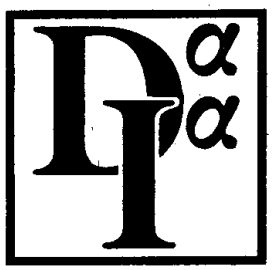
С.Г.Самко/А.А.Килбас/О.И.Маричев

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ



МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

УДК 517.3

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Редактор
академик АН СССР С. М. Никольский

Рецензенты:
П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

1702050000—088
С——————55—87
М316(03)—87

© Издательство
«Наука и техника», 1987.

От редактора

Понятия дробного дифференцирования и интегрирования обычно связывают с именем Лиувилля. Но на самом деле еще творцы дифференциального и интегрального исчисления задумывались над производными не только целого, но и дробного порядка.

Читая эту книгу, мы узнаем, что дробные производные были предметом некоторого внимания Лейбница. Эйлер интересовался дробными производными. Лиувилль, Абель, Риман, Летников, Вейль, Адамар и многие другие известные математики прошлого и настоящего столетий оказали влияние на развитие дробного интегродифференцирования, ставшего теперь целым направлением в математическом анализе.

Дробные интегралы и производные целого порядка — это обычные интегралы и производные. Однако в случае дробного порядка эти понятия имеют своеобразную специфику, которая проявляется, например, в том, что для них в разных ситуациях совершенно естественно возникают их различные модификации. Взаимоотношения между этими модификациями приходится изучать.

Дробные производные и интегралы имеют много приложений — они и выросли из нужд приложений.

В настоящее время по дробным производным и интегралам имеется очень большая литература. Но она разрозненна — объединяющих монографических исследований в этом направлении нет или почти нет. Этот пробел восполняет данная книга, написанная крупным специалистом математического анализа профессором Ростовского университета С. Г. Самко вместе с доцентами Белорусского университета А. А. Килбасом и О. И. Маричевым.

Книга эта представляет собой обширную монографию, в которой в компактной форме излагается современное состояние математических исследований по дробному интегродифференцированию.

Авторы сами внесли серьезный вклад в вопросы дробного интегрирования и дифференцирования, поэтому естественно, что в монографии их собственные результаты занимают достаточно видное место.

Книга построена следующим образом. Основные главы вводят читателя в курс вопроса. При этом устанавливаются общие теоремы, которые, как правило, доказываются полностью, впрочем иногда со ссылкой на литературный источник.

Все главы снабжены историческими экскурсами, указывающими не только на источники излагаемых фактов, но и на примыкающую к ним литературу. При этом приводится уже без доказательств много дополняющих основной текст формулировок.

Часть материала посвящена одной переменной, другая часть — многим переменным. Многомерный случай особенно интересен. Далеко не всегда он сводится к комбинированию известных одномерных фактов. Для многих переменных изучается дробное интегродифференцирование по М. Риссу, гиперсингулярные интегралы, бесселево дробное интегродифференцирование, дробные степени гиперболических, параболических дифференциальных операторов и другие.

Книга содержит главу, посвященную интегральным уравнениям со степенными и степенно-логарифмическими ядрами. Здесь уже рассмотренные дробные интегродифференциальные операторы применяются к решению достаточно общих интегральных уравнений. В процессе этих рассуждений появляется необходимость в использовании известных, ставших уже классическими результатов Н. И. Мусхелишвили и Ф. Д. Гахова. Авторы монографии, выросшие в школе Ф. Д. Гахова, прекрасно владеют этими результатами, но не только владеют, а и существенно их развивают.

В книге рассмотрено также большое число интегральных уравнений первого рода со специальными функциями в ядрах, решение которых получается с помощью дробного интегродифференцирования. В заключительной главе даны приложения к некоторым задачам для дифференциальных уравнений.

Изложение монографии ведется на живом простом языке, требующем для понимания знания дифференциального и интегрального исчисления в пределах программ физико-математических и инженерных факультетов. Это делает ее доступной широкому кругу читателей. Книга эта будет интересна всем, кто имеет дело с математическим анализом. Она может служить для начального изучения вопросов, связанных с понятиями дробного интегрирования и дифференцирования. Специалистам она, безусловно, будет полезна не только как настольная книга с обширной библиографией, но зачастую и как предмет для изучения.

Думаю, что эта книга будет иметь успех. Во всяком случае я его ей желаю.

АКАДЕМИК С. М. НИКОЛЬСКИЙ

Предисловие

Область математического анализа, называемая дробным исчислением и посвященная исследованию и применению производных и интегралов произвольного (вещественного или комплексного) порядка, имеет давнюю историю (см. далее «Краткий исторический очерк») и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и др. Она находится в постоянном развитии, которое питается идеями и результатами различных направлений в математическом анализе. Дробное исчисление функций одной и многих переменных продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время, свидетельством чему служит как большой поток публикаций (сотни наименований за последние годы, см. список литературы в конце книги), так и международные конференции, специально посвященные вопросам дробного исчисления. Первая такая конференция проходила в 1974 г. (США, Нью-Хейвен), а вторая — в 1984 г. (Англия, Глазго) *.

Удивительным обстоятельством является отсутствие за всю долгую историю развития теории дробного исчисления монографий по этому направлению. В мировой математической литературе не было ни одной такой книги, которая бы содержательно отражала достижения в этой теории. Единственная книга К. Олдхэма, Дж. Спаниера (K. B. Oldham, J. Spanier [1], 1974 г.), посвященная дробному исчислению, написана специалистами в прикладных задачах химических наук и содержит лишь изложение некоторых классических вопросов теории, причем основное внимание в ней уделено вычислению дробных интегралов и производных конкретных функций и приложениям к задачам диффузии. Можно указать еще книги, имеющие главу или параграф, в которых рассматриваются отдельные вопросы дробного интегродифференцирования: А. Зигмунд [2], М. М. Джрбашян [2], И. Снеддон (I. N. Sneddon [3, 6]), П. Бутцер, Р. Нессел (P. L. Butzer, R. J. Nessel [1]), П. Бутцер, В. Требелс (P. L. Butzer, W. Trebels [2]),

* Труды этих конференций опубликованы соответственно в сборниках «Fractional calculus and its applications» / Ed. B. Ross // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. 381 p.; «Fractional calculus» / Eds. A. C. McBride, G. F. Roach // Res. Notes Math. 1985. Vol. 138. 214 p.

Х. Дэвис (H. T. Davis [3, 4]), Ж. Окикиолу (G. O. Okikiolu [7]), С. Г. Самко [31], С. Фенью, Х. Столле (S. Fenyö, H. W. Stolle [1]). Определенный интерес для специалистов представляет также малоизвестная публикация копенгагенским университетом диссертации П. Марке (P. W. Marke [1], 1942 г.) на датском языке. Можно отметить, наконец, работы, содержащие краткие исторические очерки развития тех или иных разделов дробного исчисления. Первый такой очерк появился еще в работе А. В. Летникова [2], 1868 г. Имеются также исторические очерки в работах H. T. Davis [3, 4], M. Mikolàs [6], B. Ross [1—3], R. Tremblay [1, с. 12—19]. Они посвящены в основном классическому периоду развития дробного интегродифференцирования.

Возможно, что именно постоянное развитие теории дробного интегродифференцирования, а в последние десятилетия ее большая разветвленность, особенно в случае функций многих переменных, являются причиной отсутствия монографий по этой теории.

Между тем это обстоятельство не могло не служить тормозом в развитии дробного исчисления. Ряд результатов, очень существенных и фундаментальных, опубликован в оригинальных статьях, многие из которых труднодоступны и мало известны. Это приводило к тому, что порой в исследованиях затрачивались большие усилия для получения утверждений или уже известных, или легко вытекающих из известных, а некоторые работы содержали серьезные ошибки, связанные с неправильным толкованием основных понятий этой теории.

История развития дробного интегродифференцирования знает немало работ, в которых в разное время переоткрывались уже известные результаты, иногда теми же самыми средствами, что и у предшественников, иногда на основе других методов. Это обстоятельство усугублялось тем, что существует большое число различных подходов к дробному интегродифференцированию и, следовательно, различных направлений в дробном исчислении. Сопоставление этих подходов и направлений проводилось редко и было сравнительно мало известно. Перед начинающим исследователем постоянно возникали психологические затруднения, связанные с необходимостью ориентироваться в разнообразных определениях дробного интегродифференцирования и огромном потоке публикаций.

Авторы настоящей книги, интересы которых лежат в области интегральных операторов, теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и специальных функций, использовали аппарат дробного интегродифференцирования в своих исследованиях с 1967 г. В процессе работы перед авторами возникала необходимость получения результатов в самой теории дробного интегродифференцирования и постепенно интересы, по крайней мере у первого из авторов, существенно переместились уже в область дробного исчисления вначале функций одного переменного, а с 1974 г.— функций многих переменных.

Работая в этой области, авторы постепенно пришли к мысли о написании книги по дробному интегродифференцированию, которая в достаточной мере отражала бы современное состояние теории и освещала бы ее приложения в теории интегральных операторов, интегральных и дифференциальных уравнений. Большой библиографический поиск, проведенный авторами, и анализ огромного числа работ укрепили их в этой мысли. Существенную роль сыграло также то обстоятельство, что первый из авторов с 1968 г. читал лекции по дробному интегродифференцированию функций одной и многих переменных студентам Ростовского университета.

Соблазн изложить с полными доказательствами все важные результаты теории, известные по сей день, был велик. Однако такой подход потребовал бы не одного тома. Поэтому более целесообразным оказалось выделение из основного текста специальных обзорно-исторических параграфов, которые завершают каждую главу. Авторы стояли перед

трудной задачей отбора материала, и здесь не смогли не сказаться их вкусы. В основном тексте результаты даются, как правило, с полными доказательствами. В обзорно-исторических параграфах (§ 4, 9, 17, 23, 29, 34, 39, 43) приведены исторические комментарии к материалу главы и результаты, примыкающие к ней по тематике, но не вошедшие в основной текст. Эти комментарии и результаты выделены в подпункты, номера которых включают указания на соответствующие параграфы главы, к которым привязаны подпункты *.

Первые пять глав книги содержат изложение теории дробного интегродифференцирования, причем главы 1—4 относятся к функциям одного переменного, а глава 5 — к функциям многих переменных. Главы 6—8 включают приложения к интегральным и дифференциальным уравнениям. В данной книге нет приложений интегродифференцирования функций многих переменных к многомерным интегральным уравнениям; некоторые из них можно найти в книге С. Г. Самко [31] и работе С. Г. Самко, С. М. Умархаджиева [3].

Обратим внимание читателя на то, что в § 9, п. 3° содержатся таблицы дробных интегралов и производных ряда элементарных и специальных функций, а в § 23, п. 3° приведены ответы на некоторые открытые вопросы, поставленные на конференции по дробному исчислению (Нью-Хейвен, 1974 г.).

Книга содержит большой список литературы. Он охватывает практически все публикации по дробному исчислению и рассмотренным приложениям, по крайней мере в случае функций одной переменной.

Авторы не излагают в книге вопросов теории дробных степеней операторов, что увело бы текст далеко в сторону, хотя эпизодически затрагивают некоторые понятия этой теории (см., например, § 5, п. 7°). Также в книге совершенно не упоминаются аспекты, связанные с символическим исчислением (Буль, Хевисайд и др.). и использованием понятий G- и H-функций многих переменных — теория последних находится в стадии формирования.

Особо следует сказать о прикладном значении дробных интегралов и производных, или, что то же, интегрального уравнения Абеля и его обобщений. Этот аппарат используется в самых различных областях — в физике, механике, химии и др. После известной задачи Абеля о таутохроне (N. H. Abel [1], 1823 г.) первые приложения были даны Лиувиллем (J. Liouville [1], 1832 г.) к задачам геометрии, физики и механики. Среди них задача Лапласа о влиянии бесконечного прямолинейного проводника на магнит, задача Ампера о взаимодействии двух таких проводников, задачи, связанные с притяжением тел, задача о распределении тепла в шаре, задача Гаусса о приближенных квадратурах и др. (см. обзор задач, рассмотренных Лиувиллем, также в работе А. В. Летникова [4], с. 21—44, 1874 г.).

Имеется большое число работ прикладного характера, использующих методы дробного интегрирования. Такого рода вопросы в книге не рассматриваются. Излагаемые в главах 6—8 приложения дробного интегродифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям носят теоретический характер. Читателю, интересующемуся прикладными аспектами дробного исчисления, назовем указанную выше книгу (K. B. Oldham, J. Spanier [1]), содержащую главу «Приложения к задачам диффузии», работу [2], 1978 г., тех же авторов, в которой имеется большой список литературы по приложениям к химической физике, гидрологии, случайным процессам, вязкоупругости, теории гравитации

---

* Например, в § 4, п. 1°, содержащем исторические сведения к главе 1, имеются подпункты «К § 2, пп. 1, 2°», ..., «К § 3, п. 2°», а в § 4, п. 2°, содержащем обзор других результатов по тематике главы 1, — подпункты 2.1—2.16 и 3.1—3.3. При ссылках на первые из этих подпунктов используются обозначения типа «см. § 4, п. 1° (к § 2, пп. 1, 2°)», а при ссылках на вторые — «см. § 4, п. 2°, 2.1».

и т. п., сборник «Инверсия Абеля и ее обобщения» (Новосибирск, 1978 г.), в частности вводную статью Н. Г. Преображенского [1] в этом сборнике и уже упомянутые в начале предисловия труды конференции в Нью-Хейвене. Можно отметить также книги А. И. Цейтлина [1], 1984 г. (см., в частности, с. 275—276); Ю. И. Бабенко [1], 1986 г.; статьи Я. В. Быкова, А. И. Боташева [1], 1965 г.; В. П. Федосова [1], 1978 г.; W. C. Brenke [1], 1922 г.; R. Rothe [1], 1931 г.; M. I. Gomes, D. D. Pestana [1], 1978 г.; M. Zâgânescu [1, 2], 1982 г.; R. C. Koeller [1], 1986 г., и др.

Заметим, наконец, что в книге применяется термин «дробное» интегродифференцирование. Иногда его употребление вызывает возражения, поскольку порядок «дробного» интегродифференцирования является произвольным числом, а не только дробным. Однако авторы не считают целесообразным менять этот исторически сложившийся термин.

Авторы надеются, что им удалось не только изложить различные подходы к дробному интегродифференцированию, но и дать читателю представление о взаимосвязях между ними или решить во многих случаях вопрос о полном совпадении некоторых из этих подходов, включая совпадение их областей определения.

В книге § 2, 4—6, 7 (п. 1°), 8, 9, 12—14, 17, 18 (пп. 2—6°), 19, 20, 22—27, 28 (пп. 1—3°), 29—31, а также «Краткий исторический очерк» написаны С. Г. Самко, § 15, 16, 21, 28 (п. 4°), 32, 33 — А. А. Килбасом, § 7 (пп. 2, 3°), 10, 35—38, 40—42 — О. И. Маричевым, § 3, 11, 34— С. Г. Самко и А. А. Килбасом, § 18 (п. 1°), 39, 43 — А. А. Килбасом и О. И. Маричевым, § 1 — С. Г. Самко, А. А. Килбасом и О. И. Маричевым.

При подготовке книги авторам большую и квалифицированную помощь оказал Б. С. Рубин, вычитавший значительную часть рукописи и внесший ряд ценных предложений. Такую же работу по некоторым разделам выполнил Ву Ким Туан. При написании § 38 использовались материалы, подготовленные Н. А. Вирченко, § 36 — Ву Ким Туаном, § 37 (пп. 5, 6°) — С. Б. Якубовичем, § 42 — В. С. Адамчиком и А. В. Диденко. При подготовке рукописи большую работу проделали также В. А. Ногин и Б. Г. Вакулов. Полезную информацию и помощь авторам в отыскании ряда редких работ предоставили Х. -Ю. Глеске (H. -J. Glaeske, ГДР), И. Димовски (I. H. Dimovski, НРБ), Б. Макенхоупт, Р. Виден, Р. Джонсон, Б. Росс, Р. Бушман (B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, R. Johnson, B. Ross, R. G. Buschman, США), К. Нишимото, Ш. Оува, М. Сайго (K. Nishimoto, S. Owa, M. Saigo, Япония), К. Колбиг (K. S. Kölbig, Швейцария), Б. Фишер, А. МакБрайд (B. Fisher, A. C. McBride, Англия), С. Калла (S. L. Kalla, Венесуэла), Э. Лав (E. R. Love, Австралия), М. Миколаш (M. Mikolàs, Венгрия). Всем им авторы выражают свою признательность.

Краткий исторический очерк

Мысль об обобщении понятия дифференцирования $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ на нецелые значения p возникала с самого зарождения дифференциального исчисления. Первая зафиксированная историей попытка обсуждения такой идеи содержится в переписке Г. Лейбница. В одном из писем Г. Лейбницу по поводу теоремы о дифференцировании произведения двух функций Я. Бернулли спрашивал о значении, которое может иметь эта теорема в случае нецелого порядка дифференцирования. Г. Лейбниц в письмах Г. Лопиталю (1695 г.) и Уоллису (1697 г.), см. G. W. Leibniz [1, с. 301—302; 2, с. 25], сделал несколько замечаний о возможности рассматривать дифференциалы и производные порядка 1/2.

Первый шаг был сделан Л. Эйлером [1, с. 56], 1738 г., заметившим, что результату вычисления производной $\frac{d^p x^a}{dx^p}$ от степенной функции можно придать смысл при нецелом p. П. Лаплас (P. S. Laplace [1, с. 85, 156], 1812 г.) высказал идею о возможности дифференцирования нецелого порядка функций, представимых интегралом $\int T(t)t^{-x}dt$. В трактате С. Лякруа (S. F. Lacroix [1, с. 409—410], 1820 г.) повторена мысль Л. Эйлера и уже приведена явная формула вычисления производной $\frac{d^{1/2} x^a}{dx^{1/2}}$ от степенной функции.

Следующий шаг сделан Ж. Фурье (J. Fourier [1], 1822 г.), который предложил использовать равенство

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(tx - t\lambda + p\pi/2)\, dt \qquad (1)$$

для определения производной нецелого порядка. Это было первое определение производной любого положительного порядка и от любой (достаточно «хорошей») функции.

Описанные эпизоды можно отнести к предыстории дробного интегродифференцирования. Собственно историю дробного исчисления следует вести с работ Н. Абеля и Ж. Лиувилля. В работах Н. Абеля (N. H. Abel [1], 1823 г.; [2], 1826 г.) в связи с задачей о таутохроне решено интегральное уравнение

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \mu < 1. \qquad (2)$$

В обеих работах решение дано для произвольного $\mu \in (0, 1)$, хотя задача о таутохроне приводит к

случаю $\mu=1/2$. Мы подчеркиваем это обстоятельство из-за широко распространенного заблуждения, что сам Н. Абель решил уравнение (2) только при $\mu=1/2$. Хотя работы Н. Абеля и не были выполнены в русле идей обобщения понятия дифференцирования, они сыграли огромную роль в их развитии. Это связано с тем, что левая часть уравнения Н. Абеля представляет собой, как выяснится позже, операцию дробного интегрирования порядка $1-\mu$, а обращение этого уравнения — операцию дробного дифференцирования. Однако в такой форме понятия дробного интегродифференцирования сформировались позже.

В 1832—1837 гг. появляется серия работ Ж. Лиувилля (J. Liouville [1—8]), сделавших его по праву создателем уже достаточно полноценной теории дробного интегродифференцирования. Она еще не достигла той формы, которую ей придало дальнейшее развитие другими исследователями, но в ней уже высказаны и далеко продвинуты важные идеи. Исходное определение Ж. Лиувилля, предложенное им в работе [1], 1832 г., основано на формуле дифференцирования показательной функции и относится к функциям $f(x)$, представимым в виде ряда $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$. Для них, по определению Ж. Лиувилля,

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x} \tag{3}$$

при любом (комплексном) p. Ограничительность этого определения, очевидно, связана со сходимостью ряда. Исходя из определения (3), Ж. Лиувилль получает в работе [1, с. 7] формулу дифференцирования степенной функции. Более того, в этой же работе на с. 8 Ж. Лиувилль выводит (не совсем строго с современной точки зрения) формулу

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} \varphi(x+t)\, t^{p-1} dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{4}$$

называемую теперь (без множителя $(-1)^p$) лиувиллевской формой дробного интегрирования. В работе [1] на с. 11—69 содержится также большое число приложений к задачам геометрии, физики, механики и др., о чем уже упоминалось в предисловии к книге.

В дальнейших работах Ж. Лиувилля (J. Liouville [2—8]) дается развитие и применение введенных понятий. Среди полученных там результатов особо следует отметить содержащуюся в [2, с. 106], 1832 г., идею определения дробной производной через предел разностного отношения $\Delta_h^p f/h^p$, где $\Delta_h^p f$ — разность дробного порядка. Однако эта идея не находит у Ж. Лиувилля развития, если не считать эпизода в работе J. Liouville [6, с. 224], 1835 г., где на основе такого подхода доказана формула Фурье (1) при нецелых p и вычислены дробные производные некоторых элементарных функций (она будет реализована в последующем в работах А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1], 1867 г.) и А. В. Летникова [1], 1868 г.). В работах Ж. Лиувилля (J. Liouville [3], 1832 г.; [8], 1837 г.) впервые содержится применение дробного интегродифференцирования к решению некоторых типов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В другой работе (J. Liouville [7], 1835 г.) Ж. Лиувилль рассматривает замену переменной в дробных интегралах и производных. Здесь в зародыше содержится идея дробного интегродифференцирования одной функции по другой функции — понятие, отчетливо сформировавшееся через 30 лет в работе Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1], 1865 г.).

Рядом с работами Ж. Лиувилля по значимости следует поставить работы Б. Римана [1] (см. также B. Riemann [1]) и Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1]). Работа Б. Римана, выполненная им в 1847 г. в студенческие годы, была опубликована только в 1876 г.— спустя 10 лет после его смерти. Б. Риман пришел к конструкции дробного интегрирования

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x>0, \tag{5}$$

служащей с тех пор наряду с конструкцией (4) Ж. Лиувилля одной из основных форм дробного интегрирования. (Нужно сказать, что и Ж. Лиувилль, и Б. Риман имели дело с так называемыми «дополнительными» функциями, возникающими при попытке трактовать дробное дифференцирование порядка α как дробное интегрирование порядка $-\alpha$, см. по этому поводу также исторические сведения в § 4, п. 1°, и § 5, п. 2°.)

Особо следует сказать о работе Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 г.). В ней до публикации статьи Б. Римана выражение (5) было использовано как исходное определение дробного интегрирования. На этой основе проведено обстоятельное исследование интегралов (5) и даны их приложения к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Заслуга Х. Хольмгрена и в том, что он первым отказался от «дополнительных» функций и впервые сознательно предложил рассматривать дробное дифференцирование как операцию, обратную дробному интегрированию. Несколько позже А. В. Летников [1—4], 1868—1874 гг., не знакомый с работой Х. Хольмгрена, изложил теорию дробного интегродифференцирования с таких же позиций. Работа Х. Хольмгрена оставалась мало известной и современникам, и последующим поколениям математиков, а потому была незаслуженно мало цитируемой. Между тем Х. Хольмгрен первый после несколько формальных рассуждений Ж. Лиувилля дал строгий вывод формулы Г. Лейбница для дробной производной $D^{\alpha}(uv)$ произведения двух функций. Им впервые введено понятие дробного интегрирования одной функции по другой функции и проведено обстоятельное исследование композиций вида

$$D^{\lambda_1}_{\theta_1(x)} f_1(x)\, D^{\lambda_2}_{\theta_2(x)} \cdots D^{\lambda_n}_{\theta_n(x)} f_n(x)\, u(x), \tag{6}$$

где $f_j(x)$ означает операцию умножения на функцию $f_j(x)$. Более того, он первый рассмотрел частные и смешанные дробные интегралы функций двух переменных. Им же ([2], 1867 г.) продвинуто применение дробных интегралов к обыкновенным дифференциальным уравнениям, начатое Ж. Лиувиллем (J. Liouville [3], 1832 г.).

В 1867 г. А. Грюнвальд (A. K. Grünwald [1]) и в 1868 г. А. В. Летников [1] развивают подход к дробному интегродифференцированию, основанный на распространении формулы Б. Римана $f^{(n)}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\Delta^n_h f)(x)}{h^n}$ на случай нецелых n:

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta^{\alpha}_h f)(x)}{h^{\alpha}}\,. \tag{7}$$

Если у первого автора рассуждения еще формальны, то работа второго содержит строгое и обстоятельное построение теории дробного интегродифференцирования на таком исходном определении. А. В. Летников, в частности, показал, что так определенное выражение $D^{-\alpha} f$ совпадает при $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ с конструкцией Ж. Лиувилля (4), а при надлежащем толковании разности $(\Delta^{\alpha}_h f)(x)$ — с конструкцией Б. Римана (5). (См. § 20 книги, где излагается подход Грюнвальда—Летникова и дается сопоставление его с другими определениями дробного интегродифференцирования.) Им же доказано полугрупповое свойство в рамках определения (7).

Работа А. В. Летникова [2], 1868 г., была первой работой, содержащей обстоятельный исторический обзор развития дробного исчисления.

В большой работе А. В. Летникова [4], 1874 г., завершенная теория дробного интегродифференцирования построена уже на основе конструкций (4), (5). Дано развернутое и обстоятельное изложение применения дробного интегродифференцирования к решению дифференциальных уравнений. Восходящее к этой работе А. В. Летникова решение некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений см. далее в § 42, п. 5°.

Между публикациями Ж. Лиувилля и Б. Римана, Х. Хольмгрена, А. Грюнвальда, А. В. Летникова вышло из печати немало других работ. Одни из них содержали полемику с предшественниками, другие, хотя и не носили фундаментального значения, развивали или уточняли отдельные вопросы. Упомянем, например, работы G. Peacock [1], 1833 г., S. S. Greatheed [1, 2], 1839г., P. Kelland [1—3], 1840—1851 гг., R. W. Center [1—4], 1848—1849 гг., P. Tardy [1], 1858 г., и М. Е. Ващенко-Захарченко [1], 1861 г.

Следующий период в истории дробного исчисления связан с формулой Коши

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{p+1}} \tag{8}$$

для аналитических функций в комплексной плоскости. Непосредственное распространение этой формулы на нецелые p приводит к затруднениям, вызванным ветвлением функции $(t-z)^{-p-1}$, и потому зависит, вообще говоря, от расположения кривой $\mathscr{L}$, охватывающей точку z, и разреза C, определяющего ветвь функции $(t-z)^{-p-1}$. Такое распространение впервые было сделано Н. Я. Сониным [1, 2], 1872 г., показавшим, что в случае аналитических функций этот новый подход совпадает при $\operatorname{Re}p<0$ с подходом Б. Римана (5):

$$f^{(p)}(z)=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1+p}}, \tag{9}$$

где интегрирование ведется по отрезку $[z_0, z]$ в комплексной плоскости, z_0 — точка пересечения кривой $\mathscr{L}$ с разрезом C. А. В. Летников [3], 1872 г., делает важное замечание о том, что при выборе окружности в качестве кривой $\mathscr{L}$ формула Коши—Сонина (8) принимает вид

$$f^{(p)}(z)=\frac{\Gamma(1+p)}{2\pi r^{p}}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-ip\theta}f(z+re^{i\theta})\,d\theta,\quad r=|z-z_0| \tag{10}$$

(о последующих работах, связанных с подходом (8), см. в § 23, п.1° (к § 22)).

Отметим также, что в работе [2] Н. Я. Сонин продолжил исследование формулы Г. Лейбница для дробной производной $D^{\alpha}(uv)$, начатое Ж. Лиувиллем и Х. Хольмгреном.

Подчеркнем приоритет А. В. Летникова и Н. Я. Сонина в перечисленных выше вопросах, где заслуга часто приписывалась другим математикам. Насколько известно авторам данной книги, приоритет Н. Я. Сонина в распространении формулы Коши (8) на нецелые p отмечается вообще впервые. Отметим, что П. А. Некрасов [1—4], 1888—1891 гг., дал приложения дробного интегродифференцирования в форме (8) к интегрированию дифференциальных уравнений высокого порядка. Он впервые указал также формулы приведения некоторых многократных интегралов к двойным, основанные на вычислении композиций вида (6), через которые выражаются решения исследованных им дифференциальных уравнений.

Н. Я. Сонин наряду с разработкой различных форм дробного интегродифференцирования положил начало исследованию более общих, чем дробные интегралы, конструкций и их применению к интегральным уравнениям со специальными функциями в ядрах. В работах [4, 5], 1884 г., он получил решение интегрального уравнения типа Абеля

$$\int\limits_{a}^{x}\mathrm{k}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x),\quad x>a,$$

с произвольным, не обязательно степенным, ядром $\mathrm{k}(x)$ и нашел, в частности, решение часто встречающегося в приложениях уравнения с функцией Бесселя в ядре, переоткрытое много лет спустя, см. об этом в § 4, п.2°, 2.4, и в § 39, п.1° (к § 37 пп.1, 2°), § 39, п. 2°, 37.3.

Накануне XX в. выходит содержательная работа Ж. Адамара (J. Hadamard [1], 1892 г.). Идея дробного дифференцирования аналитической функции через почленное дифференцирование ее ряда Тейлора:

$$D^{\alpha}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}c_k(z-z_0)^{k-\alpha},\quad c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \tag{11}$$

хотя и известная до Ж. Адамара, используется в этой работе как эффективно работающий математический аппарат, осознанный как дробное дифференцирование аналитической в круге функции по радиусу. С тех пор подход (11) принято называть под-

ходом Адамара. В этой же работе, по-видимому, впервые появляется конструкция дробного интегрирования (9) в форме

$$I^{\alpha}f(z)=\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{\alpha-1}f(z\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

удобная тем, что выбор однозначной ветви в (12) связан только с фиксированной точкой $z=0$ (в (9) точка ветвления $t=z$ переменна), и пригодная для произвольных функций, заданных и интегрируемых в звездообразной области. Конструкция (12) натолкнула Ж. Адамара рассматривать обобщенные дробные интегралы вида

$$\int_0^1 v(\xi)f(z\xi)\,d\xi. \tag{13}$$

Однако такая идея Ж. Адамаром далее не развивалась, хотя он и рассмотрел случай $v(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-\ln\xi)^{\alpha-1}$; этот случай подробно исследован нами в § 18, п. 3°. Спустя много лет содержательная теория обобщенного дробного интегрирования типа (13) создается в работах М. М. Джрбашяна [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

В 1915 г. Г. Харди, М. Рисс (G. H. Hardy, M. Riesz [1]) используют дробное интегрирование при суммировании расходящихся рядов. Вошедшие с тех пор в математический обиход «нормальные средние» Рисса являются не чем иным, как дробным интегралом от частичной суммы ряда (см. об этом в § 14, п. 8°).

Развитие математического анализа и теории функций приводит к появлению новых форм дробного интегродифференцирования. Г. Вейль (H. Weyl [1], 1917 г.) определяет дробное интегрирование, приспособленное для периодических функций:

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(\pm ik)^{-\alpha}\varphi_k e^{ikx},\quad \varphi_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt,\quad \varphi_0=0, \tag{14}$$

которое реализуется в виде свертки

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{15}$$

с некоторой специальной функцией $\Psi_{\pm}^{\alpha}(x)$. Он показал, что дробный интеграл (14), (15) можно записать в виде

$$I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\qquad I_{-}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \tag{16}$$

при условии, что интегралы (16) по бесконечному промежутку от периодической функции понимаются как условно сходящиеся. Ввиду этого во многих последующих работах дробные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования, т. е. интегралы (16), стали называть интегралами Вейля даже в том случае, когда они рассматриваются как абсолютно сходящиеся. Это обстоятельство является историческим недоразумением. Дробное интегрирование по бесконечному промежутку введено Ж. Лиувиллем, см. (4). Г. Вейль же пришел от конструкции (14), (15) к дробному интегралу (16), специфически понимаемому на периодических функциях (см. его точное толкование в § 19, лемма 19.3).

Таким образом, дробные интегралы по бесконечному промежутку, рассматриваемые на произвольных (непериодических) функциях, не имеют отношения к идеям Г. Вейля. Поэтому, отдавая дань этим глубоким идеям и их воздействию на дальнейшее развитие дробного дифференцирования, мы все-таки считаем целесообразным конструкции (16) называть дробными интегралами Лиувилля, соответственно левосторонним и правосторонним.

В 1918 г. выходит из печати работа П. Монтеля (P. Montel [1]). Она содержит ряд важных моментов. Здесь впервые дан некоторый аналог неравенства С. Н. Бернштейна для дробных производных алгебраических многочленов на конечном отрезке.

Такое неравенство в комплексной плоскости установит позже В. Сьюелл (W. E. Sewell [1], 1935 г.; [2], 1937 г.), см. об этом § 23, п. 2°. П. Монтель получил также обобщение теоремы С.Н. Бернштейна о скорости приближения дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на случай дробной дифференцируемости. В его работе содержатся также в зародыше аналогичные утверждения для функций двух переменных.

В 1922—1923 гг. М. Рисс (M. Riesz [1]) доказывает теорему о среднем для дробных интегралов (см. § 14, теорема 14.10) и вытекающее из нее важное следствие о том, что если

$$|\varphi(x)| \leqslant v(x), \quad \left|\int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt\right| \leqslant w(x), \quad x > a,$$

где $v(x)$, $w(x)$ — монотонно возрастающие функции, то

$$\left|\int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\beta-1}dt\right| \leqslant c\,[v(x)]^{1-\beta/\alpha}\,[w(x)]^{\beta/\alpha}, \tag{17}$$

$$0 < \beta < \alpha$$

(свойство логарифмической выпуклости монотонной мажоранты дробного интеграла, см. (14.50)).

Особо следует сказать о работе А. Маршо (A. Marchaud [1], 1927 г.), в которой введена новая форма дробного дифференцирования:

$$(\mathbf{D}^\alpha f)(x) = c\int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \quad \alpha > 0, \tag{18}$$

где $(\Delta_t^l f)(x)$ — конечная разность порядка $l > \alpha$, $l = 1, 2, \ldots$, c — некоторая постоянная. Эта форма совпадает с лиувиллевской формой:

$$(\mathbf{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n-1}}, \quad n = [\alpha]+1, \tag{19}$$

на достаточно «хороших» функциях, но, что весьма существенно, конструкция (18) применима к функциям со значительно более «плохим» поведением на бесконечности. В частности, в (18) для $f(x)$ допускается рост на бесконечности (порядка меньше α), что невозможно в (19). Конструкции (18) принято называть дробными производными Маршо (отметим, что разностная форма (18) в случае $l=1$, $0<\alpha<1$ встречалась ранее у Г. Вейля (H. Weyl [1, с. 302], 1917 г.)).

Трудно переоценить результат Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.), доказавших теорему о том, что оператор дробного интегрирования порядка α, $0<\alpha<1$, непрерывно действует из пространства L_p в пространство L_q, где $1<p<1/\alpha$, $1/p+1/q=\alpha$. Это утверждение, легко устанавливаемое в случае $1/p+1/q<\alpha$ (на конечном отрезке), но трудно доказываемое при $1/p+1/q=\alpha$, известно под названием теоремы Харди—Литтлвуда с предельным показателем. Эта теорема была распространена теми же авторами [5], 1932 г., на пространства H_p аналитических в круге функций и С. Л. Соболевым [1], 1938 г., на многомерный случай. Такие теоремы с предельным показателем существенно повлияли на развитие не только дробного интегродифференцирования, но и вообще теории функций и функционального анализа.

Бурное развитие теории интеграла Лебега в начале века не могло не сказаться и на дробном исчислении. В 1928 г. Л. Тонелли (L. Tonelli [1]) обращает внимание на роль абсолютной непрерывности при отыскании интегрируемых по Лебегу решений уравнений Абеля (2). В окончательном виде эта роль выявлена Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.) в форме необходимых и достаточных условий разрешимости уравнения Абеля (см. теоремы 2.1 и 2.3 в § 2).

В 1930 г. далеко идущее обобщение упоминавшегося выше подхода Грюнвальда—Летникова через разности дробного порядка предложил Э. Пост (E. L. Post [2], 1930 г.).

В 1934 г. А. Зигмунд (A. Zygmund [1]) для дробных интегралов Вейля периоди-

ческих функций доказывает аналог теоремы Харди—Литтлвуда с предельным показателем для $p=1$, установив действие дробного интегрирования из $L_1(\log^+ L_1)^{1-\alpha}$ в L_1.

Через два года М. Рисс (M. Riesz [2, 3], 1936 г., см. также [4], 1938 г.; [6], 1949 г.) вводит дробное интегрирование функций многих переменных, построив операторы типа потенциала, широко известные с тех пор как потенциалы Рисса. Один из этих потенциалов является отрицательной дробной степенью $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, другой — такой же степенью гиперболического дифференциального оператора в частных производных (см. об этом в § 28). Последние оказались эффективным средством решения задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений (о важной роли первого см. в § 25).

В указанных работах М. Рисса (см. также M. Riesz [7], 1961 г.) находит конструктивную реализацию идея построения дробного интегродифференцирования с помощью аналитического продолжения по параметру α.

Оказавшаяся весьма полезной формула дробного интегрирования по частям

$$\int_a^b (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x)\, dx$$

(обозначения см. в § 2) установлена в работе E. R. Love, L. C. Young [1], 1938 г.

Б. Надь (B. S. Nagy [1], 1938 г.) в периодическом случае доказывает теорему типа С. Н. Бернштейна о скорости приближения дробных интегралов тригонометрическими многочленами, а для тригонометрических сумм $f(x) = \sum_{|k|\geqslant m} f_k e^{ikx}$ получает неравенство типа Ж. Фавара (J. Favard [1], 1937 г.)

$$\|I_{\pm}^{(\alpha)} f\|_{L_\infty} \leqslant \frac{c}{m^\alpha} \|f\|_{L_\infty}.$$

Т. Банг (T. Bang [1], 1941 г.) для тригонометрических сумм вида $f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x}$ доказывает подобное неравенство

$$\|I_{\pm}^{(\alpha)} f\|_{L_\infty} \leqslant c \Big(\min_{1\leqslant k\leqslant N} |\lambda_k|\Big)^{-\alpha} \|f\|_{L_\infty},$$

а также неравенство С. Н. Бернштейна

$$\|\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)}\|_{L_\infty} \leqslant \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \Big(\max_{1\leqslant k\leqslant N} |\lambda_k|\Big)^{\alpha} \|f\|_{L_\infty}.$$

Последнее в более общей ситуации, но с худшей постоянной независимо получил П. Сайвин (P. Civin [1], 1940 г.; [2], 1941 г.).

Как видно из перечисления этих важных результатов, дробное интегродифференцирование давно перестало быть «вещью в себе» и стало неотъемлемым содержанием теории функций и функционального анализа.

В 1940 г. появляются работы А. Эрдейи, Х. Кобера (A. Erdelyi [4]; A. Erdelyi, H. Kober [1]), в которых вводится модификация дробного интегродифференцирования

$$\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} \varphi(t)\, dt,$$

$$\frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{\alpha-1} t^{1-2\alpha-2\eta} \varphi(t)\, dt,$$

что оказалось очень полезным в приложениях к интегральным операторам, интегральным уравнениям и в других вопросах. Эти объекты и их обобщения получили название дробных интегралов Эрдейи—Кобера, см. § 18, п. 1°.

В указанных работах и в статье (H. Kober [1], 1940 г.) А. Эрдейи и Х. Кобер исследовали действие интегрального преобразования Меллина на дробные интегралы, положив начало еще одному подходу к дробному интегродифференцированию, основанному на соответствии между оператором (5) и умножением на $\Gamma(1-\alpha-s)/\Gamma(1-s)$ в образах Меллина. Впрочем, идея использования такого рода соответствия, но по отношению к преобразованию Фурье отмечалась еще Ж. Фурье (J. Fourier [1], 1822 г.), см. формулу (1). Она была развита значительно позже Х. Кобером (H. Kober [3], 1941 г.), впервые обосновавшим тот факт, что операторам дробного интегрирования $I_{\pm}^{\alpha}$ (16) соответствует умножение на $(\mp ix)^{-\alpha}$. Указанная идея по отношению к преобразованию Лапласа в конце XIX и начале XX в. послужила основой для создания операционного исчисления, в котором оператору дробного интегродифференцирования I_{0+}^{α} соответствует умножение на $p^{-\alpha}$ в образах Лапласа.

Х. Кобер (H. Kober [2], 1941 г.) вводит интегрирование чисто мнимого порядка и выясняет его действие в рамках пространства L_2.

В этом же году Ж. Коссар (J. Cossar [1], 1941 г.) вводит полезную модификацию дробного дифференцирования Лиувилля в виде

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{N\to\infty}\frac{d}{dx}\int_x^N (t-x)^{-\alpha}f(t)\,dt,$$

применимую подобно дробной производной Маршо к функциям с «не очень хорошим поведением» на бесконечности.

Здесь мы поставим точку, ограничившись историей вопроса в довоенный период. Мы указали главные, с нашей точки зрения, вехи в этой истории. Для перечисления даже самого краткого, важных результатов, полученных за 45 лет после 1941 г., потребовалось бы слишком много места. Поэтому мы предпочли отразить их в обзорно-исторических параграфах в связи с конкретным содержанием каждой из глав книги. Отдавая дань глубокого уважения исследователям этих лет, мы закончим наш исторический очерк, упомянув в добавление к перечисленным в этом очерке математикам имена тех, кто внес большой вклад в развитие теории дробного интегродифференцирования после 1941 г. Это С. Г. Гиндикин, М. М. Джрбашян, И. А. Киприянов, П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, И. И. Огиевецкий, А. Ф. Тиман среди советских математиков и П. Бутцер (P. L. Butzer), А. Эрдейи (A. Erdelyi), Э. Лав (E. R. Love), А. МакБрайд (A. C. McBride), М. Миколаш (M. Mikolàs), Т. Ослер (T. J. Osler), И. Снеддон (I. N. Sneddon), У. Вестфаль (U. Westphal) среди зарубежных математиков.

Введение

Предмет настоящей книги составляют операции дифференцирования D^α и интегрирования I^α произвольного порядка и некоторые их приложения в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Бóльшая часть теории таких операций относится к функциям одного переменного, а глава 5 посвящена различным формам дробного интегродифференцирования функций многих переменных. Изложение ведется в основном для функций вещественного переменного, но и функциям комплексного переменного уделено внимание (§ 22).

Учитывая интересы читателя, авторы на протяжении всей книги шли от частного к общему, начиная с более простых свойств и утверждений. Из этих соображений авторы часто целенаправленно освещали «модельные» ситуации, прежде чем рассмотреть вопрос в бóльшей общности. Во многих случаях, особенно в начальной части книги, предпочтение отдавалось более простым по форме и по доказательству утверждениям, информация же о более сложных ситуациях либо отодвигалась в последующие главы, либо выносилась в заключительные параграфы соответствующих глав.

Характерной чертой книги является освещение фактически всех известных форм дробного интегродифференцирования и их сравнение друг с другом. Во многих случаях прослежено не только совпадение различных форм друг с другом на тех или иных классах функций, но и совпадение их областей определения.

Другое отличительное свойство книги заключается в акценте, сделанном на вопросе о представимости функций $f(x)$ дробным интегралом $f=I^\alpha\varphi$, $\alpha>0$, от функции φ из некоторого заданного класса X. Этот вопрос исследуется во всех рассматриваемых в книге ситуациях: для функций одного и многих переменных, в периодическом и непериодическом случаях, на всей прямой (или во всем пространстве) и на конечном отрезке, для всех содержащихся в книге форм. В качестве X берется, как правило, пространство L_p, или L_p с весом, или гельдеровское пространство H^λ, или же H^λ с весом.

Изучаемая в книге представимость функции $f(x)$ дробным интегралом $f=I^\alpha\varphi$ порядка α—понятие более сильное, вообще говоря, чем существование у функции $f(x)$ дробной производной порядка α. Выявляются общие ситуации,

когда существование (в том или ином смысле) дробной производной $D^{\alpha}f$ у функции $f(x)$ равносильно представимости последней дробным интегралом. Тогда легко решается, в частности, вопрос, почему из существования той или иной конструкции $D^{\alpha}f$ дробной производной вытекает существование производной $D^{\beta}f$, $\beta<\alpha$, той же конструкции.

Наконец, еще одна отличительная особенность книги состоит в попытке авторов унифицировать обозначения всевозможных форм дробного интегродифференцирования. Без такой унификации невозможно обойтись в тексте, содержащем многие варианты дробных производных и интегралов. Читатель может сразу обратить внимание на наличие знаков $\pm$ в обозначениях и дробных интегралов, и дробных производных функций одного переменного. Эти знаки означают выбор левостороннего или правостороннего интегродифференцирования, связанного соответственно с левосторонним и правосторонним сдвигом $f(x\mp t)$. Рассмотрение обеих этих форм вызвано не столько стремлением к общности изложения, сколько существованием интересных связей между указанными формами и одновременной потребностью в них в приложениях, содержащихся в книге.

Обозначения основных форм дробных интегралов и производных

$I_+^\alpha \varphi$ — (левосторонний) дробный интеграл Лиувилля (5.2)

$I_-^\alpha \varphi$ — (правосторонний) дробный интеграл Лиувилля (5.3)

$I_{a+}^\alpha \varphi$ — (левосторонний) дробный интеграл Римана—Лиувилля (2.17)

$I_{b-}^\alpha \varphi$ — (правосторонний) дробный интеграл Римана—Лиувилля (2.18)

$I_{a+;g}^\alpha \varphi$, $I_{a+;x^\sigma}^\alpha \varphi$ — дробные интегралы от функции по другой функции (18.24), (18.38)—(18.41)

$I_{a+;\sigma,\eta}^\alpha \varphi$ — (левосторонний) оператор типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.2)

$I_{b-;\sigma,\eta}^\alpha \varphi$ — (правосторонний) оператор типа Эрдейи — Кобера (18.3), (18.4)

$I_{\eta,\alpha}^+ \varphi$, $K_{\eta,\alpha}^- \varphi$ — операторы Кобера (18.5), (18.6)

$I_{\eta,\alpha} \varphi$, $K_{\eta,\alpha} \varphi$ — операторы Эрдейи—Кобера (18.8)

$I^\alpha \varphi$ — потенциал Рисса (12.1), (25.1)

$I_\pm^{(\alpha)} \varphi$ — дробный интеграл Вейля периодических функций (19.5), (19.7)

$\mathfrak{I}_\pm^\alpha \varphi$ — дробное интегрирование Адамара (18.42)—(18.44)

$J_{a+}^\alpha \varphi$ — дробный интеграл Грюнвальда—Летникова (20.46)

$I_c^\alpha \varphi$ — дробный интеграл Чженя (18.80)

$I_{z_0}^\alpha \varphi$, $I_{\pm,\theta}^\alpha \varphi$ — дробные интегралы Римана — Лиувилля в комплексной плоскости (22.8), (22.17)—(22.20)

$G^\alpha \varphi$ — бесселево дробное интегрирование (18.61), (27.8)

$G_\pm^\alpha \varphi$ — его модификация (18.63)

$\mathcal{D}_\pm^\alpha f$ — дробные производные Лиувилля (5.6), (5.7)

$\mathcal{D}_{a+}^\alpha f$, $\mathcal{D}_{b-}^\alpha f$ — дробные производные Римана—Лиувилля (2.22), (2.23), (2.32), (2.33)

$\mathcal{D}_{a+;g}^\alpha f$ — дробная производная от функции по другой функции (18.29)

$\mathbf{D}_\pm^\alpha f$ — дробные производные Маршо (5.57), (5.58), (5.80)

$\mathbf{D}^\alpha f$ — риссова дробная производная (25.59)

$\mathbf{D}_{a+}^\alpha f$, $\mathbf{D}_{b-}^\alpha f$ — аналоги производной Маршо на отрезке (13.2), (13.5)

$\mathfrak{D}_\pm^\alpha f$ — дробные производные Адамара (18.56), (18.57)

$\mathcal{D}_\pm^{(\alpha)} f$ — дробные производные Вейля периодических функций (19.17)

$\mathbf{D}_\pm^{(\alpha)} f$ — дробные производные Вейля—Маршо периодических функций (19.18)

$f_\pm^{\alpha)}$ — дробные производные Грюнвальда—Летникова (20.7)

$\mathcal{D}_{z_0}^\alpha f$, $\mathcal{D}_{\pm,\theta}^\alpha f$ — дробные производные Римана—Лиувилля в комплексной плоскости (22.3), (22.21)

$\mathcal{D}_c^\alpha f$ — дробная производная Чженя (18.87)

$(E \pm \mathcal{D})^\alpha$, $(E \pm \mathbf{D})^\alpha$ — модификации бесселева дробного дифференцирования (18.71), (18.72)

ГЛАВА 1

Дробные интегралы и производные на отрезке вещественной оси

Настоящая глава имеет основополагающий характер. Исходя из решения интегрального уравнения Абеля, вводятся интегралы и производные дробного порядка, рассматриваемые еще Б. Риманом и Ж. Лиувиллем и поэтому называемые дробными интегралами и производными Римана — Лиувилля. Такие конструкции обобщают операции обычного интегрирования и дифференцирования и являются одними из основных форм одномерного дробного интегродифференцирования в данной книге.

Доказываются простейшие свойства дробных интегралов и производных Римана — Лиувилля. Важнейшими из них являются взаимная обратимость операторов дробного интегрирования и дифференцирования и полугрупповое свойство для них, справедливые на функциях из определенных классов. Эти свойства, как увидим далее, будут выполняться и для других типов одномерных и многомерных операторов дробного интегродифференцирования. Исследуется также действие операторов дробного интегрирования в пространствах Гельдера H^λ и в пространствах L_p, а также в подобных пространствах $H_0^\lambda(\rho)$, $L_p(\rho)$ с весом.

В начальном параграфе главы, носящем вспомогательный характер, приводятся различные понятия и утверждения некоторых разделов математического анализа, неоднократно используемые по всей книге.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь приводятся необходимые для дальнейшего понятия и утверждения из таких разделов анализа, как весовые пространства $H_0^\lambda(\rho)$ гельдеровских функций, весовые пространства $L_p(\rho)$ суммируемых функций, специальные функции и интегральные преобразования.

1°. Классы H^λ и $H^\lambda(\rho)$. Пусть $\Omega=[a, b]$, где $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, так что Ω может быть конечным отрезком, полуосью или всей осью. В случае оси и полуоси будем, как обычно, обозначать $R^1=(-\infty, \infty)$, $R_+^1=[0, \infty)$, а через $\dot{R}^1$ обозначим прямую, пополненную одной бесконечно удаленной точкой. Введем здесь необходимые в дальнейшем классы гельдеровских функций на конечном отрезке, на полуоси и оси, хотя в этой главе они будут использоваться только в случае конечного отрезка.

Пусть вначале Ω — конечный отрезок. Говорят, что функция $f(x)$, заданная на Ω, удовлетворяет на Ω *условию Гельдера (порядка* λ), если

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A|x_1 - x_2|^{\lambda} \tag{1.1}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$, где A — постоянная, а λ — показатель Гельдера. Очевидно, функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Гельдера, непрерывна на Ω.

Определение 1.1. *Через* $H^{\lambda} = H^{\lambda}(\Omega)$, *где* Ω*—отрезок, обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на* Ω *условию Гельдера фиксированного порядка* λ.

Нетрудно видеть, что при таком определении интересен лишь случай $0 < \lambda \leqslant 1$, так как при $\lambda > 1$ класс H^{λ} содержит только постоянные $f(x) \equiv \equiv \text{const}$ (из (1.1) следует, что $f'(x) \equiv 0$ при $\lambda > 1$). В связи с этим (см. далее определение 1.6) будем полагать $H^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Нам понадобится также класс

$$h^{\lambda} = h^{\lambda}(\Omega) \tag{1.2}$$

функций, удовлетворяющих более сильному, чем (1.1), условию:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2 - x_1|^{\lambda}} \to 0 \quad \text{при } x_2 \to x_1 \tag{1.3}$$

для всех $x_1 \in \Omega$. Очевидно, что $h^{\lambda} \subset H^{\lambda}$.

Класс $H^1(\Omega)$ называют часто липшицевым классом. Приведем еще определение несколько более широкого, чем $H^1(\Omega)$, класса $AC(\Omega)$ абсолютно непрерывных функций.

Определение 1.2. *Функция* $f(x)$ *называется абсолютно непрерывной на отрезке* Ω, *если по любому* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\delta > 0$, *что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков* $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *такой, что* $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, *справедливо неравенство* $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. *Класс всех таких функций обозначается* $AC(\Omega)$.

Известно (см., например, книгу А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1, с. 338] или С. М. Никольского [6, с. 368—369]), что класс $AC(\Omega)$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций:

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad \int_a^b |\varphi(t)|\,dt < \infty. \tag{1.4}$$

Поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $f'(x)$ (обратно, из существования почти всюду суммируемой производной еще не вытекает абсолютная непрерывность; это обстоятельство скажется и в теории дробного интегродифференцирования, см. об этом в § 2, п. 6°).

Очевидно, что $H^1(\Omega) \subset AC(\Omega)$; обратное вложение неверно. Так, например, $f(x) = (x-a)^{\alpha} \in AC(\Omega)$, но $(x-a)^{\alpha} \notin H^1(\Omega)$ при $0 < \alpha < 1$, так как в точке $x = a$ условие (1.1) с $\lambda = 1$ не выполняется.

Определение 1.3. *Через* $AC^n(\Omega)$, *где* $n = 1, 2, \ldots$, *и* Ω *— отрезок, обозначим класс функций* $f(x)$, *непрерывно дифференцируемых на* Ω *до порядка* $n-1$, *причем* $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$.

Очевидно, $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$ и класс $AC^n(\Omega)$ состоит, подобно (1.4), из функций, представимых n-кратным интегралом Лебега с переменным верхним пределом от суммируемой функции с заменой постоянной в (1.4) на многочлен порядка $n-1$ (см. лемму 2.4 в § 2).

Позже, в § 6, п. 3°, будет указана модификация класса $AC(\Omega)$ применительно к случаю, когда Ω — ось.

Пусть теперь Ω — ось или полуось. В этом случае при определении класса $H^\lambda(\Omega)$ дополнительно оговаривается «гельдеровское» поведение на бесконечности. Именно говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности бесконечно удаленной точки, если

$$\left|f\left(\frac{1}{x_1}\right)-f\left(\frac{1}{x_2}\right)\right|\leqslant A\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|^\lambda \tag{1.5}$$

для всех x_1, x_2, достаточно больших по абсолютной величине.

Определение 1.1′. *Пусть Ω—ось или полуось. Через $H^\lambda=H^\lambda(\Omega)$ обозначается класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера (1.1) на любом конечном отрезке в Ω и условию (1.5) в окрестности бесконечно удаленной точки.*

Заметим, что совокупность двух условий (1.1) и (1.5), определяющих класс $H^\lambda(\Omega)$ для бесконечного интервала Ω, равносильна одному условию

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A\,\frac{|x_1-x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda} \tag{1.6}$$

(«глобальное» условие Гельдера). В этой равносильности можно убедиться непосредственной проверкой.

Справедлива следующая лемма, утверждающая, что «склейка» двух гельдеровских функций является также гельдеровской функцией.

Лемма 1.1. *Пусть $\Omega_1=[a, c]$, $\Omega_2=[c, b]$, $-\infty\leqslant a<c<b\leqslant\infty$, и $\Omega=[a, b]$. Если $f(x)\in H^\lambda(\Omega_1)$, $f(x)\in H^\lambda(\Omega_2)$ и $f(c-0)=f(c+0)$, то $f(x)\in H^\lambda(\Omega)$.*

Доказательство леммы 1.1 можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили [1, с. 21].

Нам понадобятся также следующие весовые классы Гельдера.

Определение 1.4. *Пусть $\rho(x)$—неотрицательная функция. Через $H^\lambda(\rho)=H^\lambda(\Omega;\ \rho)$ будем обозначать класс функций $f(x)$, таких, что $\rho(x)f(x)\in H^\lambda(\Omega)$.*

Всюду в дальнейшем весовая функция $\rho(x)$ будет степенной и «привязанной» к конечному числу точек:

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}, \tag{1.7}$$

где μ_k — действительные числа, а $x_k\in\Omega$. Наиболее распространенным будет случай

$$\rho(x)=(x-a)^\alpha(b-x)^\beta,\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.8}$$

Если Ω содержит бесконечно удаленную точку, то вес (1.7) целесообразно брать в виде

$$\rho(x)=(1+x^2)^{\mu/2}\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}, \tag{1.9}$$

т. е. «привязывать» его к точке $x=\infty$. При рассмотрении веса (1.9) будем использовать обозначение

$$\mu_0=-\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k \tag{1.10}$$

(показатель веса на бесконечности). По определению класса $H^\lambda(\rho)$ функции этого класса представимы в виде

$$f(x)=\frac{f_0(x)}{\rho(x)},\quad f_0(x)\in H^\lambda. \tag{1.11}$$

Нам понадобится еще один подкласс в $H^\lambda(\rho)$.

Определение 1.5. *Пусть* $\rho(x)$ — *вес (1.7) или (1.9). Через* $H_0^\lambda(\rho) = H_0^\lambda(\Omega;\ \rho)$ *будем обозначать множество всех тех функций из* $H^\lambda(\rho)$, *для которых* $f_0(x_k) = 0$ *и* $f_0(\infty) = 0$ (*в случае, если* Ω *содержит бесконечно удаленную точку) в представлении (1.11). Через* H_0^λ *обозначим класс функций из* H^λ, *обращающихся в нуль при* $x = a$, $x = b$.

Заметим, что мы будем часто писать H^λ, $H^\lambda(\rho)$, $H_0^\lambda(\rho)$ вместо $H^\lambda(\Omega)$, $H^\lambda(\Omega;\ \rho)$, $H_0^\lambda(\Omega;\ \rho)$ в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

Будем пользоваться также весовым классом

$$h_0^\lambda(\rho) = \{f(x) : \rho(x) f(x) \in h^\lambda,\ \rho(x) f(x)|_{x=a} = \rho(x) b(x)|_{x=b} = 0\}, \quad (1.12)$$

где h^λ — класс (1.2), (1.3), а $\rho(x)$ — вес (1.8).

Введенные классы являются линейными пространствами. В них можно естественным образом определить норму. Так, в случае, когда Ω — отрезок, полагают

$$\|f\|_{H^\lambda} = \max_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x_1, x_2\in\Omega \\ x_1\neq x_2}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}. \quad (1.13)$$

Заметим, что второе слагаемое в (1.13) есть инфинум всех возможных значений постоянной A в (1.1). Пространство H^λ полно относительно нормы (1.13), т. е. является банаховым пространством; доказательство этого можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили [1, с. 173]. В случае, когда Ω — ось или полуось, норму вводят на основании (1.6) равенством

$$\|f\|_{H^\lambda} = \max_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x_1, x_2\in\Omega \\ x_1\neq x_2}} (1 + |x_1|)^\lambda (1 + |x_2|)^\lambda \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}. \quad (1.14)$$

Можно убедиться в полноте $H^\lambda(\Omega)$ относительно нормы (1.14), например, отображая ось (полуось) дробно-линейным преобразованием на окружность (полуокружность) и пользуясь полнотой пространства H^λ на произвольной ограниченной кривой (см. книгу Н. И. Мусхелишвили [1, с. 173]). Известно также, что класс (1.2) есть замкнутое подпространство в H^λ, см., например, книгу С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [1, с. 269].

В весовом случае норма вводится на основании представления (1.11) равенством

$$\|f\|_{H^\lambda(\rho)} = \|f_0\|_{H^\lambda}, \quad (1.15)$$

при этом полнота $H^\lambda(\rho)$ относительно этой нормы очевидна в силу изометрии (1.15) между пространствами $H^\lambda(\rho)$ и H^λ.

Отметим следующее полезное свойство: если $f(x) \in H^\lambda([a, b])$ и $0 < \alpha < \lambda$, то

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{|x - c|^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]),\ a \leqslant c \leqslant b;\ \|g\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leqslant k \|f\|_{H^\lambda}, \quad (1.16)$$

где k не зависит от $f(x)$ (доказательство см., например, в книге Н. И. Мусхелишвили [1, с. 22]).

Пусть $L_1(\Omega)$ — класс функций, интегрируемых по Лебегу на Ω. В случае, когда Ω — конечный отрезок и $\rho(x)$ — вес (1.7), справедливы вложения

$$C^1(\Omega) \subset H_0^\lambda(\Omega;\ \rho) \subset L_1(\Omega) \quad (1.17)$$

вместе с неравенствами для норм

$$\kappa_1 \|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{H_0^{\lambda}(\rho)} \leqslant \kappa_2 \|f\|_{C^1} \tag{1.18}$$

при условии, что $\lambda \leqslant \mu_k < \lambda + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (определение $\|f\|_{L_1}$ см. в (1.26) при $p = 1$). Здесь и ниже $C^m(\Omega)$ означает класс функций, m раз непрерывно дифференцируемых на Ω с нормой

$$\|f\|_{C^m} = \max_{x \in \Omega} \sum_{k=1}^{m} |f^{(k)}(x)|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_C. \tag{1.19}$$

Через $C_0^{\infty} = C_0^{\infty}(R^1)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых финитных функций на R^1.

Распространением класса $H^{\lambda}(\Omega)$ на значения $\lambda > 1$ служит класс, вводимый следующим образом.

Определение 1.6. *Пусть* $\lambda = m + \sigma$, *где* $m = 0, 1, 2, \ldots$, *а* $0 < \sigma \leqslant 1$. *Говорят, что* $f(x) \in H^{\lambda}(\Omega)$, *если* $f(x) \in C^m(\Omega)$ *и* $f^{(m)}(x) \in H^{\sigma}(\Omega)$; *при этом*

$$\|f\|_{H^{\lambda}} = \|f\|_{C^m} + \|f^{(m)}\|_{H^{\sigma}}. \tag{1.20}$$

Очень часто при целых значениях λ приходится иметь дело с несколько более широким классом функций, когда условие Гельдера (Липшица) содержит логарифмический множитель (см., например, теоремы 3.1, 3.2 в § 3). Дадим в связи с этим следующее

Определение 1.7. *Пусть* $\lambda = m + \sigma$, *где* $m = 0, 1, 2, \ldots$, и $0 < \sigma \leqslant 1$ *Будем говорить, что* $f(x) \in H^{\lambda, k} = H^{\lambda, k}(\Omega)$, $k \in R_+^1$, *если* $f(x) \in C^m(\Omega)$ *и*

$$|f^{(m)}(x + h) - f^{(m)}(x)| \leqslant A |h|^{\sigma} \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)^k, \quad |h| < \frac{1}{2}, \tag{1.2)1}$$

при этом

$$\|f\|_{H^{\lambda, k}} = \|f\|_{C^m} + \sup_{\substack{x, x+h \in \Omega \\ |h| < 1/2}} \frac{|f^{(m)}(x + h) - f^{(m)}(x)|}{|h|^{\sigma} \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)^k}. \tag{1.22}$$

Аналогично (1.2) введем класс $h^{\lambda, k} = h^{\lambda, k}(\Omega)$ функций, удовлетворяющих более сильному, чем (1.21), условию:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(m)}(x + h) - f^{(m)}(x)}{|h|^{\sigma} \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)^k} = 0, \quad x, x + h \in \Omega, \quad 0 < |h| < \frac{1}{2}, \tag{1.23}$$

а также аналогичные определению 1.5, (1.11) и (1.12) весовые классы функций $H_0^{\lambda, k}(\rho)$, $H^{\lambda, k}(\rho)$ и $h_0^{\lambda, k}(\rho)$.

Замечание 1.1. Хотя гельдеровские классы очень удобно использовать в самых разных вопросах (и они широко применяются в данной книге), у них один существенный недостаток: они не сепарабельны. В H^{λ} и в $H^{\lambda}(\rho)$ не существует «хороших» плотных подмножеств: функцию $f(x) \in H^{\lambda}$ нельзя приблизить по норме пространства H^{λ} более «хорошими» функциями, так как замыкание «хороших» функций по норме H^{λ} дает h^{λ}, а не H^{λ}, см., например, книгу С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [1, с. 269]. Всюду в нашем изложении это «отрицательное» свойство пространства H^{λ} не будет нигде проявляться. Однако его следует иметь в виду, если попытаться строить приближенные методы решения изучаемых в главах 6, 7 уравнений (в тех случаях, когда они рассматриваются в H^{λ} или $H^{\lambda}(\rho)$).

