаусса это различие между целой и мероморфной функцией проявляется также и в том, что первая представляется всюду сходящимся степенным рядом, тогда как степенной ряд второй расходится при $|z|$, превышающем ближайший к началу координат полюс функции (Гаусс говорит: «Формула для $\sin \operatorname{lemn} z$ расходится, если φ становится $> \overline{\omega}/\sqrt{2}$» [20]). Там же Гаусс отмечает, что $\sin \operatorname{lemn} z$ представляется в виде частного двух сходящихся степенных рядов $P(z)$ и $Q(z)$ (о них речь будет идти ниже). Во-вторых, $\sin z$ является простой периодической функцией, тогда как из формулы (6) следует, что функция $\sin \operatorname{lemn} z$ имеет, помимо действительного периода $2\overline{\omega}$, также и чисто мнимый период $2i\overline{\omega}$ (v не меняется, если y заменить на $y + 2\omega$) и, следовательно, является *двоякопериодической* функцией.

Соотношение (6) обнаруживает, что все нули лемнискатического синуса заключаются в формуле $\alpha_{m,n} = (m + in)\,\omega$ (это сразу видно, если правую часть представить в виде $\frac{u^2+v^2}{u\sqrt{1-v^4} - iv\sqrt{1-u^4}}$, а полюсы — в формуле $\beta_{mn} = [(2m - 1) + i\,(2n - 1)]\,(\overline{\omega}/2)$, где m и n—произвольные целые числа. После этого Гаусс чисто формально записывает простейшие целые функции, имеющие нулями соответственно $\alpha_{m,n}$ и $\beta_{m,n}$:

$$M(z) = z \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{z}{\alpha_{m,n}}\right), \qquad N(z) = \prod_{m,n} \left(1 - \frac{z}{\beta_{m,n}}\right)$$

(штрих обозначает, что значения $m = n = 0$ исключаются), и утверждает, что

$$\sin \operatorname{lemn} z = M(z)/N(z).$$

Нетрудно видеть, что произведения, использованные Гауссом, не являются абсолютно сходящимися. Они представляют собой прообразы позднейших σ-функций Вейерштрасса. Однако Гаусс не останавливается здесь ни на вопросах сходимости, ни на проверке справедливости последней формулы. Он замечает лишь, что $M(z)$ и $N(z)$ не являются периодическими, и ставит целью заменить их целыми периодическими функциями. Для этого он вводит новое переменное $\zeta = \sin \frac{\pi}{\omega} z$ и рассматривает $\sin \operatorname{lemn} z$ как функцию от ζ. Для этой последней нули имеют вид $\pm i\,(e^{n\pi} - e^{-n\pi})/2$, а полюсы $\pm(e^{(2n-1)\pi/2} + e^{-(2n-1)\pi/2})/2$. Соответственно

[20] *Gauss C. F.* Werke, Bd. 3, S. 406.

строятся функции

$$P(z)=\frac{\overline{\omega}\zeta}{\pi}\prod_{1}^{\infty}\left[1+\frac{4\zeta^2}{(e^{n\pi}-e^{-n\pi})^2}\right];$$

$$Q(z)=\prod_{1}^{\infty}\left[1-\frac{4\zeta^2}{(e^{(2n-1)\pi/2}+e^{-(2n-1)\pi/2})^2}\right]$$

(на этот раз произведения сходятся и притом весьма быстро) и утверждается, что

$$\sin\operatorname{lemn} z = P(z)/Q(z).$$

Гаусс не считает последний переход самоочевидным и говорит, что он может строго доказать эту формулу [21]. Полагая $z=\overline{\omega}\psi$, он находит далее разложения периодических функций $P(\overline{\omega}\psi)$ и $Q(\omega\psi)$ в тригонометрические ряды:

$$P(\overline{\omega}\psi)=2^{3/4}\sqrt{\frac{\pi}{\overline{\omega}}}\left(e^{-\frac{1}{4}\pi}\sin\psi\pi-e^{-\frac{9}{4}\pi}\sin 3\psi\pi+e^{-\frac{25}{4}\pi}\sin 5\psi\pi-\ldots\right),$$

$$Q(\overline{\omega}\psi)=2^{-1/4}\sqrt{\frac{\pi}{\overline{\omega}}}\left(1+2e^{-\pi}\cos 2\psi\pi+2e^{-4\pi}\cos 4\psi\pi+\ldots\right),$$

откуда

$$\sin\operatorname{lemn}(\overline{\omega}\psi)=2e^{-\pi/4}\,\frac{\sin\psi\pi-e^{-2\pi}\sin 3\psi\pi+e^{-6\pi}\sin 5\psi\pi-\ldots}{1+2e^{-\pi}\cos 2\psi\pi+2e^{-4\pi}\cos 4\psi\pi+\ldots}.$$

Аналогичные формулы Гаусс получает и для $\cos\operatorname{lemn}(\overline{\omega}\psi)$. Рассмотрение этих формул показывает, что $P(z)$ и $Q(z)$ (вместе с двумя функциями $p(z)$ и $q(z)$, соответствующими $\cos\operatorname{lemn}(\overline{\omega}\psi)$) с точностью до числовых множителей совпадают с введенными позднее Якоби тэта-функциями в том частном случае, когда (в обозначениях Якоби)

$$k=k'=1/\sqrt{2},\quad K=K'=\overline{\omega}/2 \text{ и } q=e^{-\pi K'/K}=e^{-\pi}.$$

Так, например, функции H и Θ_1 Якоби выражаются через функции P и Q Гаусса по формулам

$$\mathrm{H}(\overline{\omega}\psi)=2^{1/4}\sqrt{\frac{\overline{\omega}}{\pi}}P(\overline{\omega}\psi),\qquad \Theta_1(\overline{\omega}\psi)=2^{1/4}\sqrt{\frac{\overline{\omega}}{\pi}}Q(\overline{\omega}\psi).$$

Мы остановились с такими подробностями на открытых Гауссом свойствах лемнискатических функций для того, чтобы показать, что вывод этих свойств не требовал предварительной разработки основ теории функций комплексного переменного и, в частности, интегрирования в комплексной плоскости. Все богатство фактов, найденных Гауссом в этой области, было добыто средствами, обычными для аналитиков XVIII в., и не выходило за строй привычных для них представлений. Это относится и к рассмотрению комплексных значений аргументов, и к получению и использованию теоремы сложения, и к технике операций над степенными рядами (включая обращение рядов), где широко использовался метод неопределенных коэффициентов, и к разложению функций в бесконечные произведения. Вместе с тем из изложенного явствует, что Гаусс для частного случая лемнискатических функций разработал на исходе XVIII в. все основное содержание позднейшей теории эллиптических функций (не хватает

[21] Ibid., S. 415.

только общих свойств, присущих всем функциям с фиксированными периодами, и общей теории преобразования эллиптических функций). К сожалению, Гаусс не опубликовал эти свои открытия, оставив их в незавершенном, большей частью черновом виде, так же как и почти все результаты, полученные им в теории эллиптических функций. Поэтому исторически заслуга построения основ теории эллиптических функций остается за Абелем и Якоби, получившими свои результаты на четверть века позднее Гаусса.

Если в построении теории лемнискатических функций Гаусс исходил из аналогии с тригонометрическими функциями, то дальше, развивая основы теории эллиптических функций, он руководствовался аналогией с лемнискатическими функциями [22]. Так, например, в ноябре 1799 г. он рассматривает общий эллиптический интеграл первого рода

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+\mu^2x^2)(1-x^2)}} = u$$

(случаю лемнискаты соответствует $\mu^2 = 1$) и пишет явное выражение обратной функции $x = S(u)$, которую он называет «универсальнейшим лемнискатическим синусом». Функцию эту он выражает и в виде разложения в тригонометрический ряд, и в виде отношения двух целых периодических функций. При этом он опирается также на введенное им еще на самых ранних порах занятий математикой (с 1791 г.?) арифметико-геометрическое среднее. Для двух чисел a и b ($a > b > 0$) оно определяется как общий предел двух последовательностей

$$a^{(n)} = (a^{(n-1)} + b^{(n-1)})/2, \qquad b^{(n)} = \sqrt{a^{(n-1)}b^{(n-1)}} \qquad (n \geqslant 1)$$

при $a^{(0)} = a$ и $b^{(0)} = b$. Обозначая его через $M(a, b)$, Гаусс около 1800 г. применяет это среднее к вычислению полного эллиптического интеграла:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{M(1+x, 1-x)}.$$

Иным путем эта связь выводится в позднейшей работе «Определение притяжения...» (Determinantio attractionis..., 1818) [23]. Чтобы вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2\sin^2 T}},$$

к которому он приходит, определяя вековое возмущение, оказываемое одной планетой на другую, Гаусс применяет преобразование

$$\sin T = \frac{2m\sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m\sin^2 T'},$$

[22] См. в связи с этим, а также ниже упоминаемым арифметико-геометрическим средним: *Schlesinger L.* C. F. Gauss: Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren 1797—1799. H. 2; Über Gauss'Arbeiten zur Funktionentheorie. H. 3.— In: Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Leipzig: Gesammelt von F. Klein und M. Brendel, 1912.

[23] *Gauss C. F.* Werke, Bd. 3, S. 333.

получившее впоследствии наименование преобразования Гаусса, и находит

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2\sin^2 T}} = \int_0^{2\pi} \frac{dT'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2 T' + n'^2\sin^2 T'}},$$

где $m' = {}^1/_2(m+n)$ и $n' = \sqrt{mn}$. Неограниченно повторяя это преобразование, Гаусс получает (в пределе, когда коэффициенты при квадратах косинуса и синуса обращаются в $M(m, n)$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2\sin^2 T}} = \frac{1}{M(m, n)}.$$

Аналогичный прием он использует и для вычисления эллиптического интеграла второго рода:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 T - \sin^2 T}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2\sin^2 T}}\, dT.$$

Это единственные результаты Гаусса, относящиеся к эллиптическим интегралам (и функциям), опубликованные при жизни. С точки зрения обеспечения приоритета выбор Гауссом материала для публикации вряд ли можно признать удачным. В самом деле, он пал на результаты, по существу не новые, опубликованные Лагранжем еще в 1784—1785 гг. [24], тогда как основное богатство открытий Гаусса, предвосхищавших работы Абеля и Якоби, о которых говорится далее, продолжало оставаться под спудом.

Как Гаусс отнесся впоследствии к первым публикациям своих невольных «соперников» в области теории эллиптических функций? После того как осенью 1827 г. в журнале Крелле появилась первая часть «Исследований по эллиптическим функциям» (Recherches sur les fonctions elliptiques) Абеля, Гаусс 30 марта 1828 г. писал Бесселю: «К обработке исследований о трансцендентных функциях, ведущихся уже много лет (с 1798 г.), я, пожалуй, пока не смогу приступить, так как сначала должен разделаться с многими другими вещами. Г-н Абель, как я вижу, предупредил меня теперь и облегчил мой труд примерно на одну треть этих вещей, тем более, что он провел все выкладки элегантно и кратко. Он избрал совершенно тот же путь, который я проложил в 1798 г., поэтому неудивительно большое совпадение результатов. К моему удивлению, это распространяется также и на форму и отчасти на выбор обозначений, так что многие его формулы кажутся точной копией моих. Во избежание всякого недоразумения я отмечаю, однако, что я не помню, чтобы я когда-нибудь делился этими вещами с кем бы то ни было» [25].

Если Гаусс выделяет здесь эллиптическим функциям лишь третью долю в своих исследованиях по трансцендентным функциям, то остальные две трети следует отнести к теории арифметико-геометрических средних с зачатками теории модулярных функций (о чем будет сказано в соответствующем месте) и теории гипергеометрических функций.

---

[24] *Lagrange J. L.* Oeuvres, 1869, t. 2, p. 253 (и далее, в особенности с. 271—274).
[25] *Gauss C. F.* Werke, Bd. 10 (1), S. 248—249.

Гипергеометрические функции

Гипергеометрический ряд

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

впервые встречается в несколько более общем виде в XI главе II тома «Интегрального исчисления» Эйлера (1769), где устанавливается, в частности, что интеграл

$$\int\limits_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}\,du$$

разлагается в ряд вида

$$B(b, c-b)\left[1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\ldots\right]$$

($B(b, c-b)$ — эйлеров интеграл первого рода) и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1-x)\,d^2y+[c-(a+b+1)x]dydx-abydx^2=0$$ (гипергеометрическое дифференциальное уравнение).

В главе VIII того же тома рассматривается и более общее уравнение

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y+x(c+ex^n)\,dydx+(f+gx^n)ydx^2=0,$$

решение которого также ищется в виде степенного ряда. Последнее уравнение в неоднородном случае изучал учитель и друг Гаусса И. Пфафф (1765—1825) в своих «Аналитических исследованиях...» (Disquisitiones analyticae..., VI. Helmstadt, 1797). Пфафф интересовался случаями интегрируемости уравнения в квадратурах. Гипергеометрическому ряду в его книге посвящена отдельная глава, причем здесь впервые термин «гипергеометрический» применяется в указанном выше смысле.

Сам Гаусс с частным и притом нетривиальным случаем гипергеометрического ряда столкнулся в связи с арифметико-геометрическим средним уже около 1800 г. Именно к этому времени он получил разложение

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)}=1+\sum_1^\infty\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}\right]^2x^{2k},$$

являющееся, очевидно, частным случаем гипергеометрического ряда (при $\alpha=\beta={}^1/_2$, $\gamma=1$ и замене x на x^2). Тождество этого ряда с разложением эллиптического интеграла $\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}}$ и убедило его в соотношении, которое мы приводили выше. Тогда же он заметил, что сумма ряда удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^3-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(3x^2-1)\frac{dy}{dx}+xy=0$$

и что гипергеометрическими рядами выражаются также коэффициенты тригонометрического разложения функции $(a^2+a'^2-2\,aa'\cos\varphi)^{-1/2}$, играющей важную роль в теории планетных возмущений.

В письме к Бесселю от 3 сентября 1805 г. [26] Гаусс сообщает, что он располагает искусственными средствами, основанными частично на совсем,

[26] Ibid., S. 237—248.

казалось бы, посторонних изысканиях (вероятно, имеется в виду исследование арифметико-геометрического среднего), позволяющими весьма быстро вычислять нужные коэффициенты. Приводимые им подробности показывают, что Гаусс не позднее 1805 г. исходя из потребностей астрономических вычислений рассматривал суммы гипергеометрического ряда при одном и том же x, $\alpha = 1/2$ и разных, отличающихся лишь на целые числа значениях β и γ. При этом он использовал для вычисления отношений сумм двух гипергеометрических рядов непрерывные дроби.

Все эти вопросы развивались и обобщались Гауссом в последующие годы. Систематическое выражение они нашли в «Первой части общих исследований о бесконечном ряде

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\,\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3\ldots\text{»}$$

(1813; см. выше). В автореферате этой работы [27] Гаусс отмечал, что едва ли можно назвать какую-либо изучавшуюся аналитиками трансцендентную функцию, которую нельзя было бы свести к этому ряду, и что данная публикация является вводной по отношению к ряду других работ, содержащих результаты исследования высших трансцендентных функций. Эта работа имеет также особое значение в истории математического анализа как первый пример детального исследования сходимости определенного класса степенных рядов на концах интервала сходимости.

Во введении Гаусс обозначает сумму ряда через $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (гипергеометрическая функция; впрочем он не пользуется этим термином). Далее он отмечает, что F симметрична относительно α и β, при α, β и γ фиксированных она является функцией одного только x. Если $\alpha - 1$ или $\beta - 1$ — целое отрицательное число, то она сводится к рациональной алгебраической; элементу γ нельзя придавать целые значения $\leqslant 0$, так как иначе появятся бесконечно большие члены.

Из рассмотрения отношения последующего члена к предыдущему выводится, что ряд сходится при $|x| < 1$ «если не с самого начала, то после определенного места [речь, очевидно, идет о монотонной сходимости модулей членов к нулю.— *А. М.*] и также приводит к определенной конечной сумме»; если $|x| > 1$, то ряд «если не с начала, то с определенного места расходится [модули членов монотонно стремятся к ∞.— *А. М.*], таким образом, его сумма не существует» [28]. Случай $x = 1$ рассматривается особо (см. ниже). Далее Гаусс дает различного вида выражения элементарных функций, а также коэффициентов разложения в тригонометрический ряд функции $(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^{-n}$ через гипергеометрические функции. Этим заканчивается введение.

Первый, самый короткий отдел статьи посвящен выводу линейных соотношений между $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$ и $F(\alpha'', \beta'', \gamma'', x)$, для которых все разности $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, $\alpha-\alpha''$, $\beta-\beta''$, $\gamma-\gamma''$ являются целыми числами. Выведенные соотношения применяются во втором отделе к разложению в непрерывные дроби отношений вида $F(\alpha', \beta', \gamma', x)/F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, где две из разностей $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ равны $+1$, а третья — нулю. Именно с таким случаем Гаусс, как об этом свидетельствует цитированное выше письмо к Бесселю, встретился в своих астрономических вычислениях. Гаусс не ставит вопроса о сходимости этих разложений, ограничиваясь формальным их выводом посредством повторного деления степенных рядов. Лишь Риман впоследствии доказал,

[27] Ibid., Bd. 3, S. 196—202.
[28] Ibid., Bd. 2.

что соответствующие непрерывные дроби сходятся во всей комплексной плоскости с разрезом от 1 до $+\infty$ вдоль положительной части действительной оси («К теории функций, представимых рядом Гаусса $F(a, b, c, x)$ (Beiträge zur Theorie der durch Gaussche Reihe $F(a, b, c, x)$ darstellbaren Funktionen, 1857)) [29].

Третий, самый обширный отдел труда Гаусса посвящен исследованию гипергеометрического ряда при α, β и γ действительных (как и во всей работе) и $x = 1$. Общий случай комплексных α, β, γ и точек окружности $|x| = 1$ был полностью изучен Вейерштрассом в статье «О теории аналитических факультетов» (Über die Theorie der analytischen Fäkültäten, 1856) [30].

Отметив, что все коэффициенты начиная с некоторого места положительны, Гаусс «со всей строгостью» «ради тех, кто благосклонен к строгим методам древних геометров», высказывает и доказывает следующие утверждения: 1) коэффициенты бесконечно возрастают (если ряд не обрывается), когда $\alpha + \beta - \gamma - 1 > 0$; 2) коэффициенты сходятся к конечному пределу, когда $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$; 3) бесконечно убывают, когда $\alpha + \beta - \gamma - 1 < 0$; 4) в этом случае [т. е. в случае 3). — *А. М.*] для сходимости суммы при $x = 1$ нет препятствий (summam seriei nostrae pro $x = 1$, non obstante convergentia in casu tertio), но если $\alpha + \beta - \gamma \geqslant 0$, то сумма эта равна ∞; 5) сумма, безусловно, конечна, когда $\alpha + \beta - \gamma < 0$ [31].

Для обоснования Гаусс рассматривает более общий случай ряда (последовательности) $M, M', M'', M''', \ldots$, для которого отношение последующего члена к предыдущему имеет вид

$$\frac{t^\lambda + At^{\lambda-1} + Bt^{\lambda-2} + \ldots}{t^\lambda + at^{\lambda-1} + bt^{\lambda-2} + \ldots}$$

для $t = m, m + 1, m + 2, \ldots$ Гаусс доказывает, что «сумма ряда $M + M' + M'' + M''' +$ и т. д., продолженная в бесконечность, наверное, будет конечной», если только $A - a < -1$; в противном случае, который он расчленяет на подслучаи, ряд расходится (в современном понимании этого термина). Таким образом, здесь мы имеем полностью доказанный *критерий Гаусса сходимости рядов*, которому, впрочем, сам Гаусс придает столь мало значения, что не включает его в обстоятельный немецкий реферат статьи, написанной по-латыни. Там говорится лишь (и то мимоходом), что с геометрической строгостью доказано, что ряд при $x = 1$ только тогда сходится к конечной сумме, когда $\gamma - \alpha - \beta > 0$.

Опираясь на результаты проведенного им исследования коэффициентов гипергеометрического ряда в зависимости от параметров α, β, γ, Гаусс устанавливает при $\gamma - \alpha - \beta > 0$ формулу

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\,\Pi(\gamma - \beta - 1)},$$

где $\Pi(z)$ не что иное, как эйлеровская гамма-функция $\Gamma(z + 1)$. Заметим, что при выводе этого соотношения Гаусс неоднократно использует почленный предельный переход в степенном ряде в конечной точке интервала сходимости. По-видимому, Гаусс считает, что такой переход не требует обоснования. Фактически обоснование (вторая теорема Абеля) дал впервые Абель в 1826 г. (см. выше).

---

[29] *Риман Б.* Сочинения, с. 159—175.
[30] *Weierstrass K.* Mathematische Werke. Berlin, 1894, Bd. 1, S. 153—221.
[31] *Gauss C. F.* Werke, Bd. 3.

Функцию $\Pi(z)$ $(=\Gamma(z+1))$ Гаусс определяет как предел произведения

$$\Pi(z)=\lim_{k\to\infty}\Pi(k, z)=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}{(z+1)(z+2)\ldots(z+k)}k^z.$$

В виде такого же предела Эйлер определил $z!$ для любого z еще в 1729 г. в письме к Гольдбаху. Но ни тогда, ни позже он не доказывал сходимости произведения. Гаусс только намечает обоснование сходимости, записывая разность $\ln\Pi(h+n, z)-\ln\Pi(h, z)$ (h и n — натуральные числа) в виде

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z}{k}[1+(-1)^k z^{k-1}]\left[\frac{1}{(h+1)^k}+\frac{1}{(h+2)^k}+\ldots+\frac{1}{(h+n)^k}\right]$$

(мы пользуемся здесь современным способом записи). Он утверждает, что легко доказать, что это приращение «всегда остается конечным, когда n бесконечно возрастает» [32], т. е. что оно стремится к конечному пределу. Учитывая, что Гаусс только что совершал почленный предельный переход в степенном ряде (при условии сходимости последнего) как нечто само собой разумеющееся, можно не сомневаться в том, что и здесь он имел в виду лишь доказательство сходимости ряда, получающегося путем замены конечных сумм в квадратных скобках соответствующим бесконечным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(h+n)^k}.$$

Функцию $\Pi(z)$ Гаусс записывает также в виде бесконечного произведения

$$\Pi(z)=\frac{1}{z+1}\,\frac{2^{z+1}}{1^z\cdot(2+z)}\,\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)}\cdots;$$

аналогичная запись для $z!$ приводится в упомянутом письме Эйлера и в его «Дифференциальном исчислении»:

$$m!=\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\,\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\,\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdots$$

Оставшаяся часть статьи Гаусса посвящена изучению функции $\Pi(z)$ и ее приложениям к вычислению интегралов. В частности, Гаусс вводит и исследует функцию

$$\Psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Pi(z).$$

Относительно $\Pi(z)$ Гаусс пишет в автореферате: «Эта в высшей степени важная для всякого анализа функция есть в сущности не что иное, как эйлеровская невыразимая (inexplicable) функция $\Pi(z)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot z$; однако этот способ порождения или определения, по суждению автора, никак недопустим, так как он имеет ясный смысл только для целых положительных значений z. Избранный автором способ обоснования применим в общих условиях и сам имеет для мнимых значений z такой же ясный смысл, как и для действительных...» [33]. Это место, так же как и другое, где Гаусс отмечает выражение интеграла $\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x^\mu)^\nu dx$ (эйлерова ин-

[32] Ibid.
[33] Ibid.

теграла первого рода) через гамма-функцию в качестве нового результата, свидетельствует о том, что Гаусс в то время недостаточно знал давно уже опубликованные результаты Эйлера и, во всяком случае, неправильно оценивал его роль в создании и разработке элементов теории гамма-функции.

Рассмотренная работа имела продолжение: «Определение нашего ряда посредством дифференциального уравнения второго порядка» (Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis), опубликованное только посмертно, в 1866 г.[34]

Здесь гипергеометрическое дифференциальное уравнение получается сразу же как частный случай линейных соотношений второго отдела основной статьи: если $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P$, то

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x)$$

и

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 2, x).$$

Гаусс рассматривает пребразования независимого переменного x и функции P, посредством которых гипергеометрическое уравнение преобразуется само в себя (с другими значениями α, β и γ). Так, он вводит преобразование $y = 1-x$, позволяющее найти наряду с $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ второй независимый интеграл того же уравнения $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$ и записывать общий интеграл в виде

$$MF(\alpha, \beta, \gamma, x) + NF(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$

где M и N — произвольные постоянные. Преобразование $P = (1 - x)^{\mu}P'$, указанное ранее Эйлером, дает при $\mu = \gamma - \alpha - \beta$

$$F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Аналогичное преобразование $P = x^{\mu}P'$ при $\mu = 1 - \gamma$ приводит к соотношению

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x) +$$
$$+ \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x).$$

Последнее позволяет сводить вычисление суммы гипергеометрического ряда в интервале (0,5; 1),где сходимость медленная, к интервалу (0; 0,5), где она быстрее. Но полученная формула непригодна в случае, когда $\alpha + \beta - \gamma$ — целое число, так как тогда в нее входит не имеющий смысла гипергеометрический ряд с целым неположительным третьим элементом и бесконечные значения функции П. Эту трудность Гаусс обходит, используя известный в теории линейных дифференциальных уравнений прием Даламбера. Найденный результат он применяет к вычислению $F(^1/_2, {}^1/_2, 1, 1 - x)$, в котором мы узнаем $1/M(1, \sqrt{x})$. Получается

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x\right) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{16}x\right)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) + \frac{1}{2}x + \frac{21}{64}x^2 + \frac{185}{768}x^3 + \ldots\right],$$

[34] Ibid., S. 207—229.

соотношение, содержание которого в терминах арифметико-геометрического среднего Гаусс получил еще в 1799 г., когда он не владел еще теорией гипергеометрических функций. Замечательно, что Гаусс объясняет одно из выведенных в этой работе соотношений, кажущееся противоречивым, многозначностью гипергеометрической функции, понимаемой теперь не как сумма гипергеометрического ряда, где определение ограничивалось условием сходимости степенного ряда при $|x| < 1$, а как решение гипергеометрического уравнения, рассматриваемое вообще для любых значений x. При этом Гаусс явно ссылается на обход переменного x, принимающего как действительные, так и мнимые значения, вокруг точек 0 и 1. Это объяснение согласуется с теми сведениями о природе многозначности функций комплексного переменного, которые Гаусс сообщал Бесселю в своем письме от 19 декабря 1811 г. (см. выше, с. 122).

Фактическое изучение гипергеометрических функций $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ как функций комплексного переменного x, которое можно бы проводить, опираясь на эйлеровское интегральное представление

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = B^{-1}(\beta, \gamma - \beta) \int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}\,dz$$

(нигде явно не используемое Гауссом), требовало, однако, значительно более глубокой и детальной разработки основ теории функций комплексного переменного, чем та, которой располагал Гаусс. Именно поэтому систематическое исследование теории гипергеометрических функций не было им продолжено и даже вторая часть работы, о которой только что шла речь, не была завершена. Только после трудов Э. Куммера, К. Вейерштрасса, Б. Римана, Л. Фукса, Г. А. Шварца и Ф. Клейна последнему удалось в своих посмертно опубликованных «Лекциях о гипергеометрической функции» (1893—1894; Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Berlin, 1933) выполнить синтез аналитической и геометрической части теории и более того — фактически осуществить замысел Гаусса о создании капитального труда, охватывающего все результаты и методы Гаусса, относящиеся к трансцендентным функциям.

Однако развитие теории гипергеометрических функций на этом не закончилось. Гипергеометрические функции были обобщены в трудах П. Аппеля для случая многих комплексных переменных и в таком виде получили и продолжают получать многочисленные применения в задачах математической физики.

Первый подход к модулярным функциям

Еще в 1794 г., когда Гауссу было всего 17 лет, он рассматривал в связи с изучением арифметико-геометрического среднего степенные ряды вида

$$P(x) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots,$$
$$Q(x) = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \ldots,$$
$$R(x) = 2x^{1/4} + 2x^{9/4} + 2x^{25/4} + \ldots \quad (|x| < 1).$$

Они представляют собой так называемые нулевые тэта-ряды, формально получающиеся из тригонометрических разложений тэта-функций Якоби: θ_1, θ, H_1, если в последних положить аргумент равным нулю и величину $q = e^{-\pi k'/k}$ обозначить через x. Подобные ряды встречались до Гаусса в работах Якова и Даниила Бернулли и Эйлера. Что именно было известно о них Гауссу в 1794 г., сейчас нельзя установить. Мы воспользуемся его значительно более поздним изложением, написанным не ранее 1818 г. и предназначавшимся, по-видимому, для опубликования. Это «Сто теорем о новых трансцендентных» (Hundert Theorem über die neuen Transcendenten) [35]. Гаусс устанавливает здесь следующие тождества:

$$P^2(x) + Q^2(x) = 2P^2(x^2), \qquad Q^2(x^2) = P(x)\,Q(x), \tag{7}$$

$$P(x^2)\,R(x^2) = {}^1/_2\,R^2(x), \qquad P^4(x) - Q^4(x) = R^4(x). \tag{8}$$

Из формул (7) следует, что $P^2(x^2)$ есть среднее арифметическое между $P^2(x)$ и $Q^2(x)$, а $Q^2(x^2)$— среднее геометрическое между теми же функциями. Поэтому если положить $P^2(x) = m$, $Q^2(x) = n$, $m^{(k)} = (m^{(k-1)} + n^{(k-1)})/2$, $n^{(k)} = \sqrt{m^{(k-1)}\,n^{(k-1)}}$, $m^{(0)} = m$, $n^{(0)} = n$, то применение алгорифма арифметико-геометрического среднего дает

$$m' = (m+n)/2 = P^2(x^2), \qquad n' = \sqrt{mn} = Q^2(x^2), \ldots,$$

$$m^{(k)} = P^2(x^{2^k}), \qquad n^{(k)} = Q^2(x^{2^k}), \ldots,$$

откуда

$$M(m, n) = \lim_{k\to\infty} P^2(x^{2^k}) = \lim_{k\to\infty} Q^2(x^{2^k}) = 1 \quad (|x| < 1).$$

Если теперь m и n — любые положительные числа, причем $m > n$ и $M(m, n) = \mu$, то естественно поставить вопрос об отыскании такого x, чтобы было $m = \mu P^2(x)$, $n = \mu Q^2(x)$. Тогда

$$Q^2(x)/P^2(x) = n/m \tag{9}$$

и вопрос сводится к решению последнего уравнения относительно x.

Чтобы разъяснить, почему функция $Q^2(x)/P^2(x)$ впоследствии получила название *модулярной*, обратимся к терминологии и обозначениям Якоби. Пусть

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

— эллиптический интеграл первого рода. Параметр k ($\neq 0$, $\neq 1$) называется *модулем интеграла*, а $k' = \sqrt{1-k^2}$ — *дополнительным модулем*. Обращение интеграла — гауссов «универсальнейший лемнискатический синус» представляет здесь эллиптический синус Якоби $w = \operatorname{sn}(z; k)$. За его основные периоды могут быть приняты $4K$ и $2iK'$, где K и K' — полные эллиптические интегралы с модулями k и k' соответственно:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

При этом значения корней под знаком интеграла выбираются так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re}(K'/K) > 0$ (если $k^2 < 1$, то, очевидно, достаточно брать положительные значения корня в обоих интегралах). Из соотношений между арифметико-геометрическим средним и эллиптическими интегралами первого рода, установленных около 1800 г., следует, что корни x уравнения (9) имеют вид $x = e^{-\tau}$, где

$$\tau = K'/K \text{ и } k^2 = (m^2 - n^2)/m^2, \text{ т. е. } k' = n/m.$$

---

[35] *Gauss C. F.* Werke, Bd. 3, S. 461—469.

Итак, функция $[Q(x)/P(x)]^2$, рассматриваемая как функция τ, является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re}\tau > 0$; она выражает значение модуля (дополнительного) функции $\operatorname{sn}(z; k)$ Якоби и потому может быть названа модулярной.

Задача изучения всех решений уравнения (9) для произвольно заданного n/m ($= k'$) совпадает, следовательно, с задачей изучения распределения значений одной из простейших модулярных функций. И Гаусс действительно занимается такой задачей. Так, в отрывках, относящихся к 1827 г., он высказывает следующую теорему:

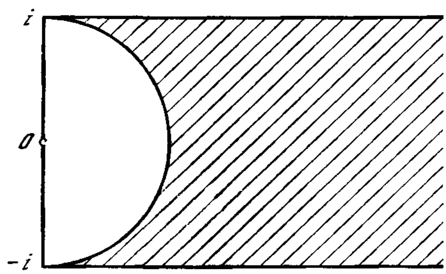


Рис. 13

«Если мнимые части t и $1/t$ содержатся между $-i$ и $+i$, то действительная часть $Q^2(t)/P^2(t)$ положительна» [36].

При этом $Q(t)$ и $P(t)$ — здесь значения прежних функций $Q(x)$ и $P(x)$ при $x = e^{-\pi t}$, так что функции эти рассматриваются в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$. Формулировка Гаусса сопровождается чертежом, на котором представлена область комплексной плоскости, занимаемая значениями t, удовлетворяющими условиям теоремы (рис. 13).

К мысли о существовании многих, бесконечно многих решений уравнения (9), соответствующих данному значению n/m, Гаусс пришел еще в 1800 г. Судя по позднейшим заметкам (1825), речь идет о том, что при вычислении средних геометрических в алгорифме арифметико-геометрических средних можно брать либо то либо другое из двух значений квадратного корня. Соответственно этому находим у него следующее утверждение:

«Чтобы решить уравнение $Q(t)/P(t) = A$, полагают $A^2 = n/m$ и ищут арифметико-геометрическое среднее между m и n; пусть оно равно μ. Ищут далее арифметико-геометрическое среднее между m и $\sqrt{m^2 - n^2}$ или, что является тем же самым, между $m + n$ и $m - n$, пусть оно равно λ. Тогда имеют $t = \mu/\lambda$. Так получается только одно значение t; все прочие заключаются в формуле $\frac{\alpha t - 2\beta i}{\delta - 2\gamma t i}$, где α, β, γ и δ обозначают все целые числа, удовлетворяющие уравнению $\alpha\delta - 4\beta\gamma = 1$» [37].

Этот результат, как замечает Фрике [38], не точен: подмеченная Гауссом закономерность фактически относится к корням более общего уравнения $Q^4(t)/P^4(t) = A^4 = n^2/m^2$. Однако для нас существенно то, что Гаусс, неизменно опираясь на свой алгорифм арифметико-геометрического среднего, постепенно пришел к открытию основного свойства введенной им модулярной функции: *инвариантность относительно некоторой специальной группы дробно-линейных автоморфизмов области ее определения.*

Дальнейшее развитие математики привело как в отношении теории модулярной функции, так и в отношении теории эллиптических функций к сходным результатам: в определении того и другого класса исторические истоки полностью устраняются, остаются только самые общие характеристические свойства. А именно модулярная функция $\varphi(t)$ стала определяться как функция аналитическая в полуплоскости (удобнее гово-

[36] Ibid., S. 477—478.
[37] Ibid., Bd. 8, S. 101.
[38] Ibid., S. 105.

рить о верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$), инвариантная относительно некоторой подгруппы группы линейных автоморфизмов: $t' = (\alpha t + \beta) \times \times (\gamma t + \delta)^{-1}$, где α, β, γ и δ — целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; эллиптическая же функция $f(z)$ — как функция, мероморфная в плоскости, инвариантная относительно группы преобразованной вида $z' = z + m\omega_1 + n\omega_2$, где m и n — всевозможные целые числа, а ω_1 и ω_2 — *периоды*, два комплексных числа, отношение которых не есть число действительное.

Степенные ряды. Исчисление пределов

В «Алгебраическом анализе» (1821), где Коши обстоятельно излагает теорию пределов и основанную на ней теорию рядов и элементарных функций, содержится, в частности, исследование степенных рядов

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

в которых x принимает не только действительные, но и мнимые значения. Коши устанавливает, что такой ряд будет сходиться или расходиться в зависимости от того, будет ли модуль x меньше или больше числа

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Конечно, у Коши нет определения верхнего предела и соответствующего символа. Но, как уже говорилось, он прямо говорит о наибольшем из пределов числа $\sqrt[n]{a_n}$. Обозначая его через A, Коши вводит это число в формулировку теоремы [39].

Теорема эта (теорема Коши — Адамара) (Адамар вновь сформулировал ее и доказал в докторской диссертации 1892 г., из которой следует, в частности, что для x действительного ряд сходится внутри интервала $(-\rho, \rho)$ и расходится вне этого интервала), полностью выясняет область сходимости степенного ряда.

Вопрос о разложении функций в степенные ряды впервые в истории анализа получает правильное освещение в лекциях 36—38 «Краткого изложения лекций по исчислению бесконечно малых» (1823, т. 1). Какое значение Коши придавал этому вопросу, показывает отрывок из его предисловия к этой книге, воспроизведенный им позднее слово в слово в предисловии к «Лекциям по дифференциальному исчислению» (1829). Он будет приведен в соответствующем разделе третьей книги нашего труда.

Эстафету в изучении степенных рядов из рук Коши принимает Абель. В 1826 г. в первом томе журнала Крелле появляется его «Исследование о ряде $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 +$ и т.д.». Задача Абеля — «найти сумму ряда

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{ и т.д.}$$

для всех действительных или мнимых x, для которых ряд сходится». При этом Абель допускает, что m является произвольным, вообще комплексным числом. Эту задачу он решает исчерпывающим образом. В качестве предварительных теорем устанавливаются некоторые важные предложения, имеющие значение не только для общей теории рядов, но и в осо-

[39] *Cauchy A. L.* Oeuvres complètes, sér. 2, t. 3, p. 239—240.

бенности для последующего развития начал теории аналитических функций.

Теорема IV этой классической работы гласит:

«Если ряд $f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2\alpha^2 + \ldots + v_m\alpha^m + \ldots$ сходится для определенного значения α, равного δ, то он сходится также для всякого меньшего значения α, и для постоянно убывающих значений β функция $f(\alpha - \beta)$ неограниченно приближается к пределу $f(\alpha)$ в предположении, что α равно или меньше δ». Эта теорема распадается на два предложения, объединенных союзом «и». Первое из них называется обычно первой теоремой Абеля, второе, утверждающее, что сумма сходящегося степенного ряда есть непрерывная (слева) функция аргумента, называется второй теоремой Абеля. Мы видели выше, что даже Гаусс опирался на это утверждение, как самоочевидное.

В 1831 г. Коши получает теорему существования разложения функции комплексного переменного в степенные ряды. Теорема эта гласит: «Функция разлагается по формуле Маклорена в сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням x, если модуль действительной или мнимой переменной x сохраняет значение, меньшее того, для которого функция перестает быть конечной или непрерывной. Пусть X — это последнее значение или значение меньшее и $\bar{x}$ — мнимое выражение, модуль которого есть X. Модули общего члена и остатка ряда Маклорена будут соответственно меньше модулей общего члена и остатка геометрической прогрессии, имеющей сумму

$$\frac{X}{X-x} \Lambda f(\bar{x})\text{»}^{40}.$$

Здесь $\Lambda f(\bar{x})$ обозначает «предел модуля $f(\bar{x})$» при фиксированном модуле $|\bar{x}| = X$ (или, как скажем мы теперь, верхнюю грань $|f(\bar{x})|$ в точках окружности $|\bar{x}| = X$). Теорема эта устанавливает не только простейший критерий разложимости функции в степенной ряд, т. е. аналитичности функции, но и дает мажоранту разложения в виде геометрической прогрессии, что чрезвычайно важно для всех применений степенных рядов. Существенно подчеркнуть, что указанные мажоранты и соответствующая оценка остаточного члена степенного ряда дают исследователю гораздо больше, чем простая констатация равномерной сходимости степенного ряда в каждом круге, концентрическом с кругом сходимости и имеющем радиус, меньший радиуса сходимости. Иными словами, Коши своей теоремой как бы снял вопрос о равномерной сходимости для степенных рядов [41], предложив для нее простую количественную характеристику.

Для доказательства своей теоремы Коши, используя основное соотношение (5), представляет $f(x)$ в виде интеграла

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x} dp \qquad (\bar{x} = X e^{p\sqrt{-1}}),$$

получившего впоследствии название интеграла Коши.

После этого ему остается только разложить дробь $\frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} = \frac{1}{1 - x/\bar{x}}$ в геометрический ряд (пользуясь тем, что $|x/\bar{x}| < 1$) и, подставив этот ряд под знак интеграла, интегрировать его почленно. В результате он прихо-

[40] *Cauchy A.* Exercices. Paris, 1841, t. 2, p. 54—55. Эта теорема и некоторые примыкающие результаты были опубликованы в литографированном виде в 1832 г., о чем говорится несколько далее.

[41] О введении понятия равномерной сходимости будет идти речь в Кн. 3.

дит к требуемому разложению, причем из самого способа получения разложения обнаруживается и мажоранта ряда в виде геометрической прогрессии.

Для правильного применения этой теоремы необходимо иметь в виду, что Коши был убежден в существовании и непрерывности производной от функции $f(x)$, хотя сначала и не оговаривал этого в условии теоремы. Причины этого уже рассматривались ранее по поводу формулировки условий интегральной теоремы Коши в ее первоначальном виде. Здесь нужно подчеркнуть, что условия непрерывности и дифференцируемости должны выполняться для функции $f(x)$, рассматриваемой как функция комплексного переменного. Все это Коши разъясняет на примерах. Функции $\cos x$, $\sin x$, e^x, e^{x^2}, $\cos(1-x^2)$, ... являются непрерывными (и дифференцируемыми) для любого комплексного x. Поэтому они разлагаются в ряд по степеням x, всюду сходящийся. Функции $(1+x)^{1/2}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ перестают, по Коши, быть непрерывными при некотором значении x, равном по модулю единице. Для нас достаточно заметить, что производная от первой функции обращается в бесконечность при $x=-1$ (Коши считает и саму функцию $(1+x)^{1/2}$ разрывной в этой точке в силу невозможности выделения однозначной и непрерывной ветви этой функции в окрестности точки $x=-1$); вторая функция сама обращается в бесконечность при $x=1$; для третьей же функции производная, равная $\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}$, обращается в ∞ при $x=\pm 1$ (снова Коши считает разрывной в этих точках саму функцию); $\ln(1+x)$ становится разрывным при $x=-1$; наконец, производная от $\operatorname{arctg} x$, равная $1/(1+x^2)$, обращается в бесконечность при $x=\pm i$ (Коши, ограничивающийся исследованием самой функции, а не ее производной, выражает $\operatorname{arctg}(\pm X\sqrt{-1})$ через логарифмы

$$\operatorname{arctg}(\pm X\sqrt{-1})=\frac{\ln(1\mp X)-\ln(1\pm X)}{2\sqrt{-1}},$$

откуда и заключает, что $\operatorname{arctg} x$ терпит разрыв при $X=1$, т. е. при $x=\pm\sqrt{-1}$). Отсюда по теореме Коши следует, что степенной ряд для всех этих функций будет сходиться только для $|x|<1$. Наконец, функции $e^{1/x}$ разрывны уже в самом начале координат. Поэтому эти функции невозможно представить сходящимся рядом, расположенным по неотрицательным степеням x.

Результаты эти были получены Коши в 1831—1832 гг.; сначала сообщены Туринской академии на заседании 11 октября 1831 г., а затем и опубликованы в литографированном виде в Турине в 1832 г. Обо всем этом Коши извещает читателей своих «Упражнений» (т. 1, 1840 и т. 2, 1841), где он воспроизводит указанные результаты с доказательствами в статьях: «Заметка об интегрировании дифференциальных уравнений движений планет» (Note sur l'intégration des équations differentielles des mouvementes planétaires. Exercices, 1840, t. 1, p. 27—32), «Краткое изложение мемуара о небесной механике и новом исчислении, называемом исчислением пределов» (Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. Exercices, 1841, t. 2, p. 41—49), «Формулы для разложения функций в ряды» (Formules pour le développement de fonctions en séries.— Ibid., p. 50—96). Именно последняя статья и представляет литографированный туринский мемуар 1832 г., вернее извлечение из него. Однако в своих формулировках он вводит на этот раз дополнительное условие непрерывности не только самой функции, но и ее производной.

Эту поправку Коши ввел после спора с Лиувиллем (которому он сообщил свой результат в письме от 27 января 1837 г., опубликованном в «Comptes rendus») и Стюрмом. Именно в первой фразе приведенной выше формулировки Коши вместо слов «функция перестает быть конечной или непрерывной» пишет теперь: «Функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ перестают быть конечными и непрерывными» [42]. Отметив, что во всех примерах функция и ее производная становятся бесконечными или разрывными для одного и того же значения x, Коши прибавляет: «Если быть уверенным в том, что это всегда так, то в высказанной теореме можно освободиться от упоминания о производной, но так как на этот счет нет достаточной уверенности, то будет более строгим выражать теорему в терминах, которыми мы пользовались выше» [43]. Впоследствии в 1851 г. Коши снова снимает требование непрерывности производной, считая его излишним.

Отсутствие ясности и четкости в формулировках Коши и в его доказательствах обратило на себя внимание П. Л. Чебышева. В небольшой «Заметке о сходимости ряда Тейлора» (Note sur la convergence de la série de Taylor.— J. für Math., 1844, 28, S. 279—283) он отмечает между прочим: «Коши полагает, будто значение определенного интеграла разложимо в сходящийся ряд, когда дифференциал между пределами интегрирования может быть разложен в сходящийся ряд; это имеет место только в частных случаях» [44]. Таким образом, здесь П. Л. Чебышев указывает на недопустимость интегрирования рядов без специального обоснования законности такой операции. Добавим, что в случае степенных рядов законность почленного интегрирования сразу следует из двух общих результатов самого Коши: общего признака существования предела (критерий Коши) и установленной им мажоранты степенного ряда в виде сходящейся геометрической прогрессии.

В цитированном «Кратком изложении мемуара о небесной механике...» и некоторых других работах Коши называет «исчислением пределов» не только условия сходимости степенных рядов для функций явных и неявных одной или нескольких переменных (важнейшее из них дает теорема, приведенная выше), но и способы оценки их остаточных членов. По сути дела само «исчисление пределов» сводится к правилам для оценки сверху модуля функции комплексного переменного в точках произвольной окружности комплексной плоскости. Как указывалось выше, пределом модуля функции $f(\bar{x})$, где $\bar{x} = Xe^{p\sqrt{-1}}$, Коши называет величину

$$\Lambda f(x) = \max_{|\bar{x}|=X} |f(x)|.$$

Вот некоторые из простейших формул «исчисления пределов» (a — положительное число):

$$\Lambda(a+\bar{x}) = \Lambda(a-\bar{x}) = a+X, \quad \Lambda(a\bar{x}) = aX, \quad \Lambda(a/x) = a/X,$$
$$\Lambda e^{\bar{x}} = \Lambda e^{-\bar{x}} = \Lambda e^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda e^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = e^X,$$
$$\Lambda \sin\bar{x} = {}^1/_2\,|e^X - e^{-X}|, \quad \Lambda\cos\bar{x} = {}^1/_2\,(e^X + e^{-X}).$$

Как ни элементарны они с нашей точки зрения, все же введение в практику анализа подобных соотношений было необходимым условием дальнейшего

---

[42] *Cauchy A. L.* Exercices, 1840, t. 1, p. 29.
[43] Ibid., c. 32.
[44] *Чебышев П. Л.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, т. 2, с. 13.

освоения математиками поведения аналитических функций в комплексной плоскости.

Мы уже отмечали, что исчисление пределов для Коши не являлось самоцелью. Оно понадобилось ему для использования фундаментальной закономерности, содержащейся в его теореме о разложении функции в степенной ряд: каждый степенной ряд мажорируется некоторой геометрической прогрессией, оценка остаточного члена которой сводится к оценке «предела» функции. Коши применяет исчисление пределов к доказательству сходимости степенных рядов, формально получавшихся посредством метода неопределенных коэффициентов, для разложения неявных функций (в частности, алгебраических) и решений дифференциальных уравнений как одного, так и нескольких переменных. Развитие этого метода привело впоследствии С. В. Ковалевскую к общей теореме существования интегралов системы дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими правыми частями.

В работах, посвященных исчислению пределов и его применению к решению функциональных уравнений, Коши заложил также основы теории аналитических функций многих переменных. Он показал, что коэффициенты степенных рядов, их представляющих, а также остаточные члены этих рядов выражаются и оцениваются формулами, аналогичными случаю одного переменного, и задолго до Вейерштрасса получил существенную часть фундаментальной теоремы теории аналитических функций многих переменных, так называемой подготовительной теоремы (см. цитированную выше статью Коши «Формулы для разложения функций в ряды» (Exercices, 1841, t. 2, p. 41 и далее)).

В начале 40-х годов были выполнены первые работы К. Вейерштрасса по теории функций. Он их не опубликовал своевременно, и они увидели свет впервые в 1894 г. (впрочем, он включал свои результаты в лекции по теории аналитических функций, читавшиеся в Берлинском университете, начиная с конца 50-х годов). К 1841 г. относится его обобщение теоремы Коши о разложениях функции в степенной ряд (Вейерштрасс, не зная работ Коши, выводит теорему заново) на случай функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце. Здесь получается ряд, расположенный по целым степеням (также и отрицательным). Эти результаты содержатся в работе «Представление аналитической функции одного комплексного переменного, абсолютные значения которого лежат между двумя заданными границами» (Darstellung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen deren absoluter Betrag zwischen zwei gegeben Grenzen liegt) [45]. Однако первым опубликовал в печати аналогичный результат (конечно, независимо от Вейерштрасса) французский военный инженер и ученый математик, воспитанник Политехнической школы Пьер Альфонс Лоран (1813—1854). Ему принадлежит ряд работ, главным образом по математической физике; но единственная работа, благодаря которой он вошел в историю математики,— это «Обобщение теоремы Коши, относящейся к сходимости разложения функции по возрастающим степеням неизвестного» (Extension du théoreme de Mr Cauchy, relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable.— C. r. Acad. sci. Paris, 1843, 17). Соответствующая теорема и бесконечный в обе стороны ряд вида $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ носят поэтому имя теоремы и ряда Лорана.

---

[45] *Weierstrass K.* Werke. Berlin, 1894, Bd. 1, S. 52—66.

В 1842 г. в работе, также не опубликованной в свое время, «Определение аналитической функции одного переменного посредством дифференциального уравнения» (Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermitelst algebraischer Differentialgleichung) [46] Вейерштрасс излагает идею аналитического продолжения степенных рядов, впоследствии игравшую существенную роль в его построении теории аналитических функций. Впрочем, независимо от Вейерштрасса к той же идее пришел В. Пюизе, опубликовавший способ аналитического продолжения посредством степенных (и даже более общих) рядов в 1850 г.