Ниже, в § 14 будут рассмотрены интегральные гельдеровские классы H_p^{λ} (близость значений $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будет оцениваться не в равномерной метрике, как в (1.1), а в интегральной метрике).

2°. Классы L_p и $L_p(\rho)$. Будем предполагать знакомство читателя с измеримостью функций по Лебегу и с интегралом Лебега. Пусть по-прежнему $\Omega=[a, b]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Через $L_p=L_p(\Omega)$ обозначается множество всех измеримых на Ω функций $f(x)$, вообще говоря комплекснозначных, для которых $\int\limits_{\Omega}|f(x)|^p\,dx<\infty$, где $1\leqslant p<\infty$. Положим

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}=\left\{\int\limits_{\Omega}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}. \tag{1.24}$$

Для $p=\infty$ пространство $L_p(\Omega)$ вводится как совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|, \tag{1.25}$$

где $\operatorname{ess\,sup}|f(x)|$ — существенный супремум функции $|f(x)|$, см. об этом подробнее в книге С. М. Никольского [4, с. 12—13].

Всюду в дальнейшем $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Как обычно, две эквивалентные, т. е. отличающиеся на множестве меры нуль, функции считаются равными одному элементу пространства $L_p(\Omega)$ (не различаются как элементы этого пространства).

Для норм (1.24), (1.25) будем использовать также обозначения

$$\|f\|_p=\|f\|_{L_p}=\|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.26}$$

Приведем некоторые свойства пространств L_p:

а) *неравенство Минковского*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)}\leqslant\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|g\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1.27}$$

с учетом которого $L_p(\Omega)$ является нормированным пространством. Известно также, что $L_p(\Omega)$ — полное пространство;

б) *неравенство Гельдера*

$$\int\limits_{\Omega}|f(x)\,g(x)|\,dx\leqslant\|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_{p'}(\Omega)},\quad p'=p/(p-1), \tag{1.28}$$

где $f(x)\in L_p(\Omega)$, $g(x)\in L_{p'}(\Omega)$. Показатель p', связанный с p равенством

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{1.29}$$

называется сопряженным с p. Заметим, что (1.28) справедливо при $1\leqslant p\leqslant\infty$ ($p'=\infty$, если $p=1$, и $p'=1$, если $p=\infty$).

Из (1.28) следует обобщенное неравенство Гельдера

$$\int\limits_{\Omega}|f_1(x)\ldots f_m(x)|\,dx\leqslant\|f_1\|_{L_{p_1}(\Omega)}\cdots\|f_m\|_{L_{p_m}(\Omega)}, \tag{1.30}$$

где $f_k(x)\in L_{p_k}(\Omega)$, $k=1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=1}^{m}1/p_k=1$.

Заметим, что из неравенства Гельдера (1.28) вытекает вложение

$$L_{p_1}(\Omega)\subset L_{p_2}(\Omega),\quad \|f\|_{L_{p_2}(\Omega)}\leqslant c\|f\|_{L_{p_1}(\Omega)},\quad p_1>p_2\geqslant 1, \tag{1.31}$$

в случае, когда Ω — конечный отрезок;

в) *теорема Фубини*, позволяющая менять порядок интегрирования в повторных интегралах:

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega_1=[a, b]$, $\Omega_2=[c, d]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, $-\infty\leqslant c<d\leqslant\infty$, *и пусть* $f(x, y)$ — *определенная на* $\Omega_1\times\Omega_2$ *измеримая функция. Если сходится (абсолютно) хотя бы один из интегралов*

$$\int\limits_{\Omega_1}dx\int\limits_{\Omega_2}f(x, y)\,dy,\quad\int\limits_{\Omega_2}dy\int\limits_{\Omega_1}f(x, y)\,dx,\quad\iint\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}f(x, y)\,dxdy,$$

то они совпадают.

Имеет место следующий частный случай теоремы Фубини:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x, y)\,dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x, y)\,dx \tag{1.32}$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов. Последнее равенство называется *формулой Дирихле.*

Справедливо также *обобщенное неравенство Минковского:*

$$\left\{\int\limits_{\Omega_1}dx\left|\int\limits_{\Omega_2}f(x, y)\,dy\right|^p\right\}^{1/p}\leqslant\int\limits_{\Omega_2}dy\left\{\int\limits_{\Omega_1}|f(x, y)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \tag{1.33}$$

примыкающее к утверждению теоремы Фубини;

г) свойство непрерывности в среднем функций из L_p.

Лемма 1.2. *Пусть* $f(x)\in L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Omega}|f(x+h)-f(x)|^p dx\to 0 \tag{1.34}$$

при $h\to 0$ (*для значений* $x+h\notin\Omega$ *функция* $f(x)$ *продолжается нулем*);

д) пусть $C_0^\infty(\Omega)$ — класс всех бесконечно дифференцируемых функций, финитных в Ω. Финитность в Ω означает, что $f(x)\equiv 0$ в окрестности концов $x=a$, $x=b$ множества $\Omega=[a, b]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$. В случае, когда Ω — конечный отрезок, множество всех многочленов плотно в $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$;

е) так называемая *мажорантная теорема Лебега* о предельном переходе под знаком интеграла:

Теорема 1.2. *Пусть функция* $f(x, h)$ *имеет суммируемую мажоранту:* $|f(x, h)|\leqslant F(x)$, *где* $F(x)$ *не зависит от параметра* h *и* $F(x)\in L_1(\Omega)$. *Если существует почти для всех* x *предел* $\lim\limits_{h\to 0}f(x, h)$, *то*

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\Omega}f(x, h)\,dx=\int\limits_{\Omega}\lim_{h\to 0}f(x, h)\,dx. \tag{1.35}$$

Доказательства приведенных свойств а)—е) можно найти, например, в книгах А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], С. М. Никольского [6], И. П. Натансона [1].

Нам понадобится также следующая

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathcal{K}(t)\in L_1(R^1)$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)\,dt=1$. *Тогда усреднение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)f(x-\varepsilon t)\,dt=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f(x-t)\,dt \tag{1.36}$$

функции $f(x)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<\infty$, *сходится при* $\varepsilon\to 0$ *к* $f(x)$ *по норме* $L_p(R^1)$. *Если, кроме того,* $|\mathcal{K}(t)|\leqslant A(|t|)$, *где* $A(r)\in L_1(R_+^1)$ *и монотонно убывает, то усреднение (1.36) сходится к* $f(x)$ *и почти всюду.*

Доказательство сходимости по норме L_p в этой теореме общеизвестное и простое. Доказательство сходимости почти всюду см., например, в книге И. Стейна [1, с. 77].

Упомянем также нужный нам в дальнейшем периодический аналог теоремы 1.3.

Теорема 1.3′. *Пусть функция* $k_\varepsilon(t)$ *удовлетворяет условиям:* 1) $\int_0^{2\pi} k_\varepsilon(t)\,dt = 2\pi$; 2) $\int_0^{2\pi} |k_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant M$, *где* M *не зависит от* ε; 3) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\delta^{2\pi} |k_\varepsilon(t)|\,dt = 0$ *при любом* $\delta > 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_\varepsilon(t)\,\varphi(x-t)\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(x)$$

для $\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$ (*или* $\varphi(x) \in C([0, 2\pi])$), *по норме* L_p (*или* C).

Утверждение теоремы 1.3′ общеизвестно в теории рядов Фурье и легко доказывается с помощью неравенства Минковского:

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_\varepsilon(t)\,[\varphi(x-t)-\varphi(x)]\,dt \right\| \leqslant 2\|\varphi\| \int_\delta^{2\pi} |k_\varepsilon(t)|\,dt +$$

$$+ \int_0^{\delta} |k_\varepsilon(t)|\,\|\varphi(x-t)-\varphi(x)\|\,dt \leqslant (2\|\varphi\| + M)\,\eta \to 0$$

за счет выбора δ во втором слагаемом и ε в первом.

Теоремы 1.3 и 1.3′ называют иногда *теоремами об аппроксимации единицы.*

Определение 1.8. *Пусть* $\rho(x)$—*неотрицательная функция. Через* $L_p(\rho) = L_p(\Omega; \rho)$ *будем обозначать класс измеримых на* Ω *функций* $f(x)$, *для которых*

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \left\{\int_\Omega \rho(x)\,|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} < \infty.$$

Мы будем иметь дело только с весами вида (1.7), (1.9).

Пространство $L_p(\rho)$ банахово ввиду изометрии

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \|\rho^{1/p} f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.37}$$

В силу изометрии (1.37) из (1.28) вытекает *аналог неравенства Гельдера* для весовых пространств

$$\int_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_{L_p(\rho)}\,\|g\|_{L_{p'}(\rho^{1-p'})}, \quad 1 < p < \infty. \tag{1.38}$$

В дальнейшем будут встречаться следующие *интегральные операторы типа свертки:*

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.39}$$

(очевидно, $h * \varphi = \varphi * h$). Для них имеет место теорема об ограниченности в пространствах L_p, известная как *теорема Юнга.*

Теорема 1.4. *Если* $h(t) \in L_1(R^1)$, $\varphi(t) \in L_p(R^1)$, *то* $(h * \varphi)(x) \in L_p(R^1)$ *и справедливо неравенство*

$$\|h * \varphi\|_p \leqslant \|h\|_1\,\|\varphi\|_p. \tag{1.40}$$

Приведем еще теорему об ограниченности в пространствах L_p операторов с однородным ядром. Напомним, что *функция* $k(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$, *называется однородной степени* α, *если справедливо соотношение*

$$k(\lambda x, \lambda t) = \lambda^{\alpha} k(x, t), \quad \lambda > 0. \tag{1.41}$$

В частности, положив здесь $\lambda = t^{-1}$, приходим к заключению, что всякая однородная степени α функция представима в виде

$$k(x, t) = t^{\alpha} k_0\left(\frac{x}{t}\right). \tag{1.42}$$

Теорема 1.5. *Пусть функция* $k(x, t)$ *однородна степени* -1. *Если*

$$\kappa = \int_0^{\infty} |k(x, 1)| x^{-1/p'} dx = \int_0^{\infty} |k(1, t)| t^{-1/p} dt < \infty, \tag{1.43}$$

то интегральный оператор

$$K\varphi = (K\varphi)(x) = \int_0^{\infty} k(x, t) \varphi(t) dt \tag{1.44}$$

ограничен в $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и при этом* $\|K\varphi\|_{L_p} \leqslant \kappa \|\varphi\|_{L_p}$, *где* κ *имеет вид* (1.43).

Доказательство. Прежде всего заметим, что интегралы (1.43) совпадают. В этом можно убедиться с помощью замены $t = 1/x$ и свойства однородности $k(1, x^{-1}) = x k(x, 1)$. Преобразовав далее (1.44) к виду $K\varphi = \int_0^{\infty} k(1, t) \varphi(tx) dt$ и применив обобщенное неравенство Минковского (1.33), получим

$$\|K\varphi\|_{L_p} \leqslant \int_0^{\infty} |k(1, t)| dt \left\{\int_0^{\infty} |\varphi(tx)|^p dx\right\}^{1/p} = \kappa \|\varphi\|_{L_p}.$$

Последняя теорема принадлежит Г. Харди, Д. Литтлвуду, Г. Полиа (G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya [1]), см. также русское издание книги этих авторов [1, с. 276].

Приведем еще теорему об ограниченности в $L_p(R^1)$ операторов свертки (1.39), известную как *теорему о фурье-мультипликаторах* (С. Г. Михлин [2, с. 239], см. ее доказательство также в книгах С. М. Никольского [4, с. 59], И. Стейна [1, с. 128]). Она формулируется в терминах преобразования Фурье $\hat{h}(x)$ ядра $h(x)$. О преобразовании Фурье см. далее в п. 4°.

Теорема 1.6. *Пусть функция* $m(x) = \hat{h}(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$|m(x)| \leqslant c, \quad |xm'(x)| \leqslant c, \quad x \in R^1. \tag{1.41'}$$

Тогда оператор (1.39) *ограничен в пространстве* $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$.

Следствие. *Пусть*

$$A\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} a(x - t) \varphi(t) dt, \quad B\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} b(x - t) \varphi(t) dt.$$

Если функции $\hat{a}(x)/\hat{b}(x)$, $\hat{b}(x)/\hat{a}(x)$ *удовлетворяют условиям* (1.41'), *то*

$$A(L_p) = B(L_p), \quad 1 < p < \infty.$$

Приведем, наконец, *теорему Банаха.*

Теорема 1.7. *Пусть* A, B — *линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве* X. *Если* $A\varphi \equiv B\varphi$ *для* φ *из плотного в* X *множества, то* $A\varphi \equiv B\varphi$ *для всех* $\varphi \in X$.

3°. Некоторые специальные функции. Дадим здесь определения и простейшие свойства ряда специальных символов и функций, более под-

робную информацию о которых читатель может найти в книгах Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1—3], а также в справочниках А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1—3].

А. *Символ Похгаммера* $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (z)_0 \equiv 1. \tag{1.45}$$

Очевидно, что

$$(z)_n = (-1)^n (1-n-z)_n, \quad (1)_n = n!, \tag{1.46}$$

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \tag{1.47}$$

где $\Gamma(z)$ задается формулой (1.54). Равенство (1.47) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при комплексных n.

Б. *Биномиальные коэффициенты определяются по формуле*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}. \tag{1.48}$$

В частности, при целых $\alpha = m$, $m = 1, 2, \dots$, имеем равенства

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \text{ при } m \geqslant n \text{ и } \binom{m}{n} = 0 \text{ при } 0 \leqslant m < n. \tag{1.49}$$

В случае произвольных (комплексных) β и α, $\alpha \neq -1, -2, \dots$, полагают

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\pi}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{1.50}$$

Из (1.66) и (1.50) вытекает, что

$$\left|\binom{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \frac{c}{\beta^{1+\operatorname{Re}\alpha}} \tag{1.51}$$

при любом фиксированном α $(\neq -1, -2, \dots)$ и вещественном $\beta \to +\infty$.

Отметим также формулы

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \binom{j-\alpha-1}{j}, \tag{1.52}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j} = \binom{\alpha+\beta}{k}, \tag{1.53}$$

см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 4.2.5.13].

В. *Гамма-функцией* $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{1.54}$$

который, очевидно, сходится при всех $z \in \mathbf{C}$, для которых $\operatorname{Re} z > 0$. Здесь $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$. На полуплоскость $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, гамма-функция доопределяется с помощью аналитического продолжения этого интеграла. Так, получаемая из (1.54) интегрированием по частям формула понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{1.55}$$

после многократного применения приводит к равенству

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}, \tag{1.56}$$

$$\operatorname{Re} z > -n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots,$$

позволяющему осуществить такое аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}z>-n$ при любом n. Существуют и другие способы аналитического продолжения (на основе формул Коши—Заальшютца, Эйлера—Гаусса и др.).

Из (1.56) следует, что $\Gamma(z)$ аналитична в комплексной плоскости всюду, кроме точек $z=0, -1, -2, \ldots$, где она имеет простые полюса и разлагается по формуле

$$\Gamma(z) = (-1)^k[k!\,(z+k)]^{-1}[1+O(z+k)], \quad z\to -k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.57}$$

(последняя получается из (1.56) при $z\to 1-n$ после замены $n-1$ на k; более точные представления $O(z+k)$ см. в книге О. И. Маричева [10, с. 42]). Здесь и всюду в дальнейшем равенство $f(z)=O(g(z))$, $z\to a$, означает, как обычно, что $|f(z)/g(z)|<M<\infty$ при $|z-a|<\varepsilon$. Соотношение $f(z)=o(g(z))$, $z\to a$, будет означать $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=0$, а соотношение эквивалентности $f(z)\sim g(z)$, $z\to a$, — $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=1$.

Коэффициент при $(z+k)^{-1}$ в окрестности полюса $z=-k$ из формулы (1.57) называется вычетом гамма-функции, а связь между этой функцией и ее вычетом обозначается через равенство

$$\operatorname*{res}_{z=-k}\Gamma(z) = (-1)^k/k!, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.58}$$

Отметим очевидное свойство $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, $\Gamma(1)=1$ и перечислим другие соотношения:

а) *обобщенные формулы понижения и повышения* вида

$$\Gamma(z+n)=(z)_n\,\Gamma(z), \quad \Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n}=\frac{(-1)^n}{(1-z)_n}\,\Gamma(z); \tag{1.59}$$

б) *формула дополнения*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\pi/\sin z\pi, \quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}; \tag{1.60}$$

в) *формула удвоения* (формула Лежандра)

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{1.61}$$

и более общая *формула Гаусса—Лежандра*

$$\Gamma(mz)=\frac{m^{mz-1/2}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right), \quad m=2,\ 3,\ \ldots; \tag{1.62}$$

г) асимптотическая *формула Стирлинга*

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-1/2}\,e^{-z}[1+O(1/z)], \quad |\arg z|<\pi, \quad z\to\infty, \tag{1.63}$$

и ее следствия

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\,[1+O(1/n)], \quad n\to\infty, \tag{1.64}$$

$$|\Gamma(x+iy)|=\sqrt{2\pi}\,|y|^{x-1/2}\,e^{-\pi|y|/2}\,[1+O(1/y)], \quad y\to\infty; \tag{1.65}$$

д) разложение отношения двух гамма-функций на бесконечности

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)}=z^{a-b}\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{z^k}+z^{a-b}O(z^{-N-1}),$$
$$c_0=1, \quad |\arg(z+a)|<\pi, \quad |z|\to\infty, \tag{1.66}$$

где коэффициенты c_k выражаются через обобщенные многочлены Бернулли по формуле $c_k = \dfrac{(-1)^k (b-a)_k}{k!} B_k^{a-b+1}(a)$, см. книгу Ю. Люка [1, с. 20] (относительно обобщенных многочленов Бернулли см. книгу А. О. Гельфонда [1, гл. IV]).

В некоторых случаях будет использоваться также логарифмическая производная гамма-функции, называемая еще *пси-функцией Эйлера*:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} . \tag{1.67}$$

Г. *Бета-функцией* называется интеграл

$$\mathrm{B}(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx, \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Re}\, w > 0 \tag{1.68}$$

(эйлеров интеграл первого рода). Он выражается через гамма-функцию по формуле

$$\mathrm{B}(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} . \tag{1.69}$$

Интегралу (1.68) можно придать смысл и при $\mathrm{Re}\, z = 0$ или $\mathrm{Re}\, w = 0$ ($z \neq 0$, $w \neq 0$), понимая его как условно сходящийся. В частности, существует предел

$$\mathrm{B}(z, i\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} x^{z-1} (1-x)^{i\theta-1} dx, \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \theta \neq 0, \tag{1.70}$$

совпадающий с аналитическим продолжением $\mathrm{B}(z, w)$ по w на значения $\mathrm{Re}\, w = 0$, $w \neq 0$.

Приведем значение полезного в дальнейшем интеграла

$$\int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\beta-1} dt = (x-y)^{\alpha+\beta-1} \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha-\beta), \tag{1.71}$$

$$x > y, \quad 0 < \mathrm{Re}\, \alpha < 1 - \mathrm{Re}\, \beta,$$

который сводится к интегралу (1.68) заменой $t = y + (x-y)\xi^{-1}$.

Д. *Гипергеометрическая функция Гаусса* определяется при $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} . \tag{1.72}$$

Его параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными (причем $c \neq 0, -1, -2, \ldots$), а $(a)_k$ — символ Похгаммера (1.45). Ряд сходится при $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, $\mathrm{Re}\,(c-a-b) > 0$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда. Один из способов такого продолжения—использование *интегрального представления Эйлера*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, \tag{1.73}$$

$$0 < \mathrm{Re}\, b < \mathrm{Re}\, c, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

в котором правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла. Условие $|\arg(1-z)| < \pi$ означает, что функция рассматривается в комплексной плоскости z с разрезом по лу-

чу $(1, \infty)$, который соединяет особые точки $z=1$ и $z=\infty$ функции Гаусса. Отметим еще, что в (1.73) выбирается главное значение ветви $(1-tz)^{-a}=e^{-a\ln(1-tz)}$, где $\ln(1-tz)$ имеет вещественное значение при $z\in[0, 1]$.

Наиболее полный перечень частных случаев и свойств функции Гаусса можно найти в справочниках Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3]. Здесь же укажем лишь некоторые простейшие свойства этой функции:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z), \tag{1.74}$$

$$ {}_2F_1(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}, \tag{1.75}$$

$$ {}_2F_1(a, b; c; 0) = {}_2F_1(0, b; c; z) = 1, \tag{1.76}$$

$$ {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b)>0, \tag{1.77}$$

$$ \frac{d^k}{dz^k}\,{}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\,{}_2F_1(a+k, b+k; c+k; z) \tag{1.78}$$

и отметим, что через функцию Гаусса определяются многие важные специальные функции. Так, присоединенная функция Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ представляется в виде

$$ P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right), \quad z\notin[-1, 1], \tag{1.79}$$

$$ P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad -1<x<1, \tag{1.80}$$

а с помощью предельных переходов из функции Гаусса получаются вырожденная гипергеометрическая функция и функции Бесселя, определяемые в п. Е, Ж.

Е. *Вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)* определяется по формуле

$$ {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k}\,\frac{z^k}{k!} = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z|<\infty. \tag{1.81}$$

Ж. *Функции Бесселя* $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ определяются на основе функции

$$ {}_0F_1(c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(c)_k\,k!} = \lim_{a\to\infty} {}_1F_1\left(a; c; \frac{z}{a}\right), \quad |z|<\infty, \tag{1.82}$$

по следующим формулам:

$$ J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!} \tag{1.83}$$

(функция Бесселя 1-го рода),

$$ I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!} = e^{-\pi i\nu/2}J_\nu(iz) \tag{1.84}$$

(модифицированная функция Бесселя),

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.85}$$

$$K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(функция Макдональда). Очевидно, что $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$.

Отметим здесь нужную нам в дальнейшем формулу

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{\nu+1} J_\nu(\rho a)}{(\rho^2 + 1)^\mu} d\rho = \frac{(a/2)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} K_{\nu-\mu+1}(a), \tag{1.86}$$

$$a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\mu - 1/2$$

(см., например, справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.12.4.28]).

3. *Обобщенная дзета-функция Римана* (функция Римана—Гурвица) определяется рядом

$$\zeta(s, a) = \sum_{m=0}^{\infty} (a + m)^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{1.87}$$

Аналитическое продолжение этого ряда на остальные значения s осуществляется формулой Гурвица

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\left[\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi m a}{m^{1-s}} + \cos\frac{s\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi m a}{m^{1-s}}\right] \tag{1.88}$$

(см. книгу Э. Т. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона [1, с. 63], где также можно подробнее познакомиться со свойствами этой функции). В случае $s = 0, -1, -2, \ldots$ функция с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленами Бернулли $B_n(z)$:

$$\zeta(-n, a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.89}$$

И. *Функцией Миттаг-Леффлера* называется целая функция, определяемая рядом

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \tag{1.90}$$

Также функцией Миттаг-Леффлера называют сумму более общего ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{1.91}$$

Таким образом, $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Известно соотношение

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z)\, dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \tag{1.92}$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3, 18.1 (26)]), приводящее к формуле для преобразования Лапласа функции $z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)$:

$$\int_0^\infty e^{-p\xi}\xi^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\xi^\alpha)\, d\xi = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - 1}, \quad \operatorname{Re} p > 1 \tag{1.93}$$

(о преобразовании Лапласа см. п. 4°). В частности, при $\beta = 1$

$$\int_0^\infty e^{-p\xi} E_\alpha(\xi^\alpha)\, d\xi = \frac{1}{p - p^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} p > 1. \tag{1.94}$$

Подробнее о функции Миттаг-Леффлера см. в справочнике Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3, гл. 18] и в монографии М. М. Джрбашяна [2, гл. III, IV].

К. *G-функцией Мейера* порядка (m, n, p, q), где $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина—Барнса

$$G_{pq}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right) = G_{pq}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)} z^{-s}ds, \qquad (1.95)$$

где бесконечный контур L отделяет все левые полюса числителя $s = -b_j-k$, $j=1, 2, \ldots, m$, $k=0, 1, 2, \ldots$, от правых $s=1-a_j+k$, $j=1, 2, \ldots, n$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и при соответствующих условиях может быть одного из трех типов $L=L_{-\infty}$, $L_{+\infty}$ или $L_{i\infty}$ (в частности, даже прямолинейным $L=(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$). Описание контуров $L_{\pm\infty}$, $L_{i\infty}$ и наиболее полный перечень свойств и частных случаев G-функции можно найти в справочнике А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3], см. также книги Ю. Люка [1] и Y. L. Luke [1]. Здесь же мы приведем лишь несколько формул:

$$G_{pq}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right) = G_{qp}^{nm}\left(\frac{1}{z}\left|\begin{matrix}1-(b_q)\\1-(a_p)\end{matrix}\right.\right), \qquad (1.96)$$

$$z^{\alpha}G_{pq}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right) = G_{pq}^{mn}\left(z\left|\begin{matrix}(a_p)+\alpha\\(b_q)+\alpha\end{matrix}\right.\right), \qquad (1.97)$$

$$G_{01}^{10}\left(z\left|\begin{matrix}\cdot\\0\end{matrix}\right.\right) = e^{-z}, \quad G_{22}^{11}\left(x\left|\begin{matrix}0, & 1/2\\0, & 1/2\end{matrix}\right.\right) = \frac{1}{\pi(1-x)}, \qquad (1.98)$$

$$G_{11}^{10}\left(x\left|\begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right.\right) = \frac{(1-x)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad G_{11}^{01}\left(x\left|\begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right.\right) = \frac{(x-1)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (1.99)$$

где y_+^{α} — символ усеченной степенной функции:

$$y_+^{\alpha} = y^{\alpha}, \quad y>0; \quad y_+^{\alpha} = 0, \quad y<0. \qquad (1.100)$$

Отметим также, что функции (1.72), (1.79)—(1.85), а также (1.90), (1.91) (при рациональных α) и многие другие важные специальные функции являются частными случаями G-функции Мейера.

4°. Интегральные преобразования. Как известно, классические одномерные интегральные преобразования имеют вид

$$(K\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x, t)\varphi(t)\,dt = g(x), \qquad (1.101)$$

где $k(x, t)$—некоторая заданная функция (ядро преобразования), $\varphi(t)$—оригинал из некоторого класса функций, а $g(x)$—образ или значение преобразования функции $\varphi(t)$. Важнейшими интегральными преобразованиями являются преобразования Фурье ($k(x, t)=e^{ixt}$) и Меллина (при $k(x, t)=t^{x-1}$ в формуле (1.44)). Они связаны между собой заменами переменных и функций (см. книгу О. И. Маричева [10, с. 31]) и имеют обширные приложения.

Все другие классические интегральные преобразования можно разбить на два класса — преобразования типа свертки (с однородными ядрами типа (1.44), (1.42)) и преобразования по индексам (или парамет-

рам) специальных функций, входящих в ядра. В каждом из этих классов были построены и частично исследованы преобразования с G-функцией Мейера в ядрах или с еще более общей H-функцией Фокса в ядрах, которые являются самыми общими из преобразований классического типа.

В классе преобразований типа свертки наиболее известны следующие преобразования вида (1.44) (определения приводимых далее специальных функций см., например, в справочнике А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3]): преобразование Лапласа ($\mathrm{k}(x, t) = e^{-xt}$), синус- и косинус-преобразования Фурье ($\mathrm{k}(x, t) = \sin xt$ и $\cos xt$), преобразование Ханкеля ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, J_\nu(xt)$), преобразование Стилтьеса ($\mathrm{k}(x, t) = \Gamma(p)(x+t)^{-p}$), преобразование Гильберта (сингулярный интеграл) ($\mathrm{k}(x, t) = \pi^{-1}(t-x)^{-1}$ в (1.101)), преобразование Мейера ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, K_\nu(xt)$), преобразование с функцией Неймана в ядре ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, Y_\nu(xt)$), преобразование с функцией Струве в ядре ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, \mathbf{H}_\nu(xt)$), обобщенное преобразование Лапласа с функцией параболического цилиндра в ядре ($\mathrm{k}(x, t) = 2^{-\nu/2} e^{-xt/2} D_\nu(\sqrt{2xt})$), ${}_1F_1$-преобразование ($\mathrm{k}(x, t) = {}_1F_1(a; c; -xt)$), обобщенное преобразование Мейера ($\mathrm{k}(x, t) = (xt)^{\mu-1/2} e^{-xt/2} W_{\varkappa,\mu}(xt)$), гипергеометрическое преобразование Гаусса $\left(\mathrm{k}(x, t) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\, x}\, {}_2F_1\left(a, b; c; -\dfrac{t}{x}\right)\right)$, преобразование Лава $\left(\mathrm{k}(x, t) = \dfrac{(x-t)_+^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\dfrac{t}{x}\right)\right)$, преобразование Бушмана $\left(\mathrm{k}(x, t) = (x^2-t^2)_+^{-\lambda/2} P_\nu^\lambda\left(\dfrac{t}{x}\right)\right)$, G-преобразование Нараина $\left(\mathrm{k}(x, t) = G_{pq}^{mn}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)\right)$ и др. К этому классу также относятся и основные предметы исследования данной монографии—интегралы дробного порядка α Римана — Лиувилля: левосторонний ($\mathrm{k}(x, t) = (x-t)_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$) и правосторонний ($\mathrm{k}(x, t) = (t-x)_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$).

Класс преобразований по индексам содержит преобразования Конторовича—Лебедева ($\mathrm{k}(x, t) = K_{ix}(t)$), Мелера—Фока ($\mathrm{k}(x, t) = P^k_{ix-1/2}(t)$, $t>1$; $\mathrm{k}(x, t) = 0$, $t<1$), Уимпа $\left(\mathrm{k}(x, t) = G^{m,n+2}_{p+2,q}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix}1-\nu+ix,\ 1-\nu-ix,\ (a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)\right)$ и др.

Изложение теории интегральных преобразований читатель может найти, например, в книгах В. А. Диткина, А. П. Прудникова [1], М. М. Джрбашяна [2], Н. Н. Лебедева [3], Е. Титчмарша [1]. Нам же в дальнейшем понадобятся лишь простейшие сведения из этой теории, приводимые ниже.

А. *Преобразование Фурье* функции $\varphi(x)$ действительного аргумента $-\infty<x<\infty$ определяется формулой

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \mathcal{F}\{\varphi(t);\ x\} = \hat{\varphi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)\, dt. \tag{1.102}$$

Ее полезно иногда записывать в виде

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}-1}{it}\, \varphi(t)\, dt. \tag{1.103}$$

Обратное преобразование Фурье осуществляется формулой

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \tilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} g(t)\, dt, \tag{1.104}$$

имеющей незначительные отличия от (1.102). Интегралы (1.102) и (1.104) абсолютно сходятся на функциях φ, $g \in L_1(R^1)$ и в среднем по норме пространства $L_2(R^1)$ для φ, $g \in L_2(R^1)$ (хорошо известны L_1-теория и L_2-теория интеграла Фурье, см. книги А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина [1], С. М. Никольского [6] и И. Стейна, Г. Вейса [1]).

Преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in L_1(R^1)$ ограничено, непрерывно и стремится к нулю при $|x| \to \infty$ (теорема Римана—Лебега). Скорость убывания $(\mathcal{F}\varphi)(x)$ на бесконечности при этом связана с гладкостью функции $\varphi(x)$. Эта связь выражается простыми формулами

$$\mathcal{F}\{D^n\varphi(t);\ x\} = (-ix)^n(\mathcal{F}\varphi)(x), \tag{1.105}$$

$$D^n(\mathcal{F}\varphi)(x) = \mathcal{F}\{(it)^n\varphi(t);\ x\}, \tag{1.106}$$

где $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, которые справедливы на достаточно хороших функциях (например, непрерывно дифференцируемых до порядка n и таких, что $\varphi^{(k)}(x) \in L_1(R^1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Особо отметим действие преобразования Фурье на оператор свертки (1.39). Если $h(x)$, $\varphi(x) \in L_1(R^1)$, то $(h * \varphi)(x) \in L_1(R^1)$ и справедливо равенство

$$\mathcal{F}\{(h * \varphi)(t);\ x\} = (\mathcal{F}h)(x)(\mathcal{F}\varphi)(x), \tag{1.107}$$

называемое *теоремой о свертке Фурье*. Оно сохраняет силу и при $h(x) \in L_1(R^1)$, $\varphi(x) \in L_2(R^1)$ (тогда $h * \varphi \in L_2(R^1)$) или $h(x)$, $\varphi(x) \in L_2(R^1)$ (тогда $(h * \varphi)(x)$ непрерывна, ограничена и исчезает на ∞).

Б. *Синус- и косинус-преобразования Фурье* функции $\varphi(x)$, $x > 0$, определяются формулами

$$\mathcal{F}_c\varphi = (\mathcal{F}_c\varphi)(x) = \int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\,dt, \tag{1.108}$$

$$\mathcal{F}_s\varphi = (\mathcal{F}_s\varphi)(x) = \int_0^\infty \varphi(t)\sin xt\,dt, \tag{1.109}$$

а обратные им преобразования соответственно имеют вид

$$(\mathcal{F}_c^{-1}g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(t)\cos xt\,dt, \tag{1.110}$$

$$(\mathcal{F}_s^{-1}g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(t)\sin xt\,dt. \tag{1.111}$$

В. *Преобразование Меллина* функции $\varphi(x)$, $x > 0$, определяется формулой

$$\varphi^*(s) = \mathfrak{M}\{\varphi(t);\ s\} = \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)\,dt, \tag{1.112}$$

а обратное преобразование Меллина осуществляется с помощью равенства

$$\varphi(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\varphi^*(s);\ x\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\varphi^*(s)\,x^{-s}ds, \quad \gamma = \operatorname{Re} s. \tag{1.113}$$

Эти формулы получаются из (1.102), (1.104) заменой $\varphi(t)$ на $\varphi(e^t)$ и ix на s. Поменяв еще $h(t)$ и x на $h(e^t)$ и $\ln x$, из свертки Фурье (1.39) получим свертку Меллина

$$(h \circ \varphi)(x) = \int_0^\infty h\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{1.114}$$

Теорема о свертке (1.107) по отношению к (1.114) принимает вид

$$(h \circ \varphi)^*(s) = h^*(s)\,\varphi^*(s). \tag{1.115}$$

Подставив в (1.113) вместо $\varphi^*(s)$ значение (1.115), с учетом (1.114) придем к равенству Парсеваля

$$\int_0^\infty h\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h^*(s)\,\varphi^*(s)\,x^{-s}ds. \tag{1.116}$$

Если знаком $\longleftrightarrow$ обозначить соответствие между функцией и ее преобразованием Меллина, то легко установить формулы общего вида:

$$\varphi(ax) \longleftrightarrow a^{-s}\varphi^*(s); \quad x^\alpha\varphi(x) \longleftrightarrow \varphi^*(s+\alpha);$$
$$\varphi(x^p) \longleftrightarrow |p|^{-1}\varphi^*(s/p), \quad p \neq 0; \quad \varphi(x^{-1}) \longleftrightarrow \varphi^*(-s); \tag{1.117}$$
$$(x^n\varphi(x))^{(n)} \longleftrightarrow (1-s)_n\varphi^*(s), \quad x_1^{s+k}\varphi^{(k)}(x_1) = 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ x_1 = 0,\ \infty,$$

а также формулы преобразований Меллина ряда важных функций

$$e^{-x} \longleftrightarrow \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0;$$

$$\frac{(1-x)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}, \quad \operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re} s > 0;$$

$$\frac{(x-1)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \longleftrightarrow \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1 - \operatorname{Re} s;$$

$$\Gamma(p)(1+x)^{-p} \longleftrightarrow \Gamma(s)\,\Gamma(p-s), \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p;$$

$$\frac{1}{\pi(1-x)} \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)}{\Gamma(s+1/2)\,\Gamma(1/2-s)} = \operatorname{ctg} s\pi, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1; \tag{1.118}$$

$$J_\nu(2\sqrt{x}) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s+\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+1-s)}, \quad -\operatorname{Re}\nu/2 < \operatorname{Re} s < 3/4;$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\,{}_1F_1(a;\ c;\ -x) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a;$$

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ -x) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)},$$
$$0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re} b;$$

$$\frac{(1-x)_+^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ 1-x) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s+c-a-b)}{\Gamma(s+c-a)\,\Gamma(s+c-b)},$$
$$\operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re}(s+c-a-b) > 0.$$

Сопоставив соотношения (1.95), (1.113) и (1.118), несложно заметить что если в качестве L в (1.95) можно взять вертикальную прямую $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, не потеряв сходимости интеграла, то преобразование Меллина G-функции является отношение произведений гамма-функции общего вида, стоящее под интегралом (1.95). Частные случаи такого отношения приведены в правых частях формул (1.118); значит, левые части — частные случаи G-функции (см. (1.98), (1.99)).

Более подробно со свойствами преобразования Меллина и его таблицами можно ознакомиться в книгах О. И. Маричева [10] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3].

Г. *Преобразование Лапласа* функции $\varphi(x)$, $0<x<\infty$, определяется формулой

$$L\varphi = (L\varphi)(p) = L\{\varphi(t);\ p\} = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt, \tag{1.119}$$

а обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$(L^{-1}g)(x) = L^{-1}\{g(p);\ x\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}g(p)\,dp, \quad \gamma = \operatorname{Re} p > p_0. \tag{1.120}$$

С помощью преобразования Меллина можно получить и другую форму обратного преобразования Лапласа (см. (8.29) в книге О. И. Маричева [10])

$$(L^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)}\,g^*(1-s)\,ds, \quad \operatorname{Re} s = \gamma < 1. \tag{1.121}$$

Сверткой для преобразования Лапласа является интеграл

$$[h * \varphi] = [h * \varphi](x) = \int_0^x h(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1.122}$$

Теорема о свертке (1.107) по отношению к (1.122) приобретает вид

$$L[h * \varphi](p) = (Lh)(p)\,(L\varphi)(p). \tag{1.123}$$

Преобразование Лапласа получается из преобразования Фурье (1.102) сужением функций (условием $\varphi(t)=0$ при $t<0$) и заменой переменной ix на комплексную переменную p. Его свойства подробно изложены, например, в книгах В. А. Диткина, А. П. Прудникова [1].

Укажем еще формулу преобразования Лапласа производной

$$(L\varphi^{(n)})(p) = p^n(L\varphi)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}\varphi^{(k)}(0), \tag{1.124}$$

которая легко получается интегрированием по частям при условии существования соответствующих интегралов.

§ 2. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ И ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Понятие дробного интегрирования тесно связано с интегральным уравнением Абеля. Поэтому удобно начать с решения этого уравнения. Сначала дадим формальное решение уравнения Абеля, а затем приведем обоснование этого решения в классе интегрируемых функций. Располагая же обращением уравнения Абеля, можно конструктивно реализовать дробное дифференцирование как операцию, обратную дробному интегрированию. Исходя из этого, изложим соответствующие определения и приведем простейшие свойства дробного интегродифференцирования.

1°. Интегральное уравнение Абеля. Интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x > a, \tag{2.1}$$

где $0<\alpha<1$, называется *уравнением Абеля*. Будем считать, что $a>-\infty$ и что уравнение рассматривается на конечном отрезке $[a, b]$. Множитель $1/\Gamma(\alpha)$ в (2.1) нам удобно брать из соображений, которые проясняются ниже.

Уравнение (2.1) решается следующим приемом. Поменяв в (2.1) x на t и t на s соответственно, умножив обе части равенства на $(x-t)^{-\alpha}$ и проинтегрировав, получим

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{2.2}$$

Поменяв порядок интегрирования в левой части по формуле Дирихле (1.32), придем к равенству

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется после замены $t=s+\tau(x-s)$ и использования формул (1.68), (1.69):

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = B(\alpha,\ 1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Поэтому

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{2.3}$$

Отсюда после дифференцирования

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{2.4}$$

Таким образом, если уравнение (2.1) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (2.4) и, следовательно, единственно.

Мы рассматривали в (2.1) для простоты случай $0<\alpha<1$. Случай $\alpha=1$ очевиден, а случай $\alpha>1$ сводится, вообще говоря, к $0<\alpha<1$ дифференцированием обеих частей (2.1). Решение уравнения Абеля при $\alpha>1$ практически содержится в теореме 2.4.

Совершенно аналогично рассматривается уравнение Абеля вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x<b, \tag{2.5}$$

но вместо (2.4) при $0<\alpha<1$ получается формула обращения

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\alpha}. \tag{2.6}$$

2°. Обоснование решения уравнения Абеля в классе интегрируемых функций. Выясним, при каких условиях на правую часть $f(x)$ уравнение Абеля действительно разрешимо. Чтобы сформулировать основной результат этого пункта (теорему 2.1), введем обозначение

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{2.7}$$

Очевидно, что

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)|\,(b-t)^{1-\alpha}dt, \tag{2.8}$$

так что если $f(x)\in L_1(a,\ b)$, то и $f_{1-\alpha}(x)\in L_1(a,\ b)$.

Теорема 2.1. *Для того чтобы уравнение Абеля* (2.1), $0<\alpha<1$, *было разрешимо в* $L_1(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b]) \text{ и } f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{2.9}$$

При выполнении этих условий уравнение имеет единственное решение, определяемое формулой (2.4).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (2.1) разрешимо в $L_1(a, b)$. Тогда справедливы все рассуждения предыдущего пункта (при этом возможность перестановки порядка интегрирования в (2.2) обосновывается с помощью теоремы Фубини 1.1) и, следовательно, справедливо (2.3). Отсюда в силу (1.4) следуют условия (2.9).

Достаточность. Так как $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b])$, то $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) \in L_1(a, b)$. Поэтому функция, представляемая формулой (2.4), существует почти всюду и принадлежит $L_1(a, b)$. Покажем, что она действительно дает решение уравнения (2.1). Для этого подставим ее в левую часть и результат обозначим через $g(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt = g(x). \tag{2.10}$$

Покажем, что почти всюду $g(x) = f(x)$, что и докажет теорему. Равенство (2.10) есть уравнение (2.1) относительно $f'_{1-\alpha}(t)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому в силу (2.4) $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha}}$, т. е. $f'_{1-\alpha}(x) = g'_{1-\alpha}(x)$. Функции $f_{1-\alpha}(x)$ и $g_{1-\alpha}(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, а вторая в силу равенства (2.3) с $g(x)$ в правой части. Поэтому $f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c$ (заметим, что требование абсолютной непрерывности в этом рассуждении существенно: его нельзя ослабить просто до непрерывности, так как известны функции непрерывные, но не абсолютно непрерывные, отличные от тождественной постоянной и имеющие почти всюду производную, равную нулю, см. книгу И. П. Натансона [1, с. 201]). У нас по предположению $f_{1-\alpha}(a) = 0$, а $g_{1-\alpha}(a) = 0$, потому что (2.10) — разрешимое уравнение. Поэтому $c = 0$, так что $\int_a^x \frac{f(t) - g(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt = 0$. Последнее равенство есть уравнение вида (2.1). В силу единственности решения $f(t) - g(t) \equiv 0$. Теорема 2.1 доказана.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения Абеля нами сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{1-\alpha}(x)$. Следующая лемма и следствие из нее дают простое достаточное условие в терминах самой функции $f(x)$.

Лемма 2.1. *Если* $f(x) \in AC([a, b])$, *то и* $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b])$, *при этом*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right]. \tag{2.11}$$

Доказательство. Подставляя на основании (1.4) функцию $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\, ds$ в (2.7), получаем

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t f'(s)\, ds. \tag{2.12}$$

Здесь первое слагаемое — абсолютно непрерывная функция, так как $(x-a)^{1-\alpha}=(1-\alpha)\int\limits_a^x (t-a)^{-\alpha}dt$. Поскольку

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\int_a^t f'(s)\,ds=\int_a^x\left(\int_a^t \frac{f'(s)\,ds}{(t-s)^\alpha}\right)dt \tag{2.13}$$

(что проверяется непосредственной перестановкой порядка интегрирования в обеих частях равенства), то и второе слагаемое в (2.12) является первообразной от суммируемой функции и, следовательно, абсолютно непрерывно. Представление (2.11) следует из (2.12) после перестановки порядка интегрирования. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $f(x)\in AC([a, b])$, *то уравнение Абеля (2.1) разрешимо при* $0<\alpha<1$ *в* $L_1(a, b)$, *при этом решение (2.4) можно представить также в виде*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha}+\int_a^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^\alpha}\right]. \tag{2.14}$$

Действительно, условия разрешимости (2.9) выполнены в силу леммы 2.1 и формул (2.12), (2.13). Так как $\varphi(x)=\frac{d}{dx}f_{1-\alpha}(x)$, то формула (2.14) получается дифференцированием равенства (2.11), при этом дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу (2.13).

Подчеркнем, что одновременно мы получили новую форму (2.14) обращения уравнения Абеля, применимую к абсолютно непрерывным правым частям $f(x)$.

Совершенно аналогично теореме 2.1 показывается, что уравнение (2.5) разрешимо в $L_1(a, b)$ для тех и только тех правых частей, для которых $\tilde{f}_{1-\alpha}(x)\in AC([a, b])$ и $\tilde{f}_{1-\alpha}(b)=0$, где

$$\tilde{f}_{1-\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\alpha},\quad 0<\alpha<1.$$

Решение (2.6) уравнения (2.5) в случае $f(x)\in AC([a, b])$ аналогично (2.14) можно записать в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-t)^\alpha}-\int_t^b \frac{f'(s)\,ds}{(s-t)^\alpha}\right]. \tag{2.15}$$

Заметим, что в § 14 будет дана и другая форма обращения уравнения Абеля (см. (14.29), (14.30)).

3°. Определение дробных интегралов и производных и простейшие свойства. Для n-кратного интеграла известна формула

$$\int_a^x dx\int_a^x dx\ \ldots\int_a^x \varphi(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt, \tag{2.16}$$

доказательство которой легко осуществить методом математической индукции. Заметив, что $(n-1)!=\Gamma(n)$, видим, что правой части в (2.16) можно придать смысл и при нецелых значениях n. Поэтому естественно определять интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Определение 2.1. *Пусть* $\varphi(x)\in L_1(a, b)$. *Интегралы*

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \quad x > a, \tag{2.17}$$

$$(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b, \tag{2.18}$$

где $\alpha > 0$, называются интегралами дробного порядка α. Первый из них называют иногда левосторонним, а второй — правосторонним. Операторы I^{α}_{a+}, I^{α}_{b-} называют операторами дробного интегрирования. Таким образом, дробный интеграл — это конструкция, уже знакомая нам по уравнению Абеля.

Интегралы (2.17), (2.18) принято называть также дробными интегралами Римана—Лиувилля.

Чаще всего нам придется иметь дело с левосторонним дробным интегрированием, для которого будем иногда использовать обозначение типа (2.7): $f_{\alpha}(x) = (I^{\alpha}_{a+}f)(x)$.

Дробные интегралы (2.17), (2.18), очевидно, определены на функциях $\varphi(x) \in L_1(a, b)$, существуя почти всюду. Далее в теореме 2.6 и в § 3 более подробно рассмотрим действие операторов I^{α}_{a+}, I^{α}_{b-} в классах $L_p(a, b)$ суммируемых функций, а также в классах гельдеровских функций.

Отметим простую связь между операторами I^{α}_{a+} и I^{α}_{b-}:

$$QI^{\alpha}_{a+} = I^{\alpha}_{b-}Q, \quad QI^{\alpha}_{b-} = I^{\alpha}_{a+}Q, \tag{2.19}$$

где Q — *оператор «отражения»*: $(Q\varphi)(x) = \varphi(a+b-x)$.

Справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(x)\,(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)\, dx = \int_a^b \psi(x)\,(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x)\, dx, \tag{2.20}$$

называемая иногда *формулой дробного интегрирования по частям* (см. также (2.64)). Она доказывается непосредственной перестановкой порядка интегрирования, например, в левой части по формуле Дирихле (1.32). Формула (2.20) справедлива, если

$$\varphi(x) \in L_p, \quad \psi(x) \in L_q, \quad 1/p + 1/q \leqslant 1 + \alpha, \quad p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1,$$

но $p \neq 1$, $q \neq 1$ в случае $1/p + 1/q = 1 + \alpha$. Обоснование соотношения (2.20) при этих условиях будет дано в § 3, п. 3°.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$I^{\alpha}_{a+}\, I^{\beta}_{a+}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi, \quad I^{\alpha}_{b-}\, I^{\beta}_{b-}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{b-}\varphi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{2.21}$$

Тождества (2.21) выполняются в каждой точке, если $\varphi(t) \in C([a, b])$, и почти всюду, если $\varphi(t) \in L_1(a, b)$ (если $\alpha + \beta \geqslant 1$, то и для $\varphi(t) \in L_1(a, b)$ они справедливы в каждой точке). Доказательство свойства (2.21) получаем непосредственной проверкой:

$$I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}};$$

меняя порядок интегрирования и делая после этого во внутреннем интеграле замену $t = \tau + s(x-\tau)$, находим

$$I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+}\varphi = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}},$$

что и доказывает (2.21). Перестановка порядка интегрирования здесь обосновывается с помощью теоремы Фубини.

Свойство (2.21) называется *полугрупповым свойством* дробного интегрирования. В п. 7° этого параграфа мы рассмотрим это свойство и для дробного дифференцирования.

Что касается дробного дифференцирования, то его естественно ввести как операцию, обратную дробному интегрированию. С учетом полученного выше обращения уравнения Абеля (2.1) или уравнения (2.5) приходим к следующему определению.

Определение 2.2. *Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, каждое из выражений*

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{2.22}$$

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{2.23}$$

называется дробной производной порядка α, $0<\alpha<1$, соответственно левосторонней и правосторонней.

Дробные производные (2.22), (2.23) называют обычно производными Римана — Лиувилля.

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\alpha>0$, а дробные производные — пока только для порядка $0<\alpha<1$. Прежде чем перейти к случаю $\alpha\geqslant 1$, дадим простой достаточный признак существования дробных производных.

Лемма 2.2. *Если $f(x)\in AC([a, b])$, то функция $f(x)$ имеет почти всюду производные $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$ и $\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f$, $0<\alpha<1$, причем $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f\in L_r(a, b)$, $1\leqslant r<1/\alpha$, и их можно представить также в виде*

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \tag{2.24}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{f'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right]. \tag{2.25}$$

Утверждение леммы вытекает из следствия леммы 2.1 (принадлежность $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f$ классу L_r, $1\leqslant r<1/\alpha$, проверяется непосредственно).

Отметим, что в § 14 приводятся формулы типа (2.24), (2.25) для дробных производных в случае, когда производная $f'(t)$ не обязательно интегрируема в точке $t=a$ или $t=b$ соответственно (см. (14.29), (14.30)).

Позже в § 13, пп. 2, 3° будут даны и другие достаточные условия для существования дробных производных, более полезные в приложениях и допускающие, в частности, интегрируемые особенности у функции $f(x)$. Отметим в связи с этим пример функции $f(x)=(x-a)^{-\mu}$, $0<\mu<1$, на которой $(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)$ определена. Непосредственное вычисление с учетом свойств бета- и гамма-функций приводит к формуле Эйлера

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)}\frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}, \tag{2.26}$$

в частности

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)\equiv 0, \text{ если } f(x) = \frac{1}{(x-a)^{1-\alpha}}. \tag{2.27}$$

Дробная производная (2.26) будет интегрируемой функцией, если $\mu+\alpha<1$. Эта ситуация будет характерной (см. § 13, пп. 2, 3°) в том смысле, что функция $f(x)$ с интегрируемой особенностью будет иметь интегрируемую дробную производную $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$, если порядок особенности у $f(x)$ меньше чем $1-\alpha$.

Замечание 2.1. Утверждение (2.27) означает, что функция $(x-a)^{\alpha-1}$ играет для дробной производной $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$ ту же роль, что и постоянная для обычного дифференцирования.

Перейдем, наконец, к дробным производным больших порядков $\alpha\geqslant 1$. Будем пользоваться стандартными обозначениями: $[\alpha]$ — целая часть числа α, $\{\alpha\}$ — дробная часть числа α, $0\leqslant\{\alpha\}<1$, так что

$$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}. \tag{2.28}$$

Если α — целое число, то под дробной производной порядка α будем понимать обычное дифференцирование:

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\quad \mathscr{D}^{\alpha}_{b-}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\quad \alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2.29}$$

Если же α — не целое, то естественно ввести $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f$ по формулам

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f\overset{\text{def}}{=}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathscr{D}^{\{\alpha\}}_{a+}f=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f, \tag{2.30}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f\overset{\text{def}}{=}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathscr{D}^{\{\alpha\}}_{b-}f=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}I^{1-\{\alpha\}}_{b-}f. \tag{2.31}$$

Таким образом,

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1, \tag{2.32}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1. \tag{2.33}$$

Будем пользоваться также обозначениями

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f=I^{-\alpha}_{a+}f=(I^{\alpha}_{a+})^{-1}f,\quad \alpha>0, \tag{2.34}$$

понимая под каждым из них производную (2.22), (2.32) (аналогично истолковываются и символы $\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f=I^{-\alpha}_{b-}f$). Отметим, что иногда (см. § 42) вместо $\mathscr{D}^{\alpha}_{0+}$ используется обозначение $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}f(x)=(\mathscr{D}^{\alpha}_{0+}f)(x)$.

Достаточное условие существования производных (2.32), (2.33) состоит в том, чтобы

$$\int_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\in AC^{[\alpha]}([a,\ b]),$$

где $AC^{[\alpha]}([a,\ b])$ — класс, введенный определением 1.3. Для выполнения этого условия достаточно, чтобы $f(x)\in AC^{[\alpha]}([a,\ b])$.

Нетрудно проверить, что формула (2.26) имеет место при произвольных $\alpha>0$ и аналогично (2.27)

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)\equiv 0,\ \text{если}\ f(x)=(x-a)^{\alpha-k},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 1+[\alpha]. \tag{2.35}$$

4°. Дробные интегралы и производные комплексного порядка. Введенным при вещественных $\alpha > 0$ в п. 3° операциям дробного интегрирования I_{a+}^{α}, I_{b-}^{α} и дробного дифференцирования $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}$, $\mathscr{D}_{b-}^{\alpha}$ можно придать смысл и при комплексных значениях α таких, что $\operatorname{Re}\alpha > 0$ (о случае $\operatorname{Re}\alpha = 0$ скажем особо). Для этого во всех определениях достаточно пояснить выбор значения многозначной степенной функции $\tau^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbf{C}$. Договоримся, что всюду в дальнейшем

$$\tau^{\alpha} = \tau^{\alpha_0}[\cos(\theta \ln \tau) + i \sin(\theta \ln \tau)], \quad \alpha = \alpha_0 + i\theta, \quad \tau > 0. \tag{2.36}$$

При этом сохраняются утверждения леммы 2.1, формулы (2.24), (2.25) (при $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$), формулы (2.26), (2.27), (2.34) и только в определениях (2.30) — (2.33) следует заменить $[\alpha]$ на $[\operatorname{Re}\alpha]$.

Очевидно, что интегралы (производные) комплексного порядка α ($\operatorname{Re}\alpha \neq 0$) являются аналитическим продолжением по параметру α дробных интегралов (производных), определенных первоначально при $\operatorname{Im}\alpha = 0$.

В случае чисто мнимого порядка дробные производные, определенные, подобно (2.22), по формуле

$$\mathscr{D}_{a+}^{i\theta} f = \frac{1}{\Gamma(1 - i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - t)^{-i\theta} f(t)\, dt, \tag{2.37}$$

имеют смысл. Использовать же (2.17) для определения дробных интегралов чисто мнимого порядка нельзя ввиду расходимости интеграла при $\alpha = i\theta$. Поэтому дробные интегралы чисто мнимого порядка принято определять как $I_{a+}^{i\theta} f = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1+i\theta} f$. Таким образом,

$$I_{a+}^{i\theta} f \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1 + i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - t)^{i\theta} f(t)\, dt, \tag{2.38}$$

$$I_{b-}^{i\theta} f \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\Gamma(1 + i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t - x)^{i\theta} f(t)\, dt. \tag{2.39}$$

Чтобы завершить определение дробного интегродифференцирования при всех $\alpha \in \mathbf{C}$, остается при $\alpha = 0$ ввести единичный оператор:

$$\mathscr{D}_{a+}^{0} \varphi \overset{\text{def}}{=} I_{a+}^{0} \varphi = \varphi. \tag{2.40}$$

Как и следовало ожидать, между интегралами и производными чисто мнимого порядка нет существенного различия (ср. (2.37) и (2.38)) (в отличие от случая $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$). Операторы $I_{a+}^{i\theta}$ и $\mathscr{D}_{a+}^{i\theta}$ по своей природе примыкают скорее к сингулярным операторам, так что название «операции интегрирования и дифференцирования» для них чисто условное.

Лемма 2.3. *Если $f(x) \in AC([a, b])$, то $\mathscr{D}_{a+}^{i\theta} f$ существует почти для всех x и может быть представлена в виде (2.24) при $\alpha = i\theta$.*

Доказательство леммы 2.3 совершенно аналогично доказательству леммы 2.1 и следствия из нее.

Условие $f(x) \in AC([a, b])$ для существования дробных интегралов (производных) чисто мнимого порядка является избыточным, см. об этом в § 4, п. 2°, 2.10. Позже в лемме 8.2 § 8 увидим, что $\mathscr{D}_{a+}^{i\theta} f$ допускает доопределение на функциях $f \in L_p$, $p > 1$, и оператор $\mathscr{D}_{a+}^{i\theta}$ ограничен в пространстве L_p, $p > 1$.

Приведем в следующей далее теореме достаточные условия для существования дробных производных произвольного комплексного порядка α, $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$ (более простые случаи $0<\alpha<1$ и $\operatorname{Re}\alpha=0$ выделены в леммы 2.2 и 2.3). Поскольку теорема будет формулироваться в терминах класса AC^n (см. определение 1.3), предварительно дадим одно описание этого класса.

Лемма 2.4. *Классу $AC^n([a, b])$ принадлежат те и только те функции $f(x)$, которые представимы в виде*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \qquad (2.41)$$

где $\varphi(t) \in L_1(a, b)$, а c_k — произвольные постоянные.

Доказательство леммы вытекает непосредственно из определения класса $AC^n([a, b])$, свойства (1.4) и формулы (2.16).

Заметим, что в (2.41)

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \quad c_k = f^{(k)}(a)/k!. \qquad (2.42)$$

Теорема 2.2. *Пусть $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$ и $f(x) \in AC^n([a, b])$, $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$. Тогда $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ существует почти всюду и может быть представлена в виде*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \qquad (2.43)$$

Доказательство. Так как $f(x) \in AC^n$, то имеет место представление (2.41). Подставляя его с учетом (2.42) в (2.32), после несложных преобразований получим (2.43).

Завершим этот пункт замечанием о том, что полученные в п. 1° свойства (2.20), (2.21) сохраняются, как это нетрудно видеть, и при комплексных значениях α, β, если $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ (и $1/p+1/q\leqslant 1+\operatorname{Re}\alpha$ для (2.20)). Это же относится и к теореме 2.1, лемме 2.1 и следствию из последней при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. Отметим также справедливость следующей леммы.

Лемма 2.5. *Пусть $\varphi(t) \in L_1(a, b)$. Однородное интегральное уравнение Абеля $I^{\alpha}_{a+}\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$ (почти всюду) при любом α таком, что $\operatorname{Re}\alpha > 0$.*

Доказательство. Обозначим $m = [\operatorname{Re}\alpha]$. Пусть вначале $\operatorname{Re}\alpha \neq 1, 2, \ldots$ Дифференцируя равенство $I^{\alpha}_{a+}\varphi = 0$ m раз, получаем $I^{\alpha-m}_{a+}\varphi = 0$. Здесь $0<\operatorname{Re}(\alpha-m)<1$ и тогда $\varphi \equiv 0$ в силу теоремы 2.1 (с учетом уже отмеченной ее справедливости в случае комплексного показателя). Если же $\alpha = m + i\theta$, то равенство $I^{\alpha}_{a+}\varphi = 0$ дифференцируем $m-1$ раз, придя в итоге к $\int_a^x (x-t)^{i\theta}\varphi(t)\,dt = 0$. Случай $\theta = 0$ ясен. Если же $\theta \neq 0$, то, действуя подобно (2.2), имеем $\int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{(x-t)^{1-i\theta}} \int_a^s (t-s)^{i\theta}\varphi(s)\,ds = 0$, $\varepsilon > 0$. Меняя порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и совершая после этого замену $t = s + \xi(x-s)$, получаем $\int_a^{x-\varepsilon} \varphi(s)ds \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{x-s}} \xi^{-i\theta} \times (1-\xi)^{i\theta-1}d\xi = 0$. Так как $\varphi(s) \in L_1$, то здесь возможен предельный переход под знаком первого интеграла при условии сходимости при $\varepsilon \to 0$ внутреннего интеграла. Последний сходится в силу (1.70). Устремляя поэто-

му $\varepsilon \to 0$, получаем, что $B(1-i\theta,\ i\theta)\int_a^x \varphi(s)\,ds = 0$, откуда $\varphi(x) \equiv 0$ почти всюду. Лемма доказана.

5°. Дробные интегралы некоторых элементарных функций. В следующих ниже формулах полагаем $\alpha \in \mathbf{C}$ и $I_{a+}^{\alpha}\varphi = \mathcal{D}_{a+}^{-\alpha}\varphi$ при $\operatorname{Re}\alpha < 0$.

1. Для степенных функций $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}$, $\varphi(x) = (b-x)^{\beta-1}$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, имеем соответственно

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, \quad \alpha \in \mathbf{C}, \tag{2.44}$$

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}, \quad \alpha \in \mathbf{C}. \tag{2.45}$$

Эти формулы примыкают к (2.26) и устанавливаются простым вычислением.

2. В более общем случае $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$ появляется гипергеометрическая функция Гаусса (1.72):

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = (b-a)^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,{}_2F_1\left(1-\gamma,\ \beta;\ \alpha+\beta;\ \frac{x-a}{b-a}\right),$$

$$a < x < b, \tag{2.46}$$

где $\operatorname{Re}\beta > 0$, а γ — произвольное. Формула (2.46) получается простыми преобразованиями из представления Эйлера (1.73). Подобную формулу можно записать также и для функции $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}$, где $c < a$:

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = (a-c)^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,{}_2F_1\left(1-\gamma,\ \beta;\ \alpha+\beta;\ -\frac{x-a}{a-c}\right),$$

$$c < a < x, \tag{2.47}$$

где $\operatorname{Re}\beta > 0$, а γ — произвольное. Отметим также полезные частные случаи формул (2.46), (2.47), получаемые с учетом (1.75):

$$I_{a+}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}\right] = \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-x)^{\beta}}, \quad a < x < b, \tag{2.48}$$

$$I_{a+}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(x-c)^{\alpha+\beta}}\right] = \frac{1}{(a-c)^{\alpha}}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(x-c)^{\beta}}, \quad c < a < x. \tag{2.49}$$

3. Пусть $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$, $\operatorname{Re}\beta > 0$. Тогда

$$I_{a+}^{\alpha}[(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\psi(\beta)-\psi(\beta+\alpha)+$$

$$+\ln(x-a)], \tag{2.50}$$

где $\psi(z)$ — пси-функция Эйлера (1.67). Действительно, после замены $t = a + s(x-a)$ в интеграле (при $\operatorname{Re}\alpha > 0$)

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}\ln(t-a)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt$$

получаем $I_{a+}^{\alpha}\varphi = [\Gamma(\alpha)]^{-1}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[c_1 + c_2 \ln(x-a)]$, где $c_1 = \int_0^1 \frac{s^{\beta-1}\ln s}{(1-s)^{1-\alpha}}\,ds$, $c_2 = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds$. Очевидно, $c_2 = \mathrm{B}(\alpha, \beta)$, а c_1 вычисляется дифференцированием равенства $c_2 = \mathrm{B}(\alpha, \beta)$ по параметру β.