Из работ 40-х годов, относящихся к степенным рядам, отметим еще теорему Коши о том, что целая функция, ограниченная по модулю во всей плоскости, тождественно равна постоянной (C. r. Acad. sci. Paris, 1844, 19) [47]. Впрочем, эта простая, но весьма важная теорема была лишь обобщением предложения, высказанного Ж. Лиувиллем в том же 1844 г.: целая двоякопериодическая функция есть константа. Э. Нойеншвандер [48] отмечает, что Коши представил более общую теорему, известную ныне под именем Лиувилля, на заседании Парижской академии, следующем за тем, где формулировал свое утверждение Лиувилль. Последний широко использовал свою теорему на лекциях по теории эллиптических функций (1847) (см. ниже). С легкой руки слушавшего их К. Борхардта имя Лиувилля получила именно общая теорема Коши, а не ее частный случай.

Эллиптические функции у Абеля

Мы уже упоминали, что Гаусс, ознакомившись с первым мемуаром Абеля по теории эллиптических функций (1827) (см. выше), нашел, что результаты его и Абеля совпадают, объясняя это тем, что Абель, не ведая о работах Гаусса, избрал тот же путь. Однако Абелю удалось в этой и последующих работах, частично опубликованных посмертно, разработать основы теории гораздо более полно и систематически, чем это сделал Гаусс. Кроме того, за Абелем остается честь первой публикации теории, в которой эллиптические функции определяются как функции, обратные эллиптическим интегралам, тогда как его предшественники и современники (за исключением Гаусса и, как мы об этом скажем ниже, Якоби) не прибегали к этому обращению.

Значение шага, сделанного Абелем, можно оценить, вообразив себе, будто математики до какого-то момента довольствовались в анализе рассмотрением функций $u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $u = \int\limits_0^y \frac{dy}{1+y^2}$ и лишь затем одному из них пришло в голову взять за основу функции, обратные этим интегралам: $x = \sin u$, $y = \operatorname{tg} u$. Так примерно можно охарактеризовать соотношение между трактатом Лежандра об эллиптических интегралах (Traité des fonctions elliptiques et des integrales eulériennes, avec de tables pour en fa ciliter le calcul numérique. Paris, 1825—1826. Т. 1—2) и мемуарами Абеля «Исследования об эллиптических функциях» в двух частях 1827 и 1828 гг. (Recherches sur les fonctions elliptiques.— J. für Math., 1827, 2; 1828, 3) и «Очерк теории эллиптических функций» (Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.— J. für Math., 1829, 4).

---

[46] Ibid., S. 75—84.
[47] *Cauchy A. L.* Oeuvres complètes, sér. 1, t. 8, p. 378—385.
[48] *Neuenschwander E.* The Casorati — Weierstrass theorem (Studies in the history of complex function theory. I).— Hist. Math., 1978, 5, p. 139—166.

Абель отправляется от эллиптического интеграла первого рода в форме

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

и, помимо функции $x = \varphi(\alpha)$, обратной интегралу (она лишь несущественно отличается от гауссова универсальнейшего синуса), вводит еще две функции: $f(\alpha) = \sqrt{1 - c^2\varphi^2(\alpha)}$ и $F(\alpha) = \sqrt{1 + e^2\varphi^2(\alpha)}$, также эллиптические. Соответствующие теоремы сложения он выписывает, ссылаясь на общие результаты Эйлера. Таким образом, значения $\varphi(\alpha + \beta)$, $f(\alpha + \beta)$ и $F(\alpha + \beta)$ выражаются рационально через значения тех же функций от α и β. Определив посредством обращения соответствующего интеграла (с заменой x на xi) функцию φ для чисто мнимых значений аргумента $\varphi(\beta i)$, а следовательно, определив также $f(\beta i)$ и $F(\beta i)$, Абель с помощью теорем сложения распространяет определение всех трех эллиптических функций на случай произвольного комплексного аргумента $\alpha + \beta i$. При этом немедленно обнаруживается их двоякая периодичность (за основные периоды принимаются

$$2\omega = 4\int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \quad \text{и} \quad 2\omega i = \int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

находятся все нули и полюсы и т. д.).

Из теоремы сложения сразу вытекают также формулы умножения аргумента, выражающие $\varphi(n, \alpha)$, $f(n, \alpha)$ и $F(n, \alpha)$ рационально через $x = \varphi(\alpha)$, $y = f(\alpha)$ и $z = F(\alpha)$. В частности, Абель показывает, что при нечетном n

$$\varphi(n\alpha) = x\frac{P_n(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — четные многочлены степени $n^2 - 1$, а при четном n

$$\varphi(n\alpha) = xyz\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = x\sqrt{1-c^2x^2}\sqrt{1+e^2x^2}\,\frac{P_n(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — также четные многочлены, но $P_n(x)$ имеет степень $n^2 - 4$, а Q_n — степень n^2. Отсюда при четном n

$$\varphi^2(n\alpha) = x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)\frac{P_n^2(x)}{Q_n^2(x)}.$$

Для сравнения с тригонометрическими функциями $x = \sin\alpha$ и $y = \cos\alpha$ выводим из формулы Муавра при n нечетном

$$\sin n\alpha = xP_n(x) =$$
$$= x\left[\frac{n}{1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}x^2 + \ldots,\right.$$

а при n четном

$$\sin n\alpha = xyP_n(x) =$$
$$= xy\left[\frac{n}{1}(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}x^2 + \ldots\right.$$

Здесь $P_n(x)$ — четный многочлен степени $n-1$ при n нечетном и степени $n-2$ при n четном.

Из указанных формул следует, что в задаче деления аргумента на натуральное число n, т. е. отыскания функции от α по заданной функции от $n\alpha$, в случае эллиптических функций приходится решать уравнение степени n^2 (если же n четное, то даже $2n^2$):

$$xP_n(x) - \varphi(n\alpha)\,Q_n(x) = 0,$$

соответственно

$$x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)\,P_n^2(x) - \varphi^2(n\alpha)\,Q_n^2(x) = 0,$$

а в случае тригонометрических функций — степени n (если n четное, то $2n$). Этот факт был отмечен еще Лежандром в 1793 г. Но его объяснение впервые дал Абель. Оно сводится к тому, что эллиптические функции — двоякопериодические, а тригонометрические — однопериодические. Пусть, например, n — нечетное число; из $\varphi(n\alpha) = \varphi(\alpha_0)$ вытекает, что $n\alpha$ отличается от α_0 на период и, следовательно,

$$x = \varphi(\alpha) = \varphi\left(\frac{\alpha_0 + 2k\omega + 2l\varpi i}{n}\right),$$

где k и l независимо друг от друга могут принимать значения $0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$; таким образом, получается n^2 значений x. В случае же синуса из того, что $\sin n\alpha = \sin\alpha_0$, следует, что $x = \sin\alpha = \sin\frac{\alpha_0 + 2\pi k}{n}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, т. е. всего n значений.

Абель замечает, что уравнения деления (при $\varphi(n\alpha) = 0$) удовлетворяют выявленному им критерию разрешимости уравнения в радикалах, и выводит выражение $\varphi(\alpha)$ через $\varphi(n\alpha)$, правда, сначала довольно сложно. Впрочем, используя заметку Якоби «Добавление к мемуару г. Абеля об эллиптических функциях» (Addition au mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, 1828), помещенную в том же томе журнала Крелле, где печаталась вторая часть его «Исследований», Абель в статье «Теоремы об эллиптических функциях» (Théoremes sur les fonctions elliptiques.— J. für Math., 1829, 4) приходит к цели достаточно простым и изящным путем.

Наконец, в первой части «Исследований» Абель, представляя по формуле умножение аргумента $\varphi(\alpha)$ через $\varphi(\alpha/(2n-1))$ (аналогично и для двух других функций), совершает без дополнительного обоснования формальный переход к пределу при $n \to \infty$. Вывод этот по идее вполне аналогичен тому, которым пользовался Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» для разложения синуса и косинуса в степенные ряды. Именно заменим α через $\alpha/(2n+1)$ в вышеприведенной формуле для $\sin(2n+1)\alpha$ и заметим, что при $n \to \infty$

$$x = \sin\frac{\alpha}{2n+1} \sim \frac{\alpha}{2n+1}, \qquad 1 - x^2 \sim 1.$$

Тогда почленный переход к пределу в каждом слагаемом правой части формулы дает

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots,$$

т. е. формально получается разложение $\sin\alpha$ в степенной ряд. В результате выкладок Абеля получаются представления функций $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $F(\alpha)$ в виде отношений некоторых целых функций и разложения этих последних в бесконечные произведения.

Почти одновременно с выходом первой части «Исследований» в журнале Шумахера «Астрономические известия» появилась заметка Якоби «Извлечение из двух писем к Шумахеру» (Extraits de deux lettres à Schoumacher.— Astron. Nachr., 1827, N 123), в которой он, не приводя доказательств (в момент посылки заметки он ими еще не располагал), сообщал существенно новый результат о преобразовании эллиптических интегралов. Есть основания предполагать, что отысканию доказательства Якоби помогло первое знакомство с мемуаром Абеля, а именно с идеей обращения интеграла. Как бы то ни было, Абель был неприятно поражен, когда в конце марта 1828 г. прочел в тех же «Астрономических известиях» доказательство заявленных Якоби результатов («Доказательство теорем, относящихся к теории эллиптических функций» (Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis.— Astron. Nachr., 1827, N 127)). Началось соперничество двух высокоодаренных ученых, которому, увы, не суждено было долго продолжаться: до смерти Абеля оставалось лишь около года. Абель спешно изложил свою теорию преобразований эллиптических функций, включающую как частный случай результаты Якоби, и опубликовал ее в журнале Шумахера («Решение общей проблемы, относящейся к преобразованию эллиптических функций» (Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques.—Astron. Nachr., 1828, 6; 1829, 7)). «Моя расправа (exécution) над Якоби напечатана»,— шутливо писал он своему другу Хольмбое 29 июля 1828 г.[49] К чести Якоби можно сказать, что он оценил эту «расправу» как один из прекраснейших шедевров анализа.

Вторая, меньшая по объему часть «Исследований» Абеля была посвящена в основном двум вопросам: делению лемнискаты с помощью циркуля и линейки и преобразованиям эллиптических функций. Впервые итальянский математик Фаньяно (1682—1766) нашел явные алгебраические формулы для координат точек деления лемнискаты Бернулли на 2, 3 и 5 равных частей. Внимание Абеля, читавшего «Арифметические исследования Гаусса», не могли, конечно, не привлечь слова Гаусса по поводу развитых им принципов теории деления окружности на n равных частей: «Они могут быть применены не только к круговым функциям, но и к многим другим трансцендентным функциям, например к тем, которые зависят от интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ...»[50]. Интеграл этот представлял хорошо знакомый Абелю частный случай эллиптического интеграла, которым выражается длина дуги лемнискаты. Вот почему Абель, установив еще в 1826 г., что для лемнискаты случаи, когда деление на n равных частей осуществимо с помощью циркуля и линейки, те же, что и для окружности (т. е. при условии, что $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_\mu$, где $m \geqslant 0$ и p_i $(j = 1, \dots, \mu)$ — различные между собой простые числа, каждое из которых имеет вид $2^{2^{q_j}} + 1$), имел основание предполагать, что и Гаусс пришел в свое время к такому же результату (письмо Абеля к Крелле от 4 декабря 1826 г.[51]). Этот результат для Абеля означал лишь применение к конкретной задаче его общей теории деления аргумента эллиптической функции и, кроме того, разработанных им критериев разрешимости алгебраического уравнения в радикалах, в данном случае в квадратичных. «Я раскрыл с одного раза тайну, которая покрывала гауссову теорию деления окружности,— писал он

[49] См.: *Abel N. H.* Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Oslo, 1902. Correspondance d'Abel..., p. 68.
[50] *Gauss C. F.* Werke, Bd. 1, S. 412—413.
[51] См. упомянутое выше издание переписки Абеля в кн.: *Abel N. H.* Mémorial, p. 52—53.

Хольмбое в декабре того же 1826 г.— Я вижу ясно, как день, как он пришел к этому. То, что я рассказал о лемнискате, один из результатов, извлеченных из моих исследований по теории уравнений» [52]. Слова эти, высказанные по частному поводу, имеют более общее значение: исследования Абеля по теории трансцендентных функций теснейшим образом переплетались с его алгебраическими изысканиями.

Задача преобразования в теории эллиптических функций, в исследовании которой столкнулись Абель и Якоби, занимала математиков, начиная со второй половины XVIII в. (Эйлера, Ландена, Лагранжа, позднее Лежандра и Гаусса). В терминах интегралов речь идет о преобразованиях переменного, переводящих один эллиптический интеграл в другой (ср. преобразование Гаусса). Значение работ Абеля и Якоби, относящихся к этой проблеме, заключается в том, что они сформулировали проблему наиболее общим образом и получили при этом наиболее общие результаты, включающие как частные случаи все, что было известно до них. Вот, например, как ставится задача в названном ранее мемуаре Абеля «Решение общей проблемы, относящейся к преобразованию эллиптических функций», написанном вслед за публикацией Якоби, о которой уже шла речь:

«Найти все возможные случаи, в которых можно удовлетворить дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}}=a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

подставляя вместо y алгебраическую функцию от x, рациональную или иррациональную».

Здесь Абель несущественно изменяет вид канонического многочлена четвертой степени под знаком корня. Нетрудно видеть, что поставленная проблема как очень частный случай содержит задачу об умножении (или делении) аргумента: достаточно положить $c_1 = c$, $e_1 = e$ и a равным натуральному числу.

Замечательна общность постановки проблемы. Абель с самого начала ищет y в классе алгебраических функций. Он доказывает, что эта проблема сводится к случаю, когда y есть рациональная функция, и дает ее полное решение. Эта общность, соединенная с элегантностью метода, и вызвала восхищение Якоби. Развивая свою теорию во второй части «Исследований», Абель приводит, в частности, следующую теорему, дающую первый случай так называемого комплексного умножения в теории эллиптических функций: если уравнение

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}=a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

допускает алгебраический интеграл и a — мнимое число, то a необходимо имеет вид $a=\pm i\sqrt{n}$, где m и n — рациональные числа, причем модуль c^2 должен удовлетворять еще определенному условию.

К. Г. Я. Якоби. «Новые основания эллиптических функций»

Ранее (см. Кн. 1, с. 67) уже были приведены краткие биографические сведения о Якоби. Мы воспроизведем их здесь в несколько расширенном виде.

Карл Густав Якоб Якоби (1804—1851) родился в Потсдаме в семье банкира. Рано поступив в Берлинский университет (не достигнув еще 16 лет),

[52] Ibid., p. 54.

К. Г. Я. ЯКОБИ

он не слишком прилежно посещал математические лекции, предпочитая самостоятельные занятия. Якоби углубленно штудировал Эйлера, к трудам которого он сохранил неизменный интерес на протяжении всей жизни. Вместе с тем он находил силы и время для активного участия в семинаре знаменитого филолога Августа Бека по классической филологии. Окончил университет Якоби в 1825 г., защитив диссертацию о разложении рациональных функций на простейшие дроби. С 1827 г. он экстраординарный и с 1829 г.— ординарный профессор Кёнигсбергского университета, кафедру в котором занимал до 1843 г. В 1829 г. Якоби опубликовал в Кёнигсберге на латинском языке «Новые основания эллиптических функций» (Fundamenta nova functionum ellipticarum), благодаря которому разделяет с Абелем славу создателя теории эллиптических функций. Особое значение имеет разработанная им здесь и в последующих трудах теория тэта-функций, носящих его имя, так же как и представленные в виде отношений тэта-функций три эллиптические функции: sn *u*, cn *u* и dn *u*. Якоби принадлежит идея обращения системы абелевых интегралов (1832, 1834), приведшая к введению в математику тэта-функций многих переменных и послужившая возникновению позднейшей теории абелевых функций (см. ниже).

В основных лекциях по механике Якоби развивал методы интегрирования уравнений с частными производными первого порядка и вариационного исчисления (метод «последнего множителя», метод Гамильтона—Якоби). Курс, читанный им в Кёнигсберге в 1842—1843 гг., содержащий основные результаты в этом направлении, был записан тогда же К. Борхардтом, но опубликован впервые только в 1866 г. Клебшем под названием «Лекции по динамике» (Vorlesungen über Dynamik. Leipzig: Herausg. v.

Clebsch, 1866). Здесь был рассмотрен и решен с помощью общих методов, разработанных Якоби, ряд задач: проблема двух тел в пространстве, проблема притяжения к двум неподвижным центрам, определены геодезические линии на поверхности трехосного эллипса и др. Целиком посвящена вариационному исчислению его небольшая работа 1837 г. «К теории вариационного исчисления и дифференциальных уравнений» (Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differentialgleichungen.— J. für Math., 1837, 17). Рассматривая так называемую простейшую задачу вариационного исчисления, он вывел в дополнение к классическому уравнению Лагранжа — Эйлера вспомогательное — дифференциальное уравнение Якоби и с его помощью установил новое необходимое условие для экстремали, реализующей минимум интеграла (условие Якоби).

Занимаясь изучением фигур равновесия вращающейся жидкости, Якоби показал, что при определенных условиях ими являются трехосные эллипсоиды (эллипсоиды Якоби: случай эллипсоидов вращения был известен еще Маклорену). В алгебре ему принадлежит следующая по своему значению после фундаментальной работы Коши (1815) разработка теории определителей «Об образовании и свойствах детерминантов» (De formatione et proprietatibus determinantum.— J. für Math., 1840, 22), а также ряд результатов в теории квадратичных форм.

Якоби ввел в анализ и выявил роль функционального определителя, названного в его честь якобианом, в работе «О функциональных детерминантах» (De determinantibus functionalibus.— J. für Math., 1841, 22). Имя его носит важный класс ортогональных многочленов, обобщающих многочлены Лежандра.

В 1843 г. Якоби по совету врачей провел шесть месяцев в Италии. Вернувшись, он обосновался в Берлине в качестве профессора Берлинского университета и члена Прусской академии наук. Будучи почетным членом Петербургской академии наук (с 1839 г.), Якоби принимал живейшее участие в замысле (неосуществившемся) издания этой Академией полного собрания сочинений Л. Эйлера. Об этом свидетельствует его переписка с непременным секретарем Академии П. Н. Фуссом (1798—1859), личная встреча с Фуссом во время заграничной поездки последнего, некоторые письма к брату — выдающемуся физику и электротехнику Морицу Герману (Борису Семеновичу) Якоби, в 1837 г. избранному членом Петербургской академии наук и навсегда поселившемуся в русской столице.

Для характеристики Якоби следует еще отметить его радикальные политические взгляды. В марте 1848 г. он становится членом оппозиционного конституционного клуба, соглашаясь выставить свою кандидатуру в члены Прусского национального собрания. В речи, произнесенной перед членами клуба, он заявил, между прочим, что его не пугает и перспектива республики. Но это заявление напугало руководителей клуба, и вопрос о его выдвижении в депутаты отпал. Когда реакция победила, Якоби напомнили о его поведении в дни революции. Его оклад был урезан, и была сделана попытка (правда, неудавшаяся) перевести Якоби из Берлина назад в Кёнигсберг. Скончался Якоби в 1851 г., заразившись оспой.

Как выдающаяся творческая личность, Якоби оказывал при жизни большое влияние на современников. В Германии его учениками были: Ф. Ришело, П. Кирхгоф, О. Гессе, А. Клебш; во Франции к ним причисляли себя Ш. Эрмит и Ж. Лиувилль; в Англии — А. Кэли.

В этом разделе мы дадим лишь краткую характеристику содержания уже упомянутого основного труда Якоби по теории эллиптических функций «Новые основания...» (1829).

В качестве отправного пункта Якоби избирает здесь, как это делали до него Гаусс и Абель, эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме Лежандра, записывая его в виде

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где k — параметр ($0 < k < 1$), называемый модулем. Переменное φ Якоби называет амплитудой и полагает $\varphi = \operatorname{am} u$. Так как подстановка $x = \sin \varphi$ дает

$$u = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

то для x как функции от u — обращения эллиптического интеграла первого рода — получаем $x = \sin \operatorname{am} u$ (читается: синус амплитуды u). Вместе с ней определяются еще две функции:

$$\cos \operatorname{am} u = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} u}, \qquad \Delta \operatorname{am} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Для названных трех функций — эллиптических функций Якоби — Хр. Гудерман (см. о нем ниже) в 1838 г. дал более простые и в настоящее время общепринятые обозначения: $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — в работе «Теория модулярных функций и молекулярного интеграла» (Theoria der Modular-Functionen und der Molecular-Integrale.— J. für Math., 1838, 18). Теоремы сложения, двоякая периодичность (для $\operatorname{sn} u$ основными периодами являются

$$4K = 4 \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{и} \quad 2iK' = 2i \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

где $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль; они же являются периодами, но не основными, для $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$), нули и полюсы — все это устанавливается тем же путем, которым шел Абель, а до него Гаусс. Дальше детально рассматриваются вопросы преобразования эллиптических функций, умножения и деления аргументов, соотношения между эллиптическими интегралами второго и третьего рода и т. д. В качестве вспомогательных функций используются тэта-функции. Через основные из них $\Theta(u)$ и $\mathrm{H}(u)$ (тэта и эта) эллиптические функции Якоби выражаются по формулам

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}, \qquad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)}, \qquad \operatorname{dn}(u) = \sqrt{k'} \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Функции $\Theta(u)$ и $\mathrm{H}(u)$ представляются следующими всюду сходящимися тригонометрическими рядами:

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^9 \cos 6v + \ldots,$$

$$\mathrm{H}(u) = 2q^{1/4} \sin v - 2q^{9/4} \sin 3v + 2q^{25/4} \sin 5v - \ldots,$$

где $v = \pi u / 2K$ и $q = e^{-\pi K'/K}$. Обе функции являются целыми и периодическими, причем для $\Theta(u)$ основной период равен $2K$, для $\mathrm{H}(u)$ период равен $4K$. Кроме того, при прибавлении к u мнимого числа $2iK'$ обе функции приобретают один и тот же показательный множитель $q^{-1} e^{-i\pi K' u / K}$. Именно благодаря этому частные

$$\mathrm{H}(u)/\Theta(u), \quad \mathrm{H}(u+K)/\Theta(u), \quad \Theta(u+K)/\Theta(u)$$

и оказываются функциями двоякопериодическими. Ценные теоретико-функциональные свойства тэта-функций сочетаются с удобством для вычислений, например, в приложениях к механике. Дело в том, что вышеприведенные ряды при u и k действительных и условиях $0 < k < 1$ (тогда K и K' также действительные положительные) чрезвычайно быстро сходятся благодаря множителям вида $q^{n^2/4}$ (или $q^{(2n+1)^2/4}$), где $q = e^{-\pi K'/K} < 1$.

Тэта-функции Якоби

В лекциях по теории эллиптических функций, читанных Якоби в 1835—1836 гг. в Кёнигсбергском университете и изданных уже после его смерти его учеником К. Борхардтом (1817—1880) [53], в основу изложения положены четыре тэта-функции, определения и свойства которых даются независимо от эллиптических интегралов. Исходным является ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{an^2+bn+c}$, где b и c — некоторые линейные функции x и a — комплексная постоянная, действительная часть которой отрицательна. Последнее условие обеспечивает, как скажем мы теперь, абсолютную и равномерную сходимость ряда в любом круге конечной плоскости; следовательно, сумма ряда является целой функцией.

Для удобства изложения перепишем ряд в форме, предложенной несколько позже Ш. Эрмитом:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pi i\left[n\nu + x(2n+\mu) + \tau\frac{(2n+\mu)^2}{4}\right]\right\}.$$

Из того что коэффициент при n^2 в показателе равен здесь $\pi i\tau$, следует, что для сходимости ряда нужно считать положительной мнимую часть τ; параметрам μ и ν будем придавать только по два значения: 1 и 0. Соответственно различным комбинациям этих значений получим четыре различных тэта-функции Якоби. Выпишем их в обозначениях Ж. Таннери и Ж. Молька, лишь несущественно отличающихся от обозначений самого Якоби (q обозначает здесь $e^{\pi i\tau}$, $|q| < 1$):

$$\vartheta_1(x) = -i\Theta_{1,1}(x) = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\pi i x} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}(-1)^n 2q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \sin(2n+1)\pi x;$$

$$\vartheta_2(x) = \Theta_{1,0}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\pi i x} = \sum_{0}^{\infty} 2q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)\pi x;$$

$$\vartheta_3(x) = \Theta_{0,0}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi i x} = 1 + \sum_{1}^{\infty} 2q^{n^2}\cos 2n\pi x;$$

$$\vartheta_4(x) = \Theta_{0,1}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi i x} = 1 + \sum_{1}^{\infty}(-1)^n 2q^{n^2}\cos 2n\pi x.$$

---

[53] *Jacobi C. G.* Gesammelte Werke. Berlin, 1881, Bd. 1, S. 479.

Функции эти могут быть выражены одна через другую посредством замены x на $x + {}^1/_2$, $x + i\tau/2$, $x + {}^1/_2 + i\tau/2$:

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_1(x + {}^1/_2), \qquad \vartheta_1(x) = -\vartheta_2(x + {}^1/_2), \qquad \vartheta_3(x) = \vartheta_4(x + {}^1/_2),$$

$$\vartheta_4(x) = \vartheta_3(x + {}^1/_2), \qquad \vartheta_3(x) = q^{1/4}e^{-\pi x i}\vartheta_2(x + {}^1/_2 i\tau),$$

$$\vartheta_4(x) = -iq^{1/4}e^{-\pi x i}\vartheta_2(x + {}^1/_2 + {}^1/_2\, i\tau)$$

и т. п. (первоначально в «Новых основаниях...» эти функции явились под оболочкой Θ и H функций).

Заметим, что функции $\vartheta_2(x)$ и $\vartheta_3(x)$, получающиеся из $\Theta_{\mu,0}(x)$ соответственно при $\mu = 1$ и $\mu = 0$, могут быть представлены в виде

$$\Theta_{\mu,0}(x) = e^{-\frac{\pi i}{\tau}x^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{\pi i}{\tau}\left[\tau\left(\frac{2n+\mu}{2}\right) + x\right]^2\right\} \quad (\mu = 1{,}0).$$

Поэтому для любой четверки комплексных чисел w, x, y, z имеем, выполняя умножение рядов:

$$\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) + \vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) =$$

$$= \exp\left[-\frac{\pi i}{\tau}(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)\right] \sum_{\substack{-\infty \\ (m,\,n,\,p,\,q)}}^{+\infty} \exp\left\{\frac{\pi i}{\tau}\left[\left(\frac{\tau m}{2} + w\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\tau n}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{\tau p}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\tau q}{2} + z\right)^2\right]\right\},$$

где индексы m, n, p и q пробегают всевозможные четверки целых чисел одинаковой четности. Полагая

$$w' = {}^1/_2(w + x + y + z), \qquad x' = {}^1/_2(w + x - y - z),$$

$$y' = {}^1/_2(w - x + y - z), \qquad z' = {}^1/_2(w - x - y + z)$$

(при этом выполняется тождество

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

и производя аналогичное преобразование индексов суммирования m, n, p и q, Якоби приходит к основному соотношению:

$$\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) + \vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) =$$

$$= \vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z') + \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z'),$$

из которого выводит чисто алгебраическим путем десятки других тождеств. Среди них — алгебраические соотношения между тэта-функциями одного и того же аргумента вроде следующих:

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_4^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x), \tag{10}$$

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_4^2(x) = \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x) + \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_2^2(x), \tag{11}$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(x) + \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(x) \tag{12}$$

и алгебраические теоремы сложения для частных тэта-функций:

$$\vartheta_1(x)/\vartheta_4(x), \qquad \vartheta_2(x)/\vartheta_4(x), \qquad \vartheta_3(x)/\vartheta_4(x).$$

Наконец (путем предельного перехода в тождествах, выражающих теоремы сложения) он получает формулы для производных последних функций в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}=\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)},\\
&\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}=-\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)},\\
&\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)}=-\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Отсюда в силу соотношений (10) — (12) следует, что

$$\vartheta_1(x)/\vartheta_4(x), \quad \vartheta_2(x)/\vartheta_4(x) \quad \text{и} \quad \vartheta_3(x)/\vartheta_4(x)$$

удовлетворяют простым алгебраическим дифференциальным уравнениям первого порядка.

Названные соотношения нужны Якоби, чтобы показать, что с помощью его тэта-функций легко могут быть построены эллиптические функции, которые он вводил раньше, отправляясь от эллиптического интеграла $\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Прежде всего, полагая в (10) $x=0$, он убеждается, что взаимно дополнительные модули k и $k'=\sqrt{1-k^2}$ можно определить посредством равенств

$$\sqrt{k}=\vartheta_2(0)/\vartheta_3(0) \quad \text{и} \quad \sqrt{k'}=\vartheta_4(0)/\vartheta_3(0). \tag{14}$$

Далее соотношение (11) позволяет ему ввести вспомогательное переменное φ, определяемое формулами

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}=\sin\varphi, \qquad \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}=\cos\varphi; \tag{15}$$

тогда из (12) будет следовать, что

$$\sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)}=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta(\varphi). \tag{16}$$

Наконец, формулы (13) — (16) позволяют заключить, что

$$\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)\,\vartheta_2(0)}\,x=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$\varphi=\operatorname{am}\left[\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)}\,x\right] \tag{18}$$

и функции (15) и (16) суть не что иное, как якобиевы эллиптические функции sn, cn и dn.

Остается еще выразить коэффициент $\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)}$ при x в формуле (18) через величины, непосредственно относящиеся к эллиптическому интегралу (17). Для этого Якоби прежде всего выводит соотношение

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0),$$

справедливое при любом $q = e^{\pi i\tau}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)} = \pi\vartheta_3^2(0).$$

Дальнейшие выкладки Якоби проводит, предполагая, что q — действительное положительное число, меньшее 1 (т. е. τ чисто мнимое). Тогда тэта-функции принимают действительные значения при x действительном. Пользуясь этим, он находит, что

$$\pi\vartheta_3^2(0) = 2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2K.$$

После этого выражения его эллиптических функций через тэта-функции приобретают окончательный вид

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x/2K)}{\vartheta_4(x/2K)}, \qquad \operatorname{cn} x = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(x/2K)}{\vartheta_4(x/2K)}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(x/2K)}{\vartheta_4(x/2K)}.$$

Якоби рассматривает и обратную задачу, очевидно, считая, что она не была ни решена, ни даже сформулирована в «Новых основаниях...»: отправляясь от эллиптических функций $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$, построить соответствующие им тэта-функции. При этом он ограничивается случаем, когда модуль k есть действительное число, удовлетворяющее условию $0 < k < 1$. Задача эта сводится для него к определению числа q. Замечая, что K'/K как функция q обладает тем же свойством, что и $\ln q$, а именно при замене q через q^n приобретает множителем число n, Якоби заключает, что $(K/K') \ln q$ от q не зависит и равно $-\pi$. Поэтому

$$q = e^{-\pi K'/K},$$

что и позволяет построить по указанным выше формулам соответствующие тэта-функции.

Рассмотренный здесь новый подход Якоби к теории эллиптических функций весьма примечателен с исторической точки зрения. Действительно, не прошло еще и десяти лет со времени, когда была заявлена идея обращения эллиптических интегралов, а уже математики хотят освободиться в построении основ теории эллиптических функций от условий той конкретной задачи, которая их привела к этим функциям, и ввести соответствующий класс, исходя из более общих соображений. В качестве элементов построения берутся однозначные и притом целые функции, заданные соответствующими всюду сходящимися рядами. Это важная ступень не только к построениям теории эллиптических функций, предложенным в скором времени Лиувиллем и позднее Вейерштрассом, но и, что гораздо существеннее, к позднейшей теории абелевых функций. Следует подчеркнуть, однако, что Якоби ни здесь, ни в последующих работах совсем не использует тех общих средств исследования аналитических функций, которые к тому времени были уже выработаны Коши (интегральная теорема Коши, теорема о вычетах и ее следствия).

Эллиптические функции у Эйзенштейна и Лиувилля. Первые учебники

«Новые основания эллиптических функций» Якоби много способствовали распространению этой области математического анализа. Ясность и систематичность изложения, удачный выбор функций, связанный с математической традицией (отправная точка — эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра), обозначения, сближающие эллиптические функции с тригонометрическими, выражение их через быстро сходящиеся тригонометрические ряды — все это обусловило растущую популярность функций Якоби среди математиков и особенно механиков, применявших их для решения разнородных задач механики. В «Лексиконе чистой и прикладной математики» В. Я. Буняковского (СПб., 1839) (к сожалению, был выпущен только один том (А — Д)) нет статьи «Эллиптические функции», которая должна была появиться во втором томе. Но заметка «Amplitude (элл. функц.). Амплитуда, широта, объятность эллиптической функции» не оставляет сомнений относительно трактовки вопроса, намеченной Буняковским. Он пишет: «Математики часто употребляют следующие знаположения: изобразив через u эллиптическую функцию $\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, пишут: $\varphi = \operatorname{am} u$, $\sin\varphi = \sin\operatorname{am} u$, $\varphi' = \operatorname{co}\ \operatorname{am} u$, $\sin\varphi' = \sin\operatorname{co}\operatorname{am} u$ и проч. См. Elliptiques (Fonctions)» [54]. Как видно, здесь даны обозначения Якоби ($\operatorname{co}\operatorname{am} u = \operatorname{am}(K-u)$ — коамплитуда).

Да и первый курс эллиптических функций на русском языке «Основания теории эллиптических функций» (СПб., 1850), принадлежащий перу профессора Петербургского университета и академика И. И. Сомова (1815—1876), автора оригинальных работ по теории эллиптических функций и их приложениям к механике, представлял в основном изложение труда Якоби. Отмечая в своем отзыве, что книга Сомова является «первым на русском языке полным, систематическим сочинением об одной из замечательнейших и труднейших отраслей интегрального исчисления», академики М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский отмечали и некоторые недостатки проделанной работы: отсутствие «ультраэллиптических функций» (очевидно, ультраэллиптических интегралов) и доказательств ряда теорем.

Во французском «Словаре чистой и прикладной математики» (Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées/A. S. de Montferrier), выходившем примерно в те же годы (1838—1840), что и «Лексикон» Буняковского, мы находим статью «Transcendantes elliptiques» только в дополнительном (третьем) томе. Здесь под этим термином понимаются эллиптические интегралы; но все же рядом с Лежандром и его трактатом упоминается и Якоби с его «Новыми основаниями...»; имя Абеля отсутствует.

Однако уже в это время, в конце 30-х и в особенности в течение 40-х годов, в теории эллиптических функций зарождаются новые элементы, которым по мере их развития предстояло постепенно оттеснить функции Якоби на второй план.

Около 1836 г. в руки молодого Вейерштрасса, занимавшегося математическим самообразованием, попадают «Новые основания...» Якоби. Книга оказывается слишком трудной для него: ведь Якоби предполагает короткое знакомство читателя с трактатом Лежандра, тогда еще неизвестным Вейерштрассу. Услышав, что профессор математики в Мюнстерской «теолого-философской академии» Хр. Гудерман (1798—1852) объявляет курс «модулярных функций» (так Гудерман именовал эллиптические функции), Вейерштрасс устремляется туда, чтобы стать в 1839 г. единственным слушателем этих лекций. В 1840 г. он представляет в качестве экзаменационной работы на звание преподавателя сочинение на избранную им самим

[54] *Буняковский В. Я.* Лексикон чистой и прикладной математики. СПб., 1839.

тему «О разложении модулярных функций» (Über die Entwicklung der Modular-Funktionen)[55], заслужившее высокую оценку Гудермана, хотя автор и подверг серьезной критике самого Гудермана. Уже эта работа, как отмечает Ф. Клейн, содержит зародыши многих позднейших исследований Вейерштрасса и представляет важный шаг вперед в теории эллиптических функций. Именно используя одно замечание Абеля, Вейерштрасс получает представление для функций Якоби в виде отношений целых функций, коэффициенты степенных разложений которых являются многочленами от k^2 (k — модуль эллиптического интеграла). Эти функции он обозначил позднее в честь Абеля через Al_1, Al_2, Al_3, Al. Впрочем, начиная с его берлинских лекций (см. далее), место этих функций занимают сигма-функции Вейерштрасса, отличающиеся от Al показательным множителем.

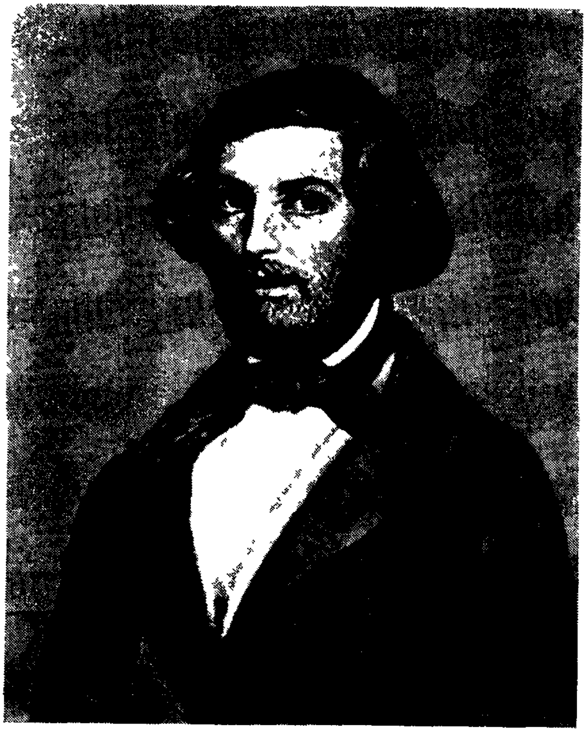
С середины 40-х годов в работах молодого берлинского приват-доцента Г. Эйзенштейна (1823—1852) появляются (можно сказать в готовом виде) ряды, вошедшие потом в теорию эллиптических функций Вейерштрасса в качестве ее аналитического аппарата. Эти работы в существенной своей части были объединены в сборнике, вышедшем в свет с предисловием Гаусса «Математические труды, в особенности из области высшей арифметики и эллиптических функций» (Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der Höheren Arithmetik und der Elliptischen Funktionen von Dr. G. Eisenstein. Berlin, 1847). Среди них особое значение для теории эллиптических функций имеет большая работа, появившаяся сначала в журнале Крелле, «Точное исследование бесконечных двойных произведений, из которых эллиптические функции составляются в виде частных, и связанных с ними двойных рядов» (Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen.— J. für Math., 1847, 35). Эйзенштейн замечает, что если ω_1 и ω_2 — комплексные числа, отношение которых не есть число действительное (периоды эллиптической функции), то значение двойного произведения $u\prod\left(1-\frac{u}{m_1\omega_1+m_2\omega_2}\right)$, где m_1 и m_2 пробегают все целые числа, не равные одновременно нулю, зависит от порядка расположения множителей (т. е. произведение не сходится абсолютно; напомним, что в случае, когда $\omega_2 = i\omega_1$, соответствующем лемнискатическому синусу, оно уже встречалось в рукописях Гаусса (см. с. 129, 130). Изучая его, Эйзенштейн приходит к рядам, с помощью которых Вейерштрасс позднее ввел свои функции $\wp(z)$, $\wp'(z)$ и их инварианты g_2 и g_3, и выводит основные соотношения между ними. По сравнению с теорией Вейерштрасса Эйзенштейну не хватает множителей вида

$$\exp\left[\frac{u}{m_1\omega_1+m_2\omega_2}+\frac{u^2}{2(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right]$$

под знаком произведения, наличие которых обеспечивает абсолютную (и равномерную в каждом конечном круге) сходимость и превращает их в сигма-функции.

Интересно отметить, что в самое последнее время Андре Вейль вернулся к подходу Эйзенштейна к теории эллиптических функций, не опирающемуся на предварительное построение общих начал теории аналитических функций, и использовал его как для достаточно полного и вместе с тем требующего совсем немного места изложения теории эллипти-

[55] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 1, S. 1—49.



Г. ЭЙЗЕНШТЕЙН

ских функций, так (с привлечением родственных эйзенштейновым рядов Кронекера) и для применений к весьма тонким вопросам современной теории чисел. Пример, вновь показывающий пользу нового прочтения старых, казалось бы, устаревших работ [56].

Но первая работа Вейерштрасса и упомянутая статья Эйзенштейна служили тогда лишь своего рода заявкой на будущий оригинальный аппарат теории эллиптических функций; существа развиваемой теории они не изменяют.

Принципиально новый шаг был сделан Ж. Лиувиллем в его «Лекциях по теории двоякопериодических функций», прочитанных перед К. Борхардтом и Ф. Иоахимсталем (1818—1861) в 1847 г. Хотя К. Борхардт напечатал свои записки только в 1880 г. (Leçons sur les fonctions doublement périodiques (faites en 1847).— J. für Math., 1880, 88), лиувиллевская трактовка предмета не прошла мимо современников. Подробная программа лекций была опубликована в «Comptes rendus» (1851, 32, p. 450). Кроме того, Ш. Брио и Ж. Буке составили под их влиянием свою книгу «Теория двоякопериодических и в особенности эллиптических функций» (Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions ellip tiques. Paris, 1859), о которой мы еще будем говорить. Само название лек ций Лиувилля характеризует особенности построения курса: объектом изучения становится весь класс двоякопериодических однозначных функ-

[56] *Weil A.* Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin: Springer-Verl., 1976. Есть русское издание: *Вейль А.* Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М.: Мир, 1978.

ций комплексного переменного, непрерывных и дифференцируемых всюду, за исключением полюсов, т. е. мероморфных.

Замечая, что любой период однозначной двоякопериодической функции, отличной от постоянной, может быть представлен в виде $m\omega + m'\omega'$, где m и m' — целые числа, а ω и ω' — основные периоды, отношение которых есть мнимое число (соответствующая общая теорема была впервые установлена Якоби в 1834 г.), Лиувилль покрывает плоскость сетью параллелограммов со сторонами ω и ω' и сводит общую проблему к изучению функции в одном каком-либо параллелограмме, например, в параллелограмме с вершинами 0, ω, $\omega + \omega'$, ω'. Он не использует при этом, по крайней мере в явном виде, результаты Коши, относящиеся к функциям комплексного переменного. Вот, например, как устанавливается теорема Лиувилля о том, что целая двоякопериодическая функция есть константа. Разложим $f(z)$ в ряд Фурье, рассматривая ее как функцию с периодом ω. Получим

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi i n}{\omega} z}.$$

Но если ω' — другой ее период, такой, что ω'/ω — мнимое число, то

$$f(z+\omega') = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n q^n e^{\frac{2\pi i n}{\omega} z} = f(z),$$

где $q = e^{2\pi i \omega'/\omega}$, причем $|q| \neq 1$ в силу предположения относительно ω и ω'. Из единственности разложения вытекает, что $A_n = A_n q^n$, откуда $A_n = 0$ при $n \neq 0$, т. е. $f(z) = A_0$.

Лиувилль доказывает, что двоякопериодическая функция ($\neq$ const) должна иметь по крайней мере два простых полюса $h + h'$ и $h - h'$ в параллелограмме периодов (или один двойной), и строит простейшую функцию с такими полюсами в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \frac{2\pi (z + n\omega' - h)}{\omega} - \cos \frac{2\pi h'}{\omega}\right]^{-1}.$$

Существенно, однако, что он получает теоремы, устанавливающие простые и изящные свойства всего класса двоякопериодических мероморфных функций (с одними и теми же периодами). Именно функции этого класса и получили название эллиптических (обращения эллиптических интегралов составляют только их подкласс), а соответствующие общие теоремы — теорем Лиувилля. Однако короче всего доказываются (а частью и формулируются) эти теоремы с помощью теории вычетов. Начало ее применения к этим свойствам эллиптических функций положил Ш. Эрмит, доказавший в одной из своих работ 1848 г.[57], что сумма вычетов эллиптической функции относительно полюсов, принадлежащих параллелограмму периодов, равна 0. Отсюда, в частности, следует, что эллиптическая функция не может иметь в нем лишь один простой полюс, как это и утверждает Лиувилль.

Укажем вкратце некоторые другие теоремы Лиувилля об эллиптических функциях, используя при этом введенное Вейерштрассом понятие порядка функции.

Следуя Вейерштрассу, назовем число n полюсов (с учетом их кратности) эллиптической функции в одном параллелограмме периодов поряд-

[57] *Hermite C.* Oeuvres. Paris, 1905, t. 1, p. 75—83.

ком этой функции. Приведенный выше результат Лиувилля гласит, что $n \geqslant 2$. Теорема Коши о вычетах, примененная к $\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ и $z\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ соответственно (A — любое комплексное число), позволяет утверждать, что общее число корней уравнения $f(z) - A = 0$ в параллелограмме периодов равно n независимо от A и что сумма корней этого уравнения может отличаться от суммы полюсов только на величину какого-либо периода. Отметим еще, что каждая эллиптическая функция рационально выражается через любую функцию второго порядка и ее производную (с теми же полюсами) и что только функции второго порядка являются обратными по отношению к эллиптическим интегралам. Тем не менее, как уже отмечалось, наименование эллиптических функций закрепилось впоследствии за всем классом двоякопериодических мероморфных функций.

В 1856 г. появляется «Исследование функций мнимого переменного» (Etude des fonctions d'une variable imaginaire.— J. Éc. Polyt., 1856, 21) учеников Коши и Лиувилля Ш. Брио и Ж. Буке, содержащее в простой и ясной форме систематическое изложение основных результатов, полученных главным образом Коши, в теории аналитических функций. Этот небольшой мемуар (он содержит 48 страниц) по содержанию и манере изложения можно рассматривать как первый учебник по теории аналитических функций.

Французские математики Брио и Буке много сделали для распространения идей теории аналитических функций в третьей четверти XIX в. Шарль Огюст Альбер Брио (1817—1882), воспитанник Высшей нормальной школы в Париже, преподавал математику в Орлеане, Лионе, а с 1855 г.— в Высшей нормальной школе. Последние годы он был профессором математической физики в Сорбонне. Жан Клод Буке (1819—1885), обучавшийся в 1839—1841 гг. в Политехнической и Высшей нормальной школах в Париже, преподавал математику в Марселе, Лионе, а с 1852 г.— в лицеях Парижа. С 1873 г. был профессором математики в Сорбонне и профессором механики и астрономии в Высшей нормальной школе; в 1875 г. был избран членом Парижской академии.

Вслед за только что упомянутым мемуаром Брио и Буке опять-таки в соавторстве создали упомянутую выше книгу «Теория двоякопериодических и в особенности эллиптических функций», которая во втором издании выросла в фундаментальный труд «Теория эллиптических функций» (Theorie des fonctions elliptiques. 2 éd. Paris, 1879). Одному Брио принадлежит лишь «Теория абелевых функций» (Théorie des fonctions Abéliennes. Paris, 1879), заслужившая премию Понселе.

К этому же времени относится и первый читанный Вейерштрассом в Берлине курс лекций по теории аналитических функций «Общие теоремы, относящиеся к представлению аналитических функций сходящимися рядами». Начиная с 1861 г. он читает «Общую теорию аналитических функций». Исходным пунктом для Вейерштрасса являются разложения функций в степенные ряды. Но в то время как его предшественники обычно рассматривали каждую функцию как сумму только одного степенного ряда, Вейерштрасс рассматривает вместе с данным рядом также и возможные его аналитические продолжения, определяя функцию посредством совокупности всех возможных органически связанных между собой рядов.

Если ко всему этому присоединить еще знаменитую диссертацию Римана «Основы общей теории функций комплексного переменного» (Grundlagen für eine allgemeine Theorie einer veränderlichen komplexen Grösse, 1851), о которой речь пойдет ниже, то можно утверждать, что на протяжении 50-х годов XIX в. обрели в известном смысле итоговое воплощение три основные концепции общей теории аналитических функций комплексного переменного, определившие дальнейшее развитие этой теории на протяжении столетия: Коши, Вейерштрасса и Римана. В основе первой лежало комплексное интегрирование, выявившее независимость интеграла от пути интегрирования, в основе второй — представимость функции степенными рядами, связанными между собой процессом аналитического продолжения, в основе третьей — представление об аналитической функции комплексного переменного как о решении некоторого дифференциального уравнения в частных производных (в комплексной форме $i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$).

С позиции историка математики поучительно наблюдать, что вся эта сокровищница общих идей оценивалась современниками не сама по себе, но прежде всего с точки зрения той пользы, которую эти идеи приносили для изучения специальных классов аналитических функций, находившихся с начала второй четверти XIX в. в фокусе всех интересов тогдашних аналитиков, от великих до малых: эллиптических (а также связанных с ними тэта- и модулярных функций) и абелевых функций. Впрочем, в последней четверти XIX в. эти классы отступили на задний план перед автоморфными функциями.

Характерно, что в одном из ранних опытов обозрения истории математики в XIX в.[58] «теория функций двойной или многократной периодичности» выступает под самостоятельной рубликой, тогда как общая теория функций отсутствует в качестве отдельного раздела. Убедительный пример долговечности старой традиции представляет курс теории аналитических и эллиптических функций (Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und Elliptischen Funktionen. Berlin, 1922) ученика Вейерштрасса и Ф. Клейна, профессора университета в Кёнигсберге и позднее Политехникума в Цюрихе А. Гурвица (1859—1919). Эта ставшая классической уже в нашем веке книга (имеются два русских перевода 1933 и 1968 гг.) состоит из двух частей: «Общей теории функций комплексной переменной» и «Эллиптических функций», причем вторая лишь немногим меньше первой по объему.

Одним из внешних проявлений охарактеризованной только что ситуации явилось то, что и в 50-х годах прошлого века, и долгое время после них (скажем, в курсах, читавшихся в русских университетах в начале XX в.) основы общей теории аналитических функций рассматривались главным образом как введение в теорию эллиптических, соответственно абелевых функций. Примером может служить названная выше «Теория двоякопериодических функций и в особенности эллиптических функций» Брио и Буке (1859, 1-е изд.). Их мемуар «Исследование функций мнимого переменного» вошел в нее целиком в качестве вводной части. Книга эта имела большой успех, о чем свидетельствует хотя бы факт издания ее на немецком языке в 1862 г. Во втором расширенном французском издании 1875 г. общая теория занимает уже около 200 страниц. Но большая часть сочинения (всего в нем 700 страниц ин-кварто) посвящена эллиптическим функциям, и само сочинение названо «Теорией эллиптических функций». Другой пример доставляет книга, выполненная целиком в духе идей Римана. Это «Лекции по римановой теории абелевых интегралов» (Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integralen. Leipzig, 1865) профессора К. Неймана (1832—1925), последовательно занимавшего должность профессора в университетах Галле, Базеля, Тюбингена и Лейпцига. Здесь, между прочим впервые в учебной литературе, для геометрического

[58] *Ball W. W. Rouse.* Histoire des mathématiques / Ed. franç., avec des additions de R. de Montessus. Paris, 1907. T. 2.

представления комплексных чисел используется сфера (сфера Римана или Неймана). Из числа ранних учебников более элементарного характера назовем еще книгу профессора Пражского политехникума Я. Дюрежа (1821—1893). В 1861 г. он издал «Теорию эллиптических функций» (Theorie der Elliptischen Funktionen. Zürich, 1861), получившую широкое распространение (в 1908 г. вышло 5-е издание книги). Однако в своем изложении он не опирается на теорию аналитических функций комплексного переменного. Через три года после этого Дюреж выпустил учебник, уже полностью посвященный одним только основам общей теории аналитических функций. Это — книга, также выдержавшая ряд переизданий, «Элементы теории функций одной комплексной переменной величины. С особым вниманием к творениям Римана» (Elemente der Theorie der Funktionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet. Leipzig, 1864).

Риманову построению теории целиком посвящена и одна из наиболее ранних русских монографий по теории аналитических функций комплексного переменного — докторская диссертация киевского профессора математики М. Е. Ващенко-Захарченко (1825—1912) «Риманова теория функций составного переменного» (Киев, 1861). Наконец, в числе ранних оригинальных учебников должен быть назван широко задуманный труд итальянского математика Ф. Казорати (1835—1890), профессора университета в Павии, «Теория функций комплексного переменного» (Teorica delle funzioni di variabili complesse. Pavia, 1868). Казорати находился под сильным влиянием Римана. Второй том сочинения он не выпустил только потому, что не смог убедительно доказать принцип Дирихле, который должен был лежать в основе задуманного изложения [59]. Однако Казорати не был односторонним и в своем учебнике, которому он предпослал обширный исторический очерк развития теории от Гаусса до Римана (143 страницы!), пытался объединить концепции Римана и Коши.

Абелевы интегралы. Теорема Абеля

«Абель,— писал Эрмит,— оставил математикам над чем работать лет на полтораста» [60]. При этом он имел в виду не только теорию эллиптических функций, всецело захватившую его самого, но и знаменитую теорему Абеля об интегралах от алгебраических функций. Абель пришел к этой теореме еще в 1825 г. и посвятил ей большой мемуар «Об одном общем свойстве весьма обширного класса трансцендентных функций» (Sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes) [61], представленный в 1826 г. в Парижскую академию наук. По вине Коши, затерявшего посланную ему на отзыв рукопись, она увидела свет только через 12 лет после смерти Абеля — в 1841 г. (Mém. Sav. etrang., 1841, 7). Однако для частного случая ультраэллиптических интегралов Абель все же сумел изложить и опубликовать свое открытие в конце 1828 г. в работе «О некоторых общих свойствах определенного вида трансцендентных функций» (Sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte des fonctions transcendantes.— J. für Math., 1828, 3), и этого частного случая оказалось достаточно, чтобы восхищенный Лежандр, цитируя Горация, назвал теорему «monumentum aere prennius» Абеля [62].

---

[59] *Bottazzini U.* Riemann's Einfluss auf E. Betti und F. Casorati.— Arch. Hist. Exact Sci., 1977, 18.
[60] Цит. по кн.: Histoire de la science (Encyclopédie de la Pléiade). Paris, 1957, p. 630.
[61] *Abel N. H.* Oeuvres complètes. Christiania: Grøndahl, 1881, t. 1, p. 145—211.
[62] Цит. по кн.: Histoire de la science, p. 631.

Абелевыми интегралами, по предложению Якоби, называются интегралы вида $\int R(x, y)\,dx$, где R — рациональная функция, а $y = y(x)$ — алгебраическая функция, заданная уравнением $f(x, y) = 0$ (f — неприводимый многочлен от x и y). В частном случае, когда $y^2 = P(x)$, где $P(x)$ — многочлен степени n, не имеющий кратных корней, интеграл называется эллиптическим, если $n = 3$ или $n = 4$, и ультраэллиптическим (а также гиперэллиптическим), если $n \geqslant 5$.

Для дальнейшего понадобятся некоторые подробности об этих интегралах: мы изложим их, пользуясь геометрическим языком, элементы которого обнаруживаются уже в цитированном выше письме Гаусса к Бесселю. Впрочем, ни Абель, ни Якоби этим языком не пользовались, подразумевая многое из того, что мы явно оговариваем. Для определения значения абелева интеграла $\int R(x, y)\,dx$ недостаточно указать пределы интегрирования x_0 и x. Нужно еще фиксировать путь интегрирования l, т. е. кривую, соединяющую x_0 с x, и, кроме того, выделить на l однозначную ветвь алгебраической функции $y = y(x)$ (вообще многозначной). Допустим, что все корни уравнения $f(x_0, y) = 0$ различны (точек x_0, в которых уравнение $f(x_0, y) = 0$ имеет кратные корни, лишь конечное число; они называются критическими точками соответствующей алгебраической функции). Выбрав один из корней y_0, определим в окрестности x_0 однозначную ветвь функции $y(x)$ условием $y(x_0) = y_0$. Тогда ее можно продолжать вдоль l, соблюдая требование непрерывности. Если предположить еще, что l не проходит ни через одну критическую точку $y(x)$, ни через точки, в которых $R[x, y, (x)]$ обращается в ∞, то интеграл $\int R(x, y)\,dx$ будет однозначно определен. Более того, в некоторой окрестности кривой l — односвязной области, не содержащей критических точек, его значение не будет зависеть от пути интегрирования: здесь он является однозначной и непрерывной (даже аналитической) функцией x — конечной точки пути l. Но если между двумя путями l и l_1 с общими началом и концом расположены критические точки (а также полюсы функции $R[x, y(x)]$), то значения интеграла вдоль l и l_1 будут, вообще говоря, различными.

Все множество различных значений абелева интеграла, взятого между двумя точками x_0 и x, может быть выражено с помощью целочисленных линейных комбинаций периодов этого интеграла. Простейшим примером периода, обусловленного полюсом подынтегральной функции — полярного периода, может служить в случае $\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \operatorname{Ln} x$ число $2\pi i$. С ним были знакомы и Гаусс (1811), и Пуассон (1820). Он получается как результат интегрирования функции $1/x$ в комплексной плоскости по окружности сколь угодно малого радиуса с центром в полюсе этой функции $z = 0$. Периоды иного типа, так называемые циклические, наблюдаются, например, у интеграла $\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$. Здесь разность двух интегралов по путям l и l_1, соединяющим точки 0 и z (рис. 14), равна интегралу по замкнутому контуру, содержащему внутри две точки разветвления функции $1/\sqrt{1 - z^2}$: -1 и $+1$. Не меняя значения последнего интеграла, этот контур можно заменить двумя окружностями с центрами в указанных точках и соединяющим их отрезком действительной оси, дважды пробегаемым. Значение интеграла — период при положительном обходе этого контура — равно 2π.

Рассмотрим, в частности, эллиптический или ультраэллиптический интеграл первого рода (так вообще называются абелевы интегралы, имеющие конечное значение в окрестности любой точки x, конечной или бесконечной). Общий вид его таков: $\int \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем степень $Q(x)$ меньше, чем $p = [(n-1)/2]$ (n — это степень многочлена $P(x)$; при указанном условии интеграл сходится в точке $x = \infty$). Тогда

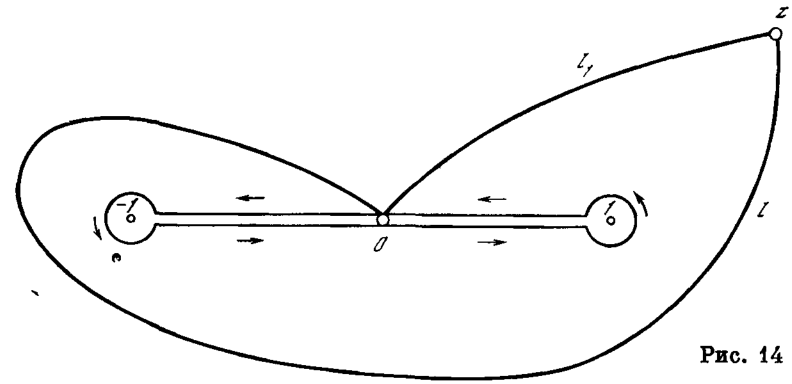


Рис. 14

имеет место одна из двух формул в зависимости от конфигурации путей l и l_1:

$$\int_{l_1} \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} = \int_{l} \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} + 2m_1\omega_1 + \ldots + 2m_{2p}\omega_{2p}$$

или

$$\int_{l_1} \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} = 2\omega_0 - \int_{l} \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} + 2m_1\omega_1 + \ldots + 2m_{2p}\omega_{2p},$$

где $m_1, \ldots, m_{2p}$ — целые числа, а $2\omega_0, 2\omega_1, \ldots, 2\omega_{2p}$ — комплексные числа, зависящие только от подынтегральной функции. Из них $2p$ чисел $2\omega_1, \ldots, 2\omega_{2p}$, любые целые кратные которых могут входить в правые части последних формул, называются *периодами интеграла* $\int \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни уравнения $P(x) = 0$, то можно, например, положить

$$2\omega_j = 2\int_{\alpha_j}^{\alpha_n} \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

интегрируя каждый раз по фиксированным путям, удовлетворяющим условиям, о которых было сказано выше. Так, например, для эллиптического интеграла первого рода в нормальной форме Лежандра

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0 < k < 1),$$

где $p = 1$ и $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1/k$, $\alpha_4 = 1/k$, два соответствующих периода можно выбрать следующим образом:

$$2\omega_1 = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 4K,$$

$$2\omega_2 = 2\int\limits_{-1}^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 4K + 2iK',$$

где

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \text{а} \quad K' = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \quad (k'^2 = 1 - k^2).$$

Если же $n = 5$ или $n = 6$, то $p = [(n-1)/2] = 2$ и мы получаем четыре периода гиперэллиптического интеграла. Эти периоды были открыты Якоби весьма своеобразным путем, во всяком случае без явного выхода в комплексную плоскость, в 1832 г. (см. об этом ниже). Сам Абель знал еще в 1824 г., что переход от эллиптических интегралов к более общим — абелевым приводит к возрастанию числа периодов. Однако нет указания на то, что он точнее представлял себе эту закономерность, в общем виде раскрытую Риманом.

Естественно, что интерес к периодам был связан с проблемой обращения интегралов: периоды интегралов должны быть периодами (в обычном смысле слова) обратной функции. Вот почему из наличия более чем двух независимых периодов у абелева интеграла вытекало, что обратная функция должна обладать более чем двумя (независимыми) периодами. К этому вопросу мы вернемся ниже, а теперь сформулируем теорему Абеля; при этом мы для краткости воспользуемся геометрическим языком (кривые, точки пересечения), к которому сам Абель не прибегал.

Сумма значений любого абелева интеграла, взятых от общей начальной точки (x_0, y_0) до N точек пересечения данной кривой $f(x, y) = 0$ с переменной алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ (ее уравнение включает параметры), равна рациональной функции от коэффициентов многочлена $F(x, y)$, сложенной с конечным числом логарифмов от аналогичных рациональных функций, умноженных на константы.

Доказательство этой общей теоремы, предложенное самим Абелем, довольно просто. Оно по сути дела вытекает их двух элементарных фактов: 1) любая симметрическая рациональная функция корней алгебраического уравнения есть рациональная функция его коэффициентов и 2) интеграл от рациональной функции есть сумма рациональной функции и конечного числа логарифмов рациональных функций. Это обстоятельство дало повод Э. Пикару сказать [63], что в истории науки, быть может, не было предложения столь же важного, полученного столь простыми средствами.

Анализируя следствия из общей теоремы, Абель пришел к выводу, что для каждой алгебраической кривой $f(x, y) = 0$ должно существовать такое наименьшее целое неотрицательное число p, что для суммы любого числа q $(q > p)$ абелевых интегралов

$$S = \sum_{j=1}^{q} \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_j, y_j)} R(x, y)\, dx$$

$$(f(x_0, y_0) = f(x_j, y_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, q)$$

---

[63] *Picard E.* Traité d'analyse. Paris, 1893. T. 2. Мы пользовались третьим изданием (1925), где эти слова приведены на с. 464.

выполняется соотношение

$$S=\sum_{k=1}^{p}\int_{(x_0,\, y_0)}^{(X_k,\, Y_k)} R(x,y)\,dx+V_0+A_1\ln V_1+\ldots+A_m\ln V_m.$$

Здесь X_k $(k=1, \ldots, p)$ — алгебраические функции от $x_1, \ldots, x_q$ и притом такие, что каждая рациональная симметрическая функция от $X_1, \ldots$ $\ldots, X_p$ рационально выражается через $x_1, \ldots, x_q$, а $V_0, V_1, \ldots, V_m$ — рациональные симметрические функции от $x_1, \ldots, x_q$, наконец, $A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$ — постоянные (теорема сложения для абелевых интегралов). В случае, когда $\int R(x, y)\,dx$ есть интеграл первого рода, можно утверждать, что все числа $A_1, \ldots, A_m$ равны нулю, а V_0 есть константа.

Появившаяся здесь впервые в истории математики целочисленная характеристика p любой алгебраической кривой $f(x, y)=0$ была позднее рассмотрена Риманом и в «Теории абелевых функций» (1857) (см. ниже); именно он обозначил ее буквой p; Клебш положил начало ее систематическому использованию в теории алгебраических кривых в цикле статей, включающих «Геометрические применения абелевых функций» (Geometrische Anwendungen der Abelschen Funktionen.— J. für Math., 1864, 63) и «Плоские кривые с координатами как рациональными функциями параметра» (Ebene Curven, mit Coordinaten als rationale Funktionen des Parameters.— J. für Math., 1865, 64) и др. Он назвал число p родом кривой. В случае $y^2=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны и $n\geqslant 3)$ род $p=[(n-1)/2]$. В частности, для эллиптических интегралов, где $n=3$ или $n=4$, род равен единице; если это еще интегралы первого рода, то только что цитированная теорема позволяет утверждать, что сумма любого их числа q с точностью до аддитивной константы равна одному лишь интегралу, верхний предел которого X есть алгебраическая функция верхних пределов слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_q$ (или точнее — рациональная функция от x_j, y_j, $j=1, 2, \ldots, q$). Этот частный случай был известен еще Эйлеру.

Четырехкратно-периодические функции

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, попытка обращения абелевых интегралов, в частности ультраэллиптических, должна была привести к рассмотрению функций, число независимых периодов которых больше двух. Но что это за функции и какова их природа? К этим вопросам внимание математиков привлекла небольшая работа Якоби «О четырехкратно-периодических функциях двух переменных» (De functionum duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum initur.— J. für Math., 1835, 13).

Отметив, что периоды функций, изучаемых в математике, выражаются либо в виде целых кратных одного из них, либо в виде целочисленных линейных комбинаций двух таких, отношение которых не есть число действительное (случай эллиптических функций), Якоби спрашивает: может ли некоторая функция (подразумевается: одного переменного) иметь три периода, которые нельзя свести к двум? Путем обстоятельного исследования чисто арифметического характера он приходит к отрицательному выводу (теорема Якоби). Точнее говоря, он доказывает, что допущение существования такой функции приводит к тому, что среди ее периодов должны иметься сколь угодно малые по модулю (и отличные от нуля), что он без дальнейших пояснений объявляет абсурдным.

На этом основании он объявляет абсурдной попытку обращения интеграла $u = \int\limits_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$, где X — многочлен 5-й степени с действительными различными между собой нулями. И в самом деле, он показывает, что функция $x = \lambda(u)$ должна была бы иметь четыре различных периода (это обстоятельство было им отмечено еще в 1832 г.). Последнее утверждение является справедливым. Но оно вполне объясняется тем, что функция $x = \lambda(u)$ — бесконечнозначная аналитическая функция, для которой равные между собой значения, принадлежащие, однако, различным ветвям функции, принимаются в сколь угодно малой окрестности любой точки

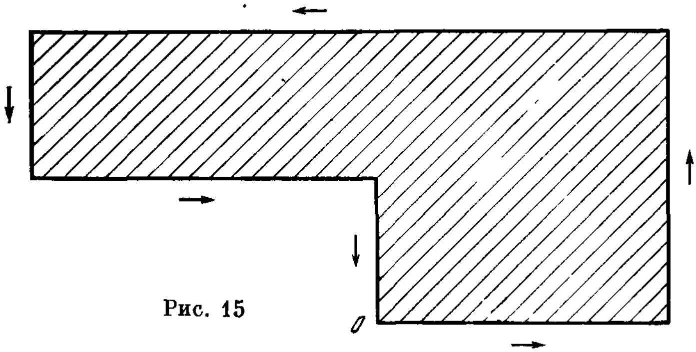


Рис. 15

$u = u_0$. Все это могло бы стать наглядно ясным, если заметить, что интеграл $w = \int\limits_0^z \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$ взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на шестиугольник с прямыми углами. Каждая его сторона изображает один из полупериодов интеграла, которые, как видно из чертежа, могут быть сведены к четырем (рис. 15). Если шестиугольник зеркально отражать в каждой из его шести сторон и процесс отражения неограниченно продолжать для всех вновь получаемых шестиугольников, то вся плоскость z покроется бесконечным множеством слоев шестиугольного паркета. В каждой штуке паркета определена однозначная ветвь $z = z(w)$, отображающая шестиугольник на верхнюю или нижнюю полуплоскость плоскости w. При этом в каждой окрестности любой точки $w = w_0$ найдется бесконечное множество точек, образы которых представляются одним и тем же числом z_0, но располагать их следует на различных штуках многослойного паркета. Разумеется, Якоби все эти рассуждения были чужды, и он настаивал на «абсурдности» такой функции, как $z = z(w)$.

Позднее Эрмит пытался подкрепить позицию Якоби, объясняя, что последний неявно предполагал в своей теореме о периодах функции однозначными (и, конечно, непрерывными, отличными от константы). Однако такое объяснение, разделяемое также издателем немецкого перевода статьи Якоби (в подлиннике она написана по-латыни) Г. Вебером [64], представляется нам недостаточно обоснованным.

На самом деле, как явствует из дальнейшего текста рассматриваемой работы, Якоби не исключает заранее многозначные функции, такие, как

[64] *Jacobi C. G.* Uber die vierfach periodischen Functionen zweier Variablen // Hrsg. von H. Weber. Leipzig, 1895, S. 37 (Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften).

Arcsin x, Lnx или эллиптический интеграл первого рода, который для данного значения верхнего предела x (якобиевского синуса амплитуды) принимает бесконечное множество значений, различающихся на величины периодов. Во всех этих примерах различные значения многозначной функции в данной точке образуют, выражаясь современным языком, дискретное множество: ни одно из них не является предельным для остальных. Вот это-то условие Якоби, по-видимому, и считает необходимым для аналитических функций (для него — функций, изучаемых в анализе). За пределами математического анализа и его возможностей он оставляет те многозначные функции, которые, выражаясь его словами, «приводят к столь сильной множественности значений, что... среди этих значений всегда найдутся такие, которые отличаются от любого заданного действительного или мнимого числа меньше, чем на любую заданную малую величину»[65]. Но именно такой «сильной множественностью значений», как разъяснялось выше, должны обладать функции, обратные ультраэллиптическим интегралам, да и сами ультраэллиптические интегралы.

Лишь следуя путями, указанными впоследствии Б. Риманом и К. Вейерштрассом, математики смогли убедиться, что «сильная многозначность», смутившая Якоби, отнюдь не противоречит природе аналитичности в точном значении последнего понятия. По сути дела «парадокс Якоби», если можно так его назвать, был полностью разъяснен Риманом еще в 1857 г. В самом деле, в работе «Теория абелевых функций» (Theorie der Abelschen Funktionen.— J. für Math., 1857, 54) он показал, в частности, что произвольный абелев интеграл, относящийся к алгебраической кривой любого рода p, отображает соответствующую риманову поверхность T на некоторую риманову поверхность S и притом так, что обратная интегралу функция является $2p$-периодической на S[66]. В силу этого отпадают все сомнения и для случая ультраэллиптического интеграла.

Однако современники Римана с трудом воспринимали эти результаты, понимание которых предполагает владение идеей римановой поверхности. Об этом свидетельствует, например, тот факт что даже ученик Римана профессор Политехникума в Цюрихе и университета в Вюрцбурге Ф. Прим (1841—1915) утверждал в 1864 г. относительно ультраэллиптического интеграла, рассмотренного Якоби, что вообще ни сам этот интеграл нельзя рассматривать как функцию его верхнего предела, ни верхний предел как функцию интеграла. Иной точки зрения придерживался профессор университета в Павии Ф. Казорати, отстаивавший свои взгляды в ряде работ (1863—1886). Но и ему понадобилось более 20 лет, чтобы окончательно представить себе отображение соответствующих римановых поверхностей[67]. Пока же нужно отметить, что желание выйти из воображаемого тупика оказалось весьма плодотворным для дальнейшего развития науки. Оно заставило Якоби отказаться от прямого изучения отдельно рассматриваемых абелевых интегралов и от попыток их обращения по аналогии с обращением эллиптических интегралов и привело его к открытию абелевых функций, которые, вероятно, было бы справедливо называть также якобиевыми.

---

[65] Ibid., S. 28.

[66] Этот мемуар Римана рассматривается нами ниже.

[67] Обо всех интересных деталях дискуссии о «парадоксе Якоби», в основе которой, с нашей точки зрения, лежит скорее психологическая, чем математическая проблема, можно прочесть в недавней работе Э. Нойеншвандера «О наследстве Казорати (1835—1890) в Павии» (Der Nachlass von Casorati (1835—1890) in Pavia.— Arch. Hist. Exact Sci., 1978, 19, N 1).

Впервые идея Якоби была изложена тремя годами раньше рассматриваемой работы «Общие рассмотрения абелевых трансцендентностей» (Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.— J. für Math., 1832, 9). Идея эта на примере ультраэллиптического интеграла первого рода $\int\limits_a^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$, где X — многочлен пятой или шестой степени (здесь род кривой $y^2=X$ равен двум), состоит в том, чтобы вместо одного такого интеграла, взятого отдельно, рассматривать сумму двух значений интеграла с независимыми верхними пределами x и y

$$u=\int\limits_a^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}+\int\limits_b^y \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Положим еще

$$u'=\int\limits_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}}+\int\limits_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

(интегралы $\int\limits_a^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$ и $\int\limits_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}}$ предполагаются линейно независимыми, для чего достаточно положить $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$). Задача, предложенная Якоби, заключается в том, чтобы рассматривать x и y как функции двух независимых переменных u и u':

$$x=\lambda(u, u') \text{ и } y=\lambda'(u, u').$$

Замечательно, что так определенные функции (абелевы функции, по терминологии, предложенной самим Якоби) уже не бесконечнозначны: они всего лишь двузначны, чего, впрочем, сам Якоби не доказывает. То, что он убежден в их двузначности, точнее говоря, в однозначности симметрических функций $x+y=\lambda+\lambda'$ и $xy=\lambda\lambda'$, вытекает из его предложения рассматривать x и y как корни квадратного уравнения вида $Ux^2-U'x+U''=0$, где U, U' и U'' — функции двух переменных u и u'. Однозначность последних была установлена в позднейших исследованиях.

В качестве «фундаментальной теоремы» Якоби доказывает в уже рассматривавшейся выше работе «О четырехкратно-периодических функциях двух переменных», что $\lambda(u, u')$ и $\lambda'(u, u')$ являются четырехкратно-периодическими функциями. Он вводит их для конкретного случая

$$X=x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x).$$

За основные периоды здесь могут быть приняты числа

$$\omega_0=2i\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}}dx,\qquad \omega_1=2\int\limits_{0}^{1}\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}}dx,$$

$$\omega_2=2i\int\limits_{1/\lambda^2}^{1/\mu^2}\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}}dx,\qquad \omega_3=2\int\limits_{1/\mu^2}^{\infty}\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}}dx$$

для переменной u и аналогичная четверка ω_0', ω_1', ω_2' и ω_3', вычисляемая по указанным формулам с заменой α и β на α' и β',— для переменной u'. Якоби разъясняет, что две системы ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 и ω_0', ω_1', ω_2', ω_3' являются периодами для λ (и λ') в следующем смысле:

$$\lambda(u + m\omega_0 + m'\omega_1 + m''\omega_2 + m'''\omega_3,\ u' + m\omega_0' + m'\omega_1' + m''\omega_2' + m'''\omega_3') = \lambda(u, u')$$

(и аналогично для λ').

Существенно, что целочисленные линейные комбинации систем периодов ω_j и ω_j' ($j = 0, 1, 2, 3$) берутся для u и для u' *с одними и теми же соответствующими коэффициентами* (ω_j и ω_j' — *совместные системы периодов*).

Якоби разъясняет, что для функций λ и λ' наличие четырех периодов не противоречит самой природе понятия функции, ибо здесь не одно, а два независимых переменных: u и u'. Именно когда $\omega = m\omega_0 + m'\omega_1 + m''\omega_2 + m'''\omega_3$ принимает сколь угодно малые (по модулю) значения, величина $\omega' = m\omega_0' + m'\omega_1' + m''\omega_2' + m'''\omega_3'$ с теми же коэффициентами принимает сколь угодно большие по модулю значения. Выражаясь современным языком, можно сказать, что расстояние между точками (u, u') и $(u + \omega, u' + \omega')$ стремится к бесконечности.

Исследование Якоби получает существенное продолжение в работе Адольфа Гёпеля (1812—1847), довольствовавшегося скромным уделом служащего Берлинской королевской библиотеки. Его основной труд «Набросок теории абелевых трансцендентных функций первого порядка» (Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis.— J. für Math., 1847, 35) вышел в свет уже после смерти автора с кратким послесловием Якоби и Крелле. В нем Гёпель проделывает для абелевых функций работу, аналогичную той, которую сам Якоби выполнил для эллиптических функций в 1835—1836 гг. в курсе, читанном в Кёнигсбергском университете. Коротко говоря, Гёпель строит 16 однозначных функций $P, P', P'', P''', Q, Q', \ldots, R, \ldots, S'''$ двух переменных u и u', аналогичных тэта-функциям по структуре (суммы рядов показательных функций, показателями которых являются многочлены первой степени относительно u и u' и второй степени относительно целочисленных индексов суммирования) и свойствам. Из этих свойств вытекает, что отношения их, взятые попарно, являются однозначными четырехкратно-периодическими функциями от u и u'. Далее Гёпель устанавливает алгебраические соотношения между этими функциями и выводит дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют. Преобразуя последние, он показывает, наконец, по каким формулам следует вычислять коэффициенты квадратного уравнения Якоби: $Ux^2 - U'x + U'' = 0$. Они представляются Гёпелю в виде отношений изученных им целых функций двух переменных u и u', являющихся обобщениями тэта-функций Якоби, т. е. оказываются мероморфными, четырехкратно-периодическими функциями от u, u'. В настоящее время абелевыми функциями p комплексных переменных $u_1, \ldots, u_p$ как раз и называются мероморфные функции, имеющие $2p$ независимых систем периодов. В частном случае при $p = 1$ абелевы функции совпадают с классом эллиптических функций. При $p \geqslant 1$ они содержат в качестве собственного подкласса функции, с помощью которых решается (как, например, в работе Гёпеля) соответствующим образом формулированная задача обращения Якоби (специальные абелевы функции). Однако в полном объеме этого понятия абелевы функции выходят за пределы указанной задачи. Они имеют широкие применения в задачах алгебраической геометрии поверхностей.

Высоко оценивая работу Гёпеля, которого он лично не знал, Якоби сообщал, однако, что к аналогичным результатам пришел, разрабатывая вопрос с бо́льшими деталями, его бывший ученик Георг Розенхайн (1816—1887), с 1857 г.— профессор Кёнигсбергского университета. Обширная работа Розенхайна, подчеркивающего в разных частях свою зависимость от Якоби (в частности, начинающего с задачи обращения эллиптических интегралов третьего рода, но в постановке, предложенной Якоби для ультраэллиптических интегралов), была представлена на конкурс, объявленный Парижской академией, где получила в 1846 г. большой приз. Однако академия опубликовала работу Розенхайна «О функциях двух переменных с четырьмя периодами, являющихся обращениями ультраэллиптических интегралов первого класса» (Sur les fonctions de deux variables et à quatre periodes qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe.— Mém. Sav. étrang., 1851, 11) только в 1851 г.

Итак, в работах Гёпеля и Розенхайна, выполненных под влиянием идей Якоби, были подвергнуты исследованию классы однозначных четырехкратно-периодических функций переменных u и u', представляющихся в виде отношений функций тех же переменных, аналогичных тэта-функциям Якоби, и с их помощью решена задача обращения в постановке Якоби для ультраэллиптических интегралов первого рода (случай, когда под знаком квадратного корня находится многочлен пятой или шестой степени). Эти результаты послужили предпосылкой для общего решения проблемы обращения абелевых интегралов, полученного позднее в трудах Римана и Вейерштрасса. Заметим, что Вейерштрасс уже в 1847 г. опередил Гёпеля и Розенхайна. Выбрав иной путь, который можно было бы сравнить, пожалуй, с первым подходом Гаусса к теории эллиптических функций (чего сам Вейерштрасс не знал), он решил задачу обращения в постановке Якоби для ультраэллиптических интегралов любой степени. Однако полное изложение этих результатов он начал публиковать только в 1856 г. О методе Вейерштрасса речь будет идти ниже.

Итоги развития основ теории аналитических функций за первую половину XIX в.

Знаменитая диссертация Римана «Основания общей теории функций одной комплексной переменной» по дате ее появления (1851) точно делит пополам XIX столетие. Именно к этому времени накопились внутренние противоречия исторического процесса построения основ теории аналитических функций комплексного переменного, настоятельно требовавшие новых идей для своего разрешения.

Мы видели, что Гаусс уже к 1811 г. располагал концепцией комплексного переменного в виде точки, перемещающейся на плоскости, и умел объяснять многозначность простейших функций ($\operatorname{Ln} z$) наличием различных путей интегрирования, соединяющих две точки комплексной плоскости. В явном и полном виде эта концепция не была высказана ни в печатных трудах Гаусса, ни в трудах кого-либо из его современников. Ближе других к ней подходил Коши. Но и он, как отмечалось выше, до второй половины 40-х годов все еще искал приемлемую для себя интерпретацию комплексного числа. При этом он стремился отойти от заявленного в 1821 г. чисто условного понимания комплексного числа как символа, самого по себе лишенного смысла, и лишь после колебаний остановился на геометрическом истолковании. Напомним, что такое истолкование было подтверждено авторитетом Гаусса за полтора десятилетия до этого («Теория биквадратичных вычетов. Сообщение второе», 1832) и что в названной работе Гаусса впервые появился термин «комплексные числа».

Работы самого Коши и его младших современников содержали набор мощных средств исследования различных проблем анализа. Мы уже называли выше важнейшие из этих средств: интегральная теорема, интеграл Коши, теорема о разложении в степенной ряд, оценки коэффициентов ряда через максимум модуля суммы на окружности, понятие вычета и теорема о вычетах. С помощью «исчисления пределов» Коши показал значение этих средств для установления сходимости степенных разложений неявных функций или функций, определенных дифференциальными уравнениями. Перечисленные средства в принципе были вполне достаточны, например, для систематической разработки основ теории целых и мероморфных функций. Но область эта продолжала оставаться «белым пятном» на карте теории функций до работ Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера. Усилиями Лиувилля из нее был выхвачен лишь один участок — теория эллиптических функций как класса мероморфных функций, обладающих двоякой периодичностью. Конечно, такое опережение частной теории по отношению к общей произошло благодаря тому, что эллиптические функции все еще продолжали занимать одно из центральных мест в поле интересов математиков того времени. Впрочем, центр этот уже сместился в сторону абелевых (в частности, ультраэллиптических) интегралов и задачи их обращения. Но на непосредственное обращение ультраэллиптических интегралов Якоби наложил своего рода вето, объявив функции одного переменного, имеющие более двух независимых периодов, абсурдными или несуществующими.

Мы уже говорили, что дело здесь заключалось вовсе не в том, что он молчаливо требовал однозначности таких функций, как объясняли позднее Ш. Эрмит и Г. Вебер, а в том, что для подобного обращения само понятие функции утрачивало в глазах Якоби свой смысл и значение вследствие «чрезмерно сильной многозначности». Короче говоря, Якоби не видел, выражаясь современным языком, возможности расчленения функций такого рода на однозначные ветви.

Правда, Якоби тогда же совершил гениальное открытие, указав, что аналогия с обращением эллиптических интегралов может быть восстановлена, если обращать не один только отдельно взятый ультраэллиптический интеграл первого рода, а надлежащее число сумм значений нескольких таких (линейно независимых) интегралов. Но при этом должны были появиться функции не одного, а нескольких комплексных переменных, знакомство с которыми было еще весьма фрагментарным. Кроме того, осуществление идеи Якоби даже в простейших случаях интегралов первого рода, зависящих от квадратного корня из многочлена пятой или шестой степени, встречалось с серьезными трудностями. Они вызывались прежде всего значительным усложнением выкладок по сравнению с задачей обращения эллиптических интегралов.

Чтобы судить об этом усложнении, достаточно просто перелистать страницы мемуаров Гёпеля или Розенхайна, подряд заполненные громоздкими формулами. Но дело этим не исчерпывалось. Трудности коренились также в нежелании авторов соответствующих работ, начиная с Якоби, опираться на представления о комплексном переменном и интегрировании по путям, расположенным в комплексной плоскости, подсказываемые исследованиями Коши. Выражаясь фигурально, можно сказать, что упомянутые авторы страшились оторваться от действительной оси, хотя и не могли обходиться без мнимых чисел. Так, например, у Якоби и у Розенхайна в их классических работах о четырехкратно-периодических функциях все нули многочлена X, стоящего под знаком квадратного корня, являются действительными числами и переменное x изменяется только в интервалах, на которые нули делят эту ось. При этом естественно возникают осложнения, связанные с двузначностью $\sqrt{X}$.

Удивительно, что Якоби все же удается отыскать периоды интеграла. Делает он это путем использования вспомогательного переменного φ, через которое выражаются и x, и $u = \int\limits_0^x \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx$ (X — многочлен пятой степени). Пусть a и b ($a < b$) — два соседних нуля многочлена X. Якоби делает подстановку $x = a + (b - a) \sin^2\varphi$ так, что x возрастает от a до b, когда φ возрастает от 0 до $\pi/2$. При этом подынтегральная функция приобретает вид $F(\varphi)$, где $F(\varphi)$ — четная функция с периодом π (и, кроме того, как скажем мы теперь, аналитическая на действительной оси). Поэтому ее разложение в ряд Фурье $F(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_2 \cos 2\varphi + \gamma_4 \cos 4\varphi + \ldots$ сходится к ней (равномерно) в любом интервале. Переписывая u в виде

$$u = \int\limits_0^a \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx + \int\limits_a^x \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx = C + \int\limits_0^\varphi F(\varphi)\, d\varphi$$

и интегрируя почленно разложение для $F(\varphi)$, находим $u = C + \gamma_0\varphi + (\gamma_2/2) \sin 2\varphi + \ldots$ Отсюда, в частности, при $\varphi = \pi/2$ ($x = b$) получаем

$$2\int\limits_a^b \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx = \gamma_0\pi.$$

Но из найденного разложения для u вытекает, что при изменении φ на π значение интеграла изменяется на $\gamma_0\pi$, тогда как $x = a + (b - a) \sin^2 \varphi$ при этом не изменяется. Отсюда и следует, что $\gamma_0\pi = 2\int\limits_0^b \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx$ есть *период функции* $x = x(u)$ или, что то же, *период интеграла*

$$\int\limits_0^x \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx.$$

Так как нули многочлена X делят числовую ось на шесть интервалов, то Якоби получает таким путем шесть периодов (для крайних бесконечных интервалов указанная выше подстановка для x надлежащим образом видоизменяется): три из них действительные числа и три чисто мнимые. Но он сводит их только к четырем периодам, замечая, что сумма их равна

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{X}} dx = 0,$$

откуда вытекает, что равны нулю порознь суммы действительных и чисто мнимых периодов.

Для математика, вооруженного теоремой Коши (она была опубликована в 1825 г.), равенство нулю последнего интеграла вытекает из этой теоремы, примененной к однозначной ветви функции $(\alpha + \beta x)/\sqrt{X}$ в верхней полуплоскости; при этом, конечно, подразумевается предельный переход, при котором точки разветвления $\sqrt{X}$ обходятся по полуокружностям, расположенным в указанной области. Но не таков ход рассуждений Якоби. Он считает, что равенство нулю интеграла просто следует из того, что в результате замены x на $1/x$ оба предела интеграла совпадут между собой — обратятся в нуль! Этот же аргумент, без всяких изменений, приводит и Розенхайн. А ведь последний выступал в 1846 г., на 12 лет позже Якоби, и свою работу направлял на премию Парижской академии, членом которой был Коши! Здесь сказывается явная недооценка идей Коши со стороны Якоби и математиков, находившихся под прямым влиянием последнего.

В этой связи любопытно уже цитированное в первой книге нашего труда высказывание об основательности математических доказательств, содержащееся в письме Якоби к А. Гумбольдту от 21 декабря 1846 г.: «Когда Гаусс говорит, что он доказал что-либо, то это кажется мне весьма вероятным, когда это говорит Коши, можно держать пари столько же за это, сколько и против, но когда говорит Дирихле — это достоверно» [68].

Что касается Коши, то мы видели раньше, что одна из его теорем вызвала сомнение у Абеля, указавшего противоречащий пример: сомнения возникли по другому поводу и у Чебышева, требовавшего доказательства законности почленного интегрирования ряда. В самом начале предисловия ко второму изданию своего трактата «Теория эллиптических функций» (1875, с. 1) Брио и Буке выражают сожаление, что в некоторых сочинениях, посвященных теории функций комплексного (они пишут: мнимого) переменного, не отдается должное Коши («on ne rend pas à Cauchy la justice qui lui est due»).

Забегая вперед, скажем, что К. Вейерштрасс в своих курсах, которые он на протяжении десятилетий вел в Берлинском университете, почти не ссылался на Коши. А когда Парижская академия преподнесла ему в 1882 г. только что изданный I том собрания сочинений Коши, Вейерштрасс не откликнулся на это ни одной строчкой [69].

Чем объяснить такое пренебрежение к идеям и конкретным результатам Коши со стороны людей, которые, казалось бы, больше, чем кто-либо другой, могли по достоинству оценить их исключительное значение для науки? Оставим вопрос о симпатиях и антипатиях, приязни и неприязни, о которых у нас нет оснований судить. Несомненно, однако, что указанное положение объяснялось в какой-то мере характером и направлением научной деятельности самого Коши. Будучи необыкновенно плодовитым, он заполнял страницы «Докладов» Парижской академии сотнями своих заметок, не всегда содержательных, иногда повторяющих ранее им сказанное, а подчас и оспаривающих одна другую. Вспомним хотя бы колебания по вопросу о том, нужно или нет включать требование существования непрерывной производной в условия теоремы о разложимости функций в степенной ряд! Ему как будто не хватало существовавших тогда научных журналов, и он создавал свои, в которых выступал единственным автором.

Однако главной причиной отсутствия серьезного интереса к трудам Коши со стороны людей, увлеченно разрабатывавших новую проблематику, родившуюся в исследованиях Абеля и Якоби (эллиптические функции, абелевы интегралы и задача их обращения), являлось, по нашему мнению, то, что сам Коши, при всем многообразии его научных интересов, был равнодушен к этой тематике. Она была чуждой его интересам, о чем свидетельствует хотя бы его безучастное отношение к мемуару Абеля, содержавшему знаменитую теорему последнего в полном объеме. Мемуар этот был опубликован Парижской академией в 1841 г. под влиянием офици-

---

[68] *Biermann K. R.* Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810—1820. Berlin, 1973, S. 31.

[69] *Dugac P.* Eléments d'analyse de Karl Weierstrass.— Arch. Hist. Exact Sci., 1973, 10, p. 61.

ального запроса Норвегии. Сам Коши как исследователь мало что сделал для непосредственного применения своих идей к многозначным функциям, если не говорить об элементарных функциях — логарифме и обратных тригонометрических, относительно которых он не скупился на разъяснения.

Впрочем, именно на примере элементарных функций можно продемонстрировать те трудности, которые представляла идея многозначности для Коши (и, конечно, также и для его современников).

В «Мемуаре о функциях мнимых переменных» (Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires), опубликованном в 36-м выпуске «Упражнений по анализу и математической физике» (1846), Коши определяет, как мы сказали бы теперь, главные ветви многозначных функций комплексного переменного: $x^{1/n}$, x^q, $\ln\ x$, подчиняя аргумент p комплексного числа x условию $-\pi < p \leqslant \pi$. Он отмечает, что это условие могло бы быть иным, например: $\varphi - \pi < p \leqslant \varphi + \pi$. Однако если мы отождествим p с полярным углом, например, и будем отсчитывать его в пределах от 0 до $2\pi : 0 \leqslant p < 2\pi$, то встретимся с тем неудобством, что функции эти будут испытывать разрыв в каждой точке положительной части действительной оси. Важно подчеркнуть здесь, что в этом мемуаре, по-видимому, впервые используются разрезы плоскости (скажем, вдоль действительной оси), оказывающиеся линиями разрыва. В исследованиях Римана таким линиям будет уделено первостепенное внимание. При этом Коши указывает, что положение этих линий на плоскости зависит от принятых соглашений (т. е. от способа выделения однозначной ветви многозначной функции). Мы усматриваем во всем этом своего рода заготовки строительного материала для будущих римановых поверхностей.

Каким бы скромным ни представлялся нам вклад в науку, содержащийся в этом мемуаре, нельзя пройти мимо оценки, принадлежащей самому Коши: «В моем „Алгебраическом анализе“,— пишет он,— в рассматриваемой статье (с. 287) и в моих предыдущих работах я ограничивался употреблением этих обозначений [т. е. $\ln x$, x^q. —*А. М.*] в случае, где действительная часть переменного x положительна». Итак, дело заключалось в том, чтобы перейти от однозначной ветви в полуплоскости к ветви в плоскости с разрезом. Шаг не большой, но он был необходим на пути к римановой поверхности!

Последние выпуски четвертого тома «Упражнений по анализу», титульный лист которого датирован 1847 г., фактически выходили в свет уже после 1850 г. В помещенной здесь статье «О непрерывных функциях алгебраических или геометрических количеств» (Sur les fonctions continues de quantités algébriques ou géométriques) Коши продолжает настаивать на том, что точка разветвления (сам термин был введен вслед за этим Риманом) есть точка разрыва непрерывности функции (например, $z = 0$ для $z^{1/p}$). Мы уже говорили, что для такого понимания у него были основания. Ведь для функций комплексного переменного введенное Коши требование непрерывности играло роль необходимого и достаточного условия разложимости функции в степенной ряд. Оно неявно включало в себя не только однозначность, конечность и непрерывность функции, но и те же свойства ее первой производной, существование которой подразумевалось. Поэтому точка разрыва в его терминологии (буквально: частное значение переменного, в окрестности которого функция перестает быть непрерывной или при которой она становится разрывной) означает в сущности то же, что и особая точка в работах Пюизё (1850). В этом понимании Коши владеет представлением об особой точке аналитической функции комплексного переменного уже с 1832 г.— со времени литографированного туринского мемуара.

Вернемся к названной выше работе Коши. В ней он выделяет в данной области (площади) под именем монодромных (от греческих слов: монос — один и дромос — бег) функции, которые приходят к одному и тому же значению независимо от того, как «точка с аффиксом z бегает здесь и там, не выходя из области S и обращаясь вокруг особых точек, соответствующих бесконечным значениям функций» [70]. Как видно, здесь Коши использует термин «особая точка» (le point singulier) только по отношению к полюсу. Через несколько страниц он употребляет термин «путь» (le chemin) для обозначения непрерывной кривой, описываемой на плоскости точкой с аффиксом z, и в сноске упоминает «замечательный мемуар (Пюизё) под названием „Исследования об алгебраических функциях" (1850)», в котором, как он полагает, впервые использован термин «путь» в указанном смысле [71]. В следующей статье тех же «Exercices» «О дифференциалах алгебраических или геометрических количеств и о производных функций этих количеств» (Sur les différentielles de quantités algébriques ou géométriques, et sur les dérivées de fonctions de ces quantités), которую, как следует из только что приведенной ссылки на мемуар Пюизё, нужно отнести не ранее чем к 1850 г., появляется класс функций моногенных, определяемых условием, что их производная монодромна. Пример функции моногенной, но не монодромной, приводимый Коши, это $\ln z$.

Мы видим, что Коши весьма осторожно отходит от требования однозначности, вводя вслед за однозначными лишь такие многозначные функции, производная которых однозначна. За пределами этого расширенного класса (моногенных функций) продолжают оставаться алгебраические иррациональные функции и их интегралы, т. е. как раз функции того самого класса, на изучении которого были сосредоточены усилия математиков того времени!

Заметим, что термин «монодромия» сохранил первоначальный смысл и доныне, например в названии теоремы о монодромии (теорема об однозначности функции, получающейся путем аналитического продолжения суммы степенного ряда по всем путям, лежащим в какой-либо односвязной области). Но класс моногенных функций в понимании Коши оказался нежизненным. Термин «моногенность» употребляется теперь просто в смысле дифференцируемости функции по комплексному переменному (в точках области или в точках некоторых нигде не плотных множеств, удовлетворяющих определенным условиям метрического характера; в последнем случае речь идет о *функциях, моногенных в смысле Бореля*).

Возвратимся к алгебраическим функциям. Не делая их предметом специального изучения, Коши все же создал все средства, необходимые для построения их теории, которыми и воспользовался Пюизё. Этими средствами являлись прежде всего комплексное интегрирование, приводившее при помощи интеграла Коши к степенному разложению функции, и (более специально) теорема Коши о неявных функциях. Мы уже упоминали о ней выше как о ранней форме так называемой подготовительной теоремы Вейерштрасса. В переводе на современный язык теорема Коши звучала бы так:

если $f(x, y)$ — аналитическая функция двух переменных в окрестности точки (a, b), причем b является n-кратным корнем уравнения $f(a, y) = 0$, и $F(y)$ — функция, аналитическая в окрестности точки $y = b$, то существует окрестность точки $x = a$, в которой:

---

[70] *Cauchy A. L.* Exercices. Paris, 1847, t. 4, p. 325.
[71] Ibid., p. 328.

а) уравнение $f(x, y) = 0$ имеет для каждого $x \neq a$ ровно n корней $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, сколь угодно близких к b (здесь выражается свойство непрерывности корней);

б) $F(y_1) + \ldots + F(y_n)$ является однозначной аналитической функцией x.

В частности, при $n = 1$ функция $y = y(x)$ оказывается однозначной аналитической в окрестности $x = a$.

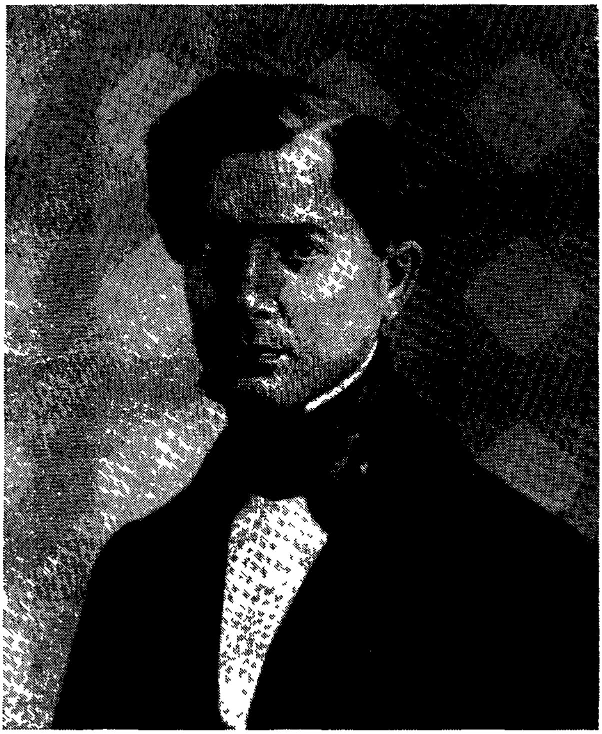
Последняя теорема может быть приложена к случаю, когда $f(x, y)$ есть многочлен относительно x и y, который для определенности будем считать неприводимым, т. е. не разлагающимся на произведение многочленов более низкой степени. Если степень $f(x, y)$ относительно y равна m, то уравнение $f(x, y) = 0$ определяет *алгебраическую функцию* $y = y(x)$, вообще говря, m-значную. Пусть для данного $x = a$ коэффициент при y^m (это многочлен от x) отличен от нуля и уравнение $f(a, y) = 0$ не имеет кратных корней. Тогда по предыдущей теореме получаем для y в окрестности $x = a$ ровно m различных степенных рядов, расположенных по целым неотрицательным степеням $x - a$. Это заключение неприменимо к тем точкам плоскости $x = a$, где либо коэффициент при y^m обращается в нуль, либо уравнение $f(a, y) = 0$ имеет кратные корни; но таких точек только конечное число.

Оказывается, что та же теорема о неявных функциях (точнее, утверждение о непрерывности корней) с опорой на комплексное интегрирование позволяла установить, что в окрестности исключительной (особой) точки $x = a$ функция допускает разложение в обобщенный степенной ряд, в котором показателями степеней $x - a$ могут быть и дроби (с одним и тем же знаменателем), положительные или отрицательные.

Повторяем, что сам Коши не делал этих выводов из своей теории. Он вообще не выделял класс алгебраических функций как особый объект изучения в анализе. Заслуга такой постановки вопроса и первые сюда относящиеся результаты принадлежат французскому математику и астроному В. Пюизё, считавшему, впрочем, необходимым подчеркнуть в своих исследованиях, что он опирается на труды Коши и развивает его идеи.

В. Пюизё. Алгебраические функции

Виктор Александр Пюизё (1820—1883) обучался в Нормальной школе, где слушал лекции Шарля Стюрма (1803—1855), преподавал сначала в Ренне, потом был профессором в Безансоне. Здесь он создал свою основную работу «Исследования об алгебраических функциях» (Recherches sur les fonctions algébriques.— J. math. pures et appl., 1850, 15), за которой вскоре последовало продолжение под названием «Новые исследования об алгебраических функциях» (Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques.— J. math. pures et appl., 1851, 16). В этой работе точно сформулировано понятие алгебраической функции, детально изучено ее поведение в окрестности особых точек с выявлением теоретико-группового характера соответствующих закономерностей, рассмотрен на примере алгебраической функции процесс аналитического продолжения посредством степенных рядов, установлено значение для теории функций топологических (точнее говоря, гомотопических) свойств замкнутых кривых в многосвязной области, дано общее определение периода абелевых интегралов и изучены их свойства в ряде важных частных случаев (в частности, для ультраэллиптических интегралов). Эта и смежные с ней работы сразу обеспечили Пюизё широкую известность. Дальнейшая деятельность Пюизё протекала в Париже: в Нормальной школе, Сорбонне, Бюро долгот и



В. ПЮИЗЁ

Обсерватории. Здесь он занимался преимущественно вопросами астрономии (наблюдениями за прохождениями Венеры, небесной механикой). В 1871 г. Пюизё был избран членом Парижской академии наук.