4. Для функции $\varphi(x) = \cos\sqrt{x-a}\,/\sqrt{x-a}$ имеем

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = 2^{\alpha-1/2}\sqrt{\pi}\,(x-a)^{(2\alpha-1)/4}J_{\alpha-1/2}(\sqrt{x-a}), \quad \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0, \tag{2.51}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя (1.83). Формула (2.51) получается разложением $\cos x$ в ряд Тейлора. Соотношение (2.51) представляет собой известную в теории бесселевых функций формулу Пуассона, имеющую в равносильной форме вид

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}dt. \tag{2.52}$$

Равенства (2.51), (2.52) получаются друг из друга простыми заменами переменных.

5. Также разложением в ряд получаются формулы

$$I_{a+}^{\alpha}[(x-a)^{\alpha-1}\cos A(x-a)] = \sqrt{\pi}\left(\frac{x-a}{A}\right)^{\alpha-1/2} \times$$

$$\times \cos\frac{A(x-a)}{2}\,J_{\alpha-1/2}\left(\frac{A(x-a)}{2}\right), \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{2.53}$$

$$I_{a+}^{\alpha}[(x-a)^{\mu/2}J_\mu(\sqrt{x-a})] = 2^\alpha(x-a)^{(\mu+\alpha)/2}J_{\mu+\alpha}(\sqrt{x-a}), \tag{2.54}$$

$$\alpha \in \mathbf{C}, \quad \operatorname{Re}\mu > -1.$$

При $\mu = -1/2$ из (2.54) следует соотношение (2.51).

Мы не останавливаемся здесь на дробном интегродифференцировании показательной функции $e^{\gamma x}$ и тригонометрических функций. Это связано с существом дела: «римановская» форма дробного интегрирования, используемая при $a \neq -\infty$ (или $b \neq +\infty$), не дает естественной формулы типа $I^\alpha(e^{\gamma x}) = \gamma^{-\alpha}e^{\gamma x}$. Такой результат получится, если вместо I_{a+}^{α} использовать «лиувиллевскую» форму дробного интегродифференцирования, отвечающую случаю $a = -\infty$ (или $b = +\infty$). Поэтому на дробном интегрировании показательной и тригонометрических функций мы остановимся в § 5, п. 1°, см. также § 9, п. 3°, где наряду с краткими таблицами дробных интегралов различных элементарных и специальных функций приводится информация о других таких таблицах и методах вычисления этих интегралов.

6°. Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции. Хорошо известно, что обычное дифференцирование d/dx и интегрирование $\int_a^x \ldots dt$ являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т. е. $(d/dx)\int_a^x \varphi(t)\,dt = \varphi(x)$. Однако, вообще говоря, $\int_a^x \varphi'(t)\,dt \neq \varphi(x)$ (так как добавляется постоянная $-\varphi(a)$). Точно так же $(d/dx)^n I_{a+}^n\varphi \equiv \varphi$, но $I_{a+}^n\varphi^{(n)} \neq \varphi$, отличаясь от φ многочленом порядка $n-1$. Подобным же образом для дробного дифференцирования всегда будет $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha}\varphi \equiv \varphi$, но $I_{a+}^{\alpha}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}\varphi$ не всегда совпадает с $\varphi(x)$

(так как вмешиваются функции $(x-a)^{\alpha-k}$, $k=1, 2, \ldots, [\operatorname{Re}\alpha]-1$, играющие роль многочленов для дробного дифференцирования, см. (2.35)). Доказываемая ниже теорема 2.4 проясняет ситуацию. Предварительно нам удобно ввести

Определение 2.3. *Через* $I^{\alpha}_{a+}(L_p)$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, *обозначим класс функций* $f(x)$, *представимых левосторонним дробным интегралом порядка* α *от суммируемой функции:* $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_p(a, b)$, $1\leqslant p<\infty$.

Описание класса $I^{\alpha}_{a+}(L_1)$ дает следующая теорема, обобщающая теорему 2.1.

Теорема 2.3. *Для того чтобы* $f(x)\in I^{\alpha}_{a+}(L_1)$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{n-\alpha}(x)\overset{\text{def}}{=}I^{n-\alpha}_{a+}f\in AC^n([a, b]), \tag{2.55}$$

где $n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$, *и чтобы*

$$f^{(k)}_{n-\alpha}(a)=0, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.56}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_1(a, b)$. Тогда в силу полугруппового свойства (2.21) $I^{n-\alpha}_{a+}f=I^{n}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_1(a, b)$, и выполнимость условий (2.55), (2.56) вытекает из леммы 2.4.

Достаточность. При выполнении условий (2.55), (2.56) можем представить $f_{n-\alpha}(x)$, согласно лемме 2.4, в виде $f_{n-\alpha}(x)=I^{n}_{a+}\varphi$, где $\varphi\in L_1(a, b)$. Следовательно, $I^{n-\alpha}_{a+}f=I^{n}_{a+}\varphi=I^{n-\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в силу полугруппового свойства (2.21). Отсюда $I^{n-\alpha}_{a+}(f-I^{\alpha}_{a+}\varphi)=0$. На основании леммы 2.5 $f-I^{\alpha}_{a+}\varphi=0$, поскольку $\operatorname{Re}(n-\alpha)>0$. Теорема доказана.

В связи с определением 2.3 подчеркнем, что представимость функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α и существование у $f(x)$ дробной производной этого порядка — не одно и то же. Так, для знакомой нам функции $f(x)=(x-a)^{\alpha-1}$, $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, дробная производная $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ существует и тождественно равна нулю, см. (2.35). Однако функция $(x-a)^{\alpha-1}$ не представима дробным интегралом порядка α ни от какой суммируемой функции (для нее $f_{1-\alpha}(a)\neq 0$, так что нарушено условие (2.56)). Читателю, знакомому с теорией обобщенных функций, ясно, что функция $(x-a)^{\alpha-1}$ может рассматриваться лишь как интеграл порядка α от обобщенной функции, а именно от дельта-функции Дирака $\delta(x-a)$ (см. § 8, п. 1°).

Далее подробнее остановимся на самом понятии существования дробной производной. Пусть для простоты $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. Говоря, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f=(d/dx)I^{1-\alpha}_{a+}f$ существует почти всюду, мы должны учитывать следующее. Известно, что существование у функции $g(x)$ суммируемой производной $g'(x)$ почти для всех x еще не обеспечивает восстановления $g(x)$ через первообразную, т. е. $\int\limits_a^x g'(t)\,dt\neq g(x)+c$ (см., например, книгу И. П. Натансона [1, с. 199]). Более того, существует (см. там же, с. 201) монотонная непрерывная функция $g(x)\not\equiv\text{const}$, для которой $g'(x)=0$ почти всюду (мы уже говорили об этом при доказательстве теоремы 2.1). Эти «экзотические» явления устраняются, если иметь дело с абсолютно непрерывными функциями (напомним, что и интегрирование по частям в интеграле Лебега возможно, вообще говоря, лишь на абсолютно непрерывных функциях; это уже использовалось при доказательстве теоремы 2.3).

Из сказанного ясно, что предположения «дробная производная $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ существует почти всюду и суммируема» недостаточно для построения удовлетворительной теории, т. е. недостаточно для представимости $f(x)$

в виде дробного интеграла порядка α. Нужно вложить в это предположение более сильный смысл. Для этого введем

Определение 2.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Будем говорить, что функция* $f(x) \in L_1(a, b)$ *имеет суммируемую дробную производную* $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, *если* $I^{n-\alpha}_{a+}f \in AC^n([a, b])$, $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$.

Другими словами, этим определением введено понятие, использующее только первое из двух условий (2.55), (2.56), описывающих класс $I^{\alpha}_{a+}(L_1)$.

Замечание 2.2. Если $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = (d/dx)^n I^{n-\alpha}_{a+}f$ существует в обычном смысле, т. е. $I^{n-\alpha}_{a+}f$ дифференцируема до порядка n в каждой точке, то, очевидно, $f(x)$ имеет производную $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ в смысле определения 2.4.

Мы сочли необходимым подробно остановиться на приведенных соображениях и, в частности, на определении 2.4, поскольку смешение двух понятий (существование дробной производной и представимость функции дробным интегралом), а также нечеткое толкование первого из этих понятий приводило к ошибкам в работах многих авторов.

Следующая теорема, основная в этом пункте, отражает вопрос, вынесенный в заголовок.

Теорема 2.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Тогда равенство*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+}\varphi = \varphi(x) \tag{2.57}$$

выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, *а равенство*

$$I^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = f(x) \tag{2.58}$$

— для функции

$$f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_1). \tag{2.59}$$

Если вместо (2.59) предположить, что функция $f(x) \in L_1(a, b)$ *имеет суммируемую производную* $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ *(в смысле определения 2.4), то (2.58), вообще говоря, неверно и заменяется формулой*

$$I^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f^{(n-k-1)}_{n-\alpha}(a), \tag{2.60}$$

где $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$ *и* $f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f$. *В частности, при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$

$$I^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{2.61}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Меняя порядок интегрирования, после вычисления внутреннего интеграла получаем

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \varphi(s)(x-s)^{n-1}\,ds \tag{2.62}$$

и тогда из (2.62) ввиду (2.16) следует (2.57).

Далее, (2.58) при условии (2.59) вытекает незамедлительно из (2.57) (отметим также, что (2.58) фактически было получено при доказательстве достаточной части теоремы 2.3). Остается доказать (2.60). Для этого нужно произвести те же рассуждения, что и при доказательстве достаточности в теореме 2.3, только на этот раз внеинтегральные слагаемые не будут исчезать и дадут дополнительную сумму в (2.60).

Следствие 1. *Справедлив следующий аналог формулы Тейлора:*

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha+j}f)(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j}+R_n(x),\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{2.63}$$

где $R_n(x)=(I_{a+}^{\alpha+n}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha+n}f)(x)$, *в предположении, что* $f(x)$ *имеет суммируемую производную* $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha+n}f$ *(в смысле определения 2.4).*

Действительно, формула (2.63) есть очевидная перефразировка свойства (2.60).

Отметим еще, что некоторое обобщение формулы (2.60) приведено в § 4, п. 2°, 2.8.

Следствие 2. *Справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}g)(x)\,dx=\int_a^b g(x)(\mathscr{D}_{b-}^{\alpha}f)(x)\,dx,\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1, \tag{2.64}$$

называемая, как и (2.20), формулой дробного интегрирования по частям Предполагается, что $f(x)\in I_{b-}^{\alpha}(L_p)$, $g(x)\in I_{a+}^{\alpha}(L_q)$, $p^{-1}+q^{-1}\leqslant 1+\alpha$.

Действительно, (2.64) следует из (2.20), если положить $\mathscr{D}_{b-}^{\alpha}f=\varphi(x)$, $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}g=\psi(x)$ и учесть (2.58).

Простое достаточное условие на функции $f(x)$, $g(x)$ для выполнимости (2.64) состоит в том, чтобы $f(x)$, $g(x)\in C([a,\ b])$, а $(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}g)(x)$, $(\mathscr{D}_{b-}^{\alpha}f)(x)$ существовали в каждой точке $x\in[a,\ b]$ и были непрерывны. Позже, в § 14 в следствии из теоремы 14.4 укажем менее ограничительные достаточные условия.

7°. Формулы композиции. Связь с полугруппами операторов. В следующей теореме нам удобно воспользоваться единообразным обозначением (2.34) и для дробных интегралов, и для дробных производных, считая, что $I_{a+}^{\alpha}=\mathscr{D}_{a+}^{-\alpha}$ при $\operatorname{Re}\alpha<0$.

Теорема 2.5. *Равенство*

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi \tag{2.65}$$

выполняется в каждом из следующих случаев:

1) $\operatorname{Re}\beta>0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$, $\varphi(x)\in L_1(a,\ b)$;

2) $\operatorname{Re}\beta<0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\varphi(x)\in I_{a+}^{-\beta}(L_1)$;

3) $\operatorname{Re}\alpha<0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<0$, $\varphi(x)\in I_{a+}^{-\alpha-\beta}(L_1)$

(*допустимы также случаи* $\alpha=0$, $\beta=0$ *и* $\alpha+\beta=0$ *при вещественных* α *и* β).

Доказательство. 1) В случае $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ *полугрупповое свойство* (2.65) уже установлено в (2.21). Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\alpha=0$, $\operatorname{Re}\beta>0$, положив $\alpha=i\theta$. Тогда

$$I_{a+}^{i\theta}I_{a+}^{\beta}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\varphi(s)\,ds\int_s^x(x-t)^{i\theta}(t-s)^{\beta-1}dt=$$

$$=\frac{B(1+i\theta,\ \beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\varphi(s)(x-s)^{i\theta+\beta}ds=\frac{d}{dx}I_{a+}^{i\theta+\beta+1}\varphi. \tag{2.66}$$

Так как $\operatorname{Re}(i\theta+\beta+1)=1+\operatorname{Re}\beta>1$, а равенство (2.65) уже доказано при $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$, то $I_{a+}^{i\theta+\beta+1}\varphi=I_{a+}^{1}I_{a+}^{i\theta+\beta}\varphi=\int_a^x(I_{a+}^{i\theta+\beta}\varphi)(t)\,dt$, и поэтому из (2.66) следует (2.65), когда $\alpha=i\theta$.

Теперь в случае 1) осталось рассмотреть возможность $\operatorname{Re}\alpha<0$. Имеем

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \mathscr{D}_{a+}^{-\alpha} I_{a+}^{-\alpha+\beta+\alpha}\varphi = \mathscr{D}_{a+}^{-\alpha} I_{a+}^{-\alpha} I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{2.67}$$

Последний переход справедлив ввиду (2.65), поскольку $\operatorname{Re}(-\alpha)>0$ и $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$. Применив далее (2.57), из (2.67) получаем (2.65) и в случае $\operatorname{Re}\alpha<0$.

2) В случае $\operatorname{Re}\beta<0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$ по предположению имеем: $\varphi = I_{a+}^{-\beta}\psi$, где $\psi\in L_1$, поэтому $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} I_{a+}^{-\beta}\psi$. Так как $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+(-\beta))>0$, то согласно случаю 1) отсюда следует, что $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha}\psi = I_{a+}^{\alpha}\mathscr{D}_{a+}^{-\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi$.

3) В оставшемся случае по предположению $\varphi = I_{a+}^{-\alpha-\beta}\psi$, $\psi\in L_1$, и тогда $I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{-\alpha-\beta}\psi = I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{-\alpha}\psi$ согласно случаю 1). Таким образом, $I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \mathscr{D}_{a+}^{-\alpha} I_{a+}^{-\alpha}\psi$, откуда в силу (2.57) и следует (2.65).

Остается заметить, что случаи $\alpha=0$, $\beta=0$ тривиальны, а случай $\alpha+\beta=0$ совпадает с (2.57) или (2.58). Теорема доказана.

Замечание 2.3. В теореме 2.5 остались неохваченными случаи: 1) $\operatorname{Re}\beta=0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$; 2) $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)=0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ (но случай $\alpha+\beta=0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ содержится в теореме 2.4); 3) $\operatorname{Re}\alpha=0$, $\operatorname{Re}\beta<0$. Можно показать, что утверждения теоремы 2.5 выполняются и в этих случаях, если сузить класс допускаемых функций соответственно условиями: 1) существует суммируемая производная мнимого порядка $\mathscr{D}_{a+}^{-\beta}\varphi$; 2) существует суммируемая производная мнимого порядка $\mathscr{D}_{a+}^{-\alpha-\beta}\varphi$; 3) существуют суммируемые производные $\mathscr{D}_{a+}^{-\beta}\varphi$ и $\mathscr{D}_{a+}^{-\alpha-\beta}\varphi$. Все эти условия и условия теоремы 2.5 после объединения приводят к следующему утверждению: *пусть* $\varphi\in L_1(a, b)$, *причем существуют и суммируемы* $I_{a+}^{\beta}\varphi$ *и* $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi$; *тогда существует и суммируема композиция* $I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi$ *и при* $\operatorname{Re}\beta\geqslant 0$ *выполняется равенство (2.65)*, см. теорему 10.1 ниже.

Замечание 2.4. В случае 2) теоремы 2.5 при нарушении условия $\varphi\in I_{a+}^{-\beta}(L_1)$ равенство (2.65) не выполняется. Если вместо этого условия потребовать лишь, что функция $\varphi(x)$ имеет суммируемую дробную производную $\mathscr{D}_{a+}^{-\beta}\varphi$ (в смысле определения 2.4), то равенство (2.65) заменится на соотношение

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{n+\beta}^{(n-k-1)}(a)}{\Gamma(\alpha-k)}(x-a)^{\alpha-k-1}, \tag{2.68}$$

где $n=[-\operatorname{Re}\beta]+1$ и $\varphi_{n+\beta}(x) = I_{a+}^{n+\beta}\varphi$, которое выводится из (2.60) помощью свойства (2.65).

Доказанное свойство (2.65) дробных интегралов и производных называется *полугрупповым свойством*. Этот термин связан с понятием полугруппы операторов. Приведем соответствующее определение, считая для простоты параметр α вещественным.

Определение 2.5. *Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов* T_α, $\alpha\geqslant 0$, *в банаховом пространстве* X *образует полугруппу, если*

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}, \quad \alpha\geqslant 0, \quad \beta\geqslant 0, \tag{2.69}$$

$$T_0\varphi = \varphi, \quad \varphi\in X. \tag{2.70}$$

Полугруппа операторов называется сильно непрерывной, если

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \| T_\alpha\varphi - T_{\alpha_0}\varphi \|_X = 0, \quad 0\leqslant\alpha_0<\infty, \tag{2.71}$$

для каждого $\varphi \in X$. *Полугруппа называется непрерывной в равномерной (операторной) топологии, если предел (2.71) существует в операторной топологии, т. е.* $\lim \| T_\alpha - T_{\alpha_0} \| = 0$ *при* $\alpha \to \alpha_0$.

Легко видеть в силу (2.69), что если полугруппа сильно непрерывна при $\alpha = 0$, то она неизбежно сильно непрерывна при всех $\alpha \geqslant 0$.

Теорема 2.6. *Операторы дробного интегрирования образуют в* $L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$, *полугруппу, непрерывную в равномерной топологии для всех* $\alpha > 0$ *и сильно непрерывную для всех* $\alpha \geqslant 0$.

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что операторы дробного интегрирования ограничены в $L_p(a, b)$, т. е. имеют место следующие оценки:

$$\| I_{a+}^{\alpha} \varphi \|_{L_p(a, b)} \leqslant \frac{(b-a)^{\operatorname{Re}\alpha}}{\operatorname{Re}\alpha \, |\Gamma(\alpha)|} \| \varphi \|_{L_p(a, b)}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{2.72}$$

$$\| I_{b-}^{\alpha} \varphi \|_{L_p(a, b)} \leqslant \frac{(b-a)^{\operatorname{Re}\alpha}}{\operatorname{Re}\alpha \, |\Gamma(\alpha)|} \| \varphi \|_{L_p(a, b)}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{2.73}$$

Это проверяется несложными преобразованиями с помощью обобщенного неравенства Минковского (1.33). Свойство (2.69), т. е. равенство (2.65), доказано в теореме 2.5. Остается выяснить характер непрерывности полугруппы. Пусть $\alpha_0 > 0$. Имеем

$$I_{a+}^{\alpha_0} \varphi - I_{a+}^{\alpha} \varphi = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] \int_a^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha_0}} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [(x-t)^{\alpha_0 - 1} - (x-t)^{\alpha - 1}] \varphi(t)\, dt = A\varphi + B\varphi.$$

Оценим $\| A\varphi \|_{L_p}$, $\| B\varphi \|_{L_p}$. В силу (2.72)

$$\| A\varphi \|_{L_p} \leqslant \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} \| \varphi \|_{L_p}. \tag{2.74}$$

Продолжая $\varphi(x)$ нулем за пределы $[a, b]$, получим

$$|B\varphi| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha - \alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} |\varphi(x-t)|\, dt.$$

Следовательно, в силу неравенства Минковского (1.33)

$$\| B\varphi \|_{L_p} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha - \alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} dt \left(\int_a^b |\varphi(x-t)|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha - \alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} dt \, \| \varphi \|_{L_p}. \tag{2.75}$$

Собирая оценки (2.74), (2.75), получаем

$$\frac{\| (I_{a+}^{\alpha} - I_{a+}^{\alpha_0}) \varphi \|}{\| \varphi \|} \leqslant \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha - \alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} dt.$$

Замечая, что в интеграле справа можно перейти к пределу при $\alpha \to \alpha_0$ и что функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна при $\alpha > 0$ и $\Gamma(\alpha) \neq 0$, приходим к равенству $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \| I_{a+}^{\alpha} - I_{a+}^{\alpha_0} \| = 0$.

Пусть $\alpha_0 = 0$. Покажем, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \| I_{a+}^{\alpha} \varphi - \varphi \|_{L_p} = 0. \tag{2.76}$$

Имеем

$$I_{a+}^{\alpha} \varphi - \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt - \varphi(x) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x)}{t^{1-\alpha}}\, dt + \varphi(x) \left[\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right] = U\varphi + V\varphi,$$

так что $\| I_{a+}^{\alpha} \varphi - \varphi \|_{L_p} \leqslant \| U\varphi \|_{L_p} + \| V\varphi \|_{L_p}$. Очевидно,

$$\| V\varphi \|_{L_p}^p \leqslant \int_a^b | \varphi(x) |^p \left| \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right|^p dx.$$

В последнем интеграле возможен предельный переход под знаком интеграла при $\alpha \to 0$ в силу мажорантной теоремы Лебега 1.2. Поэтому $\lim\limits_{\alpha \to 0+} \| V\varphi \|_{L_p} = 0$. Далее, для оценки $U\varphi$ приблизим функцию $\varphi(x)$ многочленом $P(x)$ по норме пространства L_p (см. свойство д) пространства L_p в § 1, п. 2°). Тогда

$$\| U\varphi \|_{L_p} \leqslant \| U(\varphi - P) \|_{L_p} + \| UP \|_{L_p}. \tag{2.77}$$

Применяя в первом слагаемом обобщенное неравенство Минковского (при обычном продолжении нулем функции $\varphi(x)$ за пределы $[a, b]$), получаем

$$\| U(\varphi - P) \|_{L_p} \leqslant \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \| \varphi - P \|_{L_p} < \text{const}\, \varepsilon.$$

Для второго слагаемого в (2.77)

$$| UP | \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{b-a} t^{\alpha} \max | P'(t) |\, dt \underset{\alpha \to 0}{\to} 0,$$

что и завершает оценки. Теорема доказана.

Непрерывность полугруппы I_{a+}^{α} в точке $\alpha = 0$ можно сформулировать не только в терминах сходимости по норме пространства L_p, но и в терминах сходимости почти всюду. Дадим следующее

Определение 2.6. *Точка x_0 называется точкой Лебега функции $\varphi(x) \in L_1(a, b)$, если*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t [\varphi(x_0 - s) - \varphi(x_0)]\, ds = 0. \tag{2.78}$$

Известно (см., например, книгу А. Зигмунда [2, с. 111]), что почти все точки $x_0 \in [a, b]$ являются точками Лебега функции $\varphi(x) \in L_1(a, b)$.

Теорема 2.7. *Пусть $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Тогда в каждой точке Лебега функции $\varphi(x)$ и, следовательно, почти всюду на $[a, b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{\alpha \to 0+} (I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = \varphi(x). \tag{2.79}$$

Доказательство. Пусть x_0 — точка Лебега функции $\varphi(x)$. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{x_0-t}^{x_0} \varphi(s)\,ds = \int_0^t \varphi(x_0 - s)\,ds. \tag{2.80}$$

Имеем

$$\frac{\Phi(t)}{t} - \varphi(x_0) = \frac{1}{t}\int_0^t [\varphi(x_0 - s) - \varphi(x_0)]\,ds \to 0$$

в силу (2.78). Следовательно, $\Phi(t) = t[\varphi(x_0) + b(t)]$, где $b(t)$ — ограниченная функция, причем $|b(t)| < \varepsilon$ как только $0 < t < \delta = \delta(\varepsilon)$. Имеем

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a} t^{\alpha-1}\varphi(x_0 - t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a} t^{\alpha-1}d\Phi =$$

$$= \frac{\Phi(x_0-a)}{\Gamma(\alpha)(x_0-a)^{1-\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left.\frac{\Phi(t)}{t^{1-\alpha}}\right|_{t=0} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}\frac{\Phi(t)\,dt}{t^{2-\alpha}} =$$

$$= \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{x_0-a} t^{\alpha-1}b(t)\,dt + \frac{\Phi(x_0-a)}{\Gamma(\alpha)(x_0-a)^{1-\alpha}} +$$

$$+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\varphi(x_0)\int_0^{x_0-a} t^{\alpha-1}dt + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}b(t)\,dt.$$

Отсюда

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x_0) - \varphi(x_0) = \frac{\Phi(x_0-a)}{\Gamma(\alpha)(x_0-a)^{1-\alpha}} + \varphi(x_0)\left[\frac{1-\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_0-a)^{\alpha} - 1\right] +$$

$$+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}b(t)\,dt + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{x_0-a} t^{\alpha-1}b(t)\,dt.$$

В последнем интеграле можно перейти к пределу при $\alpha \to 0$, поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0+}|(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x_0) - \varphi(x_0)| \leqslant |\varphi(x_0)| \lim_{\alpha\to 0+}\left|\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(x_0-a)^{\alpha} - 1\right| +$$

$$+ \lim_{\alpha\to 0+}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}b(t)\,dt\right| \leqslant \lim_{\alpha\to 0+}\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\delta^{\alpha}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы получаем отсюда (2.79). Теорема 2.7 доказана.

Замечание 2.5. Можно указать более точно характер приближения оператора I_{a+}^{α} к единичному при $\alpha \to +0$:

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \varphi(x) + \alpha\left[-\Gamma'(1)\,\varphi(x) + \frac{d}{dx}\int_a^x \ln(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right] + o(\alpha),$$

где $o(\alpha)/\alpha \to 0$ почти для всех x. Эта формула получается заменой отношения $[I_{a+}^{\alpha}\varphi - \varphi]/\alpha$ его пределом при $\alpha \to +0$, который легко находится

по правилу Лопиталя (об этом пределе, известном в теории полугрупп операторов под названием производящего оператора, см. в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, с. 677]).

§ 3. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ И СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим действие операторов дробного интегрирования в пространствах гельдеровских и суммируемых функций. Теоремы этого параграфа показывают, что дробное интегрирование не только сохраняет, но и существенно улучшает свойства функций. Результаты формулируются и доказываются для дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi$. Читатель легко может переформулировать их для дробных интегралов $I^{\alpha}_{b-}\varphi$ на основании перехода (2.19).

Подчеркнем, что излагаемые в пп. 1, 2° этого параграфа результаты о действии операторов дробного интегрирования из H^{λ}_0 в $H^{\lambda+\alpha}_0$ или в весовом варианте из $H^{\lambda}_0(\rho)$ в $H^{\lambda+\alpha}_0(\rho)$ распространяются в § 13, п. 6° на обобщенные классы Гельдера H^{ω}_0, когда условие гельдеровости имеет вид

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant c\omega(h),$$

где $\omega(h)$ — заданная непрерывная неубывающая функция, $\omega(0)=0$.

Здесь и всюду в дальнейшем c, c_1, c_2, ... обозначают абсолютные постоянные, не зависящие от переменных величин x, h и т. д. Различные такие постоянные могут обозначаться одной буквой.

Всюду в этом параграфе $[a, b]$ — конечный отрезок, за исключением п. 4°, где в теореме 3.7 и леммах 3.2, 3.3, 3.7 допускается и случай полуоси: $-\infty<a<b\leqslant\infty$.

1°. Действие в пространстве H^{λ}. Следующие ниже теоремы 3.1—3.4 показывают, что дробное интегрирование улучшает, вообще говоря, порядок гельдеровости λ на порядок α дробного интеграла. Случай, когда $\lambda+\alpha$ — целое число, играет особую роль, приводя к классу $H^{\lambda,1}$ (см. определение 1.7). Начнем с основного случая $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0<\alpha<1$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi(x)\in H^{\lambda}([a, b])$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0<\alpha<1$. *Тогда дробный интеграл* $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ *имеет вид*

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=\frac{\varphi(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha}+\psi(x), \tag{3.1}$$

где $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha}$, *если* $\lambda+\alpha\neq 1$, *и* $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha,1}$, *если* $\lambda+\alpha=1$, *при этом*

$$|\psi(x)|\leqslant A(x-a)^{\lambda+\alpha}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Представляя $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в виде

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=\frac{\varphi(a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,$$

получаем равенство (3.1), в котором

$$\psi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Очевидно,

$$|\psi(x)|\leqslant\|\varphi\|_{H^{\lambda}}\Gamma^{-1}(\alpha)\int_a^x(t-a)^{\lambda}(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Отсюда после замены $t = a + s(x-a)$ вытекает оценка (3.2).

Покажем, что $\psi(x) \in H^{\lambda+\alpha}$ или $\psi(x) \in H^{\lambda+\alpha,1}$. Рассмотрим случай $\lambda + \alpha \leqslant 1$. Обозначим для краткости $g(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$, так что

$$|g(x)| \leqslant A(x-a)^{\lambda}. \tag{3.3}$$

Пусть $h > 0$; $x,\ x+h \in [a,\ b]$. Имеем

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{-h}^{x-a} \frac{g(x-t)\,dt}{(t+h)^{1-\alpha}} - \int_{0}^{x-a} \frac{g(x-t)}{t^{1-\alpha}}\,dt\right) =$$

$$= \frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[(x-a+h)^{\alpha} - (x-a)^{\alpha}\right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0} \frac{g(x-t)-g(x)}{(t+h)^{1-\alpha}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x-a} \left[(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right]\left[g(x-t) - g(x)\right]dt = J_1 + J_2 + J_3. \tag{3.4}$$

Если $h \geqslant x-a$, то с учетом (3.3) находим

$$|J_1| \leqslant \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\lambda}\left|(x-a+h)^{\alpha} - (x-a)^{\alpha}\right| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Если же $0 < h < x-a$, то в силу (3.3) и неравенства $(1+t)^{\alpha} - 1 \leqslant \alpha t$, $t > 0$, имеем

$$|J_1| \leqslant \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\lambda+\alpha}\left|\left(1 + \frac{h}{x-a}\right)^{\alpha} - 1\right| \leqslant ch(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Далее,

$$|J_2| \leqslant \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0} \frac{|t|^{\lambda}dt}{(t+h)^{1-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Оценим, наконец, J_3:

$$|J_3| \leqslant \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x-a} t^{\lambda}\left[t^{\alpha-1} - (t+h)^{\alpha-1}\right]dt = \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda}\left[t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}\right]dt. \tag{3.5}$$

Отсюда оценка ясна при $x-a \leqslant h$: $|J_3| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$, $\lambda + \alpha \leqslant 1$. Если же $x-a > h$, то при $\lambda + \alpha < 1$ также имеем $|J_3| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$ в силу сходимости интеграла в (3.5) на бесконечности (поскольку $|t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}| = t^{\alpha-1}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right] \leqslant ct^{\alpha-2}$ при $t > 1$). Если же $\lambda + \alpha = 1$, то из (3.5) при $0 < h < 1/2$ получим

$$|J_3| \leqslant Ah^{\lambda+\alpha}\left(c + \int_{1}^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda+\alpha-2}dt\right) \leqslant c_1 h + c_2 h \ln\frac{x-a}{h} \leqslant ch\ln\frac{1}{h}$$

с учетом того, что $x-a \geqslant h$. Собирая оценки для J_1, J_2, J_3, получаем утверждение теоремы при $\lambda + \alpha \leqslant 1$.

Доказательство оставшегося случая $\lambda + \alpha > 1$ нам удобнее дать в другом месте, после того как будут введены и исследованы так называемые

дробные производные Маршо. Поэтому за доказательством при $\lambda+\alpha>1$ отсылаем читателя к § 13, п. 4° (см. текст после леммы 13.1).

Далее в теореме 3.3 будет рассмотрен случай любых $\alpha>0$, $\lambda>0$. Предварительно отметим следствия из теоремы 3.1.

Следствие 1. *Оператор*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,\quad 0<\alpha<1,$$

ограниченно действует из пространства H^λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, *в пространство* $H^{\lambda+\alpha}$, *если* $\lambda+\alpha\neq 1$, *и в пространство* $H^{\lambda+\alpha,1}$, *если* $\lambda+\alpha=1$.

Следствие 2. *Оператор* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из пространства* $C=H^0$ *в* H_{a+}^{α}.

Нетрудно видеть, что в действительности I_{a+}^{α} ограничен даже из L_∞ в H^α:

$$\Gamma(\alpha)|f(x+h)-f(x)|\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left\{\int_a^x [(x-t)^{\alpha-1}-(x+h-t)^{\alpha-1}]\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}dt\right\}\|\varphi\|_{L_\infty}\leqslant ch^\alpha\|\varphi\|_{L_\infty},$$

где $f(x)=I_{a+}^{\alpha}\varphi$ и $h>0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi(x)\in H^\lambda$, $\lambda\geqslant 0$. *Тогда дробный интеграл* $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\alpha>0$, *имеет вид*

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k}+\psi(x),\qquad(3.6)$$

где m *— наибольшее целое число, такое, что* $m<\lambda$, *а*

$$\psi(x)\in\begin{cases}H^{\lambda+\alpha}, & \text{если } \lambda+\alpha \text{ — нецелое или если } \lambda,\ \alpha \text{ — целые,}\\ H^{\lambda+\alpha,1}, & \text{если } \lambda+\alpha \text{ — целое, но } \lambda,\ \alpha \text{ — нецелые.}\end{cases}$$

Теорема 3.2 выводится из теоремы 3.1, если учесть, что функция

$$\psi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left[\varphi(t)-\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right](x-t)^{\alpha-1}dt$$

имеет производную порядка $m+[\alpha]$:

$$\psi^{(m+[\alpha])}(x)=\frac{1}{\Gamma(\{\alpha\})}\int_a^x[\varphi^{(m)}(t)-\varphi^{(m)}(a)](x-t)^{\{\alpha\}-1}dt.$$

2°. Действие в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$. Напомним, что принадлежность функции $\varphi(x)$ классу $H_0^\lambda(\rho)$ означает, что $\rho(x)\varphi(x)\in H^\lambda$ и что $\rho(x)\varphi(x)|_{x=x_k}=0$ во всех точках x_k, к которым «привязан» вес $\rho(x)$, имеющий вид (1.7). Начнем исследование с основных случаев $\rho(x)=(x-a)^\mu$ или $\rho(x)=(b-x)^\nu$.

Замечание 3.1. Всюду в дальнейшем при рассмотрении дробного интегрирования I_{a+}^{α} в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$ договоримся о том, что $\rho(x)\varphi(x)|_{x=a}=0$ независимо от того, «привязан» или нет вес $\rho(x)$ к точке $x=a$.

Теорема 3.3. *Пусть* $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$. *Оператор* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\lambda}(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, *если* $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $\mu<\lambda+1$, *или если* $\rho(x)=(b-x)^{\nu}$, $\nu>\lambda+\alpha$.

Доказательство. Подчеркнем, что μ может быть отрицательным, а ν не ограничено сверху.

1. Случай веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $\mu<\lambda+1$. Пусть $\varphi(x)\in H_0^{\lambda}(\rho)$, так что $\varphi(x)=(x-a)^{-\mu}g(x)$, где $g(x)\in H^{\lambda}$, $g(a)=0$. Нужно показать, что

$$G(x)=\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\mu}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\in H_0^{\lambda+\alpha}\quad\text{и}\quad\|G\|_{H^{\lambda+\alpha}}\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}.$$

Представляем $G(x)$ в виде

$$G(x)=\int_a^x\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x-t)^{1-\alpha}}g(t)\,dt=G_1(x)+G_2(x).$$

Здесь $G_1(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}$ в силу теоремы 3.1. Для $G_2(x)$ имеем

$$G_2(x+h)-G_2(x)=\int_x^{x+h}\frac{(x+h-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}g(t)\,dt+$$

$$+[(x+h-a)^{\mu}-(x-a)^{\mu}]\int_a^x\frac{g(t)\,dt}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}+$$

$$+\int_a^x\frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}}[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]\,g(t)\,dt=J_1+J_2+J_3. \tag{3.7}$$

Ниже при оценках нам понадобятся неравенства

$$|x^{\mu}-y^{\mu}|\leqslant c(x-y)\,x^{\mu-1},\quad x\geqslant y>0,\quad \mu\geqslant 0, \tag{3.8}$$

$$|x^{\mu}-y^{\mu}|\leqslant|\mu|(x-y)\,y^{\mu-1},\quad x\geqslant y>0,\quad \mu\leqslant 1, \tag{3.9}$$

где постоянная c не зависит от x и y. Неравенства (3.8), (3.9) доказываются, например, с помощью теоремы о среднем.

Оценим J_1. Используя неравенство $|g(t)|\leqslant\|g\|_{H^{\lambda}}(t-a)^{\lambda}$ и неравенство (3.9), при $\mu\leqslant 1$ находим

$$|J_1|\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}dt}{(t-a)^{1-\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}dt}{(t-x)^{1-\lambda}}=c_1\,\|g\|_{H^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha}.$$

Если же $\mu\geqslant 1$, то оцениваем J_1 с помощью (3.8):

$$|J_1|\leqslant c(x+h-a)^{\mu-1}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}dt}{(t-a)^{\mu-\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{ch^{\alpha}}{(x+h-a)^{1-\mu}}\int_x^{x+h}\frac{dt}{(t-a)^{\mu-\lambda}}.$$

Отсюда с учетом (3.8)

$$|J_1| \leqslant ch^{\alpha}(x+h-a)^{\mu-1}\left[(h+x-a)^{\lambda+1-\mu}-(x-a)^{\lambda+1-\mu}\right] \leqslant$$
$$\leqslant ch^{\alpha+1}(x+h-a)^{\lambda-1} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}. \qquad (3.10)$$

Для J_2 имеем при $x-a \leqslant h$ и $\mu > 0$

$$|J_2| \leqslant ch^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant ch^{\mu}\int_a^{x+h} \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant ch^{\mu}(x+h-a)^{\lambda+\alpha-\mu} \leqslant ch^{\lambda+\alpha},$$

а при $\mu < 0$

$$|J_2| \leqslant c(x-a)^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant c(x-a)^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant c(x-a)^{\lambda+\alpha} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

В случае же $x-a > h$ при $\mu \leqslant 1$ с учетом (3.9)

$$|J_2| \leqslant \frac{ch}{(x-a)^{1-\mu}}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{ch}{(x-a)^{1-\lambda-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha},$$

а при $\mu > 1$ с учетом (3.8)

$$|J_2| \leqslant \frac{ch}{(h+x-a)^{1-\mu}}\int_a^{x+h} \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{ch}{(h+x-a)^{1-\lambda-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Далее, после замены $t = a + s(x-a)$

$$|J_3| \leqslant \|g\|_{H^{\lambda}}(x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 |s^{\lambda-\mu}-s^{\lambda}|\left|\left(1-s+\frac{h}{x-a}\right)^{\alpha-1}-(1-s)^{\alpha-1}\right|ds.$$

Если $x-a \leqslant h$, то $|J_3| \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha}$, а при $x-a > h$

$$|J_3| \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}(x-a)^{\lambda+\alpha-1}h\int_0^1 \frac{|s^{\lambda-\mu}-s^{\lambda}|}{(1-s)^{2-\alpha}}ds \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha}.$$

Собирая оценки для J_1, J_2, J_3, имеем

$$|G_2(x+h)-G_2(x)| \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha}.$$

Отсюда и из неравенства $|G_1(x)| \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}(x-a)^{\lambda+\alpha}$ заключаем, что $G(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}$.

2. Случай веса $\rho(x) = (b-x)^{\nu}$, $\nu > \lambda + \alpha$. Теперь $\varphi(x) = (b-x)^{-\nu}g(x)$, где $g(x) \in H^{\lambda}$ и $g(a) = g(b) = 0$ в соответствии с замечанием 3.1. Нужно показать, что

$$G(x) = \int_a^x \left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{\nu}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \in H^{\lambda+\alpha},$$

$$\|G\|_{H^{\lambda+\alpha}} \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}$$

и что $G(a) = G(b) = 0$. Так как $|G(x)| \leqslant c \int_a^x (t-a)^{\lambda} (x-t)^{\alpha-1} dt$ при $x \to a$, то условие $G(a) = 0$ становится очевидным. Далее, при $x \to b$

$$|G(x)| \leqslant (b-x)^{\nu} \int_{b-x}^{b-a} t^{\lambda-\nu} (t+x-b)^{\alpha-1} dt.$$

Отсюда после замены $t = (b-x)\xi$

$$|G(x)| \leqslant (b-x)^{\lambda+\alpha} \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} t^{\lambda-\nu} (t-1)^{\alpha-1} dt \leqslant (b-x)^{\lambda+\alpha} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\nu-\lambda}(1-t)^{1-\alpha}},$$

так что и $G(b) = 0$. Для доказательства гельдеровости функции $G(x)$ представим ее в виде

$$G(x) = \int_a^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{(b-x)^{\nu} - (b-t)^{\nu}}{(b-t)^{\nu}(x-t)^{1-\alpha}} g(t)\,dt = G_1(x) + G_2(x).$$

Здесь $G_1(x) \in H^{\lambda+\alpha}$ и $\|G_1\|_{H^{\lambda+\alpha}} \leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}$ в силу теоремы 3.1. Для $G_2(x)$ имеем (считая, что $x + h \in (a, b)$):

$$G_2(x+h) - G_2(x) = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \int_x^{x+h} \frac{(b-x-h)^{\nu} - (b-t)^{\nu}}{(b-t)^{\nu}(x+h-t)^{1-\alpha}} g(t)\,dt,$$

$$J_2 = [(b-h-x)^{\nu} - (b-x)^{\nu}] \int_a^x \frac{g(t)\,dt}{(b-t)^{\nu}(x+h-t)^{1-\alpha}},$$

$$J_3 = \int_a^x \frac{(b-x)^{\nu} - (b-t)^{\nu}}{(b-t)^{\nu}} [(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}] g(t)\,dt.$$

Используя оценку $|g(t)| \leqslant \|g\|_{H^{\lambda}} (b-t)^{\lambda}$ и неравенство (3.8), получаем

$$|J_1| \leqslant c \int_x^{x+h} (x+h-t)^{\alpha} (b-t)^{\lambda-1} dt = c \int_0^h \xi^{\alpha} (b-x-h+\xi)^{\lambda-1} d\xi,$$

откуда после замены $\xi = (b-x-h)s$ следует

$$|J_1| \leqslant c(b-x-h)^{\lambda+\alpha} \int_0^{h/(b-x-h)} s^{\alpha}(1+s)^{\lambda-1} ds.$$

Если $b - x - h \leqslant h$, то

$$|J_1| \leqslant c(b-x-h)^{\lambda+\alpha} \left[1 + \int_1^{h/(b-x-h)} s^{\lambda+\alpha-1} ds\right] \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Если же $b - x - h \geqslant h$, то

$$|J_1| \leqslant c(b-x-h)^{\lambda+\alpha} \int_0^{h/(b-x-h)} s^{\alpha} ds \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Далее, для J_2 имеем, также применяя (3.8):

$$|J_2| \leqslant ch\,(b-x)^{\nu-1} \int_a^x \frac{(b-t)^{\lambda-\nu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant ch\,(b-x)^{\nu-1} \int_a^x \frac{(b-t)^{\lambda-\nu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Сделаем замену $x-t=(b-x)\xi$. Тогда $|J_2| \leqslant ch(b-x)^{\lambda+\alpha-1} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1}(1+\xi)^{\lambda-\nu}d\xi$ с учетом того, что $\nu > \lambda+\alpha$. Таким образом, $|J_2| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$.

Остается оценить слагаемое J_3. После замены $t = b - s(b-x)$ имеем

$$|J_3| \leqslant c \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^\nu|}{s^{\nu-\lambda}} (b-x)^{\lambda+\alpha} \left| \left(s-1+\frac{h}{b-x}\right)^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1} \right| ds\, \|g\|_{H^\lambda}.$$

Применяя неравенство (3.9), получаем

$$|J_3| \leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda} (b-x)^{\lambda+\alpha} \frac{h}{b-x} \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^\nu|\,ds}{s^{\nu-\lambda}(s-1)^{2-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$$

с учетом того, что $b-x \geqslant h$ и $\lambda+\alpha < 1$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.3 легко выводится аналогичное утверждение для веса $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$. Справедлива

Теорема 3.3′. *Пусть* $0 < \lambda < 1$, $\lambda+\alpha < 1$. *Оператор* I_{a+}^α *ограниченно действует из* $H_0^\lambda(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, $\mu < \lambda+1$, $\nu > \lambda+\alpha$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho)$. Выберем произвольную точку $c \in (a, b)$ и введем функции

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leqslant c, \\ \varphi(c), & x \geqslant c, \end{cases} \qquad \varphi_b(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ \varphi(x) - \varphi(c), & x \geqslant c, \end{cases}$$

так что $\varphi(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$. Здесь $\varphi_a(x) \in H_0^\lambda(\rho_a)$, $\varphi_b(x) \in H_0^\lambda(\rho_b)$, где обозначено для краткости

$$\rho_a(x) = (x-a)^\mu, \quad \rho_b(x) = (b-x)^\nu.$$

Действительно, проверяя, например, что $\varphi_a(x) \in H_0^\lambda(\rho_a)$, имеем

$$\rho_a(x)\varphi_a(x) = \begin{cases} g(x)/\rho_b(x), & x \leqslant c, \\ \rho_a(x)\varphi(c), & x \geqslant c, \end{cases}$$

где $g(x) = \rho(x)\varphi(x) \in H^\lambda([a, c])$, $g(a) = 0$. Так как функции $[\rho_b(x)]^{-1}$ и $\rho_a(x)\varphi(c)$ бесконечно дифференцируемы на $[a, c]$, $[c, b]$ соответственно, то $g(x)/\rho_b(x) \in H^\lambda([a, c])$, $\rho_a(x) \in H^\lambda([c, b])$. Тогда $\rho_a(x)\varphi(x)$ как непрерывная «склейка» функций из $H^\lambda([a, c])$, $H^\lambda([c, b])$ принадлежит $H^\lambda([a, b])$. Из приведенных рассуждений очевидно также, что $\|\varphi_a\|_{H^\lambda(\rho_a)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$, $\|\varphi_b\|_{H^\lambda(\rho_b)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$. В силу теоремы 3.3

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} \leqslant c\,\|\varphi_a\|_{H^\lambda(\rho_a)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$$

и

$$\|I_{a+}^\alpha \varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_b)} \leqslant c\,\|\varphi_b\|_{H^\lambda(\rho_b)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}.$$

Замечая, что $(I^{\alpha}_{a+}\varphi_b)(x) \equiv 0$ при $x \leqslant c$, находим $\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leqslant c_1 \|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_b)}$. Учитывая также, что $\rho_b(x) \in H^{\lambda+\alpha}$ и $\nu > \lambda+\alpha$, получаем $\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leqslant c_2 \|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)}$. Но тогда

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leqslant c\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} + c\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_b)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^{\lambda}(\rho)},$$

что и требовалось.

Распространим, наконец, теорему 3.3 и теорему 3.3′ на случай общего веса (1.7). Для этого докажем предварительно лемму, дающую утверждение типа теоремы 3.3 для интегралов с ядром $(x+t)^{\alpha-1}$, $x>0$, $t>0$. Естественно, что оно будет выполняться при более слабых предположениях.

Лемма 3.1. *Пусть функция* $\varphi(x)$, $0 < x \leqslant l$, *допускает оценку* $|\varphi(x)| \leqslant kx^{-\nu}$, $\alpha < \nu < 1$. *Тогда*

$$f(x) = \int_0^l \frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}} \in H^{\alpha+\beta}([0,\ l];\ x^{\nu+\beta}) \tag{3.11}$$

для любых $\beta \geqslant 0$ *таких, что* $\alpha+\beta \leqslant 1$, *при этом* $\|f\|_{H^{\alpha+\beta}(x^{\nu+\beta})} \leqslant ck$, *где* c *не зависит от* $\varphi(x)$.

Доказательство. Нужно показать, что $\Phi(x) = x^{\nu+\beta}\int_0^l \varphi(t) \times (t+x)^{\alpha-1}dt \in H^{\alpha+\beta}([0,\ l])$. Имеем, считая, что $l=1$ и $h>0$: $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leqslant k\,|(x+h)^{\nu+\beta} - x^{\nu+\beta}| \int_0^1 (x+h+t)^{\alpha-1} t^{-\nu}dt + kx^{\nu+\beta}\int_0^1 t^{-\nu}|(t+x)^{\alpha-1} - (t+x+h)^{\alpha-1}]\,dt = k(\Phi_1+\Phi_2)$. Неравенство (3.8) и замена $t=(x+h)s$ дают

$$\Phi_1 \leqslant c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1}\int_0^{1/(x+h)} s^{-\nu}(1+s)^{\alpha-1}ds \leqslant ch(x+h)^{\alpha+\beta-1} \leqslant ch^{\alpha+\beta}.$$

Далее, используя неравенство (3.9), имеем

$$\Phi_2 \leqslant cx^{\nu+\beta}h\int_0^1 t^{-\nu}(t+x)^{\alpha-2}dt = cx^{\alpha+\beta-1}h\int_0^{1/x}(t+1)^{\alpha-2}t^{-\nu}dt$$

и при $x \geqslant h$ получаем, что $\Phi_2 \leqslant ch^{\alpha+\beta}$. Если же $x \leqslant h$,

$$\Phi_2 \leqslant 2x^{\nu+\beta}\int_0^1 t^{-\nu}(t+x)^{\alpha-1}dt = 2x^{\alpha+\beta}\int_0^{1/x} s^{-\nu}(s+1)^{\alpha-1}ds \leqslant ch^{\alpha+\beta}.$$

Собирая оценки для Φ_1 и Φ_2, получаем утверждение леммы.

Наконец, следующая теорема относится к случаю общего веса вида

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\mu_k}, \quad a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b. \tag{3.12}$$

Теорема 3.4. *Пусть* $\rho(x)$ — *вес (3.12),* $\lambda+\alpha<1$ *и выполнены условия:*

1) $\mu_1 < \lambda+1$;

2) $\lambda+\alpha < \mu_k < \lambda+1$, $k=2,\ \ldots,\ n-1$;

3) $\lambda+\alpha < \mu_n < \lambda+1$ *при* $x_n < b$ *и* $\lambda+\alpha < \mu_n$ *при* $x_n = b$. *Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограниченно действует из* $H^{\lambda}_0(\rho)$ *в* $H^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

Доказательство этой теоремы подготовлено теоремами 3.3,

3.3′ и леммой 3.1. Нам удобно обозначить $\tilde{n} = \begin{cases} n-1, & \text{если } x_n = b, \\ n, & \text{если } x_n < b. \end{cases}$ Пусть

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}, \\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}], \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{n},$$

так что $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \varphi_k(x)$. Очевидно:

1) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x) \equiv 0$ при $x < x_k$ $(k \geqslant 2)$,

2) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{x_k}^{x} \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt$ при $x_k < x < x_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant \tilde{n})$,

3) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt$ при $x_{k+1} < x < x_{k+2}$ $(1 \leqslant k \leqslant \tilde{n}-1)$,

4) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $x \geqslant x_{k+2}$.

Учитывая то, что множители $|x-x_k|^{\mu_k}$ бесконечно дифференцируемы вне точек x_k, легко получаем $I_{a+}^{\alpha}\varphi_k \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ на $[a, b]$, при этом в 2) применяем теорему 3.3′ (при $k = 1, \ldots, n-1$) и теорему 3.3 (при $k = n$ и $x_n < b$), а в 3) — лемму 3.1 (после замены $t = x_{k+1} - \xi$ в 3)).

Замечание 3.2. Условие $\lambda + \alpha < \mu_k$, $k = 2, \ldots, n$, в теореме 3.4 нельзя ослабить. При $\lambda + \alpha \geqslant \mu_k$ теорема 3.4 неверна. Пусть, например, $\rho(x) = (b-x)^{\mu}$, $\mu \leqslant \lambda + \alpha$. Для функции $\varphi(x) = (x-a)^{\lambda}(b-x)^{\lambda-\mu} \in H_0^{\lambda}(\rho)$ непосредственно проверяется, что

$$(b-x)^{\mu}(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{(b-x)^{\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda}dt}{(b-t)^{\mu-\lambda}(x-t)^{1-\alpha}} \neq O\left((b-x)^{\lambda+\alpha}\right)$$

при $x \to b$,

так что $I_{a+}^{\alpha}\varphi \notin H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

3°. **Действие в пространстве** L_p. Мы знаем, что дробные интегралы по крайней мере сохраняют пространство $L_p(a, b)$, см. (2.72), (2.73). Более содержательны утверждения, показывающие, насколько дробный интеграл $I_{a+}^{\alpha}\varphi$ «лучше» функции $\varphi(x) \in L_p$. Картина здесь такова, что при $0 < \alpha < 1/p$ дробный интеграл принадлежит L_q с $q > p$, а при $\alpha > 1/p$ он оказывается даже непрерывной (гельдеровской) функцией (класса $H^{\alpha-1/p}$ или $H^{\alpha-1/p, 1/p'}$, см. определения 1.6, 1.7). Следующая теорема известна под названием теоремы Харди — Литтлвуда с предельным показателем.

Теорема 3.5. *Если* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, *то оператор дробного интегрирования* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из пространства* L_p *в пространство* L_q, *где* $q = p/(1-\alpha p)$.

Доказательство этой теоремы требует более тонких методов, чем те, что использовались до сих пор. Изложение необходимого для этого математического аппарата увело бы нас далеко в сторону. Поэтому мы ограничимся доказательством более простого факта: I_{a+}^{α} ограниченно действует из L_p, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, в L_r, где $1 \leqslant r < q = p/(1-\alpha p)$ (читателя, интересующегося доказательством в случае $r = q$, а также случаями $p = 1$ и $p = 1/\alpha$, не содержащимися в теореме 3.5, мы отсылаем к литературным ссылкам в § 4, 9, см. также § 4, п. 2°, 3.2, 3.3). В силу (1.31) достаточно взять $r > p$. Обозначим $\varepsilon = (1/r - 1/q)/2$. Тогда

$$|I_{a+}^{\alpha}\varphi| \leqslant \int_a^x \left(|\varphi(t)|^{\frac{p}{r}}(x-t)^{\varepsilon-\frac{1}{r}}\right)\left(|\varphi(t)|^{1-\frac{p}{r}}(x-t)^{\varepsilon-\frac{1}{p'}}\right)dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Гельдера (1.30) с $n=3$, $p_1=r$, $p_2=rp/(r-p)$, $p_3=p'$, находим

$$|I_{a+}^{\alpha}\varphi| \leqslant \Big(\int_a^x |\varphi(t)|^p (x-t)^{r\varepsilon-1}dt\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \times$$

$$\times \Big(\int_a^x (x-t)^{\varepsilon p'-1}dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \Big(\int_a^x |\varphi(t)|^p (x-t)^{r\varepsilon-1}dt\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Отсюда

$$\|I_{a+}^{\alpha}\varphi\|_{L_r} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \Big(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt \int_a^b |x-t|^{r\varepsilon-1}\,dx\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \|\varphi\|_{L_p}^{\frac{p}{r}} = c\,\|\varphi\|_{L_p},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Формула дробного интегрирования по частям (2.20) справедлива при* $\varphi(x)\in L_p$, $\psi(x)\in L_q$, $1/p+1/q\leqslant 1+\alpha$, *но* $p\neq 1$, $q\neq 1$ *в случае* $1/p+1/q=1+\alpha$.

Действительно, рассмотрим с учетом вложения (1.31) случай $1/p+1/q=1+\alpha$. В силу теоремы 3.5 интегралы в левой и правой частях в (2.20) сходятся абсолютно (применить неравенство Гельдера). Поэтому перестановка порядка интегрирования, с помощью которой получено (2.20), обосновывается теоремой Фубини.

Теорема 3.6. *Если* $\alpha>0$, $p>1/\alpha$, *то оператор дробного интегрирования* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из* $L_p(a, b)$ *в* $H^{\alpha-1/p}(a, b)$, *если* $\alpha-1/p\neq 1, 2, \ldots$, *и в* $H^{\alpha-1/p,\,1/p'}(a, b)$, *если* $\alpha-1/p=1, 2, \ldots$ *Кроме того,*

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = o\big((x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}\big) \text{ при } x\to a. \tag{3.13}$$

Доказательство. Оценку (3.13) получаем с помощью неравенства Гельдера:

$$|I_{a+}^{\alpha}\varphi| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)p'}dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant c\,(x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}} \Big(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, рассмотрим случай $\alpha-1/p\leqslant 1$. Для x, $x+h\in[a, b]$ имеем

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x+h) - (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{x+h} (x+h-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}]\,\varphi(t)\,dt = I_1 + I_2. \tag{3.14}$$

Применяя неравенство Гельдера, находим

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_x^{x+h} |\varphi(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_x^{x+h} (x+h-t)^{(\alpha-1)p'}dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\,\|\varphi\|_{L_p},$$

$$|I_2| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{L_p}}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_a^x |(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}|^{p'} dt \Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant [\Gamma(\alpha)]^{-1} h^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L_p} \Big(\int_0^{\frac{x-a}{h}} |s^{\alpha-1} - (s+1)^{\alpha-1}|^{p'} ds \Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

При $x - a \leqslant h$ оценка для I_2 очевидна. Если же $x - a > h$, то, применяя неравенство (3.9) и неравенство $(A+B)^{1/p'} \leqslant A^{1/p'} + B^{1/p'}$, получаем

$$|I_2| \leqslant h^{\alpha - 1/p} \|\varphi\|_{L_p} \Big[c_1 + c_2 \int_1^{(x-a)/h} s^{(\alpha-2)p'} ds \Big]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant h^{\alpha - 1/p} \|\varphi\|_{L_p} \left[c_3 + c_4 \left(\frac{h}{x-a} \right)^{1-\alpha+1/p} \right]$$

с добавлением $\left(\ln \frac{x-a}{h} \right)^{1/p'}$ при c_4 в случае $\alpha - \frac{1}{p} = 1$. Отсюда вытекает оценка

$$|I_2| \leqslant \begin{cases} ch^{\alpha - 1/p} \|\varphi\|_{L_p} & \text{при } \alpha - 1/p < 1, \\ ch \left| \ln \frac{1}{h} \right|^{1/p'} \|\varphi\|_{L_p} & \text{при } \alpha - 1/p = 1. \end{cases}$$

Собирая оценки для I_1, I_2, завершаем доказательство теоремы при $\alpha - 1/p \leqslant 1$.

Пусть $\alpha - 1/p > 1$. Тогда $k < \alpha - 1/p \leqslant k+1$, $k = 1, 2, \ldots$, и этот случай сводится к рассмотренному непосредственным дифференцированием: $\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{\alpha} \varphi = I_{a+}^{\alpha-k} \varphi$, $0 < \alpha - k \leqslant 1$, с учетом определения классов H^{λ} и $H^{\lambda, k}$ при $\lambda > 1$.

Следствие. *Теорема 3.6 справедлива и в более сильной форме:* $I_{a+}^{\alpha} : L_p(a, b) \to h^{\alpha - 1/p}([a, b])$, $0 < 1/p < \alpha < 1 + 1/p$, *где* h^{λ} — *класс (1.2).*

Доказательство. Для $\varphi \in L_p(a, b)$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\varphi = P_{\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon}$, где P_{ε} — многочлен, а $\|\varphi_{\varepsilon}\|_{L_p} < \varepsilon$ (свойство д) пространства L_p см. § 1, п. 2°). Отсюда по доказанной теореме 3.6 имеем

$$|(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)| \leqslant |(I_{a+}^{\alpha}P_{\varepsilon})(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}P_{\varepsilon})(x)| + |(I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon})(x+t) -$$

$$- (I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon})(x)| \leqslant c_1 |t|^{\alpha} + c_2 |t|^{\alpha - 1/p} \|\varphi_{\varepsilon}\|_p = o(|t|^{\alpha - 1/p}).$$

Замечание 3.3. Случаю $p = \infty$ в теореме 3.6 отвечает утверждение об ограниченности I_{a+}^{α} из L_{∞} в H^{α}, уже отмеченное выше (см. следствие из теоремы 3.1).

4°. Действие в пространстве $L_p(\rho)$. Рассмотрим теперь действие операторов дробного интегрирования в пространстве $L_p(\rho)$ с весом (3.12), где $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Оказывается, даже в случае простейшего веса $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, сосредоточенного в одной точке d отрезка $[a, b]$, ограничения на показатель существенно различны в зависимости от того, совпадает ли точка d с концами или же является внутренней точкой отрезка $[a, b]$. Нам удобно допускать здесь и полуось, т. е. считать, что $-\infty < a < b \leqslant \infty$.

Начнем рассмотрение с веса $\rho(x) = (x-a)^{\mu}$. Следующая лемма о коммутации дробных интегралов со степенными функциями позволит непосредственно перейти от «невесовых» теорем об ограниченности операторов дробного интегрирования к их весовым аналогам. В леммах 3.2,

3.3 и теоремах 3.7, 3.8 в отличие от вышеприведенного будем использовать обозначение $\rho^{\mu}(x)=(x-a)^{\mu}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\varphi\in L_p(0,\ l)$, $0<l\leqslant\infty$, $1<p<\infty$, $\mu>-1+1/p$. *Тогда справедливы соотношения*

$$I_{0+}^{\alpha}\rho^{\mu}\varphi=\rho^{\mu}I_{0+}^{\alpha}(\varphi+A_1\varphi), \tag{3.15}$$

$$\rho^{\mu}I_{0+}^{\alpha}\varphi=I_{0+}^{\alpha}\rho^{\mu}(\varphi+A_2\varphi), \tag{3.16}$$

где A_i — *ограниченные в* $L_p(0,\ l)$ *операторы вида* $A_i\varphi=\pi^{-1}\mu\sin\alpha\pi\times$ $\times\int\limits_0^x A_i(x,\ t)\varphi(t)\,dt$, $i=1,\ 2$,

$$A_1(x,\ t)=\frac{1}{t-x}\int\limits_t^x\left(\frac{y-t}{x-y}\right)^{\alpha}\left(\frac{t}{y}\right)^{\mu}\frac{dy}{y},$$

$$A_2(x,\ t)=\frac{1}{x-t}\int\limits_t^x\left(\frac{y-t}{x-y}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu}\frac{dy}{y}.$$

(Случай $p=1$, $\mu>0$ см. далее в лемме 10.1, из которой следует, что при условиях $\varphi\in L_1(0,\ l)$ (для (3.15)) и $(|\ln x|+1)\varphi(x)\in L_1(0,\ l)$ (для (3.16)) указанные соотношения сохраняют силу, причем тогда операторы из (3.15) и (3.16) ограничены и $(|\ln x|+1)(\varphi(x)+A_1\varphi(x))\in L_1(0,\ l)$, $\varphi(x)+A_2\varphi(x)\in L_1(0,\ l)$, $0<l<\infty$.)

Доказательство. Покажем ограниченность операторов A_i. Ядро $A_1(x,\ t)$ однородно порядка —1, причем

$$|A_1(1,\ t)|=t^{\mu}\int\limits_0^1\frac{\xi^{\alpha}(1-\xi)^{-\alpha}d\xi}{[t+\xi(1-t)]^{1+\mu}}\leqslant ct^{\lambda},\quad \lambda=\begin{cases}\mu, & \mu<\alpha,\\ \alpha-\varepsilon, & \mu\geqslant\alpha,\end{cases}$$

где $0<\varepsilon<\alpha$. В силу этой оценки оператор A_1 ограничен в $L_p(0,\ l)$ по теореме 1.5. Аналогично доказывается ограниченность оператора A_2. Проверим теперь равенство (3.15):

$$x^{\mu}I_{0+}^{\alpha}(\varphi+A_1\varphi)=x^{\mu}I_{0+}^{\alpha}\varphi-\frac{\mu\sin\alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)}x^{\mu}\int\limits_0^x t^{\mu}\varphi(t)\,dt\times$$

$$\times\int\limits_t^x\frac{(y-t)^{\alpha}dy}{y^{1+\mu}}\int\limits_y^x\frac{(x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-y)^{-\alpha}}{\tau-t}\,d\tau.$$

Вычисляя внутренние интегралы в правой части с помощью формулы (11.4) из § 11, получаем требуемое соотношение. Равенство (3.16) доказывается аналогично.