Принципиальное значение основного мемуара Пюизё, упомянутого выше, заключалось в том, что в нем впервые в истории математики был подвергнут систематическому исследованию обширный класс многозначных аналитических функций, для аналитического представления которых математик мог располагать только локальными средствами: разложением в степенной ряд (обыкновенный или обобщенный), сходящийся лишь в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Так как классический аппарат анализа (производная и интеграл) строится для функций однозначных, то исследователю нужно было прежде всего выяснить условия, при которых он мог сводить изучаемую многозначную функцию к однозначным. Локальный же характер аналитического представления функции требовал установления связи и способов перехода от одного из них к другому, т. е. выявления процесса продолжения, в конечном счете продолжения аналитического.

Пюизё рассматривает неприводимое алгебраическое уравнение вида

$$f(u, z) = Au^m + Bu^{m-1} + \ldots + K = 0,$$

где A, B, . . ., K — многочлены относительно z (мы сохраняем его обозначения). Пусть b — один из корней уравнения $f(b, c) = 0$. Опираясь на свойство непрерывности корней уравнения $f(u, z) = 0$, установленное Коши, Пюизё утверждает, что в точке $z = c'$, близкой к c, среди корней уравнения $f(u, z) = 0$ будет иметься корень b', близкий к b. В связи с этим возникает задача: установить значение u в некоторой точке $z = k$, если, передвигаясь от $z = c$ к $z = k$ по соединяющей их кривой CMK, мы неизменно соблюдаем условие: значения функции в достаточно близких точках кривой должны быть сколь угодно близкими между собой. Иными словами, речь идет здесь сначала о *продолжении алгебраической функции* вдоль заданной кривой CMK как *однозначной непрерывной функции*, т. е. о непрерывном продолжении.

Чтобы такое продолжение было возможным, необходимо избегать на пути точек, в которых u может обращаться в ∞, т. е. полюсов (последний термин отсутствует у Пюизё). Но такие точки соответствуют корням уравнения $A = 0$. Пусть, например, в некоторой точке $A = 0$, но $B \neq 0$; положим $u = v/A$, тогда для v получим уравнение

$$v^m + Bv^{m-1} + \ldots + KA^{m-1} = 0.$$

При $A = 0$ оно имеет корень $v = -B$, а ему соответствует значение $u = \infty$. Кроме того, как это следует из той же теоремы Коши о неявных функциях, нужно избегать и таких точек $z = c$, в которых уравнение $f(u, c) = 0$ имеет кратные корни (эти точки удовлетворяют двум уравнениям $f(u, z) = 0$ и $\partial f/\partial u = 0$ или одному алгебраическому уравнению, получающемуся из них исключением u). Для сколь угодно близких к c точек c' существуют по крайней мере два разных значения, $u = b_1'$ и $u = b_2'$, сколь угодно близких к b, и, следовательно, нарушается условие единственности выбора значения функции, близкого к b.

Таким образом, Пюизё выделяет в качестве особых точек алгебраической функции (сам он не пользуется термином «особые» точки) конечное множество точек плоскости, в которых либо u обращается в бесконечность, либо два или более значения u делаются равными. Первые точки получили впоследствии наименование полюсов, вторые — критических точек [72]. В исторической литературе подчеркивается (повод к этому подал сам Пюизё в примечании на с. 375 первого мемуара), что Коши, когда он говорил о точках разрыва, имел в виду только полюсы, а критические точки от него ускользали. Но мы видели уже, что трактовка Коши понятия точки разрыва охватывала и точки ветвления (например, $z = 0$ в случае $u = \sqrt{z}$).

В соответствии со сказанным выше Пюизё рассматривает далее непрерывное продолжение алгебраической функции по путям, не проходящим ни через одну из особых точек. Пусть CMK — такой путь и u_1 — функция, определяемая в точках пути начальным значением $u = b_1$ при $z = c$. В качестве фундаментального предложения своей теории он доказывает, что значение функции в конечной точке пути $z = k$ не меняется, если «линия CMK переходит в бесконечно близкую $CM'K$». Отсюда следует теорема: «*Если точка z движется из C в K один раз по кривой CMK, а другой — по CNK, то функция u_1, принимающая в C значение b_1, приходит к одному и тому же значению h_1, если можно, деформируя линию CMK,*

[72] Разделение особых точек алгебраической функции на полюсы и критические точки проводится, например, в «Теории эллиптических функций» Брио и Буке (1875). Однако термин «полюс», как указывает Э. Нойеншвандер (The Casorati — Weierstrass Theorem... — Hist. Math., 1978, 5, p. 139—166), впервые был употреблен в этом смысле К. Нейманом в «Лекциях о римановой теории абелевых интегралов» (1865) в связи с тем, что бесконечно удаленная точка изображалась в этом сочинении полюсом сферы. Термин «полюс» вошел в литературу прочно и неизменно. Что касается термина «критическая точка», то его чаще заменяет более общий термин, ранее введенный Риманом, «точка разветвления» (Теория абелевых функций, 1857); для уточнения добавляется еще эпитет «алгебраическая» в отличие от логарифмической или трансцендентной точки разветвления.

совместить ее с CNK, не переходя при этом через такие [*точки*], *в которых функция обращается в* ∞ *или становится равной другому корню уравнения* $f(u, z) = 0$» [73]. В частности, получается, что если $CLMC$ замкнутая линия, вообще говоря, самопересекающаяся и обращающаяся вокруг C сколько угодно раз, то функция u_1, имевшая в начале пути значение b_1, будет иметь то же значение и в конце, если только можно свести эту линию в точку, не переходя при этом ни через одну из особых точек. Таким образом, непрерывное продолжение приводит Пюизё к выделению *однозначной ветви алгебраической функции* в любой области (односвязной), не содержащей особых точек.

Теперь уже имеет смысл интеграл от алгебраической функции $\int u_1 dz$, где интегрирование совершается вдоль пути CMK. Повторяя по существу рассуждения Коши и используя при этом дифференцируемость функции (речь идет о дифференцируемости неявной функции, вытекающей из ее непрерывности и из того, что $\partial f/\partial u \neq 0$), Пюизё устанавливает сначала факт независимости интеграла от пути, затем интегральную формулу для u_1 и, наконец, выводит разложение функции в ряд по степеням $z - c$, указывая, что оно имеет место в круге с центром c и радиусом, равным расстоянию до ближайшей к c особой точки. Он поясняет в сноске (с. 375), уже упоминавшейся нами, что все это было сделано Коши при более общих условиях. Но Коши требовал лишь, чтобы путь не переходил через точки, в которых функция становится разрывной, тогда как в данном случае, где рассматриваются алгебраические функции, можно уточнить его формулировки и доказательства, говоря и о полюсах, и о критических точках вместо точек разрыва.

Получив степенной ряд, Пюизё подчеркивает, что для точек внутри указанного выше круга ряд этот дает для u_1 то же значение, которое могло бы быть получено путем непрерывного продолжения. Мы сказали бы, что он устанавливает здесь *тождество* (*в условиях проводимого исследования*) *непрерывного продолжения и аналитического продолжения*. Далее он использует этот факт, показывая, как можно выделить посредством степенных рядов значение u_1 в точке k, лежащей за пределами круга сходимости (с. 379). Процесс, предлагаемый Пюизё для этой цели, в точности совпадает с процессом *аналитического продолжения* вдоль кривой CMK, излагаемым ныне в учебниках теории функций и связываемым с именем Вейерштрасса. Однако он не ограничивается степенными рядами как средством аналитического продолжения, заменяя их рядами более общего вида

$$\sum_0^{\infty'} c_k [\psi(z)]^k,$$

где $\psi(z)$ — рациональная функция, обращающаяся в нуль в точке c. Пусть σ — контур $|\psi(z)| = \lambda$, окружающий точку c, внутри которого и на котором $\psi(z)$ в различных точках принимает не равные между собой значения (т. е. является однолистной), и пусть все особые точки лежат во внешности σ. Используя интегральную формулу, естественно обобщающую формулу Коши (последняя соответствует частному случаю: $\psi(z) = z - c$), Пюизё выводит из нее разложение требуемого вида, сходящееся на σ и внутри σ. Он замечает, что с помощью подобных разло-

---

[73] J. math. pures et appl., 1850, 15, p. 370—371.

жений также можно продолжать функцию вдоль кривой. Так, если полагать шаг за шагом

$$\psi(z) = (z - c)(z - c'), \quad \psi_1 = (z - c')(z - c''), \ . \ . \ .,$$

где точки c, c', c'', . . . следуют одна за другой по кривой CMK, получаем процесс аналитического продолжения, в котором вместо кругов фигурируют лемнискаты с фокусами в парах точек c, c'; c', c'', . . .

Этим заканчивается первая часть первого мемуара, которая, можно сказать, целиком посвящена идее продолжения функции (сначала непрерывного, затем аналитического).

Основная задача второй части заключается в детальном изучении аналитического аппарата, т. е. рядов, представляющих алгебраическую функцию в окрестности особой точки. Для простоты сначала предполагается, что коэффициент A при u^m не зависит от z и, следовательно, не может обращаться в нуль. Тогда все значения u во всех точках плоскости являются конечными. Пусть $z = a$ — критическая точка, в которой уравнение $f(u, a) = 0$ имеет p-кратный корень b. Около a описывается окружность $CLMC$ так, чтобы ни на ней, ни внутри нее, исключая точку a, не было бы критических точек, и рассматриваются те p функций $u_1, \ . \ . \ ., u_p$, удовлетворяющих уравнению $f(u, z) = 0$, значения которых в точках окружности достаточно малого радиуса сколь угодно мало отличаются от b. Полагая $z = a + \alpha$, $u = b + \beta$, Пюизё рассматривает поведение бесконечно малых величин $\beta_1, \ . \ . \ ., \beta_p$ при обходе точкой z окружности $CLMC$ (так, что, выйдя из C, она возвращается в ту же точку). Так как вся совокупность значений u_j $(j = 1, \ . \ . \ ., p)$, а следовательно, и β_j $(j = 1, \ . \ . \ ., p)$ восстанавливается при обходе (в окрестности a существует p и только p корней уравнения, близких к b), то возможен лишь переход β_j в некоторое β_{k_j}. Пюизё ставит целью выяснить характер этого перехода, т. е. определить подстановку индексов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . \ . \ . & p \\ k_1 & k_2 & . \ . \ . & k_p \end{pmatrix}.$$

Общий результат, заключающийся в том, что эта подстановка является произведением некоторого числа циклических, можно было предвидеть, сославшись на теорему Коши о подстановках, что Пюизё и делает в конце мемуара. Но Пюизё интересует связь подстановки с характером аналитического выражения для u_j. Вот почему ему понадобилось обстоятельное и весьма кропотливое исследование.

Мы остановимся здесь только на простейшем случае, когда $\partial f/\partial z \neq 0$ в точке $z = a$, $u = b$. Тогда уравнение $f(b + \beta, a + \alpha) = 0$ принимает вид

$$A\beta^p + B\alpha + \sum C\beta^q\alpha^r = 0,$$

где A, B, C, . . . — комплексные числа, причем $A \neq 0$, $B \neq 0$, а целые неотрицательные показатели q и r таковы, что $q > p$, если $r = 0$, и $r > 1$, если $q = 0$, так что всегда $pr + q > p$. Если α и β бесконечно малые, то $A\beta^p + B\alpha \approx 0$, т. е. $\beta \approx h\sqrt[p]{\alpha}$ с точностью до бесконечно малых порядка выше $1/p$ (относительно α). При надлежащей нумерации β_j отсюда следует, что β_j переходит в β_{j+1} $(j < p)$ и β_p в β_1, когда z обходит вокруг точки a (т. е. когда α обходит вокруг начала координат) в положительном направлении. Итак, искомая подстановка является в данном случае циклической:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots p \\ 2 & 3 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с этим Пюизё называет соответствующую систему $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *циркулярной.*

Чтобы найти представление каждого из ее членов в окрестности $z = 0$, Пюизё производит замену переменных $\alpha = \alpha'^p$, $\beta = v\alpha'$ в уравнении, связывающем β и α. Получается

$$Av^p\alpha'^p + B\alpha'^p + \sum Cv^q\alpha'^{pr+q} = 0$$

или после сокращения на α'^p (вспомним, что при наших условиях $pr + q > p$)

$$Av^p + B + \sum Cv^q\alpha'^{r'},$$

где $r' > 0$. При $\alpha' = 0$ это алебраическое уравнение имеет p различных корней, представлящих p значений корня $\sqrt[p]{-B/A}$. Поэтому по теореме Коши о неявных функциях существуют p таких различных степенных рядов, что в окрестности точки $\alpha' = 0$:

$$v_j = \gamma_j + a_j\alpha' + b_j\alpha'^2 + \ldots$$

($j = 1, 2, \ldots, p$; γ_j — одно из p значений $\sqrt[p]{-B/A}$). Поэтому для $u_j = b + \beta_j = b + v_j\alpha'$ получаем

$$u_j = b + \gamma_j\alpha' + a_j\alpha'^2 + b_j\alpha'^3 + \ldots =$$
$$= b + \gamma_j (z - a)^{1/p} + a_j (z - a)^{2/p} + \ldots \quad (j = 1, \ldots, p).$$

Таким образом, установлен характер разложения алгебраической функции в окрестности критической точки $z = a$ в случае, когда система $u_1, \ldots, u_p$ является циркулярной. Заметим, что коэффициенты в правой части фактически не зависят от индекса j: различия в значениях функций системы целиком определяются различиями в значениях $(z - a)^{1/p}$.

Гораздо сложнее и требует рассмотрения различных возможностей случай, когда $\partial f/\partial z = 0$ в точке $z = a$, $u = b$. Конечный вывод уже был указан выше: функции $u_1, \ldots, u_p$ распределяются, вообще говоря, по нескольким различным циркулярным системам, из которых некоторые могут содержать только по одной функции. Если s функций $u_1, \ldots, u_s$ образуют циркулярную систему, то для любой u_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ в окрестности точки $z = a$ имеет место разложение вида

$$u_j (z) = b + A (z - a)^{r/s} + B (z - a)^{(r+1)/s} + \ldots$$

Пюизё предлагает простой геометрический метод (по идее восходящий к *параллелограмму Ньютона* (см. ИМ, т. 2, с. 49—50)), позволяющий для данной критической точки $z = a$ определить все относящиеся к ней циркулярные системы (дело сводится к вычислению соответствующих s).

Если коэффициент A при старшей степени u в уравнении $f (u, z) = 0$ зависит от z и, следовательно, среди особых точек плоскости имеются полюсы, то замена $u = v/A$ сводит исследование алгебраической функции u к предыдущему случаю (в преобразованном уравнении коэффициент при v^m равен 1). Возвращаясь к u, убеждаемся, что в разложении в окрестности особой точки могут фигурировать не только дробные, но и отрицательные степени $z - a$. Заметим, что Пюизё не указывает совсем разложения функции в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$, которое легко было бы получить, произведя замену $z = 1/\zeta$ и применив к преобразованному уравнению и точке $\zeta = 0$ предыдущую теорию.

Если следить за ходом развития идей Пюизё, используя позднейшую терминологию, относящуюся к понятию многолистной римановой поверхности, простертой над комплексной плоскостью z, то можно сказать, что Пюизё уже полностью выяснил структуру m-листной римановой поверхности, определяемой алгебраическим уравнением $f(u, z) = 0$. Он нашел расположение всех ее точек разветвления и определил характер перехода от одного листа к другому в окрестности любой из них. Оказалось, что в такой окрестности листы распадаются на циклы (некоторые циклы могут состоять только из одного листа) так, что для каждого из них однократный обход вокруг точки разветвления равносилен переходу с одного листа на следующий лист этого же цикла; лишь после обходов в количестве, равном числу листов цикла, точка поверхности приводится в исходное положение. В этом исследовании, правда, была опущена бесконечно удаленная точка. Но каждый обход вокруг нее равносилен обходу вокруг совокупности всех конечных особых точек, и результат может быть легко выведен из знания структуры поверхности в окрестности этих последних. Вот почему анализ, произведенный Пюизё, можно признать исчерпывающим. Действительно, он показывает, как, опираясь на установленные факты, можно следить за изменением значений алгебраической функции вдоль любых путей с заданным началом C и концом K, отмечая при этом, что замкнутым путям на плоскости z соответствуют, вообще говоря, разомкнутые пути на плоскости значений функции.

Мы уже видели, что задачу продолжения алгебраической функции вдоль любого пути CMK, не проходящего через точки разветвления, Пюизё разрешил в первой части мемуара. Теперь же речь идет о том, чтобы, не выполняя этот процесс и опираясь только на сведения о характере поведения функции в окрестности особых точек, сравнивать конечные результаты продолжения вдоль разных путей на римановой поверхности с общей начальной точкой C и концами, расположенными на разных листах, но проектирующимися в одну и ту же точку z плоскости.

Основную роль играют элементарные контуры, которые вошли в позднейшую теорию алгебраических функций под названием *петель* (le lacet — буквально: петля, силок). *Элементарный контур* (термин Пюизё), соответствующий начальной точке C и особой точке A, состоит из какого-либо пути, соединяющего C с точкой D в окрестности A (чаще всего прямолинейного отрезка), однократно пробегаемой окружности DNP с центром в A и того же пути DC, пробегаемого теперь от D к C. Зная, как переставляются между собой значения функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$ в окрестности точки A, определяемые начальными значениями $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в точке C, можно определить, как будут переставляться эти значения в точке C, когда z опишет петлю.

Обозначим такую петлю символом (A) и построим для всех особых точек $A, A', A'', \ldots$ систему петель $(A), (A'), (A''), \ldots$, попарно не имеющих других общих точек, кроме C. При этом будем различать для каждой из них порядок обхода — прямой и обратный, обозначая петлю в первом случае через $(+A)$, а во втором через $(-A)$. Тогда утверждается, что любой замкнутый контур, проходящий через точку C, на котором не лежит ни одна из точек $A, A', A'', \ldots$, и заданный вместе с направлением его обхода, можно деформировать, не переходя ни через одну из особых точек и не перемещая точки C так, чтобы свести его только к последовательности петель, пробегаемых, быть может, по нескольку раз в том или ином направлении. Эта последовательность называется *характеристикой* контура. Вот пример того, как Пюизё записывает характеристику определенного контура:

$$(-A')\,(+A)\,(+A')\,(-A'')\,(-A').$$

Если замкнутый контур может быть деформирован в точку C так, что при деформации не приходится проходить через особые точки, то ему приписывается нулевая характеристика (0). При этих условиях утверждается, что два контура, имеющих одну и ту же характеристику, можно всегда свести один к другому, не затрагивая особых точек. И обратно: характеристика не меняется, если контур деформируется, не проходя через особые точки. Таким образом, Пюизё устанавливает и чисто топологический (гомотопический) инвариант для замкнутых кривых на плоскости.

Одинаковость характеристик для двух замкнутых контуров, проходящих через точку C, обеспечивает равенство значений алгебраических функций, к которым можно прийти в точке, если описать тот и другой контур, отправляясь от одного и того же начального значения. Иными словами, равенство характеристик означает, что оба пути приведут к одной и той же точке римановой поверхности, расположенной над точкой плоскости z.

Пусть теперь значения функций $u_1, \ldots, u_m$ в точке C с аффиксом c суть $b_1, \ldots, b_m$ и $h_1, \ldots, h_m$ — их значения, к которым приходят в точке K, когда z описывает какой-либо путь CMK. Тогда для того, чтобы определить, какое значение будет принимать каждая из функций, когда z придет в K по другому пути CLK, достаточно определить характеристику замкнутого пути, составленного из CMK и KLC (путь CLK, пробегаемый в направлении от K к C). С этой точки зрения путь CLK можно символически записать в виде (Г) $+ CMK$, где (Г) — указанная выше характеристика замкнутого пути.

Понятия, введенные в первых двух частях мемуара Пюизё, и установленные в них закономерности непосредственно прилагаются в третьей, заключительной части мемуара к изучению интеграла $\int\limits_c^k u_1\,dz$ от алгебраической функции. Процесс аналитического продолжения, описанный в первой части, позволяет выразить значение интеграла, взятого вдоль заданной кривой CMK, в виде суммы конечного числа степенных рядов. Таким путем может быть установлено, в частности, значение интеграла вдоль каждой петли и для каждой из функций u_j, определенной своим начальным значением $u_j = b_j$ в точке $z = c$. Эти интегралы Пюизё называет *элементарными*; элементарный интеграл $\int u_j\,dz$, взятый вдоль петли $(+A^{(k)})$ или $(-A^{(k)})$, обозначается соответственно через $A^{(k)}_{\pm j}$. Между элементарными интегралами выполняются некоторые линейные соотношения. Например, если u_i после обхода петли $(A^{(k)})$ переходит в u_j, то $A^{(k)}_{-j} = -A^{(k)}_i$. Вот важный пример другого рода. Пусть существует замкнутый контур Δ, проходящий через точку C и содержащий внутри все точки $A, A', A'', \ldots$, такой, что при обходе Δ функция u_i возвращается в точке C к своему начальному значению. Если u_i после обхода $(A^{(i)})$ переходит в $u_{i'}$, u'_i после обхода $(A_{(i')})$ переходит в $u_{i''}$ и т. д., то

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + \ldots = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1},$$

где $-\lambda_i$ — вычет u_i относительно бесконечно удаленной точки.

Интеграл $\int u_1 dz$, взятый по какому-либо замкнутому контуру $CLMC$, выражается в виде целочисленной линейной комбинации элементарных интегралов. Отсюда вытекает, что если

$$v_j = \int\limits_c^k u_j\,dz \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

— значения интегралов от u_j вдоль одного и того же пути CMK, то значение интеграла $\int\limits_c^k u_1\,dz$, взятого вдоль любого другого пути, соединяющего C с K, равно целочисленной линейной комбинации элементарных интегралов, соответствующих замкнутому контуру Г, составленному из путей CMK и KLC, сложенной с одним из чисел v_j. Индекс последнего совпадает с индексом того u_j, в которое u_1 переходит после обхода контура Г.

Отметив, что не каждая целочисленная комбинация элементарных интегралов, сложенная с каким-либо из v_j, дает одно из значений $\int\limits_c^k u_1\,dz$, Пюизё вводит понятие *периода* интеграла $\int\limits_c^z u_1\,dz$ (см. с. 438 первого мемуара). Он называет так линейные комбинации элементарных интегралов, которые, во-первых, не зависят от выбора точки $z = c$ и, во-вторых, обладают тем свойством, что любое целое кратное их, сложенное с одним из значений интеграла $\int\limits_c^k u_1\,dz$, снова дает значение того же интеграла. На первом месте среди вопросов, которые возникают в связи с этим понятием, стоит отыскание всех различных, т. е. целочисленных линейно независимых между собой, периодов. Этот вопрос решается Пюизё для ряда частных случаев, среди которых фигурирует и случай ультраэллиптических интегралов. При этом получают освещение утверждения, ранее высказанные Якоби в связи с его задачей об обращении ультраэллиптических интегралов. Заметим, что Пюизё стоит на точке зрения Якоби относительно невозможности рассматривать z как функцию от v в уравнении

$$\int\limits_c^z \sqrt{\frac{\alpha+\beta z}{(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\mathrm{IV}})}}\,dz = v,$$

«поскольку v может изменяться на сколь угодно малые величины при неизменном значении z» [74].

В отношении самого понятия периода Пюизё указывает [75] на Коши как на своего предшественника, который в заметке 1846 г. «Новые соображения об определенных интегралах, распространенных на все точки замкнутой кривой» (Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée.— C. r. Acad. sci. Paris, 1848, **23**, p. 698) сделал некоторые замечания о происхождении периодов интегралов от рациональной функции, а в одной неизданной работе объяснил тем же путем (т. е. посредством комплексного интегрирования) и происхождение периодов эллиптических интегралов; но его трактовка вопроса не была достаточно полной и общей.

Исследование Пюизё было продолжено им в уже упоминавшейся небольшой работе 1851 г. «Новые исследования об алгебраических функциях». Здесь он установил, в частности, что однозначная алгебраическая функция необходимо является рациональной и, далее, что в случае неприводимого уравнения $f(u, z) = 0$ можно, отправляясь от произвольной точки c с каким угодно из значений u_j $(j = 1, \ldots, m)$, найти пути, следуя которым мы придем в ту же точку со значением u_1. Этим завершалось

---

[74] J. math. pures et appl., 1850, 15, p. 463.
[75] Ibid., p. 479.

представление о связности всех ветвей алгебраической функции, понимаемой как совокупность ветвей.

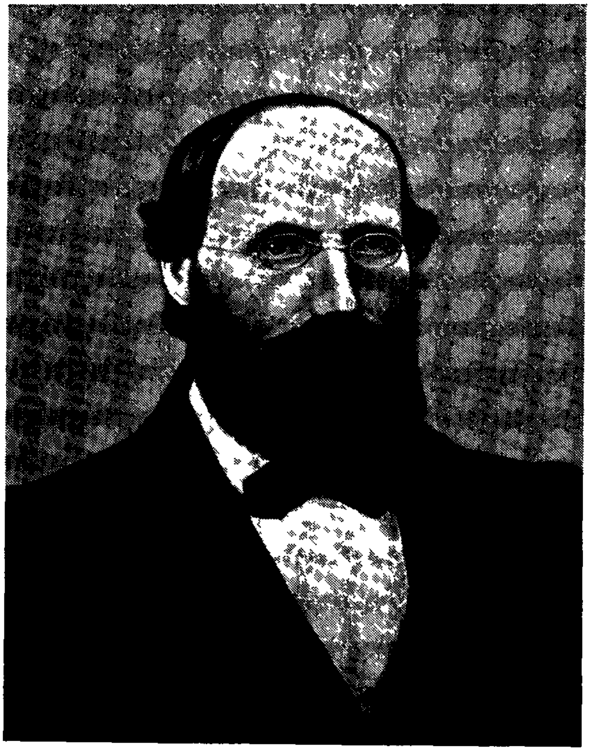
Резюмируя, можно сказать, что Пюизё в своем труде дал образец исследования многозначных функций средствами, созданными Коши. При этом он раскрыл значение чисто алгебраических и топологических средств для дальнейшей разработки теории. В частности, для продвижения в изучении периодов абелевых интегралов ему недоставало понятий порядка связности и рода поверхности. И все же он представил перед глазами современников понятие алгебраической функции в достаточно полном и хорошо расчлененном виде, чтобы осмысление его в виде цельного геометрического образа стало делом и возможным, и необходимым.

Бернгард Риман

Проживший недолгую жизнь — он умер от туберкулеза, не достигнув полных сорока лет, Б. Риман, без сомнения, является одним из самых глубоких и проницательных математических гениев, каких только знает история науки. Его труды, относящиеся по сути дела лишь к одному десятилетию — 50-м годам XIX в., охватывают все основные области математики и оказывали и продолжают оказывать плодотворное воздействие на ее развитие.

Георг Фридрих Бернгард Риман родился 17 сентября 1826 г. в селе Брезеленце (Нижняя Саксония) в семье пастора, вторым из шести детей. Его блестящие способности к математике проявились еще в гимназии, где он сверх обязательного курса изучал труды Эйлера и Лежандра. Поступив весной 1846 г. в Гёттингенский университет, он сначала по настоянию отца избирает филологию и теологию, но одновременно посещает лекции по математике и физике. Так, летом он слушает лекции Морица Штерна (1807—1894) по численному решению уравнений и Карла Гольдшмидта (1807—1851) по земному магнетизму, а в зимний семестр 1846—1847 гг.— К. Ф. Гаусса по методу наименьших квадратов и М. Штерна по определенным интегралам. Его влечение к математике было так велико, что отец должен был уступить, и он целиком отдался любимому занятию. Но сам Гаусс мало интересовался преподаванием в этот период своей жизни, и мы видим Римана весной следующего 1847 г. уже в Берлине, где в то время преподавали Якоби, Лежен-Дирихле и Штейнер. Здесь он слушает также лекции Эйзенштейна по теории эллиптических функций. Позднее Риман рассказывал о своих разногласиях с Эйзенштейном по поводу понятия функции комплексного переменного. Последний отстаивал первенство формального вычислительного аппарата, тогда как Риман уже тогда полагал в основу дифференциальные уравнения с частными производными (уравнения Даламбера — Эйлера).

Весной 1849 г. Риман снова в Гёттингене. Здесь он посещает в течение трех семестров лекции по естествознанию и философии. Наибольшее воздействие на него оказывают лекции по экспериментальной физике Вильгельма Вебера (1804—1891), в котором Риман нашел верного друга. Глубокий интерес к физике, стремление создать единую математическую теорию, охватывающую весь комплекс физических явлений и тесно связанную со свойствами пространства, характерны для Римана. «Главная моя работа,— пишет он в одном месте,— касается нового понимания известных законов природы, выражения их через другие основные понятия, которое дало бы возможность использовать экспериментальные данные о взаимодействии между теплотой, светом, электричеством и магнетизмом



Б. РИМАН

для взаимной связи этих явлений»[76]. Осенью 1850 г. он участвует в физико-математическом семинаре, который ведут профессора В. Вебер, математик Г. Ульрих (1798—1879), М. Штерн и И. Б. Листинг (1808—1882). Как известно, последнему принадлежит первая в литературе попытка изложить принципы зарождающейся математической науки — топологии. По фактическому вкладу в математические исследования не Листингу, а Риману суждено было стать отцом топологии. Но весьма вероятно, что его оригинальные идеи о единстве физических явлений, о свойствах пространства, до той поры не изучавшиеся, могли найти подкрепление в беседах с участниками названного семинара.

В ноябре 1851 г. Риман представляет философскому факультету Гёттингенского университета свою знаменитую докторскую диссертацию «Основания общей теории функций одного комплексного переменного», определившую новый этап в развитии теории аналитических функций и заключающую в себе исходные идеи топологии поверхностей. Однако его служебное положение еще долго остается весьма скромным. Он работает ассистентом в семинаре Вебера; в его обязанности входит ведение упражнений для вновь поступивших. Звание приват-доцента, ничего не меняющее в его материальном положении, Риман получает только в 1854 г. после представления требуемой правилами второй его диссертации — на право преподавания в университете (Habilitationsschrift) и прочтения пробной

[76] *Riemann B.* Werke. Leipzig, 1876, S. 475. См. также рус. пер.: *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, с. 542. В дальнейшем цитаты даются непосредственно по немецкому изданию, но указываются также соответствующие страницы русского издания.

лекции, выбранной Гауссом из трех предложенных Риманом тем. О его «габилитационной» работе «О представлении функции тригонометрическим рядом», посмертно опубликованной в 1868 г. и сообщившей мощный стимул разработке теории функций действительного переменного, уже говорилось ранее, а пробная лекция «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», увидевшая свет в том же году и содержащая все основные идеи римановой геометрии, подробно рассмотрена в первой главе настоящего труда,

В 1855—1856 гг. Риман читает свой курс теории абелевых функций, а через год направляет в печать большой, ставший классическим мемуар «Теория абелевых функций» (Theorie der Abel'schen Funktionen.— J. für Math., 1857, 54), который содержит блестящее развитие идей и методов его диссертации 1851 г. в применении к теории алгебраических функций и их интегралов и к проблеме обращения, поставленной Якоби и его учениками и считавшейся в то время не без основания одной из сложнейших проблем анализа. В промежутке он заканчивает и в 1857 г. публикует работу «Вклад в теорию функций, представимых рядом Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$» (Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen.— Abh. Ges. Wiss. Göttingen, 1857, 7), послужившую исходным пунктом аналитической теории дифференциальных уравнений. Наконец, если говорить здесь только о прокладывающих новые пути основных работах Римана, в 1859 г. он публикует исследование «О числе простых чисел, не превосходящих данной величины», о котором была речь в книге «Математика XIX века» в разделе, посвященном аналитической теории чисел (см. Кн. 1, с. 166—169).

Лишь в ноябре 1857 г. гениальный ученый получил звание экстраординарного, а после смерти Дирихле — в 1859 г. и ординарного профессора. Среди курсов лекций, читанных им в Гёттингенском университете, большое значение имеют лекции по дифференциальным уравнениям математической физики. Они были записаны его учеником Хаттендорфом и впервые изданы в 1869 г. (Partielle Differrentialgleichungen und deren Anwendung auf Physikalische Fragen, Vorlesungen von Bernhard Riemann. Für den Druck gearbeitet und herausgegeben von R. Hattendorf. Braunschweig, 1869). В 1862 г., вскоре после женитьбы, Риман простудился и заболел. Обострение болезни, перешедшей в туберкулез, вынуждало его надолго прерывать напряженную работу ради оздоровительных поездок в Италию. Но болезнь прогрессировала, и 20 июля 1866 г. Риман скончался в Селаске у Лаго-Маджоре.

Докторская диссертация Римана. Принцип Дирихле

Риман скупо ссылается в своих работах на чужие труды. По-видимому, он, как, впрочем, и другие гениальные математики, предпочитал поискам на полках библиотек собственные размышления. Как исключение выглядит в его второй диссертации вводная часть, посвященная истории представления функций тригонометрическими рядами. Литература вопроса отражена здесь достаточно обстоятельно. Но не объясняется ли наличие этого исключения тем местом из письма Римана к отцу (осень (1852 г.), где, сообщая о двухчасовой беседе с Дирихле, он радуется, что тот настолько полно снабдил его заметками (Notizen), в которых Риман нуждался для своего сочинения, что благодаря этому его работа существенно облегчилась? Без этого ему пришлось бы предаваться долгим поискам в библиотеке [77].

[77] *Riemann B.* Werke, S. 51.

Отсутствие ссылок на ту или иную работу у Римана не означает еще, что он не был знаком с этой работой. Он почти нигде не ссылается на Коши, но можно с уверенностью утверждать, что он знал его статьи о функциях комплексного переменного, выходившие в 40-х годах. Так, например, в упомянутом выше мемуаре «Теория абелевых функций» (1857) Риман говорит о функции комплексного переменного w, для которой следует «по хорошо известной теореме, что w представляется рядом, расположенным по целым степеням $z - a$ вида $\sum_0^\infty a_n (z-a)^n$, коль скоро она имеет в окрестности точки a всегда одно определенное, непрерывно изменяющееся вместе с z значение, и что это представление имеет место до такого расстояния от a или модуля $z - a$, на котором встречается разрыв непрерывности» [78]. Очевидно, что это—теорема Коши вплоть до терминов (включая перенятый Коши у Аргана термин модуль) в той форме, в какой Риман мог прочесть ее либо в первом томе «Упражнений» (1840, с. 29—31), либо во втором (1841, с. 54—55). Можно предполагать, что эти книги Коши, имевшего уже тогда всеевропейскую известность и состоявшего членом Гёттингенского общества наук, имелись и в Гёттингене и, конечно, в Берлине, где Риман находился в 1847—1849 гг. Издатель «Упражнений» Башелье распространял их выпусками по подписке не только во Франции, но и за границей, в частности, подписка производилась и в Берлине у книготорговца Бера. Заметим, что в цитированном мемуаре Риман употребляет наряду с термином однозначный (einwertig) также принадлежащий Коши термин монодромный. Как мы указывали, последний встречается в 46-м выпуске четвертого тома «Упражнений», вышедшем из печати после 1850 г. (но не позднее 1853 г.).

Какими сведениями о работах Коши и Пюизё мог располагать Риман ко времени написания диссертации (в основном с осени 1850 по осень 1851 г.)? На этот счет можно высказывать только догадки. Мы считаем возможным допустить, что Риман был знаком уже тогда с тремя томами «Упражнений» Коши [79].

Между прочим, не могла ли статья Коши «О функциях мнимого переменного», помещенная в 36-й тетради, послужить уже в 1847 г. одним из поводов для той дискуссии между Риманом и Эйзенштейном об основных принципах введения комплексных величин в теорию функций, о которой впоследствии сам Риман рассказывал Дедекинду? В передаче Дедекинда это звучит так: «Эйзенштейн оставался на точке зрения формальных вычислений, в то время как сам он [т. е. Риман.— *А. М*] усматривал главное в определении функции комплексного переменного в уравнениях с частными производными» [80]. Речь здесь, конечно, шла об уравнениях Даламбера—Эйлера.

Что касается «точки зрения формальных вычислений», то она была представлена не только в работах Эйзенштейна того времени об эллиптических функциях, где в основу были положены бесконечные произведения

---

[78] Ibid., S. 81. См. рус. изд., с. 88.

[79] Напомним, что на титульных листах этих томов проставлены соответственно 1840, 1841 и 1844 гг. и лишь четвертый том помечен 1847 г. Однако, как уже указывалось, все издание «Упражнений» осуществлялось отдельными тетрадями (cahier) со сквозной нумерацией по 12 на том; их выпуск в свет все более запаздывал. Так, в последней тетради четвертого тома Коши делает ссылку на свою работу 1853 г. Значит, подписчики четвертого тома «Упражнений» дождались его завершения только на 7-й год!

Последняя тетрадь третьего тома — 36-я, о которой идет речь ниже, очевидно, вышла в свет до 1847 г., когда появилась 37-я тетрадь, открывающая четвертый том.

[80] *Dedekind R.* Bernhard Riemann's Lebenslauf.— In: *Riemann B.* Werke, S. 512.

и двойные ряды с комплексными членами, но и в гораздо более явном и элементарном виде в упомянутом мемуаре Коши. Вот как последний начинает параграф о функциях мнимых переменных: «*Мнимые переменные могут быть подвергнуты, так же как и действительные переменные, различным операциям, результаты которых суть функции этих переменных. Эти функции оказываются вполне определенными, когда сами операции определены и когда вполне закреплен смысл обозначений, употребляемых в вычислении*» [81].

Характерно, что в диссертации Риман как бы продолжает свой диалог, но уже не с Эйзенштейном, а скорее с Коши (конечно, не называя ни того ни другого). Наряду с новым подходом к функциям комплексного переменного, строго выделяющим класс аналитических функций (об этом — ниже), он постоянно имеет в виду также традиционный, где функции определены операциями над величинами (Grössenoperationen). При этом он различает два понимания последнего: более узкое и более широкое. В первом понимании мы имеем дело с элементарными операциями: сложение, вычитание, умножение и деление, дифференцирование и интегрирование. Выполняя их в конечном числе, можно определить все функции, используемые до сих пор в анализе, утверждает Риман. Второе понимание он связывает только со сложением, вычитанием, умножением и делением, но теперь уже допускает, что этих операций может быть не только конечное, но и *бесконечное число*, т. е. *неявно вводит предельный переход*. При этом Риман вовсе не отрицает естественности или законности подхода к функциям, основанного на операциях над величинами, и допускает возможность доказательства того, что «положенное здесь [т. е. в диссертации.— *А. М.*] в основу понятие функции комплексного переменного полностью совпадает с зависимостью, выражаемой посредством операций над величинами» [82] [во втором понимании.— *А. М.*]. Эта гипотеза свидетельствует об устойчивом интересе Римана к проблеме аналитического представления функции (наверное, с 1847 г.). Отсюда — прямая дорога ко второй диссертации «О представимости функции тригонометрическим рядом» (Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, 1854). Но это уже область теории функций действительного переменного. Что касается функций комплексного переменного, то здесь предположение Римана о совпадении двух концепций функции оказалось верным при дополнительном ограничении: рассматривать не любой предельный процесс, а только равномерный и притом в связной двумерной области. Доказал это впервые Вейерштрасс в работе «К учению о функциях» (Zur Funktionenlehre.— Berl. Monatsber., 1880). Вейерштрасс считал, однако, необходимым подчеркнуть, что он опроверг гипотезу Римана, так как последний не включил в нее явно требование связности (а также и равномерной сходимости; см. ниже).

Мы можем допустить, что Риман не упоминал Коши либо потому, что не разделял подхода последнего к функциям комплексного переменного, где не были достаточно четко выявлены основные принципы, либо считал этот подход слишком узким и непригодным для трактовки занимавших его вопросов изучения алгебраических функций и их интегралов. Как бы то ни было, позиция Римана в свою очередь освобождала Коши от ссылок на его труды, особенно в случаях, когда Коши могло представляться, что Риман вторгся на занятую уже им территорию. Так можно объяснить тот факт, что Коши в статье «О дифференциалах алгебраических или геометри-

---

[81] *Cauchy A*. Exercices, 1844, t. 3, p. 366.
[82] *Riemann B*. Werke, S. 39. См. рус. изд., с. 50.

ческих количеств и о производных функций этих количеств», помещенной в 47-й тетради 4-го тома «Упражнений» (1852? (ср. выше на с. 178)), использует условия существования производной функции Z комплексного переменного z примерно так же, как это делает Риман, но без ссылок на последнего. При этом лишний раз выявляется существенное обстоятельство, оставшееся в тени в предыдущих работах Коши: одного лишь требования непрерывности исследуемых функций комплексного переменного недостаточно для обоснования открытых им ранее закономерностей; необходимо еще выполнение уравнений Даламбера — Эйлера. Позволительно думать, что только что упомянутая статья Коши была, так сказать, индуцирована диссертацией Римана. Но фактически подтверждением этого предположения мы не располагаем.

С другой стороны, у нас нет также прямого доказательства знакомства Римана с мемуаром Пюизё об алгебраических функциях в процессе работы над диссертацией. Мы, однако, считаем весьма вероятным, что Риман своевременно прочел этот мемуар. Последний публиковался в одном из самых влиятельных и самых распространенных математических журналов того времени, необходимых для каждого, кто работал в области анализа,— «Журнале чистой и прикладной математики» Лиувилля. Выход в свет мемуара по времени совпадал с первой стадией работы Римана над диссертацией — с октября по декабрь 1850 г. Пройти мимо мемуара Пюизё, содержащего последнее слово в теории алгебраических функций и их интегралов, Риман не мог хотя бы потому, что, по его собственному определению, область исследований, в которых переменным придавались комплексные значения, почти полностью сводилась к таким зависимостям, в которых одна из переменных есть алгебраическая функция другой или интеграл от алгебраической функции (см. ниже). Прибавим, наконец, что самое появление понятия многолистной поверхности в начале работы Римана (§ 5) с определением точек разветвления поверхности и описанием связи листов между собой, распадающихся на отдельные циклы в окрестности каждой такой точки, могло показаться совершенно неожиданным и крайне искусственным лишь для тех, кто не читал еще мемуара Пюизё. Но внимательный читатель этого мемуара мог обнаружить в указанном понятии превосходный геометрический комментарий и вместе с тем своего рода глубокое резюме мемуара Пюизё.

Что касается достижений Абеля, Якоби и его учеников в теории эллиптических функций и абелевых интегралов, то Риман, без сомнения, владел ими уже тогда, когда он еще только задумывал свою диссертацию. И эти достижения и в особенности вопросы, оставшиеся здесь нерешенными, должны были привести его к убеждению, что для существенного продвижения вперед необходимо создание твердой базы изучения многозначных функций.

Серьезное значение в диссертации Римана мы придаем, однако, § 20, который следует за основной частью работы, посвященной построению римановых поверхностей и обоснованию существования на них функций, подчиненных определенным условиям, типичным для алгебраических функций и их интегралов, и предшествует двум последним параграфам, где ставится и решается задача конформного отображения односвязных областей. В начале § 20 Риман указывает, что до сих пор гармония и правильность, скрытые в теории закономерных связей между переменными величинами, проявлялись, когда этим величинам придавались комплексные значения. Правда, случаи, когда это имело место, охватывают пока небольшую область зависимостей, в которых одна из переменных есть алгебраическая функция другой или же имеет производную, являющуюся алгебраической функцией. Но каждый шаг, который был здесь сделан, не только придавал более простой и законченный вид результатам, полученным без комплексных величин, но и указывал пути к новым открытиям; примером «служит история исследований, посвященных алгебраическим, круговым или показательным, эллиптическим и абелевым функциям»[83].

Что же нового дает его исследование? На этот вопрос Риман отвечает так: «Существовавшие до настоящего времени методы изучения этих функций имели в своей основе определение функции посредством формулы, позволяющей вычислить ее значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода часть данных есть следствие остальных, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено строго к необходимому»[84]. И в виде примера применения принципов, на которых строится его работа, позволяющих определять поведение функции независимо от изображения ее той или иной формулой, он приводит следующую полную характеристику понятия алгебраической функции: это функция, для которой область изменения переменной z однократно или многократно простирается над всей бесконечной плоскостью, причем функция имеет разрывы, только обращаясь в бесконечность в конечном числе точек, и при этом такие, что порядок обращения в каждой из них конечен. Разумеется, Риман подразумевает, что во всех остальных точках существует производная по комплексному переменному z. Характеристика эта действительно является полной. Математик последующих десятилетий мог бы заметить, впрочем, что условие конечности порядка допускаемых здесь полюсов алгебраической функции излишне: оно следует из остальных предпосылок. Но для такого заключения пришлось бы опираться, например, на анализ Вейерштрасса, основанный в конечном счете на «формуле»: представлении функции в окрестности изолированной особой точки рядом Лорана — Вейерштрасса.

В конце § 20 Риман выдвигает задачу доказательства совпадения двух концепций функции комплексного переменного: новой, его собственной, и традиционной, исходящей из операций над величинами (аналитического представления). Но об этом уже говорилось выше.

Диссертация начинается с установления различия между функциями действительного и комплексного переменного. Не подвергая первые другим ограничениям, кроме, быть может, непрерывности, Риман предлагает рассматривать $w = u + iv$ как функцию $z = x + iy$, если выражение

$$\frac{du + dvi}{dx + dyi} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right] + \\ + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i},$$

где положено $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$, не зависит от φ. Заметим, что выражения в правой части, заключенные в квадратных скобках, представляют собой так называемые формальные производные функции $w(z)$, которые, таким образом, впервые были введены Риманом в 1851 г. Условие, о котором только что шла речь, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{19}$$

[83] *Riemann B.* Werke, S. 38. Рус. изд., с. 81.
[84] Ibid.

Это и есть знаменитые уравнения с частными производными, которые принято называть уравнениями Коши — Римана или (с не меньшим основанием) Даламбера — Эйлера (см. ИМ, т. 3, с. 365—367).

Именно они и приводят к определению, положенному Риманом в основу его работы: «Переменная комплексная величина w называется функцией другой переменной комплексной величины z, если она меняется вместе с ней так, что значение дифференциального частного dw/dz независимо от значений дифференциала dz» [85]. Если не обращать внимания на детали, к которым мы теперь привыкли, то это и есть определение аналитической функции комплексного переменного (в двумерной области). В упоминавшейся нами статье Коши «О дифференциалах алгебраических или геометрических количеств и о производных функций этих количеств», напечатанной в 47-й тетради «Упражнений» уже после того, как Коши мог ознакомиться с диссертацией Римана, мы видим, те же уравнения (19), но в комплексной форме:

$$D_y Z = iD_x Z,$$

где Z есть функция z, а D_x и D_y — обозначения частных производных по x и по y. Ход рассуждений Коши подобен рассуждениям Римана, хотя Коши и не выписывает выражений для формальных производных.

Вернемся к Риману. Представляя комплексные переменные z и w точками плоскостей A и B соответственно, он указывает, что зависимость w от z можно представлять как отображение (eine Abbildung) плоскости A на плоскость B, при котором точка переходит в точку, линия в линию и область (ein zusammenhängendes Flächenstück) в область. Если же w есть функция z в определенном выше смысле, то это отображение преобразует малейшие части плоскости A в подобные им части плоскости B (т. е. является конформным; последним термином Риман не пользуется). В этом месте он ссылается на Гаусса, исследовавшего вопрос о конформном отображении одной поверхности на другую в 1822 г. Напомним читателю, что задача конформного отображения областей сферы в плоскость исследовалась в общем виде Эйлером в работе, опубликованной в 1778 г. (см. ИМ, т. 3, с. 170).

Предполагая связывать с каждой функцией комплексного переменного представление об отображении одной области на другую, Риман делает существенно новый шаг в истории теории аналитических функций. По значению его можно сравнивать с введением графиков функций, задававшихся сначала формулами. Там производная выражается тангенсом угла наклона касательной, здесь — комплексным коэффициентом подобия, к которому в малом сводится рассматриваемое отображение (модуль производной определяет отношение подобия, или масштаб отображения, аргумент — угол поворота преобразуемой фигуры).

В качестве следствия из уравнений (19) Риман выписывает уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

т. е., выражаясь современным языком, устанавливает, что действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного являются гармоническими функциями. Снова эта констатация имеет значение первостепенной важности: теперь открывается возможность переносить в теорию функций методы исследования, применявшиеся в тех проблемах физики, связанных с равновесием или установившимся движением, в которых эти функции естественным образом появлялись.

[85] Ibid., S. 5. Рус. изд., с. 50.

Но прежде че,м говорить об этих методах и об интегральных представлениях функций на которых они основаны, Риман расширяет понятие области, вводя названные затем его именем поверхности T — римановы поверхности, многократно простирающиеся над всей плоскостью или ее частями (§ 5 диссертации).

Здесь не место воспроизводить детали его изложения, перешедшие впоследствии в том или ином виде на страницы учебников и монографий по теории функций комплексного переменного. Скажем только, что из предлагаемых Риманом разъяснений вытекает, что окрестности точек римановой поверхности устроены либо как простой круг, либо как круг m-кратный ($m \geqslant 2$). В последнем случае точка поверхности T, отличная от центра O круга и вращающаяся вокруг O в определенном направлении, оставаясь на поверхности, должна повернуться на угол $2m\pi$, прежде чем вернется на прежнее место. Точнее говоря, если через a и z обозначить соответственно комплексные числа, изображаемые точкой O и движущейся точкой, то отображение $\sqrt[m]{z-a} = t$ взаимно однозначно отобразит упомянутую окрестность на круг плоскости t с центром в начале координат. Такую точку O поверхности T Риман называет здесь точкой извива (Windungspunkt) (позднее в «Теории абелевых функций» — точкой разветвления порядка $m - 1$). Над одной и той же точкой плоскости могут находиться различные точки разветвления, каждая обладающая своим порядком, а также и обыкновенные точки поверхности T (для которых можно считать $m = 1$, или порядок равным 0). Риман добавляет, и совершенно справедливо, что задание положения и направления обхода границы T, относительно которого определяется внутренность и внешность T, вместе с заданием расположения и порядков точек разветвления не всегда однозначно определяет саму поверхность.

Многолистные поверхности позволяют распространить первоначальное определение функции на переменные величины, принимающие определенное значение для каждой точки такой поверхности, непрерывно изменяющееся вместе с изменением положения точки. При этом допускается что существуют отдельные точки или линии на поверхности, в которых функция или не определена, или допускает разрывы непрерывности.

Все сказанное ясно раскрывает замыслы Римана, приведшие его к введению в математику нового вида поверхностей, составленных из плоскостей и их частей, простертых одна над другой и особым образом скрепленных между собой. Замысел этот состоял в том, чтобы каждую функцию комплексного переменного в его понимании (т. е. аналитическую), функцию вообще многозначную (вспомните алгебраические функции и абелевы интегралы), снабдить, так сказать, своей собственной областью, в которой она являлась бы однозначной функцией точки. Благодаря Риману каждая аналитическая функция была обречена отныне нести с собой свою риманову поверхность, подобно тому, как улитка несет свою раковину.