Следующее утверждение обобщает лемму 3.2 на случай весовых пространств и произвольных $\alpha>0$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\alpha>0$, $\alpha\neq1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, $\varphi\in L_p([0,\ l],\ \rho^{\beta})$, $0<l\leqslant\infty$, $1<p<\infty$, $m=[\alpha]$, $\beta<p-1+\min(\mu p,\ 0)$. *Тогда справедливы соотношения (3.15), (3.16), в которых* A_i — *ограниченные в* $L_p([0,\ l],\ \rho^{\beta})$ *операторы, определяемые равенствами*

$$A_1\varphi=A_1^{(\mu,\alpha)}\varphi=\sum_{j=0}^{m}c_j\int\limits_0^x A_{1j}(x,\ \tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad A_2\varphi=\rho^{-\mu}A_1^{(-\mu,\alpha)}\rho^{\mu}\varphi,$$

$$A_{1j}(x,\ \tau) = \tau^{\mu}(x-\tau)^{m-j}\int_0^1 \frac{\xi^{\alpha+m-j}}{(1-\xi)^{\{\alpha\}}}\,[\tau+\xi\,(x-\tau)]^{j-\mu-m-1}\,d\xi,$$

$$c_j = \binom{m+1}{j}\,\frac{m!\,(j-m-\mu)_{m-j+1}}{(m-j)!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\{\alpha\})}.$$

Соотношение (3.15) проверяется при этом непосредственным применением оператора дробного дифференцирования $\mathscr{D}^{\alpha}_{0+}$ к выражению $\rho^{-\mu}I^{\alpha}_{0+}\rho^{\mu}\varphi$. Соотношение (3.16) вытекает из (3.15). Ограниченность операторов A_i, $i=1,\ 2$, следует из теоремы 1.5.

Перейдем к рассмотрению дробных интегралов.

Теорема 3.7. *Пусть* $\alpha>0$, $-\infty<a<b\leqslant\infty$, $p\geqslant 1$, $\mu<p-1$, $0<\alpha<m+1/p$, $q=p/[1-(\alpha-m)p]$; $0\leqslant m\leqslant\alpha$ *при* $p\neq 1$ *и* $0<m\leqslant\alpha$ *при* $p=1$. *Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p([a,\ b],\ \rho^{\mu})$ *в* $L_q([a,\ b],\ \rho^{\left(\frac{\mu}{p}-m\right)q})$.

Доказательство. Пусть вначале $1<p<\infty$. Положим $\varphi=\rho^{-\frac{\mu}{p}}\varphi_0$, $\varphi_0\in L_p$. Если $m<\alpha$, то с учетом (3.15) имеем (можно считать $a=0$):

$$|\rho^{\frac{\mu}{p}-m}I^{\alpha}_{0+}\varphi|\leqslant c\rho^{\frac{\mu}{p}}I^{\alpha-m}_{0+}\rho^{-\frac{\mu}{p}}\varphi_0 = I^{\alpha-m}_{0+}\psi,\quad [\|\psi\|_{L_p}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p},$$

и остается применить теорему 3.5 (см. также теорему 5.3). Если $\alpha=m$, то $\rho^{\frac{\mu}{p}-\alpha}I^{\alpha}_{0+}\rho^{-\mu/p}$ есть оператор с однородным ядром порядка -1 и требуемое утверждение следует из теоремы 1.5. В случае $p=1$ утверждение теоремы получается применением неравенства Гельдера (1.28). Действительно,

$$|I^{\alpha}_{0+}\varphi|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\{(x-y)^{\alpha-1}\,y^{-\frac{\mu}{q'}}|\varphi(y)|^{\frac{1}{q}}\}\,\{y^{\mu}|\varphi(y)|\}^{\frac{1}{q'}}dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^x(x-y)^{(\alpha-1)q}\,y^{-\mu(q-1)}|\varphi(y)|\,dy\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_0^x y^{\mu}|\varphi(y)|\,dy\Big)^{\frac{1}{q'}},$$

откуда

$$\|\rho^{\mu-m}I^{\alpha}_{0+}\varphi\|_{L_q}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\|\rho^{\mu}\varphi\|_{L_1}^{\frac{1}{q'}}\Big(\int_0^l x^{(\mu-m)q}dx\times$$

$$\times\int_0^x(x-y)^{(\alpha-1)q}\,y^{-\mu(q-1)}|\varphi(y)|\,dy\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\|\rho^{\mu}\varphi\|_{L_1}^{\frac{1}{q'}}\times$$

$$\times\Big(\int_0^l y^{\mu}\mathrm{k}(y)|\,\varphi(y)|\,dy\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\,\|\rho^{\mu}\varphi\|_{L_1},$$

поскольку

$$\mathrm{k}(y)=y^{-\mu q}\int_y^{\infty}x^{(\mu-m)q}(x-y)^{(\alpha-1)q}dx=\int_1^{\infty}\xi^{(\mu-m)q}(\xi-1)^{(\alpha-1)q}d\xi<\infty.$$

Теорема доказана.

Отметим важный частный случай $\mu=0$ и $q=p$ в теореме 3.7:

$$\Big\{\int_a^b(x-a)^{-\alpha p}|(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)|^p dx\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p},\quad 1<p<\infty,$$

$$-\infty<a<b\leqslant\infty. \tag{3.17}$$

Справедливо также неравенство

$$\left\{\int_a^b (b-x)^{-\alpha p}\,|(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}, \quad 1<p<1/\alpha, \quad -\infty<a<b<\infty. \tag{3.18}$$

Его можно доказать непосредственно, но проще сослаться на доказываемое ниже неравенство (5.45), из которого оно легко следует.

Неравенства (3.17), (3.18) не имеют места при $p=1$. Например, первое из них в случае $p=1$ заменяется неравенством

$$\int_a^b (x-a)^{-\alpha}\,|(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)|\,dx \leqslant c\int_a^b |\varphi(x)|\ln\frac{b-a}{x-a}\,dx, \tag{3.17'}$$

что получается простыми оценками.

Отметим еще частный случай теоремы 3.7, относящийся к $p=1$, $a=0$ ($\alpha=m$, $\mu=-\varepsilon$):

$$\int_0^b x^{-\alpha-\varepsilon}\,|(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)|\,dx \leqslant c\int_0^b x^{-\varepsilon}\,|\varphi(x)|\,dx, \quad b>0,\ \alpha>0,\ \varepsilon>0,$$

где $c=c(\varepsilon)$. Это неравенство не имеет места при $\varepsilon=0$ ($\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)=\infty$). Случаю $\varepsilon=0$ отвечают неравенства

$$\int_0^b x^{-\alpha}\ln^{\lambda}\frac{b+1}{x}\,|(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)|\,dx \leqslant c\int_0^b \ln^{\lambda+1}\frac{b+1}{x}\,|\varphi(x)|\,dx, \tag{3.17''}$$

$$\int_b^{\infty} x^{-1}\ln^{\lambda}\frac{b+1}{b}\,x\,|I_{-}^{\alpha}x^{1-\alpha}\varphi(x)|\,dx \leqslant c\int_b^{\infty}\ln^{\lambda+1}\frac{b+1}{b}\,x\,|\varphi(x)|\,dx, \tag{3.17'''}$$

где $\alpha>0$, $\lambda\geqslant 0$, $b>0$. Первое из них получается простыми оценками после перестановки порядка интегрирования в левой части. Второе выводится из первого заменой x на x^{-1}, b на b^{-1} и $\varphi(x)$ на $x^{-2}\varphi(x^{-1})$.

Следующая теорема уточняет теорему 3.7 для конечного отрезка $[a, b]$ в случае $p>1/\alpha$.

Теорема 3.8. *Пусть* $-\infty<a<b<\infty$. *Если* $1<p<\infty$, $0<\alpha-1/p<1$, *то оператор* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из* $L_p(\rho^{\mu})$ *в* $H_0^{\alpha-1/p}(\rho^{\mu/p})$, $\mu<p-1$, *при этом*

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = o\left((x-a)^{\alpha-\frac{1+\mu}{p}}\right), \text{ если } x\to a. \tag{3.19}$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера к $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi(x)=(x-a)^{-\mu/p}\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x)\in L_p([a, b])$, получаем оценку (3.19): $|I_{a+}^{\alpha}\varphi| \leqslant \left(\int_a^x |\varphi_0(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^x (t-a)^{-\mu/(p-1)}(x-t)^{(\alpha-1)p'}dt\right)^{1/p'} \leqslant c(x-a)^{\alpha-(1+\mu)/p}\times$ $\times\left(\int_a^x |\varphi_0(t)|^p dt\right)^{1/p}$. Для доказательства ограниченности оператора I_{a+}^{α} из $L_p(\rho^{\mu})$ в $H_0^{\alpha-1/p}(\rho^{\mu/p})$ воспользуемся коммутационным соотношением (3.15): $\rho^{\mu/p}I_{a+}^{\alpha}\rho^{-\mu/p}\varphi_0 = I_{a+}^{\alpha}\psi$, $\|\psi\|_{L_p}\leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}$, что в силу теоремы 3.6 дает нужный результат.

Следствие. *Теорема 3.8 справедлива и в более сильной форме:*

$$I^{\alpha}_{a+}\colon L_p(\rho^{\mu}) \to h_0^{\alpha-\frac{1}{p}\left(\rho^{\frac{\mu}{p}}\right)}, \quad 0 < \frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p} + 1,$$

где $h_0^{\lambda}(r)$ *— весовое пространство (1.12).*

Доказательство. Всякую функцию из L_p можно приблизить бесконечно дифференцируемыми функциями, финитными в (a, b) (см. свойство д) функций из L_p в § 1, п. 2°). Отсюда следует, что для $\varphi \in L_p(\rho^{\mu})$ имеет место представление $\varphi = a_{\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon}$, где a_{ε} — бесконечно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, а $\|\varphi_{\varepsilon}\|_{L_p(\rho^{\mu})} < \varepsilon$. Обозначая $\Delta f = f(x+t) - f(x)$, $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$, имеем

$$|\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} f)| \leqslant |\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} I^{\alpha}_{a+}a_{\varepsilon})| + |\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} I^{\alpha}_{a+}\varphi_{\varepsilon})|. \tag{3.20}$$

Из теоремы 3.8 вытекает оценка $|\Delta(\rho^{\mu/p} I^{\alpha}_{a+}\varphi_{\varepsilon})| \leqslant c\,\|\varphi_{\varepsilon}\|_{L_p(\rho^{\mu})} h^{\alpha-1/p}$. Так как $a_{\varepsilon} \in L_q(\rho^{\mu})$ при любом $q > p$, то опять, согласно теореме 3.8:

$$|\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} I^{\alpha}_{a+}a_{\varepsilon})| \leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{q}} \|a_{\varepsilon}\|_{L_q(\rho^{\mu})} = o(h^{\alpha-\frac{1}{p}})$$

при $h \to 0+$. Подставляя найденные оценки в (3.20), получаем $|\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} f)| \leqslant h^{\alpha-\frac{1}{p}}(c\varepsilon + o(1))$, что доказывает следствие.

Перейдем к случаю веса $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b < \infty$.

Теорема 3.9. *Пусть* $1 < p < 1/\alpha$ *и* $\mu < p - 1$ *(последнее при* $d < b$*). Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, *в* $L_q(r)$, *где* $q = p/(1-\alpha p)$, $r(x) = |x-d|^{\nu}$ *и*

$$\begin{aligned} &\nu > -1 \ \textit{при}\ \mu \leqslant \alpha p - 1, \\ &\nu = \mu q/p \ \textit{при}\ \mu > \alpha p - 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = |t-d|^{-\mu/p}\psi(t)$, $\psi(t) \in L_p(a, b)$ (функции φ, ψ можно считать неотрицательными). Тогда для $x \in (a, d)$ имеем

$$\Gamma(\alpha)(d-x)^{\frac{\nu}{q}} (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = A_1 + A_2,$$

где $A_1 = (d-x)^{\nu/q-\mu/p} \int_a^x \frac{\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$, $A_2 = (d-x)^{\nu/q} \int_a^x [(d-t)^{-\mu/p} - (d-x)^{-\mu/p}](x-t)^{\alpha-1}dt$. Из (3.21) следует, что $\nu/q - \mu/p \geqslant 0$, поэтому по теореме 3.5

$$\|A_1\|_{L_q(a,d)} \leqslant c\,\|\psi\|_{L_p(a,d)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p([a,b];\rho)}. \tag{3.22}$$

Докажем аналогичную оценку для A_2. Если $\mu \geqslant 0$, то

$$A_2 = (d-x)^{\nu/q} \int_a^x \left[\left(\frac{d-x}{d-t}\right)^{\mu/p} - 1\right] \frac{\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant 2A_1,$$

и остается воспользоваться оценкой (3.22). В случае $\mu < 0$ имеем

$$A_2 = (d-x)^{\nu/q} \int_a^x [(d-t)^{\frac{|\mu|}{p}} - (d-x)^{\frac{|\mu|}{p}}](x-t)^{\alpha-1}\psi(t)\,dt.$$

Если $\mu \leqslant \alpha p - 1$, то в силу (3.8) получаем

$$A_2 \leqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \int_a^x (d-t)^{\frac{\varepsilon}{q}+\frac{|\mu|}{p}-1}(x-t)^{\alpha}\psi(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \int_a^d (d-t)^{\frac{\varepsilon}{q}+\frac{|\mu|}{p}+\alpha-1}\psi(t)\,dt \leqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}}\|\psi\|_{L_p(a,d)} \in L_q(a,\ d),$$

где $0 < \varepsilon < \nu + 1$. В случае $\mu > \alpha p - 1$ представим A_2 в виде

$$A_2 = \frac{|\mu|}{p}(d-x)^{\frac{\mu}{p}} \int_a^x (d-\xi)^{\frac{|\mu|}{p}-1} d\xi \int_a^{\xi} \frac{\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_a^x \left(\frac{d-x}{d-\xi}\right)^{\frac{\mu}{p}} \frac{g(\xi)\,d\xi}{d-\xi}, \tag{3.23}$$

где $g = I_{a+}^{\alpha}\psi \in L_q(a,\ d)$, $\|g\|_{L_q(a,\,d)} \leqslant c\,\|\psi\|_{L_p(a,d)}$. Остается заметить, что интегральный оператор в правой части (3.23) ограничен в $L_q(a,\ d)$ в силу теоремы 1.5.

Оценим $(x-d)^{\nu/q}(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)$ для $x \in (d,\ b)$:

$$\Gamma(\alpha)(x-d)^{\frac{\nu}{q}} I_{a+}^{\alpha}\varphi = \left(\int_a^d + \int_d^x\right) \frac{(x-d)^{\frac{\nu}{q}}\psi(t)\,dt}{|t-d|^{\frac{\mu}{p}}(x-t)^{1-\alpha}} = B_1 + B_2. \tag{3.24}$$

Для B_1 при $\mu \leqslant \alpha p - 1$, $0 < \varepsilon < \min(1-\alpha,\ \nu+1)$ имеем

$$B_1 \leqslant (x-d)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \int_a^d \frac{(d-t)^{-\frac{\mu}{p}}\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c\,(x-d)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}}(I_{a+}^{\alpha+\varepsilon+\frac{\mu}{p}}\psi)(d) \leqslant c\,(x-d)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}}\|\psi\|_{L_p(a,d)} \in L_q(d,\ b).$$

Если $\mu > \alpha p - 1$, то, заменяя в B_1 функцию $(x-t)^{\alpha-1}$ по формуле

$$(x-t)^{\alpha-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}(d-t)^{\alpha}\int_d^x \frac{(x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-d)^{-\alpha}}{\tau-t}\,d\tau$$

(см. (11.4)), после перемены порядка интегрирования получаем

$$B_1 = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(x-d)^{\frac{\mu}{p}}\int_d^x \frac{(\tau-d)^{-\frac{\mu}{p}}g(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}},$$

$$g(\tau) = \int_a^d \left(\frac{d-t}{\tau-d}\right)^{\alpha-\frac{\mu}{p}} \frac{\psi(t)\,dt}{\tau-t}.$$

В силу теоремы 1.5 $\|g\|_{L_p(d,b)} \leqslant c\,\|\psi\|_{L_p(a,b)}$. Отсюда по теореме 3.7 находим

$$\|B_1\|_{L_q(d,b)} \leqslant c\,\|g\|_{L_p(a,b)} \leqslant c\,\|\psi\|_{L_p(a,b)}.$$

Для второго слагаемого в (3.24) нужная оценка получается применением теоремы 3.7. Теорема доказана.

Замечание 3.4. При $\mu/p \leqslant \alpha - 1/p$ в теореме 3.9 нельзя брать $\nu = \mu q/p$. Действительно, взяв $\varphi(x) = |d - x|^{-\mu/p}$, имеем при $x \in \left(\frac{d+a}{2}, d\right)$:

$$(d-x)^{\frac{\nu}{q}} (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \geqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu}{q}} \int_a^{\frac{d+a}{2}} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(d-t)^{\frac{\mu}{p}}}\,dt \geqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu}{q}} \notin L_q.$$

Аналог теоремы 3.9 справедлив и для общих степенных весов:

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\mu_k}, \quad r(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\nu_k}, \quad a = x_1 < \ldots < x_n = b. \tag{3.25}$$

Приведем без доказательства утверждение для оператора I^{α}_{a+}.

Теорема 3.10. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\mu_k < p - 1$ *для* $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $0 \leqslant m \leqslant \alpha$, $0 < \alpha < m + \frac{1}{p}$, $q = \frac{p}{1-(\alpha-m)p}$, $\nu_1 = \left(\frac{\mu_1}{p} - m\right) q$, $\nu_k = \left(\frac{\mu_k}{p} - m\right) q$, *если* $\mu_k > \alpha p - 1$, *и* $\nu_k > \left(\alpha - \frac{1}{p} - m\right) q$, *если* $\mu_k \leqslant \alpha p - 1$, $k = 2, \ldots, n$. *Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p(\rho)$ *в* $L_q(r)$.

Исследуем вопрос о принадлежности дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi \in L_p(\rho)$, весовым гельдеровым пространствам при $\alpha > 1/p$. Вначале рассмотрим вес $\rho(x) = |x - d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b$.

Теорема 3.11. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha < 1 + 1/p$, $0 < \mu < p - 1$ *при* $a < d < b$ *и* $0 < \mu < \infty$ *при* $d = b$. *Тогда оператор дробного интегрирования* I^{α}_{a+} *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x - d|^{\mu}$, *в* $H_0^{\min(\mu/p,\, \alpha-1/p)}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu \neq \alpha p - 1$, *и в* $H_0^{\alpha-1/p,\, 1/p'}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu = \alpha p - 1$.

Доказательство. Пусть $\nu = \mu/p$, $\varphi(x) = |x - d|^{-\nu}\varphi_0(x)$, $\varphi_0 \in L_p$. Нужно показать, что

$$f(x) = \int_a^x \left|\frac{x-d}{t-d}\right|^{\nu} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \in \begin{cases} H_0^{\min\left(\nu,\, \alpha - \frac{1}{p}\right)}, & \text{если } \nu \neq \alpha - \frac{1}{p}, \\ H_0^{\alpha - \frac{1}{p},\, \frac{1}{p'}}, & \text{если } \nu = \alpha - \frac{1}{p}, \end{cases}$$

$$c\,\|\varphi_0\|_{L_p} \geqslant \begin{cases} \|f\|_{H^{\min\left(\nu,\, \alpha - \frac{1}{p}\right)}}, & \text{если } \nu \neq \alpha - \frac{1}{p}, \\ \|f\|_{H^{\alpha - \frac{1}{p},\, \frac{1}{p'}}}, & \text{если } \nu = \alpha - \frac{1}{p}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Зафиксируем точку $a_1 \in (a, d)$. Тогда в силу теоремы 3.8 $f(x) \in H^{\alpha-1/p}([a, a_1])$, причем $f(a) = 0$ и $\|f\|_{H^{\alpha-1/p}(a,a_1)} \leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}$. Покажем, что $f(x)$ обращается в нуль при $x = d$ и удовлетворяет оценке (3.26) на $[a_1, d]$. Пусть $x \in (a_1, d)$, тогда

$$f(x)=\left(\int_a^{a_1}+\int_{a_1}^{x}\right)\left|\frac{x-d}{t-d}\right|^{\nu}\frac{\varphi_0(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=u(x)+v(x).$$

Оценим $u(x)$:

$$|u(x)|\leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_a^{a_1}\frac{(d-t)^{-\nu p'}dt}{(a_1-t)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

Для $v(x)$ имеем

$$|v(x)|\leqslant(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_{a_1}^{x}\frac{(x-t)^{(\alpha-1)p'}dt}{(d-t)^{\nu p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.27}$$

Если $\nu<\alpha-1/p$, то $|v(x)|\leqslant(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_{a_1}^{x}(x-t)^{(\alpha-1-\nu)p'}dt\right)^{1/p'}\leqslant$ $\leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}$. Если $\nu>\alpha-1/p$, то после замены $t=x-\xi(d-x)$ имеем

$$|v(x)|\leqslant(d-x)^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_0^{\frac{(x-a_1)}{d-x}}\xi^{(\alpha-1)p'}(1+\xi)^{-\nu p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant$$

$$\leqslant c(d-x)^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

В случае $\nu=\alpha-1/p$ аналогично получаем (можно считать, что $x-a_1>$ $>d-x$):

$$|v(x)|\leqslant(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_0^1\xi^{(\alpha-1)p'}d\xi+\int_1^{\frac{x-a_1}{d-x}}\xi^{-1}d\xi\right)\leqslant$$

$$\leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}(1+|\ln(d-x)|).$$

Из приведенных оценок следует, что $f(d-0)=0$. Аналогично проверяется, что $f(d+0)=0$ при $d<b$.

Для оценки гельдеровской нормы функции $f(x)$ при $x\in[a_1,\ d]$ представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\int_a^x\frac{\varphi_0(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{(d-x)^{\nu}-(d-t)^{\nu}}{(d-t)^{\nu}(x-t)^{1-\alpha}}\varphi_0(t)\,dt=f_1(x)+f_2(x).$$

По теореме 3.8 $\|f_1\|_{H^{\alpha-1/p}([a,b])}\leqslant c\|\varphi_0\|_{L_p(a,b)}$. Для f_2 имеем $f_2(x+h)-$ $-f_2(x)=J_1+J_2+J_3$, $a_1\leqslant x<x+h\leqslant d$, где J_1, J_2, J_3 — те же, что в (3.7) с заменой $(x-a)^{\mu}$ на $(d-x)^{\nu}$. Оценим J_1 (в дальнейшем для простоты ограничимся случаем $\nu\leqslant1$):

$$|J_1|\leqslant\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h}(d-t)^{-\nu p'}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}|(d-t)^{\nu}-\right.$$

$$\left.-(d-x-h)^{\nu}|^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant c\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h}(d-t)^{-\nu p'}(x+h-t)^{(\alpha+\nu-1)p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

Оценивая J_2, находим

$$|J_2| \leqslant ch^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_a^x \frac{(d-t)^{-\nu p'}dt}{(x+h-t)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_a^{a_1} \frac{(d-t)^{-\nu p'}dt}{(a-t)^{(1-\alpha)p'}} + \int_{a_1}^x \frac{(d-t)^{-\nu p'}dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}\left[1 + \left(\int_{a_1}^x \frac{(d-t)^{-\nu p'}dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\right].$$

Интеграл в круглых скобках совпадает с интегралом в (3.27), оценка которого уже проводилась. Поэтому при $\nu < \alpha - 1/p$ имеем $|J_2| \leqslant ch^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_{p(a,b)}}$. Если $\nu \geqslant \alpha - 1/p$, то выражение в квадратных скобках оценивается величиной $1 + c\,(d-x)^{\alpha-\nu-1/p} \leqslant 1 + ch^{\alpha-\nu-1/p}$ при $\nu > \alpha - 1/p$ и величиной

$$1 + \int_0^{\frac{x-a_1}{h}} \frac{d\xi}{\xi^{(1-\alpha)p'}(1+\xi)^{\nu p'}} \leqslant c\left(1 + \ln\frac{1}{h}\right) \text{ при } \nu = \alpha - \frac{1}{p},$$

что дает для J_2 нужный результат.

Перейдем к оценке J_3. Зафиксируем произвольную точку $\delta \in (a, a_1)$ и представим J_3 в виде

$$J_3 = \left(\int_a^{\delta} + \int_{\delta}^{a_1} + \int_{a_1}^{x}\right) \frac{(d-x)^{\nu} - (d-t)^{\nu}}{(d-t)^{\nu}} [(x+h-t)^{\alpha-1} -$$

$$-(x-t)^{\alpha-1}]\,\varphi_0(t)\,dt = J_{31} + J_{32} + J_{33}.$$

Для первого слагаемого, очевидно,

$$|J_{31}| \leqslant ch\int_0^{\delta} |\varphi_0(t)|\,dt \leqslant ch\,\|\varphi_0\|_{L_p},$$

а для второго —

$$|J_{32}| \leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_{\delta}^{a_1} |(x-t)^{\alpha-1} - (x+h-t)^{\alpha-1}|^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

Наконец,

$$|J_{33}| \leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_{a_1}^{x}\left(\frac{x-t}{d-t}\right)^{\nu p'} |(x-t)^{\alpha-1} - (x+h-t)^{\alpha-1}|^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

откуда $|J_{33}| \leqslant ch^{\alpha-1/p}\|\varphi_0\|_{L_p}$.

Из проделанных оценок вытекает неравенство (3.26) на отрезке $[a_1, d]$. Для $[d, b]$ (при $d<b$) рассуждения проводятся аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3.5. Зависимость порядка гельдеровости дробного интеграла $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$ от соотношения между μ/p и $\alpha - 1/p$ обусловлена поведением интеграла $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в точке $x = d$. Это поведение можно «уловить», варьируя показатель степени весовой функции для $f(x)$. В этом случае порядок гельдеровости не меняется и равен $\alpha - 1/p$. Приведем без доказательства теорему об ограниченности оператора дробного интегрирова-

ния в такой трактовке для случая общих степенных весов (3.25) (другой вариант подобной теоремы см. в § 4, п. 2°, 3.1).

Теорема 3.12. *Пусть* $1<p<\infty$, $1/p<\alpha<1+1/p$, $\mu_k<p-1$ *для* $k=1, 2, \ldots, n-1$. *Тогда оператор* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$ *в* $H_0^{\alpha-1/p}(r)$ (*и даже в* $h_0^{\alpha-1/p}(r)$), *если* $r(x)=(x-a)^{\mu_1/p}\prod_{k\in\Lambda}|x-x_k|^{\delta_k}$, $\Lambda=\{k: k\in\{2, 3, \ldots, n\}, \mu_k>0\}$, $\delta_k=\mu_k/p$ *при* $\mu_k>\alpha p-1$ *и* $\delta_k=\alpha+\varepsilon_k-1/p$, $\varepsilon_k>0$, *при* $\mu_k\leqslant\alpha p-1$.

Естественно поставить вопрос о действии дробного интегрирования в пространствах $L_p(\rho)$ с произвольным, не обязательно степенным весом. В этом случае рассматриваются весовые функции, удовлетворяющие так называемому условию типа Макенхоупта. Мы не станем касаться здесь этого вопроса, но отметим, что необходимую информацию можно найти ниже в теореме 25.4 и в § 29, п. 2°, 25.8 и 26.11 для многомерного случая.

§ 4. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 1

1°. Исторические сведения. В кратком историческом очерке, помещенном в начале книги, содержится обзор работ, относящихся к зарождению и развитию основ теории дробного интегродифференцирования. Поэтому здесь мы остановимся на исторических комментариях к конкретному содержанию главы.

К § 2, пп. 1, 2°. Уравнение (2.1) носит имя Абеля, впервые рассмотревшего и решившего это уравнение при $0<\alpha<1$ в связи с задачей о таутохроне (N. H. Abel [1], 1823 г.; [2], 1826 г.), см. об имеющемся историческом заблуждении по этому поводу в «Кратком историческом очерке». Уравнение типа Абеля $\int_0^x (x^2-s^2)^{-1/2}\varphi(s)ds=f(x)$ было решено Ф. Йоахимсталем (F. Joachimsthal [1], 1861 г.); более общее такое уравнение

$$\int_0^x [\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds=f(x), \quad \alpha>0, \tag{4.1}$$

с монотонно возрастающей функцией $\tau(x)$ решалось в работе Т. Сато (T. Satô [1], 1935 г.), хотя его решение фактически было известно еще Х. Хольмгрену (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 гг.). Уравнения (4.1) часто встречаются в приложениях, отметим, например, их использование в теории обобщенных аналитических функций в исследованиях Г. Н. Положего ([1], 1964 г.; [2, с. 236], 1965 г.; [3, с. 186], 1973 г.).

Изложенное в п. 1° решение уравнения Абеля (2.1) хорошо известно. Менее известно обоснование этого решения в классе $L_1(a, b)$, приводимое в теоремах 2.1 и 2.3. Оно дано в 1930 г. Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1, теорема 4]) при $\alpha>0$. (Это доказательство было изложено в книге М. М. Джрбашяна [2].) Роль абсолютной непрерывности в теории дробных интегралов суммируемых функций была в полной мере выявлена Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.), хотя раньше Л. Тонелли (L. Tonelli [1], 1928 г.) использовал понятие абсолютной непрерывности при решении уравнения Абеля и, в частности, получил утверждение следствия из леммы 2.1 и формулу (2.14) для $f\in AC([a, b])$. Обоснование обращения уравнения Абеля в классе непрерывных функций(тогда условия (2.9) заменяются условиями $f_{1-\alpha}(x)\in C^1([a, b])$, $f_{1-\alpha}(a)=0$) было фактически дано еще в книге М. Бехера (M. Bôcher [1, с. 8—9], 1909 г.).

К § 2, п. 3°. Определение 2.1 восходит к Б. Риману (B. Riemann [1], 1847 г.; опубликовано в 1876 г.). Определение 2.2 дробного дифференцирования также содержится в этой работе. Как и Ж. Лиувилль, Б. Риман имел дело с так называемыми «дополнительными» функциями при определении дробного дифференцирования (по существу, «дополнительные» функции — это степенные функции с произвольными коэффициентами, используемые Ж. Лиувиллем и Б. Риманом для того, чтобы равенство $I_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f=f$ выполнялось при всех f, ср. с (2.60)). Упомянем полемику, связанную с «дополнительными» функциями в работе А. Кэли (A. Cayley [1], 1880 г.). Первыми, кто сознательно отказались от «дополнительных» функций, были Х. Хольмгрен (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 гг.) и независимо А. В. Летников [4], 1874 г. В связи с этим отказом Х. Хольмгрен и А. В. Летников предложили вводить дробное дифференцирование как операцию, являющуюся левой обратной к дробному интегрированию (подход, общепринятый в современном анализе), и осуществили построение основ теории дробного интегродифференцирования при таком подходе.

Формула (2.20) установлена в работе Э. Лава, Л. Юнга (E. R. Love, L. C. Young [1], 1938 г.).

Формула (2.26) фактически была известна еще Эйлеру: правая часть в (2.26) по определению вводилась им как дробная производная степенной функции, см. работу Л. Эйлера [1, с. 56], 1738 г.

К § 2, п. 4°. Порядок α дробного интегродифференцирования был комплексным уже в работах Ж. Лиувилля, Б. Римана, А. Грюнвальда, А. В. Летникова, Н. Я. Сонина и др. Дробные интегралы чисто мнимого порядка $\alpha=i\theta$ вводились Х. Кобером (H. Kober [2], 1941 г.) с помощью преобразования Меллина, что позволило рассматривать такое дробное интегрирование как непрерывную операцию в $L_2(0, \infty)$. В форме (2.37), (2.38) дробные интегралы чисто мнимого порядка появляются в работе Г. Калиша (G. K. Kalisch [1], 1967 г.), где было показано, что они порождают ограниченные в $L_p(0, 1)$, $1<p<\infty$, операторы, см. об этом утверждении в случае всей оси в лемме 8.2. Исследованию в L_p операторов дробного интегрирования чисто мнимого порядка посвящена также работа М. Фишера (M. J. Fisher [2], 1971 г.). Обстоятельное исследование формул композиции (так называемых «индексных законов») для дробных интегралов чисто мнимого порядка проведено в работах Э. Лава (E. R. Love [4, 5], 1971—1972 гг.).

Теорема 2.2 по существу содержится у Я. Тамаркина (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.). Сама формула (2.43) (на достаточно «хороших» функциях) имеется в работах Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1, с. 7], 1865—1866 гг.) и А. В. Летникова [1, с. 26], 1868 г.

К § 2, п. 5°. Формулы вычисления дробных интегралов от элементарных функций (2.44) — (2.54) известны давно. В частности, формулы (2.44), (2.45) для степенных функций фактически имеются у Л. Эйлера [1], 1738 г., где они вводятся по определению, а формулы (2.48), (2.49) — у Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1, с. 17], 1865—1866 гг.). Для логарифмической функции формула (2.50) дана при $\beta=1$ еще А. В. Летниковым [1, с. 37], 1868 г. Формула (2.54) есть модификация формулы Н. Я. Сонина [3], 1880 г. (так называемый первый интеграл Сонина, см. книгу Н. Я. Сонина [6, с. 206]).

В связи с получением формулы (2.50) отметим, что идея получения формул, содержащих степенно-логарифмические функции, из соответствующих формул для чисто степенных функций путем дифференцирования по показателю степени принадлежит В. Вольтерра (V. Volterra [2], 1916 г.). Этим путем, в частности, получаются формулы для дробного интегрирования функций $\varphi(x)=(x-a)^{\beta-1}\ln^m(x-a)$, см. табл. 9.1 в § 9, п. 3°.

К § 2, п. 6°. Пространства $I^{\alpha}_{a+}[L_1(a, b)]$ как самостоятельный класс функций впервые появляются в работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна ([4], 1960 г.; [5], 1961 г.), а пространства $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ — в работах Б. С. Рубина [1], 1972 г., и С. Г. Самко [7], 1969 г. (для случая $(a, b)=R^1$). Теорема 2.3 дана Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.). Соображения о недостаточности существования почти всюду суммируемой производной $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ для восстановления $f(x)$ в виде дробного интеграла порядка α, приведенные после теоремы 2.3, существенны: заблуждение о достаточности такого условия содержится в немалом числе работ по дробному интегродифференцированию. Используемое в настоящей книге определение 2.4 позволило дать строгое доказательство соотношения (2.58), которое многими авторами «доказывалось» при ошибочном предположении, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ лишь существует почти всюду и суммируема.

К § 2, п. 7°. Полугрупповое свойство (2.65) операторов дробного интегрирования доказывалось уже в работах Б. Римана, Х. Хольмгрена, А. В. Летникова и др. Из математиков прошлого века наиболее четко изложил это свойство А. В. Летников [4, гл. II], 1874 г.; см. также [5], 1874 г. Уместно сослаться на описание свойств дробного интегрирования с точки зрения теории полугрупп в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, гл. 23, с. 674—690]. Теорема 2.5 доказывалась в разное время разными авторами при различных предположениях. В случае интегралов, понимаемых в смысле Данжуа, она доказывалась в работе Л. Бозанке (L. S. Bosanquet [1], 1931 г.) при $\alpha>0$, $\beta>0$, а в случае интегралов Стилтьеса, суммируемых в смысле Чезаро,— в работе Ж. Изаакса (G. L. Isaacs [2], 1960 г.). Более подробное, чем в теореме 2.5, рассмотрение свойства (2.65) (включающее случаи $\mathrm{Re}\,\alpha=0$ или $\mathrm{Re}\,\beta=0$) см. в работе Э. Лава (E. R. Love [5], 1972 г.). Теорема 2.6, по-видимому, впервые сформулирована и доказана Э. Хилле (см. книгу Э. Хилле, Р. Филлипса [1, с. 675]). Доказательство теоремы 2.7 заимствовано из книги М. М. Джрбашяна [2, с. 568].

К § 3. пп. 1, 2 ° Первый результат, касающийся дробного дифференцирования гельдеровских функций принадлежит Г. Вейлю (H. Weyl [1], 1917 г.). Он показал (в периодическом случае, который рассматривается нами в § 19), что функции, удовлетворяющие условию Гельдера порядка λ, имеют непрерывные дробные производные порядка $\alpha<\lambda$. В непериодическом случае для рассматриваемых в § 3 дробных производных Римана—Лиувилля подобное утверждение было получено П. Монтелем (P. Montel [1], 1918 г.), который использовал для этого теоремы типа С. Н. Бернштейна о скорости приближения функций алгебраическими многочленами. Точные результаты о действии дробного интегродифференцирования в рамках пространств H^{λ} принадлежат Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.), полу-

чившим теорему 3.1 о действии оператора I^{α}_{a+} из H^{λ}_0 в $H^{\lambda+\alpha}_0$, $\lambda+\alpha<1$ (и доказываемую в § 13 лемму 13.1 о действии $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}$ из H^{λ}_0, $\lambda>\alpha$, в $H^{\lambda-0}_{\alpha}$). Теоремы 3.3, 3.3′, 3.4 о действии I^{α}_{a+} в пространствах $H^{\lambda}_0(\rho)$ со степенным весом доказаны Б. С. Рубиным [7]. 1974 г., при ограничении $0<\mu_1<\lambda+1$ на показатель веса в точке $x=a$. Здесь эти теоремы доказаны при $\mu_1<\lambda+1$, как в работе Б. С. Рубина [22], 1986 г. При доказательстве теорем 3.3, 3.3′, 3.4 мы следовали этим работам Б. С. Рубина, за исключением теоремы 3.4, доказательство которой проведено нами иначе.

Отметим работу Ю. Чженя (Y. W. Chen [1], 1959 г.), в которой рассматривалась гельдеровость с весом интегральных операторов, обобщающих дробное интегрирование. Имеющийся в этой работе результат охватывает теорему 3.3, причем для значений $0\leqslant\lambda<1$.

К § 3, пп. 3, 4°. Теоремы 3.5—3.7 установлены Г. Харди, Д. Литтлвудом (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [1], 1925 г.; [3], 1928 г.), см. в связи с этим § 9, п. 1° (к § 5). (Простое утверждение о действии I^{α}_{a+} из L_p в L_r, $r<p/(1-\alpha p)$, впервые было отмечено Г. Харди (G. H. Hardy [1], 1917 г.).) Приведенное уточнение в случае $\alpha-1/p=1, 2, \ldots$ сделано А. А. Килбасом. Теорема 3.8 получена в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г. Здесь приведено более короткое — на основе леммы 3.2 о коммутации — доказательство, осуществленное Б. С. Рубиным [22], 1986 г. Изложенное доказательство теоремы 3.7 также основано на лемме 3.2. Оно дано Б. С. Рубиным [22], 1986 г., см. также статьи Б. С. Рубина [17, с. 529], 1983 г., и Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г. Доказательство теоремы 3.7 в случае $p=1$ заимствовано из работы Т. Флетта (T. M. Flett [3], 1958 г.). Лемма 3.2 получена в работах Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [1], 1982 г.; [3], 1986 г. Более общая лемма 3.3 установлена Б. С. Рубиным [17, с. 529], 1983 г. Доказательство следствий из теорем 3.6, 3.8 указано в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г.

Приведенная без доказательства теорема 3.10 доказана при $m=0$ в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г., а при $m\in[0, \alpha]$ — в работе Б. С. Рубина [22], 1986 г. Мы дали здесь простое доказательство этой теоремы только в частном случае — в виде теоремы 3.9, когда вес «привязан» к одной точке $x=a$. Это доказательство было осуществлено независимо друг от друга А. А. Килбасом и Б. С. Рубиным и ранее не публиковалось. Теорема 3.11 доказана в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г. (для случая $\nu\neq\alpha-1/p$). Случай $\nu=\alpha-1/p$ рассмотрен А. А. Килбасом и ранее не публиковался. Теорема 3.12 доказана Б. С. Рубиным [22], 1986 г.

2°. Обзор других результатов. 2.1. Решение уравнения Абеля на дуге в комплексной плоскости, а также более общего уравнения

$$\int_a^t \frac{P(t-\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad 0<\alpha<1,$$

где $P(t)$ — многочлен, t, $\tau\in\mathscr{L}$, $\mathscr{L}$ — гладкая дуга с концами a и b, дано К. Д. Сакалюком [3].

2.2. В работе L. S. Bosanquet [1] уравнение Абеля рассматривалось в том случае, когда решение не обязательно интегрируемо по Лебегу. Интегралы при этом понимаются в обобщенном смысле (в смысле Данжуа).

2.3. Имеется ряд работ, посвященных приближенному решению интегрального уравнения Абеля (2.1). Отметим некоторые из них. По-видимому, первой была статья E. T. Whittaker [1]. В работе H. E. Fettis [1] дан метод приближенного решения уравнения (2.1) с помощью многочленов Якоби. Ортогональные многочлены с той же целью применялись также в работе G. N. Minerbo, M. E. Levy [1]. Численный метод решения более общего уравнения $\int_0^x k(x, t)(x-t)^{-\alpha}\varphi(t)dt=f(x)$, $x>0$, предложен в статье R. Weiss [1]. В частном случае $\alpha=1/2$ численный метод указан в работе H. Edels, K. Hearne, A. Young [1] в связи с задачами, возникающими при рассмотрении симметричного разряда в газе. Решение уравнения Абеля при наличии возмущения дано методом квадратичной оптимизации в статье R. Gorenflo [1]. В работах Ю. Е. Воскобойникова [1], Р. Я. Докторского, А. В. Осипова [1], Н. В. Медведева [1] применен метод сплайнов для приближенного решения уравнения Абеля. См. также работы Ю. Е. Воскобойникова [2], В. А. Желудева [2], Е. Л. Косарева [1], R. Balasubramanian, D. H. Norrie, G. de Vries [1], C. K. Chan, P. Lu [1], P. P. B. Eggermont [1], W. Frie [1], R. O. Sirola, T. P. Anderson [1], S. Ugniewski [1, 2].

В § 16, п. 5° можно найти также краткое изложение идеи асимптотического решения уравнения Абеля.

2.4. Н. Я. Сонин [4, 5, 6, с. 148] обобщил интегральное уравнение Абеля, рассмотрев уравнение

$$\int_a^x k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > a, \tag{4.2}$$

и дав его явное решение

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x l(x-t)\,f(t)\,dt \tag{4.2'}$$

в предположении, что для ядра $k(x)$ существует функция $l(x)$ такая, что

$$\int_0^x k(t)\,l(x-t)\,dt = 1 \quad \text{для} \quad x > 0. \tag{4.2''}$$

Существование такой функции $l(x)$ обеспечено, например, в случае ядер вида $k(x) = x^{\alpha-1}g(x)$, $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, $a_0 \neq 0$, причем в этом случае $l(x) = x^{-\alpha}h(x)$, $h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, $0 < \alpha < 1$ (J. Wick [1]). Более широкий класс ядер $k(x)$, удовлетворяющих условию Н. Я. Сонина, указан Б. С. Рубиным [14, с. 62—63].

Заметим, что В. Вольтерра (V. Volterra [1]) использовал метод решения уравнения Абеля (2.1) для сведения более общего уравнения

$$\int_a^x \frac{k(x,t)}{(x-t)^\alpha}\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

с непрерывной функцией $k(x, t)$ к интегральному уравнению второго рода, ядро которого не имеет особенности (В. Вольтерра называл этот прием методом преобразования ядра). См. о таком сведении к уравнению второго рода более подробно в § 31, п. 3°.

2.5. Решение интегрального уравнения Абеля второго рода

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \tag{4.3}$$

дано E. Hille, J. D. Tamarkin [1] в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера (1.90):

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x E_\alpha[\lambda(x-t)^\alpha]\,f(t)\,dt. \tag{4.4}$$

В этом можно убедиться с помощью преобразования Лапласа (учитывая его действие на левую часть уравнения (4.3) по формуле (7.14) и формулу (1.93) преобразования функции Миттаг-Леффлера).

Равенство (4.4) определяет (с точностью до замены λ на $1/\lambda$) резольвенту $(\lambda E - I_{0+}^\alpha)^{-1}$ оператора дробного интегрирования I_{0+}^α. Следует упомянуть работы E. Hille [1, 2], посвященные исследованию этой резольвенты и вообще спектральных свойств оператора дробного интегрирования в общем контексте спектральной теории линейных операторов и связанной с нею эргодической теорией, см. также книгу Э. Хилле, Р. Филлипса [1]. Резольвента $(E - \lambda M)^{-1}$ более общего интегрального оператора

$$M\varphi = \int_0^x \left[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + M_1(x,t)\right]\varphi(t)\,dt,$$

где $M_1(x, t)$ — достаточно гладкая вне $t = x$ функция с более «хорошим», чем $(x-t)^{\alpha-1}$, поведением при $t \to x$, исследована в работах А. П. Хромова [1], Л. Б. Мацнева [1] (с использованием свойств дробного дифференцирования $\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ и асимптотики функции Миттаг-Леффлера). В связи с этими исследованиями см. также работу С. Н. Кабанова [1].

Уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt = 0, \quad x \in R^1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

имеет при $\lambda>0$ нетривиальное решение $\varphi(x)=Ce^{-ax}$, $a=\lambda^{1/\alpha}$, которое является его общим решением (G. H. Hardy, E. C. Titchmarsh [1]).

В работе H. Brakhage, K. Nickel, P. Rieder [1] уравнение (4.3) решено в замкнутой форме в терминах элементарных функций в случае, когда α — рациональное число: $\alpha=m/n<1$. Случай $\alpha=1/2$ при рассмотрении уравнения вида (4.3) по всей прямой был известен еще Ж. Лиувиллю (J. Liouville [5, с. 285], 1834 г.). Более общее, чем (4.3), уравнение

$$\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha_k}}=f(x),\quad x>0, \tag{4.5}$$

с рациональными $\alpha_k=k/n$ решалось в работах V. Kostitzin [1], P. Rieder [1]. В последней работе также изучались системы уравнений вида (4.5).

Уравнение с особенностью в точке $x=0$

$$\varphi(x)-\frac{\lambda}{x^\alpha}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x),\quad 0<x<1,$$

рассматриваемое на конечном отрезке [0, 1], решается в квадратурах. Соответствующее однородное уравнение имеет, вообще говоря, нетривиальное решение, например, в $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, при $\lambda>\dfrac{\Gamma(1+\alpha-1/p)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-1/p)}$, см. об этом в работе Л. Г. Михайлова [1, с. 29].

Укажем еще, что в работе H. T. Davis [1, с. 105] (см. также [2]) дана процедура решения уравнения

$$\varphi(x)-\int_a^x\frac{P(t)\,\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x),\quad x>a, \tag{4.6}$$

в случае, когда $P(t)$ — многочлен, α — рациональное число.

Уравнения (4.3), (4.5), (4.6) примыкают к дифференциальным (интегродифференциальным) уравнениям дробного порядка, о которых см. подробнее в § 42.

В прикладных задачах возникает нелинейное уравнение Абеля второго рода $[\varphi(x)]^{1+\alpha/\beta}-\lambda(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)=0$ при специальных значениях λ (W. R. Schneider [1]).

Отметим, что выбрав $f(x)\equiv 1$ и подставив $\varphi(x)=E_\alpha(\lambda x^\alpha)$ в уравнение (4.3), получаем следующую формулу для дробного интегрирования функции Миттаг-Леффлера:

$$\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=E_\alpha(\lambda x^\alpha)-1,\quad \alpha>0. \tag{4.7}$$

Отметим также примыкающую сюда формулу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^{\rho-1}E_{2\alpha,\beta}(t^{2\alpha})}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=x^{\beta-1}[E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)-E_{2\alpha,\beta}(x^{2\alpha})],\quad \alpha>0,\ \beta>0, \tag{4.8}$$

которую можно проверить с помощью преобразования Лапласа, используя равенство (1.93). Формулы (4.7), (4.8) получены в работах P. Humbert, R. P. Agarwal [1] и R. P. Agarwal [1], в которых можно найти и другие формулы такого типа.

2.6. Тождество (2.20) дробного интегрирования по частям позволяет по заданной биортогональной системе функций $\varphi_n(x)$, $\psi_m(x)$:

$$\int_a^b\varphi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx=\delta_{n,m},\quad n,\ m=1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.9}$$

строить новые такие системы. Именно пусть

$$\Phi_n(x)=v(x)\,I_{a+}^{\alpha}(u\varphi_n),\qquad \Psi_m(x)=\frac{1}{v(x)}\,\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}\left(\frac{\psi_m}{u}\right),$$

где $u(x)$, $v(x)$ — произвольные функции, $u(x)\neq 0$, $v(x)\neq 0$. Тогда из (2.20) следует, по крайней мере формально, что $\Phi_n(x)$, $\Psi_n(x)$ также удовлетворяют условию (4.9). Эта идея принадлежит A. Erdelyi [3], который в случае полиномов Якоби

$$\varphi_n(x)={}_2F_1(-n,\ \beta+n;\ \gamma;\ x),\ \psi_m(x)=cx^{\gamma-1}(1-x)^{\beta-\gamma}{}_2F_1(-m,\ \beta+m;\ \gamma;\ x),$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), построил таким путем новые биортогональные системы функций, выражающихся через гипергеометрические функции ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$, а также другие системы функций (см. § 9, п. 2° и § 23, п. 2° относительно этого приема в других случаях).

Ранее в работах A. Erdelyi [1, 2] формула (2.20) использовалась при получении некоторых представлений для гипергеометрической функции Гаусса, см. аналогичные исследования для функций Аппеля F_1, F_2, F_4 в статьях H. L. Manocha [1, 2].

Заметим, что в работе C. M. Joshi [1] дробные интегралы (2.17), (2.18) использовались для получения интегральных представлений трех гипергеометрических функций Лауричелла от трех переменных (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 236]).

2.7. Обобщением формулы типа Тейлора (2.63) служит следующее равенство:

$$f(x)=\sum_{k=-m}^{n-1}\frac{(x-x_0)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}\,(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+k}f)(x_0)+R_{n,m},$$

где $m<\alpha$, $x>x_0\geqslant a$ и

$$R_{n,m}=(I_{x_0}^{\alpha+n}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+n}f)(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha-m)}\int_a^{x_0}(x-t)^{\alpha-m-1}\,(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-m-1}f)(t)\,dt$$

(Y. Watanabe [1, с. 31]). Отсюда при $m=0$ и $x_0\to a$ получается (2.63).

2.8. Другой вариант обобщения формулы Тейлора был предложен в работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [1, 2]. Именно пусть $\alpha_0=0$, α_1, ..., α_m — возрастающая последовательность чисел таких, что $0<\alpha_k-\alpha_{k-1}\leqslant 1$, $k=1, 2, \ldots, m$. Пусть $x>0$. Введем обозначение

$$\mathcal{D}^{(\alpha_k)}f=I_{0+}^{1-(\alpha_k-\alpha_{k-1})}\mathcal{D}_{0+}^{1+\alpha_{k-1}}f \tag{4.10}$$

и подчеркнем, что, вообще говоря, $\mathcal{D}^{(\alpha_k)}f\neq\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_k}f$. «Дробная производная» $\mathcal{D}^{(\alpha_k)}f$ отличается от дробной производной Римана—Лиувилля $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_k}f$ конечной суммой степенных функций, см. формулу (2.68). Это обстоятельство позволяет прийти к обобщенной формуле Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\mathcal{D}^{(\alpha_k)}f)(0)}{\Gamma(1+\alpha_k)}x^{\alpha_k}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_m)}\int_0^x(x-t)^{\alpha_m-1}\,(\mathcal{D}^{(\alpha_m)}f)(t)\,dt \tag{4.11}$$

(М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян [1, с. 88; 2]) для функций $f(x)$, например, имеющих все непрерывные указанные производные. В цитированных работах продемонстрирована полезность введения производных (4.10) при вычислении коэффициентов обобщенных степенных рядов $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha_k}$, $a_k=\dfrac{(\mathcal{D}^{(\alpha_k)}f)(0)}{\Gamma(1+\alpha_k)}$, а также при получении критериев разложимости функций в ряды Дирихле. Этот подход к исследованию функций, разложимых в обобщенные степенные ряды и ряды Дирихле, был продолжен и развит в работе М. М. Джрбашяна, Б. А. Саакяна [1]. В ней рассматриваются обобщения теоремы С. Н. Бернштейна для абсолютно монотонных функций на случай так называемых $<p>$-абсолютно монотонных функций. Введение этого понятия основано на дробном интегродифференцировании вида (4.10). Дальнейшие обобщения абсолютно монотонных функций даны на этом пути Б. А. Саакяном [1, 2] и М. М. Джрбашяном, Б. А. Саакяном [2].

Отметим еще, что разложению функций в ряд Тейлора вида $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mathcal{D}^{\alpha+ak}f)(z_0)\times$ $\times(z-z_0)^{\alpha+ak}/\Gamma(1+\alpha+ak)$ в комплексной области посвящена работа T. J. Osler [3] (частный случай такого разложения в комплексной области был дан ранее в работе W. Fabian [2]). Упомянем также работу T. J. Osler [6], содержащую некоторый интегральный аналог разложения в ряд Тейлора в комплексной области.

В связи с обобщением формулы Тейлора (2.63) в работе Г. В. Бадаляна [1] получено соотношение типа (4.11) для более сложных конструкций, чем дробные производные $\mathcal{D}^{(\alpha)}f$.

2.9. Идея дифференцирования по показателю степени, широко применявшаяся V. Volterra [2] для вычисления интегралов от степенно-логарифмических функций, была развита Б. С. Рубиным [10, 14]. В частности, для нахождения дробных интегралов от функций $(x-a)^{\beta-1}\ln^{\gamma}(1/(x-a))$ (при $x-a<1$), следуя работе Б. С. Рубина [10], можно применить операцию дробного интегрирования по переменной β. В работе Б. С. Рубина [14]

содержится обобщение этой идеи, основанное на применении операции свертки по переменной β, являющейся показателем степени. На этом пути можно получить формулы для вычисления дробных интегралов от функций вида $(x-a)^{\beta-1}\prod_{k=0}^{n}\left(\ln_k\frac{1}{x-a}\right)^{\lambda_k}$, где

$$\ln_k\frac{1}{x}=\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k}\frac{1}{x},\quad -\infty<\lambda_k<\infty,\quad \beta>0.$$

2.10. В работе E. R. Love [4] приведены достаточные условия существования дробного интеграла (2.38) чисто мнимого порядка. Например, показано, что если функция f интегрируема на $[0, \infty)$ и выполнено условие $\int_0^{\delta} t^{-1}\omega_1(f, t)dt<\infty$, $\delta>0$, где $\omega_1(f, t)$ — интегральный модуль непрерывности функции f (см. (13.24)), то дробный интеграл $I_{0+}^{i\theta}$ существует при любых действительных θ (ср. с теоремой 13.5, дающей достаточные условия существования дробной производной $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f$). В работах E. R. Love [4; 5, с. 388] доказано также, что для существования $I_{a+}^{i\theta}f$ от функции $f\in L_1(a, b)$ необходимо и достаточно, чтобы $I_{a+}^{1+i\theta}f\in AC([a, b])$; при этом условии $I_{a+}^{i\theta}f\in L_1(a, b)$ и почти всюду на (a, b) имеет место соотношение $I_{a+}^{-i\theta}I_{a+}^{i\theta}f=f$.

2.11. Оценку (2.72) обобщают неравенства

$$\|e^{sg}I_{0+}^{\alpha}\varphi\|_p\leqslant\frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|e^{sg}\varphi\|_p,$$

$$\|e^{sg}I_{0+}^{\alpha}\varphi\|_p\leqslant\frac{\Gamma(\alpha/m)}{m\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m!}{as}\right)^{\alpha/m}\|e^{sg}\varphi\|_p,$$

где $\alpha>0$, $s>0$, $\|\ \|_p$ — норма в $L_p(0, b)$, $g(t)\in C^m([0, b])$, $m\geqslant 1$, $g^{(k)}(t)\leqslant 0$, $k=1, \ldots, m-1$, $g^{(m)}(t)\leqslant -a\leqslant 0$ ($a>0$ во втором неравенстве). Эти неравенства доказаны А. Л. Бухгеймом [1, 2, с. 46] и использованы в [2] при исследовании обратных задач восстановления дифференциальных уравнений по заданным следам решений.

2.12. Пусть $X=L_p(0, 1)$, $1\leqslant p<\infty$, или $X=C([0, 1])$ и пусть $\{I_{\alpha}\}_{\alpha\geqslant 0}$ — семейство линейных операторов в X. Можно ли утверждать, что условия $(I_1\varphi)(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt$, $I_{\alpha}I_{\beta}=I_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta>0$, $(I_{\alpha}\varphi)(x)\geqslant 0$ для $\varphi(x)\geqslant 0$ однозначно определяют семейство I_{α}, так что

$$(I_{\alpha}\varphi)(x)=(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt \tag{4.12}$$

для всех $\varphi\in X$? (Вопрос поставлен Дж. Лью на конференции по дробному исчислению в 1974 г., см. T. J. Osler [9, с. 379].) В работе D. I. Cartwright, J. R. McMullen [1] дан положительный ответ на этот вопрос при дополнительном предположении, что отображение $\alpha\to I_{\alpha}$ является непрерывным из R_1^+ в $L(X\to X)$ в какой-нибудь хаусдорфовой топологии.

2.13. Отметим работу B. Spain [1], в которой обсуждалась идея интерполяции интегродифференцирования I^{α} в виде

$$I^{\alpha}\varphi=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(x)}{\alpha-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}\varphi(t)\,dt,\quad x>a,$$

на основании интерполяционного равенства $F(\alpha)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k F(k)}{\alpha-k}$. Однако этот путь не нашел развития из-за очевидных трудностей, связанных с рассмотрением композиции $I^{\alpha}I^{\beta}\varphi$.

2.14. В работах V. Zanelli [1, 2] на основе дробного интегрирования $f_{(\alpha)}(x)=(I_{a+}^{\alpha}f)(x)$ вводилось понятие вариации дробного порядка: $V^{(\alpha)}(f; [a, b])=$

$= \lim\limits_{h \to 0} \int\limits_a^b |h|^{-1} |f_{(1-\alpha)}(x+h) - f_{(1-\alpha)}(x)|\, dx$ (формально совпадающей с $\int\limits_a^b |(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)| dx$).

В указанных работах исследовалась связь дробного дифференцирования $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} f$ и дробной вариации $V^{(\alpha)}$ с аппроксимирующими многочленами Стилтьеса и некоторыми взвешенными средними.

2.15. В работах W. O. Pennell [1], H. P. Thielman [1] на основе формул (2.53), (2.54) получены разложения интеграла $(I_{0+}^{1/2}\varphi)(x)$ в ряды типа Фурье—Бесселя по известным разложениям функции $\varphi(x)$ в ряды по тригонометрическим функциям и функциям Бесселя соответственно.

2.16. Пусть

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix} x\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \ldots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \ldots (\beta_q)_k} \frac{x^k}{k!} $$

— обобщенная гипергеометрическая функция (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 183]). В работе A. P. Misra [1] доказана следующая формула типа формулы Родрига:

$$ {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix} x\right] = \frac{\Gamma(\beta_1) \ldots \Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)} x^{1-\beta_q} \mathscr{D}_{0+}^{\alpha_p - \beta_q} x^{\alpha_p - \beta_{q-1}} \times $$

$$ \times \mathscr{D}_{0+}^{\alpha_{p-1} - \beta_{q-1}} x^{\alpha_{p-1} - \beta_{q-2}} \ldots x^{\alpha_3 - \beta_2} \mathscr{D}_{0+}^{\alpha_2 - \beta_2} x^{\alpha_2 - \beta_1} \mathscr{D}_{0+}^{\alpha_1 - \beta_1} [x^{\alpha_1 - 1} (1-x)^n]. $$

В качестве частных случаев получены формулы Родрига для классических полиномов. Заметим также, что в работе L. Koschmieder [2] дробные производные применялись для доказательства некоторых свойств функции ${}_pF_q$.

3.1. Вариант теоремы типа теоремы 3.12, в котором не меняется вес, а варьируется показатель гельдеровости (см. замечание 3.5), имеет вид. Пусть $\mu_1 < p-1$, $0 < \mu_k < p-1$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, $\mu_n > 0$. Если $1/p < \alpha < 1 + 1/p$, то I_{a+}^{α} ограничен из $L_p([a, b], \rho)$ в $H_0^{\lambda}([a, b]; \rho)$, где

$$ \lambda = \begin{cases} \min(\alpha - 1/p, \mu/p), & \text{если } \mu \neq \alpha p - 1, \\ -\varepsilon + \mu/p, & \text{если } \mu = \alpha p - 1, \end{cases} $$

где $\mu = \min\limits_{k \geqslant 2} \mu_k$, $\varepsilon > 0$ (Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [2]).

3.2. Аналогом теоремы Харди—Литтлвуда 3.5 для $p=1$ служит следующее утверждение:

$$ \left\{\int\limits_a^b |(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)|^q dx\right\}^{1/q} \leqslant C + C \int\limits_a^b |\varphi(x)| (\ln^+ |\varphi(x)|)^{1/q} dx, \quad q = \frac{1}{1-\alpha}, $$

где C зависит только от α и (a, b) (T. M. Flett [3]). Ранее подобное неравенство доказал A. Zygmund [1] в периодическом случае для дробного интегрирования в смысле Вейля (см. § 23, п. 2°, 19.7).

3.3. Рассмотрим подробнее предельный случай $p = 1/\alpha$ в теореме Харди—Литтлвуда 3.5. Теорема не верна в этом случае. Еще G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3] заметили, что

$$ I_{a+}^{1/p}(L_p) \subset \bigcap_{r \geqslant 1} L_r(a, b), \text{ но } I_{a+}^{1/p}(L_p) \not\subset L_{\infty}(a, b). \tag{4.13} $$

Последнее соотношение подтверждается примером функции $f = I_{0+}^{1/p}\varphi_{\varepsilon}$, где

$$ \varphi_{\varepsilon}(x) = \left|x - \frac{2}{e}\right|^{-\frac{1}{p}} \left(\ln \frac{1}{\left|x - \frac{2}{e}\right|}\right)^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \in L_p(0, 1), \quad 0 < \varepsilon < p-1. \tag{4.14} $$

Легко показать, что для этой функции $f(x) \geqslant c \left(\ln \dfrac{1}{2/e - x}\right)^{1 - \frac{1+\varepsilon}{p}}$ при $x \to 2/e - 0$ (Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [4]).

Соотношения (4.13) приводят к естественной мысли построить промежуточное прост-

ранство X, $L_\infty \subset X \subset \bigcap_{r\geqslant 1} L_r$, содержащее образ $I_{a+}^{1/p}(L_p)$ и, по возможности, «близкое» к $I_{a+}^{1/p}(L_p)$. Приведем здесь два способа построения таких пространств. В основу первого кладутся локальные свойства функций f из $I_{a+}^{1/p}(L_p)$, а в основу второго — асимптотика L_r-норм функции f при $r \to \infty$.

А. Пусть BMO (a, b)—класс функций $f(x) \in L_1(a, b)$, для которых

$$\|f\|^* = \sup_{I \subset (a,b)} m_I f < \infty, \tag{4.15}$$

где

$$m_I f = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|\, dx, \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x)\, dx. \tag{4.16}$$

Оценивая норму (4.15), можно убедиться в том, что

$$I_{a+}^{1/p}(L_p) \subset \mathrm{BMO}(a, b), \quad \|I_{a+}^{1/p}\varphi\|^* \leqslant C\|\varphi\|_p.$$

Это утверждение, по-видимому, впервые было получено в многомерном случае для потенциалов Рисса в работе J. Peetre [1], хотя близкий в идейном плане результат отмечался ранее (E. M. Stein, A. Zygmund [3]). См. по этому поводу также работу H. M. Reimann, T. Rychener [1]. О пространствах BMO (называемых пространствами функций ограниченной в среднем осцилляции) см. в случае конечного отрезка $[a, b]$, например, книги Б. С. Кашина, А. А. Саакяна [1, гл. 5], Дж. Гарнетта [1, гл. 5].

Б. Н. К. Карапетянц и Б. С. Рубин [1] ввели банахово пространство $X_\gamma(a, b)$ функций $f(x)$ $\left(\in \bigcap_{r\geqslant 1} L_r(a, b)\right)$ с конечной нормой $\sup_{r\geqslant 1}(r^{-\gamma}\|f\|_r)$ и показали, что оператор $I_{a+}^{1/p}$, $1<p<\infty$, ограничен из $L_p(a, b)$ в $X_\gamma(a, b)$ при $\gamma \geqslant 1/p'$ и не является таковым при $\gamma < 1/p'$. Доказательство этого основано на том факте, что $\|I_{a+}^{1/p}\|_{L_p \to L_r} = O(r^{1/p'})$, $r \to \infty$.

Заметим, что BMO $(a, b) \not\subset X_\gamma(a, b)$ и $X_\gamma(a, b) \not\subset$ BMO (a, b) при $0<\gamma<1$. Первое соотношение подтверждается примером функции $f(x) = \ln x$, для которой $\|f\|_r = \frac{r}{e}(1 + o(1))$ при $r \to \infty$ (взяли $a = 0$, $b = 1$). Для второго соотношения соответствующим примером служит функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < 1/2, \\ \left(\ln \dfrac{1}{x - 1/2}\right)^\gamma & \text{при } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

(эти примеры указаны Н. К. Карапетянцем, Б. С. Рубиным [3]).

О развитии изложенных здесь идей см. далее в § 17, п. 2°, 13.1.

ГЛАВА 2

Дробные интегралы и производные на оси и полуоси

Настоящая глава посвящена исследованию дробных интегралов и производных на бесконечном промежутке. Рассматриваемые функции должны быть такими, чтобы соответствующие интегралы сходились на бесконечности. Мы будем иметь дело или с функциями, «убывающими» нужным образом на бесконечности, например с функциями из $L_p(R^1)$, где $1<p<1/\alpha$, или из $L_p(R^1;\rho)$, когда условие на p можно ослабить за счет веса $\rho(x)$, или же с гельдеровскими функциями (с весом), обращающимися в нуль на бесконечности. На таких функциях дробные интегралы сходятся абсолютно. Можно трактовать дробные интегралы и в более широком плане, понимая их как условно сходящиеся:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{N\to\infty}\int_{x-N}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

и тогда можно допускать локально суммируемые функции $\varphi(t)$, не обязательно убывающие на бесконечности, если поведение средних $\int_{x}^{x+T}\varphi(t)\,dt$ подчинить некоторым условиям. Мы не останавливаемся здесь на таком рассмотрении дробных интегралов, но столкнемся с ним позже в периодическом случае (§ 19, см., например, (19.20)) и в непериодическом случае (§ 14, п. 3°). См. также дополнительные указания в § 9, п. 2°, 5.1—5.3, 5.10.

§ 5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

1°. Определения и простейшие свойства. Дробные интегралы (2.17), (2.18) легко распространить со случая конечного отрезка $[a, b]$ на случай полуоси или оси. Собственно говоря, уже само определение (2.17) или (2.18) применимо благодаря переменному пределу интегрирования на полуоси (a, ∞) или $(-\infty, b)$. Обозначения (2.17), (2.18) будем использовать на соответствующих полуосях и, в частности, писать

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad 0<x<\infty. \tag{5.1}$$

Дробные интегралы по всей прямой будем обозначать

$$(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad -\infty<x<\infty, \tag{5.2}$$

$$(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\quad -\infty<x<\infty. \tag{5.3}$$

Их можно записать также в виде свертки

$$I_{\pm}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}t_{\pm}^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x\mp t)\,dt, \tag{5.4}$$

где

$$t_{+}^{\alpha-1}=\begin{cases}t^{\alpha-1}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases},\qquad t_{-}^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & t>0\\ |t|^{\alpha-1}, & t<0.\end{cases} \tag{5.5}$$

Интегралы $I_{\pm}^{\alpha}$ определены, например, на функциях $\varphi\in L_p(-\infty,\infty)$ при $0<\alpha<1$ и $1\leqslant p<1/\alpha$. Действительно,

$$I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt.$$

Здесь существование почти для всех x первого слагаемого можно установить, например, с помощью неравенства (1.33), а второе существует для всех x при $1\leqslant p<1/\alpha$ в силу неравенства Гельдера (1.28).

Аналогично (2.22), (2.23) вводятся лиувиллевские производные

$$(\mathcal{D}_{+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},$$

$$(\mathcal{D}_{-}^{\alpha}f)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{5.6}$$

$$-\infty<x<\infty,$$

где $0<\alpha<1$. Для $\alpha\geqslant 1$ подобно (2.30) полагаем

$$(\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}f)(x)=\frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{\infty}t^{n-\alpha-1}\varphi(x\mp t)\,dt,\quad n=[\alpha]+1. \tag{5.7}$$

В случае полуоси $(0,\infty)$ рассматриваем

$$(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{5.8}$$

$$(\mathcal{D}_-^\alpha f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^\infty \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \tag{5.8}$$

Связь между $I_+^\alpha\varphi$ и $I_-^\alpha\varphi$, аналогичная (2.19), имеет вид

$$QI_\pm^\alpha\varphi = I_\mp^\alpha Q\varphi, \quad (Q\varphi)(x) = \varphi(-x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{5.9}$$

Операторы $I_\pm^\alpha$ подчиняются простым правилам перестановочности с операторами сдвига и растяжения. Введем для последних обозначения

$$(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x-h), \quad x,\ h \in R^1, \tag{5.10}$$

$$(\Pi_\delta\varphi)(x) = \varphi(\delta x), \quad x \in R^1, \quad \delta > 0. \tag{5.11}$$

Легко проверяется, что

$$\tau_h I_\pm^\alpha\varphi = I_\pm^\alpha \tau_h\varphi, \tag{5.12}$$

$$\Pi_\delta I_\pm^\alpha\varphi = \delta^\alpha I_\pm^\alpha \Pi_\delta\varphi. \tag{5.13}$$

Свойство (5.13) справедливо и на полуоси для дробного интеграла $I_{0+}^\alpha\varphi$:

$$\Pi_\delta I_{0+}^\alpha\varphi = \delta^\alpha I_{0+}^\alpha \Pi_\delta\varphi. \tag{5.14}$$

Подобно случаю конечного интервала выполняется полугрупповое свойство

$$I_+^\alpha I_+^\beta\varphi = I_+^{\alpha+\beta}\varphi, \quad I_-^\alpha I_-^\beta\varphi = I_-^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{5.15}$$

Если функция φ «достаточно хороша», то равенства (5.15) выполняются при всех $\alpha>0$, $\beta>0$, что проверяется, как в случае (2.21). В рамках же пространства $L_p(R^1)$ равенства (5.15) выполняются для тех $\alpha>0$, $\beta>0$, при которых $\alpha+\beta<1/p$ (см. далее п. 2° о действии операторов $I_\pm^\alpha$ в $L_p(R^1)$).

Справедливы формулы «дробного интегрирования по частям»:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)(I_+^\alpha\psi)(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty \psi(x)(I_-^\alpha\varphi)(x)\,dx, \tag{5.16}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)(\mathcal{I}_+^\alpha g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty g(x)(\mathcal{D}_-^\alpha f)(x)\,dx. \tag{5.17}$$

Формула (5.16) получается, как и аналогичная ей формула (2.20), перестановкой порядка интегрирования. Формула (5.17) вытекает из (5.16) после переобозначения $I_+^\alpha\psi = g$, $I_-^\alpha\varphi = f$. Таким путем доказываются эти формулы на «достаточно хороших» функциях. Формулу (5.16) нетрудно обосновать для $\varphi(x) \in L_p$, $\psi(x) \in L_r$, $p>1$, $r>1$, $1/p+1/r = 1+\alpha$. Это делается аналогично обоснованию формулы (2.20) с привлечением теоремы 5.3. Обоснование формулы (5.17) в случае p-суммируемых дробных производных дано в следствии 2 из теоремы 6.2.

Формулы (5.16), (5.17) имеют место также и на полуоси. Так, в обозначениях (5.1), (5.3)

$$\int_0^\infty \varphi(x)(I_{0+}^\alpha\psi)(x)\,dx = \int_0^\infty \psi(x)(I_-^\alpha\varphi)(x)\,dx. \tag{5.16'}$$

Интегралы чисто мнимого порядка $\alpha = i\theta$ определяются аналогично (2.38):

$$(I_+^{i\theta}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{i\theta}\varphi(x-t)\,dt \tag{5.18}$$

(на «достаточно хороших» функциях).

Укажем ряд элементарных функций $\varphi(x)$, для которых $I_{\pm}^{\alpha}\varphi$ вычисляются также в терминах элементарных функций.

1. Для $\varphi(t)=e^{\pm t}$ имеем

$$(I_{\pm}^{\alpha}\varphi)(x)=e^{\pm x},\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{5.19}$$

при одинаковом выборе знаков. Действительно, $I_{+}^{\alpha}(e^{x})=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}e^{x-t}t^{\alpha-1}dt=$ $=e^{x}$; более общо:

$$I_{\pm}^{\alpha}(e^{\pm ax})=a^{-\alpha}e^{\pm ax},\quad \operatorname{Re}a>0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{5.20}$$

что обосновывается аналогично с учетом формулы (7.5), доказываемой далее в § 7. Ср. также (5.20) с формулами (22.26), (22.27).

2. Из (5.20) следуют формулы

$$I_{\pm}^{\alpha}(e^{\pm ax}\sin bx)=\frac{e^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\sin(bx\mp\alpha\varphi), \tag{5.21}$$

$$I_{\pm}^{\alpha}(e^{\pm ax}\cos bx)=\frac{e^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\cos(bx\mp\alpha\varphi), \tag{5.22}$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a^2+b^2>0$, $\varphi=\arg(a+bi)\in[0,\ \pi/2]$ и $\operatorname{Re}\alpha>0$, кроме случая $a=0$, когда $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. В последнем случае

$$I_{\pm}^{\alpha}(\sin bx)=b^{-\alpha}\sin\left(bx\mp\frac{\alpha\pi}{2}\right),\quad I_{\pm}^{\alpha}(\cos bx)=b^{-\alpha}\cos\left(bx\mp\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{5.23}$$

3. Для $\varphi(x)=\begin{cases}(x-a)^{\beta-1}, & x>a,\\ 0, & x\leqslant a,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\beta>0$, из (2.44) имеем

$$(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, & x>a,\\ 0, & x\leqslant a.\end{cases}$$

4. При $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\mu$ справедливы формулы

$$I_{+}^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^{\mu}}\right]=e^{\pm\frac{\alpha\pi i}{2}}\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(1\pm ix)^{\mu-\alpha}}, \tag{5.24}$$

$$I_{-}^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(x\pm i)^{\mu}}\right]=\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(x\pm i)^{\mu-\alpha}}, \tag{5.25}$$

где степенные функции $(1\pm ix)^{\mu}$, $(x\pm i)^{\mu}$ понимаются, как обычно, как соответствующие значения главной ветви аналитической функции z^{μ} в плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси:

$$z^{\mu}=|z|^{\mu}e^{i\mu\arg z},\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\arg z\big|_{z=t+i\varepsilon,\ t>0}=0. \tag{5.26}$$

В соответствии с выбором (5.26) можно записать

$$\begin{aligned}(\pm ix+1)^{\mu}&=(1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}e^{\pm i\mu\operatorname{arc\,tg}x},\quad x\in R^1,\\ (x\pm i)^{\mu}&=(1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}e^{\pm i\mu\operatorname{arc\,ctg}x},\quad x\in R^1.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Формулу (5.24) можно переписать также в виде

$$I_+^\alpha\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(x\pm i)^\mu}\right]=e^{\pm\alpha\pi i}\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(x\pm i)^{\mu-\alpha}}. \tag{5.28}$$

Обоснование формул (5.24), (5.25) нам будет удобнее привести позже, в § 7, в конце п. 1°. Сейчас заметим только, что эти формулы выводятся одна из другой на основании свойства (5.9), если учесть, что $(1\pm\pm ix)^\mu|_{x=-\xi}=e^{\mp i\mu\pi/2}(\xi\pm i)^\mu$ в соответствии с (5.27). Поэтому достаточно будет доказать одну из формул (5.24), (5.25).

2°. Дробные интегралы гельдеровских функций. Результаты этого пункта примыкают к результатам § 3, отличаясь от них той спецификой, которую привносит наличие бесконечно удаленной точки на оси или полуоси. Начнем со случая гельдеровских функций с весом на полуоси $\dot R_+^1=[0,\infty]$. Рассмотрим дробные интегралы:

$$I_{0+}^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad I_-^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\quad x>0. \tag{5.29}$$

Утверждения об их гельдеровости на полуоси получаются сведением к случаю отрезка на основе следующей леммы.

Лемма 5.1. *Преобразование* $y=1/(x+1)$ *отображает пространство* $H^\lambda(\dot R_+^1;\rho)$, $\rho=\rho(x)$, $x>0$, *взаимно однозначно на пространство* $H^\lambda([0,1];r)$, *где*

$$r=r(y)=\rho[(1-y)/y],\quad 0<y<1. \tag{5.30}$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой (укажем, что при замене $y=1/(x+1)$ условие гельдеровости (1.6) переходит в (1.1)).

Теорема 5.1. *Пусть* $\varphi(x)\in H_0^\lambda(\dot R_+^1;\rho)$, *где*

$$\rho(x)=(1+x)^\mu\prod_{k=1}^n|x-x_k|^{\mu_k},\quad 0=x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty. \tag{5.31}$$

Пусть также $\lambda+\alpha<1$ *и* $\lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1$, $k=2,3,\ldots,n$. *Если*

$$\mu_1<\lambda+1,\quad \mu+\sum_{k=1}^n\mu_k<1-\lambda, \tag{5.32}$$

то $I_{0+}^\alpha\varphi\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R_+^1;\rho^*)$. *Если же* $\lambda+\alpha<\mu_1<\lambda+1$ (*или* $\mu_1=0$), *или* $\alpha-\lambda<\mu+\sum_{k=1}^n\mu_k$, *то* $I_-^\alpha\varphi\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R_+^1;\rho^*)$. *В обоих случаях* $\rho^*(x)=(1+x)^{-2\alpha}\rho(x)$.

Доказательство. Теорема 5.1 сводится заменами переменных к теореме 3.4. Действительно, замены $y=1/(x+1)$, $\tau=1/(t+1)$ дают

$$\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=y^{1-\alpha}\int_y^1\frac{\varphi\left(\dfrac{1-\tau}{\tau}\right)d\tau}{\tau^{1+\alpha}(\tau-y)^{1-\alpha}}, \tag{5.33}$$

$$\int_x^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=y^{1-\alpha}\int_0^y\frac{\varphi\left(\dfrac{1-\tau}{\tau}\right)d\tau}{\tau^{1+\alpha}(y-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{5.34}$$

В силу леммы 5.1 замена $y=1/(x+1)$ отображает пространство $H^{\lambda}(\dot{R}^1_+;\ \rho)$ на пространство $H^{\lambda}([0,\ 1];\ r(y))$ с весом

$$r(y)=\rho[(1-y)/y]=c\prod_{k=0}^{n}|y-y_k|^{\mu_k}, \tag{5.35}$$

где $y_0=0$, $\mu_0=-\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k$, а $y_k=(1+x_k)^{-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Применяя к интегралам (5.33), (5.34) с учетом этого отображения теорему 3.4, после простых преобразований получаем утверждение теоремы.

Следствие 1. *В случае* $\rho(x)=x^{\nu}(1+x)^{\mu}$ *оператор* I^{α}_{0+} *действует из* $H^{\lambda}_0(\dot{R}^1_+;\ \rho)$ *в* $H^{\lambda+\alpha}_0(\dot{R}^1_+;\ \rho^*)$, $\lambda+\alpha<1$, $\rho^*(x)=x^{\nu}(1+x)^{\mu-2\alpha}$, *если*

$$\nu<\lambda+1,\quad \mu+\nu<1-\lambda. \tag{5.36}$$

Для оператора I^{α}_{-} *условия (5.36) следует заменить условиями*

$$\lambda+\alpha<\nu<\lambda+1,\quad \alpha-\lambda<\mu+\nu. \tag{5.37}$$

Отметим еще частный случай этого следствия: если $\varphi(x)\in H^{\lambda}([0,\ \infty])$, $\varphi(0)=\varphi(\infty)=0$, то при $\alpha>0$, $\lambda+\alpha<1$

$$\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\frac{\Phi(x)}{(1+x)^{2\alpha}}, \tag{5.38}$$

где $\Phi(x)\in H^{\lambda+\alpha}([0,\ \infty])$, $\Phi(0)=\Phi(\infty)=0$.

Представляет интерес утверждение типа (5.38) для функций $\varphi(x)\in H^{\lambda}(\dot{R}^1_+)$ без дополнительного предположения $\varphi(0)=\varphi(\infty)=0$. Обозначим для этого $u(x)=\varphi(\infty)+\dfrac{\varphi(0)-\varphi(\infty)}{(1+x)^{1+\alpha}}$, так что $u(0)=\varphi(0)$, $u(\infty)=\varphi(\infty)$. Так как $I^{\alpha}_{0+}[(1+x)^{-1-\alpha}]=\dfrac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)(1+x)}$ в силу (2.49), то

$$I^{\alpha}_{0+}u=\frac{\varphi(0)}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{x^{\alpha}}{1+x}+\frac{\varphi(\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{x^{\alpha+1}}{1+x}.$$

Применяя теперь (5.38) к функции $\varphi(x)-u(x)$, получаем

Следствие 2. *Если* $\varphi(x)\in H^{\lambda}([0,\ \infty])$, *то при* $\alpha>0$, $\lambda+\alpha<1$

$$\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\frac{\varphi(0)}{\alpha}\frac{x^{\alpha}}{1+x}+\frac{\varphi(\infty)}{\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{1+x}+\frac{\Phi(x)}{(1+x)^{2\alpha}},$$

где $\Phi(x)\in H^{\lambda+\alpha}([0,\ \infty])$, $\Phi(0)=\Phi(\infty)=0$.

Аналогичное теореме 5.1 утверждение получается для дробных интегралов на всей прямой. Именно справедлива

Теорема 5.2. *Пусть* $\varphi(x)\in H^{\lambda}_0(\dot{R}^1;\ \rho)$, *где*

$$\rho(x)=(1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k},\quad -\infty<x_1<\cdots<x_n<\infty. \tag{5.39}$$

Если $\lambda+\alpha<1$, $\lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1$, $k=1,\ \ldots,\ n$, *и* $\alpha-\lambda<\mu+\sum_{k=1}^{n}\mu_k<1-\lambda$,

то $I^{\alpha}_{+}\varphi$, $I^{\alpha}_{-}\varphi\in H^{\lambda+\alpha}_0(\dot{R}^1;\ \rho^*)$, *где* $\rho^*(x)=(1+x^2)^{-\alpha}\rho(x)$.

Доказательство. Ввиду (5.9) достаточно рассмотреть дробный интеграл $f(x)=I^{\alpha}_{+}\varphi$. Заменой переменных — сдвигом — можно перенести начало координат в точку $x_1=0$. В силу свойства (5.12) достаточно доказать теорему для случая $0=x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty$. В этом случае, как нетрудно видеть с учетом леммы 1.1, $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^1;\ \rho^*)$ тогда и только тогда, когда $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^1_+;\ \rho^*)$ и $f(-x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^1_+;\ \rho_1\rho_2)$, где $\rho_1=x^{\mu_1}$, $\rho_2=(1+x^2)^{-\beta}$, $\beta=-2\alpha+\sum_{k=2}^{n}\mu_k$ (учли, что $0<c_1\leqslant\frac{\rho^*(-x)}{\rho_1(x)\rho_2(x)}\leqslant c_2<\infty$ для $x\in\dot{R}^1_+$). Утверждение $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^1;\ \rho^*)$ содержится в теореме 5.1. Далее, при $x>0$ имеем $f(-x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(-t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}$.

Здесь первое слагаемое принадлежит классу $H_0^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^1_+;\ \rho_1\rho_2)$ также в силу теоремы 5.1. Второе слагаемое — обозначим его $G(x)$ — есть бесконечно дифференцируемая функция при $0<x<\infty$. Уточним поведение $G(x)$ при $x\to 0$ и $x\to\infty$. Пусть

$$\Gamma(\alpha)\,G(x)=\int_0^2\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}+\int_2^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}=G_1(x)+G_2(x).$$

При $0\leqslant x\leqslant 1$ получаем $G(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}([0,\ 1];\ \rho_1)$ в силу леммы 3.1 для $G_1(x)$ и бесконечной дифференцируемости функции $G_2(x)$. При $x\geqslant 1$ легко получить $G_1(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}([1,\ \infty];\ \rho_1\rho_2)$ с учетом бесконечной дифференцируемости $G_1(x)$ при $x\geqslant 1$ и с учетом очевидного поведения $G_1(1/y)$ в окрестности $y=0$. Для $G_2(x)$ при $x\geqslant 1$ после замены $t=\tau^{-1}+1$, $x=y^{-1}-1$ имеем

$$\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}=y^{1-\alpha}\int_0^1\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{(\tau+y)^{1-\alpha}},\tag{5.40}$$

где в силу леммы 5.1 $\psi(\tau)=\tau^{-1-\alpha}\varphi\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\in H_0^{\lambda}([0,\ 1];\ \rho_3)$, $\rho_3(\tau)=\tau^{1+\alpha}\rho\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)=\tau^{1+\alpha+\mu_0}\rho_4(\tau)$, причем вес $\rho_4(\tau)$ уже не «привязан» к точке $\tau=0$, а $\mu_0=-\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k$ (см. (5.35)). Так как $\tau^{1+\alpha+\mu_0}\psi(\tau)\in H^{\lambda}([0,\ 1])$ и $\tau^{1+\alpha+\mu_0}\psi(\tau)|_{\tau=0}=0$, то $|\psi(\tau)|\leqslant c\tau^{-\gamma}$, $\gamma=1+\alpha+\mu_0-\lambda$, в окрестности точки $\tau=0$. Применяя лемму 3.1 (что возможно при условии $\alpha-\lambda<-\mu_0<1-\lambda$) при $\beta=\lambda$, получаем, что правая часть равенства (5.40) принадлежит классу $H_0^{\lambda+\alpha}([0,\ 1];\ y^{2\alpha+\mu_0}\rho_4(y))$ с учетом ее бесконечной дифференцируемости при $y>0$. Тогда левая часть принадлежит классу $H_0^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^1_+;\ \rho^*(x))$ в силу леммы 5.1. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Некоторые результаты о действии дробных интегралов в классах гладких функций на оси или полуоси см. также в § 8, пп. 2, 4°.

3°. Дробные интегралы суммируемых функций. Рассмотрим дробные интегралы от функций $\varphi\in L_p$ на полуоси или оси. Здесь отличие от случая конечного отрезка состоит в следующем. В случае конечного отрезка операторы дробного интегрирования были определены (см. § 3, п. 3°) на любом классе L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и действовали из L_p, $1<p<\infty$, в L_q, где

$1 \leqslant q \leqslant p/(1-\alpha p)$ при $\alpha p < 1$ и $1 \leqslant q < \infty$ при $\alpha p \geqslant 1$. В случае же полуоси или оси операторы дробного интегрирования определены, вообще говоря, при $1 \leqslant p < 1/\alpha$ и могут действовать из L_p, $1 < p < 1/\alpha$, в L_q только при $q = p/(1-\alpha p)$. Именно теорема Харди—Литтлвуда 3.5 для всей прямой справедлива в следующем виде.

Теорема 5.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\alpha > 0$. *Операторы* $I_{\pm}^{\alpha}$ *ограничены из* $L_p(R^1)$ *в* $L_q(R^1)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < 1/\alpha \text{ и } q = p/(1-\alpha p).$$

Доказательство этой теоремы, как и теоремы 3.5, мы опускаем (см. литературные ссылки в § 9). Приведем лишь простое доказательство необходимости условий $\alpha \in (0, 1)$, $p \in (1, 1/\alpha)$, $q = p/(1-\alpha p)$. Пусть $\|I_{+}^{\alpha}\varphi\|_q \leqslant c\|\varphi\|_p$. Тогда и $\|I_{+}^{\alpha}\Pi_\delta\varphi\|_q \leqslant c\|\Pi_\delta\varphi\|_p$, где Π_δ — оператор (5.11). В силу свойства (5.13) и равенства $\|\Pi_\delta\varphi\|_p = \delta^{-1/p}\|\varphi\|_p$ получаем $\|I_{+}^{\alpha}\varphi\|_q \leqslant c\delta^{\alpha+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_p$. Устремляя δ к 0 и к ∞, видим, что это неравенство возможно только при $1/q = 1/p - \alpha$. Так как $q > 0$, то отсюда $p < 1/\alpha$. Остается исключить $p = 1$. Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln^{-\gamma}\dfrac{1}{x}, & 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & x \notin (0, 1/2), \end{cases} \qquad \gamma > 1, \tag{5.41}$$

доставляет пример функции из $L_1(R^1)$, для которой $(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x) \notin L_{1/(1-\alpha)}(R^1)$ при $1 < \gamma < 2-\alpha$. Действительно, при $0 < x < 1/2$

$$\Gamma(\alpha)(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x) > x^{\alpha-1}\int_0^x \frac{dt}{t\ln^{\gamma}(1/t)} = \frac{x^{\alpha-1}\ln^{1-\gamma}\dfrac{1}{x}}{\gamma-1}, \tag{5.42}$$

так что $I_{+}^{\alpha}\varphi \in L_{1/(1-\alpha)}(R^1)$ лишь при $(\gamma-1)/(2-\alpha) > 1$, т. е. $\gamma > 2-\alpha$.

Ясно, что теорема 5.3 справедлива и для дробных интегралов (5.29) на полуоси $(0, \infty)$.

Некоторую информацию для случая $p = 1$ см. ниже в теореме 5.6.

Приведем весовой аналог теоремы 5.3 для случая полуоси.

Теорема 5.4. *Пусть*

$$1 \leqslant p < \infty, \quad 0 < \alpha < m + \frac{1}{p}, \quad 0 \leqslant m \leqslant \alpha, \quad q = \frac{p}{1-(\alpha-m)p} \tag{5.43}$$

$$\text{и } m \neq 0 \text{ при } p = 1.$$

Тогда операторы I_{-}^{α}, I_{0+}^{α} *ограничены из* $L_p(R_+^1; x^{\mu})$ *в* $L_q(R_+^1; x^{\nu})$, $\nu = (\mu/p - m)q$:

$$\left\{\int_0^{\infty} x^{\nu}|(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)|^q dx\right\}^{1/q} \leqslant k\left\{\int_0^{\infty} x^{\mu}|\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p} \tag{5.44}$$

(и аналогично для $I_{0+}^{\alpha}\varphi$*), где* $\mu < p-1$ *для оператора* I_{0+}^{α} *и* $\mu > \alpha p - 1$ *для оператора* I_{-}^{α}.

Утверждение теоремы 5.4 для оператора I_{0+}^{α} доказано ранее в теореме 3.7, а для оператора I_{-}^{α} получается из утверждения для I_{0+}^{α} заменами

$$1/x = y, \quad y^{-1-\alpha}\varphi(x) = \varphi_1(y), \quad \mu_1 = -\mu + p + \alpha p - 2,$$

$$\nu_1 = -\nu - 2 + (1-\alpha)q$$

с учетом того, что $(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = y^{1-\alpha}(I_{-}^{\alpha}\varphi_1)(y)$.

Отметим важные частные случаи теоремы 5.4. Случаю $\mu=0$, $m=0$ отвечает теорема 5.3, а при $\mu=0$, $m=\alpha$ из теоремы 5.4 получаем неравенства

$$\int_0^\infty x^{-\alpha p}|(I_-^\alpha\varphi)(x)|^p\,dx\leqslant \kappa^p\int_0^\infty|\varphi(x)|^p dx,\qquad 1\leqslant p<1/\alpha,\quad 0<\alpha<1; \tag{5.45}$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha p}|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)|^p dx\leqslant \kappa^p\int_0^\infty|\varphi(x)|^p dx,\quad 1<p<\infty,\quad \alpha>0, \tag{5.46}$$

которые называются *неравенствами Харди*. Их можно получить также независимо от общей теоремы 5.4 с помощью теоремы 1.5 (если ограничиться в (5.45) случаем $1<p<1/\alpha$). При этом теорема 1.5 дает значение постоянной к:

$$\kappa=\Gamma\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{p}\right),\quad \kappa=\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)\Big/\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{p'}\right)$$

для неравенств (5.45) и (5.46) соответственно. Можно показать, что эти постоянные точные.

Нам удобно выделить также общий случай $m=\alpha$ (т. е. $q=p$) из теоремы 5.4, перефразировав его (после переобозначения $\mu/p=-\gamma$, $\varphi(x)=x^\gamma f(x)$) следующим образом.

Операторы $x^\beta I_-^\alpha x^\gamma$ *и* $x^\beta I_{0+}^\alpha x^\gamma$, $\alpha>0$, *ограничены из* $L_p(R_+^1)$ в $L_p(R_+^1;\ x^{-p(\alpha+\beta+\gamma)})$, $p\geqslant 1$, *соответственно при* $(\alpha+\gamma)p<1$ *и* $(\gamma+1)p>1$:

$$\int_0^\infty x^{-(\alpha+\beta+\gamma)p}|x^\beta I_-^\alpha x^\gamma f(x)|^p dx\leqslant \kappa^p\int_0^\infty|f(x)|^p dx, \tag{5.45'}$$

$$1\leqslant p<\infty,\quad (\alpha+\gamma)p<1,\quad \alpha>0;$$

$$\int_0^\infty x^{-(\alpha+\beta+\gamma)p}|x^\beta I_{0+}^\alpha x^\gamma f(x)|^p dx\leqslant \kappa^p\int_0^\infty|f(x)|^p dx, \tag{5.46'}$$

$$1\leqslant p<\infty,\quad (\gamma+1)p>1,\quad \alpha>0.$$

В частности, если $\alpha+\beta+\gamma=0$, то при указанных условиях операторы $x^\beta I_-^\alpha x^\gamma$ и $x^\beta I_{0+}^\alpha x^\gamma$ ограничены из $L_p(R_+^1)$ в $L_p(R_+^1)$.

Неравенства (5.45'), (5.46') сохраняют силу и для комплексных параметров α, β, γ при замене $x^{-(\alpha+\beta+\gamma)p}$ на $x^{-p\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma)}$, если соответственно $p\operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$ и $p(\operatorname{Re}\gamma+1)>1$, а также $\operatorname{Re}\alpha>0$, $1\leqslant p<\infty$ или $\operatorname{Re}\alpha=0$, $\alpha\neq 0$, $1<p<\infty$. Отметим, что для рассмотрения случая чисто мнимого $\alpha=i\theta$ нужно представить $x^{-\gamma}I_{0+}^{i\theta}x^\gamma$ в виде $I_{0+}^{i\theta}+(x^{-\gamma}I_{0+}^{i\theta}x^\gamma-I_{0+}^{i\theta})$, где к первому слагаемому применить лемму 8.2, а ко второму — теорему 1.5.

В граничных случаях условий к неравенствам (5.45'), (5.46'), когда $p=1$ и соответственно $\gamma=1-\alpha$ и $\gamma=0$, интегралы в левых частях указанных неравенств расходятся и вместо этих формул будут иметь место неравенства (3.17''') и (3.17''). В частности, при $\lambda=0$ последние неравенства показывают, что оператор $x^{-1}I_-^\alpha x^{1-\alpha}$ ограничен из $L_1\left((b,\ \infty);\ \ln\frac{b+1}{b}\,x\right)$ в $L_1(b,\ \infty)$, а $x^{-\alpha}I_{0+}^\alpha$ — из $L_1\left((0,\ b);\ \ln\frac{b+1}{x}\right)$ в $L_1(0,\ b)$, $0<b<\infty$.

Приведем без доказательства аналог теоремы 5.4 для случая степенного веса общего вида (5.39). Рассмотрение будем вести для $x\in\Omega$, где в ка-

честве Ω возьмем полуось R^1_+ или всю вещественную ось R^1. В случае $\Omega = R^1_+$ считаем

$$0 = x_1 < \cdots < x_n < \infty. \tag{5.47}$$

Обозначим

$$\nu_k = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_k}{p} - m\right) q & \text{при } \mu_k < \alpha p - 1, \\ \left(\alpha - \dfrac{1}{p} - m\right) q + \varepsilon_k & \text{при } \mu_k \geqslant \alpha p - 1, \quad \varepsilon_k > 0. \end{cases}$$

Пусть $\mu_0 = -\mu - \mu_1 - \cdots - \mu_n$. Введем также числа

$$\nu_\infty^{(1)} = -\frac{\mu_1 q}{p} - \sum_{k=2}^{n} \nu_k - \begin{cases} \mu_0 q/p & \text{при } \mu_0 > 1 - p, \\ \varepsilon - q/p' & \text{при } \mu_0 \leqslant 1 - p, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\nu_\infty^{(2)} = -mq - \sum_{k=1}^{n} \nu_k - \begin{cases} \mu_0 q/p & \text{при } \mu_0 > 1 - p, \\ \varepsilon - q/p' & \text{при } \mu_0 \leqslant 1 - p, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\nu_\infty^{(3)} = -\left(\frac{\mu_0}{p} + m\right) q - \sum_{k=1}^{n} \nu_k,$$

в терминах которых введем весовые функции типа (5.39):

$$r_+(x) = \begin{cases} (1+x)^{\nu_\infty^{(1)}} x^{(\mu_1/p - m)q} \prod\limits_{k=2}^{n} |x - x_k|^{\nu_k} & \text{при } \Omega = R^1_+, \\ (1+|x|)^{\nu_\infty^{(2)}} \prod\limits_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\nu_k} & \text{при } \Omega = R^1, \end{cases}$$

$$r_-(x) = \begin{cases} (1+x)^{\nu_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\nu_k} & \text{при } \Omega = R^1_+, \\ r_+(x) & \text{при } \Omega = R^1. \end{cases}$$

Теорема 5.5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 \leqslant m \leqslant \alpha$, $0 < \alpha < m + 1/p$, $\rho(x)$ — *вес (5.39) с условием (5.47) в случае полуоси. Пусть*

$$\mu_k < p - 1, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{5.48}$$

Если, кроме (5.48), $\mu_1 < p - 1$, *то оператор* I^α_{0+} *ограничен из* $L_p(R^1_+, \rho)$ *в* $L_q(R^1_+, r_+)$. *Если, кроме (5.48),* $\mu < 1 - \alpha p$, *то* I^α_- *ограничен из* $L_p(R^1_+, \rho)$ *в* $L_q(R^1_+, r_-)$. *Наконец, операторы* $I^\alpha_\pm$ *ограничены из* $L_p(R^1, \rho)$ *в* $L_q(R^1, r_\pm)$, *если, кроме (5.48),* $\mu_1 < p - 1$, $\mu_0 < 1 - \alpha p$.

Отметим полезный частный случай теоремы 5.5:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\nu |(I^\alpha_+ \varphi)(x)|^q \, dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant c \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\mu |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{5.49}$$

$$1 < p < \infty, \quad \alpha p - 1 < \mu < p - 1, \quad \frac{1}{p} - \alpha \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{p},$$

$$\frac{1+\nu}{q} = \frac{1+\mu}{p} - \alpha.$$

Неравенства типа (5.45) справедливы и в случае всей оси:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-\alpha p} |(I^\alpha_\pm \varphi)(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant \kappa \|\varphi\|_p, \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{5.50}$$

Они содержатся в теореме 5.5, но могут быть также получены с помощью теоремы 1.5 переходом к полуосям.

Докажем еще одну простую теорему, относящуюся к случаю $p=1$ и удобную в приложениях.

Теорема 5.6. *Пусть* $f(x)=I_{0+}^{\alpha}\varphi$ *или* $f(x)=I_{-}^{\alpha}\varphi$. *Если* $\varphi(x)\in L_1(\dot{R}_+^1;\rho)$, $\rho(x)=(1+x)^{\mu}$, $\alpha-1<\mu\leqslant 0$, *то*

$$\left\{\int_0^{\infty}(1+x)^{\nu}|f(x)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant K\int_0^{\infty}(1+x)^{\mu}|\varphi(x)|\,dx, \tag{5.51}$$

где $1\leqslant r<1/(1-\alpha)$ *и* $\nu=r(1-\alpha+\mu)-1$, *за исключением случая* $f(x)=I_{0+}^{\alpha}\varphi$, $\mu=0$, *когда* $\nu<r(1-\alpha)-1$.

Доказательство. Пусть $f(x)=I_{-}^{\alpha}\varphi$ и пусть A — левая часть в (5.51). Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), имеем $A\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}|\varphi(t)|\left(\int_0^t(1+x)^{\nu}(t-x)^{(\alpha-1)r}dx\right)^{1/r}dt$. Замена $x=t-(1+t)\xi$ дает

$$\int_0^t(1+x)^{\nu}(t-x)^{(\alpha-1)r}dx=(1+t)^{\mu r}\int_0^{t/(t+1)}(1-\xi)^{\nu}\xi^{(\alpha-1)r}d\xi\leqslant c(1+t)^{\mu r}$$

с учетом того, что $\nu>-1$ и $(\alpha-1)r>-1$. Поэтому из записанной оценки для A следует (5.51). Случай $f(x)=I_{0+}^{\alpha}\varphi$ рассматривается аналогично с той лишь разницей, что будем иметь дело с интегралом

$$\int_t^{\infty}(1+x)^{\nu}(x-t)^{(\alpha-1)r}dx=(1+t)^{\nu+1+(\alpha-1)r}\int_0^{\infty}\xi^{(\alpha-1)r}(\xi+1)^{\nu}d\xi.$$

Замечание 5.2. Теорема 5.6 справедлива и на оси в случае веса $(1+|x|)^{\mu}$, $\alpha-1<\mu\leqslant 0$, $\nu=r(1-\alpha+\mu)-1$ при $\mu\neq 0$ и $\nu<r(1-\alpha)-1$ при $\mu=0$. Доказательство аналогично.

Завершим рассмотрение этого пункта построением одного пространства суммируемых на оси функций, инвариантного относительно дробного интегрирования (пространства L_p или $L_p(\rho)$ со степенным весом этим свойством не обладают). Именно введем пространства $L_{p,\omega}$ с экспоненциальным весом, определив в них норму:

$$\|\varphi\|_{L_{p,\omega}}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega t}|\varphi(t)|^p dt\right\}^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty, \tag{5.52}$$

а через $C_{\omega}=C_{\omega}(R^1)$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, таких, что $e^{-\omega t}\varphi(t)\in C(\dot{R}^1)$, $\|\varphi\|_{C_{\omega}}=\max e^{-\omega t}|\varphi(t)|$. Для краткости будем полагать $L_{p,\omega}=C_{\omega}$ при $p=\infty$.

Теорема 5.7. *Операторы* $I_{\pm}^{\alpha}$, $\alpha>0$, *ограничены в* $L_{p,\omega}$, $1\leqslant p\leqslant\omega$, *если* $\pm\omega>0$ *соответственно, при этом*

$$\|I_{\pm}^{\alpha}\|_{L_{p,\omega}\to L_{p,\omega}}\leqslant\begin{cases}(p/|\omega|)^{\alpha}, & 1\leqslant p<\infty,\\ |\omega|^{-\alpha}, & p=\infty,\end{cases} \tag{5.53}$$

и

$$\|I_{\pm}^{\alpha}\|_{L_{1,\omega}\to L_{1,\omega}}=\|I_{\pm}^{\alpha}\|_{C_{\omega}\to C_{\omega}}=|\omega|^{-\alpha}. \tag{5.54}$$

Доказательство. Имеем при $\omega>0$

$$\Gamma(\alpha)\|I_+^\alpha\varphi\|_{L_{p,\omega}} \leqslant \int_0^\infty t^{\alpha-1}dt\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x}|\varphi(x-t)|^p dx\Big\}^{1/p} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{t\omega}{p}} t^{\alpha-1}dt\,\|\varphi\|_{L_{p,\omega}} = \Gamma(\alpha)\Big(\frac{p}{\omega}\Big)^\alpha \|\varphi\|_{L_{p,\omega}}. \qquad (5.55)$$

Для получения (5.54) остается заметить, что $\|I_\pm^\alpha\varphi\|_{L_{1,\omega}} = |\omega|^{-\alpha}\|\varphi\|_{L_{1,\omega}}$ на неотрицательных функциях $\varphi(x)$ (это усматривается из действий в (5.55)) и что $\|I_\pm^\alpha\varphi\|_{C_\omega} = |\omega|^{-\alpha}\|\varphi\|_{C_\omega}$ на функции $\varphi(x) = e^{\omega x}$.

4°. Дробная производная Маршо. Дробные производные Лиувилля (5.6) на оси можно привести к другому виду, который на оси оказывается, вообще говоря, более удобным, чем (5.6). Будем пока предполагать, что функция $f(x)$ достаточно «хороша»; например, $f(x)$ непрерывно дифференцируема и убывает вместе с производной $f'(x)$ не медленнее, чем $|x|^{\alpha-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Предполагаем, что $0<\alpha<1$. Имеем

$$(\mathscr{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^\infty t^{-\alpha}f(x-t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha}f'(x-t)\,dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty f'(x-t)\,dt\int_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1+\alpha}} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}}d\xi. \qquad (5.56)$$

Положим

$$(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \qquad (5.57)$$

так что $\mathbf{D}_+^\alpha f \equiv \mathscr{D}_+^\alpha f$ на достаточно «хороших» функциях $f(x)$.

Аналогичные преобразования приводят к выражению

$$(\mathbf{D}_-^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}dt, \quad -\infty<x<\infty, \qquad (5.58)$$

заменяющему $\mathscr{D}_-^\alpha f$. Конструкции (5.57), (5.58) будем называть *дробными производными Маршо.*

Очевидно, интегралы (5.57), (5.58) существуют не только при указанных предположениях о функции $f(x)$ — они понадобились только для того, чтобы совершить простой переход (5.56) от $\mathscr{D}_+^\alpha f$ к $\mathbf{D}_+^\alpha f$. Ясно, что интегралы (5.57), (5.58) существуют, например, на функциях, удовлетворяющих локально условию Гельдера порядка $\lambda>\alpha$ (его можно ослабить до $\lambda=\alpha$, взяв функции $f(x)$, принадлежащие локально классу $H^{\alpha,-a}$, $a>1$), а на бесконечности ограниченных.

Естественно поставить вопрос, можно ли утверждать, что $\mathscr{D}_+^\alpha f \equiv \mathbf{D}_+^\alpha f$ не только на «достаточно хороших» функциях, но и на всех тех функциях $f(x)$, на которых $\mathscr{D}_+^\alpha f$ и $\mathbf{D}_+^\alpha f$ существуют (почти всюду, например). Если существует $\mathscr{D}_+^\alpha f$, то существует ли $\mathbf{D}_+^\alpha f$ и наоборот?

На второй вопрос можно сразу дать отрицательный ответ: в случае $f(x)\equiv\text{const}$ существует $\mathbf{D}_+^\alpha f$ и $\mathbf{D}_+^\alpha f\equiv 0$, однако $\mathscr{D}_+^\alpha f$ для $f(x)=\text{const}$ не существует. Вообще, если $f(x)$ локально гельдерова порядка $\lambda>\alpha$, а на бесконечности не убывает, выходя, например, на постоянную или даже

возрастая (!) не быстрее, чем $|x|^{\alpha-\varepsilon}$, то $\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f$ существует, чего не скажешь о $\mathscr{D}^{\alpha}_{+}f$, для существования которой требуется лучшее поведение $f(x)$ на бесконечности.

Ответ на первый вопрос сложнее уже хотя бы потому, что области определения операторов $\mathscr{D}^{\alpha}_{\pm}$ и $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}$ оказываются различными. Это различие тесно связано с вопросом обращения дробных интегралов. Какой вариант более естествен:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi \equiv \varphi \quad \text{или} \quad \mathscr{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi \equiv \varphi?$$

Второй вариант уже был использован в случае конечного отрезка (см. § 2, п. 6°). В случае же оси картина такова: если $\varphi \in L_p$, то первый вариант будет работать при всех допустимых p, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, а второй — только при $p=1$ (см. далее § 6, п. 2°). Таким образом, дробные производные Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f$, допуская бóльшую свободу для $f(x)$ на бесконечности, являются в этом отношении более естественными на оси, чем производные Лиувилля $\mathscr{D}^{\alpha}_{\pm}f$.

Само собой разумеется,что обсуждаемые различия между $\mathscr{D}^{\alpha}_{\pm}$ и $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}$, связанные с поведением на бесконечности, будут отсутствовать в случае конечного отрезка.

В дальнейшем на «не очень хороших» функциях $f(x)$ дробные производные Маршо будут пониматься как условно сходящиеся интегралы. Именно пусть

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(x \mp t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \tag{5.59}$$

Тогда по определению

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f, \tag{5.60}$$

где характер сходимости будет определяться рассматриваемыми задачами. Так, изучая в §6, п. 2° обращение $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi = \varphi$, $\varphi \in L_p$, будем понимать предельный переход (5.60) по норме пространства L_p.

Выражения (5.59) называются *усеченными дробными производными Маршо.*

Отметим свойства дробных производных Маршо, аналогичные (5.9), (5.12), (5.13):

$$Q\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}Qf, \quad \tau_h \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}\tau_h f, \tag{5.61}$$

$$\Pi_{\delta}\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \delta^{-\alpha}\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}\Pi_{\delta}f. \tag{5.62}$$

Замечание 5.3. Аналогично равенствам (5.56) — (5.58) получаем дробные производные Маршо на полуоси $(0, \infty)$. При этом $(\mathscr{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$ преобразуем точно так же к $(\mathbf{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$, $x>0$, а вместо $(\mathscr{D}^{\alpha}_{0+}f)(x)$, $x>0$, следуя (5.56), получим

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x f'(x-t) \left(\alpha \int_t^x \xi^{-1-\alpha} d\xi + \frac{1}{x^{\alpha}} \right) dt =$$

$$= \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\, x^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt,$$

так что

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0+}f \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\,x^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \quad x>0, \quad 0<\alpha<1, \tag{5.63}$$

играет роль «левосторонней» производной Маршо на полуоси $(0, \infty)$.

Конструкции типа (5.63) будут использоваться и на отрезке (см. § 13, п. 1°). В п. 6° мы остановимся на дробных производных Маршо при $\alpha>1$.

5°. **Интегралы в смысле конечной части по Адамару.** Сравнивая дробные производные Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \dfrac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(x\mp t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt$ с дробными интегралами $I^{\alpha}_{\pm}f$, видим, что формально $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f$ получаются из $I^{\alpha}_{\pm}f$ заменой α на $-\alpha$ (при этом вычитание $f(x)$ обеспечивает сходимость интеграла). Таким образом, $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f$ тесно связаны с понятиями, относящимися к расходящимся интегралам. Остановимся на некоторых из этих понятий.

Определение 5.2. *Пусть функция $\Phi(t)$ интегрируема на отрезке $\varepsilon<t<A$ при любом $A>0$ и $0<\varepsilon<A$. Будем говорить, что $\Phi(t)$ обладает в точке $t=0$ свойством Адамара, если существуют постоянные a_k, b и $\lambda_k>0$ такие, что*

$$\int_{\varepsilon}^{A} \Phi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{N} a_k \varepsilon^{-\lambda_k} + b\ln\frac{1}{\varepsilon} + J_0(\varepsilon), \tag{5.64}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_0(\varepsilon)$ существует и конечен. По определению

$$\text{p.f.}\int_0^{A} \Phi(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} J_0(\varepsilon). \tag{5.65}$$

Предел (5.65) называется конечной частью (в смысле Адамара) расходящегося интеграла $\displaystyle\int_0^{A}\Phi(t)\,dt$ или просто интегралом в смысле Адамара. Явное построение функции $J_0(\varepsilon)$ называется иногда регуляризацией интеграла $\displaystyle\int_0^{A}\Phi(t)\,dt$.

Легко видеть, что постоянные a_k, b, λ_k в (5.64) не зависят от A.

Если $\Phi(t)$ интегрируема в окрестности бесконечности, то полагаем по определению

$$\text{p.f.}\int_0^{\infty}\Phi(t)\,dt = \text{p.f.}\int_0^{A}\Phi(t)\,dt + \int_A^{\infty}\Phi(t)\,dt. \tag{5.66}$$

Нетрудно видеть, что это определение не зависит от выбора A.

Возвращаясь к $\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f$, рассматриваем расходящийся интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x-t)\,dt}{t^{1+\alpha}}$.

Справедлива следующая

Лемма 5.2. *Пусть $0<\alpha<1$, а $f(x)$ локально гельдерова порядка $\lambda>\alpha$. Тогда функция $\Phi(t)=f(x-t)\,t^{-1-\alpha}$ обладает в точке $t=0$ свойством Адамара для каждого x и если $|f(t)|\leqslant c\,|t|^{\alpha-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, при $t\to-\infty$, то*

$$\text{p.f.}\int_0^{\infty}\frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt.$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой условия (5.64) и определений (5.65), (5.66).

Лемма 5.2 утверждает, что

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f = \text{p.f.}\, I_{\pm}^{-\alpha} f, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{5.67}$$

Можно говорить также о том, что $(\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f)(x)$ является при каждом x аналитическим продолжением функции $(I_{\pm}^{-\alpha} f)(x)$ из полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha < 0$. При этом для функций $f(x)$, указанных в лемме 5.2, продолжение осуществляется в полуплоскость $\operatorname{Re}\alpha < \lambda$. Это вытекает из аналитичности функций $\Phi_1(\alpha) = I_{\pm}^{\alpha} f$ и $\Phi_2(\alpha) = \mathcal{D}_{\pm}^{-\alpha} f$ в полуплоскостях $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\alpha < 0$ соответственно (на достаточно «хороших» функциях f) и из совпадения их предельных значений: $\lim\limits_{\operatorname{Re}\alpha \to 0+} \Phi_1(\alpha) = \lim\limits_{\operatorname{Re}\alpha \to 0-} \Phi_2(\alpha) = I_{\pm}^{i \operatorname{Im}\alpha} f$.

Аналогичное (5.67) заключение: $\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f = \text{p.f.}\, I_{0+}^{-\alpha} f$, $0 < \alpha < 1$, справедливо и для производной Маршо (5.63).

Трактовка (5.67) дробных производных Маршо указывает путь, как придать им смысл при $\alpha \geqslant 1$. Для этого дадим в следующей лемме регуляризацию расходящегося интеграла $I_{+}^{-\alpha} f$, $\alpha > 0$.

Лемма 5.3. *Пусть локально* $f(x) \in C^m$ *и* $f^{(m)}(x)$ *локально удовлетворяет условию Гельдера порядка* λ, $0 \leqslant \lambda < 1$. *Тогда функция* $\Phi(t) = f(x-t)\, t^{-1-\alpha}$ *обладает при* $\operatorname{Re}\alpha < m + \lambda$ *в точке* $t = 0$ *свойством Адамара для каждого* x *и если* $|f(t)| \leqslant c\,|t|^{\alpha - \varepsilon}$ *при* $t \to -\infty$, *то*

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{1} \frac{f(x-t) - \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \dfrac{t^k}{k!} f^{(k)}(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_1^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{f^{(k)}(x)}{\Gamma(-\alpha)(k-\alpha)}, \tag{5.68}$$

где $\operatorname{Re}\alpha < m + \lambda$, $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой.

Заметим, что при выборе $m = [\alpha]$ равенство (5.68) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t) - \sum\limits_{k=0}^{[\alpha]} \dfrac{(-t)^k}{k!} f^{(k)}(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \tag{5.68'}$$

$$\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots,$$

где интеграл справа сходится абсолютно для функций, указанных в лемме 5.3. Форма (5.68′) имеет преимущество перед (5.68) своей компактностью.

В силу (5.67) и аналитичности по α правой части в (5.68) равенство (5.68) естественно использовать для определения дробной производной порядка α, $\operatorname{Re}\alpha>0$. Покажем, что такое определение согласуется (на достаточно «хороших» функциях f) с определением (5.7). Именно справедлива

Теорема 5.8. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5.3 при $m\geqslant[\alpha]+1$. Тогда лиувиллевская дробная производная $\mathcal{D}_+^\alpha f$ совпадает при любых α таких, что $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\alpha\neq 1, 2, \ldots$, с конструкцией (5.68).*

Доказательство. Пусть в соответствии с (5.7) $\beta=\alpha-n+1$, $n=[\alpha]+1$ $(0<\beta<1)$. Для «усеченной» лиувиллевской производной справедлива следующая формула:

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\beta}=(-1)^n(\beta)_n\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x-t)\,dt}{t^{n+\beta}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(\beta)_k}{\varepsilon^{k+\beta}}f^{(n-1-k)}(x-\varepsilon). \tag{5.69}$$

Она доказывается непосредственным дифференцированием интеграла в левой части. Регуляризируя интеграл в правой части в духе (5.68), получаем

$$\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x-t)\,dt}{t^{n+\beta}}=\int_\varepsilon^1\left[f(x-t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(t-\varepsilon)^k f^{(k)}(x-\varepsilon)\right]\frac{dt}{t^{n+\beta}}+$$

$$+\int_1^\infty\frac{f(x-t)}{t^{n+\beta}}dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{k+\beta}}f^{(n-k-1)}(x-\varepsilon), \tag{5.70}$$

где обозначено

$$a_k(\varepsilon)=\varepsilon^{\beta+k}\int_\varepsilon^1(t-\varepsilon)^{n-1-k}t^{-n-\beta}\,dt=\int_0^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\xi^{n-1-k}(\xi+1)^{-n-\beta}d\xi.$$

Подставляя (5.70) в (5.69), находим, что

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x-t)}{t^\beta}\,dt=(-1)^n(\beta)_n\left\{\int_\varepsilon^1\left[f(x-t)-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(t-\varepsilon)^k f^{(k)}(x-\varepsilon)\right]\frac{dt}{t^{n+\beta}}+\int_1^\infty\frac{f(x-t)}{t^{n+\beta}}dt+$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon^{k+\beta}}f^{(n-k-1)}(x-\varepsilon)\left[(\beta)_k-\frac{(\beta)_n}{(n-k-1)!}a_k(\varepsilon)\right]\right\}. \tag{5.71}$$

Имеем $a_k(\varepsilon)=\int_0^\infty\xi^{n-1-k}(1+\xi)^{-n-\beta}\,d\xi-\int_{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}^\infty\xi^{n-k-1}(1+\xi)^{-n-\beta}\,d\xi$. Здесь

первый интеграл легко сводится к бета-функции, а во втором сделаем замену $\xi+1=(\varepsilon t)^{-1}$

$$a_k(\varepsilon)=\frac{\Gamma(n-k)\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(n+\beta)}-\varepsilon^{k+\beta}\int_0^1(1-\varepsilon t)^{n-1-k}t^{\beta+k-1}dt.$$

Поэтому квадратная скобка в (5.71) равна $\frac{(\beta)_n}{(n-k-1)!}\varepsilon^{k+\beta}\int_0^1(1-\varepsilon t)^{n-1-k}\times$ $\times t^{\beta+k-1}dt\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}\frac{(\beta)_k}{(k+\beta)(n-k-1)!}\varepsilon^{k+\beta}$. Тогда в (5.71) легко осуществляется предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и получаем, что лиувиллевская производная $\mathcal{D}_+^\alpha f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^\infty f(x-t)t^{-\beta}dt$ действительно совпадает с правой частью в (5.68) (с учетом того, что $(-1)^n(\beta)_n=\Gamma(n-\alpha)/\Gamma(-\alpha)$ согласно (1.46), (1.47)). Теорема доказана.

6°. Свойства конечных разностей и производные Маршо порядка $\alpha>1$. Конструкции (5.57), (5.58), определяющие дробные производные Маршо, можно распространить на случай $\alpha>1$. Один из напрашивающихся способов этого состоит в том, чтобы поступить аналогично (5.7), положив $\alpha=n+\{\alpha\}$, $n=[\alpha]$, и введя

$$\mathbf{D}_+^\alpha f=\frac{d^n}{dx^n}\mathbf{D}_+^{\{\alpha\}}f=\frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_0^\infty\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x-t)}{t^{1+\{\alpha\}}}dt.$$

Можно поступить и по-другому, перейдя в числителе в (5.57), (5.58) от разности первого порядка к разности порядка $l>1$. Мы остановимся на последнем пути. Он будет в некоторых вопросах предпочтительнее, выявляя, в частности, в явном виде аналитическую зависимость $\mathbf{D}_+^\alpha f$ от параметра α. Предварительно рассмотрим некоторые простые свойства конечных разностей.

В терминах сдвига τ_h вводим величину

$$(\Delta_h^l f)(x)=(E-\tau_h)^l f=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}f(x-kh). \tag{5.72}$$

Она называется *конечной разностью порядка l функции $f(x)$ с шагом h и с центром в точке x.*

Нам понадобится следующая функция параметра α:

$$A_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}k^\alpha,\quad \alpha>0. \tag{5.73}$$

Она возникает при рассмотрении конечной разности от степенной функции $(\Delta_1^l f)(0)=-A_l(\alpha)$ для $f(x)=|x|^\alpha$. Отметим важное для нас свойство этой функции:

$$A_l(\alpha)=0 \text{ при } \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1, \tag{5.74}$$

вытекающее из очевидного равенства

$$A_l(m)=-\left(x\frac{d}{dx}\right)^m(1-x)^l\Big|_{x=1} \tag{5.74'}$$

(можно показать, что $A_l(\alpha)\neq 0$ при $\alpha\in R^1$, $\alpha\neq 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1$; см. далее формулу (5.81) и лемму 26.1).

Лемма 5.4. *Для* $f(x)\in C^m(R^1)$ *справедлива при* $l\geqslant m$ *формула*

$$(\Delta_h^l f)(x)=\frac{h^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-u)^{m-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{m-k}k^m\binom{l}{k}f^{(m)}(x-khu)\,du. \quad (5.75)$$

Доказательство. В силу формулы Тейлора (с остаточным членом в интегральной форме) имеем $f(x-kh)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-kh)^i}{i!}f^{(i)}(x)+$

$+\frac{(-kh)^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-u)^{m-1}f^{(m)}(x-khu)\,du$. Поэтому для разности (5.72) имеем

$$(\Delta_h^l f)(x)=-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-h)^i}{i!}f^{(i)}(x)A_l(i)+\frac{h^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-u)^{m-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{m-k}k^m\times$$

$$\times\binom{l}{k}f^{(m)}(x-khu)\,du,$$ что совпадает с (5.75) ввиду (5.74).

Следствие 1. *Если* $f(x)\in C^m(R^1)$ *и* $f^{(m)}(x)$ *ограничена, то*

$$|(\Delta_h^l f)(x)|\leqslant c\,|h|^m\sup_x|f^{(m)}(x)|,\quad l\geqslant m, \quad (5.76)$$

где $c=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{l}k^m\binom{l}{k}\leqslant\frac{l^m2^l}{m!}$.

Следствие 2. *Если* $f(x)\in C^m(R^1)$ *и* $|f^{(m)}(x+h)-f^{(m)}(x)|\leqslant A|h|^\lambda$, *где* $A=A(x)$ *не зависит от* h, *то*

$$|(\Delta_h^l f)(x)|\leqslant Ac\,|h|^{m+\lambda},\quad l>m, \quad (5.77)$$

где c *— то же, что в (5.76).*

Действительно, при $l>m$ можно заменить в (5.75) $f^{(m)}(x-khu)$ на $f^{(m)}(x-khu)-f^{(m)}(x)$ благодаря свойству (5.74). После этого получение оценки (5.77) становится очевидным.

Возвращаясь к дробным производным, введем при произвольном $\alpha>0$, обобщая (5.57), (5.58), конструкции

$$\int_0^\infty\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt,\quad \alpha>0. \quad (5.78)$$

Здесь интеграл сходится при $l>\alpha$ на достаточно «хороших» функциях $f(x)$ в силу (5.76), (5.77).

Справедлива (при $0<\alpha<1$) формула

$$\int_0^\infty\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt=A_l(\alpha)\int_0^\infty\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}dt. \quad (5.79)$$

Действительно, $\int_\varepsilon^\infty\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt=\frac{f(x)}{\alpha\varepsilon^\alpha}+\sum_{k=1}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}k^\alpha\int_{k\varepsilon}^\infty\frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}dt=$

$=\sum_{k=1}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}k^\alpha\int_{k\varepsilon}^\infty\frac{f(x-t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}dt$, откуда при $\varepsilon\to0$ получается (5.79). Формула (5.79) подсказывает нормировку для конструкции (5.78) и мы, согласуясь с (5.57), (5.58), положим

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{(\Delta_{\pm t}^{l} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad l > \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{5.80}$$

Будем называть (5.80) *дробными производными Маршо*. Заметим, что произведению $\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)$ нетрудно придать смысл при $\alpha = 1, 2, \ldots, l-1$ за счет свойства (5.74). Более того, $\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)$ можно записать в виде

$$-\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^l}{t^{1+\alpha}}\, dt = \frac{l}{\alpha} \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{l-1}}{\left(\ln \frac{1}{\xi}\right)^{\alpha}}\, d\xi \overset{\text{def}}{=} \varkappa(\alpha, l). \tag{5.81}$$

Действительно, в силу (5.19) имеем $\mathscr{D}_{+}^{\alpha}(e^x) = e^x$ при любом α. Поэтому $e^x = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{x-kt}}{t^{1+\alpha}}\, dt$, откуда следует первое из равенств (5.81). Второе получается заменой $\xi = e^{-t}$ и интегрированием по частям. В дальнейшем $\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)$ понимается в смысле (5.81) при $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ Можно показать, что правая часть в (5.80) не зависит от выбора l, $l > \operatorname{Re}\alpha$.

Подобно (5.59), можно ввести «усеченную» дробную производную Маршо:

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad l > \alpha. \tag{5.80'}$$

Производные (5.80) совпадают при всех $\alpha > 0$ с лиувиллевскими производными $\mathscr{D}_{\pm}^{\alpha} f$ на достаточно хороших функциях $f(x)$. В этом можно убедиться из соображений аналитичности по α: аналитичность $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f$ вытекает непосредственно из (5.80), а $\mathscr{D}_{\pm}^{\alpha} f$ — из теоремы 5.8.

Завершим этот пункт следующей теоремой:

Теорема 5.9. *Пусть $\alpha > 0$. Дробные производные Маршо (5.80) определены на функциях $f(x) \in C^{[\alpha]}(R^1)$ таких, что*

$$\sup_{x \in R^1} |f(x)| < \infty \quad \text{и} \quad |f^{([\alpha])}(x+h) - f^{([\alpha])}(x)| \leqslant A(x) h^{\lambda},$$

где $\lambda > \alpha - [\alpha]$.

Доказательство теоремы легко получается с помощью (5.77).

7°. Связь с дробными степенями операторов. Оператор $\mathscr{D}_{+}^{\alpha}$ дробного дифференцирования можно рассматривать как дробную степень оператора дифференцирования:

$$\mathscr{D}_{+}^{\alpha} = (d/dx)^{\alpha}, \quad I_{+}^{\alpha} = (d/dx)^{-\alpha} \tag{5.82}$$

при надлежащем толковании понятия дробной степени оператора. Фактически эта мысль служила основной моделью при развитии абстрактной теории дробных степеней операторов в банаховом пространстве. Читателя, желающего более подробно ознакомиться с этой теорией, можно направить к книгам М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника, П. Е. Соболевского [1] и К. Иосида [1]. Мы ограничимся здесь самыми краткими указаниями на основные определения теории дробных степеней операторов и покажем, что они охватывают случай дробного интегродифференцирования (в надлежащей постановке).

Пусть X — банахово пространство и $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$,— сильно непрерывная полугруппа в X (см. определение 2.5). Оператор

$$A\varphi = \lim_{\substack{t \to 0+ \\ (X)}} \frac{1}{t} (T_t - E) \tag{5.83}$$

называется *инфинитезимальным (или производящим) оператором полугруппы* T_t. Известно (см., например, книгу Н. Данфорда, Дж. Т. Шварца [1, с. 660]), что область определения $D(A)$ оператора A плотна в X и A — замкнутый оператор. Справедливо равенство $T_t = e^{tA}$ (по крайней мере формально; ему можно придать точный смысл: $T_t = \lim\limits_{h \to 0} e^{tA_h}$, $A_h = \frac{1}{h}(T_h - E)$).