Повторяем, что риманова поверхность не должна была производить впечатление чего-то надуманного и неестественного на математиков, способных охватить структуру алгебраических функций и их интегралов на уровне, например, мемуара Пюизё. Приводимые последним рассуждения, привязанные к сложной паутине пересекающихся путей, многократно окружающих критические точки, становились прозрачными, а узлы путей развязывались сами собой, когда все построение переносилось на соответствующую риманову поверхность.

Напомним, что если правильно наше предположение о том, что в споре Римана с Эйзенштейном в 1847 г. обе стороны не могли не знать недавно опубликованного в третьем томе «Упражнений» мемуара Коши «О функциях мнимого переменного», то именно там можно было вычитать как идею выделения однозначной ветви многозначной функции, осуществляемого различными способами, так и то, что такое выделение приводит к появлению линий разрыва на плоскости. Тогда, в 1847 г., мысль Римана могла быть привлечена к этим, еще не освоенным в математике, элементам задания многозначных функций.

Впрочем, сказанное выше не означает еще, что все занимающиеся исследованиями в этой области легко и охотно оставили плоскость и перешли на риманову поверхность, представляющую, конечно, более высокую степень абстракции. Так, Брио и Буке, выпуская в 1875 г., почти четверть века спустя, свою переработанную «Теорию эллиптических функций», в которой многозначные функции вводились с первых же страниц под именем политропных, писали в предисловии: «В теории Коши ход мнимой переменной изображается движением точки на плоскости. Чтобы представлять функции, приобретающие многие значения для одного и того же значения переменного, Риман рассматривал плоскость как образованную многими наложенными на нее и соединенными посредством спаек (les soudures) листками таким способом, что переменная могла переходить с одного листка на другой, пересекая линию присоединения. Концепция поверхностей с кратными листками представляет некоторые трудности; несмотря на прекрасные результаты, к которым Риман пришел посредством этого метода, он не кажется нам имеющим какие-либо преимущества для предмета, который мы имеем в виду. Идея Коши очень хорошо подходит для представления многозначных функций, достаточно присоединять к значению переменного соответствующее значение функции и, когда переменная описывает замкнутую кривую, а значение функции изменяется, указывать это изменение индексом» [86].

В этом пассаже верных последователей не только духа, но и буквы Коши слышатся критические нотки, а сильнее всего — убеждение, что средства, которые предлагал Коши (добавим: и развивал Пюизё), равносильны средствам Римана. Конечно, это несправедливо по отношению к Риману, но таково было суждение его современников!

В диссертации Римана § 6 полностью имеет топологическое содержание. В нем вводится понятие порядка связности поверхности посредством проведения на ней разрезов, т. е. кривых, которые соединяют одну граничную точку поверхности с другой без самопересечений; каждый такой разрез следует представлять себе имеющим два берега. При этом если на поверхности проведены уже несколько разрезов, то при проведении нового разреза все точки прежних причисляются к граничным. Поверхность называется односвязной, если любой разрез разбивает ее на раздельно лежащие части, т. е. лишает ее свойства связности. Поверхность, не являющаяся односвязной, называется многосвязной.

Увеличенное на 1 число разрезов, необходимых для того, чтобы превратить данную поверхность в односвязную, и называется порядком связности поверхности. Так как каждый разрез изменяет на единицу число граничных кривых поверхности, то число последних может отличаться от порядка связности только на четное число.

Параграфы 7 и 8 посвящены обоснованию формулы Грина—Гаусса в виде

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dT=-\int(X\cos\xi+Y\sin\eta)\,ds,$$

[86] *Briot Ch., Bouquet J.* Théorie des fonctiones elliptiques. 2 éd. Paris, 1875, p. I—II.

где двойной интеграл берется по всей поверхности T, а криволинейный — по всей ее границе, причем ξ и η обозначают углы внутренней нормали p с осями координат. В § 9 рассматриваются следствия из этой формулы при условии, что $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y = 0$ всюду на поверхности T, за исключением отдельных кривых или точек, где производные могут иметь разрывы.

Содержащийся в этих параграфах анализ в сущности не дает ничего нового для математики того времени, за исключением того, что здесь учитывается порядок связности поверхности T. Благодаря последнему обстоятельству Риман получает полную картину поведения независимого от пути криволинейного интеграла на T. В частности, он отмечает, что если T посредством разрезов превращена в односвязную поверхность T^*, то интеграл

$$\int\limits_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

где O_0 — фиксированная и O — подвижная точка T^*, является однозначной функцией O (при том же условии $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y = 0$). На каждом из берегов разреза интеграл сохраняет постоянное значение так, что переход через разрез сопровождается скачком на постоянную величину.

Таким образом, постепенно создается база для комплексного интегрирования по поверхности, формально не зависимая от теоремы Коши. В § 10 на этой основе проводится изучение гармонической функции u в предположении, что поверхность T повсюду «просто покрывает плоскость» (т. е. является однолистной), что точки разрыва u, $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial y$ изолированные, в окрестности каждой из них $\rho\partial u/\partial x$ и $\rho\partial u/\partial y$, где ρ — расстояние от (x, y) до точки разрыва (до особой точки), бесконечно малы и, наконец, что точки разрыва для u не являются устранимыми (т. е. непрерывность u в них не может быть восстановлена путем простого изменения значения функции). При этих условиях доказывается (с помощью формулы Грина, выражающей значение функции в точке через значения ее и ее нормальной производной на границе,— Риман выводит эту формулу для плоского случая), что u и ее частные производные всех порядков конечны и непрерывны во всех точках T. Таким образом, мы встречаемся здесь с первой по времени теоремой о *«стирании»* a priori возможных особенностей функции (гармонической).

Параграф 11 содержит следствия из упомянутой формулы Грина. В частности, здесь устанавливается, что значения u и $\partial u/\partial p$ на некоторой дуге кривой (принадлежащей границе или лежащей внутри T) полностью определяют u на всей поверхности T, а также что u ($\not\equiv$ const) не может иметь ни в одной точке T ни максимума, ни минимума.

В § 12—15 предыдущие результаты применяются к функции $w = u + iv$ переменного $z = x + iy$, которая (за исключением, быть может, отдельных линий и точек) непрерывна в каждой точке O поверхности T и удовлетворяет уравнениям $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. Кроме того, предполагается, что она не может иметь разрывов, устранимых простым изменением ее значения в соответствующей точке. Такую функцию Риман называет просто *функцией от* $z = x + iy$.

Прежде всего формулируется следующая теорема, которую он выводит из теоремы § 10 о гармонических функциях.

Если функция w от z не имеет разрывов непрерывности вдоль линий и далее для любой точки O' поверхности, где $z = z'$, произведение $w(z - z')$ является бесконечно малым при бесконечном приближении точки O, то она необходимо конечна и непрерывна вместе со всеми производными во всех точках поверхности [87].

На этот раз мы имеем весьма общую теорему о «стирании» особенностей аналитической функции. Доказательство Римана нельзя признать достаточным, как, впрочем, и в случае теоремы § 10 и еще в ряде ответственных мест настоящей диссертации и других его работ по анализу. Судить об этом нужно, конечно, не забывая о том, что речь идет о середине XIX в. со свойственными этому времени возможностями, средствами и требованиями в отношении строгости и полноты математических доказательств. Если же рассматривать эту теорему с современных позиций, то нужно сказать, что аналитичность непрерывной в данной области функции $w(z)$, для которой конечные производные $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ существуют всюду, кроме, быть может, конечного или счетного множества точек, и удовлетворяют уравнениям $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, впервые удалось установить вполне строго только в 1932 г. (теорема Лемана—Меньшова). При этом доказательство существенно использовало средства теории функций действительного переменного (в частности, теорию меры и интеграл Лебега). Что касается утверждения Римана о стирании возможных особенностей, расположенных на дуге кривой, на которой функция непрерывна и в окрестности которой она аналитична, то без дополнительных ограничений на эту дугу оно неверно. Однако оно справедливо, как впервые доказал П. Пенлеве в статье «Об особых линиях аналитических функций» (Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.— Ann. Fac. Sci. Toulouse, 1888, 2) при условии, которое Риман считал, возможно, само собой разумеющимся: спрямляемость дуги. Во всяком случае, введя необходимые уточнения в теорему Римана, можно полностью сохранить ее значение для всего последующего изложения.

В § 13 рассматривается случай, когда для некоторой точки O' поверхности известно только, что для определенного натурального n величина $w(z-z')^n$ бесконечно мала вместе с $z - z'$. Тогда, прилагая предыдущую теорему к $w(z-z')^{n-1}$, найдем, что последняя функция конечна и непрерывна в точке O'. Если ее значение в O' есть a_{n-1}, то $w(z-z')^{n-1} - a_{n-1}$ бесконечно мала в ней и, следовательно, $w(z-z')^{n-2} - a_{n-1}/(z-z')$ конечна и непрерывна в O'. Повторяя это рассуждение достаточное число раз, придем к рациональной функции вида

$$\frac{a_1}{z-z'} + \frac{a_2}{(z-z')^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}},$$

вычитая которую из w, получим функцию, конечную и непрерывную (аналитическую) в точке O'. Мы видим, что эти рассуждения фактически позволяют Риману определить *главную часть лорановского разложения функции* в окрестности полюса.

Замечая, что все сказанное в § 12 и 13 применимо к любой поверхности (многолистной), Риман в § 14 обследует, как изменятся соответствующие результаты, если точка O' есть точка разветвления порядка $n - 1$. Отображение окрестности O' на окрестность начала координат плоскости ζ посредством $\zeta = (z-z')^{1/n}$ естественно приводит его к выводу, что предыдущие заключения останутся в силе, если заменить в них $z - z'$ на $(z-z')^{1/n}$. В результате вместо приведенной выше рациональной функции получается выражение вида

$$\frac{a_1}{(z-z')^{1/n}} + \ldots + \frac{a_m}{(z-z')^{m/n}}.$$

[87] *Riemann B.* Werke, S. 23. См. рус. изд., с. 67.

В частности, можно утверждать также, что если w аналитична на поверхности и в окрестности точки разветвления O' порядка $n-1$ удовлетворяет условию: $w(z-z')^{1/n}$ есть величина бесконечно малая, то w непрерывна в точке O'.

В § 15 доказана теорема о том, что функция w, аналитическая на некоторой поверхности T, отображает ее взаимно однозначно и непрерывно также на некоторую поверхность S. С точки зрения позднейших требований Риману следовало бы доказать прежде всего, что окрестность каждой точки поверхности преобразуется снова в окрестность. Он же довольствуется доказательством лишь того, что функция w не может быть постоянной вдоль кривой, если она не сводится к постоянной на всей поверхности.

Весьма значительную роль в истории математики нового времени сыграло содержание § 16—18. В них излагается так называемый *принцип Дирихле*, которому придается форма, пригодная для применений в проблемах теории функций. О его происхождении и значении Риман говорит позднее — в мемуаре «Теория абелевых функций», где принцип этот является основным инструментом исследования. Вот что говорится о нем в упомянутом мемуаре: «Как основу для исследования трансцендентного прежде всего необходимо установить систему условий, независимых между собой и достаточных для его определения. Для этой цели может служить во многих случаях, а именно при изучении интегралов алгебраических функций и функций, им обратных, принцип, который Дирихле в своих лекциях о силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния, применяет уже несколько лет к решению этой задачи для функции трех переменных, удовлетворяющей уравнению Лапласа; пожалуй, конечно, к этому его побудила аналогичная мысль Гаусса. Однако для такого применения к теории трансцендентных особенно важен как раз тот случай, к которому этот принцип в его упомянутой простейшей форме неприменим и который оставался нерассмотренным вследствие его вполне подчиненного значения. Это тот случай, когда функция в известных точках области, в которой ее следует определить, должна иметь предписанные разрывы. Под этим понимается, что на нее в каждой такой точке налагается условие быть разрывной, так же как и заданная там разрывная функция, или отличаться от нее на непрерывную функцию» [88].

«Простейшая форма» принципа, с которой Риман мог ознакомиться на лекциях Дирихле, гласит, что среди всех функций $u(x, y, z)$, принимающих одни и те же непрерывные значения на границе трехмерной области G, минимум интеграла

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

доставляет гармоническая в области G функция. Таким образом, решение проблемы Дирихле, заключающейся в отыскании гармонической функции по ее заданным граничным значениям, сводится к соответствующей задаче на отыскание минимума интеграла.

Что касается ссылки Римана на Гаусса, то здесь можно высказывать только предположения. Аналогию с принципом Дирихле представляет и принцип, лежащий в основе метода наименьших квадратов (1821), и принцип, использованный Гауссом при отыскании такого распределения масс на заданной поверхности, для которого соответствующий потенциал простого слоя $V=\int\frac{m\,ds}{r}$ совпадает на поверхности с заданной непрерыв-

[88] Ibid., S. 90. Рус. изд., с. 96.

ной функцией U (в частности, константой). Гаусс считает вопрос о существовании искомого распределения решением на основании того, что для такого распределения интеграл $\int (V - 2U)ds$, ограниченный снизу, должен иметь наименьшее значение («Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1839, Bd. 4)).

Опираясь, подобно Гауссу, на убеждение в том, что для функционала (интеграла), ограниченного снизу, должна существовать функция, доставляющая ему наименьшее значение, Риман выражает принцип Дирихле в том специализированном виде, который он выше имел в виду (точнее говоря, следствие из него), следующей теоремой § 18:

«Если на связной поверхности T, превращенной посредством разрезов в односвязную поверхность T^*, задана комплексная [вообще говоря, не аналитическая.— *А. М.*] функция $\alpha + i\beta$ от x и y, для которой интеграл

$$\int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right] dT,$$

распространенный на всю поверхность T, имеет конечное значение, то всегда можно превратить ее и притом только одним способом в функцию от z [аналитическую.— *А. М.*] посредством вычитания из нее функции $\mu + \nu i$ от x и y, удовлетворяющей условиям:

1) $\mu = 0$ на границе, исключая, быть может, отдельные точки, ν произвольно задается в одной точке;

2) μ на поверхности T и ν на поверхности T^* могут иметь разрывы только в отдельных точках и притом такие, что интегралы

$$\int \left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right] dT \text{ и } \int \left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right] dT,$$

распространенные на всю поверхность, конечны; функция же ν при переходе через любой разрез может изменяться только на постоянное [для всех точек этого разреза.— *А. М.*] слагаемое» [89].

Здесь минимальное значение интеграла

$$\Omega(\alpha - \lambda) = \int \left\{\left[\frac{\partial(\alpha - \lambda)}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\alpha - \lambda)}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right]^2\right\} dT$$

должна доставлять именно функция μ; убеждение в ее существовании составляет собственно принцип Дирихле в понимании Римана. Что касается функции ν, то она строится по μ в виде следующего криволинейного интеграла:

$$\nu = \int \left[\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha - \mu)}{\partial y}\right] dx + \left[\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial(\alpha - \mu)}{\partial x}\right] dy + C,$$

который берется от фиксированной точки до переменной точки (x, y) по путям, лежащим в T^*.

Критика, которой Вейерштрасс подверг этот принцип в 1870 г. («О так называемом принципе Дирихле» — читано в Берлинской академии наук 14 июля 1870 г.) [90], указав, что ограниченный снизу функционал (интеграл в простейшей вариационной задаче) не всегда достигает своего наименьшего значения в классе допустимых функций, поставила под сомне-

[89] Ibid., S. 34—35.
[90] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 2.

ние законность его использования в анализе и теории функций. Лишь после работ Гильберта (1901, 1909) удалось строго обосновать правильность избранного Риманом пути. Существенно, однако, что в исследованиях Римана и его учеников принцип Дирихле сыграл свою историческую роль мощного эвристического средства.

В качестве примера применения теоремы § 18 своей работы к теории функций Риман формулирует и доказывает в § 21 знаменитую теорему о существовании конформного отображения одной односвязной области на другую: «Две заданные односвязные плоские поверхности всегда можно так соотнести между собой, что каждой точке одной соответствует одна непрерывно вместе с ней перемещающаяся точка другой и их соответствующие части подобны в малом; при этом можно для одной внутренней и одной граничной точки выбрать им соответствующие произвольно; тогда соотношение будет определено и для всех точек» [91].

Риман замечает, что общность теоремы не уменьшится, если принять, что одна из этих поверхностей есть круг с центром в точке $w = 0$ и радиусом, равным 1. Он проводит на поверхности T разрез l от точки z_0 до какой-либо граничной точки и строит функцию $\alpha + i\beta$ (вообще говоря, неаналитическую), которая в некоторой окрестности точки z_0 совпадает с $\ln (z - z_0)$ и дальше продолжается до границы так, чтобы α обращалась в нуль в граничных точках. При этом l является линией разрыва для β: переходя с отрицательной стороны разреза l на положительную, β делает скачок, равный -2π. Применяя к $\alpha + i\beta$ теорему § 18 (принцип Дирихле), Риман получает новую функцию

$$t = (\alpha - \mu) + i(\beta - \nu) = m + in,$$

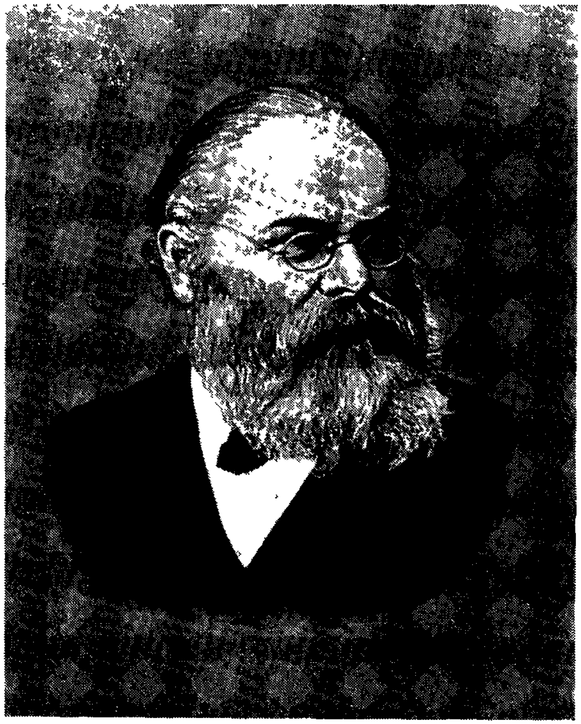
аналитическую в T, за исключением разреза l, являющегося линией разрыва для n; кроме того, m в начальной точке $z = z_0$ разреза l имеет логарифмический полюс (т. е. ведет себя как $\ln |z - z_0|$). Опираясь на ранее установленные им свойства гармонических функций, Риман легко проверяет, что линии уровня функции m — замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку z_0, и что при обходе такой линии в положительном направлении функция n возрастает, делая скачок, равный -2π, при переходе через разрез l. Остается положить $w = e^t$, чтобы получить, наконец, функцию, отображающую T на единичный круг так, что z_0 переходит при этом в центр круга.

Доказательство Римана, весьма простое по идее, послужило отправной точкой для поисков других доказательств, налагающих дополнительные упрощающие условия на границу T, но свободные от использования поставленного под сомнение принципа Дирихле.

Конформные отображения

Мы видели, что теорема Римана о возможности конформного отображения любой односвязной области на круг была им выведена из его «принципа Дирихле» в диссертации 1851 г. Однако само отсутствие убедительного обоснования этого принципа вынуждало математиков искать другое доказательство теоремы Римана, и это делалось еще до того, как К. Вейерштрасс выступил с открытой критикой принципа Дирихле (июль 1870). Существенную роль играли здесь работы Г. А. Шварца. Карл Герман Амандус Шварц (1843—1921) учился в 1860—1866 гг. в Промышленном институте (Gewerbe-Institut) и Берлинском универси-

[91] *Riemann B.* Werke, S. 40. См. рус. изд., с. 83.



Г. А. ШВАРЦ

тете; он был учеником Вейерштрасса. С 1867 г. Шварц преподавал математику в высших учебных заведениях Галле и Цюриха; с 1875 г.— профессор математики Гёттингенского университета, с 1892 г.— профессор Берлинского университета. В небольшой работе «К теории отображений» (Zur Theorie der Abbildung. Programm der Eidgenossischen polytechnischen Schule in Zürich für das Schuljahr 1869—1870) Шварц рассматривает задачу конформного отображения произвольной ограниченной выпуклой области плоскости на единичный круг. Принципиально важно, что здесь впервые было отделено изучение конформного отображения областей (рассматриваемых как открытые множества) от поведения отображения на границе (вопрос о соответствии границ при конформном отображении). Решение первой проблемы было сведено к рассмотрению последовательности отображений более простых областей, аппроксимирующих данную область изнутри, и к последующему предельному переходу. На этом пути им был изобретен метод — альтернирующий метод Шварца — в работе «Предельный переход посредством альтернирующего метода» (Grenzübergang durch alternierende Verfahren.— Viertel — Jahr. Naturforsch. Ges., Zürich, 1870, 15), позволяющий решать проблему Дирихле (о построении гармонической функции по ее граничным значениям) при достаточно широких условиях. Таким образом, был практически реабилитирован принцип Дирихле, правда, в довольно узком его понимании (так понимал его потом, например, А. Пуанкаре), но зато имеющем широкий круг применений.

Конкретно Шварцу удалось тогда же доказать возможность конформного отображения на круг любой выпуклой области (отличной от всей плоскости), а также любой односвязной области, граница которой образована конечным числом аналитических дуг, таких, что две соседние дуги пересекаются под углами, отличными от нулевого. В этом важном частном случае он установил также, что отображение продолжается и на границу области, сохраняя аналитичность в точках, внутренних к граничным дугам (т. е. отличных от вершин того обобщенного многоугольника, который представляла данная область). В качестве вспомогательных средств мы встречаем в работах Шварца 1869—1870 гг. и известную лемму Шварца (уточняющую принцип максимума модуля), и принцип симметрии (принцип Римана — Шварца).

Следующий шаг, имеющий принципиальное значение для общей теории, сделал А. Пуанкаре, доказавший в 1884 г. в статье «О группах линейных уравнений» (Sur les groupes des équations linéaires.— Acta math., 1884, 4) теорему единственности, которую можно сформулировать так: если фиксирована точка области, которая должна перейти в центр круга, и, кроме того, задано направление, которое перейдет при этом в положительное направление действительной оси, то может существовать самое большее одна функция, осуществляющая такое отображение. Правда, условие единственности в иной форме можно усматривать уже в диссертации Римана (1851): им предлагалось произвольно назначить образ одной внутренней и одной граничной точки отображаемой области. Но там была доказана (на основе принципа Дирихле) возможность удовлетворить этим условиям, а то, что не существует другого отображения при тех же условиях, не было обосновано.

Возвращаясь к Пуанкаре, отметим, что ему же принадлежала разработка важного метода решения задачи Дирихле, отличного от альтернирующего метода Шварца — так называемого метода выметания (méthode de balayage) в статье «Об уравнениях с частными производными математической физики» (Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.— Amer. J. Math., 1890, 12).

Доказательство теоремы существования конформного отображения любой односвязной области на круг независимо от строения ее границы (лишь бы эта граница содержала по крайней мере две различные точки) получил впервые математик У. Ф. Осгуд (1864—1943) в 1900 г. А в следующем, 1901 г. профессор Гарвардского университета (США) Д. Гильберт дал строгое доказательство принципа Дирихле при минимальных предположениях (все ограничения были сняты им же в 1909 г.). Таким образом, принцип Дирихле был полностью реабилитирован.

Из теоремы Римана прямо вытекало, что все односвязные области плоскости (имеющие более одной граничной точки) конформно эквивалентны, т. е. с точки зрения конформного отображения как бы неразличимы. По-иному дело обстояло для многосвязных областей. Первое систематическое исследование относящихся сюда вопросов предпринял ученик Вейерштрасса и профессор в Цюрихе, затем в Мангейме и Берлинском университете Ф. Г. Шоттки (1851—1935), посвятив им докторскую диссертацию «О конформном отображении многосвязных плоских поверхностей» (Über konforme Abbildung von mehrfach zusammenhängenden Flächen.— J. für Math., 1877, 83) и ряд последующих работ. Оказалось, что даже в простейшем случае двухсвязных областей, ограниченных каждая двумя окружностями, для возможности конформного отображения их друг на друга необходимо дополнительное ограничение. Например, в случае двух концентрических круговых колец таким ограничением является их подобие, иными словами, совпадение отношения большего радиуса кругового кольца к меньшему. В случае области, ограниченной p ($p \geqslant 2$)

замкнутыми кривыми (аналитическими, что, впрочем, несущественно), Шоттки обнаружил существование $3p - 3$ действительных констант, характеризующих конформный класс, которому эта область принадлежит; они получили название модулей области. Сведя проблему конформного отображения к линейному дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами (аналогичная идея заключалась в одном из фрагментов Римана), он высказал предположение, что конформное отображение двух p-связных областей друг на друга возможно тогда и только тогда, когда соответствующие модули попарно совпадают. Показать, что это действительно так, удалось впервые только ученику Шварца, профессору Лейпцигского университета П. Кёбе (1882—1945) в начале XX в. (1907). В качестве канонической области, на которую производится отображение, Кёбе по аналогии со случаем Римана выбрал область, ограниченную p окружностями, попарно не имеющими общих точек. Примерно в те же годы равнозначащий результат получил Д. Гильберт, но у него роль канонической области играла полуплоскость, из которой исключены $p - 1$ прямолинейных отрезков, параллельных граничной прямой (некоторые из них могли вырождаться в точку). Особые трудности вызвал случай отображения бесконечносвязных областей друг на друга.

Мы не будем здесь вдаваться в детали, выводящие нас за пределы изучаемой эпохи.

Все охарактеризованные выше большие достижения, дальнейшее развитие которых, как было указано на ряде примеров, выводит в XX в., имели характер теорем существования. Между тем возникали потребности теоретического или прикладного характера (диктуемые задачами физики и механики) определять конкретные функции, производящие то или иное конформное отображение.

В последних выпусках «Упражнений» Коши, выходивших, как мы отмечали, в начале 50-х годов XIX в., обнаруживаются указания на отображения, производимые однозначными ветвями многозначных элементарных функций, такими, как $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arctg} z$ и т. п. Но вот любопытный факт, показывающий, что еще в начале 70-х годов элементарные свойства дробно-линейных отображений не считались общеизвестными даже для лидирующих математиков. Так, например, К. Вейерштрасс в письме к С. В. Ковалевской от 9 июня 1873 г.[92] сообщает ей следующее предложение: «Всегда можно отобразить данную полуплоскость $\mathfrak{C}$ на произвольно взятый круг $\mathfrak{K}$ так, чтобы внутренность данного в $\mathfrak{C}$ круга $\mathfrak{K}$ соответствовала кругу K_1, концентрическому с K». К этому Вейерштрасс считает нужным дать ряд пояснений и среди них указание на то, что центр $\mathfrak{K}_1$ не соответствует центру $\mathfrak{K}$. Очевидно, что речь здесь идет по существу о простом следствии из свойства сохранения симметрии точек относительно окружности или прямой при дробно-линейных отображениях. И это после того, как в предыдущих письмах обсуждались такие вопросы, как приведение абелевых интегралов к эллиптическим, вопросы вариационного исчисления и свойства тэта-функций. Указанный пример свидетельствует, во всяком случае, о том, что в начале 70-х годов отображения посредством элементарных функций не принадлежали еще к числу, так сказать, азбучных истин тогдашней теории функций.

Все же к этому времени уже публиковались отдельные результаты отнюдь не тривиального характера, постепенно превратившие конформное отображение в один из важных источников введения новых трансценден-

---

[92] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской, 1871—1891. М.: Наука, 1973, с. 24—25 (рус. пер., с. 164—165).

тных функций в анализ. И здесь, как и во многих других случаях, впереди шел Г. А. Шварц. Так, еще будучи студентом, в 1864 г. в семинаре, руководимом Вейерштрассом, он получил в виде некоторого интеграла формулу для отображения полуплоскости на любой треугольник [93]. Вскоре эта формула независимо от него была обобщена профессором Цюрихского политехникума Э. Б. Кристоффелем в работе «Задача о стационарной температуре и о представлении данной поверхности» (Problema delle temperature stazionare e la representazione di una data superficie.— Ann. mat., Ser. 2, 1867, 1, p. 79—103) и в настоящее время называется формулой Кристоффеля — Шварца [94]. Именно если n-угольник плоскости z имеет углы $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ и при конформном отображении на верхнюю полуплоскость плоскости w его вершины попадают соответственно в точки $a_1, \ldots, a_n$ действительной оси, то отображающая функция

$$z = z(w) = C_1 \int\limits_{w_0}^{w} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1}\, dt + C_2,$$

где C_1 и C_2 — комплексные константы. Это и есть формула Кристоффеля — Шварца. Главная трудность, возникающая при ее применении, если $n > 3$, заключается в определении действительных констант $a_1, a_2, \ldots, a_n$; лишь три из них могут быть заданы произвольно.

Заметим, что интеграл, входящий в формулу Кристоффеля — Шварца (он также называется по их имени), представляет существенное обобщение ультраэллиптического и эллиптического интеграла, потому что действительные числа α_j ($j = 1, \ldots, n$) не всегда рациональны. Эллиптический интеграл получается в случае прямоугольника (тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = {}^1/_2$).

Более сложной оказалась задача конформного отображения на круг или на полуплоскость многоугольника, ограниченного дугами окружностей. В работах 1869 и 1873 гг.[95] Шварц пришел к следующей теореме: пусть T — односвязная область плоскости z, ограниченная дугами окружностей (круговой многоугольник); тогда для функции $z(Z')$, отображающей его на верхнюю полуплоскость плоскости Z', должно выполняться следующее дифференциальное уравнение третьего порядка, в левой части которого фигурирует так называемый шварциан

$$\{z, Z'\} = \frac{d^2}{dZ'^2} \ln \frac{dz}{dZ'} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dZ'} \ln \frac{dz}{dZ'} \right)^2 = F(Z'),$$

а в правой части стоит рациональная функция $F(z)$, определенная с точностью до нескольких подлежащих отысканию констант.

Функцию $z(Z')$ можно представить в виде частного двух линейно независимых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка фуксова класса. В случае кругового треугольника — это гипергеометрическое уравнение (Шварц, Клейн). Впрочем, для определения и изучения свойств так называемой теперь модулярной функции Шварца Шварц (1873) исходит из треугольника с нулевыми углами, образованного тремя равными дугами окружностей, ортогональными к единичной, и функцию $Z = \lambda(z)$ определяет как такое конформное отображение этого треугольника на полуплоскость $\operatorname{Im} Z > 0$, что вершины треугольника переходят в точки 0, 1 и ∞. Далее модулярная функция аналитически

[93] *Schwarz H. A.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin, 1890, Bd. 2, S. 65—83.

[94] Подробнее о Б. К. Кристоффеле (1829—1900) говорится в первой главе.

[95] *Schwarz H. A.* Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 2, S. 65—83, 84—101, 211—259.

продолжается на весь единичный круг посредством принципа симметрии (известного под названием принципа симметрии Римана — Шварца). Здесь особенно отчетливо выявляется геометрический метод определения (и изучения свойств) трансцендентной функции (впрочем, известной еще со времен Гаусса и вводившейся и изучавшейся ранее чисто аналитическим путем) в связи с теорией эллиптических функций. Заметим, что эта функция, как уже упоминалось ранее, была одним из простейших примеров автоморфных функций, о началах общей теории которых мы еще будем говорить. Ранее упоминалось, что результаты Гаусса оставались неизвестными. Несколько благополучнее, чем в случае Гаусса, дело обстояло с результатами Римана, относившимися к изучению той же функции. Они были включены им в лекции по гипергеометрическому ряду (1858—1859) и стенографированы его слушателем В. Бецольдом [96]. Впрочем, нет никаких явных доказательств, что Шварц был знаком в свое время с этими лекциями.

Интересно отметить, что уже к началу 80-х годов XIX в., с одной стороны, накопился такой обильный материал по конкретным конформным отображениям, а с другой — так участились случаи их применения в задачах физики и механики, что понадобилась специальная монография Г. Хольцмюллера (1844—1914): «Введение в теорию изогональных свойств и конформных отображений с применением к математической физике» (Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaft und der konformen Abbildungen mit Anwendung auf mathematische Physik. Leipzig, 1882).

Карл Вейерштрасс

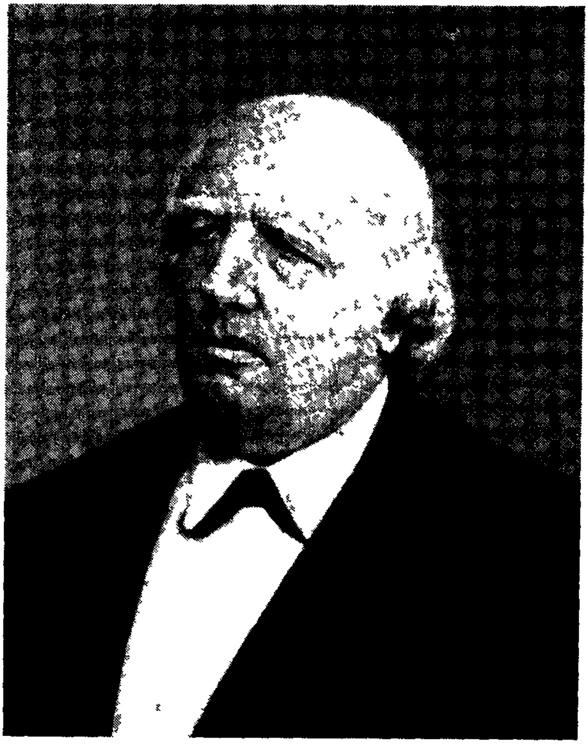
Среди математиков XIX столетия нельзя, пожалуй, назвать другого человека, кроме Вейерштрасса, которому математический анализ был бы в такой степени обязан окончательным формированием величественного здания, заложенного Ньютоном и Лейбницем. Именно Вейерштрасс раньше других, начиная с середины 60-х годов, положил в основу всего анализа теорию действительных чисел, не апеллирующую к наглядности, и предложил в качестве универсального средства построения строгих доказательств принцип существования верхней (и нижней) грани ограниченного множества. Все это определило переход анализа на новый уровень строгости по сравнению с тем, что уже было сделано Коши. Он убедительно продемонстрировал удивительную сложность поведения непрерывной функции, построив пример нигде не дифференцируемой функции (его предшественником был Б. Больцано). С другой стороны, ему удалось показать, что самая простая и идеальная по своим хорошим свойствам функция — многочлен — способна с точностью до произвольного малого числа воспроизводить значения любой непрерывной функции [97].

Вслед за Ньютоном и Лагранжем Вейерштрасс поставил степенной ряд, вернее систему степенных рядов, связанных между собой отношением аналитического продолжения (этого ни у Ньютона, ни у Лагранжа не было), в центре теории аналитических функций, заложил основы теории целых функций, довел до высокой степени совершенства теорию эллиптических функций и увенчал все здание теорией абелевых функций, являвшейся наиболее впечатляющим достижением анализа в XIX в. Попутно он заложил основы теории аналитических функций многих комплексных

---

[96] См.: *Риман Б.* Сочинения, с. 213—215.

[97] О вкладе Вейерштрасса в построение основ математического анализа подробно будет сказано в другой книге этой серии.



К. ВЕЙЕРШТРАСС

переменных. Наконец, ему принадлежат крупные достижения в вариационном исчислении (функция Вейерштрасса, в терминах которой выражаются условия сильного экстремума), теории минимальных поверхностей и линейной алгебре (теория элементарных делителей).

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс, о громадном вкладе которого в фундамент математического анализа уже говорилось в первой главе этой книги, родился 31 октября 1815 г. в Остенфельде (Вестфалия) в семье чиновника. В 1834 г. окончил гимназию в Падерборне, показав блестящие успехи («первым из всех»), и в том же году, уступая настояниям отца, поступил на юридический факультет Боннского университета. Пренебрегая не интересовавшими его университетскими занятиями, он самостоятельно изучал математические науки. Вейерштрасс штудировал «Небесную механику» Лапласа, «Новые основания теории эллиптических функций» Якоби, первые публикации Абеля по теории эллиптических функций в журнале Крелле. Трудная книга Якоби предполагала предварительное знакомство читателя с обширным сочинением Лежандра по теории эллиптических интегралов, в ту пору недоступным Вейерштрассу. К счастью, в его руки попали записи лекций по теории эллиптических функций Гудермана, значительно облегчившие его работу. Письмо Абеля к Лежандру, опубликованное в журнале Крелле в 1829 г., в котором Абель сообщал, что для функции $\lambda(x)$, обратной интегралу $x = \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}$ (она же функция $\operatorname{sn} x$ Якоби), он нашел представление в виде отношения двух всюду сходящихся степенных рядов, побудило Вейерштрасса самостоятельно вывести этот результат, что он и выполнил на 7-м семестре своего пребывания в Бонне [98].

После восьми семестров, не держа экзаменов, Вейерштрасс прекратил обучение в Бонне, заявив отцу, что его призвание — математика. Не без сопротивления со стороны семьи он поступает в 1839 г. в Мюнстерскую академию с перспективой стать учителем гимназии. Там он слушает лекции одного только Гудермана. В них он мог, в частности, познакомиться с идеей равномерной сходимости рядов и бесконечных произведений, встречающейся впервые в публикации Гудермана, относящейся к 1838 г. [99]

Осенью 1840 г. Вейерштрасс представляет в качестве экзаменационной работу «О разложении модулярных функций» (см. с. 159). Под модулярными он подразумевает здесь, следуя терминологии своего учителя, эллиптические функции. В центре внимания — представление их в виде частных степенных рядов (см. выше). Работа получила высокую оценку со стороны Гудермана, но Вейерштрассу эта оценка в полном виде стала известной только в 1853 г. Иначе, как писал он впоследствии Шварцу, он мог бы получить работу в университете гораздо раньше, чем это случилось в действительности.

Как эта работа, так и три другие, выполненные в Мюнстере в 1841—1842 гг., увидели свет впервые только в 1894 г. в первом томе «Математических трудов» Вейерштрасса. Поэтому они и не могли своевременно оказать влияние на развитие математики. А между тем в них был изготовлен весь инструментарий того направления теории аналитических функций, которое связывается с именем Вейерштрасса. Сказанное относится к уже упомянутой работе о разложении эллиптических функций. Сам Вейерштрасс рассматривал свой подход к ним как прообраз последующей его трактовки абелевых функций. В работе «Представление аналитической функции комплексного переменного, абсолютные значения которого заключаются между двумя заданными границами» (Darstellung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen, deren absoluter Beitrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt. Münster, 1841) [100], о которой мы уже упоминали, выводится лорановское разложение функции в круговом кольце. И это за два года до публикации Лорана, без прямого использования результатов Коши (его интегральной формулы) и без употребления геометрического языка. Характерно, что комплексное число с модулем r изображается не в виде $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, как это делал Коши и вслед за ним Лоран, а в виде дроби $r\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, где λ — действительное число. Чтобы такая точка однократно описала окружность радиуса r, нужно, чтобы λ изменялось монотонно от $-\infty$ до $+\infty$.

Следующая мюнстерская работа «К теории степенных рядов» (Zur Theorie der Potenzreihen.— Münster. Herbst, 1841) [101] использует свойство равномерной сходимости степенного ряда. При этом в ней рассматриваются также и степенные ряды для случая многих переменных. Основной результат здесь — это теорема о законности приведения подобных членов в ряде, полученном после того, как каждое переменное в свою очередь заменяется соответствующим степенным рядом.

---

[98] *Dugac P.* Eléments d'analyse de Karl Weierstrass.— Arch. Hist. Exact Sci., 1973, 10, p. 45.
[99] Ibid., p. 47.
[100] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 1, S. 52—66.
[101] Ibid., S. 67—74.

Наконец, работа «Определение аналитических функций одного переменного посредством алгебраических дифференциальных уравнений» (Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermitelst algebraischer Differentialgleichungen. — Münster. Frühjahr, 1842) [102] содержит три существенных результата. Первый из них, утверждающий, что решения системы дифференциальных уравнений вида $dx_j/dt = G_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$, определяемые начальными условиями $x_j(0) = a_j$, являются аналитическими функциями, если $G(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены, не нов. Это предложение содержалось в более ранних исследованиях Коши по исчислению пределов. Но туринский литографированный мемуар 1832 г. не был известен Вейерштрассу. И с воспроизведением содержания этого мемуара в 14-й тетради «Упражнений по анализу» Коши, вышедшей в 1841 г., он также не был знаком. Второй результат, относительно которого Вейерштрасс много позднее (в 1894 г.) утверждал, что у Коши его найти нельзя, устанавливает с помощью мажоранты степенного ряда факт не только абсолютной (unbedingt) его сходимости, но и сходимости равномерной (gleichförmig). Формально Вейерштрасс здесь прав. Но по существу, как об этом уже говорилось выше, сама основная идея исчисления пределов у Коши обозначала на самом деле систематическое использование свойства равномерной сходимости степенных рядов, доведенное до явной оценки сверху их остаточных членов. Наконец, третий результат — описание процесса аналитического продолжения степенных рядов и его применения к представлению решений системы дифференциальных уравнений за пределами первоначальной области сходимости, представляющей окрестность точки $t = 0$, полностью и целиком являлся открытием Вейерштрасса. Здесь ему действительно не на кого было опереться, как бы тщательно ни изучал он труды своих предшественников и современников. Однако (и об этом мы также говорили выше) не прошло и 10 лет, как В. Пюизё самостоятельно пришел к той же идее и изложил ее, правда, в связи с частной задачей представления алгебраических функций, но в столь же общем виде, как и Вейерштрасс. В другой форме, без прямого использования степенных рядов, идея аналитического продолжения появляется на один год позже, чем у Пюизё, в диссертации Римана.

После годичного стажа в Мюнстере Вейерштрасс получил в 1842 г. место учителя в прогимназии в Дейч-Кроне (Западная Пруссия); с 1848 по 1855 г. он преподаватель гимназии в Браунсберге (Восточная Пруссия). Это были маленькие захолустные городки, в которых он был совершенно одинок со своими духовными запросами. Преподавать же ему приходилось самые разнообразные предметы: немецкий язык, ботанику, географию, историю, чистописание и гимнастику. Его поездка в Берлин в октябре 1844 г. имела прямой целью совершенствование в преподавании гимнастики. Учебная нагрузка доходила до 30 уроков в неделю. И все же Вейерштрасс неотступно размышлял над математическими проблемами. В центре его поисков стояла теория абелевых функций, которой он оставался верен всю жизнь.

В приложении к отчету Браунсбергской гимназии за 1848—1849 гг. появляется его небольшая статья «Вклад в теорию абелевых интегралов» (Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale. Beilage zum Jahresbericht über Gymnasium Braunsberg in dem Schuljahre 1848—1849) [103], в которой автор сообщает, что уже долгое время занимается абелевыми интегралами, а именно главной задачей обращения интегралов первого рода, поставлен-

[102] Ibid., S. 75—84.
[103] Ibid., S. 111—129.

ной Якоби, и что ему удалось полностью решить эту задачу на пути, отличном от Гёпеля и других математиков. Напомним, что Гёпель и Розенхайн ограничились обращением ультраэллиптических интегралов для случая, когда под квадратным корнем находится многочлен 5-й или 6-й степени, что приводит к функциям двух независимых переменных, и что их метод не допускал непосредственного распространения на общий случай.

Однако статья 1849 г. явилась всего лишь своего рода заявкой, оставшейся незамеченной современниками. Совсем другой прием встретили последующие его две работы, опубликованные в 47-м (1854) и 52-м томах (1856) журнала Крелле: «К теории абелевых функций» (Zur Theorie der Abelschen Funktionen) [104] и «Теория абелевых функций» (Theorie der Abelschen Funktionen) [105]. Хотя первая из них, по отзыву Дирихле, «давала только частичные доказательства его изысканий, в которых отсутствовали промежуточные разъяснения» [106], она была сразу оценена по достоинству. Именно она доставила ему степень доктора honoris causa, присужденную Кёнигсбергским университетом (окончание Мюнстерской академии не принесло Вейерштрассу в свое время степени доктора), и звание старшего учителя. Но самое главное — это то, что на основании отзыва Дирихле Вейерштрасс смог теперь получить годичный отпуск для поправки здоровья и для завершения второй работы из двух упомянутых выше, в которой были изложены развернутые доказательства полученных результатов.

К деятельности учителя гимназии Вейерштрасс больше не возвращался. Благодаря вмешательству А. Ф. Гумбольдта и Ф. Ю. Ришело (1808—1875), Якоби и его преемника в Кёнигсбергском университете он был утвержден летом 1856 г. профессором Промышленного института (впоследствии — Высшая техническая школа) в Берлине. Куммеру Вейерштрасс был обязан тем, что осенью того же года он был утвержден также экстраординарным профессором Берлинского университета (с 1864 г.— ординарным) и избран членом Берлинской академии наук.

В речи, произнесенной при вступлении в Академию, Вейерштрасс изложил свое научное кредо в следующих словах: «С тех пор как под руководством моего учителя Гудермана я ознакомился в первый раз с теорией эллиптических функций, эта относительно еще новая ветвь математического анализа произвела на меня мощное притягивающее воздействие, которое остается определяющим для всего хода моего математического развития». И дальше, говоря о периодических функциях многих переменных, являющихся обобщением эллиптических функций: «Представить на самом деле и ближе изучить свойства этих величин совершенно нового рода, не имевших себе подобных в анализе, отныне становится одной из главных задач математики, которую решил исследовать и я. Однако,— продолжал Вейерштрасс,— было бы безумием, если бы я желал размышлять только о решении подобной проблемы, не будучи подготовленным посредством углубленного изучения средств, которые должны мне способствовать, и не упражняясь сначала в решении менее трудных проблем» [107].

Таким образом, от эллиптических функций к абелевым, опираясь на глубокую разработку и испытание в деле необходимых средств анализа и теории функций,— такова характеристика основного направления

[104] Ibid., Bd. 2, S. 133—152.
[105] Ibid., Bd. 2, S. 297—355.
[106] *Dugac P.* Op. cit., p. 52.
[107] Akademische Antrittsrede.— Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1857, S. 348—351; *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 1, S. 223—226.

в творчестве Вейерштрасса, данная им самим в начале берлинского периода, продолжавшегося более сорока лет, до самого конца жизни. Он умер 19 февраля 1897 г. после многолетней болезни, лишившей его уже в начале девяностых годов возможности творческой деятельности.

Результаты научной работы берлинского периода отражались в устных сообщениях Вейерштрасса в Берлинской академии наук, немногочисленных журнальных публикациях и курсах лекций, читанных в Берлинском университете. Начиная с 1894 г. стало выходить собрание сочинений Вейерштрасса «Математические труды» (Mathematische Werke), оставшееся незаконченным и поныне; из семи вышедших в свет томов два тома были напечатаны еще при его жизни. В седьмом томе, изданном в 1927 г., содержится его курс лекций по вариационному исчислению, читанный в 1879 г.

Из докладов и статей Вейерштрасса наибольшее значение для анализа и теории функций имеют следующие: «О так называемом принципе Дирихле» (1870; см. с. 201), «О непрерывной функции действительного аргумента, которая ни для одного значения последнего не обладает определенной производной» (1870; см. Кн. 3), «К теории однозначных аналитических функций» (Zur Theorie der eindeutlichen analytischen Funktionen, 1876) — работа, содержащая теорему о разложении целых аналитических функций на первичные множители, послужившая началом общей теории целых (и мероморфных) функций, и «Некоторые теоремы, относящиеся к теории аналитических функций многих переменных» (Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Verändlichen beziehende Sätze, 1879) [108]. Эта последняя работа открывалась так называемой подготовительной теоремой, дававшей основы теории делимости степенных рядов для случая многих переменных; затем рассматривались для этих рядов процесс аналитического продолжения и особые точки (в частности, точки неопределенности, не встречающиеся для функций одного переменного) и формулировалась гипотетическая теорема (доказанная потом А. Пуанкаре и П. Кузеном), что каждая однозначная функция, не имеющая других особенностей, кроме полюсов и точек неопределенности, представляется в виде отношения двух целых функций. Статья заканчивалась теоремой о представлении n-кратно периодической целой функции n переменных рядом Фурье. Значение этой работы, самым тесным образом связанной с занятиями Вейерштрасса теорией абелевых функций, в том, что от нее ведет начало позднейшая теория аналитических функций многих комплексных переменных. Далее должны быть названы работа «К учению о функциях» (Zur Funktionenlehre.— Monatsber. Preuss. Akad. Wiss., 1880) [109], где впервые был обнаружен факт, что один и тот же ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ — аналитические функции, равномерно сходящийся внутри несвязного открытого множества, может изображать в различных связных компонентах последнего различные аналитические функции. Вейерштрасс ставил здесь основной задачей опровержение соответствующего высказывания Римана (см. с. 192). Он так и писал: «Цель работы — доказать, что понятие моногенной функции комплексного переменного не полностью совпадает с понятием зависимости, выражаемой посредством арифметической операции над величинами...», добавляя в сноске, что «противоположное утверждение высказано Риманом» [110].

---

[108] Обе названные статьи были напечатаны в 1886 г.

[109] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 2, S. 201—203.

[110] Ibid., S. 210.

Проблеме аналитического представления функций действительного переменного полностью посвящена уже упоминавшаяся работа Вейерштрасса «Об аналитической представимости так называемых произвольных функций действительного аргумента», напечатанная в 1885 г. (см. выше). Ряд работ Вейерштрасса по теории функций, публиковавшихся ранее или только докладывавшихся, был собран и издан им в виде сборника «Статьи по теории функций» (*Abhandlungen aus der Funktionenlehre*. Berlin, 1886).

К теории аналитических функций, а также к вариационному исчислению примыкает работа «Исследования о поверхностях, средняя кривизна которых повсюду равна нулю» (Untersuchungen über die Flächen, deren Krümmung überall gleich Null ist) [111], где строится теория минимальных поверхностей. В первоначальном виде она была доложена автором Берлинской академии наук в 1866 г.

Но ни одним только докладам в Академии и журнальным публикациям были обязаны быстро растущие с конца 50-х годов международная известность Вейерштрасса и его влияние на умы математической молодежи. Огромную роль в этом сыграли его курсы лекций в Берлинском университете, о которых уже говорилось выше, при жизни не печатавшихся. Курсы эти читались им с перерывами из-за болезни на протяжении около 30 лет. Они состояли из циклов, в которых каждый последующий опирался на предыдущие. Вот примерный состав такого цикла в его развитом виде [112]: введение в теорию аналитических функций, включающее теорию действительных чисел, теория эллиптических функций, приложения эллиптических функций к задачам геометрии и механики, теория абелевых интегралов и функций, вариационное исчисление [113].