Будем рассматривать дробные степени $(-A)^\alpha$ для операторов A, являющихся порождающими операторами сильно непрерывных полугрупп. Положительная степень оператора $-A$ определяется формулой

$$(-A)^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (T_t \varphi - \varphi)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5.84}$$

$$\varphi \in D(A),$$

ср. с формулой Маршо (5.57). Здесь интеграл от функции скалярного аргумента t со значениями в банаховом пространстве понимается, как это принято в функциональном анализе, в смысле Бохнера, см. об этом, например, в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, гл. III, § 1]. Формулу (5.84) называют обычно *формулой Балакришнана.*

При $\alpha \geqslant 1$ дробную степень $(-A)^\alpha$ можно определить, следуя (5.80), равенством

$$(-A)^\alpha \varphi = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} (E - T_t)^l \varphi dt, \tag{5.85}$$

где E — тождественный оператор, $l > \alpha$, $\varkappa(\alpha, l)$ — постоянная (5.81).

Отрицательную степень оператора $-A$ можно определить при $0 < \alpha < 1$ равенством

$$(-A)^{-\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t \varphi dt, \quad \varphi \in X, \tag{5.86}$$

однако здесь в отличие от (5.84) интеграл (5.86) может оказаться расходящимся на бесконечности без дополнительных предположений на полугруппу T_t. Простое условие, обеспечивающее его сходимость при всех $\alpha > 0$, состоит в том, чтобы

$$\|T_t\|_X \leqslant Me^{-\varepsilon t}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.87}$$

Формально ясно, что для реализации равенства (5.82) оператор $A = -d/dx$ нужно представить как производящий оператор полугруппы T_t, которая ввиду (5.83) должна быть полугруппой операторов сдвига:

$$(T_t f)(x) = f(x - t). \tag{5.88}$$

Вопрос, однако, состоит в том, чтобы выбрать пространство X так, чтобы в нем полугруппа T_t была сильно непрерывной и выполнялось условие (5.87). Пространства $L_p(R^1)$, $C(R^1)$ для этого не подходят, так как для них $\|T_t\| = 1$. Воспользуемся для этой цели пространствами $L_{p,\omega}$, C_ω (см. п. 3° этого параграфа и теорему 5.7).

Лемма 5.5. *Полугруппа (5.88) является сильно непрерывной в пространстве* $L_{p,\omega}(R^1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, *при этом*

$$\|T_t\|_{L_{p,\omega}}=e^{-\frac{\omega}{p}t},\quad 1\leqslant p<\infty;\quad \|T_t\|_{C_\omega}=e^{-\omega t}.$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой.

Лемма 5.5 позволяет утверждать, что интеграл (5.86) сходится по норме пространства $L_{p,\omega}$ при $\omega>0$ и из (5.86) имеем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt=I_+^\alpha\varphi,$$

где $\varphi\in L_{p,\omega}$ и интеграл справа понимается сходящимся (на бесконечности) по норме пространства $L_{p,\omega}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\omega>0$. Из равенства же (5.84) получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt=\mathbf{D}_+^\alpha\varphi,$$

где $\varphi\in D(A)=\{\varphi(t):\varphi'(t)\in L_{p,\omega}\}$, $\omega>0$, при $0<\alpha<1$. Аналогично на основании равенства (5.85) рассматривается случай $\alpha\geqslant 1$.

§ 6. ПРЕДСТАВИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ОТ ФУНКЦИЙ ИЗ L_p

В § 5, п. 3° были рассмотрены дробные интегралы $I_\pm^\alpha\varphi$ функций $\varphi\in L_p$. Изучим теперь такие дробные интегралы более подробно и дадим их описание.

1°. Пространство $I^\alpha(L_p)$. Обозначим через $I_\pm^\alpha(L_p)$ образы операторов дробного интегрирования:

$$I_\pm^\alpha(L_p)=\{f:f(x)=I_\pm^\alpha\varphi,\quad \varphi\in L_p(R^1)\},$$
$$0<\alpha<1,\quad 1\leqslant p<1/\alpha.$$

В действительности они совпадают при $1<p<1/\alpha$, и мы будем обозначать

$$I^\alpha(L_p)\overset{\text{def}}{=}I_+^\alpha(L_p)=I_-^\alpha(L_p),\quad 1<p<1/\alpha,\tag{6.1}$$

однако доказательство этого совпадения нам удобнее отложить до § 11, п. 2°.

По теореме 5.3

$$I^\alpha(L_p)\subset L_q(R^1),\quad q=p/(1-\alpha p),\tag{6.2}$$

а в силу неравенства Харди (5.45)

$$I^\alpha(L_p)\subset L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}).\tag{6.3}$$

Заметим, что

$$L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p})\not\subset L_q(R^1),\quad L_q(R^1)\not\subset L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}).\tag{6.4}$$

Первое очевидно, второе иллюстрируется примером функции $f(x)=|x|^{-1/q}\ln^{-1/p}|x|$ при $|x|>2$ и $f(x)=0$ при $|x|<2$. Вложения (6.2), (6.3) наряду с (6.4) означают, что

$$I^\alpha(L_p)\neq L_q(R^1),\quad I^\alpha(L_p)\neq L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}).\tag{6.5}$$

Следовательно, с учетом теоремы 5.3 пространство $I^\alpha(L_p)$ не совпадает ни с каким пространством $L_r(R^1)$, $1\leqslant r\leqslant\infty$. Оно не совпадает также ни с каким пространством $L_r(R^1;\rho)$. Поэтому пространство $I^\alpha(L_p)$ нуждается в описании. Этому посвящен п. 3°. Предварительно в п. 2° рассматривается обращение дробных интегралов $I^\alpha_+\varphi$, $\varphi\in L_p$, с помощью производных Маршо, что дает необходимую часть описания пространства $I^\alpha(L_p)$.

Позже, в § 18, п. 4° мы рассмотрим модификацию дробного интегрирования $I^\alpha_\pm$: так называемое *бесселево дробное интегрирование*, отличающееся от $I^\alpha_\pm$ экспоненциально убывающим множителем $G^\alpha_\pm\varphi=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\varphi(x\mp\mp t)\,dt$. В отличие от $I^\alpha_\pm$ этот интеграл определен на функциях $\varphi(t)\in L_p(R^1)$ при всех $1<p<\infty$. Кроме того, $G^\alpha_\pm(L_p)\subset L_p$ согласно теореме Юнга 1.4, в то время как $I^\alpha_\pm(L_p)\not\subseteq L_p$. Важно отметить, что

$$L_p\cap I^\alpha(L_p)=G^\alpha_+(L_p)=G^\alpha_-(L_p),\quad 1<p<1/\alpha.$$

Доказательство этого нам удобно провести позже в § 18, п. 4°.

2°. Обращение дробных интегралов от функций из L_p. Лиувиллевское дифференцирование $\mathscr{D}^\alpha_\pm$ обращает дробные интегралы $I^\alpha_\pm\varphi$ в рамках пространств L_p: $\mathscr{D}^\alpha_\pm I^\alpha_\pm\varphi\equiv\varphi$, $\varphi\in L_p(R^1)$, только при $p=1$, поскольку $\mathscr{D}^\alpha_+ I^\alpha_+\varphi\equiv\dfrac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^x\varphi(t)\,dt$, что предполагает суммируемость $\varphi(x)$ на всей оси. При $p>1$, как уже отмечалось в § 5, п. 4°, будем использовать вместо $\mathscr{D}^\alpha_\pm f$ производные Маршо, понимаемые, согласно (5.60), в смысле сходимости по норме $L_p(R^1)$.

Докажем предварительно следующую лемму, дающую полезное интегральное представление усеченных дробных производных Маршо (5.59).

Лемма 6.1. *На функциях $f(x)=I^\alpha_+\varphi$, представимых дробными интегралами с плотностью $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\alpha$, усеченная дробная производная $\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f$ имеет следующее представление:*

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)=\int\limits_0^\infty\mathscr{K}(t)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt, \tag{6.6}$$

где ядро

$$\mathscr{K}(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\frac{t_+^\alpha-(t-1)_+^\alpha}{t}\in L_1(R^1) \tag{6.7}$$

является усредняющим:

$$\int\limits_0^\infty\mathscr{K}(t)\,dt=1\ \text{и}\ \mathscr{K}(t)>0. \tag{6.8}$$

Доказательство. Имеем при $t>0$

$$f(x)-f(x-t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^\infty\varphi(x-t\xi)\,\xi^{\alpha-1}d\xi-\right.$$
$$\left.-\int\limits_1^\infty\varphi(x-t\xi)(\xi-1)^{\alpha-1}d\xi\right\}.$$

так что

$$f(x)-f(x-t)=t^\alpha\int\limits_0^\infty\mathrm{k}(\xi)\,\varphi(x-t\xi)\,d\xi, \tag{6.9}$$

где

$$k(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\xi^{\alpha-1}, & 0<\xi<1,\\ \xi^{\alpha-1}-(\xi-1)^{\alpha-1}, & \xi>1.\end{cases} \tag{6.10}$$

Заметим, что $k(\xi)\in L_1(R^1_+)$ и

$$\int_0^\infty k(\xi)\,d\xi=0. \tag{6.11}$$

Из (6.9) получаем

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\frac{dt}{t^2}\int_0^\infty k\left(\frac{\xi}{t}\right)\varphi(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{\varphi(x-\xi)}{\xi}\,d\xi\int_0^{\xi/\varepsilon}k(s)\,ds=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{\varphi(x-\varepsilon t)}{t}\,dt\int_0^t k(s)\,ds.$$

Непосредственной проверкой устанавливаем равенство

$$\int_0^t k(s)\,ds=\alpha^{-1}t\Gamma(1-\alpha)\,\mathcal{K}(t) \tag{6.12}$$

и равенство (6.8). Лемма 6.1 доказана.

Заметим, что аналогично (6.6) получаем представление

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)=\int_0^\infty\mathcal{K}_{l,\alpha}(t)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt \tag{6.6'}$$

в случае произвольного $\alpha>0$, где слева использована усеченная дробная производная Маршо (5.80′), а

$$\mathcal{K}_{l,\alpha}(t)=\frac{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}(t-k)_+^\alpha}{\varkappa(\alpha,l)\,\Gamma(1+\alpha)\,t}. \tag{6.7'}$$

Нетрудно показать, что

$$\mathcal{K}_{l,\alpha}(t)\in L_1(R^1)\ \text{и}\ \int_0^\infty\mathcal{K}_{l,\alpha}(t)\,dt=1. \tag{6.8'}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $f(x)=I^\alpha_\pm\varphi$, $\varphi\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\alpha$. *Тогда*

$$\varphi(x)=(\mathbf{D}^\alpha_\pm f)(x), \tag{6.13}$$

где $\mathbf{D}^\alpha_\pm f$ *понимается как*

$$(\mathbf{D}^\alpha_\pm f)(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\(L_p)}}(\mathbf{D}^\alpha_{\pm,\varepsilon}f)(x). \tag{6.14}$$

Предел в (6.14) существует также почти всюду.

Доказательство этой теоремы подготовлено леммой 6.1. Действительно, в силу (6.6) и (6.8) имеем

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)-\varphi(x)=\int_0^\infty\mathcal{K}(t)[\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)]\,dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), получаем

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f-\varphi\|_p\leqslant\int\limits_0^{\infty}\mathscr{K}(t)\,\|\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)\|_p dt\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$$

на основании мажорантной теоремы Лебега 1.2 и свойства (1.34). В соответствии с определением (6.14) равенство (6.13) доказано. Существование предела $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f$, $f\in I^{\alpha}(L_p)$, почти всюду вытекает из теоремы 1.3.

Отметим, что из леммы 6.1 и теоремы 6.1 вытекает неравенство

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f\|_p,\quad f\in I^{\alpha}_{+}(L_p),\quad 1\leqslant p<1/\alpha. \tag{6.15}$$

Действительно, из (6.6) с учетом (6.8) и (6.13) имеем

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\|\mathscr{K}\|_1\|\varphi\|_p=\|\varphi\|_p=\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f\|_p.$$

Неравенство (6.15) означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p=\sup_{\varepsilon>0}\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p \tag{6.16}$$

для $f\in I^{\alpha}_{+}(L_p)$. В самом деле, неравенство, получающееся из (6.16) заменой $=$ на $\leqslant$, очевидно. Обратное неравенство вытекает из (6.15) в соответствии с (6.14).

Из теоремы 6.1 следует, что $I^{\alpha}_{\pm}\varphi\equiv 0$, $\varphi\in L_p$, только в случае $\varphi(t)\equiv 0$. Поэтому в $I^{\alpha}(L_p)$ можно ввести норму равенством

$$\|f\|_{I^{\alpha}(L_p)}=\|\varphi\|_{L_p},\quad f=I^{\alpha}_{+}\varphi. \tag{6.17}$$

Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ с нормой (6.17) банахово как изометричное L_p.

3°. **Описание класса $I^{\alpha}(L_p)$. Достаточные признаки.** Следующая теорема дает описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$ в терминах усеченных дробных производных Маршо (ср. с описанием этого пространства в теоремах 20.5 и 20.4 на основе L_p-поведения конечных разностей дробного порядка).

Теорема 6.2. *Для того чтобы $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<1/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) выполнялось одно из двух условий:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\in L_p, \tag{6.18}$$

$$\sup_{\varepsilon>0}\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p<\infty, \tag{6.19}$$

2) $f(x)\in L_r(R^1)$, где $r=q=p/(1-\alpha p)$ в необходимой части и r—любое, $1\leqslant r<\infty$, в достаточной части.

Доказательство. Необходимость в этой теореме является простым фактом, вытекая из теоремы Харди — Литтлвуда 5.3, теоремы 6.1 и равенства (6.16). Сложнее обстоит дело с достаточностью.

Пусть $f\in L_r$ и выполнено одно из условий (6.18), (6.19). Покажем, что тогда существует функция $\varphi\in L_p$ такая, что

$$f=I^{\alpha}_{+}\varphi \tag{6.20}$$

(тогда $f\in I^{\alpha}(L_p)$). Вместо (6.20) докажем вначале при любом $h>0$ равенство

$$f(x)-f(x-h)=(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)-(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x-h). \tag{6.21}$$

Обозначим

$$(A_h\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad a_h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,[t_+^{\alpha-1} - (t-h)_+^{\alpha-1}], \quad (6.22)$$

так что требуемое равенство (6.21) есть $f(x) - f(x-h) = (A_h\varphi)(x)$. Заметим, что A_h — свертка с суммируемым ядром $a_h(t) \in L_1(R^1)$ и потому композиция $A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}$ является (при фиксированном $\varepsilon > 0$) ограниченным оператором в $L_r(R^1)$ при всех $r \geqslant 1$. Для достаточно хороших функций $f(x)$, например из C_0^{∞}, имеем

$$A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f = \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} A_h f = (\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} I_+^{\alpha} f)(x) - (\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} I_+^{\alpha} f)(x-h).$$

Отсюда в силу представления (6.6)

$$A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f = \int_0^{\infty} \mathcal{K}(t)\,[f(x-\varepsilon t) - f(x-h-\varepsilon t)]\,dt. \quad (6.23)$$

Так как C_0^{∞} плотно в L_r, то тождество (6.23) выполняется для всех $f \in L_r$ ввиду ограниченности операторов в левой и правой частях.

Требуемое равенство (6.21) получится из (6.23) при $\varepsilon \to 0$.

В силу (6.8) правая часть в (6.23) сходится по норме пространства L_r к $f(x) - f(x-h)$. Следовательно, существует и предел левой части, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f = f(x) - f(x-h). \quad (6.24)$$

Пусть выполнено (6.18). Так как оператор A_h ограничен в L_p, то существует и предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f = A_h\left(\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f\right) = A_h\varphi,$$

где $\varphi = \mathbf{D}_+^{\alpha} f \in L_p$. Так как $A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ сходится и по норме L_r и по норме L_p, то предельные функции обязаны совпадать почти всюду; тогда из (6.24) получаем $A_h\varphi = f(x) - f(x-h)$, что совпадает с (6.21).

Если же выполнено (6.19), то можно выбрать последовательность $\varepsilon_k \to 0$ такую, что $\mathbf{D}_{+,\varepsilon_k}^{\alpha} f$ слабо сходится по норме L_p (ограниченное множество в L_p, $p > 1$, слабо компактно, см., например, Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1, с. 314]). Пусть $\varphi \in L_p$ — слабый предел последовательности $\mathbf{D}_{+,\varepsilon_k}^{\alpha} f$. Так как всякий ограниченный оператор не только сильно, но и слабо непрерывен, то из (6.24) аналогичным рассуждением снова получаем (6.21).

Равенство (6.21) доказано. Остается заметить, что функции, имеющие тождественно совпадающие разности, могут различаться лишь на постоянную. Поэтому из (6.21) следует (6.20) с учетом того, что f, $I_+^{\alpha}\varphi$ из L_r, L_q соответственно. Теорема 6.2 доказана.

Следствие 1. *Норма (6.17) в $I^{\alpha}(L_p)$ эквивалентна нормам*

$$\|f\|_q + \Big\|\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f\Big\|_p, \quad (6.25)$$

$$\|f\|_q + \sup_{\varepsilon \to 0} \|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f\|_p, \quad q = p/(1-\alpha p). \quad (6.26)$$

Следствие 2. *Формула дробного интегрирования по частям*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\mathbf{D}_+^{\alpha} g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,(\mathbf{D}_-^{\alpha} f)(x)\,dx \quad (6.27)$$

(с дробными производными Маршо; ср. с (5.17)) справедлива в предположениях: $\mathbf{D}_-^\alpha f \in L_p$, $\mathbf{D}_+^\alpha g \in L_r$, $f \in L_s$, $g \in L_t$, *где* $p>1$, $r>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1+\alpha$ *и* $\frac{1}{s}=\frac{1}{p}-\alpha$, $\frac{1}{t}=\frac{1}{r}-\alpha$.

Действительно, при указанных условиях $f \in I^\alpha(L_p)$, $g \in I^\alpha(L_r)$ и тогда (6.27) вытекает из (5.16).

Чтобы сформулировать еще одно следствие из теоремы 6.2, введем пространство функций из $L_r(R^1)$, имеющих дробную производную (Маршо) в $L_p(R^1)$:

$$L_{p,r}^\alpha(R^1)=\{f(x): f\in L_r,\ \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f \in L_p\}. \tag{6.28}$$

Следствие 3. *Пусть* $0<\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$, $1\leqslant r<\infty$. *Тогда*

$$L_{p,r}^\alpha(R^1)=L_r\cap I^\alpha(L_p). \tag{6.29}$$

Замечание 6.1. Справедлив также с учетом (5.49) весовой вариант теоремы 6.2: для того чтобы $f(x)$ была представима дробным интегралом $I_+^\alpha\varphi$, где $\varphi\in L_p(R^1;\ |x|^\mu)$, $\alpha p-1<\mu<p-1$, $p>1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x)\in L_r(R^1;\ |x|^\nu),\ \frac{1}{p}-\alpha\leqslant\frac{1}{r}\leqslant\frac{1}{p},\ \frac{1+\nu}{r}=\frac{1+\mu}{p}-\alpha$$

и $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f\|_{L_p(R^1;\ |x|^\mu)}<\infty$.

Добавим к характеризации пространства $I^\alpha(L_p)$ еще одно соображение, относящееся к поведению функций $f(x)\in I^\alpha(L_p)$ на бесконечности: дробные интегралы $f(x)=(I_\pm^\alpha\varphi)(x)$ от сохраняющих знак функций $\varphi(x)$ «плохо» ведут себя при $x\to\pm\infty$ соответственно: они убывают лишь как $c|x|^{\alpha-1}$ при любой скорости убывания функции $\varphi(x)$, см. далее оценку (7.8). Поэтому если $f(x)$ вещественна и $f(x)\in L_r\cap I^\alpha(L_p)$, $1\leqslant r\leqslant 1/(1-\alpha)$, то $(\mathbf{D}_\pm^\alpha f)(x)$ меняет знак на оси. Для случая $r=1$ более точную информацию дает следующее утверждение:

если $f(x)\in L_1\cap I^\alpha(L_p)$, $1\leqslant p<1/\alpha$, *то* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^\alpha f)(x)\,dx=0$ *при любом* $\varepsilon>0$. *Если* $p=1$, *то и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{D}_\pm^\alpha f)(x)\,dx=0$.

Действительно, для $\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^\alpha f$ требуемое равенство получается непосредственным интегрированием равенства (5.59), а для $\mathbf{D}_\pm^\alpha f$ при $p=1$—интегрированием равенства (6.6). ▮

Рассмотрим теперь вопрос об описании классов $I_\pm^\alpha(L_1)$, $0<\alpha<1$. Их можно описать подобно случаю конечного интервала (см. теорему 2.1) в терминах абсолютной непрерывности функций

$$f_{1-\alpha}^{\pm}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty f(x\mp t)\,t^{-\alpha}dt.$$

Определение 6.1. *Будем говорить, что* $f(x)\in AC(R^1)$, *если* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на любом конечном интервале и имеет ограниченную вариацию на замкнутой прямой* R *(пополненной двумя бесконечно удаленными точками).*

Принадлежность функции $f(x)$ классу $AC(R^1)$ равносильна представимости ее в виде $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt+c$, где $\varphi(t)\in L_1(R^1)$.

Можно было бы определить класс $AC(R^1)$ с помощью отображения на конечный отрезок. Именно пусть $x=x(y)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на ось $[-\infty, \infty]$ и пусть $\tilde{f}(y)=f[x(y)]$. Можно показать, что определение класса $AC(R^1)$ равенством $AC(R^1)=\{f(x):\tilde{f}(y)\in AC[0, 1]\}$ равносильно предыдущему определению.

Теорема 6.3. *Для того чтобы* $f(x)\in I^{\alpha}_{\pm}(L_1)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f^{\pm}_{1-\alpha}(x)\in AC(R^1)$ *и* $f^{\pm}_{1-\alpha}(\mp\infty)=0$ *при соответственном выборе знаков.*

Доказательство теоремы аналогично случаю конечного интервала (см. теорему 2.1).

4°. Достаточные признаки представимости функций дробным интегралом. Замечая, что

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\omega_p(f,\,t)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{6.30}$$

где $\omega_p(f,\,t)$ — интегральный модуль непрерывности:

$$\omega_p(f,\,t)=\sup_{0<\tau<t}\|f(x+\tau)-f(x)\|_p, \tag{6.31}$$

непосредственно из теоремы 6.2 получаем следующую теорему.

Теорема 6.4. *Если* $f\in L_q(R^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$, *и* $\int\limits_0^{\infty}t^{-1-\alpha}\,\omega_p(f,t)\times$ $\times dt<\infty$, *то* $f\in I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<1/\alpha$.

Укажем простые достаточные условия для принадлежности функций $f(x)$ классу $I^{\alpha}(L_p)$ в терминах гельдеровости функции $f(x)$. Предварительно докажем следующую вспомогательную оценку, которой неоднократно воспользуемся.

Для интеграла

$$A_{a,b,c}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{|t|^{a}_{\pm}(1+|t|)^{b}(1+|x-t|)^{c}},$$

где $a<1$ и $a+b+c>1$, справедлива оценка

$$A_{a,b,c}(x)\leqslant\text{к}\begin{cases}(1+|x|)^{-\min(a+b,\,c,\,a+b+c-1)}, & \text{если } \max(c,\ a+b)\neq 1,\\ (1+|x|)^{1-a-b-c}\ln(2+|x|), & \text{если } \max(c,\ a+b)=1,\end{cases} \tag{6.32}$$

где к не зависит от x.

Доказательство. Так как функция $A_{a,b,c}(x)$ ограничена, ее достаточно оценить при $|x|\to\infty$. Представим ее в виде

$$A_{a,b,c}(x)=|x|^{1-a-b-c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{|\tau|^{a}\left(|\tau|+\dfrac{1}{|x|}\right)^{b}\left(|\tau-1|+\dfrac{1}{|x|}\right)^{c}}.$$

Отсюда при $|x|\to\infty$ имеем

$$A_{a,b,c}(x)\leqslant\text{к}\,|x|^{1-a-b-c}+|x|^{1-a-b-c}\left(\int\limits_{-1/2}^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{3/2}\right).$$

Очевидно, $J_1 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \leqslant \kappa \int\limits_{-1/2}^{1/2} |\tau|^{-a} (|\tau| + 1/|x|)^{-b} d\tau = 2\kappa |x|^{a+b-1} \int\limits_0^{|x|/2} \tau^{-a} (\tau + 1)^{-b} d\tau$. Поэтому при $|x| \to \infty$ имеем $J_1 \leqslant \kappa (|x|^{a+b-1} + 1)$, если $a + b \neq 1$, и $J_1 \leqslant \kappa \ln(2 + |x|)$, если $a + b = 1$. Аналогично

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} \leqslant \kappa \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(|\xi| + \frac{1}{|x|} \right)^{-c} d\xi \leqslant \kappa \begin{cases} |x|^{c-1} + 1, & c \neq 1 \\ \ln(2 + |x|), & c = 1. \end{cases}$$

Собирая оценки, получаем (6.32).

Теорема 6.5. *Если* $f(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1)$, $\lambda > \alpha$, *то*

$$|(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f)(x)| \leqslant c (1 + |x|)^{-\lambda - \alpha}, \quad \alpha < \lambda < 1, \tag{6.33}$$

$$|(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f)(x)| \leqslant c (1 + |x|)^{-1-\alpha} \ln(2 + |x|), \quad \lambda = 1, \tag{6.34}$$

где c *не зависит от* x *и* ε. *Если при этом* $\lambda > \max(\alpha, -\alpha + 1/p)$ *и* $f(\infty) = 0$, *то* $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$.

Доказательство. Пользуясь условием Гельдера (1.6) на $\dot{R}^1$, получаем

$$|(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f)(x)| \leqslant \frac{1}{(1 + |x|)^{\lambda}} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda} (1 + |x - t|)^{\lambda}}.$$

Привлекая здесь оценку (6.32), получаем (6.33) и (6.34). Если $f(\infty) = 0$ и $\lambda > -\alpha + 1/p$, то $f \in L_q$, $1/q = -\alpha + 1/p$, а из (6.33), (6.34) следует, что $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f\|_p < \infty$. Тогда $f \in I^{\alpha}(L_p)$ в силу теоремы 6.2.

Следующая теорема предоставляет достаточные условия в весовых терминах.

Теорема 6.6. *Если* $f(x) = \dfrac{g(x)}{|x|^{\mu} (1 + |x|)^{\nu}}$, *где* $g(x) \in H_0^{\lambda}(\dot{R}^1)$, *то при* $\lambda > \alpha$, $-\alpha < \mu < 1$, $\nu > \alpha$ *справедливо неравенство*

$$|(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f)(x)| \leqslant c |x|^{-\mu-\alpha} (1 + |x|)^{-\min(\nu,\, 1-\mu)}, \tag{6.35}$$

где c *не зависит от* x *и* ε (*при* $\nu + \mu = 1$ *в* (*6.35*) *появляется* $\ln(2 + |x|)$). *Если, кроме того,*

$$\frac{1}{q} - \nu < \mu < \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha, \tag{6.36}$$

то $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$.

Доказательство. Имеем (обозначив $\rho(x) = |x|^{\mu} (1 + |x|)^{\nu}$):

$$(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\rho(x)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(x - t) - g(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left[\frac{1}{\rho(x - t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho(x)} \right] \frac{g(x - t)}{t^{1+\alpha}}\, dt = A_{\varepsilon}(x) + B_{\varepsilon}(x).$$

Оценка для $A_{\varepsilon}(x)$ следует из (6.32):

$$|A_{\varepsilon}(x)| \leqslant c |x|^{-\mu} (1 + |x|)^{-\nu-\alpha-\lambda}. \tag{6.37}$$

(с добавлением $\ln(2+|x|)$ при $\lambda=1$). Для оценки $B_\varepsilon(x)$ представим его в виде

$$B_\varepsilon(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\frac{1}{(1+|x|)^\nu}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{1}{|x-t|^\mu}-\frac{1}{|x|^\mu}\right]\frac{g(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{1}{(1+|x-t|)^\nu}-\frac{1}{(1+|x|)^\nu}\right]\frac{g(x-t)\,dt}{t^{1+\alpha}|x-t|^\mu}=B_\varepsilon^1(x)+B_\varepsilon^2(x).$$

Оценка для $B_\varepsilon^1(x)$ проста:

$$|B_\varepsilon^1(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-\nu}\int_0^\infty t^{-1-\alpha}||x|^{-\mu}-|x-t|^{-\mu}|dt\leqslant$$

$$\leqslant c|x|^{-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}\int_{-\infty}^\infty|t|^{-1-\alpha}|1-|1-t|^{-\mu}|\,dt=c_1|x|^{-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}.$$

Далее,

$$|B_\varepsilon^2(x)|\leqslant\frac{c}{|x|^{\alpha+\mu}}\int_0^\infty\left|\frac{1}{(1+|x|)^\nu}-\frac{1}{(1+|x|\,|1-t\operatorname{sign}x|)^\nu}\right|\times$$

$$\times\frac{t^{-1-\alpha}dt}{|1-t\operatorname{sign}x|^\mu}\leqslant c|x|^{\nu-\alpha-\mu}(1+|x|)^{-\nu}\int_0^\infty t^{\nu-\alpha-1}|1-t|^{-\mu}\times$$

$$\times(1+|x|\,|1-t|)^{-\nu}dt=\frac{c|x|^{\nu-\alpha-\mu}}{(1+|x|)^\nu}\int_{|t-1|>1/2}\ldots+\frac{c|x|^{\nu-\alpha-\mu}}{(1+|x|)^\nu}\times$$

$$\times\int_{|t-1|<1/2}\ldots=U_\varepsilon(x)+V_\varepsilon(x).$$

В первом из этих интегралов $|t-1|>(t+1)/5$, поэтому

$$U_\varepsilon(x)\leqslant\frac{c|x|^{-\alpha-\mu}}{(1+|x|)^\nu}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+\alpha-\nu}(1+t)^{\mu+\nu}}=\frac{c_1}{|x|^{\alpha+\mu}(1+|x|)^\nu}.$$

Далее,

$$V_\varepsilon(x)\leqslant c|x|^{\nu-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}\int_0^1\xi^{-\mu}(1+\xi|x|)^{-\nu}d\xi=$$

$$=c|x|^{\nu-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}\int_0^{|x|}t^{-\mu}(1+t)^{-\nu}dt\leqslant c|x|^{-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\min(\nu,\,1-\mu)}\qquad(6.38)$$

(с добавлением $\ln(2+|x|)$ при $\nu+\mu=1$). Собирая оценки, получаем, что $B_\varepsilon(x)$ оценивается, как в (6.38). Тогда с учетом (6.37) такую же оценку имеет и $\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f$. Тем самым неравенство (6.35) доказано. После этого оставшееся утверждение теоремы получается с помощью теоремы 6.2.

К теореме 6.6 примыкает доказываемая аналогично

Теорема 6.6′. *Если* $f(x)\in H^\lambda(R^1)$, $\lambda>\alpha$, *то* $\dfrac{f(x)-f(0)}{|x|^\mu}\in I^\alpha(L_p)$ *при* $-\alpha+1/p<\mu<1/p$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 6.7. *Пространство $I^\alpha(L_p)$ инвариантно относительно умножения на функции $a(x)\in H^\lambda(\dot{R}^1)$, $\lambda>\alpha$, причем*

$$\|af\|_{I^\alpha(L_p)}\leqslant \mathrm{k}\,\|a\|_{H^\lambda}\,\|f\|_{I^\alpha(L_p)},$$

где постоянная k *не зависит от* a *и* f.

Доказательство. Проверяем условия теоремы 6.2. Условие $af\in L_q$ очевидно и $\|af\|_q\leqslant\|a\|_{H^\lambda}\|f\|_q$. Далее,

$$\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}(af)=a(x)\,\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f+A_\varepsilon f,$$

где

$$A_\varepsilon f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\frac{a(x)-a(x-t)}{t^{1+\alpha}}f(x-t)\,dt.$$

Очевидно, $\|a\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\|a\|_{H^\lambda}\|\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f\|_p$, а для $A_\varepsilon f$ имеем

$$\|A_\varepsilon f\|_p\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\|a\|_{H^\lambda}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}}\left\{\int_{-\infty}^\infty\frac{|f(x-t)|^p\,dx}{(1+|x|)^{\lambda p}(1+|x-t|)^{\lambda p}}\right\}^{1/p}$$

или после применения неравенства Гельдера с показателями q/p и $(q/p)'$:

$$\|A_\varepsilon f\|_p\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\|a\|_{H^\lambda}\|f\|_q\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha}(1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}}\right\}^\alpha.$$

В силу оценки (6.32) повторный интеграл сходится, так что окончательно $\|\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}(af)\|_p\leqslant c\,\|a\|_{H^\lambda}\|f\|_{I^\alpha(L_p)}$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 6.2. Доказываемое в § 11 равенство (11.36) утверждает, что умножение на разрывную функцию $\theta(x)=(1+\operatorname{sign}x)/2$ также оставляет инвариантным класс $I^\alpha(L_p)$ при $1<p<1/\alpha$. На основании этого в § 11, п. 4° будет указан еще один достаточный признак для того, чтобы $f(x)\in I^\alpha(L_p)$ (см. следствие 2 из теоремы 11.6).

5°. Об интегральном модуле непрерывности функций из $I^\alpha(L_p)$. Завершим этот параграф некоторыми простыми свойствами модуля непрерывности (6.31). Хотя, вообще говоря, $f(x)\notin L_p(R^1)$ для $f(x)\in I^\alpha(L_p)$, однако $f(x)-f(x-h)\in L_p(R^1)$ при любом h. Это вытекает из (6.9). Более того, справедливы следующие утверждения для $f(x)\in I^\alpha(L_p)$, $1<p<1/\alpha$:

$$1)\ \omega_p(f,\ t)\leqslant ct^\alpha\|\mathbf{D}^\alpha_+f\|_p, \tag{6.39}$$

$$2)\ \omega_p(f,\ t)=o(t^\alpha)\quad\text{при } t\to 0. \tag{6.40}$$

Действительно, оценка (6.39) вытекает из (6.9) после применения обобщенного неравенства Минковского (1.33). Чтобы получить (6.40), перепишем (6.9) с учетом свойства (6.11) в виде

$$f(x)-f(x-t)=t^\alpha\int_0^\infty\mathrm{k}(\xi)\,[\varphi(x-t\xi)-\varphi(x)]\,a\xi,\quad \varphi=\mathbf{D}^\alpha_+f.$$

Отсюда, также применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\omega_p(f,\ t)\leqslant t^{\alpha}\int_0^{\infty}|k(\xi)|\,\omega_p(\varphi,\ t\xi)\,d\xi = o(t^{\alpha}). \tag{6.41}$$

Из (6.41) нетрудно вывести с учетом (6.10) оценку

$$\omega_p(f,\ t)\leqslant c_1 t^{\alpha}\omega_p(\varphi,\ t) + c_2 t\int_t^{\infty}\frac{\omega_p(\varphi,\ \xi)}{\xi^{2-\alpha}}\,d\xi, \tag{6.42}$$

где c_1, c_2 не зависят от t. Несложными преобразованиями из (6.41) можно получить также оценку

$$\int_0^A\frac{\omega_p(f,\ t)}{t^{1+\alpha}}\,dt\leqslant\frac{2}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^A\frac{\omega_p(\varphi,\ t)}{t}\,dt + \frac{3A^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_A^{\infty}\frac{\omega_p(\varphi,\ t)}{t^{1+\alpha}}\,dt. \tag{6.43}$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим действие интегральных преобразований Фурье, Лапласа и Меллина на дробные интегралы и производные. Начальные сведения об этих преобразованиях приведены в § 1, п. 4°.

1°. Преобразование Фурье. Основное утверждение этого пункта составляет следующая формула преобразования Фурье дробного интеграла:

$$\mathcal{F}(I_{\pm}^{\alpha}\varphi) = \hat{\varphi}(x)/(\mp ix)^{\alpha},\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1. \tag{7.1}$$

Здесь функция $(\mp ix)^{\alpha}$ в соответствии с (5.26) понимается как

$$(\mp ix)^{\alpha} = e^{\alpha\ln|x| \mp \frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sign}x}. \tag{7.2}$$

Если α вещественно, то используем также запись

$$(\mp ix)^{\alpha} = |x|^{\alpha}e^{\mp\frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sign}x}. \tag{7.3}$$

Случаю дробного дифференцирования отвечает аналогичная формула:

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}\varphi) = (\mp ix)^{\alpha}\hat{\varphi}(x),\quad \operatorname{Re}\alpha\geqslant 0. \tag{7.4}$$

Формулы (7.1), (7.4) примыкают в очевидном плане к формуле (1.105), обобщая ее на нецелые порядки.

Обоснованию формулы (7.1) предпошлем следующее вспомогательное равенство:

$$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-zt}dt = \Gamma(\alpha)/z^{\alpha},\quad z\neq 0, \tag{7.5}$$

где $\operatorname{Re}\alpha>0$ при $\operatorname{Re}z>0$ или $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ при $\operatorname{Re}z=0$ и выбрана главная ветвь аналитической в правой полуплоскости функции z^{α} (так что z^{α} положительна при $z=x>0$ и вещественном α). Докажем это равенство. Оно очевидно при $z=x>0$ в силу (1.54). Остается оно справедливым и при $\operatorname{Re}z>0$, поскольку левая и правая части аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$. Остается рассмотреть граничный случай $\operatorname{Re}z=0$, $z\neq 0$, т. е.

$$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-ixt}dt = \Gamma(\alpha)(ix)^{-\alpha},\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1,\quad x\neq 0 \tag{7.6}$$

(условие $\operatorname{Re}\alpha<1$ обеспечивает условную сходимость на бесконечности интеграла слева). Для доказательства (7.6) совершим замену $itx=z$:

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-ixt}dt=(ix)^{-\alpha}\int_{\mathscr{L}} z^{\alpha-1}e^{-z}dz, \tag{7.7}$$

где $\mathscr{L}$ — мнимая полуось $(0, i\infty)$ при $x>0$ или полуось $(-i\infty, 0)$ при $x<0$. Так как в правой полуплоскости $|e^{-z}|$ экспоненциально убывает при $|z|\to\infty$, то в силу интегральной теоремы Коши

$$\int_{\mathscr{L}} z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha),$$ откуда и следует (7.6).

Обоснование формулы (7.1) дается следующей теоремой.

Теорема 7.1. *Формула (7.1) справедлива для* $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ *и* $\varphi(x)\in L_1(R^1)$.

Доказательство. В силу (1.103) имеем

$$\mathcal{F}(I_+^\alpha\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{it}dt\int_{-\infty}^{t}\frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,ds\int_s^\infty\frac{e^{ixt}-1}{it(t-s)^{1-\alpha}}dt.$$

Здесь перестановка порядка интегрирования возможна при $x\neq0$ в силу теоремы Фубини 1.1. Далее, после дифференцирования получаем

$$\mathcal{F}(I_+^\alpha\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,ds\int_s^\infty\frac{e^{ixt}dt}{(t-s)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,e^{ixs}ds\int_0^\infty\frac{e^{ix\tau}d\tau}{\tau^{1-\alpha}}=\frac{\hat\varphi(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{e^{ixt}dt}{t^{1-\alpha}}.$$

Отсюда с учетом (7.6) приходим к (7.1).

Замечание 7.1. Формула (7.1) не распространяется на значения $\operatorname{Re}\alpha\geqslant1$ в непосредственном виде, так как даже на самых гладких функциях, например $\varphi\in C_0^\infty$, левая часть в (7.1) может не существовать при $\operatorname{Re}\alpha\geqslant1$. Действительно, при $\alpha=1$ имеем $(I_+^1\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$, так что $(I_+^1\varphi)(x)\to\text{const}$ при $x\to+\infty$ и поэтому преобразование Фурье $\mathcal{F}I_+^1\varphi$ не существует (в обычном смысле). Если же $\alpha>1$, то возьмем функцию $\varphi\in C_0^\infty$, неотрицательную и отличную от нуля на каком-нибудь отрезке $[a, b]$. Тогда при $x>b$

$$(I_+^\alpha\varphi)(x)\geqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\geqslant\min_{a\leqslant t\leqslant b}\varphi(t)\,\frac{(x-b)^\alpha-(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{7.8}$$

так что $(I_+^\alpha\varphi)(x)\sim Cx^{\alpha-1}$ при $x\to+\infty$ и преобразование Фурье $\mathcal{F}I_+^\alpha\varphi$ в данном случае также не существует в обычном смысле. Позже, в § 8, п. 2° формула (7.1) будет распространена на все значения α, $\operatorname{Re}\alpha>0$, в случае специально построенного класса функций $\varphi(x)$.

Что же касается формулы (7.4), то она справедлива при $\operatorname{Re}\alpha>0$ для всех достаточно гладких функций, например дифференцируемых до порядка $n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$ и достаточно быстро убывающих вместе с производными на бесконечности. В этом можно убедиться, записывая $\mathcal{D}_+^\alpha f$ в виде $\mathcal{D}_+^\alpha f = I_+^{n-\alpha} f^{(n)}$ и применяя после этого формулы (7.1) и (1.105).

Проиллюстрируем применимость формулы (7.1) к вычислению некоторых интегралов. Именно дадим с ее помощью обоснование равенства (5.24). Пусть там вначале $\operatorname{Re}\mu>1$. Тогда $(1\pm ix)^{-\mu}\in L_1(R^1)$, и потому (см. теорему 7.1) $\mathcal{F} I_+^\alpha\left[\dfrac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^\mu}\right]=\dfrac{\Gamma(\mu)}{(-ix)^\alpha}\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{(1\pm ix)^\mu}\right]$ в силу формулы (7.1). Из равенства же (7.5) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_\pm^{\mu-1} e^{\mp t} e^{ixt}\,dt = \frac{\Gamma(\mu)}{(1\mp ix)^\mu}, \quad \operatorname{Re}\mu>0. \tag{7.9}$$

Это в силу формулы обращения преобразования Фурье (1.104) означает

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(1\pm ix)^\mu}\right]=\frac{2\pi}{\Gamma(\mu)} x_\pm^{\mu-1} e^{\mp x}, \tag{7.10}$$

что влечет $\mathcal{F} I_+^\alpha\left[\dfrac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^\mu}\right]=2\pi\dfrac{x_\pm^{\mu-1}}{(-ix)^\alpha}e^{\mp x}$. Применяя к последнему равенству обратное преобразование Фурье, учитывая формулу (7.9) (с заменой μ на $\mu-\alpha$ и x на $-x$), окончательно придем к равенству (5.24). Приведенные соображения обоснованы при $\operatorname{Re}(\mu-\alpha)>1$, но формула (5.24) остается в силе и при $\operatorname{Re}(\mu-\alpha)>0$ из соображений аналитичности по μ.

В заключение этого пункта в предположении, что $0<\alpha<1$, приведем формулы косинус- и синус-преобразований Фурье (1.108), (1.109) дробных интегралов $I_{0+}^\alpha\varphi$ и $I_-^\alpha\varphi$ на полуоси:

$$\mathcal{F}_c(I_{0+}^\alpha\varphi)=x^{-\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_c\varphi-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_s\varphi\right), \quad x>0, \tag{7.11}$$

$$\mathcal{F}_s(I_{0+}^\alpha\varphi)=x^{-\alpha}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_c\varphi+\cos\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_s\varphi\right), \quad x>0 \tag{7.12}$$

(в случае интеграла $I_-^\alpha\varphi$ в правых частях этих равенств знаки перед $\sin\alpha\pi/2$ следует поменять на противоположные). Эти соотношения легко получаются из (7.1) отделением действительной и мнимой частей.

2°. Преобразование Лапласа. Как следует из (1.122), интеграл дробного порядка $(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, является сверткой Лапласа вида

$$(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)=\left[\varphi(x)*\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right], \quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{7.13}$$

Поэтому, воспользовавшись теоремой о свертке (1.123), для преобразования Лапласа дробного интеграла $I_{0+}^\alpha\varphi$ нетрудно получить формулу

$$(LI_{0+}^\alpha\varphi)(p)=p^{-\alpha}(L\varphi)(p), \tag{7.14}$$

которая в случае достаточно хороших функций φ останется справедливой и при $\operatorname{Re}\alpha<0$. Здесь мы не рассматриваем оператор $I_-^\alpha\varphi$, так как композиция $LI_-^\alpha\varphi$ приводит к сложному оператору, содержащему функцию Куммера ${}_1F_1(a;c;z)$ в ядре (см. § 36).

Для установления условий справедливости равенства (7.14) нам понадобится

Лемма 7.1. *Пусть* $\varphi(x)\in L_1(a, b)$ *при любом* $b>a$, *имеет место оценка*

$$|\varphi(x)|\leqslant Ae^{p_0x} \text{ при } x>b, \quad A,\ p_0 - \text{const}, \quad p_0\geqslant 0, \tag{7.15}$$

и $\operatorname{Re}\alpha>0$. *Тогда при* $x>b+1$ *справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}|(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)|\leqslant Be^{p_0x} \text{ при } p_0>0,\\ |(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)|\leqslant Bx^{\max(0,\operatorname{Re}\alpha-1)} \text{ при } p_0=0,\ B-\text{const}.\end{gathered} \tag{7.16}$$

Доказательство. Пусть $x>b+1$. Для простоты предположим, что α действительное. Тогда имеем

$$|(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b(x-t)^{\alpha-1}|\varphi(t)|\,dt+\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_b^x\frac{e^{p_0t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_1x^{\max(0,\alpha-1)}+\frac{Ae^{p_0x}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{x-b}\frac{e^{-p_0\tau}}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau\leqslant C_1x^{\max(0,\alpha-1)}+C_2e^{p_0x},$$

что и требовалось установить.

Теорема 7.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$. *Тогда равенство (7.14) выполняется при* $\operatorname{Re}p>p_0$ *для функций* $\varphi(x)$, *удовлетворяющих условиям леммы 7.1 при* $a=0$.

Доказательство. Применимость преобразования Лапласа при $\operatorname{Re}p>p_0$ следует из леммы 7.1 и того факта, что если $\varphi\in L_1(0, b)$, то и $I^{\alpha}_{0+}\varphi\in L_1(0, b)$ (см. § 2, 3). Сама формула (7.14) проверяется непосредственным вычислением с изменением порядка интегрирования по теореме Фубини и использованием равенства (7.5).

Теорема 7.3. *Пусть* $-n<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1-n$, $n=1, 2, \ldots$ *Если при любом* $b>0$ $\varphi(x)\in AC^n([0, b])$, $\varphi^{(j)}(0)=0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$, *и справедлива оценка (7.15), то при* $\operatorname{Re}p>p_0$ *имеет место равенство (7.14)*.

Доказательство. Так как $(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(x)=(d/dx)^n(I^{\alpha+n}_{0+}\varphi)(x)$, $\operatorname{Re}\alpha+n>0$, согласно (2.32), то применим вначале формулу (1.124), приняв во внимание, что из условий $\varphi^{(j)}(0)=0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$, следуют равенства $(d/dx)^j(I^{\alpha+n}_{0+}\varphi)(x)=0$ при $x=0$ и $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$, а затем теорему 7.2, но по отношению к интегралу $I^{\alpha+n}_{0+}\varphi$. Теорема доказана.

Отметим, что формула (7.14) используется при решении различных интегральных и дифференциальных уравнений в главах 7, 8.

Замечание 7.2. Из формулы (7.14) с помощью (1.120) получается следующее представление оператора I^{α}_{0+} через операторы Лапласа L, L^{-1}:

$$(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(x)=L^{-1}x^{-\alpha}L\varphi(x). \tag{7.17}$$

Имеет место и другая аналогичная (7.17) формула

$$(I^{\alpha}_{-}\varphi)(x)=Lx^{-\alpha}L^{-1}\varphi(x), \tag{7.18}$$

которая после замены $\varphi=L\psi$ вытекает из соотношения

$$(I^{\alpha}_{-}L\psi)(x)=Lx^{-\alpha}\psi(x), \tag{7.19}$$

проверяемого при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ непосредственным вычислением на достаточно хороших функциях $\psi(x)$.

3°. **Преобразование Меллина.** Как следует из формул (1.105), (7.1), (7.4), (7.14), интегродифференцирование произвольного порядка α в образах Фурье и Лапласа сводится к умножению на степенную функцию

$(\mp ix)^{-\alpha}$ и $p^{-\alpha}$ соответственно. Формулы (1.117) показывают, что при действии преобразованием Меллина на производную целого порядка n образ умножается на произведение $(1-s)_n=\Gamma(1+n-s)/\Gamma(1-s)$. Последнее обстоятельство по отношению к дробным интегралам и производным приводит к равенствам

$$(I_{0+}^{\alpha}f(x))^*(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}f^*(s+\alpha),\quad \operatorname{Re}(s+\alpha)<1, \tag{7.20}$$

$$(I_{-}^{\alpha}f(x))^*(s)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}f^*(s+\alpha),\quad \operatorname{Re}s>0, \tag{7.21}$$

которые после замены $f(x)=x^{-\alpha}\varphi(x)$ в силу (1.117) принимают вид

$$(I_{0+}^{\alpha}x^{-\alpha}\varphi(x))^*(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\varphi^*(s),\quad \operatorname{Re}(\alpha+s)<1, \tag{7.22}$$

$$(I_{-}^{\alpha}x^{-\alpha}\varphi(x))^*(s)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}\varphi^*(s),\quad \operatorname{Re}s<1. \tag{7.23}$$

Условия справедливости этих формул содержатся в следующих теоремах.

Теорема 7.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$ *и* $f(t)t^{s+\alpha-1}\in L_1(0,\infty)$. *Тогда формула (7.20) справедлива при* $\operatorname{Re}s<1-\operatorname{Re}\alpha$, *а формула (7.21) — при* $\operatorname{Re}s>0$.

Доказательство осуществляется так же, как и доказательство теоремы 7.2. Указанные на α, s условия обеспечивают существование внутренних интегралов.

Теорема 7.5. *Пусть* $-n<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1-n$, $n=1,2,\ldots$, $f(t)\in C^n([0,b])$, b — *любое, и* $f(t)t^{\alpha+s-1}\in L_1(0,\infty)$. *Тогда формула (7.20) справедлива при* $\operatorname{Re}s<1-\operatorname{Re}\alpha$ *и условиях*

$$x^{s-k}(I_{0+}^{\alpha+k}f)(x)=0 \text{ при } x=0,\quad x=\infty,\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{7.24}$$

а формула (7.21) справедлива при $\operatorname{Re}s>0$ *и условиях*

$$x^{s-k}(I_{-}^{\alpha+k}f)(x)=0 \text{ при } x=0,\quad x=\infty,\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{7.25}$$

Доказательство. В силу условия $f(t)\in C^n([0,b])$ дробная производная $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)$ существует. Запишем ее в виде $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(I_{0+}^{\alpha+n}f)(x)$ (см. (2.32)), применим затем преобразование Меллина и проинтегрируем n раз по частям:

$$(I_{0+}^{\alpha}f(x))^*(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}d\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(I_{0+}^{\alpha+n}f)(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(1-s)_k x^{s-k-1}I_{0+}^{\alpha+k+1}f(x)\Big|_{x=0}^{\infty}+(1-s)_n\int_0^{\infty}x^{s-n-1}I_{0+}^{\alpha+n}f(x)\,dx.$$

По условию (7.24) внеинтегральные члены обращаются в нуль. Применив теперь теорему 7.4 с заменой α и s на $\alpha+n$ и $s-n$ соответственно, получим равенство

$$(I_{0+}^{\alpha}f(x))^*(s)=(1-s)_n\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s+n)}f^*(s+\alpha).$$

Отсюда следует (7.20). Аналогично рассматривается случай I_{-}^{α}. Теорема доказана.

Наряду с формулами (7.22), (7.23) ниже также используется следующая теорема, характеризующая действие дробных интегралов и производных на обратное преобразование Меллина.

Теорема 7.6. *Пусть* $f^*(s) \in L_2(1/2 - i\infty,\ 1/2 + i\infty)$, $\eta \leqslant \min(0, \operatorname{Re}(a-b))$. *Тогда имеют место соотношения*

$$x^b I_{0+}^{a-b} x^{-a} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta f^*(s) x^{-s} ds = \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta \frac{\Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-b-s)} f^*(s) x^{-s} ds, \quad (7.26)$$

$$\operatorname{Re} a < 1/2, \ \operatorname{Re} b < 1/2;$$

$$x^b I_{-}^{a-b} x^{-a} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta f^*(s) x^{-s} ds = \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta \frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(a+s)} f^*(s) x^{-s} ds, \quad (7.27)$$

$$\operatorname{Re} a > -1/2, \quad \operatorname{Re} b > -1/2.$$

Доказательство следует из существования интегралов (7.26), (7.27) при указанных условиях на параметры и функцию, их абсолютной сходимости почти всюду и, как следствие, перестановочности интегралов в левых частях равенств (7.26), (7.27), после чего вычисление внутреннего интеграла проводится с учетом формулы (1.68).

Отметим еще, что в § 10, 18, 36 содержатся различные формулы композиций, отражающие действие других интегральных преобразований на операторы I_{0+}^{α}, I_{-}^{α}, их обобщения и видоизменения (см. также § 9, 23, 39).

Замечание 7.3. Дробные интегралы $\Gamma(\alpha)(I_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(x \mp t)\, dt$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, при фиксированном x являются преобразованием Меллина функций $\varphi_{\pm}(t) = f(x \mp t)$. Обращая преобразование Меллина по формуле (1.113), получаем следующее представление функции $f(x)$ через ее дробные интегралы:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \Gamma(\alpha)(I_{\pm}^{\alpha} f)(x) |x-\tau|^{-\alpha} d\alpha, \quad \alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad (7.28)$$

где в правой части выбирается знак $+$, если $x > \tau$, и знак $-$, если $x < \tau$. Так как результат в правой части не должен зависеть от x, то, в частности, при $x = 0$

$$f(\pm\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \Gamma(\alpha)(I_{\pm}^{\alpha} f)(0) \tau^{-\alpha} d\alpha, \quad \tau > 0. \quad (7.29)$$

Таким образом, $f(x)$ можно восстановить по значениям дробных интегралов $(I_{\pm}^{\alpha} f)(0)$ только в одной точке, если последние известны для всех α на какой-нибудь прямой $\operatorname{Re}\alpha = \alpha_1 > 0$.

§ 8. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Будем предполагать, что читатель имеет самое минимальное представление об обобщенных функциях. Обобщенная функция понимается как непрерывный функционал над некоторым классом основных функций. Хорошо известно, что в зависимости от рассматриваемых задач используются самые разнообразные классы основных функций, учитывающие специфику задачи. Это будет явно просматриваться и в построениях настоящего параграфа.

1°. Предварительные указания. Будем рассматривать обобщенные функции на Ω, где Ω — ось или полуось (только в п. 5° этого параграфа будут краткие указания на случай, когда Ω — отрезок оси). Основные функции на Ω берутся бесконечно дифференцируемыми внутри Ω с предписанным поведением на концах Ω. Значение обобщенной функции f как функционала над основной функцией φ будет обозначаться в виде (f, φ). Обобщенная функция называется *регулярной,* если существует такая локально суммируемая функция $f(x)$, что $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ существует для всех основных функций $\varphi(x)$ и

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \tag{8.1}$$

(предполагается, что в качестве (f, φ) выбрана билинейная форма, совпадающая с (8.1) в случае регулярной обобщенной функции).

Класс $X=X(\Omega)$ основных функций предполагается наделенным топологией (сходимостью). Через $X'=X'(\Omega)$ обозначаем топологически сопряженное к X пространство обобщенных функций.

Напомним понятие обобщенной функции, сосредоточенной в точке. Говорят, что обобщенная функция $f\in X'$ равна нулю на открытом множестве G, если $(f, \varphi)=0$ для любой основной функции, тождественно равной нулю вне G. Объединение O_f всех открытых множеств, на которых $f=0$, называется *нулевым множеством функции* f. Дополнение нулевого множества до Ω называется *носителем обобщенной функции* и обозначается $\operatorname{supp} f=\Omega\setminus O_f$. Если $\operatorname{supp} f$ есть точка x_0, то говорят, что обобщенная функция сосредоточена в точке x_0.

Известная δ-функция Дирака $\delta(x-x_0)$, $x_0\in\Omega$, и ее производные, действующие по правилу

$$(\delta^{(k)}(x-x_0), \varphi) = (-1)^k\varphi^{(k)}(x_0),$$

представляют собой примеры обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Справедливо и обратное утверждение: всякий функционал f, сосредоточенный в точке x_0, имеет вид $f=\sum_{k=0}^{N} c_k\delta^{(k)}(x-x_0)$, см. доказательство в книгах В. С. Владимирова [2, с. 52], И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [1, с. 149].

Существует два основных способа определения дробных интегралов и производных от обобщенных функций. Первый восходит к Л. Шварцу (L. Schwartz [1]) и основывается на определении дробного интеграла как свертки:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x_+^{\alpha-1} * f \tag{8.2}$$

функции $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x_+^{\alpha-1}$ с обобщенной функцией f (подробнее см. об этом в п. 3°). Этот способ приспособлен к полуоси. Второй, более употребительный способ основан на переходе к сопряженному оператору. Именно, исходя из формул дробного интегрирования по частям (2.20) и (5.16), полагают

$$(I_{a+}^{\alpha} f, \varphi) = (f, I_{b-}^{\alpha}\varphi) \tag{8.3}$$

и аналогично для I_{b-}^{α}, $I_{\pm}^{\alpha}$ и дробных производных. Подход (8.3) будет корректен, если I_{b-}^{α} непрерывно действует из основного пространства X в X. Часто поступают более общо: f и $I_{a+}^{\alpha}f$ рассматривают как обобщенные функции над разными классами X и Y основных функций, так что $f\in X'$, $I_{a+}^{\alpha}f\in Y'$ и тогда I_{b-}^{α} должен непрерывно действовать из Y в X.

Подход (8.2) мы осветим лишь вкратце в п. 3°. Основное же внимание будет уделено подходу (8.3). В п. 2° он рассматривается на оси, в п. 4° — на полуоси.

2°. Случай оси. Класс основных функций Лизоркина. Широко известный класс S шварцевых основных функций (бесконечно дифференцируемых, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени), а также класс $C_0^\infty \subset S$ финитных бесконечно дифференцируемых функций плохо приспособлены для дробных интегралов и производных. Очевидно, функции $I_\pm^\alpha \varphi$, $\mathcal{D}_\pm^\alpha \varphi$, где $\varphi \in S$, являются бесконечно дифференцируемыми, но недостаточно «хорошо» ведут себя, вообще говоря, на бесконечности, см. по этому поводу замечание 7.1 и оценку (7.8), где уже отмечалось, что дробный интеграл $I_+^\alpha \varphi$ даже функции $\varphi \in C_0^\infty$ может «плохо» вести себя при $x \to +\infty$. Учитывая это, можно в качестве основных функций взять бесконечно дифференцируемые, «хорошие» при $x \to -\infty$ и «плохие» при $x \to +\infty$: например, ввести класс $\mathcal{S}_+$ бесконечно дифференцируемых функций, ведущих себя при $x \to -\infty$ как функции из S, а при $x \to +\infty$ имеющих медленный рост (последнее означает, что для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ существует m такое, что $\sup (1 + |x|)^{-m} |\varphi^{(k)}(x)| < \infty$). Класс $\mathcal{S}_+$ и аналогичный ему класс $\mathcal{S}_-$ с «плохим» поведением функций при $x \to -\infty$ инвариантны относительно дробного интегрирования I_+^α и I_-^α соответственно. Действительно, для $\varphi \in S_+$ и любого p при $x \to -\infty$ имеем

$$\left| (1 + |x|)^m \frac{d^k}{dx^k} I_+^\alpha \varphi \right| \leqslant \frac{(1 + |x|)^m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{|\varphi^{(k)}(x - t)|}{t^{1-\alpha}} dt \leqslant$$

$$\leqslant c (1 + |x|)^m \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} dt}{(1 + |x| + t)^p}.$$

Считая p достаточно большим ($p > \alpha + 1$), получаем

$$\left| (1 + |x|)^m \frac{d^k}{dx^k} I_+^\alpha \varphi \right| \leqslant c (1 + |x|)^{m+\alpha+1-p} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1 + t)^{-\alpha-1} dt \leqslant \text{const} \tag{8.4}$$

при выборе еще $p > m + \alpha + 1$. Легко показывается, что I_+^α сохраняет медленный рост при $x \to +\infty$.

Нетрудно ввести топологию в $\mathcal{S}_\pm$ с помощью счетного набора норм, улавливающих «степенное» убывание на одной бесконечности и «степенной» рост на другой.

Очевидно, что классы $\mathcal{S}_\pm$ примыкают к пространствам $L_{p,\omega}$ (см. (5.52)) суммируемых функций, также инвариантным относительно дробного интегрирования.

Неудобством классов $\mathcal{S}_\pm$ служит то, что дробное интегрирование I_+^α и I_-^α приходится рассматривать над разными классами $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$ основных функций. Более существенным их недостатком является то, что обобщенные функции над $\mathcal{S}_\pm$ обязаны быстро убывать при $x \to \pm\infty$, так что, например, степенные функции не принадлежат классам $\mathcal{S}'_\pm$.

Построим подпространство $\Phi \subset S$, инвариантное относительно дробного интегрирования и дифференцирования, следуя П. И. Лизоркину. Идея введения такого пространства прозрачна в образах Фурье. Дей-

ствительно, в силу формулы (7.1) действие дробного интегрирования сводится к делению на $(\mp ix)^{\alpha}$:

$$\mathcal{F}(I_{\pm}^{\alpha}\varphi)(x)=(\mp ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x). \tag{8.5}$$

Требуемая инвариантность будет достигнута, если функция $\hat{\varphi}(x)$ не «ухудшается» от деления на $(\mp ix)^{\alpha}$. Введем поэтому класс Ψ, состоящий из функций $\psi(x)\in S$, обращающихся в точке $x=0$ в нуль вместе со всеми своими производными:

$$\Psi=\{\psi:\psi\in S,\quad \psi^{(k)}(0)=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Примером функции $\psi\in\Psi$ служит $\psi(x)=e^{-x^2-x^{-2}}$.

Определение 8.1. *Классом Лизоркина назовем класс прообразов Фурье функций из* Ψ:

$$\Phi=\{\varphi:\varphi\in S,\quad \hat{\varphi}\in\Psi\}.$$

Так как $0=\hat{\varphi}^{(k)}(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i0\cdot t}\varphi(t)t^k dt$, класс Φ можно охарактеризовать как класс тех шварцевых функций $\varphi(x)\in S$, которые ортогональны всем многочленам:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^k\varphi(t)\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.6}$$

Напомним, что формула (8.5) была выведена при $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ (см. замечание 7.1). Покажем, что на функциях $\varphi(x)\in\Phi$ она верна при любых α.

Лемма 8.1. *Формула (8.5) на функциях* $\varphi\in\Phi$ *справедлива при* $\mathrm{Re}\,\alpha\geqslant 0$.

Доказательство. Пусть вначале $1\leqslant\mathrm{Re}\,\alpha<2$ (случай $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ содержится в теореме 7.1). Тогда

$$\mathcal{F}I_{+}^{\alpha}\varphi=\Gamma^{-1}(\alpha)\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N}e^{ixt}dt\int\limits_{-\infty}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds=$$

$$=\Gamma^{-1}(\alpha)\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N}\varphi(s)e^{ixs}ds\int\limits_{0}^{N-s}\xi^{\alpha-1}e^{ix\xi}d\xi. \tag{8.7}$$

Если $\mathrm{Re}\,\alpha\neq 1$, то интегрирование по частям приводит к формуле

$$\mathcal{F}I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)ix}\lim_{N\to\infty}\left[N^{\alpha-1}e^{ixN}\int\limits_{-\infty}^{N}\left(1-\frac{s}{N}\right)^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds-\right.$$

$$\left.-(\alpha-1)\int\limits_{-\infty}^{N}\varphi(s)e^{ixs}ds\int\limits_{0}^{N-s}\xi^{\alpha-2}e^{ix\xi}d\xi\right].$$

Здесь первое слагаемое стремится к нулю в силу (8.6) (раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя), а во втором при $\mathrm{Re}\,\alpha<2$ возможен непосредственный предельный переход. Учитывая значение интеграла (7.6), получаем $\mathcal{F}I_{+}^{\alpha}\varphi=\dfrac{\alpha-1}{(-ix)^{\alpha}}\Gamma(\alpha-1)\hat{\varphi}(x)$, что и требовалось.