Чтобы достигнуть вершин, слушателям Вейерштрасса приходилось начинать с азов. Теория действительных чисел, одним из независимых создателей которой был Вейерштрасс, являлась новинкой для слушателей 1874 г., когда сложился курс «Введения в теорию аналитических функций». Как к нему относились слушатели при его повторении через 10 лет, красноречиво рассказывает наш соотечественник М. А. Тихомандрицкий, находившийся в Берлине осенью 1884 г. и увлеченный теорией гиперэллиптических и абелевых интегралов: «...в Берлине прослушал лишь несколько лекций, посвященных понятию о числе и четырем действиям над числами, с чего Вейерштрасс всегда считал нужным начинать эти курсы [речь идет именно о «Введении в теорию аналитических функций».— *А. М.*]. Это начало однако ж большинству слушателей показалось скучным, и я был свидетелем знакомого нам явления: после первой лекции в Большой аудитории, не могшей вместить всех слушателей, он [Вейерштрасс.— *А. М.*] должен был перейти в громадный зал, выстроенный отдельно в саду за зданием университета, который мог вместить более тысячи слушателей; но число их (может быть, и вследствие дурных акустических и оптических свойств этой залы) быстро сократилось, так что он через несколько лекций перешел в аудиторию, меньшую первоначальной,

---

111 Ibid., Bd. 3.

112 *Biermann K. R.* Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810—1920, S. 77.

113 Все эти курсы, кроме «Введения в теорию аналитических функций», были посмертно, с 1902 по 1927 г., опубликованы в виде последовательных томов собрания сочинений Вейерштрасса: т. IV — «Теория абелевых трансцендентных функций», т. V — «Теория эллиптических функций», т. VI — «Приложения эллиптических функций», т. VII — «Вариационное исчисление».

которая могла вместить не более 150—200 слушателей, и то далеко не была полна»[114].

Как бы, однако, ни складывалось отношение части слушателей в разное время к различным курсам Вейерштрасса, именно они привлекали к нему многочисленных учеников из многих стран. Среди этих учеников продолжателями дела Вейерштрасса в теории аналитических функций были Г. Миттаг-Леффлер, Г. А. Шварц, Л. Фукс (1833—1902) и Ф. Шоттки. Шварц, о работах которого мы уже говорили, в частности, много способствовал распространению функций $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ и $\wp(z)$, введенных в теорию эллиптических функций Вейерштрассом. Он опубликовал в виде своеобразного справочника (к сожалению, оставшегося незаконченным) систематический обзор содержания этой теории: «Формулы и теоремы для употребления эллиптических функций. По лекциям и заметкам К. Вейерштрасса...» (Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der Elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass... Göttingen, 1883; 2 Ausg., Berlin, 1893), ставший с тех пор основным источником для изучения этой теории. К ученикам и последователям Вейерштрасса в области теории эллиптических и абелевых функций относится и харьковский профессор М. А. Тихомандрицкий (1844—1921). Ему принадлежит ряд монографий, выдержанных в духе Вейерштрасса: «Обращение гиперэллиптических интегралов» (1885), «Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций» (Харьков, 1895), «Основания теории абелевых интегралов» (Харьков, 1895). В последней книге в отличие от Вейерштрасса он использует понятие римановой поверхности и в большей мере применяет алгебраические средства; здесь Тихомандрицкий ссылается на работы профессора университетов в Гейдельберге и Эрлангене Макса Нётера и свои собственные. Второе, переработанное и дополненное издание этой книги вышло в 1911 г. в Петербурге на французском языке. Желая исключить из изложения Тихомандрицкого идеи и средства, чуждые Вейерштрассу, киевский профессор В. П. Ермаков (1845—1922) опубликовал «Теорию абелевых функций без римановых поверхностей» (Киев, 1897).

К ученикам Вейерштрасса относятся также профессор университета в Галле Г. Кантор (1845—1918), положивший основные начала теории множеств, и выдающийся алгебраист, профессор Политехнической школы в Цюрихе и затем в Берлинском университете Г. Фробениус. Особое место принадлежит С. В. Ковалевской, пользовавшейся в 1870—1874 гг. частными уроками и консультациями Вейерштрасса и сохранившей с ним на всю жизнь самые тесные дружеские отношения. О жизни и творчестве Ковалевской будет идти речь в разделе этого труда, посвященном теории дифференциальных уравнений с частными производными, но в настоящей главе мы еще коротко остановимся на значении методов теории аналитических функций для ее исследований.

Теория аналитических функций в России. Ю. В. Сохоцкий и теорема Сохоцкого — Казорати — Вейерштрасса

Хотя первоначальное накопление материалов теории аналитических функций комплексного переменного благодаря трудам Эйлера было тесно связано с Петербургской академией XVIII в., среди русских математиков XIX в. долго не находилось людей, желавших посвятить себя новой

---

[114] *Тихомандрицкий М. А.* Карл Вейерштрасс.— Сообщ. Харьк. мат. о-ва (2), 1897, 6, с. 50.

области математики. Все же можно назвать несколько имен, для которых она не была чуждой.

О. Коши в напечатанном в «Bulletin de Férussacc» за 1825 г. автореферате своего знаменитого мемуара «Об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами», среди ученых, изучавших в последнее время такие интегралы, с похвалой называет «молодого русского» М. Остроградского, который «также прибегал к применению этих интегралов и к их преобразованию в обыкновенные интегралы, дал новые доказательства формул, которые я напомнил выше, и обобщил другие формулы, предложенные мною в 19-й тетради Журнала Политехнической школы» [115].

Об этих исследованиях М. В. Остроградского мы знаем очень мало. Известно, что в годы жизни в Париже он в 1824 г. написал и в 1826 г. представил Парижской академии наук «Замечания об определенных интегралах», в которых вывел формулу Коши для вычета функции относительно полюса n-го порядка [116]. Позднее он изложил применения теории вычетов и формулу Коши к вычислению определенных интегралов в обширном публичном курсе лекций, прочитанном в 1858—1859 гг. [117] Однако занятия М. В. Остроградского теорией аналитических функций явились незначительным эпизодом в его творчестве, посвященном преимущественно разработке методов математической физики, вариационного исчисления, интегрального исчисления, а также механики.

В 1826 г. было сделано одно из наиболее замечательных открытий во всей истории науки — открытие неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским. Понадобились десятилетия, чтобы математики обнаружили значение этого открытия для теории аналитических функций.

Можно утверждать, что существенная сторона обширного цикла фундаментальных исследований по теории функций комплексного переменного в последние десятилетия XIX в. и первое десятилетие XX в. (Ф. Клейн, А. Пуанкаре, П. Кёбе) состояла в постепенном выяснении того обстоятельства, что геометрия Лобачевского есть вместе с тем геометрия аналитических функций одного комплексного переменного [118].

Преимущественно к 30-м годам относится ряд работ Н. И. Лобачевского, имеющих непосредственное значение для математического анализа, и в частности для теории функций комплексного переменного. В его «Алгебре или вычислении конечных» (Казань, 1834) содержится теория элементарных функций комплексного переменного. При этом $\cos x$ и $\sin x$ определяются первоначально для x действительного как действительная и мнимая части функции $e^{x\sqrt{-1}}$. Отсюда уже с использованием ранее установленных свойств показательной функции и привлечением степенных разложений развертываются все основные свойства тригонометрических функций. По-видимому, Лобачевский придавал особое значение такому чисто аналитическому построению тригонометрии, не зависящему от евклидовой геометрии.

Мы уже упоминали выше, что в 1850 г. профессор Петербургского университета (впоследствии академик) И. И. Сомов издал «Основания теории

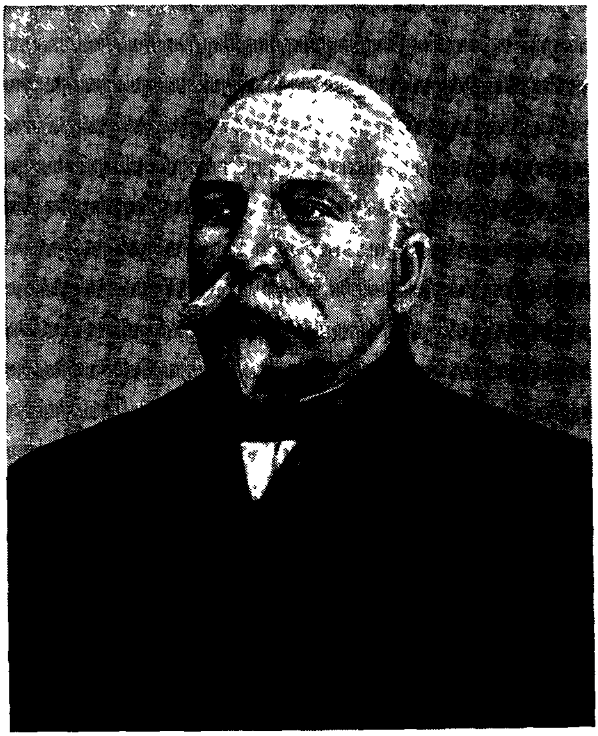
---

[115] *Cauchy A. L.* Oeuvres completes, sér. 2, t. 2, p. 57—65.

[116] См.: *Юшкевич А. П.* О неопубликованных ранних работах М. В. Остроградского.— ИМИ, 1965, вып. 16, с. 12—26. Статья Остроградского не была опубликована и хранится в архиве Академии наук в Париже.

[117] Записи этого курса, сделанные неизвестным слушателем, опубликовала со своими комментариями В. И. Антропова в кн.: Михаил Васильевич Остроградский. 1 января 1862 — 1 января 1962. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. М.: Физматгиз, 1961, с. 152—263.

[118] См. ниже, а также в кн.: Очерки по истории теории аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. Очерк 3.



Ю. В. СОХОЦКИЙ

аналитических функций», в основу которых были положены «Новые основания» Якоби (см. с. 158). Если эта книга была обращена таким образом ко вчерашнему дню математической науки, то докторская диссертация М. Е. Ващенко-Захарченко «Риманова теория функций составного переменного» (1866), также упоминавшегося выше(см. с. 164), приобщила русского читателя к самым передовым идеям теории функций того времени.

Однако первым по-настоящему оригинальным русским исследователем в области теории аналитических функций комплексного переменного был, без сомнения, Ю. В. Сохоцкий.

Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842—1927), уроженец Варшавы, учился в Петербургском университете, который окончил в 1866 г. В 1868 г. он защитил магистерскую диссертацию «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (СПб., 1868). По его словам, он долго упрашивал П. Л. Чебышева, пока тот не принял диссертацию. Быть может, в этом факте проявилось нерасположение Чебышева к теории функций комплексного переменного. С осени 1868 г. Сохоцкий — приват-доцент Петербургского университета, где он читал тогда курсы теории функций мнимого переменного и о непрерывных дробях с приложениями к анализу. В 1873 г. Сохоцкий защитил докторскую диссертацию «Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды» (СПб., 1873), а в 1882 г. был избран ординарным профессором Петербургского университета. Ряд более поздних работ Сохоцкого относится к теории эллиптических функций, а также алгебре и теории чисел. Ему принадлежат оригинальные курсы: «Высшая алгебра» (1882), «Теория чисел» (1888), а также выдающееся исследование по теории алгебраических чисел, основывающееся на работах Е. И. Золотарёва, А. А. Маркова и его собственных: «Начала общего наибольшего делителя в применении к теории делимости алгебраических чисел» (1893). Умер Ю. В. Сохоцкий в 1927 г. в Ленинграде.

Магистерская диссертация Сохоцкого посвящена приложениям теории вычетов к обращению степенного ряда (ряд Лагранжа) и в особенности к разложению аналитических функций в непрерывные дроби, а также к многочленам Лежандра. В предисловии, отмечая значение теории вычетов для математического анализа, он указывал, что «исчисление интегральных вычетов почти вовсе не разрабатывается учеными нынешнего времени». «В настоящем рассуждении,— писал далее Сохоцкий,— я излагаю общие начала исчисления интегральных вычетов и показываю некоторые из его применений, именно такие, которых я вовсе не нашел между работами Коши или же нашел их изложение не в столь простой и наглядной форме, в какой мне удалось их представить» [119].

В этой работе, в частности, формулирована и доказана знаменитая теорема о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Сохоцкий высказывает ее в следующем старомодном виде: «Если данная функция $f(z)$ в некоторой точке z_0 обращается в ∞ бесконечного порядка, то непременно в этой же точке функция $f(z)$ должна принимать всевозможные значения» [120]. Здесь существенно особая точка названа точкой, в которой $f(z)$ «обращается в ∞ бесконечного порядка» (имеется в виду характер разложения функции $f(z)$ в окрестности z_0), а под значениями функции $f(z)$ в точке z_0 подразумевается множество предельных значений функции в этой точке. Это явствует как из примеров, указываемых им ранее (например, $\sin\frac{1}{z-b}$ «в точке $z=b$ принимает всевозможные значения»), так и из приводимых им для доказательства рассуждений, по существу не отличающихся от современных. Упомянутая теорема в том же году была опубликована Казорати в его известном курсе, а восемью годами позднее — Вейерштрассом в упоминавшейся ранее статье «К теории однозначных аналитических функций». Поэтому ее можно назвать теоремой Сохоцкого—Казорати—Вейерштрасса.

Интересна и поучительна судьба этой теоремы [121]. В ней отразилось развитие ряда важных в принципиальном отношении общих представлений теории функций третьей четверти XIX в.

Коль скоро теорема Лиувилля была уже известной, то становилась почти очевидной и следующая теорема: если целая функция $f(z)$ не есть константа, то каждое комплексное число C, конечное или бесконечное, либо принадлежит к значениям, принимаемым функцией, либо является предельным для них.

В случае, когда $C=\infty$, это и есть теорема Лиувилля. Если же $C\neq\infty$ и не принадлежит к значениям функции, то $[f(z)-C]^{-1}$ — целая функция и из той же теоремы вытекает, что C должно принадлежать предельным значениям $f(z)$. Мы воспроизвели здесь ход рассуждений Брио и Буке в «Теории двоякопериодических и, в частности, эллиптических функций» (1859). Правда, результат был формулирован в непривычном для нас виде: «Функция, монодромная и моногенная на всем протяжении плос-

---

[119] *Сохоцкий Ю. В.* Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями. СПб., 1868, с. 1 (ненумер.).

[120] Там же, с. 17.

[121] Фактическая сторона дела подробно рассмотрена с привлечением архивных материалов в недавней работе Э. Нойеншвандера: *Neuenschwander E.* The Casorati—Weierstrass Theorem...— Hist. Math., 1978, 5, p. 139—166.

кости, принимает все возможные значения». Дело здесь в том, что авторы, как и многие их современники, не проводят различия между значениями функции и значениями, предельными для них [122]. В таком единственно возможном понимании теорема Брио и Буке верна и строго ими доказана (в ней, в частности, содержится так называемая основная теорема алгебры). Мы для удобства назовем ее «предварительной» теоремой (на пути к теореме Сохоцкого—Казорати—Вейерштрасса).

По-видимому, руководствуясь аналогией со свойствами эллиптических функций, Брио и Буке поспешили сделать из «предварительной» теоремы следующий вывод: «две функции, монодромные и моногенные, имеющие одни и те же нули и бесконечности [т. е. полюсы.— *А. М.*] равны с точностью до постоянного множителя». Вывод, разумеется, ошибочный: частное двух этих функций не принимает значений 0 и ∞ в конечных точках плоскости, но ничто не мешает этим числам фигурировать в полном согласии с «предварительной» теоремой в качестве предельных значений.

Ошибка Брио и Буке была замечена современниками, в частности Казорати [123]. Во втором расширенном издании книги Брио и Буке (1875) отсутствует не только это неверное следствие, но и та верная теорема, из которой оно было извлечено.

Чтобы от «предварительной» формулировки перейти к полной, предстояло сделать еще два важных шага.

Во-первых, найти аналог теоремы Лиувилля для случая, когда функция $f(z)$ является однозначной и аналитической только в некоторой окрестности точки z_0 (исключая, быть может, эту точку). Такой аналог можно извлечь из докторской диссертации Римана (1851) в следующем виде: если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=0$, то z_0 не может быть особой точкой $f(z)$. Очевидно, что условие Римана выполнено, когда $f(z)$ ограничена в данной окрестности точки z_0.

Во-вторых, следовало провести разграничение между полюсом и существенно особой точкой, не различаемых (для $z_0=\infty$) в формулировке «предварительной» теоремы. Для этого достаточно, например, показать, что условие $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ выполняется тогда и только тогда, когда существуют натуральное число n — порядок полюса и функция $\varphi(z)$, аналитическая в точке z_0 и не обращающаяся в ней в 0, такие, что $f(z) = (z-z_0)^{-n}\varphi(z)$. С помощью теоремы Римана и ряда Тейлора это устанавливалось различными математиками без опоры на лорановское разложение.

Оставалось после этого предположить, что z_0 есть «∞ бесконечно высокого порядка» (т. е. существенно особая точка функции), и повторить для этого случая без изменений все рассуждения, приводившие ранее к «предварительной» теореме. В результате на этот раз получилась теорема Сохоцкого—Казорати—Вейерштрасса. Все эти шаги и были сделаны и опубликованы в 1868 г. как Сохоцким, так и Казорати.

Интересно отметить, что в учебнике Е. Дюрежа «Элементы теории функций» (1864), о котором мы уже упоминали, обнаруживается некое промежуточное состояние на пути от Брио и Буке (с их книгой он успел ознакомиться) к Сохоцкому и Казорати. Именно у Дюрежа есть и теорема Римана, которую он вполне корректно формулирует и доказывает с по-

---

[122] Вот почему нельзя видеть в этом предложении «некорректную формулировку того, что станет теоремой Пикара» (Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700—1900/ Sous la direction de J. Dieudonné. Paris, 1978, t. 1, p. 149). Ведь теорема Пикара говорит только о значениях, принимаемых функцией!

[123] См. названную выше статью Нойеншвандера.

мощью интегральной формулы Коши, есть и нужная характеристика полюса [124]. Однако дальше Брио и Буке он все же не идет в интересующем нас направлении, ограничиваясь «предварительной» теоремой, устанавливающей, как он выражается, гармонию в теории функций, исчезающую, если исключить комплексные значения переменной. Наконец, как и Брио и Буке, он приводит то же самое ошибочное следствие из этой теоремы. В итоге первенство в публикации рассматриваемой теоремы в ее полном виде остается за Сохоцким и Казорати. Независимо друг от друга они избрали один и тот же ход рассуждений, впрочем, в известной мере подсказанный их предшественниками.

Что касается Вейерштрасса, то хотя и имеются сведения, что теорема эта фигурировала в его лекциях 1863 и 1866 гг. [125], все же опубликовал он ее только в 1876 г. в работе, посвященной в основном аналитическому представлению функций, имеющих конечное число существенно особых точек. Она формулирована в самом конце работы. Путь, который Вейерштрасс предлагает для доказательства, отнюдь не прямой. Чтобы установить нужный аналог теоремы Лиувилля, он ссылается на свою теорему о разложении целой функции в произведение, полученную в этой же статье.

Докторская диссертация Ю. В. Сохоцкого (1873) замечательна тем, что именно здесь было положено начало теории сингулярных интегральных уравнений, содержащих главные значения интегралов в смысле Коши. В первой же фразе предисловия Сохоцкий говорит о задаче решения интегрального уравнения, содержащего интеграл типа Коши: «В сочинении этом я стараюсь обратить внимание читателя на решение уравнения $\varphi(x)=\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}$, т. е. на определение функции $f(x)$ по данной функции $\varphi(x)$». И далее, после ссылки на интегральные уравнения в работах Абеля, Коши и Мерфи: «Можно указать на несколько других случаев определения функции под знаком интеграла: один из простейших есть тот, на который мы выше указали. Он заслуживает особенного внимания потому, что его решение прямо приводит к основным началам теории функций от мнимой переменной».

Основной интерес с точки зрения теории функций представляет первый параграф рассматриваемой работы, так как здесь впервые вводится в развернутом виде понятие интеграла типа Коши: $\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}=\varphi(x)$, где a и b — два произвольных комплексных числа. Интеграл предполагается взятым по некоторой кривой («траектории»), соединяющей a с b. Функция $f(t)$ «может быть разрывная между пределами интеграла, лишь бы только интеграл имел конечное и определенное значение». Что касается самого интеграла $\varphi(x)$, то он в каждой точке x траектории принимает два значения, которые рассматриваются как соответствующие двум различным точкам x_1 и x_2, относимым одна к одной, другая к другой сторонам траектории; вследствие этого последняя рассматривается как линия разрыва функции $\varphi(x)$. Далее доказывается ряд теорем, из которых наиболее важны для

[124] В связи с этим мы не можем согласиться с утверждением Нойеншвандера (на с. 156 вышеназванной его статьи), что Вейерштрасс первым перенес (и это в 1876 г.!) теорему Лиувилля на случай функции, однозначной и аналитической в окрестности существенно особой точки. До него это сделал Риман, а затем — Дюреж, Сохоцкий и Казорати.

[125] См. цитированную статью Э. Нойеншвандера, с. 161.

приложений следующие: «*если* $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ *суть два значения функции* $\varphi(x)$, *соответствующие двум смежным точкам на линии разрыва, то* $(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))/2\pi i = (f(x+0) + f(x-0))/2$, *так что если функция* $f(x)$ *в точке* x *неразрывна, то* $(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))/2\pi i = f(x)$» (теорема 1); «*если в точке* x *на линии разрыва функция* $f(x)$ *есть неразрывная, так что при бесконечно малом* h

$$f(x+h) - f(x-h) = \theta h^{\alpha},$$

где α *— конечная положительная величина, а* θ *принимает конечное положительное значение при* $h = 0$, *то*

$$\varphi(x_1) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x} + \pi i f(x),$$

где интеграл во второй части обозначает предел суммы

$$\lim\left[\int_a^{x-h} \frac{f(t)\,dt}{t-x} + \int_{x+h}^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}\right]$$

для $h = 0$» (теорема 2).

Именно в последней теореме появляется *главное значение интеграла типа Коши* $\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}$, а вместе с ним и *сингулярное интегральное уравнение* (относительно $f(x)$). При этом на функцию $f(x)$ налагается условие Гёльдера, которое при гипотезе существования касательной к траектории в точке, неявно подразумеваемой, действительно обеспечивает существование главного значения интеграла.

Эти и некоторые другие результаты Сохоцкого, относящиеся к граничным значениям интеграла типа Коши, были переоткрыты 35 лет спустя И. Племелем (Ein Ergänzugssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend.— Monatshefte für Math. und Phys., 1908, **19**, S. 205—210) и долгое время были известны только под его именем. В середине XX в. они получили широкое применение в работах по теории упругости выдающегося грузинского математика академика Н. И. Мусхелишвили и его школы.

Говоря о развитии теории аналитических функций, нельзя пройти мимо исследований С. В. Ковалевской, хотя их основное значение лежит за пределами этой теории. В работе «К теории уравнений в частных производных» (Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen.— J. für Math., 1875, **80**) С. В. Ковалевская доказала весьма общую теорему существования аналитических решений системы уравнений с частными производными, в которой старшие производные неизвестных функций выражены через аналитические функции от независимых переменных, от искомых функций и их производных более низких порядков (нормальная форма системы).

Важнейшими в научном творчестве С. В. Ковалевской являются, как известно, ее исследования по теории движения твердого тела, прежде всего премированная на конкурсе Парижской академии наук работа «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки» (Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.— Acta math., 1889, **12**). Успех автора был обусловлен совершенно новой постановкой задачи в терминах теории аналитических функций. Рассматривая время t как комплексное переменное, Ковалевская решила найти вообще все те случаи, когда параметры движения выражаются мероморфными функциями от t, содержащими пять произвольных постоянных. В результате было обнаружено, что в ее постановке задачи, кроме известных случаев Эйлера и Лагранжа, существует еще один и только один (случай Ковалевской), характеризуемый тем, что два главных момента инерции равны удвоенному третьему, причем центр тяжести тела лежит в плоскости равных между собой моментов.

Этот результат был позднее дополнен академиком А. М. Ляпуновым, показавшим, что случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской единственные, при которых параметры, определяемые дифференциальными уравнениями движения, являются однозначными функциями времени при любых начальных условиях («Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку».— Сообщ. Харьк. мат. о-ва (2) (1894), 1895, 4). Исследования Ковалевской послужили отправной точкой для многочисленных работ, посвященных отысканию и изучению случаев движения твердого тела при тех или иных специальных предположениях относительно аналитической природы соответствующих функций.

Одна из областей применений теории аналитических функций к механике связана с проблемой устойчивости колебаний.

Комплекснозначную функцию действительного переменного

$$e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t} \cos \omega t + i e^{\sigma t} \sin \omega t,$$

где σ и ω — действительные константы, можно трактовать как комплексную форму записи простейшего колебания с частотой ω и амплитудой $e^{\sigma t}$. Это колебание будет устойчивым, если его амплитуда не возрастает неограниченно с течением времени, т. е. если $\sigma \leqslant 0$. Коэффициент $p = \sigma + i\omega$ при t в показателе находится как корень уравнения $f(p) = 0$, где $f(p)$ — целая функция комплексного переменного p или в простейшем случае многочлен. Поэтому для практики весьма важно иметь критерии, позволяющие судить, в каких случаях все нули данного многочлена или целой функции лежат в левой полуплоскости, т. е. их действительные части неположительны (критерии устойчивости). Эта проблема была поставлена еще в 1868 г. знаменитым физиком Дж. К. Максвеллом (1831—1879). В 1877 г. Э. Дж. Раус (1831—1907) дал аналитическое ее решение для случая многочленов, которое, однако, вскоре было забыто. В 1895 г. А. Гурвиц предложил новое ее решение, основанное на теории вычетов, и теперь проблему называют проблемой Рауса — Гурвица.

Оригинальный геометрический метод решения проблемы предложил одновременно с Раусом русский ученый И. А. Вышнеградский (1831—1895), бывший с 1862 г. профессором и с 1875 г. директором Петербургского технологического института, в статье «О регуляторах прямого действия» (Изв. СПб. практ. технол. ин-та, 1877). Идея его заключается в том, что исследуемый многочлен включается в семейство

$$P(p)\xi + Q(p)\eta + R(p),$$

где P, Q и R — некоторые многочлены, а ξ и η — действительные параметры.

Пусть исследуемый многочлен получается при значениях параметров ξ_0 и η_0. Вышнеградский рассматривает плоскость комплексного переменного $\omega = \xi + i\eta$ и получает разбиение этой плоскости на отдельные области, в каждой из которых многочлены семейства имеют определенное число корней с положительными и отрицательными действительными частями (и не имеют чисто мнимых корней). Область, для точек которой число корней с отрицательной действительной частью равно k, а с положительной $n - k$, обозначим через $D(k, n - k)$. Границы областей устанавливаются, не прибегая к нахождению самих нулей. После этого остается лишь определить, какой именно из них принадлежит точка $\omega_0 = \xi_0 + i\eta_0$, соответствующая исследуемому многочлену. В частности, условие устойчивости состоит в том, что ω_0 принадлежит области $D(n, 0)$ (области устойчивости).

И. А. Вышнеградский изложил свой метод лишь на примере многочленов третьей степени с действительными коэффициентами. Распространение метода Вышнеградского на случай произвольных многочленов является заслугой советских математиков [126].

Целые и мероморфные функции. Теорема Пикара

Первым значительным результатом общей теории целых функций можно считать теорему Коши (1844), известную, однако, под именем Лиувилля: целая функция, ограниченная по модулю во всей плоскости, есть константа (ср. с. 146, 161). Теорема эта долгое время играла роль подсобного средства в общей теории эллиптических функций (Лиувилль, Брио и Буке). Но из нее сразу вытекало также, что максимум модуля $M(r)$ целой функции в круге $|z| < r$ бесконечно возрастает вместе с r и, более того (путем небольшого обобщения рассуждения Коши), что для трансцендентной функции (т. е. целой функции, отличной от многочлена) он растет быстрее любой фиксированной степени r. Отсюда один шаг до классификации целых функций по быстроте роста их максимума модуля. Но этот шаг был сделан только в конце века Э. Борелем.

Исходным пунктом в изучении целых функций была обнародованная Вейерштрассом в 1876 г. теорема о разложении целых функций в бесконечное произведение («К теории однозначных аналитических функций» (Zur Theorie der eindeutingen analytischen Funktionen.— Berl. Alh., 1876, S. 11—60)) [127]. Она утверждает, что для любой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ с неубывающими и стремящимися к ∞ модулями можно построить целую функцию, имеющую нули в этих и только в этих точках плоскости, и что вообще каждая целая функция с указанными нулями может быть представлена по формуле

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n} + \ldots + \frac{z^n}{nz_n}\right).$$

Здесь $g(z)$ — целая функция (если $f(z)$ задана, то она определяется по этой формуле с точностью до слагаемого вида $2k\pi i$, где k — целое число), λ — кратность нуля $f(z)$ в начале координат и все z_n предполагаются не лежащими в начале.

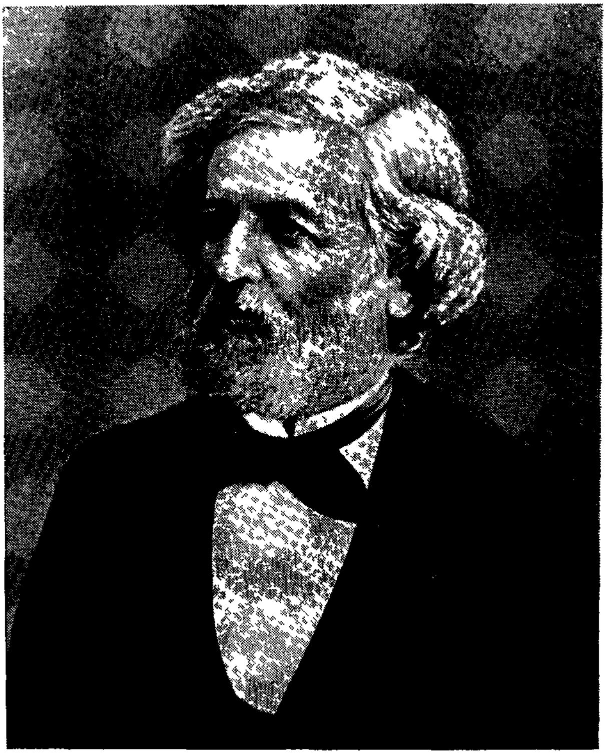
Одно из первых разложений целой функции в произведение было получено Эйлером для $\sin \pi z$ в 1734—1735 гг.; оно представлялось ему естественным аналогом разложения многочлена на множители и не заслуживающим особого обоснования. Раз уравнение $\sin \pi z = 0$ имеет корни $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и никаких других, то $\sin \pi z = Cz(1 - z/1)(1 + z/1) \ldots$; для константы легко получаем значение 1 (см. ИМ, т. 3, с. 328—329).

Впрочем, в одном из самых ранних определений гамма-функции, содержащемся в письме Эйлера к Гольдбаху (октябрь 1729), мы видим раз-

---

[126] См.: *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.

[127] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 2.



Ж. БУКЕ

ложение $\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n^z n!}$, которое лишь несущественно отличается от формулы, натолкнувшей Вейерштрасса на общий результат:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{cz}\left[\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z/1}\right]\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-z/2}\right]\ldots$$

Хотя корни уравнения $1/\Gamma(z) = 0$ и сводятся здесь к точкам 0, 1, 2, ..., произведение $z(1 + z/1)(1 + z/2)\ldots$ расходится. Чтобы получить верный результат, нужны обеспечивающие сходимость и не имеющие нулей вспомогательные множители: $e^{-z/1}$, $e^{-z/2}$, ... Их-то в общем виде $\exp(z/z_n + z^2/2z_n^2 + \ldots + z^n/nz_n^n)$ и вводит Вейерштрасс.

Впрочем, о теореме о разложении он извещает С. В. Ковалевскую (и одновременно Г. А. Шварца) еще в декабре 1874 г. Теорема эта позволила ему сразу же доказать, что каждая мероморфная функция одного переменного — термин, введенный Брио и Буке (сам Вейерштрасс пользовался достаточно громоздкой характеристикой: однозначная аналитическая функция $f(z)$, которая для каждого конечного значения z имеет характер рациональной функции),— есть частное двух целых функций $f = g/h$. К этому он добавляет, что можно требовать, чтобы числитель и знаменатель дроби нигде не обращались в нуль одновременно. Однако для функций многих переменных аналогичную теорему ему так и не удалось получить, хотя он, можно сказать, гонялся за ней в связи с завершением теории абелевых функций. Успех выпал на долю А. Пуанкаре (1883) только для случая двух переменных, после чего его ученик П. Кузен (1867—1933), работавший сперва в лицее в г. Кане, а затем доцентом и профессором университета в Бордо, рассмотрел общий случай (1895). Методы этих двух доказательств различны и, конечно, отличаются от метода Вейерштрасса (для одного переменного). Можно сказать, что здесь впервые была отчетливо выявлена специфика теории функций многих комплексных переменных.

Если теорема Вейерштрасса являлась обобщением для целых трансцендентных функций теоремы о разложении многочлена на линейные множители, то естественно вставал вопрос об обобщении на случай любых мероморфных функций теоремы о представлении рациональной функции в виде суммы простейших дробей. Утвердительный ответ был получен и опубликован в следующем году учеником Вейерштрасса, шведским ученым, позднее профессором Стокгольмского университета и основателем журнала «Acta mathematica» Гёста Миттаг-Леффлером (1846—1927) в статье «Аналитическое представление функции рационального характера с произвольно выбранной граничной точкой» (Analyt. framställn. af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspankt.— Öfversigt Kgl. Vet. Akad. Förhandl., 1877, 34). Вот что гласит теорема Миттаг-Леффлера: можно всегда построить мероморфную функцию с предписанными главными частями $G_n(z)$ лорановских разложений (простейшие дроби) в предписанных полюсах $\{z_n\}$, лишь бы выполнялось условие $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$; каждая из таких функций $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{1}^{\infty} [G_n(z) + P_n(z)],$$

где $\varphi(z)$ — некоторая целая функция, а $\{P_n(z)\}$ — многочлены, обеспечивающие сходимость разложения.

Коль скоро теорема Миттаг-Леффлера доказана, то теорема Вейерштрасса получается из нее как простое следствие (но не наоборот!).

Упомянутая теорема Вейерштрасса была, конечно, исходным пунктом последующего построения теории целых функций. Но гораздо более глубоким результатом, из которого уже в 20-х годах нынешнего века выросла общая теория мероморфных (и целых) функций — теория распределения значений, была теорема Э. Пикара (1856—1941), впоследствии профессора Тулузского университета, затем Сорбонны и Высшей нормальной школы, с 1889 г. члена и с 1917 г. непременного секретаря Парижской академии наук. Она была опубликована в заметке «Об одном свойстве целых функций» (Sur une propriété des fonctions entières.— C. r. Acad. sci. Paris, 1879, 88, p. 1024—1027). Согласно теореме Пикара, для каждой целой функции $f(z)$, отличной от константы, уравнение $f(z) = A$, где A — любое комплексное число, имеет корни; исключение возможно лишь для одного значения A, когда уравнение вовсе не имеет корней. Это значение, зависящее от функции, называется пикаровским исключительным значением (пример: $A = 0$ для функции $f(z) = e^z$). В качестве средства доказательства Пикар использовал бесконечнозначную функцию, обратную так называемой модулярной функции Шварца (см. выше).

В том же 1879 г. в заметке «Об аналитических функциях, однозначных в окрестности существенно особых точек» (Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un pointe singulier essentiel.— C. r. Acad. sci. Paris, 1879, 89), Пикар, несколько усложнив доказательство, получил так называемую большую теорему (в отличие от предыдущей, названной малой): в любой окрестности существенно особой точки z_0 функции $f(z)$ уравнение $f(z) = A$, где A — любое комплексное число, конечное или

Э. ПИКАР

бесконечное, имеет бесконечное множество корней; исключение возможно лишь для двух значений A, зависящих только от данной функции. (При этом допускается, что функция $f(z)$ имеет полюсы в любой окрестности z_0.) Пример, когда $z_0 = \infty$, представляют в случае функции $\operatorname{tg} z$ числа $\pm i$ — уравнение $\operatorname{tg} z = \pm i$ не имеет ни одного корня.

Большую теорему Пикара естественно рассматривать как значительное усиление теоремы Сохоцкого — Казорати — Вейерштрасса. Из последней следует только, что уравнению $f(z) = A$ в окрестности существенно особой точки можно удовлетворить если не точно, то приближенно, т. е. найти такую последовательность $\{z_n\} \to z_0$, что $\{f(z_n)\} \to A$. Однако для целых трансцендентных функций теорема Пикара допускает и иную трактовку, позволяющую вспомнить и основную теорему высшей алгебры.

В самом деле, если рассматривать целую трансцендентную функцию $f(z)$ как своего рода многочлен бесконечно высокой степени, то, оказывается, что уравнение $f(z) = A$ имеет столько корней, какова степень $f(z)$ (правда, за исключением, быть может, одного значения A). Развитие этой аналогии требовало установления количественного различия между различного рода «бесконечностями», понимаемыми и как степень уравнения, и как количество корней. Новые для того времени идеи Г. Кантора о существовании различных бесконечных кардинальных или ординальных чисел были здесь неприменимы, но можно допустить, что они не оставались без внимания; о результатах будет сказано ниже.

Как бы то ни было, попытка классификации различных трансцендентных целых функций по их «степеням» сначала связывалась только с видом их разложений на множители по формуле Вейерштрасса, и первая идея была предложена здесь профессором Политехнической школы и Коллеж де Франс, членом Парижской академии наук Э. Н. Лагерром (1834—1886), большинство работ которого относится к алгебраической геометрии. В заметке «О некоторых трансцендентных уравнениях» (Sur quelques équations transcendantes. — C. r. Acad. sci. Paris, 1882, 94, p. 160—163) Лагерр ввел понятие рода целой функции. Пусть $\{z_n\}$ ($z_n \neq 0$) — последовательность нулей целой функции $f(z)$, причем существует такое целое неотрицательное число k, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{z_n}\right|^k$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{z_n}\right|^{k+1}$ сходится (для функции $\sin z$, например, $k = 1$).

Из доказательства Вейерштрасса следует тогда, что разложение $f(z)$ на множители приобретает более простой вид:

$$f(z) = e^{g(z)}z^{\lambda}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\ldots+\frac{z^k}{kz_n^k}}$$

(показательный множитель под знаком произведения заменялся единицей, если $k = 0$). Если, кроме того, обнаруживается, что целая функция $g(z)$ есть многочлен степени m, то большее из двух целых чисел m и k и называется родом (жанром) p функции $f(z)$. Род полагается равным бесконечности, когда хотя бы одно из предыдущих условий не выполняется. Легко проверить, что для функций $\sin z$, $(\sin\sqrt{z})/\sqrt{z}$ и $\sin(\sin z)$ род соответственно равен 1, 0 и ∞.

Лагерра занимала, в частности, аналогия между родом целой функции и степенью многочлена в случае действительных коэффициентов. Так, из теоремы Ролля сразу следует, что если такой многочлен имеет только действительные нули, то и все нули его производной также действительны. В упомянутой заметке 1882 г. Лагерр высказал теорему, полностью доказанную Э. Борелем в монографии «Лекции о целых функциях» (Leçons sur les fonctions entières. Paris, 1900): в случае целой функции рода p, имеющей, помимо действительных, еще и q мнимых нулей, ее производная, кроме тех действительных нулей, существование которых вытекает из порядков кратности и теоремы Ролля, может иметь еще (самое большее) $p + q$ мнимых нулей.

А. Пуанкаре занялся поиском соотношений между родом целой функции, с одной стороны, и ростом ее максимума модуля $M(r)$ и асимптотическим поведением последовательности коэффициентов ее тейлоровского разложения $f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ — с другой. В частности, в мемуаре «О целых функциях» (Sur les fonctions entières.— Bull. Soc. math. France, 1883, 11, p. 136—144) он установил, что для функции рода p и любого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения

$$\lim_{z\to\infty} e^{-\varepsilon|z|^{p+1}}|f(z)| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} c_n\Gamma\left(\frac{n+\varepsilon+1}{p+1}\right) = 0$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция). Десятью годами позднее эти теоремы были обращены Ж. Адамаром в его работе «Исследование о свойствах целых функций и, в частности, одной функции, рассмотренной Риманом» (Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.— J. math. pures et appl. (4), 1893, 9, p. 171—215).

А. ПУАНКАРЕ

Однако уже из этих первых работ вытекало, что понятие рода, если можно так выразиться, не очень удачно придумано. Так, например, для двух целых функций $f(z)$ и $g(z)$ рода не выше p нельзя было сделать вывода, что род их суммы $f(z)+g(z)$ не превышает p; напротив, возможны случаи, когда он превышает p (но не более чем на единицу).

Огромное значение имело введенное Борелем в 1896 г. понятие порядка целой функции [128], которое для целых функций и играет роль степени многочлена. Прошли годы, прежде чем оно заняло решающее место, оттеснив понятие рода. Недаром первое время Борель сопровождает его осторожным эпитетом «кажущийся» (ordre apparent).

Так как для целой трансцендентной функции $f(z)$ всегда $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty$ ($M(r)$ растет быстрее, чем любая степень r), то естественно назвать порядком (роста) величину $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} = \rho$. Он оказывается, например, равным 1 для e^z или $\sin z$, равен 1/2 для $(\sin \sqrt{z})/\sqrt{z}$, натуральному числу n для e^{z^n} и ∞ для e^{e^z}.

Из сопоставления результатов Адамара (1893) и Бореля (1896) вытекает соотношение между коэффициентами и порядком, аналогичное формуле Коши — Адамара:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{1/|a_n|}}.$$

[128] См., например, вышеупомянутую монографию Бореля.

Если порядок ρ характеризует максимально возможную быстроту роста трансцендентной целой функции, то $\varkappa$ — показатель сходимости последовательности нулей $\{z_n\}$ $(z_n \neq 0)$ — дает одну из возможных характеристик максимального роста $|z_n|$ в зависимости от n и, следовательно, большего или меньшего обилия нулей на плоскости. Он определяется формулой

$$\varkappa = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |z_n|}$$

и может быть также охарактеризован как нижняя грань тех чисел N $(0 \leqslant N \leqslant +\infty)$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^N}$ сходится; для нулей $\sin z$, например, $\varkappa = 1$.

Адамар установил, что всегда

$$\varkappa \leqslant \rho.$$

Упомянутый результат наряду с целым рядом других замечательных теорем был получен Ж. Адамаром в цитированной выше работе «Исследование свойств целых функций и, в частности, одной функции, рассмотренной Риманом» (1893).

Здесь мы должны вернуться назад к классической работе Б. Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» (1859), уже упоминавшейся ранее. Хотя она и относится к теории чисел, ибо поставленная в ней цель — это изучение асимптотического поведения функции $\pi(n)$ — числа простых чисел, не превышающих n, цель, кстати, в ней не полностью достигнутая (см. Кн. 1, гл. III), но значение ее выходит за пределы теории чисел и весьма существенно для всей истории математики, в частности для теории аналитических функций. Попытки заполнить пробелы рассуждений Римана послужили стимулом для появления других работ, не прекращающихся и в наши дни. Среди таких работ был, как это следует из его названия, и упомянутый труд Адамара.

Выдающейся заслугой Римана было то, что он по-новому ввел в математику (теорию чисел и теорию функций) функцию $\zeta(s)$, известную еще Эйлеру (см. ИМ, т. 3, с. 109). При $s > 1$ действительном она определялась либо одной, либо другой из формул:

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - 1/p^s} = \sum \frac{1}{n^s},$$

где p пробегает все простые числа, а n — все натуральные числа. Гениальная идея Римана заключалась в том, чтобы рассматривать $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного s. Путем остроумных преобразований он доказывает, что она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость как функция однозначная и мероморфная и имеет единственный простой полюс в точке $s = 1$ и простые нули в точках $-2, -4, -6, \ldots$ (так называемые тривиальные нули). Установив для $\zeta(s)$ функциональное уравнение, которое также было известно еще Эйлеру в 1749 г. (произведение $\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ не изменяется при замене s на $1 - s$; см. ИМ, т. 3, с. 338), Риман вводит вспомогательную целую функцию

$$\xi(t) = \Gamma(s/2 + 1)(s - 1)\pi^{-s/2}\zeta(s).$$

Здесь $s = 1/2 + it$ так, что $\xi(t)$ в силу упомянутой теоремы четная функция. Благодаря множителю $\Gamma(s/2 + 1)$ ни один из тривиальных нулей $\zeta(s)$ (т. е. чисел $-2, -4, \ldots$) не обращает в нуль $\xi(t)$. Поэтому числа α — нули $\xi(t)$ — порождаются только нетривиальными нулями ρ функции $\zeta(s)$, с которыми они связаны соотношением $\alpha = (2\rho - 1)/2i$. Относительно них Риман заметил, что все они лежат в полосе $|\operatorname{Im} t| < 1/2$, и без доказательства высказал ряд утверждений, из которых одно — гипотеза Римана — остается недоказанным и неопровергнутым до сих пор: все нули $\xi(t)$ — действительные числа, т. е. все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. К изучению распределения этих нулей Риман свел исследование асимптотического поведения функции $\pi(n)$ (см. Кн. 1, гл. III).

В упомянутом выше мемуаре 1893 г. Ж. Адамар подтвердил часть высказываний Римана. При этом он использовал общие зависимости между коэффициентами степенного ряда, ростом целой функции и распределением ее нулей, в разработке которых столь деятельно участвовал. В частности, Адамар установил, что для нетривиальных нулей $\{\rho\}$ дзета-функции ряд $\sum \frac{1}{|\rho|}$ расходится (и, следовательно, их бесконечно много, как и утверждал Риман), а ряд $\sum \frac{1}{|\rho|^2}$ сходится.

Далее Адамар получил разложение функции $\xi(t)$ в бесконечное произведение вида[129]

$$\xi(t) = \xi(0) \prod \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

откуда, конечно, сразу вытекает соответствующее представление для $\zeta(s)$.

Тремя годами позднее, в 1896 г., это достижение было использовано самим Ж. Адамаром и одновременно бельгийским математиком Ш. Ж. де ла Валле-Пуссеном для полного доказательства асимптотического закона распределения простых чисел (см. Кн. 1, с. 170).

Вернемся к общей теории целых функций по ее состоянию в конце XIX в. Последовательными усилиями Пуанкаре (1883), Адамара (1893) и Бореля (1897, 1900) были получены результаты, устанавливающие достаточно полную зависимость между порядком ρ (конечным) целой трансцендентной функции $f(z)$, имеющей нули $\{z_n\}$, с показателем сходимости $\varkappa \leqslant \rho$ ($z_n \neq 0$; возможен, кроме того, λ-кратный нуль в начале координат).

Пусть k — наименьшее целое неотрицательное число из тех чисел N, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^N}$ сходится ($[\varkappa] \leqslant k < [\varkappa] + 1$); тогда

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \ldots + \frac{z^k}{k z_n^k}}$$

(здесь показательный множитель под знаком произведения заменяется единицей, если $k = 0$); при этом целая функция $g(z)$ непременно должна быть многочленом степени m не выше чем $[\rho]$ и $\rho = \max\{m, \varkappa\}$. Справедлива и обратная теорема: если целая функция $f(z)$ допускает разложение такого вида, где $g(z)$ — многочлен степени m и показатель сходимости нулей $\{z_n\}$ есть конечное число, причем $[\varkappa] \leqslant k < [\varkappa] + 1$, то $f(z)$ — функция конечного порядка ρ, причем $\rho = \max(m, \varkappa)$.

С этими теоремами связаны замечательные уточнения теоремы Пикара для функции конечного порядка ρ. Если A и B — два различных комп-

[129] На с. 168 Кн. 1 это произведение приведено в искаженном виде.

лексных числа и $\{z_n(A)\}$ и $\{z_n(B)\}$ — соответственно последовательности корней уравнений $f(z) = A$ и $f(z) = B$, то из теоремы Адамара непосредственно вытекают неравенства: $\varkappa(A) \leqslant \rho$ и $\varkappa(B) \leqslant \rho$. Борель доказал, однако, что за одним возможным исключением (зависящим только от функции) справедливы равенства $\varkappa(A) = \varkappa(B) = \varkappa$, т. е. независимо от значения A точки, в которых функция принимает это значение, одинаково часто распределены на плоскости. В случае, когда ρ не есть целое число, исключительные значения в указанном смысле вообще не существуют.

Можно сказать, что эти результаты подвели итог основным достижениям теории целых функций за XIX столетие. Итоги эти составили содержание «Лекций о целых функциях» Э. Бореля (1900), послуживших первым выпуском знаменитой серии монографий различных авторов по теории функций действительного и комплексного переменного, издававшейся затем на протяжении нескольких десятилетий фирмой Готье-Виллар под редакцией самого Бореля.

Что же касается общей теории мероморфных функций, то она находилась в зачаточном состоянии. Здесь не хватало аналога понятия максимума модуля $M(r)$. Однако уже появилась формула Иенсена (Sur un nouvel et important théoreme de la théorie des fonctions.— Acta Math., 1899, **22**, p. 359). Тогда она имела простейший вид:

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi}|\,d\varphi - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|} + \sum_{|b_k|<r} \ln\frac{r}{|b_k|},$$

где a_j — нули и b_k — полюсы функции $f(z)$. В нем в неявном виде уже заключался отправной пункт позднейшей общей теории распределения значений мероморфных функций. Но до создания этой теории должно было пройти еще четверть века.

Абелевы функции

Как уже указывалось, в двух публикациях Вейерштрасса 1854 и 1856 гг. содержались результаты его исследований по проблеме обращения ультраэллиптических интегралов первого рода в той постановке, которую ей придал Якоби.

Вторая из этих работ представляла развернутое изложение первой. Однако она осталась незавершенной. Вот что об этом сообщает М. А. Тихомандрицкий: «... мемуар под заглавием „Theorie der Abelschen Funktionen", писанный при стесненных обстоятельствах и, к сожалению, оставшийся неоконченным вследствие потери рукописи, как то я лично слышал от Вейерштрасса. Он прерывался в начале II главы, написанной так: „Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischen Funktionen durch Reihen", содержавшей, в виде отступления, исследования из области эллиптических функций, составлявшие предмет его первого мемуара и теперь [т. е. в 1894 г. при публикации в составе первого тома «Математических трудов» Вейерштрасса. — *А. М.*] выброшенные» [130].

Впрочем, эту незавершенность отметил еще Риман, когда, охарактеризовав первую статью как обзор «чрезвычайно глубоких и увенчанных прекрасными результатами» работ Вейерштрасса, он добавил: «Однако до настоящего времени последовало полное воспроизведение (J. für Math.,

[130] *Тихомандрицкий М. А.* Карл Вейерштрасс.— Сообщ. Харьк. мат. о-ва (2), 1897, 6, с. 41.

1856, 52, p. 285) лишь той части этих работ, которая служит развитием § 1, 2 и первой половины (касающейся эллиптических функций) § 3 упомянутой публикации»[131].