Случай $\alpha=1$ прост:

$$\mathcal{F}I_{+}^{1}\varphi=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N}\varphi(s)\frac{e^{ixN}-e^{isx}}{ix}ds=-\frac{1}{ix}\hat{\varphi}(x)$$

в силу (8.6). Рассмотрим теперь особый случай $\operatorname{Re}\alpha = 1$, $\alpha \neq 1$, так что $\alpha = 1 + i\theta$, $\theta \neq 0$. Легко видеть, что

$$\int_{N-1}^{N} \varphi(s) e^{ixs} ds \int_{0}^{N-s} \xi^{i\theta} e^{ix\xi} d\xi \to 0 \quad \text{при } N \to \infty$$

для $\varphi(x) \in \Phi$. Поэтому из (8.7)

$$\mathcal{F} I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{ix\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{N-1} \varphi(s) e^{ixs} ds \times$$

$$\times \left[\int_0^1 \xi^{i\theta} d(e^{ix\xi} - 1) + \int_1^{N-s} \xi^{i\theta} de^{ix\xi} \right].$$

Осуществляя здесь интегрирование по частям, после простых преобразований имеем

$$\mathcal{F} I_+^\alpha \varphi = -\frac{1}{ix\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{N-1} \varphi(s) e^{ixs} ds - N^{i\theta} e^{ixN} \int_{-\infty}^{N-1} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{i\theta} \varphi(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + i\theta \int_{-\infty}^{N-1} e^{ixs} \varphi(s)\, ds \int_0^{N-s} \frac{e^{ix\xi} - \chi(\xi)}{\xi^{1-i\theta}} d\xi \right\},$$

где обозначено $\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 1 \\ 0, & \xi > 1 \end{cases}$. Здесь первое слагаемое стремится к $\hat{\varphi}(x)$, второе— к нулю за счет свойства (8.6), а в третьем возможен предельный переход под знаком интеграла. Поэтому

$$\mathcal{F} I_+^\alpha \varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\hat{\varphi}(x)}{ix} + \frac{\theta}{x} A(x) \hat{\varphi}(x) \right], \tag{8.8}$$

где обозначено

$$A(x) = \int_0^\infty \frac{e^{ix\xi} - \chi(\xi)}{\xi^{1-i\theta}} d\xi.$$

Из формулы (7.6) предельным переходом нетрудно получить $A(x) = \Gamma(i\theta)(-ix)^{-i\theta} - (i\theta)^{-1}$, что превращает (8.8) в равенство $\mathcal{F} I_+^\alpha \varphi = (-ix)^{-1-i\theta} \hat{\varphi}(x)$, что и требовалось.

Пусть, наконец, $\operatorname{Re}\alpha > 2$. Этот случай сводится последовательно к рассмотренным в силу полугруппового свойства $I_+^\alpha \varphi = I_+^1 I_+^{\alpha-1} \varphi$, $\varphi \in \Phi$. Аналогично случай $\operatorname{Re}\alpha = 0$ следует из случая $\operatorname{Re}\alpha = 1$ в силу полугруппового свойства $I_+^{i\theta} \varphi = \frac{d}{dx} I_+^{1+i\theta} \varphi$, $\varphi \in \Phi$, и свойства (7.4). Лемма доказана.

Дадим применение леммы 8.1 к дробному интегродифференцированию чисто мнимого порядка.

Лемма 8.2. *Операторы $I_\pm^{i\theta}$, $\theta \in R^1$, допускают продолжение с класса Φ до ограниченного оператора в $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$.*

Доказательство. В силу леммы 8.1 действие дробного интегрирования $I_+^{i\theta}$ сводится в образах Фурье к умножению на ограниченную функцию

$$(-ix)^{-i\theta} = e^{(\pi/2)\theta \operatorname{sign} x} [\cos(\theta \ln|x|) - i \sin(\theta \ln|x|)]$$

(по крайней мере на множестве Φ, плотном в $L_p(R^1)$, см. об этом в § 9, п. 2°, 8.1). Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет условиям (1.41′). Но тогда оператор $I_+^{i\theta}$ ограничен в $L_p(R^1)$. Лемма доказана. Из нее легко вывести, что и в случае конечного отрезка оператор $I_{a+}^{i\theta}$ ограничен в $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$.

Непосредственно из определения вытекает (с учетом леммы 8.1), что класс Φ инвариантен относительно дробного интегрирования и дифференцирования любого порядка.

Класс Φ можно рассматривать как линейное топологическое пространство с топологией пространства S. Напомним, что топология в S порождается счетным семейством норм $\sup_x (1+x^2)^{m/2}|\varphi^{(k)}(x)|$. Пространство Φ замкнуто в S. Действительно, известно (см. книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [1, с. 155]), что сходимость, определяемая как сходимость в двойственном (в смысле преобразования Фурье) пространстве $\mathcal{F}(S)=S$, совпадает с исходной сходимостью в S. Поэтому достаточно показать замкнутость Ψ в S. Последнее очевидно.

В пространстве Ψ можно ввести топологию, улавливающую поведение функций $\psi(x)$ не только на бесконечности, но и при $x\to 0$ с помощью счетного семейства норм $\sup_x[(1+x^2)^{m/2}|x|^{-p}|\psi^{(k)}(x)|]$. Эта топология совпадает на функциях $\psi\in\Psi$ с топологией S. В этом можно убедиться, рассмотрев отдельно случаи $|x|<1$, $|x|>1$ и применив в первом случае формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Замечание 8.1. Класс Φ не содержит вещественных функций, отличных всюду от нуля. Это следует из (8.6) при $k=0$.

Пространство линейных непрерывных функционалов над Φ обозначаем, как обычно, через Φ'. Сравним Φ' с S'. Начнем со сравнения Ψ' с S'. Так как Ψ замкнуто в S, то Ψ' можно отождествить с фактор-пространством шварцева класса S' по классу Ψ_0' функционалов из S', аннулирующихся на Ψ:

$$\Psi' = S'/\Psi_0', \tag{8.9}$$

где $\Psi_0'=\{f : f\in S',\ (f,\psi)=0,\ \psi\in\Psi\}$ (пользуемся общим фактом: если M — замкнутое подпространство в линейном топологическом пространстве E, то $M'=E'/M^\perp$, где $M^\perp$ — совокупность всех функционалов из E', ортогональных к M). Из определения класса Ψ вытекает, что Ψ_0' состоит из функционалов, сосредоточенных в точке $x=0$. Тогда (см. п. 1°) Ψ_0' состоит из линейных комбинаций дельта-функции и ее производных. Хорошо известно, что прообраз Фурье функции $\delta^{(k)}(x)$ есть степень: $\mathcal{F}\{(-it)^k;\ x\}=2\pi\delta^{(k)}(x)$. Подчеркнем, что преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций:

$$(\hat{f},\ \varphi) = (f,\ \hat{\varphi}), \tag{8.10}$$

где $\varphi\in S$ или $\varphi\in\Phi$. Следовательно, в аналогичном (8.9) представлении для Φ':

$$\Phi' = S'/\Phi_0' \tag{8.11}$$

пространство

$$\Phi_0' = \{f : f\in S',\ (f,\ \varphi)=0,\ \varphi\in\Phi\} \tag{8.12}$$

состоит из многочленов. Поэтому Φ' можно рассматривать как фактор-пространство S'/P по классу P всех многочленов. Другими словами, Φ' получается из S' «отсеиванием» многочленов (т. е. функционалы из S' неразличимы как элементы пространства Φ', если они отличаются друг от друга на многочлен).

Дробное интегрирование $I_\pm^\alpha$ обобщенной функции $f\in\Phi'$ определим, следуя подходу (8.3), равенством

$$(I_\pm^\alpha f,\ \varphi) = (f,\ I_\mp^\alpha\varphi),\quad \varphi\in\Phi. \tag{8.13}$$

Случаю $\operatorname{Re}\alpha<0$ отвечает дробное дифференцирование. Определение (8.13) корректно при любых α, так как в соответствии с (8.10)

$$(f,\ I_\mp^\alpha\varphi) = (\tilde{f},\ \widehat{I_\mp^\alpha\varphi}) = (\tilde{f},\ (\pm ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x)). \tag{8.14}$$

Так как здесь $\hat{\varphi}(x) \in \Psi$ и умножение на $(\pm ix)^{-\alpha}$ — непрерывная операция в Ψ, то $(f, I_{\mp}^{\alpha}\varphi)$ — непрерывный функционал над Φ.

Замечание 8.2. Равенство (8.13) может служить определением дробного интеграла для функции $f(x) \in L_p(R^1)$ при $p \geqslant 1/\alpha$, когда в обычном смысле интегралы $I_{\pm}^{\alpha} f$ не существуют, расходясь на бесконечности. В этом случае $I_{\pm}^{\alpha} f$ — уже обобщенная функция. Однако эта обобщенная функция такова, что ее разность

$$\Delta_h f = f(x+h) - f(x),$$

определяемая стандартным путем: $(\Delta_h f, \varphi) = (f, \Delta_{-h}\varphi)$, является при всех $h \in R^1$ обычной функцией и $\Delta_h f \in L_p(R^1)$, если $\alpha < 1$. Это утверждение получается с помощью представления (6.9). В случае $\alpha \geqslant 1$ аналогичное утверждение можно получить с помощью разностей более высокого порядка. (См. точную формулировку в аналогичной ситуации для многомерного случая в лемме 26.4.)

Рассмотрим примеры. Обратимся к формулам (5.24), (5.25). Функция $f(x) = (1 \pm ix)^{-\mu}$ при любом комплексном μ может рассматриваться как элемент из Φ', поскольку в силу формулы (7.10) $\mathcal{F}[(1 \pm ix)^{-\mu}] \in \Psi'$ (преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций). Случаю $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, отвечает $f(x) \equiv 0$, что согласуется с тем, что Φ' не содержит многочленов. Пользуясь обычным правилом (8.10), получаем, что формулы

$$I_{+}^{\alpha}[(1 \pm ix)^{-\mu}] = \frac{\Gamma(\mu - \alpha)}{\Gamma(\mu)} e^{\pm i\alpha\pi/2} (1 \pm ix)^{\alpha-\mu}, \tag{8.15}$$

$$I_{-}^{\alpha}[(x \pm i)^{-\mu}] = \frac{\Gamma(\mu - \alpha)}{\Gamma(\mu)} (x \pm i)^{\alpha-\mu} \tag{8.16}$$

справедливы при всех комплексных μ, кроме $\mu = \alpha - m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. В случае же $\mu = \alpha - m$ получаются формулы

$$I_{+}^{\alpha}[(1 \pm ix)^{m-\alpha}] = \frac{(-1)^{m-1}}{m!\Gamma(\alpha - m)} (1 \pm ix)^{m} \ln(1 \pm ix), \tag{8.17}$$

$$I_{-}^{\alpha}[(x \pm i)^{m-\alpha}] = \frac{(-1)^{m-1}}{m!\Gamma(\alpha - m)} (x \pm i)^{m} \ln(x \pm i), \tag{8.18}$$

где $\ln(1 \pm ix) = \ln\sqrt{1+x^2} \pm i \operatorname{arctg} x$, $\ln(x \pm i) = \ln\sqrt{1+x^2} \pm i \operatorname{arcctg} x$. Докажем, например, формулу (8.17). Для $f(x) = (1 + ix)^{-\mu}$ имеем, согласно (8.13), (8.14), (8.5):

$$(I_{+}^{\alpha} f, \varphi) = (\mathcal{F}^{-1}(1 + ix)^{-\mu}, (ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x)),$$

или, учитывая (7.9),

$$(I_{+}^{\alpha} f, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{-}^{\mu-1} e^{x}}{(ix)^{\alpha}} \hat{\varphi}(x)\, dx.$$

Так как $\hat{\varphi}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $(I_{+}^{\alpha} f, \varphi)$ есть функционал, аналитический по μ во всей комплексной плоскости (с доопределением $(I_{+}^{\alpha} f, \varphi) = 0$ в точках $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$). В таком случае из (8.15) следует

$$(I_{+}^{\alpha}[(1 + ix)^{m-\alpha}], \varphi) = \lim_{\mu \to \alpha - m} \frac{\Gamma(\mu - \alpha)}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+ix)^{\alpha-\mu} \varphi(x)\, dx.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty}(x+i)^m\varphi(x)\,dx=0$ в силу (8.6), то, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получаем (8.17).

Далее, вычислим дробный интеграл от δ-функции и ее производных. Имеем

$$(I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)},\ \varphi)=(\delta^{(k)},\ I_{\mp}^{\alpha}\varphi)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}(I_{\mp}^{\alpha}\varphi)|_{x=0}=$$

$$=(-1)^k I_{\mp}^{\alpha}(\varphi^{(k)})|_{x=0}.$$

Таким образом, $I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)}$ есть функционал, действующий по формуле

$$(I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)},\ \varphi)=\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi^{(k)}(\pm t)\,dt$$

или

$$(I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)},\ \varphi)=\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha-k)}\int_{-\infty}^{\infty}t_{\pm}^{\alpha-k-1}\varphi(t)\,dt \tag{8.19}$$

в случае $\operatorname{Re}\alpha>k$. Равенство (8.19) означает, что

$$I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)}=\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha-k)}t_{\pm}^{\alpha-k-1},\quad \operatorname{Re}\alpha>k. \tag{8.20}$$

Нетрудно показать, что равенство (8.20) распространяется и на значения $\operatorname{Re}\alpha\leqslant k$. (Обобщенная функция $t_{\pm}^{\alpha-k-1}$ понимается тогда в смысле регуляризации (5.68).) Точки $\alpha=k-m$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, играют при этом особую роль, отвечая равенству $I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)}=\delta^{(m)}$.

Рассмотрение класса Φ закончим следующим замечанием. Пространство Φ наряду с явными преимуществами (простота построения, прозрачность всех действий в образах Фурье) обладает и существенным недостатком: оно бедно мультипликаторами. Именно если $m(x)\varphi(x)\in\Phi$ для всех $\varphi(x)\in\Phi$, то $m(x)$ может быть только многочленом. В самом деле, в силу (8.6) $\int_{-\infty}^{\infty}m(x)\varphi(x)dx=0$ для всех $\varphi(x)\in\Phi$, а выше было показано, что класс (8.12), ортогональный к Φ, состоит из многочленов.

3°. Подход Л. Шварца. Будем рассматривать обобщенные функции над основным классом $K_1=C_0^{\infty}(R^1)$. Свертку двух обобщенных функций, следуя Л. Шварцу (L. Schwartz [1]), определим в терминах прямого произведения.

Прямым произведением обобщенной функции $f(x)$ переменной x и обобщенной функции $g(y)$ переменной y называется функционал $f\times g$, действующий на основных функциях $\varphi(x,\ y)\in K_2=C_0^{\infty}(R^2)$ по правилу

$$(f\times g,\ \varphi)=(f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y))).$$

Так как в случае обычных функций $f(x)$ и $g(y)$

$$(f*g,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dxdy,$$

то для обобщенных функций $f(x)$ и $g(y)$ полагают

$$(f*g,\ \varphi)=(f(x)\times g(y),\ \varphi(x+y)), \tag{8.21}$$

т. е. свертка $f*g$ определяется как значение функционала $f(x)\times g(y)$ двух переменных на функциях $\varphi(x,\ y)$ вида $\varphi(x+y)$. Однако функция

$\varphi(x+y)$, не будучи финитной в R^2, не является основной функцией двух переменных. Очевидно, определение (8.21) будет иметь смысл, например, для обобщенных функций $f(x)$, $g(y)$, сосредоточенных на полуоси. В самом деле, пусть носитель основной функции $\varphi(x)$ содержится в интервале $[-a, a]$. Так как $f(x)=0$, $x<0$, $f(y)=0$, $y<0$, то функционал (8.21) не изменится, если заменим функцию $\varphi(x+y)$ финитной функцией двух переменных $\psi(x, y)$, совпадающей с $\varphi(x+y)$ в треугольнике $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $x+y\leqslant a$.

В соответствии с указанным понятием свертки вводим дробныйинтеграл обобщенной функции $f\in K_1'$:

$$(I_{0+}^{\alpha}f,\ \varphi)=(I_{+}^{\alpha}f,\ \varphi)=\left(\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}*f,\ \varphi\right) \tag{8.22}$$

в случае, когда f сосредоточена на полуоси $x>0$. Для таких функций $I_{+}^{\alpha}f$ также сосредоточена на этой полуоси. Определение (8.22) применимо для всех α при обычном толковании обобщенной функции $x_+^{\alpha-1}$ при $\operatorname{Re}\alpha<$ <0 (см., например, (5.68)), кроме $\alpha=0, -1, -2, \ldots$, когда оно заменяется правилом непосредственного дифференцирования обобщенной функции.

Корректность подхода Л. Шварца резюмируем следующей теоремой, в которой через K_+' обозначен класс обобщенных функций $f\in K_1'$, сосредоточенных на полуоси R_+^1.

Теорема 8.1. *Если $f\in K_+'$, то и $I_{0+}^{\alpha}f\in K_+'$ для любого $\alpha\in\mathbf{C}$. Кроме того,*

$$I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\beta}f=I_{0+}^{\alpha+\beta}f,\quad \alpha,\ \beta\in\mathbf{C},$$

и для любого $f\in K_+'$ существует единственная обобщенная функция $g\in K_+'$ такая, что $f=I_{0+}^{\alpha}g$, $\alpha\in\mathbf{C}$.

Доказательство получается непосредственно из определения операции $I_{0+}^{\alpha}f$ для $f\in K_+'$.

4°. Случай полуоси. Подход через сопряженный оператор. Наиболее простой путь построения классов основных функций, инвариантных относительно дробного интегрирования I_{-}^{α}, I_{0+}^{α}, состоит в следующем. Пусть $S(R_+^1)$ — сужение класса $S=S(R^1)$ на полуось, так что функции $f(x)\in$ $\in S(R_+^1)$ бесконечно дифференцируемы на $[0, \infty)$ и убывают при $x\to\infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени. Легко показывается, что класс $S(R_+^1)$ инвариантен относительно оператора I_{-}^{α}. Далее, пусть $\mathfrak{S}_+^0=\mathfrak{S}_+^0(R_+^1)$ — класс бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ на $[0, \infty)$, медленно растущих при $x\to\infty$ и таких, что $\varphi^{(k)}(0)=0$, $k=$ $=0, 1, 2, \ldots$ Легко проверяется, что этот класс инвариантен относительно оператора I_{0+}^{α}. Однако классы $S(R_+^1)$ и $\mathfrak{S}_+^0(R_+^1)$ обладают существенным недостатком. Пространства обобщенных функций над $S(R_+^1)$ и $\mathfrak{S}_+^0(R_+^1)$ не содержат функций, растущих при $x\to 0$ (последнее из них не содержит даже ограниченных или медленно убывающих функций на бесконечности). Это непригодно в приложениях. Как и в случае всей оси, более удобным будет класс основных функций Ф типа Лизоркина, приспособленный к полуоси. Введем такой класс. Пусть

$$S_+=S_+(R_+^1)=\{\omega:\omega\in C^{\infty}(R_+);$$
$$\lim_{x\to 0,\,\infty}x^l\omega^{(m)}(x)=0,\ l, m=0, 1, 2, \ldots\}. \tag{8.23}$$

Положим

$$\Phi_+=\Phi(R_+)=\{\omega:\omega\in S_+; \tag{8.24}$$

$$\int_0^\infty x^k \omega(x)\,dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\Big\}, \tag{8.24}$$

так что функции класса Φ_+ обладают следующим свойством: их преобразование Меллина (1.112) обращается в нуль в целых точках $s=1, 2, 3, \ldots$ Топологию в пространствах S_+, Φ_+ зададим нормами

$$\sup_{m\leqslant k}\sup_{x>0}(1+x)^k\,|\omega^{(m)}(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Нетрудно показать полноту пространств S_+, Φ_+ в этой топологии. Примером функции из класса Φ_+ является

$$\varkappa(x) = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right), \tag{8.25}$$

в чем можно убедиться непосредственно с учетом того, что преобразование Меллина этой функции

$$\int_0^\infty x^{z-1}\varkappa(x)\,dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2/4}\,\mathrm{sh}\,(zt)\sin\frac{\pi}{2}\,tdt = 2\sqrt{\pi}e^{z^2-\pi^2/4}\sin\pi z \tag{8.26}$$

(см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.5.57.1]).

Заметим, что пространство Φ_+ весьма богато элементами. Можно показать, что если $\omega\in\Phi_+$, то для любой функции $\psi\in S_+$ свертка Меллина функций ω и ψ (см. (1.114)) принадлежит Φ_+.

С учетом инвариантности пространства $\Phi=\Phi(R^1)$ относительно оператора I_+^α легко получается

Лемма 8.3. *Оператор* I_{0+}^α, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, *изоморфно отображает пространство* Φ_+ *на себя.*

Действительно, пусть ε_0: $\Phi_+\to\Phi$ — оператор продолжения нулем на R^1, а P_+ — оператор сужения на R_+^1. Тогда $I_{0+}^\alpha = P_+ I_+^\alpha \varepsilon_0$. Так как $\varepsilon_0(\Phi_+)\subset \subset\Phi=\Phi(R^1)$, то в силу инвариантности $\Phi(R^1)$ относительно оператора I_+^α получаем $I_{0+}^\alpha(\Phi_+)\subseteq\Phi_+$. Обратное вложение получаем аналогичным рассмотрением дробного дифференцирования $\mathcal{D}_{0+}^\alpha$.

В силу леммы 8.3 можно определить в пространстве Φ_+' линейных непрерывных функционалов над Φ_+ оператор I_-^α, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, равенством

$$(I_-^\alpha f,\ \omega) = (f,\ I_{0+}^\alpha\omega), \quad \omega\in\Phi_+. \tag{8.27}$$

Непосредственно из леммы 8.2 вытекает

Следствие. *Оператор* I_-^α, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, *изоморфно отображает пространство* Φ_+' *на себя.*

Равенство (8.27) может служить определением дробного интеграла $I_-^\alpha f$ для $f\in L_p(R_+^1)$ при $p\geqslant 1/\alpha$, когда в обычном смысле этот интеграл расходится (см. также замечание 8.2). Это обстоятельство является достоинством класса Φ_+ основных функций. Шкала классов $F_{p,\mu}$, упоминаемая ниже, таким достоинством не обладает (см. далее замечание 8.4).

Чтобы сформулировать аналог леммы 8.3 для оператора I_-^α, введем следующие пространства основных функций:

$$\Phi_+^\alpha = \Big\{\omega:\omega\in S_+,\ \int_0^\infty \omega(x)\,x^{\alpha-k}dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots\Big\},$$

снабженные топологией пространства S_+.

Лемма 8.4. *Оператор* I_-^α, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, *изоморфно отображает* Φ_+^α *на* $\Phi_+^{-\alpha}$.

Утверждение леммы легко выводится из леммы 8.3, если заметить, что $(I_-^\alpha\varphi)(x) = x^{2\alpha}(WI_{0+}^\alpha W\varphi)(x)$, $(W\varphi)(x) = x^{-1-\alpha}\omega(1/x)$.

Следствие. *Оператор* I_{0+}^α, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *определяемый равенством* $(I_{0+}^\alpha f, \omega) = (f, I_-^\alpha\omega)$, $\omega \in \Phi_+^\alpha$, *изоморфно отображает пространство* $(\Phi_+^{-\alpha})'$ *на* $(\Phi_+^\alpha)'$.

Замечание 8.3. Степени x^λ принадлежат пространству Φ_+' при $\lambda \neq 0, 1, 2, \ldots$ и пространству $(\Phi_+^\alpha)'$ при $\alpha - \lambda \neq 1, 2, \ldots$ (при исключаемых значениях λ степени x^λ не отличимы от нуля как элементы соответствующего пространства).

Изложенная выше модификация класса Лизоркина для полуоси осуществлена Б. С. Рубиным [27]. Рассмотрим вкратце другой подход к определению дробного интегродифференцирования обобщенных функций на полуоси, принадлежащий А. МакБрайду (A. C. McBride [2—4, 6]).

Обозначим через $\mathcal{J}_{pl}$, где p — произвольное вещественное число, класс бесконечно дифференцируемых в $(0, \infty)$ функций с носителем в $[0, l]$ таких, что

$$\sup_{x>0} |x^{-p+k}\varphi^{(k)}(x)| < \infty \tag{8.28}$$

при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ (ср. с (8.23)). Нормами (8.28) задается топология в $\mathcal{J}_p = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{J}_{pl}$. Прежде всего замечаем, что сопряженному пространству $\mathcal{J}_p'$ принадлежат степенные функции x^λ при $\lambda > p - 1$. Умножение на x^λ является непрерывной операцией из $\mathcal{J}_p$ в $\mathcal{J}_q$, отображая непрерывно $\mathcal{J}_p$ на $\mathcal{J}_q$ при $\lambda = q - p$. Более содержательно утверждение о действии оператора I_-^α в $\mathcal{J}_p$. Для его формулировки введем еще класс $\mathcal{J}_0^*$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, определяемый аналогично классу $\mathcal{J}_p$ (полу)нормами:

$$\sup_{x>0} |x^{-k}(1 + |\ln x|)^{-1}\varphi^{(k)}(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Лемма 8.5. *Оператор* I_-^α *непрерывно действует из* $\mathcal{J}_p$ *в* $\mathcal{J}_q$, *где* $q \leqslant p + \operatorname{Re}\alpha$, *если* $p + \operatorname{Re}\alpha < 0$, *и* $q = 0$, *если* $p + \operatorname{Re}\alpha > 0$. *В случае* $p + \operatorname{Re}\alpha = 0$ *оператор* I_-^α *непрерывно действует из* $\mathcal{J}_p$ *в пространство* $\mathcal{J}_0^*$.

Доказательство получается несложными оценками и опускается.

Лемма 8.5 позволяет определить дробный интеграл $I_{0+}^\alpha f$ от обобщенных функций $f \in \mathcal{J}_q'$, $q \leqslant 0$, по формуле

$$(I_{0+}^\alpha f, \varphi) = (f, I_-^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{J}_p, \tag{8.29}$$

где $p = q - \alpha$ при $q < 0$ и $p > -\alpha$ при $q = 0$. Можно также определить $I_{0+}^\alpha f$ равенством (8.29) для $f \in (\mathcal{J}_0^*)'$ и тогда $\varphi \in \mathcal{J}_{-\alpha}$. При этом I_{0+}^α отображает $\mathcal{J}_q'$ в $\mathcal{J}_{q-\alpha}'$ при $q < 0$ и $(\mathcal{J}_0^*)'$ в $\mathcal{J}_{q-\alpha}'$ при $q = 0$.

Известны и другие способы построения пространств бесконечно дифференцируемых функций, приспособленных в аналогичном плане к дробному интегрированию. Укажем, например, на пространство $F_{p\mu}$, задаваемое следующим образом. Через F_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим пространство функций, определяемое счетным набором (полу)норм

$$\gamma_k^p(\varphi) = \|t^k\varphi^{(k)}(t)\|_{L_p(R_+^1)},$$

и скажем, что $\varphi \in F_{p\mu}$, если $t^{-\mu}\varphi(t) \in F_p$. Естественным образом вводится топология в $F_{p\mu}$ полунормами $\gamma_k^{p,\mu}(\varphi) = \gamma_k^p(t^{-\mu}\varphi)$.

Известно, что I^{α}_{0+} и I^{α}_{-} непрерывно действуют из $F_{p\mu}$ в $F_{p,\,\mu+\alpha}$ при всех значениях μ, за исключением счетного множества значений $\mathrm{Re}\,\mu$. Мы не рассматриваем это и другие пространства (см. по этому поводу литературные ссылки в § 9). Здесь сделаем только следующее

Замечание 8.4. Интеграл $I^{\alpha}_{-}f$, где $f\in L_p(I^1_+)$, определяется равенством

$$(I^{\alpha}_{-}f,\ \varphi)=(f,\ I^{\alpha}_{0+}\varphi),\quad \varphi\in F_{q\mu},$$

не при всех $p\geqslant 1/\alpha$, каковы бы ни были $\mu>-1$, $q\geqslant 1$.

Действительно, пусть $\varphi\in F_{q\mu}$. Возьмем $f(x)=x^{1-2/p}(1+x)^{-2/p'}\in L_p(R^1_+)$, $\varphi(x)=x^{\mu}(1+x)^{-(1+\varepsilon)/q}\in F_{q\mu}$, $\varepsilon>0$. Тогда

$$(I^{\alpha}_{-}f,\ \varphi)\geqslant c\int_0^{\infty} f(x)\,\frac{x^{\mu+\alpha}dx}{(1+x)^{(1+\varepsilon)/q}}=c\int_0^{\infty}\frac{x^{1+\mu+\alpha-2/p}\,dx}{(1+x)^{(1+\varepsilon)/q+2/p'}} \tag{8.30}$$

с учетом неравенства

$$I^{\alpha}_{0+}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x}\frac{y^{\mu}(x-y)^{\alpha-1}}{(1+y)^{(1+\varepsilon)/q}}\,dy\geqslant\frac{cx^{1+\mu+\alpha}}{(1+x)^{(1+\varepsilon)/q}}.$$

Интеграл (8.30) расходится при $\varepsilon=1$, $\alpha=3$ для всех $\mu>-1$ и $q\in[1,\infty)$.

5°. Случай отрезка. Основываемся на подходе через сопряженный оператор, т. е. на формуле

$$(I^{\alpha}_{a+}f,\ \varphi)=(f,\ I^{\alpha}_{b-}\varphi) \tag{8.31}$$

(см. (2.20)). Ввиду (8.31) мы можем рассматривать дробный интеграл $I^{\alpha}_{a+}f$ на обобщенных функциях f, если они определены на основных функциях φ, образующих класс X, инвариантный относительно дробного интегрирования I^{α}_{b-}. Таким классом, как нетрудно видеть, служит класс

$$C^{\infty}_{b}([a,\ b])=\{\varphi:\varphi(x)\in C^{\infty}([a,\ b]),\ \varphi^{(k)}(b)=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}. \tag{8.32}$$

Он инвариантен также относительно дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}$. Аналогичный класс

$$C^{\infty}_{a}([a,\ b])=\{\varphi:\varphi(x)\in C^{\infty}([a,\ b]),\quad \varphi^{(k)}(a)=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

инвариантен относительно дробного интегрирования I^{α}_{a+} и дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$.

Простыми рассуждениями устанавливается следующее утверждение: *уравнение Абеля* $I^{\alpha}_{a+}\varphi=f$, *где* $f\in X'$, $X=C^{\infty}_{b}([a,\ b])$, *имеет в классе* X' *обобщенных функций единственное решение* $\varphi=\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, *понимаемое в смысле*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f,\ \omega)=(f,\ \mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\omega).$$

§ 9. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 2

1°. Исторические сведения. К § 5, п. 1°. Дробное интегродифференцирование в форме $I^{\alpha}_{-}\varphi$ (но отличающееся от $I^{\alpha}_{-}\varphi$ множителем $(-1)^{\alpha}$) появляется уже у Ж. Лиувилля (J. Liouville [1, с. 8], 1832 г.). Ж. Лиувилль пришел к этому после формальных преобразований своего исходного определения дробного интегрирования функций, представимых рядами из экспонент (или интегралами от экспонент), см. также его работы [2], 1832 г.; [5], 1834 г. В форме (5.4) дробный интеграл $I^{\alpha}_{+}\varphi$ встречается у А. В. Лет-

никова [1, с. 28], 1868 г. Ж. Лиувиллю приходилось иметь дело с так называемыми дополнительными функциями, доставлявшими ему много хлопот (см. J. Liouville [2, с. 94—105], 1832 г.; [4], 1834 г.). Свободное от этого понятия изложение дробного исчисления дано А. В. Летниковым [1]. Решение уравнения Абеля $I_{-}^{\alpha}\varphi=f$ на бесконечном промежутке впервые получено J. Liouville [5, с. 277], 1834 г., в виде $\varphi=-I_{-}^{1-\alpha}f'$. Об интегралах чисто мнимого порядка (5.18) см. в § 4, п. 1° (к § 2, п. 4°). Формулы (5.21) — (5.23) получены J. Liouville [2, с. 121—123], 1832 г., строго доказаны А. В. Летниковым [1, с. 38—44]. Формулы типа (5.25) содержатся в справочнике Г. Бейтмена, А. Эрдейи [4, с. 146, формула (7)]. Формула (5.16) впервые встречается (в случае полуоси) в работе H. Kober [1], 1940 г.

К § 5, п. 2°. Теоремы 5.1, 5.2 получены Б. С. Рубиным [22], 1986 г.

К § 5, п. 3°. Теорема 5.3 впервые доказана G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г., с помощью так называемых перестановок функций, см. также книгу Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуда, Г. Полиа [1, с. 348]. Известно доказательство этой теоремы, элементарное в том отношении, что не использует никаких других средств, кроме длинной цепочки интегральных неравенств Гельдера и Минковского (В. А. Солонников [1], 1962 г.). Имеются доказательства, основанные на методах интерполяции. Соответствующие ссылки см. в § 29 в исторических сведениях к § 25 по поводу аналогичной теоремы для многомерного (риссова) дробного интегрирования. Доказательство необходимости условий теоремы 5.3 взято из книги И. Стейна [1, с. 139]. Контрпример (5.41) указали G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г. В этой же работе доказана теорема 5.4 для оператора I_{0+}^{α} при более жестких предположениях относительно параметров. Случай $\mu=\alpha p-1$ был рассмотрен в работе [6, с. 363], 1936 г., тех же авторов. При указанных в теореме 5.4 ограничениях эта теорема для оператора I_{0+}^{α} была доказана Т. Флеттом (T. M. Flett [3], 1958 г.). Случай $p=q=1$, $\mu<-1$ доказан в работе Л. Бозанке (L. S. Bosanquet [2, с. 13], 1934 г.). Доказательство для оператора I_{-}^{α} в случае $m=\alpha$, пригодное для $p=1$, имеется в работе J. B. Miller [1].

В сформулированном виде при $p\neq 1$ теорема 5.4 является частным случаем более общей теоремы 5.5, доказанной в работе Б. С. Рубина [22], 1986 г. Утверждение теоремы 5.4 для оператора I_{0+}^{α} ранее приводилось в § 3 (см. теорему 3.7 и § 4, п. 1° (к § 3, пп. 3, 4°)).

Утверждение теоремы 5.7 при $p=1$ дано в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, с. 681].

К § 5, пп. 4—6°. Интеграл (5.57) присутствовал уже в работе Г. Вейля (H. Weyl [1, с. 302], 1917 г.), однако его появление у Г. Вейля носило эпизодический характер. Как самостоятельный объект дробная производная в форме (5.57) и в более общем виде (5.80) появляется в работе А. Маршо (A. Marchaud [1], 1927 г.), где она была подвергнута всестороннему исследованию, см. также ниже п. 2°, 5.11. Поэтому конструкция (5.57), (5.80) называется дробной производной Маршо. Определение 5.2 основано на идеях Ж. Адамара, который ввел понятие конечной части расходящегося интеграла (см., например, книгу Ж. Адамара [1, гл. III]).

Значение нормировочного множителя в (5.80) в виде (5.81) было известно еще А. Маршо (A. Marchaud [1], 1927 г.). Им же в этой работе использовались «усеченные» выражения (5.59), (5.80′).

К § 5, п. 7°. Изложение теории полугрупп и дробных степеней операторов содержится во многих работах и книгах, см., например, Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1], Э. Хилле, Р. Филлипс [1], М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский [1]. Определение (5.84) дробной степени (абстрактный аналог формулы Маршо) восходит к А. Балакришнану (A. V. Balakrishnan [3], 1960 г.). Следует отметить работу Ж. Лионса, Ж. Петри (J. L. Lions, J. Peetre [1, с. 54], 1964 г.), в которой использовалась усеченная конструкция (5.85) для описания области определения дробной степени $(-A)^{\alpha}$ при целых α. Это было обобщено на произвольные $\alpha>0$ в работе H. Berens, P. L. Butzer, U. Westphal [1], 1968 г. Реализация дробного интегродифференцирования в виде (5.82), (5.84) в рамках пространств C^{ω} содержится в работе Н. Ю. Бакаева, Р. П. Тарасова [1], 1978 г. В связи с теорией дробных степеней операторов следует упомянуть работы М. А. Красносельского, П. Е. Соболевского [1], A. V. Balakrishnan [1—3], J. Watanabe [1], H. Komatsu [1—5], P. L. Butzer, H. Berens [1], U. Westphal [1, 2], H. W. Hövel, U. Westphal [1], K. Yoshinaga [2], F. Hirsch [1], H. O. Fattorini [1].

К § 6, пп. 1—3°. Пространство $I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<1/\alpha$, дробных интегралов от функций из L_p вводилось и исследовалось С. Г. Самко [7], 1969 г.; [9], 1970 г.; [11], 1971 г.; [14], 1973 г. Изложение в § 6 основано на работе [14] и следует книге С. Г. Самко [31, § 1].

Теорема 6.1 и лемма 6.1 доказаны в работе С. Г. Самко [14], 1973 г.; см. также книгу С. Г. Самко [31, с. 9—11]. Утверждение теоремы 6.1 было известно и ранее в случае $p=2$ на функциях $\varphi\in L_2(R^1)$ с компактным носителем (E. M. Stein, A. Zygmund [2, с. 253], 1965 г.). В этой работе рассматривалась модификация (12.1) дробного интегрирования. Описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$, предоставляемое теоремой 6.2, в непол-

ном виде было получено С. Г. Самко [14] в терминах (6.18). В терминах же (6.19) эта теорема доказана С. Г. Самко [23], 1977 г., в многомерном случае (для риссовых операторов дробного интегрирования). Описание $I^{\alpha}(L_p) \cap L_p$ в терминах (6.19) с жестким ограничением $1<p<1/(2\alpha)$ в достаточной части было дано в работе D. L. Herson, P. Heywood [1], 1974 г. В приведенном виде теорема 6.2 доказана в книге С. Г. Самко [31]. Пространство (6.28) введено в работах С. Г. Самко [17, 18], 1976 г.; [20], 1977 г. (в многомерном случае). Описание его в виде (6.29) получено им в [17], 1976 г., при $p \leqslant r \leqslant p/(1-\alpha p)$ (также в многомерном случае). Свойство, сформулированное в замечании 6.1, доказано С. Г. Самко [27, § 17], 1978 г. Утверждение о знакопеременности вещественных функций из $L_r \cap I^{\alpha}(L_p)$, $1 \leqslant r < 1/(1-\alpha)$, отмечено в работе С. Г. Самко [14]. Теорема 6.3 установлена С. Г. Самко [13], 1971 г.

К § 6, пп. 4, 5°. Достаточный признак теоремы 6.4 указан в работе С. Г. Самко [14], 1973 г. Теорема 6.5 в более общем виде и в многомерном случае получена в работе С. Г. Самко [26], а теорема 6.7—в [14]. Утверждение (6.40) принадлежит Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.) в периодическом случае, а в непериодическом случае дано С. Г. Самко [8], 1969 г.; [14], 1973 г. Оценка (6.42) примыкает к оценке (13.62). Оценка (6.43) получена в работе С. Г. Самко [27, § 1], 1978 г.

К § 7, п. 1°. Формула (7.1) впервые получена Х. Кобером (H. Kober [3, лемма 3], 1941 г.) при условиях $0<\alpha \leqslant 1$, $\varphi(t)$, $|t|^{-\alpha}\hat{\varphi}(t) \in L_1(R^1)$ (ср. с теоремой 7.1).

К § 7, п. 2°. Формула (7.14), по-видимому, впервые указана Г. Дечем (G. Doetsch [1, с. 301], 1937 г.) при условиях $\alpha>0$ или $-n-1<\alpha \leqslant n$ и $\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots$ $\ldots=\varphi^{(n-1)}(0)=0$, но при целых α она была известна и ранее. В книге Д. Уиддера (D. V. Widder [2], 1946 г., 1-е изд. в 1941 г.) соотношение (7.14) доказано в терминах обратного преобразования Лапласа (см. далее п. 2°, 7.3). Лемма 7.1 и теоремы 7.2, 7.3 публикуются впервые.

К § 7, п. 3°. Формулы (7.20), (7.21) впервые установил Х. Кобер (H. Kober [1,теоремы 5а, 5в], 1940 г.) в классе $L_p(0, \infty)$ при $\alpha>0$ и $1 \leqslant p < \infty$ для (7.17) и $1 \leqslant p < 1/\alpha$ для (7.18). Теоремы 7.4, 7.5 публикуются впервые. Теорема 7.6 установлена Ву Ким Туаном [2], 1985 г.

К § 8, пп. 1, 2°. Идея введения пространства Φ была предложена В. И. Семянистым [1], 1960 г., и развита П. И. Лизоркиным [1], 1963 г., широко использовавшим это пространство в теории лиувиллевского дифференцирования функций одной и многих переменных, см. также работу П. И. Лизоркина [5], 1969 г., которой мы следовали в п. 2° при рассмотрении пространства Φ. Отметим также работу K. Yoshinaga [1], 1964 г., где исследовано пространство Φ.

Близкий к $\mathcal{S}_-$ класс V основных функций вводился В. К. Вебером [2], 1974 г. Этот класс V отличается от $\mathcal{S}_-$ тем, что функции из V справа финитны. Он также инвариантен относительно правостороннего дробного интегродифференцирования I_-^{α}, $\mathcal{D}_-^{\alpha}$. В работе В. К. Вебера [4], 1976 г., исследованы также свертыватели и преобразование Фурье в V' в связи с приложениями к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

Утверждение типа леммы 8.2 об ограниченности в $L_p(0, 1)$ операторов дробного интегрирования $I_{0+}^{i\theta}$ впервые отмечено в работе Г. Калиша (G. K. Kalisch [1], 1967 г.).

Формулы (8.17)—(8.20) ранее, по-видимому, не отмечались. Случай $k=0$ в формуле (8.20) отмечался в работе A. Brédimas [1, с. 23], 1973 г., в рамках подхода Л. Шварца (см. ниже к § 8, п. 3°) и при ином толковании дробного интегродифференцирования — через разности дробного порядка, см. ниже в п. 2°, 8.5. Такое толкование рассматривается нами в случае обычных функций в § 20.

К § 8, п. 3°. Подход к дробному интегродифференцированию обобщенных функций, указанный в п. 3°, предложен Л. Шварцем (L. Schwartz [1, т. 2, с. 30], 1950 г.) и воспроизведен в книге И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, с. 149].

К § 8, п. 4°. Подход через сопряженный оператор на полуоси развивался в работах А. Эрдейи и А. МакБрайда (A. Erdelyi, A. C. McBride [1], 1970 г.), А. Эрдейи (A. Erdelyi [15], 1972 г.; [17], 1975 г.), А. МакБрайда (A. C. McBride [2], 1975 г.; [4], 1977 г.). В кратком освещении этого подхода мы следовали работам A. C. McBride [2, 4], в которых, в частности, введены и исследованы пространства $\mathcal{J}_{pl}$, $\mathcal{J}_p$ и $F_{p\mu}$. Дальнейшее развитие этих результатов изложено в книге A. C. McBride [6], 1979 г.

Пространства Φ_+, Φ_+^{α} типа Лизоркина в случае полуоси введены в работе Б. С. Рубина [27], 1987 г., и там же рассмотрено действие операторов дробного интегрирования в классах Φ_+', $(\Phi_+^{\alpha})'$.

К § 8, п. 5°. Инвариантность пространств $C_a^{\infty}([a, b])$, $C_b^{\infty}([a, b])$ относительно дробного интегрирования указывалась в работе В. К. Вебера, А. Б. Урдолетовой [1], 1974 г., где на этой основе рассмотрено дробное интегродифференцирование обобщенных функций на отрезке $[a, b]$. Позднее эти пространства использовались в работе R. Estrada, R. P. Kanwal [1], 1985 г., посвященной решению в обобщенных функциях

различных классов интегральных уравнений, в том числе сингулярных уравнений, уравнения Абеля и др. Там, в частности, дано решение в обобщенных функциях уравнения

$$\int_a^x \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{[h(x)-h(\tau)]^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a$$

(см. об операторах дробного интегрирования, связанных с таким уравнением, в § 18 и в § 23 (к § 18)).

2°. Обзор других результатов. 5.1. Дробное дифференцирование Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$, $0<\alpha<1$, можно рассматривать вместо (5.6) в форме

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \frac{d}{dx} \int_x^N \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{9.1}$$

(J. Cossar [1]). Это определение удобно тем, что применимо к функциям с худшим поведением на бесконечности по сравнению с (5.6). В этом плане подход (9.1) близок к определению дробного дифференцирования Маршо (5.58). Для дробной производной (9.1) J. Cossar [1] доказал формулу

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x) = (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_b^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1+\alpha}}, \quad x < b.$$

Конструкция (9.1) использовалась в работе L. S. Bosanquet [8] при рассмотрении условий существования локально суммируемых решений уравнения Абеля по бесконечному промежутку. В последней работе доказаны, в частности, следующие утверждения: 1) если $f(x)$ представима в виде условно сходящегося дробного интеграла $f(x)=(I^{\alpha}_{-}\varphi)(x)$, $0<\alpha<1$, то необходимо $\varphi(x)=(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$, где $(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$ — производная Коссара (9.1); 2) для того чтобы $f(x)$ была представима условно сходящимся интегралом дробного порядка $f(x)=(I^{\alpha}_{-}\varphi)(x)$, $0<\alpha<1$, от локально суммируемой функции $\varphi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $I^{1-\alpha}_{b-}f \in AC([a, b])$ при любых a и b и чтобы $\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}\,dt \times$ $\times \int_b^{\infty} (s-t)^{-\alpha-1} f(s)\,ds \to 0$ при $b\to\infty$ почти для всех x (распространение теоремы Я. Тамаркина 2.1 на случай всей прямой и локально суммируемых решений уравнения Абеля).

В работе B. Choudhary [1] сформулированные утверждения распространены на уравнения типа Сонина (см. § 4, п. 2°, 2.3):

$$\int_x^{\infty} k(t-x)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0,$$

в предположении, что существует ядро $l(t)$ такое, что выполняется (4.2″).

5.2. Можно рассмотреть «усеченный» дробный интеграл

$$(I^{\alpha}_{+,N}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-N}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad N > 0.$$

Если $\varphi(t)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, то $I^{\alpha}_{+,N}\varphi \to I^{\alpha}_{+}\varphi$ почти всюду и по норме $L_q(R^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$. Сходимость почти всюду получается с помощью неравенства Гельдера, а сходимость в L_q—теоремы Банаха—Штейнгауза. Можно воспользоваться также представлением

$$(I^{\alpha}_{+,N}\varphi)(x) = f(x) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t}\right)^{\alpha} \frac{f(t)\,dt}{x-t}, \quad f = I^{\alpha}_{+}\varphi$$

(см. С. Г. Самко [14, теорема 2 и лемма 2]).

5.3. Обстоятельное исследование условно сходящихся дробных интегралов $I^{\alpha}_{+}\varphi = 1/\Gamma(\alpha) \lim_{N\to\infty} \int_0^N \varphi(x-t)\,t^{\alpha-1}dt$ от необязательно убывающих на бесконечности функций

$\varphi(t)$ проведено в работе E. R. Love [1]. Им введен класс I_λ, $0<\alpha\leqslant\lambda<1$, функций $\varphi(t)$, для которых существует возрастающая функция $\omega(T)$, $T>0$ (зависящая от $\varphi(t)$), такая, что $\left|\int\limits_x^{x+T}\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\omega(T)$ и $\int\limits_1^\infty t^{\lambda-1}d\omega(t)<\infty$. Показано, что если $\varphi\in I_\lambda$, то $I_+^\alpha\varphi$ существует как равномерный по x предел, если $\lambda>\alpha$, и почти для всех x, если $\lambda=\alpha$. В этой работе особо рассмотрен случай почти периодических функций (равномерно почти периодических и почти периодических в смысле Степанова). Некоторые результаты для дробных интегралов от функций, не исчезающих на бесконечности, см. также в работах С. П. Гейсберга [3], L. S. Bosanquet [8].

5.4. Формулы дробного интегрирования по частям (5.16), (5.17), (5.16′) можно использовать подобно случаю конечного отрезка (см. § 4, п. 2°, 2.6) для построения биортогональных систем функций. A. Erdelyi [3], предложивший этот прием, построил, отправляясь от формулы (5.16′) дробного интегрирования по частям на полуоси $(0, \infty)$, биортогональные системы функций на полуоси, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции. В качестве исходной биортогональной системы $\{\varphi_n, \psi_m\}$ (см. § 4, п. 2°, 2.6) брались функции $\varphi_n(x)=L_n^{(\alpha)}(2x)$, $\psi_n(x)=e^{-2x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(2x)$, где $L_n^{(\alpha)}(x)=$

$$=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})=\sum_{j=0}^n\binom{n+\alpha}{n-j}\frac{(-x)^j}{j!}$$ — многочлен Лагерра.

5.5. Для многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ (см. выше) справедливо интегральное представление в виде дробного интеграла

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}e^xI_-^{n-\alpha}(e^{-x}x^n)=\binom{n+\alpha}{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{-\alpha-n-1}(x+t)^n dt$$

при условии $\operatorname{Re}\alpha<-n$. Это обстоятельство использовано H. M. Srivastava [4] для вычисления дробных интегралов от функций вида $e^{-st}P(t)$, где $P(t)$ — многочлен.

5.6. Оператор дробного интегрирования, рассматриваемый в форме

$$I_{\eta,\alpha}^+\varphi=\frac{x^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\eta\varphi(t)\,dt \tag{9.2}$$

(в обозначении A. Erdelyi [4]), ограничен в пространстве $L_p(R_+^1)$, как это следует из теоремы 1.5, если $\eta>-1/p'$. В указанной работе предложена модификация оператора (9.2) в виде

$$I_{\eta,\alpha}^+\varphi=\frac{x^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\eta\varphi(t)\,dt-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}x^{\alpha-k-1}\int\limits_0^\infty t^{k+\eta}\varphi(t)\,dt\right\}, \tag{9.3}$$

отличающаяся от (9.2) конечномерным оператором. Такой оператор ограничен в $L_p(R_+^1)$, $1<p<\infty$, при выборе $m=0$, если $\eta>-1/p'$, и $m=[-\eta-1/p']$, если $\eta<-1/p'$, $\eta-1/p\neq-1, -2, \ldots$. В этой работе получена также формула для преобразования Меллина (1.112) дробного интеграла (9.3):

$$(\mathfrak{M}I_{\eta,\alpha}^+\varphi)(s)=\frac{\Gamma(\eta+1/p'-i\xi)}{\Gamma(\eta+\alpha+1/p'-i\xi)}(\mathfrak{M}\varphi)(s),\quad s=i\xi+1/p,$$

где $\varphi\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p\leqslant 2$ (ср. с (7.22)). Указанные результаты получены также в форме правостороннего дробного интегрирования (с переменным нижним пределом).

Ограниченность оператора (9.3) в пространстве $L_p(R_+^1; x^\mu)$ с весом рассмотрена P. G. Rooney [4].

5.7. В связи с теоремой 5.5 приведем утверждение типа теоремы 3.12 в случае бесконечного промежутка. Именно рассмотрим вопрос об ограниченности операторов дробного интегрирования из пространства $L_p(\Omega;\rho)$ в гельдерово пространство $H_0^{\alpha-1/p}(\Omega; r)$, $1/p<\alpha<1+1/p$, в случае, когда Ω — ось или полуось. Пусть $\rho(x)$ — вес (5.39). Введем следующие обозначения:

$$\delta_k=\begin{cases}\mu_k/p & \text{при } \mu_k>\alpha p-1,\\ \alpha+\varepsilon_k-1/p & \text{при } 0<\mu_k\leqslant\alpha p-1,\ \varepsilon_k>0,\end{cases}$$

$$\Lambda_1 = \{k : k \in \{2, \ldots, n\}, \quad \mu_k > 0\},$$
$$\Lambda_2 = \{k : k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mu_k > 0\};$$

$$\delta_\infty^{(1)} = -\alpha - \frac{\mu_1}{p} - \sum_{k\in\Lambda_1} \delta_k +$$
$$+ \begin{cases} -\alpha + (2-\mu_0)/p & \text{при } \mu_0 > 1-p, \\ 1-\alpha-\varepsilon_0+1/p,\ \varepsilon_0>0, & \text{при } 2-\alpha p-p < \mu_0 \leqslant p-1, \\ 1 & \text{при } \mu_0 \leqslant 2-\alpha p-p, \end{cases}$$

$$\mu_0 = -\mu-\mu_1-\cdots-\mu_n;$$

$$\delta_\infty^{(2)} = -2\left(\alpha - \frac{1}{p}\right) - \sum_{k\in\Lambda_2} \delta_k - \begin{cases} \mu_0/p & \text{при } \mu_0 > 1-p, \\ \varepsilon - 1/p' & \text{при } \mu_0 \leqslant 1-p, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\delta_\infty^{(3)} = -2\alpha + (2-\mu_0)/p - \sum_{k\in\Lambda_2} \delta_k;$$

$$r_+(x) = \begin{cases} (1+x)^{\delta_\infty^{(1)}} x^{\frac{\mu_1}{p}} \prod\limits_{k\in\Lambda_1} |x-x_k|^{\delta_k}, & \text{если } \Omega = \dot{R}^1_+, \\ (1+|x|)^{\delta_\infty^{(2)}} \prod\limits_{k\in\Lambda_2} |x-x_k|^{\delta_k}, & \text{если } \Omega = \dot{R}^1, \end{cases}$$

$$r_-(x) = \begin{cases} (1+x)^{\delta_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k\in\Lambda_2} |x-x_k|^{\delta_k}, & \text{если } \Omega = \dot{R}^1_+, \\ r_+(x), & \text{если } \Omega = \dot{R}^1. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение (Б. С. Рубин [22]). Пусть $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha < 1/p+1$, $\rho(x) = (1+x^2)^{\mu/2} \prod\limits_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\mu_k}$, выполнено (5.47) в случае $x_k \in \Omega = \dot{R}^1_+$ и μ_k удовлетворяют условию (5.48). Если и $\mu_1 < p-1$, то оператор I^α_{0+} ограничен из $L_p(R^1_+; \rho)$ в $'H_0^{\alpha-1/p}(\dot{R}^1_+; r_+)$ (штрих означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} r_+(x)(I^\alpha_{0+}\varphi)(x) \neq 0$, вообще говоря, для $\varphi \in L_p(R^1_+; \rho)$, если $\mu_0 \leqslant 2-\alpha p-p$). Если $\mu_1 < p-1$ и $\mu_0 < 1-\alpha p$, то операторы $I^\alpha_\pm$ ограничены из $L_p(\Omega; \rho)$ в $H_0^{\alpha-1/p}(\Omega; r_\pm)$.

5.8. Имеются обобщения весовой теоремы 5.5 на случай двух весовых оценок. В работе K. F. Andersen, H. P. Heinig [1] получены достаточные условия ограниченности операторов дробного интегрирования (5.1) и (5.3) и более общих операторов Эрдейи—Кобера (18.1) и (18.3) из $L_p(R^1_+; \rho)$ в $L_q(R^1_+; r)$. Например, для дробного интеграла (5.1) получен следующий результат: если $\rho(x)$, $r(x)$ — неотрицательные измеримые функции на R^1_+, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \alpha < 1$, и существует постоянная β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, такая, что

$$\left(\int_A^\infty |(t-A)^{(\alpha-1)\beta} r(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_0^A |(A-t)^{(\alpha-1)(1-\beta)p'} \rho(t)|^{-p'} dt\right)^{1/p} \leqslant c < +\infty$$

для всех $A > 0$, то оператор I^α_{0+} ограничен из $L_p(R^+_1; \rho)$ в $L_q(R^1_+; r)$.

В работе J.-O. Stromberg, R. L. Wheeden [1] найдены достаточные условия полиномиально-весовых оценок для многомерных дробных интегралов (см. далее § 29) и, в частности, для дробных интегралов (5.2), (5.3) на оси. Приведем, например, один из результатов для оператора I^α_+. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < 1/p - 1/q \leqslant \alpha$, $\beta = \alpha - 1/p + 1/q$, $Q(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\mu_k}$, $-\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < +\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \geqslant \beta$. Пусть еще

$$\rho(x) = |Q(x)|^p w(x), \quad r(x) = \left[|Q(x)|(1+|x|)^{-\beta} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{|x-x_k|}{1+|x-x_k|} \right)^{-\beta_k} \right]^q w(x)^{q/p},$$

где $\beta_k = \min(\mu_k, \beta)$, а неотрицательная измеримая функция $w(x)$ удовлетворяет так называемому условию Макенхоупта или условию A_p:

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-1/p'}dx\right)^{p-1}\leqslant c<+\infty,\quad 1<p<\infty,$$

где I—произвольный отрезок на R^1. Тогда оператор I_+^α ограничен из $L_p(R^1;\rho)$ в $L_q(R^1; r)$.

5.9. Теорема Харди—Литтлвуда 5.3 о действии оператора дробного интегрирования из L_p в L_q, $q=p/(1-\alpha p)$, распространена на пространства Орлича в работе R. O'Neil [2]. Пусть $L_M^*(R^1)$— пространство Орлича, порожденное N-функцией $M(u)$ (о пространствах Орлича см. в книге М. А. Красносельского, Я. Б. Рутицкого [1]). В статье R. O'Neil [2] показано, что если

$$1)\ \frac{uM'(u)}{M(u)}\geqslant p>1,\quad 2)\ \int_0^1\frac{M^{-1}(u)}{u^{1+\alpha}}\,du<\infty,$$

то оператор дробного интегрирования $I_\pm^\alpha$, $0<\alpha<1$, ограниченно действует из $L_M^*(R^1)$ в $L_C^*(R^1)$, где $C^{-1}(x)=\int_0^x M^{-1}(u)\,u^{-1-\alpha}\,du$. Несколько более слабое утверждение другим методом получено в работе R. Sharpley [1]. При условии 1) функция $C(x)$ является N-функцией (R. O'Neil рассматривал многомерный случай).

См. также работы И. В. Гельмана [1], А. И. Ясакова [1], где рассматривалось действие операторов типа потенциала в пространствах $L_M^*(\Omega)$, mes $\Omega<\infty$.

5.10. В работе С. П. Гейсберга [3] дробные производные Маршо $(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x)$, $0<\alpha<1$, $x\in R^1$, изучались на функциях $f(x)$, локально гельдеровских (порядка больше α), ограниченных и таких, что существует $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\int_{-N}^0 f(x)\,dx=c$. Для таких функций, в частности, показано, что $I_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha f\equiv f(x)-c$.

5.11. В работе A. Marchaud [1] введен и исследован объект более общий, чем тот, что был назван нами дробной производной Маршо, см. (5.80). Именно А. Маршо рассматривал (см. с. 348—351 его работы) конструкции с обобщенными конечными разностями:

$$f^\alpha(x)=\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{\sum\limits_{i=0}^{l}c_i f(x-k_i t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\quad l=[\alpha]+1,$$

где k_i—произвольные положительные возрастающие числа, коэффициенты c_i подчинены условиям $\sum\limits_{i=0}^{l}c_i k_i^j=0$, $j=0,1,\ldots,l-1$, а нормировочная постоянная равна $\gamma(\alpha)=\Gamma(-\alpha)\sum\limits_{i=0}^{l}c_i k_i^\alpha$ (в случае $\alpha=1,2,\ldots$ нужно перейти к пределу при $\alpha\to m=1,2,\ldots$). Показано, что если $f(x)=I_+^\alpha\varphi$, то дробная производная Лиувилля $\mathscr{D}_+^\alpha f$ совпадает с $f^\alpha(x)$ и тем самым не зависит от выбора k_i. При выборе $k_i=i$, $c_i=(-1)^i\binom{l}{i}$ выражение для $f^\alpha(x)$ совпадает с (5.80).

5.12. Так называемые разделенные разности $[x_1,\ldots,x_{n+1};f]=([x_2,\ldots,x_{n+1};f]-[x_1,\ldots,x_n;f])/(x_{n+1}-x_n)$, $[x;f]=f(x)$, в связи с дробным интегродифференцированием рассматривались в работе T. Popoviciu [1]. В ней, в частности, показано (с. 39), что если эти разности ограничены, то $f(x)$ имеет непрерывные дробные производные порядка $\alpha<n$.

5.13. В работе L. Gearhart [1], где рассматривалось дробное интегрирование на полуоси $(0,\infty)$ с точки зрения теории полугрупп, построены подпространства в $L_2(0,\infty)$,

инвариантные относительно левых сдвигов $(T_t f)(x) = f(x+t)$, $t > 0$, в которых оператор I_-^α ограничен. С этой целью введены аппроксимирующие операторы

$$W_\varepsilon^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\varepsilon t} T_t f dt, \quad \varepsilon > 0 \tag{9.4}$$

(ср. с модификацией (18.64) дробного интегрирования), унитарно эквивалентные теплицевым операторам на подпространствах Харди $H^2(R_+^2)$. На основании некоторых результатов Берлинга—Лакса, связанных с теплицевыми операторами и относящихся к подпространствам, инвариантным относительно сдвига, построена серия пространств $\hat{M} \subset L_2(0, \infty)$, в рамках которых существует сильный предел для W_ε^α. Рассмотрен также вопрос о совпадении этого предела с явной записью оператора I_-^α. В работе рассмотрен также предельный случай операторов чисто мнимого порядка $\alpha = i\eta$.

6.1. Имеется обобщение описания пространства $I^\alpha(L_p)$ на случай пространства $I^\alpha[L_p(\rho)]$ с общим весом, удовлетворяющим так называемому условию Макенхоупта—Видена. Оно дано в работе K. F. Andersen [1], см. его формулировку в § 29, п. 2°, 26. 11.

6.2. В работе С. Г. Самко, А. Ф. Чувенкова [1] теорема 6.2 об описании дробных интегралов от функций из L_p распространена с учетом результата R. O'Neil (см. выше 5.9) на пространства Орлича.

Пусть выполнены условия 1), 2) из 5.9 и функции $M(x)$, $C(x)$ удовлетворяют Δ_2-условию (см. книгу М. А. Красносельского, Я. Б. Рутицкого [1]). Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_M^*)$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_C^*(R^1)$ и чтобы $(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f)(x)$ сходилась по норме $L_M^*(R^1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Укажем, что $C(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда существует постоянная $a > 0$ такая, что

$$\int_0^x \frac{M^{-1}(u)}{u^\alpha} \frac{du}{u} \leqslant a \frac{M^{-1}(u)}{u^\alpha}, \quad x \geqslant x_0.$$

6.3. Пусть $a * \varphi$—оператор свертки. Он ограниченно действует:

а) из $L_r(R^1)$, $1 \leqslant r < p$, в $I^\alpha(L_p)$, если $a(x) \in I^\alpha(L_q)$, $1/q = 1 - 1/r + 1/p$;

б) из $L_p(R^1)$ в $I^\alpha(L_p)$, если $a(x) \in I_+^\alpha(L_1)$ или $a(x) \in I_-^\alpha(L_1)$;

в) из $I^\alpha(L_r)$ в $I^\alpha(L_p)$, если $1 < r \leqslant p < 1/\alpha$ и $a(x) \in L_q(R^1)$, $1/q = 1 - 1/r + 1/p$ (С. Г. Самко [14; 27, с. 8]). Это утверждение выводится из равенства

$$a * \varphi = I_+^\alpha (\mathbf{D}_+^\alpha a * \varphi),$$

справедливость которого нетрудно получить при сформулированных условиях (учесть его справедливость на «хороших» функциях и ограниченность операторов в левой и правой частях в соответствующих пространствах).