Вот основное содержание названных работ Вейерштрасса:

Положим $R(x) = A_0(x - a_1)\ldots(x - a_{2\rho+1})$, где $a_j \neq a_k$ при $j \neq k$ — любые комплексные числа, и пусть $P(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_\rho)$.

Тогда якобиеву задачу обращения соответствующих ультраэллиптических интегралов первого рода можно представить в следующем виде: *найти решения* $x_j = x_j(u_1, \ldots, u_\rho)$ *системы дифференциальных уравнений*

$$du_m = \sum_{j=1}^{\rho} \frac{P(x_j)}{x_j - a_m} \frac{dx_j}{\sqrt{R(x_j)}} \qquad (m = 1, \ldots, \rho),$$

удовлетворяющие начальным условиям $x_j(0, \ldots, 0) = a_j$ $(j = 1, \ldots, \rho)$ (формулировку Якоби получим путем почленного интегрирования каждого из уравнений системы). Как это предвидел еще Якоби, должны существовать такие однозначные аналитические функции $P_1, \ldots, P_\rho$ переменных $u_1, \ldots, u_\rho$, что $x_1, \ldots, x_\rho$ можно будет рассматривать как корни уравнения $x^\rho + P_1x^{\rho-1} + \ldots + P_\rho = 0$. Аналогично, добавляет Вейерштрасс, существуют однозначные аналитические функции $Q_1, \ldots, Q_\rho$ тех же переменных, такие, что многочлен относительно x $Q_1x^{\rho-1} + \ldots + Q_\rho$ для значений $x = x_j$ дает соответствующие значения $\sqrt{R(x_j)}$ $(j = 1, \ldots, \rho)$.

Из этой теоремы должно следовать, что любые рациональные и симметрические функции от $x_1, \ldots, x_\rho$ и $\sqrt{R(x_1)}, \ldots, \sqrt{R(x_\rho)}$ являются однозначными аналитическими функциями от $u_1, \ldots, u_\rho$. В частности, полагая $\varphi(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_\rho)$, можно утверждать, что $\sqrt{h_1\varphi(a_1)}, \ldots, \sqrt{h_{2\rho+1}\varphi(a_{2\rho+1})}$, где $h_1, \ldots, h_{2\rho+1}$ — константы, являются однозначными аналитическими функциями от $u_1, \ldots, u_\rho$; через них могут быть выражены введенные выше функции $P_1, \ldots, P_\rho$. Функции $\sqrt{h_k\varphi(a_k)}$ при надлежащем выборе констант h_k Вейерштрасс обозначает (ср. выше) через $\mathrm{al}(u_1, \ldots, u_\rho)_k$ $(k = 1, \ldots, 2\rho + 1)$. Функции эти выделяются тем, поясняет Вейерштрасс, что они вполне аналогичны эллиптическим функциям $\sin \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$ и $\Delta \mathrm{am}\, u$, к которым и сводятся при $\rho = 1$. Именно их и ряд других, с ними связанных, целесообразно преимущественно называть абелевыми. Их изучение и является целью автора. Вейерштрасс считает своим главным достижением то, что ему удалось распространить метод, примененный в его самой первой работе об эллиптических функциях 1840 г. («О разложении модулярных функций»), на абелевы функции и установить, что все функции могут быть представлены в форме дробей с общим знаменателем, причем числители и знаменатели этих дробей разлагаются во всюду абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по положительным степеням переменных $u_1, \ldots, u_\rho$. Этот результат, как сообщал автор, ему удалось получить к концу 1847 г., хотя доказательство так и не было опубликовано.

При этом Вейерштрасс опирался на следующее (названное им главным) свойство абелевых функций: если заменить u_j на $u_j + v_j$, то полученные значения абелевых функций рационально выражаются через

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots, u_\rho)_k, \ \mathrm{al}(v_1, \ldots, v_\rho)_k \qquad (k = 1, \ldots, 2\rho + 1)$$

---

[131] *Риман Б.* Сочинения, с. 100.

и через их частные производные первого порядка, речь идет об алгебраической теореме сложения для них [132].

Что касается метода, разработанного Вейерштрассом, как уже было сказано, сначала на примере эллиптических функций, то он в главных чертах состоит в следующем. Из общих теорем о дифференциальных уравнениях устанавливается, что решения $x_j(u_1, \ldots, u_\rho)$ исходной системы, так же как и функции $R(x_j)$ $(j = 1, \ldots, \rho)$, являются однозначными аналитическими функциями переменных $u_1, \ldots, u_\rho$ в окрестности начала координат. Далее надлежащим образом использованная теорема Абеля об интегралах первого рода (в случае $\rho = 1$, т. е. когда интегралы являются эллиптическими, достаточно сослаться на теорему сложения для эллиптических интегралов) позволяет ему перейти от разложения в окрестности начала координат к аналогичным разложениям в окрестности точки $u_k = b_k$ $(k = 1, \ldots, \rho)$, сколь угодно удаленной от начала. В результате устанавливается, что рациональные симметрические функции от $x_1, \ldots, x_\rho$ (и от $\sqrt{R(x_1)}, \ldots, \sqrt{R(x_\rho)}$), в частности абелевы функции, в некоторой окрестности любой точки пространства переменных $u_1, \ldots, u_\rho$ имеют характер рациональной функции, т. е. представляются в виде частного двух степенных рядов (вообще говоря, зависящих от этой окрестности). Трудность, которую Вейерштрассу так и не удалось преодолеть до конца в общем виде, заключается в том, чтобы на основании сказанного вывести существование представления каждой из абелевых функций в виде частного двух всюду сходящихся степенных рядов, т. е. целых функций. Вот что говорит по этому поводу сам Вейерштрасс: «Здесь мы встречаемся с задачей, которая, насколько я знаю, еще не рассматривалась в общем виде и однако является чрезвычайно важной (von besonderer Wichtigkeit ist) для теории функций» [133].

Вейерштрасс делает попытку решить ее при дополнительном предположении, что функция удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению, но здесь ему удается прийти к нужному результату только в случае функции одного переменного. Мы придаем особое значение общей сформулированной выше проблеме, к которой Вейерштрасс неоднократно возвращался почти в одних и тех же выражениях в своих работах, лекциях и письмах. Поиски решения привели его, в частности, к теореме о разложении целой функции на множители, из которой следовало, что проблема имеет утвердительный ответ в случае одного переменного (об этом см. с. 222, 223).

Рассказывая о последнем результате в письме к С. В. Ковалевской от 16 декабря 1874 г., Вейерштрасс отмечает: «К этому присоединяется следующая по порядку теорема, которая *в моей теории абелевых функций считается еще недоказанной* [курсив наш.— *А. М.*]. Всякая однозначная аналитическая функция x, которая для каждого значения этой величины имеет характер рациональной функции, всегда может быть изображена как частное двух обычных всюду сходящихся степенных рядов, притом таким образом, что ни при каком значении x числитель и знаменатель не исчезают одновременно» [134]. Любопытно, что в тот же день он направляет письмо к Шварцу, где, отметив, что упомянутая теорема была необходима ему для разработки теории однозначных функций, ибо в ней недоставало

---

[132] Фактически здесь можно обойтись без частных производных. См., например: *Зигель К.* Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. М.: Изд-во иностр. лит., 1954, с. 160—162 (примечание 1).
[133] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 1, S. 347.
[134] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. 1871—1891, с. 193.

базы, добавляет: «До сих пор я искал решение проблемы ошибочным путем» [135].

По нашему мнению, П. Дюгак не вполне прав, когда заключает, что «это письмо показывает также, насколько мысль Вейерштрасса была направлена к унифицирующим теоремам анализа» [136]. Для Вейерштрасса речь шла здесь о путях поисков, так и не завершившихся успехом, недостающего звена в его построении общей теории абелевых функций.

Проблема эта послужила поводом для исследования общих свойств функций многих переменных, в особенности для построения теории делимости кратных степенных рядов и характеристики рациональных функций как функций, имеющих рациональный характер всюду, включая бесконечность. Однако основная задача, как уже упоминалось, не была решена им до конца, что, по нашему мнению, является одной из причин того, что теория абелевых функций в общем виде так и не получила в его руках завершенного изложения. Решение указанной проблемы удалось получить в 80-х годах А. Пуанкаре и П. Кузену (см. ниже).

Возвращаясь к опубликованной в журнале Крелле за 1856 г. работе Вейерштрасса об абелевых функциях, следует отметить и еще одну существенную причину того, что автор так и не напечатал ожидаемого ее продолжения. Этой причиной была публикация Б. Риманом в 1857 г. в том же журнале Крелле фундаментального мемуара «Теория абелевых функций». Здесь общая проблема трактовалась с позиций докторской диссертации Римана и в сущности представляла обширную область применения «принципа Дирихле» к построению основ теории алгебраических функций и их интегралов. Хотя сам упомянутый принцип был не по душе Вейерштрассу и ему вообще представлялось незакономерным применение «трансцендентного» к установлению фундаментальных алгебраических истин (ср. его письмо к Г. Шварцу от 3 окт. 1875 г., цитируемое на с. 248), все же мемуар Римана настолько превосходил по своей широте и глубине то, что мог дать тогда Вейерштрасс, и при этом обходился в противоположность публикации Вейерштрасса лишь минимумом выкладок, что Вейерштрасс решил отступить хотя бы на время.

Ниже мы приведем краткий обзор результатов работы Римана. Теперь же отметим только, что Вейерштрасс до конца своей жизни продолжал заниматься вопросами теории абелевых функций, постепенно расширяя и углубляя свои исследования. Он посвятил этой коренной проблеме несколько курсов лекций, писем к ученым коллегам и печатных сообщений: в них обсуждались лишь частные, хотя и принципиально важные вопросы общей теории, например общие свойства $2p$-кратно периодических однозначных аналитических функций p комплексных переменных. Судя по всем этим материалам, ему удалось далеко уйти от постановок и результатов рассмотренных выше работ 40-х и 50-х годов. Но даже в обширном четвертом томе его «Математических трудов» (1902) — более *600 страниц, в котором полностью напечатаны его лекции по теории абелевых* функций, читанные в зимнем семестре 1875—1876 гг. и летнем семестре 1876 г., две трети сочинения посвящены теории алгебраических функций и абелевых интегралов и лишь одна треть трактует задачи Якоби об обращении абелевых интегралов (правда, в отличие от более ранних работ он не ограничивается здесь ультраэллиптическими интегралами). Недаром подготовлявшие к печати с 1889 г. текст этих лекций немецкие математики Г. Г. Геттнер и К. Г. Кноблаух пишут в предисловии, что

---

[135] *Dugac P.* Eléments d'analyse de Karl Weierstrass.— Arch. Hist. Exact. Sci., 1973, 10.
[136] Ibid.

теория абелевых функций в собственном смысле здесь только коротко набросана (nur kurz skizziert ist), тогда как основополагающие алгебраические исследования и теория абелевых интегралов представлены точно. Общая теория абелевых функций, о которой мы еще будем говорить в связи с характеристикой работ Пуанкаре и Пикара, остается здесь незатронутой.

Абелевы функции (продолжение)

Вернемся, однако, к мемуару Римана «Теория абелевых функций» (1857). Следует сразу же сказать, что, несмотря на тождество названий работ Римана и Вейерштрасса, задачи, поставленные перед собой знаменитыми авторами, не были одинаковыми. Все дело в том, что Вейерштрасс, как мы видели, называл абелевыми функциями те однозначные аналитические функции многих переменных, к которым привело его решение задачи Якоби. У Римана же в соответствии с тогдашней традицией, восходившей, впрочем, также к Якоби, под абелевыми функциями понимались просто абелевы интегралы, и в центре его работы стояло изучение алгебраических функций и их интегралов, а также тэта-функций многих переменных. Решение проблемы Якоби получалось здесь как бы мимоходом, как побочный продукт всего исследования.

Своему мемуару Риман предпослал краткое и ясное изложение основных положений своей докторской диссертации 1851 г. Здесь он в особенности останавливается на понятии римановой поверхности, топологических свойствах поверхности (порядок связности) и принципе Дирихле. Собственно теория абелевых функций (в его понимании) разделена на две части. Первая часть содержит общую теорию алгебраических функций и абелевых интегралов на поверхности любого рода p. Она, с нашей точки зрения, и имеет основное значение для последующего развития этой теории. Вторая часть содержит теорию тэта-функций p комплексных переменных и, в частности, без выделения соответствующего результата в явно формулированную теорему, решение проблемы Якоби (не для ультраэллиптических только, а для любых абелевых интегралов).

Мы остановимся здесь главным образом на обзоре содержания первой части, ограничившись лишь короткими замечаниями по поводу второй.

Цель первой части, как уже отмечалось,— построить общую теорию алгебраических функций и их интегралов для случая произвольной замкнутой римановой поверхности любого рода.

Случай $p = 0$ (о котором Риман даже не упоминает: здесь соответствующей поверхностью является сфера Римана, кстати, отсутствующая в его печатных работах, но использовавшаяся им в курсах лекций) почти тривиален, но вместе с тем достаточно поучителен для понимания общего замысла работы. В этом случае все рациональные функции (т. е. однозначные алгебраические функции точки сферы) полностью характеризуются тем, что они однозначны на всей сфере и обладают только конечным числом особенностей вида $B(z - z_0)^{-1} + \ldots + K(z - z_0)^{-k}$ (если $z_0 = \infty$, то разность $z - z_0$, как обычно, заменяется на z^{-1}). При этом выполняется соотношение теории вычетов: $\Sigma B = 0$. Аналогично интегралы от рациональных функций, вообще говоря многозначные (тривиальный случай абелевых интегралов), характеризуются тем, что они имеют лишь конечное число особенностей более общего вида $A \ln(z - z_0) + B(z - z_0)^{-1} + \ldots + K(z - z_0)^{-k}$ при условии, что $\Sigma A = 0$.

Если каждую точку ε_ν, для которой $A_\nu \neq 0$, соединить с фиксированной точкой сферы некоторым путем l_ν (разные l_ν не должны ни самопересекаться, ни взаимопересекаться), то на сфере, разрезанной вдоль этих линий, выделятся однозначные ветви интеграла, отличающиеся только аддитивными константами. Каждая ветвь испытывает скачок $-2\pi i A_\nu$ при переходе с одного берега разреза l_ν (отрицательного) на другой (положительный).

Риману удалось показать, что эти простейшие закономерности с надлежащей модификацией, обусловленной топологическими свойствами поверхности, распространяются и на любые замкнутые поверхности какого угодно рода $p > 0$.

Такую поверхность T он в соответствии с принципами диссертации рассматривает как многолистную, распростертую над плоскостью (сферой). Если выделить на ней какую-либо точку в качестве условной граничной точки, то, отправляясь от нее, можно произвести последовательно замкнутые разрезы, различая у каждого из них по два берега — положительный и отрицательный. Разрезы, как бы цепляющиеся друг за друга, проводятся до тех пор, пока остающаяся часть T' поверхности T не станет односвязной. Число таких разрезов всегда четное $2p$, и оно представляет топологический инвариант поверхности; половину его, число p, как уже отмечалось выше, Клебш предложил в 1865 г. называть родом поверхности.

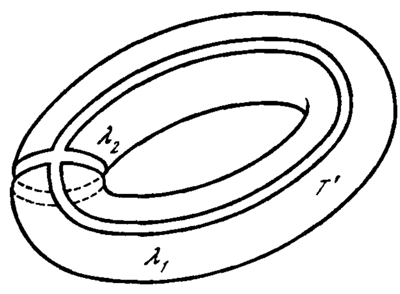


Рис. 16

Топологической моделью замкнутой поверхности рода p служит сфера с p ручками. На рис. 16 указаная выше схема превращения первоначальной поверхности T в односвязную T' проиллюстрирована на частном случае тора ($p = 1$). Здесь область T' посредством очевидного топологического преобразования переходит в прямоугольник, противоположные стороны которого изображают берега одного и того же разреза.

Поскольку поверхность T рода $p > 0$ распростерта над сферой — поверхностью рода 0, она накрывает ее в несколько слоев, пусть n, и на ней образуются в конечном числе точки ветвления. Если ω — число простых точек ветвления (т. е. порядка 1; всякую точку ветвления более высокого порядка $\nu > 1$ Риман рассматривает как слияние ν простых точек), то между n, ω и p устанавливается соотношение $\omega - 2n = 2(p - 1)$.

Задача, вполне аналогичная сформулированной выше элементарной задаче для сферы, состоит в том, чтобы полностью охарактеризовать класс функций аналитических, вообще говоря, многозначных на T, которые имели бы на ней лишь конечное число особенностей, характеризуемых каждая выражением вида

$$A \ln (z - z_0) + B (z - z_0)^{-1/\nu} + \ldots + K (z - z_0)^{-k/\nu},$$

где целое неотрицательное число $\nu - 1$ есть порядок точки ветвления, находящейся над z_0 (если точка поверхности, где лежит особенность, не есть точка ветвления, то $\nu = 1$). На коэффициенты указанных выражений налагается единственное ограничение $\Sigma A = 0$.

Если каждую особую точку ε_ν, для которой соответствующий коэффициент $A \neq 0$, соединить с какой-либо фиксированной точкой односвязной поверхности T' путем l_ν (l_ν не должны ни самопересекаться, ни пересекаться друг с другом), то однозначные в оставшейся части T' ветви функции с указанными особенностями будут, во-первых, испытывать скачок

$-2\pi i A_\nu$ при переходе через l_ν, а во-вторых, испытывать скачки h_j при переходе с одного берега любого из первоначальных разрезов λ_j на другой (не забудем, что различные ветви искомой функции в T' отличаются друг от друга только на аддитивные константы, так как производные их здесь тождественно равны).

Опираясь на принцип Дирихле, Риман выводит, что всегда на T существует аналитическая функция ω (вообще говоря, многозначная), которая в заданных точках поверхности T имеет предписанные особенности (т. е. разность между ω и выписанными выше выражениями является функцией аналитической в некоторой окрестности соответствующей точки), и что, кроме того, для ее однозначных ветвей в T' комплексные числа h_j, выражающие скачки, совершаемые при переходе через разрезы λ_j ($j = 1, \ldots, 2p$) и называемые Риманом модулями периодичности, имеют наперед заданные (произвольные) действительные части. Это предложение можно рассматривать как основу всей римановой теории алгебраических функций и их интегралов. Вместе с тем она является широким обобщением закономерности, которая до Римана была известна для сферы ($p = 0$) и, кроме того, могла бы быть формулирована и для случая тора ($p = 1$) как вывод из достаточно развитой к тому времени теории эллиптических функций и интегралов от них.

В пределах изучаемого класса Риман выделяет три простейших класса функций, через линейные комбинации которых (и их производные) выражается любая функция ω:

I. Абелевы интегралы первого рода, определяемые как всюду конечные, но, вообще говоря, неоднозначные на T функции. Для них все коэффициенты $A, B, C, \ldots, K$ суть нули. Определяются эти функции с точностью до аддитивной константы, если произвольно задать действительные части их модулей периодичности h_j ($j = 1, \ldots, 2p$). Риман устанавливает, что число линейно независимых среди них точно совпадает с родом поверхности p. Какую-либо определенную систему таких линейно независимых интегралов он обозначает: $w_1, \ldots, w_p$ (или $u_1, \ldots, u_p$).

II. Абелевы интегралы второго рода, определяемые как имеющие единственный простой полюс ε, расположенный над некоторой точкой z_0 плоскости z. В соответствующем разложении все коэффициенты, кроме B, равны 0. Если $t^0(\varepsilon)$ — один из этих интегралов, то любой другой с тем же полюсом имеет вид

$$t(\varepsilon) = \beta t^0(\varepsilon) + \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_p w_p + \mathrm{const},$$

где комплексные числа $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ подбираются так, чтобы действительные части $2p$ модулей периодичности h_j имели заданные значения.

III. Абелевы интегралы третьего рода, имеющие по одному логарифмическому полюсу в двух различных точках T: ε_1 и ε_2. В соответствующих выражениях, характеризующих особенности интеграла, все коэффициенты, кроме A, равны 0, а значения A для точек ε_1 и ε_2 отличаются одно от другого только знаком. Если обозначить один из таких интегралов через $\tilde{\omega}^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, причем положить $A_2 = -A_1 = 1$, то любой другой с теми же логарифмическими полюсами представится в виде

$$\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \tilde{\omega}^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_p w_p + \mathrm{const}.$$

Предполагая для простоты, что ε_1 и ε_2 не являются точками ветвления и отличны от ∞, и обозначая через z проекцию точки T в окрестности ε_1 на комплексную плоскость, Риман замечает, что производная по z от $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (действительные части модулей периодичности фиксированы) дает интеграл второго рода $t(\varepsilon_1)$, имеющий простой полюс в точке ε_1.

Дифференцируя $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ по z достаточное число раз, получим абелев интеграл, имеющий в ε_1 полюс любого заданного порядка.

Из всего сказанного вытекает, что в виде линейной комбинации интегралов первого рода $w_1, w_2, \ldots, w_p$, интегралов третьего рода $\tilde{\omega}$ и их производных можно представить любую из функций ω изучаемого класса с предписанными особенностями и произвольно заданными действительными частями модулей периодичности; она определится с точностью до аддитивной константы.

Далее Риман переходит к выделению из класса всех функций ω подкласса функций алгебраических с одинаковым ветвлением на поверхности T (т. е. разветвляющихся только в точках ветвления T с порядками, не превышающими порядков этих точек). Они должны быть однозначными на T и не иметь других особенностей, кроме полюсов. Такие функции охватываются формулой $s = \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p + \mathrm{const}$. Полюсы ε_i функций t_i предполагаются, вообще говоря, различными (простыми). Однако возможны и полюсы кратности ρ ($1 < \rho \leqslant m$) в некоторых точках η; тогда ρ функций t_i, соответствующих этой точке, заменяются функцией $t(\eta)$ и ее $\rho - 1$ первыми производными по z. Константы β и α выбираются так, чтобы s была однозначной на T, т. е. на обоих берегах любого разреза l_j принимала одинаковые значения. Число произвольных постоянных, от которых зависит функция s, имеющая полюсы первого порядка лишь в m предписанных точках T и непрерывная во всех остальных точках поверхности, во всех случаях равно $2m - p + 1$ (следовательно, m не должно быть меньше определенного числа, зависящего только от жанра p поверхности). Риман доказывает, что такого рода функция действительно алгебраическая в обычном смысле (ранее него в иной, менее точной форме аналогичный результат был получен Пюизё). А именно существует такое алгебраическое уравнение $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, где $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})$ — многочлен степени n относительно s и степени m относительно z, являющийся неприводимым или некоторой степенью неприводимого, которому функция $s = s(z)$ тождественно удовлетворяет.

Во всем описанном выше построении Риман отправлялся от замкнутой римановой поверхности T, а пришел к алгебраической функции на ней. Дальше он посвящает один параграф работы обратному ходу мысли: отправляется от неприводимого алгебраического уравнения $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, а приходит к соответствующей n-листной римановой поверхности с определенными точками ветвления и к алгебраической функции $s = s(z)$ как однозначной функции на T. Здесь Риман по существу получает те же результаты, что и Пюизё, но без всяких ссылок на него.

Возвращаясь к исходной постановке вопроса, Риман ищет общее выражение функций s', имеющих то же ветвление, что и s, и полюсы первого порядка в m' заданных точках поверхности T и нигде больше. Он устанавливает, что существует семейство рациональных функций от s и z, линейно зависящих от $m' - p + 1$ произвольных постоянных и удовлетворяющих поставленным условиям. Конечно, $s' = R(s, z)$ — также алгебраические функции на T и притом с тем же ветвлением, удовлетворяющие, однако, другим алгебраическим уравнениям.

Не останавливаясь на деталях первой части мемуара Римана, отметим лишь, что он объединяет в один класс все неприводимые алгебраические уравнения тогда и только тогда, когда для любой пары из них $F(s, z)$ и $F(s_1, z_1)$ можно выразить рационально s и z через s_1 и z_1 так, что первое уравнение перейдет во второе, и, обратно, s_1 и z_1 рационально выразить через s и z так, что второе уравнение перейдет в первое. В этом случае соответствующие римановы поверхности T и T_1 допускают взаимно однозначное и конформное отображение друг на друга, т. е. конформно эквивалентны и, следовательно, имеют один и тот же род p, хотя степени уравнений $F(s, z) = 0$ и $F_1(s_1, z_1) = 0$ могут быть различными относительно обоих переменных. Это позволяет ему говорить об одном и том же классе алгебраических функций с одинаковым ветвлением. Такой класс можно реализовать на любой из соответствующих конформно эквивалентных поверхностей T: все функции класса представятся как все возможные рациональные функции соответствующих переменных s и z, рассматриваемые как функции какой-либо одной из них. При этом возникает и решается вопрос о возможно более низкой степени уравнения $F(s, z) = 0$ в данном классе (она зависит от рода p).

Вторая часть рассматриваемого мемуара Римана посвящена изучению тэта-функций от p комплексных переменных, определяемых рядами вида

$$\theta(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} v_\mu m_\mu\right),$$

где внешние суммы распространяются на всевозможные упорядоченные наборы целых чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$. Риман указывает условие сходимости подобных рядов (в частном случае, при $p=2$ встречавшихся в работах Гёпеля и Розенхайна): действительная часть квадратичной формы $\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ должна быть отрицательной при всех наборах целых чисел $m_1, \ldots, m_p$, в которых не все числа равны 0. Это условие на коэффициенты формы $a_{\mu\mu'}$.

Важнейшее свойство функций этого класса заключается в том, что они, будучи целыми, обладают $2p$ системами модулей периодичности: $(0, \ldots, \pi i, \ldots, 0)$, здесь πi стоит на j-м месте, а остальные нули, $j = 1, 2, \ldots, p$; $(a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots, a_{p\mu})$, $\mu = 1, \ldots, p$. Если прибавить к $v_1, \ldots, v_p$ соответственно числа одной из первых систем (т. е. заменить v_μ на $v_\mu + \pi i$, оставив остальные значения v неизменными), то $\theta(v_1, \ldots, v_p)$ не изменит своего значения. Если же прибавить к $v_1, \ldots, v_p$ соответственно числа $a_{1\mu}, \ldots, a_{p\mu}$ для какого-либо μ ($\mu = 1, \ldots, p$), то $\theta(v_1, \ldots, v_p)$ приобретает показательный множитель $e^{2v_\mu + a_{\mu\mu}}$.

Тэта-функции превращаются во вспомогательный инструмент для изучения абелевых функций благодаря тому, что вместо $v_1, \ldots, v_p$ берутся значения p линейно независимых интегралов $u_1, \ldots, u_p$, каждый из которых представляет абелев интеграл первого рода от некоторой рациональной функции s и z на замкнутой римановой поверхности рода p. Тогда $\ln\theta$ превращается в такую функцию одной переменной z, которая может измениться только на линейную функцию величины u, если при непрерывном изменении s и z эти точки возвращаются к первоначальным значениям. При этом приходится выбирать систему $2p$ замкнутых разрезов $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ поверхности T (превращающих ее в односвязную поверхность T'') некоторым специальным образом, а именно так, чтобы модуль периодичности интеграла первого рода u_μ на разрезе a_μ ($\mu = 1, \ldots, p$) равнялся πi, на всех прочих — 0. А для модулей периодичности $a_{\mu\nu}$ того же интеграла u_μ на разрезах b_ν ($\nu = 1, \ldots, p$), во-первых, должны выполняться равенства $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ (*равенства Римана*) и, во-вторых, действительная часть квадратичной формы $\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ должна быть отрицательной для любого набора целых чисел $(m_1, \ldots, m_p)$, одновременно не равных нулю (*неравенство Римана*, обеспечивающее, как указывалось выше, сходимость ряда, который определяет тэта-функцию). Риман доказывает, что всегда можно удовлетворить всем этим требованиям.

Отметим, наконец, что в процессе изучения тэта-функций Риман попутно получает решение проблемы Якоби. Почему-то, однако, он не формулирует этот важный результат в виде особой теоремы. Кроме того, у него отсутствует (по крайней мере в явном виде) представление любой абелевой функции (как симметрической функции от пределов интегралов — результата обращения) в виде отношения двух целых функций. У Римана нет даже указания на то, что абелева функция имеет рациональный характер, т. е. в окрестности любой упорядоченной системы значений $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_p^{(0)})$ она изображается в виде отношения двух степенных рядов, расположенных по степеням разностей: $u_1 - u_1^{(0)}, \ldots, u_p - u_p^{(0)}$. Мы знаем, какое значение придавал последнему факту Вейерштрасс.

Еще в работе 1869 г. «О наиболее общих однозначных и $2n$-кратно периодических функциях n переменных» (Über die allgemeinsten eindeutige und $2n$-fach periodische Funktionen von n Veränderlichen.— Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1869)[137] он обратил внимание на то, что тэта-функции, рассмотренные Риманом, не являются самыми общими, так как они зависят от $p(p+1)/2$ существенных констант (модулей периодичности $a_{11}, \ldots, a_{pp}, a_{12} = a_{21}, \ldots, a_{ij} = a_{ji}, \ldots$), подчиненных определенным условиям (уравнениям Римана), и ищет такого обобщения проблемы Якоби, которое могло бы привести к наиболее общим тэта-функциям. Кроме того, он не спешит заменять переменные в выражении $\theta(v_1, \ldots, v_p)$ интегралами первого рода на данной замкнутой римановой поверхности, сводя таким образом функцию p переменных к функции одной переменной z (и ее алгебраической функции s). Функция $\theta(v_1, \ldots, v_n)$ интересует Вейерштрасса прежде всего как целая функция p независимых комплексных переменных с определенными свойствами обобщенной периодичности, а отношение двух таких функций с одинаковыми «модулями» — как однозначная $2p$-кратно периодическая функция от p комплексных переменных.

Впрочем, Риман, как и Вейерштрасс, давно интересовался общими свойствами таких $2p$-кратно периодических функций независимо от способа их порождения. Еще в сентябре 1859 г., когда Риман посещал Берлин, он, по-видимому, затрагивал вопрос о них в беседе с Вейерштрассом. Во всяком случае, в письме к Вейерштрассу от 26 октября 1859 г. (опубликовано Вейерштрассом после смерти Римана) приводится полное доказательство теоремы о том, что однозначная аналитическая функция n переменных не может иметь более $2n$ систем линейно независимых периодов (модулей периодичности, по терминологии Римана)[138]. Мы знаем, что частный случай этой теоремы для $n = 1$ был доказан Якоби еще в 1834 г., Вейерштрасс неоднократно публикует заметки о таких функциях. В III томе его «Математических трудов», напечатанном посмертно, содержится большая работа «Общие исследования о $2n$-кратно периодических функциях n переменных», выполненная после 1870 г. (Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Funktionen von n Veränderlichen)[139]. Изложение ведется независимо от проблемы обращения Якоби. В основу здесь по-

---

[137] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 2.
[138] *Riemann B.* Werke, S. 276.
[139] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 3, S. 53—114.

ложено общее построение теории тэта-функций n переменных как целых функций, удовлетворяющих условиям вида

$$\theta(u_1+w_1,\ldots,u_n+w_n)=\theta(u_1,\ldots,u_n)\,e^{w_1u_1+\ldots+w_nu_n+w_{n+1}}$$

для $2n$ наборов линейно независимых значений $(w_1,\ldots,w_n)$; последние образуют систему $2n$ основных обобщенных периодов функции (каждый такой период является вектором с n комплексными составляющими). С их помощью решается задача о существовании $2n$-периодических однозначных функций. При этом возникает вопрос: любую ли из них можно выразить с помощью тэта-функций? Задача работы — доказать, что каждая однозначная аналитическая функция n переменных, имеющая в окрестности каждой конечной точки рациональный характер и обладающая системой $2n$ совместных линейно независимых периодов, может быть образована из тэта-функций тех же переменных.

Доказательство опирается на свойства абелевых интегралов первого рода. К ним Вейерштрассу приходится обращаться потому, что функции предполагаются только локально мероморфными, а в результате нужно установить, что они суть функции мероморфные, т. е. частные двух целых функций.

Теорема существования общих абелевых функций p комплексных переменных, имеющих заданную матрицу $2p$ периодов

$$\Omega=\left\|\begin{matrix}\omega_1^{(1)} & \omega_1^{(2)} & \ldots & \omega_1^{(2p)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \omega_p^{(1)} & \omega_p^{(2)} & \ldots & \omega_p^{(2p)}\end{matrix}\right\|,$$

была высказана независимо Риманом и Вейерштрассом (при известных условиях, наложенных на периоды, выражаемых уравнениями и неравенством Римана). Однако первое доказательство теоремы было опубликовано лишь в 1883 г. в совместной работе А. Пуанкаре и Э. Пикара «Теорема Римана, относящаяся к функциям n переменных, допускающим $2n$ систем периодов» (Théorème de Riemann relatif à fonctions de n variables, admettant $2n$ systèmes de périodes.— C. r. Acad. sci. Paris, 1883, **97**). При этом авторы опирались на высказанное перед этим в печати, но также без доказательства утверждение Вейерштрасса (1862) о том, что между любыми $p+1$ абелевыми функциями с одними и теми же периодами должно выполняться алгебраическое соотношение. Первое доказательство этого факта было опубликовано А. Пуанкаре лишь в 1897 г. в работе «Об абелевых функциях» (Sur les fonctions Abéliennes.— C. r. Acad. sci. Paris., 1897, (**24**).

Ход идей Пуанкаре и Пикара в работе 1883 г. был примерно следующим. Они установили, что уравнения $y_1=f_1(u),\ldots,y_{p+1}=f_{p+1}(u)$, где $f_j(u)$ — абелевы функции комплексного вектора $u=\begin{pmatrix}u_1\\ \cdots\\ u_p\end{pmatrix}$ определяют p-мерное алгебраическое многообразие V_p (пикаровское), точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с точками фундаментального параллелотопа Π_0 (построенного на основных периодах $\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(p)}$; каждый из них — вектор p-мерного комплексного пространства C^p). На V_p переменные $u_1,\ldots,u_p$ изображаются в виде всюду конечных алгебраических интегралов от полных дифференциалов (пикаровские интегралы первого рода, которые при $p=1$ превращаются в абелевы интегралы первого рода). Между ними выполняются некоторые соотношения равенства и неравенства, выражающие условия, впервые указанные

Риманом, необходимые для существования самих абелевых функций. То, что эти условия не только необходимые, как это знал еще Риман, но и достаточные, было доказано В. Виртингером с помощью теории общих тэта-функций p переменных в работах «К теории $2n$-периодических функций» (Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Funktionen.— J. Math., 1895, 6; 1896, 7) и «Исследования о тэта-функциях» (Untersuchungen über Thetafunktionen. Leipzig, 1895).

Одним из самых сильных результатов Пуанкаре, выходящих по своему значению за пределы теории абелевых функций, была теорема, доказанная им первоначально в 1883 г. для случая двух переменных («О функциях двух переменных» (Sur les fonctions de deux variables.— Acta math., 1883, 2)). Ее доказательство, как уже говорилось ранее, Вейерштрасс искал, можно сказать, всю жизнь. Вот эта теорема: если функция $F(X, Y)$ имеет характер рациональной функции в окрестности каждой конечной точки (X, Y), то она может быть представлена в виде частного двух целых функций тех же переменных. Первоначальное доказательство Пуанкаре было довольно сложным и не поддавалось распространению на случай функций большего числа переменных. Сравнительно простое доказательство теоремы для любого числа переменных впервые получил П. Кузен в своей докторской диссертации «О функциях n комплексных переменных» (Sur les fonctions de n variables complexes.— Acta math., 1895, 19). Поэтому соответствующая общая теорема, лежащая в основе теории мероморфных функций многих комплексных переменных, носит название теоремы Пуанкаре—Кузена. Результат, опубликованный Вейерштрассом в 1876 г., представляет лишь ее простейший частный случай для $n = 1$.

Из других многочисленных работ конца XIX в. об абелевых функциях мы упомянем здесь работу Г. Фробениуса «Об основах теории якобиевых функций», 1884 г. (Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Funktionen.— J. für Math., 1884, 97), посвященную систематическому изучению тэта-функций p независимых переменных и даже функций несколько более общих, названных Клейном якобиевыми (Брио и Буке называли их «промежуточными»). Они вводятся независимо от проблемы обращения Якоби. Фробениусу, в частности, удалось показать, что из существования якобиевых функций вытекают те же равенства и то же неравенство Римана, которые последний выводил для модулей периодичности изученного им класса специальных классов тэта-функций, введенных в связи с проблемой обращения абелевых интегралов.

Используя эти результаты Фробениуса, П. Аппель в мемуаре «О периодических функциях двух переменных» (Sur les fonctions périodiques de deux variables.— J. math. pures et appl. (4), 1891, 7) для $p = 2$ построил полную теорию абелевых функций, определяемых как однозначные $2p$-периодические функции p комплексных переменных, вне всякой явной связи с проблемой Якоби, породившей всю проблематику. Уже в XX в. усилиями ряда математиков, среди них итальянских (Скорца, Ф. Конфорто) и американских (С. Лефшец и др.), была построена развитая теория абелевых функций для любого числа переменных в этом общем понимании (при $p = 1$ она вырождается в теорию эллиптических функций), получившая многообразные применения в алгебраической геометрии p-мерных многообразий (см., например, превосходную монографию Ф. Конфорто «Абелевы функции и алгебраическая геометрия» [140].

---

[140] *Conforto F.* Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1956.

Автоморфные функции. Униформизация

Мы уже говорили, что модулярная функция, рассмотренная впервые Гауссом в работах, в свое время неопубликованных, была первым нетривиальным примером из обширного класса автоморфных функций. Ее значение для теории эллиптических функций прямо вытекало из того, что функция эта выражала отношение периодов эллиптической функции Якоби K'/K в зависимости от квадрата модуля k^2 соответствующего эллиптического интеграла первого рода в нормальной форме Лежандра; отсюда и ее название: модулярная функция. Мы отмечали также, что Г. А. Шварц дал ей позднее чисто геометрическое, независимое от эллиптических функций определение в связи с конформным отображением вписанного в единичный круг равностороннего кругового треугольника с нулевыми углами на полуплоскость, нормированным так, что вершинам треугольника соответствовали точки 0, 1 и ∞. Уже эта простейшая автоморфная функция получила в свое время такие замечательные применения вне теории эллиптических функций, как решение общего алгебраического уравнения 5-й степени (*Эрмит Ш*. «Теория модулярных уравнений и решение уравнения пятой степени» (Théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du 5^e degré. Paris, 1859) и доказательство теоремы Пикара.

Развитие общей теории автоморфных функций падает на последние десятилетия XIX в. (Ф. Шоттки, Ф. Клейн, А. Пуанкаре). Оно привело к результатам еще более высокой теоретической значимости особенно благодаря трудам А. Пуанкаре, относящимся к 1880—1884 гг.[141] Вот как можно теперь описать концепцию, положенную в основу этих трудов. Пусть $S = \{T_n(z)\}$ — группа дробно-линейных преобразований, где $T_0(z) = z$ и $T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + b_n}$, $a_n d_n - b_n c_n = 1$. Назовем окружность $|c_n z + d_n| = 1$ (при $c_n \neq 0$) изометрической окружностью преобразования. Она полностью характеризуется тем, что для всех дуг и областей, лежащих внутри нее, длины и площади соответственно увеличиваются при отображении, а вне ее — уменьшаются. В случае, когда группа S бесконечная, замыкание всех центров изометрических окружностей обозначается через H. Будем рассматривать только собственно разрывные группы S, т. е. те, для которых существуют точка z_0 и положительное число r, такие, что для каждого $T \in S$, $T \not\equiv z$ выполняется условие $|T(z_0) - z_0| \geqslant r$. Такого рода группы содержат либо конечное, либо счетное множество преобразований и, следуя Пуанкаре, подразделяются на три класса: 1) элементарные группы, куда входят все конечные группы, а также те бесконечные группы, для которых H содержит не более двух точек; 2) фуксовы группы или группы с граничным кругом, для которых существует фиксированный круг (или полуплоскость), преобразуемый посредством каждого $T \in S$ в себя самого; 3) группы Шоттки — Клейна, охватывающие все группы, которые не входят ни в первый, ни во второй класс.

Пусть теперь $S = \{T_n(z)\}$ — некоторая группа (собственно разрывная), G — область комплексной плоскости, такая, что $T_n(G) \subset G$ для всех

[141] Хотя в данной главе разбираются эти и другие работы А. Пуанкаре по теории аналитических функций, творчество его в целом далеко выходит за рамки времени, которое служит главным предметом «Математики XIX века», и его биография будет приведена в одной из последующих книг этой серии. Сказанное относится к целому ряду ученых, упоминаемых в данной главе: П. Пенлеве, Э. Борелю, Ж. Адамару и др.

n, и $w(z)$ — функция однозначная и аналитическая в G. Эта функция называется автоморфной относительно группы S, если $w(T_n(z)) = w$ для всех $T_n \in S$. В частности, когда S — клейнова группа, то и функция $w(z)$ также называется клейновой (все охарактеризованные здесь понятия и термины: собственно разрывная группа, фуксова и клейнова функции — принадлежат Пуанкаре).

Тривиальные примеры автоморфных функций (относительно элементарных групп) — это e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и эллиптические функции (Якоби или Вейерштрасса). В случае e^z, например, G — конечная плоскость, а группа S состоит из всех сдвигов вида $T(z) = z + 2\pi i n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); в случае эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ с основными периодами $2\omega_1$ и $2\omega_3$ ($\operatorname{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$) G — также конечная плоскость, а S состоит из всех сдвигов вида

$$T(z) = z + 2\omega_1 m + 2\omega_3 n,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

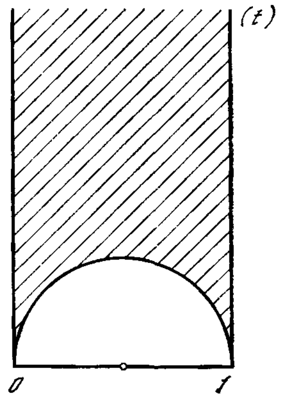


Рис. 17

Чтобы проще всего охарактеризовать модулярную функцию Шварца $\lambda(z)$ как клейнову автоморфную функцию, преобразуем сначала единичный круг $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ посредством некоторого дробно-линейного отображения $z = L(t)$ так, чтобы вершины равностороннего треугольника с нулевыми углами перешли соответственно в 0, 1 и ∞. Треугольник примет при этом вид фигуры, заштрихованной на рис. 17 и известной еще Гауссу. Что касается функции $\lambda(z)$, то она перейдет в $\lambda[L(t)]$; мы по-прежнему будем обозначать ее через $\lambda(t)$ и называть модулярной. В данном случае область G — это сама верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$, а группа S, относительно которой $\lambda(t)$ автоморфна, получается путем всех возможных произведений целых степеней двух преобразований: $T_1(t) = t + 2$ и $T_2(t) = t/(2t + 1)$. Все это легко проверяется с помощью принципа симметрии Римана — Шварца, если учесть, что $w = \lambda(t)$ конформно отображает фигуру рис. 17 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, что вершины переходят соответственно в точки 0, 1 и ∞.

В работе «О фуксовых функциях» (Sur les fonctions fuchsiennes.— Acta Math., 1882, 1, p. 193—294) А. Пуакнаре предложил простой метод, представляющий автоморфную функцию относительно данной собственно разрывной группы S в виде частного двух рядов (так называемых тэта-рядов Пуанкаре или, как он сам их называл, тэта-фуксовых функций).

Пусть преобразования группы S по-прежнему имеют вид

$$T_0(z) = z, \qquad T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \qquad (a_n d_n - b_n c_n = 1)$$

и пусть $R(z)$ — какая-либо рациональная функция, не имеющая полюсов на H (т. е. ни в центрах изометрических окружностей, ни в точках, предельных для этих центров). Тогда, выбрав какое-либо натуральное число $m > 1$, построим ряд (тэта-ряд Пуанкаре)

$$\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z + d_n)^{-2m} R(T_n(z)).$$

Легко видеть, замечая, что $T_n T_k = T_\nu$, что

$$\theta\,[T_k(z)] = (c_k z + d_k)^{2m}\,\theta(z).$$

Строя две разные функции $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$ указанного вида для одного и того же m (и разных $R(z)$), получим однозначную аналитическую функцию

$$w(z) = \theta_1(z)/\theta_2(z),$$

автоморфную относительно данной группы S.

Источником теории автоморфных функций в построении А. Пуанкаре послужили его размышления над теорией дифференциальных уравнений. Расскажем вкратце, как обстояло дело, следуя его «Анализу собственных научных работ», сделанному еще в 1901 г., но опубликованному впервые в 1921 г. Интересующая нас часть под заголовком «Фуксовы функции» вошла в первый том французского собрания Пуанкаре [142].

Отчетливо излагая эволюцию своих идей, Пуанкаре неоднократно подчеркивает, что для него путеводной нитью была классическая теория эллиптических функций и рядом с ней неевклидова геометрия Лобачевского, относительно которой «представлялось сначала, что это простая игра ума, которая интересует только философа, она не имеет возможности приносить никакой пользы для математика».

Уточняя первоначальную постановку задачи, Пуанкаре рассматривает линейное дифференциальное уравнение второго порядка с рациональными (или шире: с алгебраическими) коэффициентами. Пусть независимое переменное есть x. Известно, что интеграл можно представить в окрестности любой точки посредством некоторого ряда. Но Пуанкаре интересует глобальное изучение интеграла. И здесь он выдвигает гениальную идею, подобную той, которую в свое время выдвинули Абель и Якоби (и еще раньше Гаусс): вместо того чтобы изучать интеграл как функцию от x (она слишком сложна), рассматривать само переменное x как функцию интеграла, впрочем не одного, а отношения z двух линейно независимых интегралов данного уравнения $x = x(z)$. Можно выдвинуть гипотезу, что на эту мысль его навело представление модулярной функции Шварца в виде частного двух интегралов гипергеометрического уравнения.

Новая постановка проблемы, как показывает Пуанкаре, обладает двумя существенными преимуществами: во-первых, функция $x = x(z)$ однозначна и, во-вторых, для нее существует группа S дробно-линейных преобразований, относительно которых $x(z)$ инвариантна, т. е. $x(z)$ автоморфна относительно S. Предполагая, что коэффициенты преобразований $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in S$ действительны, Пуанкаре получает группу фуксова типа (она переводит самое в себя полуплоскость, что немедленно сводится к случаю круга, называемого им фундаментальным).

Далее Пуанкаре выясняет условия, при которых S — собственно разрывная группа, и обнаруживает, что в изучаемом им случае фуксовой функции роль, аналогичную параллелограммам периодов для эллиптических функций, играют многоугольники, ограниченные дугами окружностей, ортогональных к фундаментальной, сначала он располагал их вершины на единичной окружности, а потом, воспользовавшись идеей Ф. Клейна, стал их брать также и внутри круга. Чтобы убедиться в том, что эти многоугольники покрывают внутренность единичного круга без пропусков и взаимного налегания, он и привлекает геометрию Лобачевского, по-

142 *Poincaré H.* Oeuvres. Paris, 1951. T. 1 (nouveau tirage). Рус. пер.: *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1971, т. 3, с. 615—623.

скольку все ее теоремы верны, если всюду, где Лобачевский говорит «прямая», представлять себе дугу окружности, принадлежащую единичному кругу и ортогональную к его периферии.

Чтобы добиться полноты аналогии фуксовых функций с эллиптическими, нужно еще получить ряды, аналогичные тэта-функциям, в виде отношения которых представляется фуксова функция. Такие ряды он действительно строит, как было указано выше, называя тэта-фуксовыми (ряды Пуанкаре). Мы ограничиваемся здесь сказанным для того, чтобы отметить, что *первоначальным источником введения в математику класса автоморфных функций была теория дифференциальных уравнений, и вместе с тем подчеркнуть, что сам Пуанкаре рассматривал свою теорию как далеко идущий аналог теории эллиптических функций, для построения которой ему пришлось привлечь геометрию Лобачевского вместо геометрии Евклида.*

Но применения теории автоморфных функций к теории дифференциальных уравнений оказались в руках Пуанкаре не единственным и, пожалуй, даже не самым важным аргументом в пользу введения в науку нового обширного класса трансцендентных функций. Другое принципиально важное применение этих функций составило решение так называемой *проблемы униформизации*, полученное в главных чертах тем же великим математиком в те же годы.

Речь идет об отыскании для данной многозначной аналитической функции $y = F(x)$ такого комплексного параметра t, через который x и y выражались бы уже как две однозначные функции в некоторой области плоскости t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Такая униформизация для элементарных случаев многозначных алгебраических функций была известна с давних пор. Так, например, в случае алгебраического уравнения $x^2 + y^2 = 1$ униформизации можно достичь либо в виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, либо с помощью рациональных функций $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Мы предоставим теперь слово самому А. Пуанкаре, описавшему в краткой форме в 1901 г. свои достижения в области изучения многозначных функций:

«Теория неоднозначных функций далеко не столь продвинута, как теория однозначных функций. Я показал сначала (Sur une propriété des fonctions analytiques, 1888), что число их определений, если n бесконечно, имеет первую мощность в смысле Кантора.

Хотя и достаточно хорошо известен характер поведения этих функций в окрестности данной точки, хотя введение поверхностей Римана бросало много света на остававшиеся темными части их теории, предстоит еще немало сделать, прежде чем постигнуть их главные свойства. Поэтому я был одушевлен желанием свести их изучение к однозначным трансцендентным [функциям.— *А. М.*]. Уже теория фуксовых функций приблизила меня к цели; в самом деле, я доказал, что если $f(x, y) = 0$ — уравнение какой-либо алгебраической функции, то можно выбрать параметр z таким образом, чтобы x и y были однозначными функциями этого параметра. Я решил таким образом проблему для наиболее простых неоднозначных функций, а именно для алгебраических функций.

Естественно, что я задался вопросом (Sur un théorème de la théorie générale des fonctions, 1883), является ли это частным свойством алгебраических функций, или его можно распространить на какую угодно многозначную функцию. Я смог ответить на этот вопрос и доказать следующую теорему. *Пусть какая-либо аналитическая функция от x неоднозначна. Можно всегда найти переменную z, такую, что x и y будут однозначными функциями z.*

Моей отправной точкой являлось доказательство принципа Дирихле, предложенное Шварцем. Но один только этот принцип не позволил мне восторжествовать над всеми трудностями, которые проистекали из-за большой общности доказываемой теоремы. Следовало сначала определить бесконечнолистную риманову поверхность, которую я пытался конформно отобразить на область плоскости. Я выбрал эту область такой, чтобы она была односвязной, чтобы все особые точки не принадлежали поверхности в собственном смысле и находились, так сказать, на ее границе и, наконец, так, чтобы функция y не могла принимать двух различных значений в одной и той же точке поверхности [*универсальная накрывающая.— А. М.*].

Я выделял конечную часть R этой поверхности и отображал ее конформно на круг, что позволила мне осуществлять теорема Шварца. Это отображение делалось посредством некоторой функции u. Заставим, наконец, бесконечно возрастать область R — мы будем иметь конформное отображение все более и более обширной части нашей поверхности Римана. Мне нужно было показать тогда, что аналитическая функция u, о которой я выше говорил, стремится к конечному и определенному пределу. Когда это сделано, преодолены только первые трудности. В самом деле, остается показать, что предел функции u сам является аналитической функцией.

Для этого нужно, чтобы аналитическая функция u стремилась равномерно к своему пределу (gleichmässig), что мне и удалось доказать.

Итак, изучение неоднозначных функций сведено во всех возможных случаях к гораздо более простому изучению однозначных функций»[143].

Мы привели этот длинный отрывок, потому что он передает, так сказать, весь пафос проблемы по первоисточнику. Необходимы, однако, некоторые краткие пояснения.

Упомянутая вначале теорема Пуанкаре о том, что множество значений многозначной функции всегда не более чем счетное, свидетельствует, что множество листов римановой поверхности не более чем счетное. Эту важную теорему в том же 1888 г. независимо от А. Пуанкаре опубликовал итальянский математик В. Вольтерра. Поэтому она и называется теоремой Пуанкаре—Вольтерра.

Далее Пуанкаре сообщает об одном из самых первых своих наиболее поразительных результатов, а именно о возможности униформизировать любую алгебраическую функцию посредством некоторой фуксовой автоморфной функции. До него возможность униформизации алгебраических функций была известна лишь для кривых рода 0, или уникурсальных, которыми, в частности, являются все конические сечения,— здесь ее всегда можно осуществить с помощью рациональных функций (ср. пример с окружностью) — либо для кривых рода 1, к которым, в частности, относятся все кривые третьего и четвертого порядка; здесь всегда возможно достичь результата с помощью эллиптических функций (последняя теорема была установлена Клебшем). Пуанкаре, таким образом, бесконечно расширил известные до него возможности. Но что касается идеи доказательства как этой теоремы, так и ее распространения на общий случай многозначных аналитических функций любой природы (1883), дело не обошлось без первоначального толчка, который заключался в письме Клейна к Пуанкаре (1882), передающем одно из соображений, устно высказанных Г. Шварцем. Речь шла о чисто топологической задаче построения для любой замкнутой римановой поверхности ее универсально

---

143 *Poincaré H.* Oeuvres. Paris, 1950. T. 4 (nouveau tirage), p. 5—6. Рус. пер.: *Пуанкаре А.* Избранные труды, т. 3, с. 607—608.

накрывающей поверхности (Universelle Überlagerungs-Fläche). Именно эту поверхность для случая любой римановой поверхности имеет в виду Пуанкаре выше, когда он в цитированном отрывке перечисляет характеризующие ее свойства. Можно сказать, что построение этой бесконечнолистной поверхности $\mathfrak{T}$ решает топологическую часть проблемы униформизации, так как любые функции, аналитические на первоначально заданной римановой поверхности F и имеющие лишь особенности алгебраического характера в ее точках разветвления (т. е., вообще говоря, неоднозначные на ней), можно явно рассматривать как однозначные функции точки $\tau \in \mathfrak{T}$, которая проектируется в рассматриваемую точку на F. Дело теперь за тем, чтобы установить односвязность универсальной накрывающей поверхности и взаимно однозначно и конформно отобразить ее на некоторую область плоскости t, скажем на круговой многоугольник, стороны которого ортогональны к единичной окружности. При этом вершины могут либо лежать на этой окружности, либо находиться внутри нее. Точки круга t тогда и будут представлять униформизирующий параметр, а функция $\tau = \tau(t)$ представит фуксову автоморфную функцию. Впрочем, в дальнейшем оказалось, что для полной общности следовало допускать, что отображение универсальной накрывающей может представлять конечную или даже расширенную плоскость.

Рассуждения А. Пуанкаре в той работе 1883 г., на которую он ссылался в своем отчете, содержали еще не решенные до конца проблемы (на некоторые указал Д. Гильберт в 1900 г.). В полном и окончательном виде общую теорему униформизации удалось установить только в 1907 г. самому Пуанкаре («Об униформизации аналитических функций» (Sur l'uniformisation des fonctions analytiques.— Acta math., 1907, 31)) и независимо от него П. Кёбе («Об униформизации любых аналитических кривых» (Über die Uniformisierung beliebigber analytischer Kurven.— Gött. Nachr., 1907)) в форме следующей теоремы, называемой иногда теоремой с граничным кругом: на каждой универсальной поверхности наложения существует функция $t = t(\tau)$ $(\tau \in \mathfrak{T})$, конформно отображающая $\mathfrak{T}$ либо на всю расширенную плоскость (эллиптический случай), либо на конечную плоскость (параболический случай), либо, наконец, на единичный круг (гиперболический случай). Комплексное переменное t, изменяющееся в одной из этих трех областей, и есть униформизирующий параметр для всех тех многозначных функций, римановы поверхности которых имеют данную универсальную накрывающую поверхность $\mathfrak{T}$. В гиперболическом случае (наиболее важном) функция $\tau = \tau(t)$ является клейновой автоморфной функцией в единичном круге, не продолжаемой за его пределы (в очень частном случае — модулярной функцией $\lambda(t)$).

Теорему об униформизации, высказанную и доказанную Пуанкаре еще в 1883 г., правда, с известными пробелами, которые он сам анализирует в начале работы «Об униформизации аналитических функций», можно по справедливости считать вершиной всего развития теории аналитических функций комплексного переменного в XIX в.

Последовательности и ряды аналитических функций

Тот фундаментальный результат, что предел последовательности аналитических функций, равномерно сходящейся внутри некоторой области (т. е. в каждом замкнутом круге, принадлежащем области), является функцией аналитической, был установлен Вейерштрассом еще в его мюнстерской работе, выполненной осенью 1841 г., «К теории степенных рядов». Речь шла, собственно говоря, о возможности приведения подобных членов в ряде, членами которого являлись степенные ряды, если основной ряд сходится абсолютно и равномерно. При этом теорема формулировалась для случая любого числа переменных (комплексных). Как уже отмечалось ранее, эта работа была опубликована впервые только в первом томе «Математических трудов» Вейерштрасса, изданном в 1894 г. Однако Вейерштрасс вводил ее в своих курсах по теории аналитических функций, читанных в Берлинском университете и, кроме того, опубликовал в качестве леммы в работе «К учению о функциях» (1880), причем в несколько более общей форме. Именно, им доказывалась возможность приведения подобных в ряде $\sum\limits_{0}^{\infty} P_\nu(z)$, равномерно сходящемся внутри кругового кольца, при условии, что каждый член ряда представлял некоторый ряд Лорана.

Впрочем, главная задача работы «К учению о функциях» заключалась, с нашей точки зрения, в опровержении одного из положений диссертации Римана, которое Вейерштрасс воспринял слишком буквально. Риман высказал предположение, что принятое им определение аналитической функции как функции, удовлетворяющей уравнению $\partial f/\partial y = i\partial f/\partial x$ в каждой точке области (римановой поверхности), приводит к тому же классу, как если бы мы определяли функцию посредством операций сложения и умножения и, кроме того, предельного перехода.

Конечно, требование связности области при этом предполагалось самим Риманом. О связности области говорилось в § 2 диссертации. Она подразумевалась и в начале мемуара об абелевых функциях (1857), где Риман коротко воспроизводил содержание диссертации 1851 г. Здесь говорилось, в частности, о единственности продолжения функции вдоль различных полос, принадлежащих рассматриваемой части плоскости, при условии выполнения уравнения $i\partial w/\partial x = \partial w/\partial y$. Правда, в приведенной выше гипотезе Римана не хватало требования равномерности предельного перехода. Но можно высказать предположение, что Риман считал его само собой разумеющимся.

Однако Вейерштрасс в рассматриваемой работе полагал, что он опроверг Римана, построив довольно громоздкий пример последовательности аналитических функций, равномерно сходящейся внутри объединения нескольких областей двух полуплоскостей, попарно не имеющих общих точек; предел последовательности в разных областях представляет разные аналитические функции, не являющиеся аналитическими продолжениями одна другой. Таким образом, пример строился в условиях нарушения связности множества сходимости — условия, которое Риман, как мы видели, явно подразумевал. Поэтому утверждение Вейерштрасса в сноске к его работе: «Противоположное [предположение.— *А. М.*] высказано Риманом» («Основания общей теории...», § 20, в конце) — нельзя, как мы полагаем, считать справедливым по отношению к Риману.

Мы хотим подчеркнуть, таким образом, что эта работа Вейерштрасса продолжает старое соперничество Вейерштрасса и Римана, вызванное преимущественно разработкой теории абелевых функций,— соперничество, отзвуки которого, правда совсем в другом плане, мы усматриваем, например, в отрывке из письма Вейерштрасса к Шварцу от 3 октября 1875 г.; Вейерштрасс писал здесь, что чем больше он занимается принципами теории функций, тем более он убеждается в том, что «они должны строиться на основе алгебраических истин и что поэтому неверен тот путь, когда, напротив, к обоснованию простых и фундаментальных алгебраических теорем привлекается, коротко говоря, «трансцендентное»; это можно применить, например, на первый взгляд, к рассмотрениям, посредством которых Риман открыл так много важнейших свойств алгебраических функций...»[144]. Конечно, здесь имелся в виду прежде всего мемуар Римана «Теория абелевых функций», и теоретическим выражением протеста Вейерштрасса против «трансцендентного» была его критика риманова принципа Дирихле, по времени предшествовавшая упомянутому письму (1870). К сказанному здесь о ревнивом (если не сказать более) отношении Вейерштрасса к идеям и методам Римана можно добавить еще, что в переписке с С. В. Ковалевской [145], где имя Римана упоминается по крайней мере семь раз, Вейерштрасс почти каждый раз сопровождает эти упоминания критическими замечаниями. То он цитирует отрывок из письма Ришело к нему самому, в котором отдается решительное предпочтение пути, избранному Вейерштрассом в теории абелевых функций, перед Риманом, Клебшем и Горданом (20 августа 1873 г.), то упоминает об «одном из главных недостатков его теории» линейных дифференциальных уравнений (19 ноября 1873 г.), то делится с Ковалевской своим намерением написать работу об абелевых функциях в виде серии писем к тому же Ришело, где он сможет «без стеснения отметить своеобразие своего метода и пуститься в критику Римана и Клебша» (12 января 1875 г.), то опровергает замечание Эрмита о том, что Риман вывел необходимое условие для так называемой матрицы Римана в общем случае («...в сочинениях Римана об этом ничего нет»,— пишет он 14 июня 1882 г.), то, наконец, критикует риманово определение интеграла как недостаточное (16 мая 1885 г.).

Работа 1880 г., о которой мы здесь говорим, продолжала полемику с идеями Римана, но в другом направлении: в направлении самой концепции аналитической функции, где Вейерштрасс неизменно противопоставлял отправной идее Римана в качестве исходной точки степенные ряды.

Как бы то ни было, результат этой работы был неожиданным и для самого Вейерштрасса, и для его современников. Почти сразу же вслед за Вейерштрассом Ж. Таннери заметил, что для выявления самого факта равномерной сходимости одной и той же последовательности к различным функциям можно было б совсем не прибегать к громоздким выкладкам с эллиптическими функциями, как это делал Вейерштрасс. Достаточно рассмотреть последовательность рациональных функций $\left\{\frac{1+z^n}{1-z^n}\right\}$, которая, очевидно, сходится к $+1$ внутри единичного круга и к -1 — вне его. Вейерштрасс подробно излагает этот пример в специальном печатном добавлении к своей основной статье (это при его нелюбви к печатным выступлениям!) *«К учению о функциях. Добавления» (Zur Funktionenlehre Nachtrag*.— Monatsber., 1881, 21 febr.)[146], а также в письме к С. В. Ковалевской от 6 марта 1881 г. Подробно комментируя пример Таннери, Вейерштрасс называет последнего наряду с Миттаг-Леффлером и Пикаром среди молодых математиков, производящих интересные исследования, примыкающие к его работам.

Рассматриваемый мемуар Вейерштрасса весьма заинтересовал его современников также и благодаря тому, что в последнем его параграфе был приведен пример степенного ряда $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^{b^n}$ ($a_n > 0$, b — натураль-

---

[144] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 2, S. 225.
[145] См.: Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской, 1871—1891. М., 1973.
[146] *Weierstrass K.* Mathematische Werke, Bd. 2, S. 231—233.

ное число >1), не продолжаемого за границу круга сходимости. Пример этот был связан с ранее построенным Вейерштрассом примером нигде не дифференцируемой непрерывной функции действительного переменного, представимой тригонометрическим рядом вида $\sum\limits_{0}^{\infty} b^{\nu} \cos a^{\nu} t, \quad ab > 1 + {}^{3}/_{2}\pi$ (см. ниже).

Пример Вейерштрасса принадлежит к классу так называемых лакунарных степенных рядов. Так называются ряды вида $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$, где бесконечно часто встречаются группы подряд идущих равных нулю коэффициентов, содержащие как угодно много членов. Сохраняя только коэффициенты, отличные от нуля, можно записать лакунарный степенной ряд в виде $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$, где $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty$. Теорема Адамара («Опыт изучения функций, заданных их тейлоровскими разложениями» (Essai sur l'étude des fonctions données par leurs développement de Taylor.— J. math. pures et appl. (4), 1892, 8, p. 101—186)) о лакунарных рядах вида $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ при условии $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[\lambda_n]{|a_n|} = 1$ (т. е. радиус сходимости ряда равен 1) гласит, что он будет непродолжаемым, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ (в примере Вейерштрасса $\lambda_{n+1}/\lambda_n = b > 1$.

Еще более сильный результат принадлежит итальянскому математику Е. Фабри (1856—1944), доказавшему в работе «Об особых точках функции, заданной своим разложением в ряд, и о невозможности аналитического продолжения в весьма общих случаях» (Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux.— Ann. Éc. Norm., 3, 1896, 13, p. 367—399), что при тех же обозначениях для непродолжаемости лакунарного ряда достаточно, чтобы было $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \infty$ (пример: $f(z) = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n}$, где $\lambda_n = n^2$). Очевидно, что это условие выполнено каждый раз, когда выполнено условие Адамара (ибо там λ_n растут не медленнее чем члены геометрической прогрессии со знаменателем, большим 1); обратное, конечно, неверно.

Отправляясь от примера непродолжаемого степенного ряда, А. Пуанкаре в обзоре своих трудов, написанном в 1901 г. и опубликованном в 1921 г., ввел своеобразную классификацию всех вообще аналитических функций. А. Пуанкаре называет однозначные аналитические функции, не продолжаемые на всю плоскость (конечную), функциями с лакунарными пространствами (fonctions uniformes à l'espaces lacunaires) и соответственно этому различает следующие три класса функций: 1) однозначные функции во всей плоскости; 2) однозначные функции с лакунарными пространствами; 3) многозначные функции.

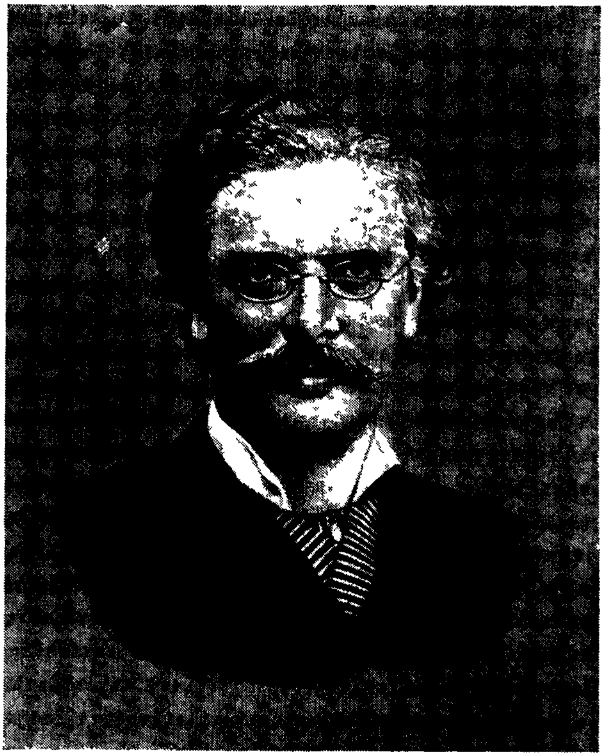
Функции второго класса он изучает в ряде статей. Во-первых, сюда относятся его исследования по тем классам автоморфных функций, которые он назвал по именам Фукса и Клейна (1883); функции эти, вообще говоря, не продолжаются за пределы некоторого круга или более сложной области. Во-вторых, в ряде работ он рассматривает функции, являющиеся суммами рядов вида $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n}$. При условии, что ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} |A_n|$ сходится, а точки b_n расположены всюду плотно на границе некоторой области D, его сумма непродолжаема на область D. Пуанкаре высказал мысль (1889), что замена степенных рядов рядами такого вида может привести к более широкой концепции аналитического продолжения по сравнению с вейерштрассовым продолжением посредством степенных рядов. К этому же пониманию приближался Э. Борель в докторской диссертации «О некоторых вопросах теории функций» (Sur quelques points de la théorie des fonctions. Paris, 1894; напечатано также в Ann. Éc. Norm., 1895). Из его идей, относящихся к суммам рядов $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n}$, где точки b_n расположены всюду плотно в некоторой области, в которой изучается сумма ряда, выросла позднее теория моногенных функций в смысле Бореля (1917); они обладают рядом свойств аналитических функций, однако, вообще говоря, не являются аналитическими ни в одной точке плоскости. Важные и интересные исследования свойств функций $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n}$ при тех или других предположениях относительно коэффициентов A_n и точек b_n были проведены А. Данжуа и совсем недавно советским математиком А. А. Гончаром.

Многие работы конца века были посвящены попыткам получения разложения аналитических функций в ряды в областях, отличных от круга и кругового кольца. Наиболее общие результаты получил К. Рунге (1856—1927), отправляясь от интегральной формулы Коши («К теории однозначных аналитических функций» (Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.— Acta math., 1885, 6, S. 229—244)). Прежде всего он установил, что в любой многосвязной области каждую аналитическую функцию можно представить в виде предела последовательности рациональных функций, равномерно сходящейся внутри этой области. Если же это односвязная область конечной плоскости, то можно говорить о последовательности многочленов, т. е. каждая функция, аналитическая в односвязной области, представима рядом многочленов, равномерно сходящимся внутри области. Таким образом, для аналитических функций комплексного переменного был получен аналог теоремы Вейерштрасса о представлении любой непрерывной функции действительного переменного в виде суммы равномерно сходящегося ряда многочленов (1885). Другим методом (путем аппроксимации данной области изнутри областями, ограниченными лемнискатическими кривыми, т. е. кривыми вида $|P(z)| = \text{const}$, где $P(z)$ — многочлен) тот же результат был получен Д. Гильбертом в 1897 г. («О разложении произвольной аналитической функции одного переменного в бесконечный ряд многочленов» (Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe.— Gött. Nachr., 1897, S. 63—70)). Наконец, К. Рунге привел пример последовательности аналитических функций, неравномерно сходящейся внутри некоторой области, предел которой был функцией, аналитической в этой области («К теории аналитических функций» (Zur Theorie der analytischen Funktionen.— Acta math., 1889, 6, S. 245—248)). Позднее (1901) У. Ф. Осгуд заметил, что в подобных случаях каждая подобласть должна содержать круг, в котором последовательность сходится равномерно («Заметка о функциях, определенных бесконечными рядами, члены которых суть функции комплексного переменного, с соответствующими теоремами для определенных интегралов» (Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complexe variable with corresponding theorems for definite integrals.— Ann. Math., 2, 1901, 3, p. 25—34)).

Теоремы Рунге не давали эффективного способа получения соответствующих рядов. Естествен поэтому интерес к целому циклу работ, в которых указывалось, как исходя из степенного разложения функции, скажем, в окрестности начала координат получать разложения функции в ряды многочленов, равномерно сходящиеся внутри области, более широкой, чем круг сходимости (если, разумеется, функция допускает аналитическое продолжение за пределы круга сходимости). И здесь точкой отправления был интеграл Коши, позволяющий свести общую задачу к разложению в ряд многочленов функции вида $1/(1-u)$ — ядра Коши ($u = z/s$). Наиболее интересные результаты были получены здесь Э. Борелем (1895), предложившим для этой цели новый метод суммирования расходящихся рядов, названный его именем, и Г. Миттаг-Леффлером (Fullständig analytisx fragställning af hvarje entyding monogen function hvars singalära ställen congöra en värde mängd af första slaget.— Öfversigt Kgl. Vet. Akad. Förhandl., 1882, 39, p. 11—45; Om den analytiska framställningen af en allmän monogen function.— Öfversig Kgl. Vet. Akad. Forhandl., 1898, 55, p. 247—282, 375—385). Задача Миттаг-Леффлера заключалась в построении ряда многочленов (коэффициенты которых выражаются определенным, не зависящим от данной функции образом через коэффициенты исходного степенного ряда), представляющего функцию в ее так называемой главной миттаг-леффлеровской звезде. Последняя получается как совокупность всех лучей, берущих начало в центре круга сходимости степенного ряда и продолженных до первой особой точки при аналитическом продолжении функции вдоль луча.

Ряд важных теорем, установленных разными методами, позволили выводить равномерную сходимость последовательности аналитических (или гармонических) функций внутри области T как следствие из ее сходимости на некотором подмножестве $\bar{T}$. Так, Рунге установил в цитированной выше работе, что если последовательность функций $\{f_n(z)\}$, непрерывных в ограниченной замкнутой области T и аналитических внутри нее, равномерно сходится на границе T, то она равномерно сходится и внутри T, и, следовательно, ее предел представляет там аналитическую функцию. Правда, его метод, основанный на использовании интегралов Коши, взятых по границе области, предполагал спрямляемость границы. Но достаточно было соединить принцип максимума модуля с основной теоремой Вейерштрасса о равномерно сходящихся последовательностях аналитических функций, чтобы убедиться, что такое ограничение излишне.

Совершенно аналогичную теорему для последовательностей гармонических функций опубликовал профессор Политехнической школы в Дрездене К. Г. А. Гарнак (1851—1888) («Основания теории логарифмического потенциала и однозначных гармонических функций в плоскости» (Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene. Leipzig, 1887). В этой книге он получил и другую теорему, имеющую более специальный характер и, на первый взгляд, гораздо более удивительную: если функции $\{u_n\}$, гармонические в ограниченной области T, не убывают, т. е. $u_n \leqslant u_{n+1}$ во всех точках T, и если последовательность сходится хотя бы в одной точке области, то она равномерно сходится внутри этой области и, следовательно, ее предел есть функция, также гармоническая в T.



Г. МИТТАГ-ЛЕФФЛЕР

Непосредственно перейти отсюда к последовательностям аналитических функций нельзя. Но вот голландскому математику, профессору в Гронингене, а затем в университете Тулузы Т. Я. Стилтьесу (1856—1894) удалось установить в посмертно напечатанной работе «Исследования о непрерывных дробях» (Recherches sur les fractions continues.— Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse (8), 1894, 7, p. 56), что если последовательность аналитических функций $\{f_n(z)\}$ равномерно ограничена по модулю внутри области T (т. е. в каждом замкнутом круге, принадлежащем области) и если она равномерно сходится на какой-либо подобласти T, то она равномерно сходится и внутри области T. Эта теорема Стилтьеса была обобщена независимо друг от друга Витали («О рядах аналитических функций» (Sulle serie di funzioni analitiche.— Rend. Ist. Lombardo (2), 1903, 36, p. 771—774)) и Портером («Относительно рядов аналитических функций» (Concerning series of analytic functions.— Ann. Math. (2), 1904, 6, p. 190—192)), показавшими, что заключение остается в силе, если сходимость выполняется на каком-либо подмножестве, имеющем в этой области хотя бы одну предельную точку.

Все эти факты получили полное освещение в теории компактных (нормальных) семейств аналитических функций, разработанной П. Монтелем уже за пределами рассматриваемого нами периода. Оказалось, в частности, что в теореме Витали — Портера условие равномерной сходимости на подмножестве области, имеющем в ней хотя бы одну предельную точку, можно еще ослабить, допуская лишь простую, *поточечную* сходимость.

Что касается идей наилучшего приближения аналитических функций многочленами и вообще рациональными функциями, получившими в последней четверти XIX в. благодаря П. Л. Чебышеву и его последователям такое развитие для функций действительного переменного, то для аналитических функций комплексного переменного их расцвет падает на XX в. прежде всего благодаря трудам Г. Фабера, А. Тонелли, С. Н. Бернштейна, Уолша и др. Он привел к новой области теории аналитических функций — так называемой конструктивной теории функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

XIX в. был веком становления теории аналитических функций. Для ее развития особую роль сыграли исследования первой половины XIX в., и прежде всего труды Коши. Параллельно с ними возникла и стала разрабатываться в трудах Абеля, Якоби, Лиувилля и Эйзенштейна теория эллиптических функций. Функции эти появились из задачи обращения эллиптических интегралов и лишь в 40-х годах были осознаны как представители класса мероморфных двоякопериодических функций. Попытка решить задачу обращения также и для ультраэллиптических интегралов натолкнулась на трудности, связанные с многозначными функциями. Якоби объявил «абсурдными» функции одного переменного, допускающие более двух независимых периодов, и он же видоизменил задачу обращения так, что в результате должны были появиться однозначные многократнопериодические функции многих переменных (абелевы функции). Первые успехи в этом направлении были достигнуты Гёпелем и Розенхайном.

Существенный шаг в изучении многозначных функций и их интегралов сделал Пюизё в мемуаре об алгебраических функциях. Он показал, что средства, созданные Коши в его теории интегрирования и разложения в ряды однозначных функций, пригодны и для многозначных. Но решающее значение в этом направлении имела докторская диссертация Римана с ее идеей римановой поверхности, трактовкой аналитической функции как конформного отображения одной поверхности на другую и принципом Дирихле, проявившем большую эвристическую силу в дальнейшем построении теории алгебраических функций и их интегралов. Она открыла второй период в развитии теории аналитических функций, длившийся до конца 70-х годов.

В это время на исторической сцене появился Вейерштрасс, готовивший в тиши и одиночестве с начала 40-х годов свои средства разработки проблем теории аналитических функций. Однако после выхода в свет мемуара Римана об абелевых функциях он приостанавливает публикацию своих исследований по тому же предмету. Деятельность Вейерштрасса в Берлинском университете выражается преимущественно в разработке тщательно продуманных курсов, включающих введение в теорию аналитических функций, эллиптические функции с их приложениями и абелевы интегралы. Хотя эти курсы и не публиковались им, они оказывали серьезное влияние на развитие математики, охватывая всевозрастающую аудиторию квалифицированных слушателей.

Во второй половине 70-х годов появляются теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в произведение и теорема Миттаг-Леффлера о представлении мероморфной функции по ее главным частям. В это же время Вейерштрасс закладывает основы теории аналитических функций многих переменных своей «подготовительной» теоремой. На ней он строит, в частности, теорию делимости степенных рядов.

Несколько в стороне от основного аналитического направления Вейерштрасса шла дальнейшая разработка геометрической теории функций, заложенной в трудах Римана. Здесь главным образом усилиями Шварца, Шоттки и Клейна развиваются теория конформных отображений и теория модулярных функций. Именно модулярная функция Шварца послужила в руках Пикара инструментом для доказательства его замечательной теоремы. От нее ведет начало теория распределения значений мероморфных функций, получившая полное развитие лишь в 20-х годах нашего века в трудах Р. Неванлинны.

В начале 80-х годов от теории функций начинает отходить такая существенная ее часть, как теория алгебраических функций. Происходит это потому, что Дедекинду и Г. Веберу удается по-новому построить эту теорию, руководствуясь аналогией алгебраических функций с алгебраическими числами (см. Кн. 1, с. 115—119). Но даже в уменьшенном объеме история теории аналитических функций в последние два десятилетия XIX в. отмечена выдающимися достижениями. Их открывают исследования Пуанкаре по теории автоморфных функций и теории униформизации. Его теорема о возможности параметрического представления любой многозначной функции с помощью автоморфных функций с граничным кругом является одним из высших достижений всей математики XIX в.

Заметно наращивается запас фактов и представлений, относящихся к функциям многих переменных. Пуанкаре и Кузен доказывают не поддававшуюся многолетним усилиям Вейерштрасса теорему о том, что каждую функцию многих комплексных переменных, локально изображаемую в виде частного двух степенных рядов, можно представить в виде частного двух целых функций (взаимно простых). Пикар и Аппель закладывают начала общей теории абелевых функций как $2p$-периодических мероморфных функций p комплексных переменных. При этом они используют результаты Виртингера о тэта-функциях многих переменных. Так происходит накопление материала теории аналитических функций многих переменных, которая к середине XX в. начнет заслонять собой классическую теорию функций одного переменного. Но для этого последней суждено еще долгое и плодотворное развитие на путях, на которых остаются трудные, не решенные до сих пор проблемы, вроде проблемы Римана о нулях дзэта-функций или менее прославленной проблемы коэффициентов в теории однолистных функций.

Возвращаясь к концу прошлого века, отметим возникновение и развитие с середины 80-х годов общей теории рядов многочленов и вообще рациональных функций, начало которой было положено теоремами Рунге, а также то проникновение в механизм равномерной сходимости рядов аналитических функций, которое открылось в теореме Стилтьеса. Именно отсюда путь идет к позднейшему изучению пространств аналитических функций.

Но наиболее ярким выражением достижений классической теории аналитических функций в конце XIX в. было доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, полученное одновременно Адамаром и де ла Валле-Пуссеном. Оно стало возможным тогда благодаря углубленной разработке теории целых функций, в которой приняли основное участие Пуанкаре, Адамар и Борель. Последний подвел итоги этой работы в первой монографии, специально посвященной целым функциям; она вышла в свет в 1900 г.

ЛИТЕРАТУРА

•

Сочинения общего характера

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1966.

История отечественной математики. Киев: Наукова думка, 1966—1970. Т. 1—4.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: Гостехиздат, 1937, Ч. 1.

Математика, ее содержание, методы и значение. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1—3.

Рыбников К. А. История математики. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1974.

Хрестоматия по истории математики/Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1976—1977. Т. 1, 2.

Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968.

Яновская С. А. Методологические проблемы науки. М.; Мысль, 1972.

Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700—1900/Sous la direction de J. Dieudonné. Paris: Hermann, 1978. T. 1, 2.

Ball W. W. Rouse. A short account of the history of mathematics. 4th ed. 1908. Repr. Dover, 1960. Франц. пер.: Histoire des mathématiques. Paris, 1906—1907.

Bell E. T. The development of mathematics. 2nd. ed. New York; London: McGraw-Hill, 1945.

Bell E. T. Men of mathematics. New York: Simon and Schuster, 1962. Среди других биографии Монжа, Понселе, Гаусса, Коши, Лобачевского, Якоби, Гамильтона, Вейерштрасса, Римана, Пуанкаре.

Boyer C. B. A history of mathematics. New York etc.: Wiley and sons, 1968.

Cajory F. A history of mathematical notations. London: Open court publ., 1928—1929. Vol. 1, 2.

Dictionary of scientific biography/Ed. Ch. C. Gillispie. New York: Scribner's sons publ., 1970—1976. Vol. 1—15.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. 2.Aufl. Leipzig: Teubner, 1898—1934; 1952—1968. Bd. 1—6.

Kline M. Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford Univ. Press, 1972.

Loria G. Storia delle matematiche dall'alba civilitá al tramonto del secolo XIX. Milano: Hoepli, 1950.

May K. O. Bibliography and research manual of the history of mathematics. Toronto; Buffalo: Univ. Toronto Press, 1973.

Scienziati e technologi contemporei. Milano: A. Mondadori, 1974—1976. Vol. 1—3.

Scienziati e technologi dalla origini al 1875. Milano: A. Mondadori, 1975—1976. Vol. 1—3.

Wussing H., Arnold W. Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin: Volk und Wissen, 1975.

Среди других биографии Лагранжа, Монжа, Лапласа, Гаусса, Больцано, Коши, Мёбиуса, Лобачевского, Абеля, Якоби, Галуа, Вейерштрасса, Чебышева, Кронекера, Римана, Г. Кантора, Клейна, Ковалевской, Гильберта, Э. Нётер.

Собрания сочинений и другие первоисточники

Больаи Я. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что a priori никогда решено быть не может, с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Бэтти Э. Теория эллиптических функций и ее приложения / Пер. с прибавлениями Г. Тиме. СПб., 1861.

Вышнеградский И. А. О регулярности прямого действия.— Изв. СПб. практ. технол. ин-та, 1877, 25, с. 21—62.

Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. М.: Геодезиздат, 1957—1958. Т. 1, 2.

Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.; Л.: Гостехиздат, 1936.

Клейн Ф. Высшая геометрия. М.; Л.: Гостехиздат, 1939.
Клиффорд В. К. Здравый смысл точных наук. М., 1910; 2-е изд. Пг., 1922.
Ковалевская С. В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
Котельников А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895.
Коши О. Л. Алгебраический анализ. Лейпциг, 1864.
Коши О. Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской политехнической школе. СПб., 1831.
Листинг И. Б. Предварительные исследования по топологии. М.; Л.: Гостехиздат, 1932.
Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946—1951. Т. 1—5.
Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.: Наука, 1976.
Монж Г. Приложение анализа к геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1936.
Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956. Содержит работы Н. И. Лобачевского, Я. Больяи, К. Ф. Гаусса, Ф. Миндинга, Э. Бельтрами, А. Кэли, Ф. Клейна, А. Пуанкаре, Б. Римана, Г. Гельмгольца, С. Ли, Д. Гильберта, В. Ф. Кагана, Э. Картана.
Петерсон К. М. Об изгибании поверхностей.— ИМИ, 1952, 5, с. 87—133.
Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука, 1971—1974. Т. 1—3.
Риман Б. Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
Сальмон Д. Аналитическая геометрия двух измерений (конические сечения, геометрические методы). М., 1892.
Сальмон Д. Аналитическая геометрия трех измерений. М., 1891.
Сомов О. И. Основания теории эллиптических функций. СПб., 1850.
Сомов О. И. Об ускорениях высших порядков.— Зап. Акад. наук, 1864, 5, Приложение № 5.
Сомов О. И. Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядков и кривизны поверхности в каких-нибудь координатах, прямолинейных или криволинейных.— Зап. Акад. наук, 1865, 8, Приложение № 4.
Сохоцкий Ю. В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. СПб., 1873.
Сохоцкий Ю. В. Начала общего наибольшего делителя в применении к теории делимости алгебраических чисел. СПб., 1893.
Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. Харьков; Киев: ГНТИ Украины, 1936.
Суворов Ф. М. О характеристике систем трех измерений. Казань, 1871.
Тихомандрицкий М. А. Обращение гиперэллиптических интегралов. Харьков, 1885.
Тихомандрицкий М. А. Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций. Харьков, 1895.
Тихомандрицкий М. А. Основания теории абелевых интегралов. Харьков, 1895.
Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944—1951. Т. 1—5.
Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883. Т. 1, 2.
Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. М.; Л. Гостехиздат, 1936. Т. 1.
Abel N. H. Oeuvres complètes. Christiania: Grøndahl, 1881. T. 1, 2.
Argand J. R. Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris, 1806; 2 éd., Paris, 1874.
Beltrami E. Opere matematiche. Milano: Hoepli, 1902—1910. Vol. 1—4.
Betti E. Opere matematiche. Milano: Hoepli, 1903—1914. Vol. 1, 2.
Borel E. Sur quelques points de la théorie des fonctions.— Ann. Ecole Norm. Ser. 3, 1895, 12, p. 9—55.
Borel E. Leçons sur les fonctions entières. Paris: Guathier-Villars, 1900.
Briot C., Bouquet J. Etude des fonctions d'une variable imaginaire.— J. Éc. Polyt., 1856, 21, p. 85—131.
Briot C., Bouquet J. Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques.— Paris: Mallet — Bachelier, 1859.
Briot C., Bouquet J. Théorie des fonctions elliptiques. Paris: Bachelier, 1875.
Casorati F. Teorica delle funzioni di variabili complesse. Pavia, 1868.
Casorati F. Opere. Roma; Cremonese della casa editrice Perella, 1951.
Cauchy A. L. Oeuvres complètes. Paris: Gauthier-Villars, 1882—1974. T. 1—27 (2 sér.).
Cayley A. Collected mathematical papers. Cambridge: Univ. Press, 1889—1898. Vol. 1—14.
Chasles M. Traité de géométrie superieure. Paris, 1852.
Christoffel E. B. Gesammelte mathematischen Abhandlungen. Leipzig; Berlin: Teubner, 1910.

Clebsch A., Lindemann F. Vorlesungen über Geometrie. Leipzig, 1875—1876. Bd. 1, 2.

Clifford W. K. Mathematical papers. London: Macmillan, 1882; New York: Chelsea Publ. House, 1968.

Clifford W. K. Lectures and essays. London: Macmillan, 1901. Vol. 1, 2.

Cremona L. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Bologna, 1863.

Darboux G. Sur une classe remarquable de courbes algébriques et sur la théorie des imaginaires. Bordeaux, 1873.

Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal. 2 éd. Paris, 1914—1925. T. 1—4.

Dupin C. Devéloppement de géométrie. Paris, 1813.

Dupin C. Applications de géométrie et de mécanique. Paris, 1822.

Durège H. Elemente der Theorie der Funktionen einer complexen veränderlichen Grösse, Mit besonderer Berücksichtigung der Schopfungen Riemanns bearbeitet. Leipzig, 1864.

Eisenstein F. G. M. Mathematische Abhandlungen. Berlin: Reimer, 1874.

Fuchs L. Gesammelte mathematische Werke. Berlin: Mayer und Müller, 1904—1908. Bd. 1—3.

Gauss C. F. Werke. Göttingen, 1863—1933. Bd. 1—12.

Göpel A. Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung.— In: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1895, N 67.

Grassmann H. Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Leipzig: Teubner, 1894—1911. Bd. 1—3.

Hadamard J. Etude sur les fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.— J. math. pures et appl., sér. 4, 1893, **9**, p. 170—215.

Hamilton W. R. Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853.

Hamilton W. R. The mathematical papers. Cambridge: Univ. Press, 1931—1967. Vol. 1—3.

Hamilton W. R. Elements on quaternions. New York: Chelsea Publ. House, 1969.

Harnack A. Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene. Leipzig, 1887.

Helmholz H. Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig, 1887. Bd. 1—3.

Holtzmüller H. Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaft und der konformen Abbildungen mit Anwendung auf mathematische Physik. Leipzig, 1882.

Jacobi C. G. J. Gesammelte Werke. Berlin: Reimer, 1881—1891. Bd. 1—7.

Jordan C. Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris: Gauthier-Villars, 1870; Nouveau tirage, Paris, 1957.

Jordan C. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. 3 éd. Paris: Gauthier-Villars, 1909—1915. T. 1—3.

Jordan C. Oeuvres. Paris: Gauthier-Villars, 1961—1964. T. 1—4.

Klein F. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grades. Leipzig, 1884.

Klein F. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin: Springer, 1921—1923. Bd. 1—3.

Kummer E. Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.— J. für reine und angew. Math., 1874, **35**, S. 319—326.

Lagrange J. L. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduites à l'analyse algébrique des quantités finis. Paris, 1797; Oeuvres. Paris, 1881, t. 9, p. 1—428.

Laplace P. S. Oeuvres complètes. Paris: Gauthier-Villars, 1878—1912. T. 1—14.

Lhuillier S. Mémoire sur les polyédrométrie.— Ann. math. pures et appl., 1812—1813, **3**, p. 169—192.

Lie S. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig: Teubner; Oslo: Aschelong, 1934—1960. Bd. 1—10.

Liouville J. Leçons sur les fonctions doublement périodiques (faites en 1847). Paris, 1880.

Listing J. B. Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung der Euler's Satzes von der Polyedron.— Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, 1862, **10**, S. 97—180.

Möbius A. F. Gesammelte Werke. Leipzig, 1885—1887. Bd. 1—4.

Neumann C. Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig, 1865.

Peterson C. Über Curven und Flächen. Moskau; Leipzig, 1868.

Picard E. Traité d'analyse. Paris: Gauthier-Villars, 1893. T. 2.

Plücker J. Analytisch-geometrische Entwicklungen. Essen, 1821—1831. Bd. 1—2.

Plücker J. System der analytischen Geometrie. Berlin, 1835.

Plücker J. Theorie der algebraischen Curven. Bonn, 1839.

Plücker J. System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise. Bonn, 1846.
Plücker J. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, 1868—1869. Bd. 1,2.
Plücker J. Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig, 1895—1896. Bd. 1, 2.
Poincaré H. Oeuvres. Paris: Gauthier-Villars, 1928—1956. T. 1—11.
Poisson S. D. Sur les intégrales des fonctions qui passent par l'infini entre des limites de l'intégration, et sur l' usage des imaginaires dans la détermination des intégrales définies.— J. Éc. Polyt., 1820, **11**, N 8, p. 295—341.
Poncelet J. V. Traité des propriétés projectives des figures. Paris: Bachelier, 1822.
Poncelet J. V. Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondament au Traité des propriétés projectives des figures. Paris: Mallet-Bachelier, 1862—1864. T. 1,2.
Puiseux V. Recherches sur les fonctions algébriques.— J. math. pures et appl., 1850, 15, p. 365—480.
Riemann B. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. 2. Aufl. Leipzig: Teubner, 1892.
Salmon G. Higher plane curves. Dublin, 1862.
Schläfli L. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin: Mayer und Müller, 1902—1909. Bd. 1—3.
Schubert H. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Abzahlen unseren Raumes.— Math. Ann., 1866, **26**, S. 26—51.
Schubert H. Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig: Teubner, 1879.
Schwarz H. A. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin: Springer, 1890. Bd. 1, 2.
Staudt Ch. von. Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg: Korn, 1856—1860. H. 1—3.
Staudt Ch. von. Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe, 1847.
Steiner J. Gesammelte Werke. Berlin: Reimer, 1881—1882. Bd. 1, 2.
Stieltjes T. J. Oeuvres complètes. Grøningen: Noordhoff, 1914—1918. T. 1, 2.
Study E. Geometrie der Dynamen: Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig: Teubner, 1903.
Weierstrass K. Abhandlungen aus der Funktionentheorie. Berlin, 1894.
Weierstrass K. Mathematische Werke. Berlin: Mayer und Müller, 1894—1927. Bd. 1—7.
Wessel K. Om directionens analytiske betegning, et forsøg, anvendt fornemmling til plane og sphaeriske polygoners opløsning.— Nye samling af det Kong. Danske Vid. Selsk. Skr. Ser. 2, 1799, 5, S. 496—518.

Вспомогательная литература к главе I

Бонола Р. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития. СПб., 1910.
Визгин В. П. К истории «Эрлангенской программы» Ф. Клейна.— ИМИ, 1973, 18, с. 218—248.
Галченкова Р. И., Лумисте Ю. Г., Ожигова Е. П., Погребысский И. Б. Фердинанд Миндинг, 1806—1880. Л.: Наука, 1970.
Герасимова В. И. Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1952.
Депман И. Я. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация.— ИМИ, 1952, 6, с. 134—164.
Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1947—1949. Т. 1, 2.
Каган В. Ф. Лобачевский. 2-е изд. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
Каган В. Ф. Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. М.: Гостехиздат, 1949 —1956. Ч. 1, 2.
Каган В. Ф. Очерки по геометрии. М.: Изд-во МГУ, 1963.
Крамар Ф. Д. Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX в.— ИМИ, 1963, 15, с. 225—290.
Крамар Ф. Д., Милюков И. Д. Иосиф Иванович Сомов (1815—1876), математик, механик, педагог. Алма-Ата: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1956.
Лаптев Б. Л. Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского.— ИМИ, 1951, 4, с. 201—229.
Модзалевский Л. Б. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
Норден А. П. Гаусс и Лобачевский.— ИМИ, 1956, 9, с. 145—168.
Норден А. П. Вопросы обоснования геометрии в работах Н. И. Лобачевского.— ИМИ, 1958, 11, с. 97—132.
Олоничев П. М. Казанский геометр Федор Матвеевич Суворов.— ИМИ, 1956, 9, с. 271—316.

Погорелов А. В. Основания геометрии. 4-е изд. М.: Наука, 1979.
Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М.: Гостехиздат, 1955.
Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.
Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976.
Рыбкин Г. Ф. Материализм — основная черта мировоззрения Н. И. Лобачевского. ИМИ, 1950, 3, с. 9—29.
125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского, 1826—1951. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
Стройк Д. Очерк истории дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
Хилькевич Э. К. Из истории распространения и развития идей Н. И. Лобачевского в 60—70-х годах XIX столетия.— ИМИ, 1940, 2, с. 168—230.
Boyer C. B. A history of analytic geometry. New York, 1956.
Coolige M. J. A history of geometrical methods. Oxford: Clarendon Press, 1940.
Crowe M. J. A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system. London: Univ. Notre Dame Press, 1967.
Engel F. Urkunden zur Geschichte der nichteuklidische Geometrie. Leipzig, 1898—1913. Bd. 1, 2.
Engel F., Stäckel P. Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie.— Math. Ann., 1897, 49, S. 149—206.
Kötter E. Die Entwicklung der syntetische Geometrie.— Jahresber Dtsch. Math. Ver., 1901, 5, S. 1—486.
Loria G. Curve piane speciali algebraiche e transcendenti. Teoria e storia. Milano: Hoepli, 1930. Vol. 1, 2.
Loria G. II passato e il presente delle principale teorie geometriche. Milano: Cedom, 1931.
Pont J. C. La topologie algébrique dès origines à Poincaré. Paris, 1974.
Reich K. Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828—1868).— Arch. Hist. Exact Sci., 1973, 5, S. 273—372.
Simon M. Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX Jahrhundert. Leipzig: Teubner, 1906.
Sommerv lle D. M. Y. Bibliography of non-euclidean geometry. London: Harrison, 1911.
Stäckel P., Engel F. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss: Eine Urkundsammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidische Geometrie. Leipzig: Teubner, 1895.
Taton R. Gaspard Monge. Basel: Birkhäuser, 1950.

Вспомогательная литература к главе II

Башмакова И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры.— ИМИ, 1957, 10, с. 257—304.
Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Ростов: Изд-во Рост. ун-та, 1962.
Ващенко-Захарченко М. Е. Риманова теория функций составного переменного. Киев, 1866.
Вейерштрасс К. Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской, 1871—1891. М.: Наука, 1973.
Ермаков В. П. Теория абелевых функций без римановых поверхностей. Киев, 1897.
Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Л.; М.: Гостехиздат, 1933.
Маркушевич А. И. Элементы теории аналитических функций. М.: Учпедгиз, 1944.
Маркушевич А. И. Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций.— ИМИ, 1950, 3, с. 399—406.
Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
Маркушевич А. И. Работы Гаусса по математическому анализу.— В кн.: Карл Фридрих Гаусс. М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 146—216.
Маркушевич А. И. Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 98—132.
Маркушевич А. И. Замечательные синусы. 2-е изд. М.: Просвещение, 1975.
Маркушевич А. И. Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979.
Маркушевич А. И. Некоторые вопросы истории теории аналитических функций.— ИМИ, 1980, 25, с. 52—70.

Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах русских математиков XIX и начала XX в.— ИМИ, 1966, **17**, с. 361—369.
Петрова С. С. Принцип Дирихле в работах Римана.— ИМИ, 1965, **16**, с. 295—310.
Петрова С. С. О принципе Дирихле.— В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1966, вып. 5, с. 200—218.
Петрова С. С. Из истории аналитических доказательств основной теоремы алгебры.— В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1973, вып. 14, с. 167—172.
Покровский П. М. Исторический очерк теории ультраэллиптических и абелевых функций. М., 1886.
Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.
Сохоцкий Ю. В. Высшая алгебра. СПб., 1882.
Сохоцкий Ю. В. Теория чисел. СПб., 1888.
Тимченко И. Ю. Основания теории аналитических функций. Ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций.— Зап. мат. отд-ния Новорос. о-ва естествоиспытателей, 1892, **12**, с. 1—256; 1896, **16**, с. 1—216, 257—472; 1899, **19**, с. 1—183, 473—655. Отдельное издание под тем же названием. Одесса, 1899.
Тихомандрицкий М. А. Карл Вейерштрасс.— Сообщ. Харьк. мат. о-ва, (2), 1899, **6**, с. 35—56.
Bachelard S. La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIX siècle. Paris, 1966.
Biermann K. R. Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810—1920. Berlin: Univ. Bibl. Berlin, 1968.
Brill A., Noether M. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuer Zeit.— Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1892—1893, 3, S. 107—566.
Bottazzini U. Riemann's Einfluss auf E. Betti und F. Casorati.— Arch. Hist. Exact Sci., 1978, **18**, S. 27—37.
Conforto F. Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie. Berlin: Springer, 1956.
Dugac P. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass.— Arch. Hist. Exact Sci., 1973, **10**, S. 41—176.
Enneper A. Elliptische Funktionen: Theorie und Geschiphte. Halle a. S.:. Nebert, 1876.
Gauss C. F. Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Lehezig: Engelmann, 1880.
Hurwitz C. F. Über die Entwicklung der allgemeinen Tmorie der analytischen Funktionen.— In: Verhandlungen des ersten intern. Mathe atiker-Kongr. in Zürich. Leipzig: Teubner, 1898, S. 91—112.
Jourdain P. E. B. The theory of functions with Cauchy and Gauss.— Bibl. mat. Ser. 3, 1905, 6, p. 190—207.
Montferrier A. S. de. Dictionaire des sciences mathématiques pures et appliques. Paris: Denain, 1836—1840. T. 1—3.
Neuenschwander E. The Casorati-Weierstrass theorem.—Hist. math., 1978, **5**, p. 139—166.
Pringsheim A. Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes.— Bibl. mat. Ser. 3, 1900, **1**, S. 433—479.
Pringsheim A., Molk J. Principes fondamentaux de la théorie des fonctions.— In: Encyclopédie des sciences mathématiques. Paris: Gauthier-Villars, 1909, t. 2, vol. 1, p. 1 — 112.
Weierstrass K. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass. 1815—1965. Köln;, Oplanden: Springer, 1966.
Weyl A. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin: Springer, 1976. Рус. пер.: *Вейль А.* Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М.: Мир, 1978.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

МАТЕМАТИКА XIX ВЕКА

ГЕОМЕТРИЯ

ТЕОРИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

●

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания
и техники
Академии наук СССР

●

Редактор *А. Ф. Лапко*
Редактор издательства *Н. Н. Лезнова*
Художник *А. В. Пушкарный*
Художественный редактор *Т. П. Поленова*
Технический редактор *Ф. М. Хенох*
Корректор *В. Г. Петрова*

ИБ № 21058

Сдано в набор 6.01.81
Подписано к печати 06.07.81
Т-09265. Формат 70×100¹/₁₆
Бумага типографская для глубокой печати
Гарнитура обыкновенная новая
Печать высокая
Усл. печ. л. 21,9. Усл. кр.-отт. 22,6. Уч.-изд. л. 22
Тираж 5000 экз. Тип. зак. 115
Цена 2 р. 70 к.

Издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10