6.4. Пусть $\omega_r(f, t)$— интегральный модуль непрерывности (6.31) функции $f(x)$ на полуоси R_+^1. Имеет место следующее обобщение оценки (6.39):

$$\omega_r(I_{0+}^\alpha \varphi, t) \leqslant c \|\varphi\|_p t^{\alpha+1/r-1/p}, \quad p \leqslant r \leqslant p/(1-\alpha p), \tag{9.5}$$

где $1 < p < 1/\alpha$. Эта оценка является частным случаем общей оценки

$$\omega_r(K\varphi, t) \leqslant \omega_s(k, t)\|\varphi\|_p, \quad 1/p + 1/s = 1 + 1/r$$

для оператора $K\varphi = \int_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt$ (Н. К. Карапетянц).

7.1. Формула (7.1) преобразования Фурье дробного интеграла, доказанная для $\varphi \in L_1(R^1)$, распространяется на функции $\varphi \in L_p(R^1)$, $1 < p \leqslant 2$, $1 < p < 1/\alpha$, если сходимость интеграла Фурье $\mathcal{F}\varphi$ в (7.1) понимать по норме $L_{p'}$, а сходимость $\mathcal{F}(I_\pm^\alpha \varphi)$— по норме $L_{q'}$ (в соответствии с теоремой Хаусдорфа—Юнга), см. G. O. Okikiolu [2]; в этой работе рассматривался риссов потенциал по R^1. Доказательство из [2] можно упростить, привлекая обобщенные функции над основным пространством Φ, о котором см. в § 8.

7.2. В книге D. V. Widder [2, с. 73, 74] доказано следующее утверждение, примыкающее к теореме 7.2.

Теорема 9.1. *Пусть* $\varphi(x) \in L_1(0, b)$ *для любого* $b > 0$ *и существует интеграл* $\int_0^\infty e^{-p_0 t} |\varphi(t)|\, dt$. *Тогда формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{(L\varphi)(p)}{p^\alpha} e^{px} dp = \begin{cases} (I_{0+}^\alpha \varphi)(x), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

справедлива при $\alpha \geqslant 1$, $\gamma > p_0$, $\gamma > 0$ *или при* $0 < \alpha \leqslant 1$, *если еще функция* $\varphi(u)$ *имеет ограниченную вариацию в окрестности точки* $u = x$, $x \geqslant 0$.

7.3. Пусть $S_p\varphi = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{(t+x)^p}$ — *преобразование Стилтьеса*. Справедлива формула $I_-^{p-1} S_p \varphi = S_1 \varphi$. В работе D. V. Widder [1] с помощью дробного интеграла (5.3) получена формула обращения обобщенного преобразования Стилтьеса

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{(x+t)^p} = f(x), \quad p > 0,$$

с комплексной функцией $\alpha(t)$, имеющей ограниченное изменение на любом отрезке $[0, R]$, $R > 0$, действительной оси (см. И. П. Натансон [1, с. 202]).

7.4. В случае функций $f(x) \in L_p(R_+^1)$ вопрос о существовании дробных производных $\mathbf{D}_+^\alpha f \in L_p(R_+^1)$ был охарактеризован в терминах преобразования Лапласа в работе H. Berens, U. Westphal [1].

7.5. Пусть $I_{0+}^\alpha \varphi$, $I_-^\alpha \varphi$—дробные интегралы (5.1), (5.3), $W_{k,m}(x)$—функция Уиттекера. R. S. Varma [1] ввел интегральное преобразование

$$(W_{k,m}\varphi)(x) = x \int_0^\infty e^{-xt/2} (xt)^{m-1/2} W_{k,m}(xt)\, f(t)\, dt, \tag{9.6}$$

которое обобщает интегральное преобразование Лапласа (1.119), получающееся из него при $k + m = 1/2$. Такое преобразование впоследствии было названо *преобразованием Варма*. Установлено, что преобразование Лапласа от функций $x^{-\lambda} (I_{0+}^\alpha \varphi)(x)$ и $x^{-\lambda-1} (I_-^\alpha \varphi)(1/x)$ является преобразованием Варма (S. L. Kalla [1]), а от функций $(I_{0+}^\lambda \varphi)(x^2)$ и $x^{2\lambda-2} (I_-^\lambda \varphi)(x^{-2})$ — преобразованием Мейера, см. § 1, п. 4° (S. L. Bora, R. K. Saxena [1], B. Martić [1, 2]). Интегральные преобразования Варма и Стилтьеса (см. 7.3) и общие интегральные преобразования (1.101) от дробных интегралов рассмотрены в работах S. L. Kalla [1, 5, 8].

В работе K. J. Srivastava [1] показано, что *обобщенное преобразование Мейера*

$$\tilde{W}_{k,m}\varphi(x) = x \int_0^\infty (xt)^{-k-1/2}\, e^{-xt/2} W_{k+1/2,m}(xt)\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= x^{-m-k} (W_{k+1/2,m}\, t^{-k-m} \varphi(t))(x) \tag{9.7}$$

от функций $x^{\alpha/2+k-m} (I_{0+}^\alpha\, t^{m-k} \varphi(t))(x)$ и $x^\alpha (I_{m-k+\alpha/2,\alpha}^+ \varphi)(x)$, где $I_{\eta,\alpha}^+$ — оператор (9.2), является преобразованием вида (9.7).

В работе V. M. Bhise [1] введено интегральное преобразование

$$(G\varphi)(x) = x \int_0^\infty G_{m,m+1}^{m+1,0}\left(xt \middle| \begin{matrix} \eta_1+\alpha_1, \ldots, \eta_m+\alpha_m \\ \eta_1, \ldots, \eta_m, \rho \end{matrix}\right) \varphi(t)\, dt \tag{9.8}$$

с G-функцией Мейера (1.95) в ядре, называемое *преобразованием Мейера—Лапласа* и сводящееся при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$, $\alpha_m = -1/2 - m - k$, $\eta_m = 2m$, $\rho = 0$ к преобразованию Варма (9.6), а при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$, $\alpha_m = \rho = -m-k$, $\eta_m = m-k$—к обобщенному преобразованию Мейера (9.7). В работах S. L. Mathur [1, 2] найдены интегральные преобразования (9.8) от функций $x^{-\mu-\nu} (I_{0+}^\alpha\, t^\nu \varphi(t))(x)$ и $(I_{\eta,\alpha}^+ \varphi)(x)$.

7.6. Ряд работ (S. L. Mathur [2], S. L. Rakesh [1], B. Singh [2]) посвящен нахождению интегральных преобразований специального типа от дробных интегралов. В работе S. L. Mathur [2] найдены интегральные преобразования Мейера (см. § 1, п. 4°) и преобразование $x^{-1}\int_0^\infty {}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; -t/x)\,\varphi(t)\,dt$ с гипергеометрической функцией Гаусса (1.72) в ядре от функций $x^\nu (I^\alpha_{0+}\varphi(\sqrt{t}))(x^2)$ и $x^\nu (I^\alpha_{0+}\varphi)(x)$ соответственно и даны приложения к вычислению дробных интегралов от H-функции Фокса. В работе B. Singh [2] вычислено интегральное преобразование с функцией Струве $\mathbf{H}_\nu(x)$ в ядре (см. § 1, п. 4°) от функции $x^{\nu+1/2}(I^\mu_{0+}\varphi)(x^2)$. В работе S. L. Rakesh [1] вычислено интегральное преобразование с H-функцией Фокса в ядре, введенное в статье K. C. Gupta, P. K. Mittal [1], от дробных интегралов (5.2), (5.3).

7.7. Пусть $F(s_1, \ldots, s_n) = L_n f$ — n-мерное преобразование Лапласа, а запись $G(s) = A_n F(s_1, \ldots, s_n)$ означает, что $G(s)$ есть одномерное преобразование Лапласа функции $f(t, t, \ldots, t)$. В связи с задачами теории нелинейных систем в работе J. Conlan, E. L. Koh [1] показано, что если

$$F(s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{s_m^{p+1}} F_1(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, s_{m+1}, \ldots, s_n),$$

то функции $G(s) = A_n F(s_1, \ldots, s_n)$ и $G_1(s) = A_{n-1}F_1(s_1, \ldots, s_{m-1}, s_{m+1}, \ldots, s_n)$ связаны друг с другом операцией дробного интегродифференцирования: $G(s) = \frac{(-1)^{[p]}}{\Gamma(p+1)} \mathcal{D}^p_{0+} G_1(s)$, см. также работу E. L. Koh, J. Conlan [1].

7.8. В работе C. V. L. Smith [1] с помощью дробных интегралов (5.3) и дробных производных (5.6) установлены связи между преобразованиями Лапласа—Стилтьеса $\int_0^\infty e^{-xt} t^\rho\, d\alpha(t)$ с $\rho > 0$ и $\rho = 0$ и получены формулы обращения для них. Здесь $\alpha(t)$ — вещественнозначная функция с ограниченным изменением на любом интервале $(0, R)$, $R > 0$, действительной оси, удовлетворяющая условиям нормализации: $\alpha(0+) = 0$, $\alpha(t) = 2^{-1}[\alpha(t+0) + \alpha(t-0)]$.

8.1. Пространство Φ, рассмотренное в § 8, п. 2°, плотно в $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$: для любой функции $f \in L_p$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi(x) \in \Phi$ такая, что $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. Это доказано П. И. Лизоркиным [5] с помощью усреднений, названных им вполне уравновешенными. В работе С. Г. Самко [29] дано другое доказательство этого утверждения.

8.2. В работах W. Lamb [2, 3] развит подход к рассмотрению дробного интегрирования $I^\alpha_\pm$ обобщенных функций на прямой. Исследование основано на построенной автором (W. Lamb [1]) теории дробных степеней операторов в пространствах Фреше. Показано, что операторы $I^\alpha_\pm$ являются дробными степенями операторов $I^1_\pm$, изучаемых в пространствах

$$\mathcal{D}_{p,\mu} = \left\{\varphi:\ \varphi \in C^\infty(R^1),\ \frac{d^k}{dx^k}\left[e^{-\mu x}\varphi(x)\right] \in L_p(R^1),\ k = 0, 1, 2, \ldots\right\},$$

и что оператор $I^\alpha_\pm$ осуществляет гомеоморфизм пространства $\mathcal{D}_{p,\mu}$ на себя, если $\mu > 0$ в случае знака $+$ и если $\mu < 0$ в случае знака $-$.

8.3. В работах K. Skórnik [1, 2] рассмотрено дробное интегрирование $\int_0^x e^{x^2-t^2} \times \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x-t)\,dt$ и соответствующее дробное дифференцирование в классах обобщенных функций. Основное внимание уделено построению таких пространств обобщенных функций, в которых дробное дифференцирование однозначно обратимо. Чтобы «отсеять» нарушающие однозначность обобщенные функции, вводятся классы обобщенных функций, обращающихся в точке $x=0$ в нуль в определенном смысле (по Лоясевичу и др.).

8.4. Пусть $F_{p,\mu}$ — пространство основных функций, отмеченное в конце п. 4° § 8 (пространство А. МакБрайда (A. C. McBride [2, 3])). В работе G. Ahuja [1] рассмотрено действие в $F_{p,\mu}$ операторов Эрдейи типа (9.3) и более общих операторов.

№ п.п.	$\varphi(x),\ x>a$	$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x),\ x>a,\ \alpha\in\mathbf{C}$
1	$(x-a)^{\beta-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}$, $\operatorname{Re}\beta>0$
2	$(x\pm c)^{\gamma-1}$	$\dfrac{(a\pm c)^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}\,{}_2F_1\left(1,\ 1-\gamma;\ \alpha+1;\ \dfrac{a-x}{a\pm c}\right)$, $a\pm c>0,\ \gamma\in\mathbf{C}$
3	$(x-a)^{\beta-1}\,(b-x)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{1-\gamma}}\,{}_2F_1\left(\beta,\ 1-\gamma;\ \alpha+\beta;\ \dfrac{x-a}{b-a}\right)$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma\in\mathbf{C},\ a<x<b$
4	$\dfrac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{\alpha}\,(b-x)^{\beta}}$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ a<x<b$
5	$(x-a)^{\beta-1}\,(x\pm c)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a\pm c)^{1-\gamma}}\,{}_2F_1\left(\beta,\ 1-\gamma;\ \alpha+\beta;\ \dfrac{a-x}{a\pm c}\right)$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma\in\mathbf{C},\ a\pm c>0$
6	$\dfrac{(x-a)^{\beta-1}}{(x\pm c)^{\alpha+\beta}}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a\pm c)^{\alpha}\,(x\pm c)^{\beta}}$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ a\pm c>0$
7	$\dfrac{(x-a)^{\alpha}}{(x\pm c)^{\alpha+1/2}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\dfrac{1}{\sqrt{x\pm c}}\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{a\pm c}+\sqrt{x\pm c}}\right)^{2\alpha}$, $\operatorname{Re}\alpha>-1,\ a\pm c>0$
8	$e^{\lambda x}$	$\dfrac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}}\gamma(\alpha,\ \lambda x-\lambda a)=e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha}\times$ $\times E_{1,\ \alpha+1}(\lambda x-\lambda a)$
9	$(x-a)^{\beta-1}\,e^{\lambda x}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)\,e^{\lambda a}}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,{}_1F_1(\beta;\alpha+\beta;\lambda x-\lambda a),\ \operatorname{Re}\beta>0$
10	$(x-a)^{\alpha-1}\,e^{2i\lambda x}$	$\sqrt{\pi}(2\lambda)^{1/2-\alpha}(x-a)^{\alpha-1/2}\,e^{i\lambda(x+a)}J_{\alpha-1/2}(\lambda x-\lambda a),\ \operatorname{Re}\alpha>0$
11	$\left\{\begin{matrix}\sin\lambda(x-a)\\ \cos\lambda(x-a)\end{matrix}\right\}$	$\dfrac{i^{-(1\pm1)/2}}{2\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}[{}_1F_1(1;\ \alpha+1;\ i\lambda(x-a))\mp$ $\mp\,{}_1F_1(1;\ \alpha+1;\ -i\lambda(x-a))]$
12	$\left\{\begin{matrix}\sin\lambda\sqrt{x-a}\\ \operatorname{sh}\lambda\sqrt{x-a}\end{matrix}\right\}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{1/2-\alpha}(x-a)^{(2\alpha+1)/4}\left\{\begin{matrix}J_{\alpha+1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\\ I_{\alpha+1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\end{matrix}\right\}$
13	$(x-a)^{\beta-1}\left\{\begin{matrix}\sin\lambda(x-a)\\ \cos\lambda(x-a)\end{matrix}\right\}$, $\operatorname{Re}\beta>-(1\pm1)/2$	$\dfrac{i^{-(1\pm1)/2}}{2}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[{}_1F_1(\beta;\alpha+\beta;$ $i\lambda(x-a))\mp{}_1F_1(\beta;\ \alpha+\beta;\ -i\lambda(x-a))]$
14	$(x-a)^{\alpha-1}\left\{\begin{matrix}\sin 2\lambda(x-a)\\ \cos 2\lambda(x-a)\end{matrix}\right\}$, $\operatorname{Re}\alpha>-(1\pm1)/2$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x-a}{2\lambda}\right)^{\alpha-1/2}\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda x-\lambda a)\\ \cos(\lambda x-\lambda a)\end{matrix}\right\}\times$ $\times J_{\alpha-1/2}(\lambda x-\lambda a)$
15	$(x-a)^{-1/2}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda\sqrt{x-a}\\ \operatorname{ch}\lambda\sqrt{x-a}\end{matrix}\right\}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{1/2-\alpha}(x-a)^{(2\alpha-1)/4}\times$ $\times\left\{\begin{matrix}J_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\\ I_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\end{matrix}\right\}$

№ п.п.	$\varphi(x),\ x>a$	$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x),\ x>a,\ \alpha\in\mathbf{C}$
16	$\ln(x-a)$	$\dfrac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\ln(x-a)+\psi(1)-\psi(\alpha+1)]$
17	$(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,[\psi(\beta)-\psi(\alpha+\beta)+\ln(x-a)],$ $\operatorname{Re}\beta>0$
18	$(x-a)^{\beta-1}\ln^{m}(x-a)$	$(x-a)^{\alpha+\beta-1}\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\dfrac{d^{k}}{d\beta^{k}}\left(\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\times$ $\times\ \ln^{m-k}(x-a),\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad m=1,\ 2,\ \ldots$
19	$(x-a)^{\nu/2}J_{\nu}(\lambda\sqrt{x-a})$	$(2/\lambda)^{\alpha}\,(x-a)^{(\alpha+\nu)/2}\ J_{\alpha+\nu}(\lambda\sqrt{x-a}),$ $\operatorname{Re}\nu>-1$
20	$(x-a)^{(2\alpha-3)/4}Y_{\alpha-1/2}(2\lambda\times$ $\times\sqrt{x-a})$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x-a}{\lambda}\right)^{\alpha-1/2}J_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\times$ $\times\ Y_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a}),\ \operatorname{Re}\alpha>0$
21	$(x-a)^{(2\alpha-3)/4}\times$ $\times K_{\alpha-1/2}(2\lambda\sqrt{x-a})$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x-a}{\lambda}\right)^{\alpha-1/2}I_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\times$ $\times\ K_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a}),\ \operatorname{Re}\alpha>0$
22	$(x-a)^{\beta-1}{}_2F_1(\mu,\ \nu;\ \beta;\ \lambda(x-a))$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,{}_2F_1(\mu,\ \nu;\ \alpha+\beta;\ \lambda x-\lambda a),\ \operatorname{Re}\beta>0$
23	$(x-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}((x-a)^{\mu})$	$(x-a)^{\alpha+\beta-1}E_{\mu,\alpha+\beta}((x-a)^{\mu}),\ \operatorname{Re}\mu>0,$ $\operatorname{Re}\beta>0$

ТАБЛИЦА 9.2

№ п.п.	$\varphi(x),\ x\in R^1$	$(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x),\ x\in R^1,\ \alpha\in\mathbf{C}$
1	$(b-ax)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\,a^{\alpha}}(b-ax)^{\alpha+\gamma-1},$ $a>0,\quad ax<b,\quad \operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$
2	$\dfrac{1}{(1\pm ix)^{\mu}}$	$\dfrac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)}\,e^{\pm\alpha\pi i/2}\,\dfrac{1}{(1\pm ix)^{\mu-\alpha}},$ $\operatorname{Re}(\mu-\alpha)>0,\qquad \mu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$
3	$(x-a)_{+}^{\beta-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)_{+}^{\alpha+\beta-1},\qquad \operatorname{Re}\beta>0$
4	$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha}\,e^{\lambda x},\quad \operatorname{Re}\lambda>0$
5	$\left\{\begin{matrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{matrix}\right\}$	$\lambda^{-\alpha}\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda x-\alpha\pi/2)\\ \cos(\lambda x-\alpha\pi/2)\end{matrix}\right\},$ $\lambda>0,\quad \operatorname{Re}\alpha<1$
6	$e^{\lambda x}\left\{\begin{matrix}\sin\gamma x\\ \cos\gamma x\end{matrix}\right\}$	$\dfrac{e^{\lambda x}}{(\lambda^2+\gamma^2)^{\alpha/2}}\left\{\begin{matrix}\sin(\gamma x-\alpha\varphi)\\ \cos(\gamma x-\alpha\varphi)\end{matrix}\right\},$ $\varphi=\operatorname{arctg}(\gamma/\lambda),\quad \operatorname{Re}\lambda>0,\quad \gamma>0$

ТАБЛИЦА 9.3

№ п. п.	$\varphi(x)$, $x \in R^1$	$(I_-^\alpha \varphi)(x)$, $x \in R^1$, $\alpha \in \mathbf{C}$
1	$x^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\, x^{\alpha+\gamma-1}$, $\operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$
2	$(ax+b)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\, a^\alpha}\,(ax+b)^{\alpha+\gamma-1}$, $\operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$, $\lvert\arg(a/b)\rvert<\pi$
3	$\dfrac{1}{[(x+a)(x+b)]^{\alpha+1/2}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\,\dfrac{[(x+a)(x+b)]^{-1/2}}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})^{2\alpha}}$, $\operatorname{Re}\alpha>-1$
4	$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$
5	$e^{-\lambda\sqrt{x}}$	$2^{\alpha+1/2}\,\pi^{-1/2}\,a^{1/2-\alpha}\,x^{(2\alpha+1)/4}\,K_{\alpha+1/2}(\lambda\sqrt{x})$, $\operatorname{Re}\lambda>0$
6	$\begin{Bmatrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{Bmatrix}$	$\lambda^{-\alpha}\begin{Bmatrix}\sin(\lambda x+\alpha\pi/2)\\ \cos(\lambda x+\alpha\pi/2)\end{Bmatrix}$, $\lambda>0$, $\operatorname{Re}\alpha<1$
7	$\begin{Bmatrix}\sin\lambda\sqrt{x}\\ \cos\lambda\sqrt{x}\end{Bmatrix}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^{\alpha-1/2} x^{(2\alpha+1)/4}\begin{Bmatrix}Y_{-\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x})\\ J_{-\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x})\end{Bmatrix}$, $\lambda>0$, $\operatorname{Re}\alpha<1/2$
8	$e^{-\lambda x}\begin{Bmatrix}\sin\gamma x\\ \cos\gamma x\end{Bmatrix}$	$\dfrac{e^{-\lambda x}}{(\lambda^2+\gamma^2)^{\alpha/2}}\begin{Bmatrix}\sin(\gamma x+\alpha\varphi)\\ \cos(\gamma x+\alpha\varphi)\end{Bmatrix}$, $\gamma>0$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\gamma/\lambda)$
9	$x^{-\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{x})$	$(2/\lambda)^\alpha\, x^{(\alpha-\nu)/2} J_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})$, $\lambda>0$, $\operatorname{Re}(2\alpha-\nu)<3/2$
10	$x^{-\nu/2}\begin{Bmatrix}Y_\nu(\lambda\sqrt{x})\\ K_\nu(\lambda\sqrt{x})\end{Bmatrix}$	$\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^\alpha x^{(\alpha-\nu)/2}\begin{Bmatrix}Y_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})\\ K_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(2\alpha-\nu)<3/2\\ \operatorname{Re}\lambda>0\end{Bmatrix}$

8.5. Интересное развитие подхода Л. Шварца, связанное с разностями дробного порядка, дано в ряде работ A. Brédimas [1—5]. Оператор дробного дифференцирования вводится в этих работах как

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k\to 0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh)/h^\alpha \qquad (9.9)$$

(см. о таком подходе в случае обычных функций в § 20). Выяснено, что при надлежащем толковании этого предела сужение оператора (9.9) на подпространство шварцевых обобщенных функций, сосредоточенных на полуоси R^1_+, совпадает с определением дробного интегрирования (порядка $-\alpha$) по Л. Шварцу, изложенным в § 8, п. 3°.

8.6. В работе A. C. McBride [7] с помощью операторов дробного интегродифференцирования Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) введены дробные степени обыкновенных дифференциальных операторов

$$L = x^{a_1}\mathcal{D}\, x^{a_2}\mathcal{D}\, x^{a_3} \ldots x^{a_n}\mathcal{D}\, x^{a_{n-1}} I, \quad \mathcal{D} = d/dx, \qquad (9.10)$$

и рассмотрены их свойства в пространствах обобщенных функций $F_{p\,\mu}$ (см. § 8, п. 4°).

Индексные законы $I^{\alpha}\,I^{\beta}=I^{\alpha+\beta}$, $I^{\alpha}\,x^{-\alpha-\beta}\,I^{\beta}=x^{-\beta}\,I^{\alpha+\beta}\,x^{-\alpha}$ для дробных интегралов и производных (относительно второго см. § 10) перенесены в работе A. C. McBride [8] на операторы (9.10) и операторы $L'=(-1)^n x^{a_n+1}\mathcal{D}\,x^{a_n}\ldots x^{a_2}\mathcal{D}\,x^{a_1}I$, $\mathcal{D}=d/dx$, а в работе A. C. McBride [9]—на операторы T^{α}, определяемые с помощью преобразования Меллина (1.112) соотношением

$$(\mathfrak{M}T^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{h(x)}{h(x+\alpha\gamma)}\,(\mathfrak{M}\varphi)(x+\alpha\gamma),$$

где h — фиксированная функция; γ — фиксированное число.

О «дробном исчислении» операторов $T\alpha$ см. также в обзоре A. C. McBride [11], где можно найти и другие ссылки.

3°. Таблицы дробных интегралов и производных. Значения дробных интегралов различных специальных и элементарных функций можно найти в справочниках Г. Бейтмена, А. Эрдейи [4, гл. 13] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1—3], причем в последнем такие формулы специально не выделялись как формулы дробного интегрирования, а приведены там в ином виде. Относительно небольшие таблицы содержатся также в работах T. P. Higgins. [5], K. B. Oldham, J. Spanier [1], R. Tremblay [1, с. 91—92, 426—433], J. L. Lavoie, R. Trembiay, T. J. Osler [1], J. L. Lavoie, T. J. Osler, R. Tremblay [1], K. Nishimoto [6], T. J. Osler [1, 3]. Отметим также, что большое число дробных интегралов и производных от различных элементарных и не элементарных функций было вычислено еще А. В. Летниковым [6—8, 10, 11], 1882—1888 гг. Многие такие формулы можно получить методом, изложенным в работах О. И. Маричева [10, 11].

Табл. 9.1—9.3 в отличие от указанных содержат не только дробные интегралы, но и дробные производные. Формулы из этих таблиц могут быть получены при условии $\operatorname{Re}\alpha>0$, а затем распространены на $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$ методом аналитического продолжения по параметру α. Отметим еще, что условие $\operatorname{Re}\beta>0$, связанное со сходимостью интеграла на конце $x=a$, также можно опустить, если оператор I^{α}_{a+} понимать в смысле интегрирования по петле Похгаммера (подробнее об этом см. в § 22). Некоторые формулы объединены в два уровня так же, как в справочниках А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1—3].

ГЛАВА 3

Дальнейшие свойства дробных интегралов и производных

В настоящей главе продолжается изучение свойств дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля на конечном и бесконечном промежутках вещественной оси. Сначала рассматриваются вопросы, играющие важную роль далее в главах 6, 7 при исследовании интегральных уравнений первого рода: композиции дробных интегралов и производных со степенно-экспоненциальными весами, связи между дробными и сингулярными интегралами, линейные комбинации левосторонних и правосторонних дробных интегралов. Далее дается описание дробных интегралов от функций из L_p и из весовых гельдеровских пространств $H_0^\lambda(\rho)$ на отрезке и изучаются различные аспекты дробного интегродифференцирования в теории функций действительного переменного (действие операторов дробного интегродифференцирования из липшицевых классов H_p^λ и $\tilde{H}_p^\lambda$, дробное дифференцирование абсолютно непрерывных функций, неравенства для дробных интегралов и производных, связи дробного интегродифференцирования с вопросами суммируемости рядов и интегралов и др.). В заключение приводятся обобщения классического правила Лейбница о производной произведения двух функций и выводятся асимптотические разложения дробных интегралов вблизи концевых точек промежутка.

§ 10. ВЕСОВЫЕ ФОРМУЛЫ КОМПОЗИЦИЙ

В настоящем параграфе рассматриваются композиции операторов дробного интегродифференцирования со степенными, экспоненциальными и степенно-экспоненциальными весами в пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$, и исследуется вопрос о коммутативности таких операторов. Основное внимание уделяется композициям операторов вида $x^\nu I_{0+}^\alpha x^\delta$, при изучении которых раскрывается многовариантная зависимость свойств этих композиций, в частности областей определения и значения, от величин параметров. Поскольку интегралы чисто мнимого порядка на всем пространстве L_1 не определены, а там, где определены (см. § 2, п. 4°), не ограничены, то случаи, связанные с такими интегралами, здесь, как правило, не рассматриваются. Для сокращения записей в ряде формул используются следующие обозначения.

Пусть комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ такие, что существует только одно α_j, для которого $\operatorname{Re}\alpha_j = \min(\operatorname{Re}\alpha_1, \ldots, \operatorname{Re}\alpha_n, \operatorname{Re}\alpha_{n+1})$. Тогда положим $\alpha_{n+1} = 0$ и введем функцию

$$m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re}\alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ -\alpha_j, & \text{если существует } \alpha_j, \text{ для которого} \\ \operatorname{Re}\alpha_j < \min(0, \operatorname{Re}\alpha_1, \ldots, \operatorname{Re}\alpha_{j-1}, \operatorname{Re}\alpha_{j+1}, \ldots, \operatorname{Re}\alpha_n) \end{cases} \tag{10.1}$$

(если существуют α_j, α_k такие, что $\alpha_j \neq \alpha_k$, но $\operatorname{Re}\alpha_j = \operatorname{Re}\alpha_k = \min(0, \operatorname{Re}\alpha_1, \ldots, \operatorname{Re}\alpha_n)$, то функция $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ не определяется);

$$L_{p,*}(a, b) = \begin{cases} L_p(a, b) & \text{при } p > 1, \ 0 \leqslant a < b \leqslant \infty, \\ L_1((a, b); |\ln x| + 1) & \text{при } p = 1, \ 0 \leqslant a < b \leqslant \infty; \end{cases} \tag{10.2}$$

$$I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_p(0, b)) = \begin{cases} L_p(0, b), & \operatorname{Re}\alpha > 0, \\ I_{0+}^{-\alpha}(L_{p,*}(0, b)), & \operatorname{Re}\alpha < 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

Символ $I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}(0, b))$ определим через правую часть (10.3), в которой поменяем местами L_p и $L_{p,*}$.

Символы $I_{-}^{m(\alpha)*}(L_p((a, \infty); x^q))$ и $I_{-}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}((a, \infty); x^q))$ введем аналогично двум предыдущим, но по отношению к пространствам $L_p(a, \infty)$ с весом x^q (при $p > 1$) или $x^q(|\ln x| + 1)$ (при $p = 1$).

Отметим, что $L_{1,*}(a, b) \subset L_1(a, b)$ (причем $L_{1,*}(a, b) = L_1(a, b)$, если $0 < a < b < \infty$) и, например, $x^{-1}\ln^{-2} x \in L_1(0, b)$, но $x^{-1}\ln^{-2} x \notin L_{1,*}(0, b)$.

1°. Композиции двух односторонних интегралов со степенными весами. Как отмечалось в § 2, для операторов дробного интегродифференцирования выполняется полугрупповое свойство (2.65), которое приводит к формулам

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x), \quad I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x), \tag{10.4}$$

$$I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f(x), \quad I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x). \tag{10.5}$$

Исходя из теоремы 2.5 и замечания 2.3, несложно указать условия их справедливости, которые можно свести в следующую теорему.

Теорема 10.1. *Пусть α и β — такие комплексные числа, что определена функция $m(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$ (соответственно $m(\alpha, \alpha+\beta)$). Тогда в классах функций $I_{a+}^{m(\alpha,\beta,\alpha+\beta)}(L_p(a, b))$ и $I_{b-}^{m(\alpha,\beta,\alpha+\beta)}(L_p(a, b))$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \leqslant p < \infty$ (соответственно $I_{a+}^{m(\alpha,\alpha+\beta)}(L_p(a, b))$ и $I_{b-}^{m(\alpha,\alpha+\beta)}(L_p(a, b))$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \leqslant p < \infty$) имеют место первые из формул (10.4) и (10.5) (соответственно вторые из формул (10.4) и (10.5)). Формулы (10.5) сохраняют силу и при $b = +\infty$, если пространство $L_p(a, b)$ заменить на весовое пространство $L_p((a, \infty); x^{p(M+1)-2})$, где $M = m(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \alpha+\beta, -\alpha-\beta)$.*

Замечание 10.1. Если функция $m(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$ (соответственно $m(\alpha, \alpha+\beta)$) не определена, то утверждения теоремы сохраняют силу, если классы допускаемых функций $f(x)$ соответственно сузить условиями существования суммируемых производных порядка $\mathcal{D}^{-\gamma_j} f$, где γ_j те две или четыре из точек 0, α, β, $\alpha+\beta$ (две или три из точек 0, α, $\alpha+\beta$), которые находятся на прямой $\{\gamma: \operatorname{Re}\gamma = \min(0, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}(\alpha+\beta))\}$ (соответственно $\{\gamma: \operatorname{Re}\gamma = \min(0, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(\alpha+\beta))\}$).

Доказательство. Утверждения теоремы 10.1 и замечания 10.1 являются прямыми следствиями теорем 2.4, 2.5 и замечания 2.3 с учетом того, что на конечном отрезке $L_p(a, b) \subset L_1(a, b)$ при $p > 1$, а также с

учетом обозначения (10.1), свойства $I_{a+}^{0}(L_p(a, b)) = L_p(a, b)$ и возможности замен переменных вида $x = a + b - y$ при переходе от операторов I_{a+}^{α} к операторам I_{b-}^{α} при $b < \infty$. Для случая $b = +\infty$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 10.6 и формулы (10.6) после замен x на x^{-1} и $f(x)$ на $x^{-\alpha-\beta-1}f(x^{-1})$, а также из обозначения (10.1).

Из вторых формул (10.5) при $b=\infty$ и (10.4) при $a=0$ после указанных замен получаются следующие соотношения с весовыми множителями:

$$x^{\alpha} I_{0+}^{\beta} x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} f(x) = I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(x) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(x), \tag{10.6}$$

$$x^{\alpha} I_{-}^{\beta} x^{-\alpha-\beta} I_{-}^{\alpha} x^{\beta} f(x) = I_{-}^{\alpha} I_{-}^{\beta} f(x) = I_{-}^{\alpha+\beta} f(x). \tag{10.7}$$

Поэтому естественно вначале рассмотреть вопрос о свойствах и действии композиций двух операторов вида $x^{\nu} I_{0+}^{\alpha} x^{\delta}$ (здесь и далее множители x^{ν} и x^{δ} означают операторы умножения на функции x^{ν} и x^{δ} в указанном порядке). Для более точного описания пространства, куда действуют такие композиции, нам понадобится следующая

Лемма 10.1. *Пусть* $\psi(x) \in L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $p(1 + \operatorname{Re}\mu) > 1$, *и* $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$. *Тогда для того чтобы* $\psi(x)$ *была представима в виде* $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x)$, *где* $f(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_p(0, b))$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(x)$ *была представима в виде* $\psi(x) = x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} g(x)$, *где* $g(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}(0, b))$, *или в виде* $\psi(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^{\alpha} x^{\varepsilon} g_1(x)$, *где* $g_1(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_p(0, b))$, $p(1 + \operatorname{Re}\varepsilon) > 1$. *Из указанных классов функций операторы* $I_{0+}^{\alpha} x^{\mu}$, $x^{\mu} I_{0+}^{\alpha}$ *и* $x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^{\alpha} x^{\varepsilon}$ *при* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *ограниченно действуют на пространство* $L_p((0, b); x^{-p(\alpha+\mu)})$.

Доказательство. Случай $\operatorname{Re}\alpha > 0$. I часть. *Необходимость.* Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x)$, $f(x) \in L_p(0, b)$, $1 \leqslant p < \infty$. Покажем, что существует функция $g(x) \in L_{p,*}(0, b)$, для которой выполняется соотношение

$$I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x) = x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} g(x). \tag{10.8}$$

В качестве такой функции возьмем функцию, получаемую из (10.8) применением к обеим частям (10.8) оператора $I_{0+}^{-\alpha} x^{-\mu}$, и запишем ее в виде $g(x) = \dfrac{d}{dx}(xX(x))$, где $X(x) = (Xf)(x) = (x^{-1} I_{0+}^{1-\alpha} x^{\alpha})(x^{-\mu-\alpha} I_{0+}^{\alpha} x^{\mu}) f(x)$. Тогда из неравенства (5.46′), дважды примененного к операторам, заключенным в круглые скобки, следует, что оператор X ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$, если выполняются условия $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $p(1 + \operatorname{Re}\mu) > 1$, $1 \leqslant p < \infty$. Значит, если $f(x) \in L_p(0, b)$, то и функция $X(x) = x^{-1} I_{0+}^{1} g(x) \in L_p(0, b)$. В случае $p > 1$ отсюда (см. также лемму 3.2, (3.15)) вытекает, что $g(x) \in L_p(0, b)$. В случае $p = 1$ условие $x^{-1} I_{0+}^{1} g(x) \in L_1(0, b)$ эквивалентно $(|\ln x| + 1) g(x) \in L_1(0, b)$, см. неравенство (3.17″) при $\alpha = 1$ и $\lambda = 0$ или же соотношения

$$\int_0^b x^{-1} \int_0^x |g(t)|\, dt dx = \int_0^b \int_0^x |g(t)|\, dt d\ln x =$$

$$= \ln x \int_0^x |g(t)|\, dt \Big|_{x=+0}^{x=b} - \int_0^b \ln x\, |g(x)|\, dx, \tag{10.8′}$$

из которых указанная эквивалентность следует, например, при $b < 1$. Таким образом, по определению (10.2) доказано, что $g(x) \in L_{p,*}(0, b)$, если $f(x) \in L_p(0, b)$.

Достаточность. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) =$

$= x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} g(x)$, $g(x) \in L_{p,*}(0, b)$, $1 \leqslant p < \infty$. Покажем, что существует функция $f(x) \in L_p(0, b)$, которая удовлетворяет уравнению (10.8). Сопоставив (10.8) с (3.16), видим, что функции f соответствует $\varphi + A_2\varphi$, а g —φ. Для того чтобы $f = \varphi + A_2\varphi \in L_p(0, b)$, в силу леммы 3.2 достаточно, чтобы $g = \varphi \in L_p(0, b)$ при $p > 1$. Но при $p = 1$ класс $L_1(0, b)$ следует сузить условием $(|\ln x| + 1) g(x) \in L_1(0, b)$. Это вытекает из представления оператора $(A_2\varphi)(x)$ при $x \to 0$, которое получается из равенств для A_2 в формулировке леммы 3.2 (эти равенства сохраняют силу и при $p = 1$). Тогда имеем $A_2(x, t) \underset{t \to 0}{\sim} x^{-1} \int_0^x \left(\frac{y}{x-y}\right)^{\alpha} \left(\frac{y}{x}\right)^{\mu} \frac{dy}{y} = x^{-1} B(\alpha+\mu, 1-\alpha) \equiv$

$\equiv A_2(x, 0)$, $(A_2\varphi)(x) \underset{x \to 0}{\sim} \pi^{-1} \mu \sin \alpha\pi \int_0^x A_2(x, 0) \varphi(t)\, dt = [B(\alpha, \mu)]^{-1} x^{-1} I_{0+}^{1} \varphi(x)$.

Из последнего представления и из соотношения (10.8′) (с заменой g на φ) видим, что условие $A_2\varphi \in L_1(0, b)$ эквивалентно $(|\ln x| + 1) \varphi \in L_1(0, b)$. Таким образом, если $g = \varphi \in L_{p,*}(0, b)$, то $f \in L_p(0, b)$.

Случай $\operatorname{Re} \alpha > 0$. II часть. *Необходимость*. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x)$, $f(x) \in L_p(0, b)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $p(1 + \operatorname{Re} \varepsilon) > 1$. Тогда в силу доказанной выше необходимости существует функция $g \in L_{p,*}(0, b)$, для которой выполняется равенство (10.8). Для этой функции $g(x)$ в силу доказанной выше достаточности существует другая функция $g_1 \in L_p(0, b)$, которая удовлетворяет аналогичному (10.8) соотношению $x^{\varepsilon} I_{0+}^{\alpha} g(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\varepsilon} g_1(x)$. Исключив из этих равенств $I_{0+}^{\alpha} g(x)$, получим формулу

$$I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^{\alpha} x^{\varepsilon} g_1(x), \tag{10.9}$$

являющуюся аналогом (10.8), из которой следует представление функции ψ в виде $\psi(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^{\alpha} x^{\varepsilon} g_1(x)$, $g_1(x) \in L_p(0, b)$.

Достаточность доказывается аналогично (или из необходимости путем замены местами ε и μ, g_1 и f).

Случай $\operatorname{Re} \alpha < 0$. I часть. *Необходимость*. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x)$, $f(x) \in I_{0+}^{-\alpha}(L_{p,*}(0, b))$. Это означает, что $f(x) = I_{0+}^{-\alpha} f_1^*(x)$ и $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} I_{0+}^{-\alpha} f_1^*(x)$, где $f_1^*(x) \in L_{p,*}(0, b)$. Поскольку $p(1 + \operatorname{Re} \mu) > 1$ и $f_1^*(x) \in L_{p,*}(0, b)$, а —$\operatorname{Re} \alpha > 0$, то с помощью доказанной достаточности (I часть) и свойства $I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha} = E$ придем к соотношениям

$$\psi = I_{0+}^{\alpha}(x^{\mu} I_{0+}^{-\alpha} f_1^*) = I_{0+}^{\alpha}(I_{0+}^{-\alpha} x^{\mu} f_2) = x^{\mu} f_2 =$$

$$= x^{\mu} I_{0+}^{\alpha}(I_{0+}^{-\alpha} f_2) = x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} g, \quad f_2 \in L_p(0, b),$$

где $g = I_{0+}^{-\alpha} f_2 \in I_{0+}^{-\alpha}(L_p(0, b))$.

Достаточность в этом случае доказывается обратным ходом рассуждений по отношению к последним равенствам.

Случай $\operatorname{Re} \alpha < 0$. II часть. Доказательство проводится таким же образом, как и в случае $\operatorname{Re} \alpha > 0$ (II часть).

Последнее из утверждений леммы 10.1 вытекает из предыдущих и из неравенства (5.46′). Лемма доказана.

Теперь, воспользовавшись формулой Дирихле (1.32), вычислим композицию

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) =$$

$$= x^{\beta_1} \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha_1-\beta_1-1}}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1)} t^{\beta_2-\alpha_1} dt \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_2-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_2-\beta_2)} \tau^{-\alpha_2} f(\tau)\, d\tau =$$

$$= x^{\beta_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1)\,\Gamma(\alpha_2-\beta_2)}\,\tau^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} f(\tau)\,d\tau \times$$

$$\times \int_0^1 u^{\alpha_2-\beta_2-1}(1-u)^{\alpha_1-\beta_1-1}(1-u(1-x/\tau))^{\beta_2-\alpha_1} du,$$

$$\operatorname{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0, \quad \operatorname{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0.$$

Отсюда, согласно (1.73), имеем следующее представление:

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})\, f(x) = x^{\beta_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)} \times$$

$$\times {}_2F_1(\alpha_1-\beta_2,\ \alpha_2-\beta_2;\ \alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2;\ 1-x/\tau)\,\tau^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} f(\tau)\,d\tau. \tag{10.10}$$

Если в левой части (10.10) поменять местами операторы, заключенные в круглые скобки, то в правой части индексы 1 и 2 поменяются местами, что приведет там к оператору, получаемому из правой части (10.10) с помощью *формулы автотрансформации*

$${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = (1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,\ c-b;\ c;\ z) \tag{10.11}$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 2.1.4(23)]). Таким образом, при соответствующих условиях операторы в левой части формулы (10.10) коммутативны:

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})\, f(x) =$$

$$= (x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})\, f(x). \tag{10.12}$$

Обозначим через T_{12}, F и T_{12}, T_{21} операторы, содержащиеся в обеих частях формул (10.10) и (10.12). Области определения этих операторов и области, на которые они ограниченно действуют, существенно зависят от величин параметров и прежде всего от знаков $\operatorname{Re}(\alpha_1-\beta_1)$ и $\operatorname{Re}(\alpha_2-\beta_2)$. Эти области совпадают с пространством $L_p(0, b)$, $0<b<\infty$, $1\leqslant p<\infty$, или являются некоторыми подпространствами из $L_p(0, b)$, определяемыми соответствующими условиями представимости. Для более удобного описания этих подпространств в терминах представимости через функции $x^{-\nu} I_{0+}^{\nu}\psi(x)$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)$, приходится накладывать дополнительные ограничения на параметры, порождаемые условием $p(1+\operatorname{Re}\mu)>1$ леммы 10.1, которая является основным инструментом такого описания. В тех случаях, когда указанные условия и области определения операторов пересекаются, на этом пересечении значения соответствующих операторов совпадают, что приводит к равенствам (10.10) или (10.12).

Перечисленные обстоятельства порождают весьма разветвленную картину свойств операторов T_{12}, T_{21} и F, которую описывают следующие теорема и связанная с ней табл. 10.1, где $\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2$.

Теорема 10.2. *Пусть выполняются какие-либо из условий A_j табл. 10.1. Тогда оператор (операторы) B_j определен (определены) на множестве C_j из $L_p(0, b)$, $1\leqslant p<\infty$, и ограниченно отображает (отображают) C_j на множество $D_j\subset L_p(0, b)$, причем имеют место равенства E_j.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что все параметры α_1, α_2, β_1, β_2 — действительные числа. Допустим вначале, что выполняются условия A_1. Тогда, как следует из формулы (5.46′), оператор

ТАБЛИЦА 10.1

j	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p(1-\mathrm{Re}\alpha_1)>1$, $p(1-\mathrm{Re}\,\alpha_2)>1$	T_{12}, F T_{21}	$L_p(0, b)$	В $L_p(0, b)$	(10.10), (10.12)
2	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p[1+\mathrm{Re}(\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)]>1$, $p(1-\mathrm{Re}\,\alpha_2)>1$	T_{12}, F	$L_p(0, b)$	$\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.10)
3	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p[1+\mathrm{Re}(\beta_1-\alpha_1-\alpha_2)]>1$, $p[1+\mathrm{Re}(\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)]>1$	T_{12}, T_{21}	$L_p(0, b)$	$\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.12)
4	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p(1-\mathrm{Re}\alpha_1)>1$, $p(1-\mathrm{Re}\alpha_2)>1$, $p(1-\mathrm{Re}\,\beta_1)>1$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$	T_{12}, F	$L_p(0, b)$	В $L_p(0, b)$	(10.10)
5	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p[1+\mathrm{Re}(\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)]>1$, $p(1-\mathrm{Re}\alpha_2)>1$, $p(1-\mathrm{Re}\beta_1)>1$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$	T_{12}, F	$L_p(0, b)$	$\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.10)
6	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p(1-\mathrm{Re}\beta_1)>1$, $p[1+\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1-\beta_2)]>1$, $\mathrm{Re}\,\alpha<0$	T_{12}	$\{x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	$L_p(0, b)$	—
7	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)<0$, $p(1-\mathrm{Re}\alpha_1)>1$, $p(1-\mathrm{Re}\beta_2)>1$, $\mathrm{Re}\alpha>0$	T_{12}, F, T_{21}	$\{x^{\alpha_2-\beta_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	$\{x^{\beta_1-\alpha_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1}\chi$, $\chi\in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.10), (10.12)
8	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)<0$, $p(1-\mathrm{Re}\alpha_1)>1$, $p(1-\mathrm{Re}\beta_2)>1$, $\mathrm{Re}\,\alpha<0$	T_{12}, T_{21}	$\{x^{\alpha_2-\beta_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	$\{x^{\beta_1-\alpha_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1}\chi$, $\chi\in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.12)
9	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)<0$, $p[1+\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1-\beta_2)]>1$, $p(1-\mathrm{Re}\,\beta_1)>1$	T_{12}	$\{x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	$L_p(0, b)$	—
10	$\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_2)<0$, $p[1+\mathrm{Re}(\alpha_1-\beta_1-\beta_2)]>1$, $p[1+\mathrm{Re}(\alpha_2-\beta_1-\beta_2)]>1$	T_{12}, T_{21}	$\{x^{\alpha} I_{+0}^{-\alpha}\psi$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$	$L_p(0, b)$	(10.12)
11	$p=1$, $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\mathrm{Re}\beta_1<0$, $\mathrm{Re}\,\beta_2<0$	T_{12}, F, T_{21}	$L_1((0, b); \ln^2 x+1)$	$L_1(0, b)$	(10.10), (10.12)

$x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}$ ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$ (при условиях $p\geqslant 1$, $p(1-\alpha_2)>1$). Поэтому и композиция T_{12} ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$, если еще $p(1-\alpha_1)>1$. На плотном в $L_p(0, b)$ множестве достаточно «хороших» функций $f(x)$ равенство (10.10) легко проверить непосредственным вычислением с помощью теоремы Фубини. Значит, оператор справа F также ограничен на этом плотном множестве и, следовательно, на всем $L_p(0, b)$. Отсюда по теореме 1.7 Банаха следует выполнение равенства (10.10) при условиях A_1 на всем пространстве $L_p(0, b)$. Формула (10.12) следует из (10.10) с помощью преобразования (10.11) и с учетом симметрии условий A_1 при перестановке индексов 1 и 2 местами.

Аналогичные рассуждения, но на основе формулы (3.17″) вместо (5.46′), применяемой дважды при $\lambda=1$ и $\lambda=0$, приводят к утверждению теоремы для последнего случая $j=11$.

Важно отметить, что области из $L_p(0, b)$, на которые действуют операторы T_{12} и T_{21}, вообще говоря, не совпадают, так как из леммы 10.1 следует, что при условии $p(1-\alpha_2)>1$ оператор T_{12} действует на область $\{x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2}\psi(x)$, $\psi\in L_{p,*}(0, b)\}$, а при условии $p(1-\alpha_1)>1$

оператор T_{21} действует на множество $\{x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{\beta_1-\alpha_1-\alpha_2} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1}\psi(x),\ \psi \in L_{p,*}(0,\ b)\}$. Эти области будут совпадать между собой и с областью $\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\varphi(x),\ \varphi \in L_{p,*}(0,\ b),\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2\}$, если указанные условия сузить до $p(1+\beta_1-\alpha_1-\alpha_2)>1$ и $p(1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)>1$, когда к внешним операторам $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1}$ и $x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2}$ можно будет применить лемму 10.1. Это приводит к утверждениям теоремы в случаях $j=3$ и $j=2$.

Пусть теперь заданы условия A_4. Тогда, как следует из теоремы 1.5, оператор F ограниченно действует из $L_p(0,\ b)$ в $L_p(0,\ b)$. В самом деле, положим $\mathrm{k}(x,\ \tau)=(1-\tau/x)_+^{\alpha-1}\ {}_2F_1(\alpha_1-\beta_2,\ \alpha_2-\beta_2;\ \alpha;\ 1-x/\tau)(x/\tau)^{\alpha+\beta_1-1}\tau^{-1}$ и рассмотрим второй из интегралов (1.43): $\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\ {}_2F_1(\alpha_1-\beta_2,\ \alpha_2-\beta_2;\ \alpha;$ $1-\tau^{-1})\ \tau^{-\alpha-\beta_1-1/p}d\tau$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$. В силу формулы

$$
\begin{gathered}
{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = O(z^{-a}) + O(z^{-b}), \\
a-b\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\quad z\to\infty
\end{gathered}
\tag{10.13}
$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 2.10(2)]), последний интеграл будет сходиться на нижнем конце, если будут сходиться следующие два интеграла $\int_0^1 \tau^{-\alpha_2-1/p}d\tau$ и $\int_0^1 \tau^{-\alpha_1-1/p}d\tau$, что имеет место при условиях $p(1-\alpha_2)>1$ и $p(1-\alpha_1)>1$. Таким образом, в этом случае теорема 1.5 к оператору F применима и этот оператор ограничен в $L_p(0,\ b)$. Воздействовав на него оператором $x^{\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{-\beta_1}$, который также ограничен из $L_p(0,\ b)$ в $L_p(0,\ b)$, при условиях $p\geqslant 1$ и $p(1-\beta_1)>1$ (см. (5.46')), получим ограниченную в $L_p(0,\ b)$ композицию. Прямым ее вычислением несложно убедиться, что она совпадает с $x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2} f(x)$. Применив теперь к полученному равенству обратный оператор $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}$, окончательно придем к формуле (10.10) при условиях A_4. При несколько более жестких условиях A_5 область, куда действуют операторы T_{12} и F, с помощью леммы 10.1, как и в случае $j=2$, может быть представлена в виде $\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\psi,\ \psi \in L_{p,*}(0,\ b)\}$.

Пусть теперь заданы условия A_6 и справедливо представление $f(x) = x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha}\psi^*(x)$, $\psi^* \in L_{p,*}(0,\ b)$. Тогда, применив к оператору $x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2} I_{0+}^{-\alpha}\psi^*(x)$ лемму 10.1, затем к оператору $I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2}$ снова лемму 10.1 (при $\alpha>0$) и, наконец, к внешнему оператору $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\beta_1}$ лемму 10.1 (но при $\alpha=\alpha_1-\beta_1<0$, $\mu=-\beta_1$), придем к равенствам $T_{12}f(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1+\beta_2} \times$ $\times I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1+\beta_2-\alpha_2}\psi^*(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{\beta_2-\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2}\psi_1(x) =$ $= x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\beta_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1}\psi_1^*(x) = x^{\beta_1-\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1}\psi_2(x) = \psi_2(x)$, где $\psi_1,\ \psi_2 \in L_p(0,\ b)$, $\psi_1^* \in L_{p,*}(0,\ b)$, т. е. оператор T_{12} при условиях A_6 ограниченно действует из C_6 на $L_p(0,\ b)$.

При выполнении условий A_7 (или A_8), кроме ограничения на α, функция $f(x)$, взятая из области $C_7 = C_8$, в силу леммы 10.1 и условия $p(1-\beta_2)>1$ представима в виде $f(x) = x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2}\varphi$, где $\varphi \in L_p(0,\ b)$. Значит, существует дробная производная $\varphi(x) = x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2} f(x)$, и поскольку $p(1-\alpha_1)>1$, то оператор T_{12} определен и ограничен на указанном множестве C_7. Его значение $T_{12}f(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}\varphi(x)$ представимо в виде $x^{\beta_1-\alpha_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1}\chi$, $\chi \in L_{p,*}(0,\ b)$, опять-таки по лемме 10.1 (см. области $D_7 = D_8$). Подействовав на последнее равенство ограниченным оператором $x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2}$, получим в правой части композицию, порядок в которой можно изменить в силу выполнения соответствующих условий типа условий A_1: $x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} T_{12}f(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1} x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2}\varphi(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} \times$

$\times x^{-\alpha_1} f(x)$. Применив к этому соотношению обратный оператор $x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}$, придем к формуле (10.12): $T_{12}f = T_{21}f$. Если еще $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то композиции T_{12} и T_{21} остаются ограниченными операторами, значения которых можно записать в виде правой части (10.10), т. е. Ff, после непосредственных вычислений.

В случае условий A_9 рассуждения аналогичны проведенным выше при рассмотрении условий A_6.

Остается доказать справедливость равенства (10.12) при несколько более жестких, чем A_9, условиях A_{10}. Обозначим $T_{12}f = g$, где $g \in L_p(0, b)$. Из условий A_{10} следует, что $p(1-\beta_1) > 1$ и $p(1-\beta_2) > 1$. Поэтому в силу аналога условий A_1 имеют место равенства $x^{\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{-\beta_1} x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} g = x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} x^{\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{-\beta_1} g = f$. Применим к этим равенствам операторы T_{12} и T_{21}: $g = T_{12}f$, $g = T_{21}f$. Отсюда следует соотношение (10.12). Теорема 10.2 доказана.

Замечание 10.2. В табл. 10.1 условия A_j имеют достаточный характер. В частности, в ряде случаев их можно расширить, допуская знаки равенств $\operatorname{Re}(\alpha_j - \beta_j)$ нулю при дополнительном требовании $p > 1$. Это следует из замечаний после формулы (5.46′) об ограниченности соответствующих дробных интегралов чисто мнимого порядка.

Рассмотрим теперь композиции двух правосторонних интегродифференциальных операторов в случае $b = +\infty$. При этом будем учитывать, что после замен x на $1/x$, α на $1-\beta$, β на $1-\alpha$ и $f(x)$ на $f(x^{-1})$ в операторе $x^{\beta} I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x)$ лишь индекс $0+$ заменяется на $-$. Это свойство вытекает из формулы

$$x^{\beta} I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x) = y^{1-\alpha} I_{-}^{\alpha-\beta} y^{\beta-1} \varphi(y), \quad xy = 1, \quad f(x) = \varphi(y). \tag{10.14}$$

Указанные замены и формула (10.11) дают возможность равенства (10.10), (10.12) преобразовать к следующим соотношениям:

$$(x^{\beta_1} I_{-}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = x^{\beta_1+\beta_2-\alpha_1} \int_x^{\infty} \frac{(\tau - x)^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)} \times$$

$$\times {}_2F_1(\alpha_1-\beta_1, \alpha_1-\beta_2; \alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2; 1-\tau/x)\, \tau^{-\alpha_2} f(\tau)\, d\tau, \tag{10.15}$$

$$(x^{\beta_1} I_{-}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) =$$

$$= (x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})(x^{\beta_1} I_{-}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}) f(x). \tag{10.16}$$

Таким же образом после замен x на $1/x$, $\psi(x)$ на $x^{\alpha-1}\psi(1/x)$, $f(x)$ на $x^{-\alpha-1} f(1/x)$ и $g(x)$ на $x^{-\alpha-1} g(1/x)$ лемма 10.1 переходит в следующее утверждение.

Лемма 10.2. *Пусть* $\psi(x) \in L_p((a, \infty); x^{p-\alpha p-2})$, $0 < a < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $p(1 + \operatorname{Re}\mu) > 1$, *и* $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$. *Тогда для того чтобы* $\psi(x)$ *была представима в виде* $\psi(x) = I_{-}^{\alpha} x^{-\mu} f(x)$, *где* $f(x) \in I_{-}^{m(\alpha)*}(L_p((a, \infty); x^{p+\tilde{\alpha}p-2}))$, $\tilde{\alpha} = \operatorname{sign}\operatorname{Re}\alpha \cdot \alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(x)$ *была представима в виде* $\psi(x) = x^{-\mu} I_{-}^{\alpha} g(x)$, *где* $g(x) \in I_{-}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}((a, \infty); x^{p+\tilde{\alpha}p-2}))$, *или в виде* $\psi(x) = x^{\varepsilon-\mu} I_{-}^{\alpha} x^{-\varepsilon} g_1(x)$, *где* $g_1(x) \in I_{-}^{m(\alpha)*}(L_p((a, \infty); x^{p+\tilde{\alpha}p-2}))$, $p(1 + \operatorname{Re}\varepsilon) > 1$.

Для формулировки аналога теоремы 10.2 совершим в табл. 10.1 замены α_i на $1-\beta_i$, β_i на $1-\alpha_i$, x на $1/x$, $L_p(0, b)$ на $L_p((a, \infty); x^{-2})$, $0 < a < \infty$, а номеров (10.10), (10.12) в столбце E_j на (10.15), (10.16). Под операторами T_{12}, F и T_{21} будем понимать соответствующие операторы из формул (10.15), (10.16). Полученную таблицу назовем табл. 10.1′, но выписывать для краткости не будем. Тогда из теоремы 10.2 вытекает

Теорема 10.3. *Пусть выполняются какие-либо из условий A_j табл. 10.1′. Тогда оператор (операторы) B_j определен (определены) на множестве C_j при $1 \leqslant p < \infty$ и ограниченно отображает (отображают) C_j на множество $D_j \subset L_p((a, \infty); x^{-2})$, причем имеют место равенства E_j.*

Правые части соотношений (10.10), (10.15) можно преобразовать с помощью равенства

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \qquad (10.17) $$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 2.1.4 (22)]), что приведет еще к двум формулам такого сорта. Положив $c = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$, осуществим в (10.10), полученных двух формулах, а также в (10.15) соответственно замены: $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_2 - \beta_2$, $\varphi(\tau) = \tau^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} f(\tau)$; $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_1 - \beta_1$, $\varphi(\tau) = \tau^{-\alpha_2} f(\tau)$; $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_2 - \beta_2$, $\varphi(\tau) = \tau^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} \times f(\tau)$; $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_1 - \beta_1$, $\varphi(\tau) = \tau^{-\alpha_2} f(\tau)$. Введем также обозначения:

$$ {}_1I^c_{0+}(a, b)\varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\, d\tau, \qquad (10.18) $$

$$ {}_2I^c_{0+}(a, b)\varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\, d\tau, \qquad (10.19) $$

$$ {}_3I^c_{-}(a, b)\varphi(x) \equiv \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\, d\tau, \qquad (10.20) $$

$$ {}_4I^c_{-}(a, b)\varphi(x) \equiv \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\, d\tau. \qquad (10.21) $$

После таких преобразований с учетом коммутативности (10.12), (10.16) получаются композиционные разложения для операторов (10.18)—(10.21) вида

$$ {}_1I^c_{0+}(a, b)\varphi(x) = I^{c-b}_{0+}\, x^{-a}\, I^b_{0+}\, x^a \varphi(x), \qquad (10.22) $$

$$ {}_1I^c_{0+}(a, b)\varphi(x) = x^{c-a-b}\, I^b_{0+}\, x^{a-c}\, I^{c-b}_{0+}\, x^b \varphi(x); \qquad (10.23) $$

$$ {}_2I^c_{0+}(a, b)\varphi(x) = x^a\, I^b_{0+}\, x^{-a}\, I^{c-b}_{0+} \varphi(x), \qquad (10.24) $$

$$ {}_2I^c_{0+}(a, b)\varphi(x) = x^b\, I^{c-b}_{0+}\, x^{a-c}\, I^b_{0+}\, x^{c-a-b} \varphi(x); \qquad (10.25) $$

$$ {}_3I^c_{-}(a, b)\varphi(x) = x^{c-a-b}\, I^b_{-}\, x^{a-c}\, I^{c-b}_{-}\, x^b \varphi(x), \qquad (10.26) $$

$$ {}_3I^c_{-}(a, b)\varphi(x) = I^{c-b}_{-}\, x^{-a}\, I^b_{-}\, x^a \varphi(x); \qquad (10.27) $$

$$ {}_4I^c_{-}(a, b)\varphi(x) = x^a\, I^b_{-}\, x^{-a}\, I^{c-b}_{-} \varphi(x), \qquad (10.28) $$

$$ {}_4I^c_{-}(a, b)\varphi(x) = x^b\, I^{c-b}_{-}\, x^{a-c}\, I^b_{-}\, x^{c-a-b} \varphi(x). \qquad (10.29) $$

Из формул (10.11), (10.17) и других простых свойств функции Гаусса несложно выписать формулы взаимосвязи и формулы частных значений для операторов (10.18)—(10.21):

$$ {}_jI^c(a, b) = {}_jI^c(b, a) = x^{(-1)^j(a+b-c)}\, {}_jI^c(c-a, c-b)\, x^{(-1)^j(c-a-b)}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \qquad (10.30) $$

$$ {}_jI^c(a, b) = x^{-a}\, {}_{j+1}I^c(a, c-b)\, x^a, \quad j = 1, 3; \qquad (10.31) $$

$$
{}_jI^c(a,\ b)\varphi(x) = y^{1-c}\,{}_{4-j}I^c(a,\ b)\varphi_1(y),\ xy=1,
$$
$$
\varphi_1(y) = x^{c+1}\varphi(x),\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4; \tag{10.32}
$$

$$
{}_jI^c_{0+}(a,\ 0) = I^c_{0+},\quad {}_jI^c_{0+}(a,\ c) = x^{(-1)^j a} I^c_{0+} x^{(-1)^{j-1}a},\quad j=1,\ 2, \tag{10.33}
$$

$$
{}_jI^c_{-}(a,\ 0) = I^c_{-},\quad {}_jI^c_{-}(a,\ c) = x^{(-1)^j a} I^c_{-} x^{(-1)^{j-1}a},\quad j=3,\ 4 \tag{10.34}
$$

(для простоты записи индексы $0+$ и $-$ в соотношениях (10.30)—(10.32) опущены).

Теоремы 10.2, 10.3 после указанных замен и преобразований в отношении к операторам (10.18)—(10.21) позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 10.4. *Пусть* $\operatorname{Re} c>0$, $1\leqslant p<\infty$, $0<e<d<\infty$, *и выполняются какие-либо из условий* A_j *табл. 10.2. Тогда соответствующий оператор* B_j *определен на множестве* C_j *и ограниченно отображает* C_j *на множество* D_j, *причем имеют место равенства* E_j.

Доказательство. Рассмотрим случай $j=1$ табл. 10.2. Для этого правую часть равенства (10.22) представим в виде $x^c(x^{-c}I^{c-b}_{0+}x^b)\times$ $\times(x^{-a-b}I^b_{0+}x^a)\varphi(x)$, образовав оператор типа T_{12} из формулы (10.10). Для такого оператора выпишем условия случаев $j=2,\ 5$ из теоремы 10.2 (условие $p[1+\operatorname{Re}(\beta_2-\alpha_1-\alpha_2)]>1$ в данном случае при $p=1$ нарушается, однако в силу формул (10.4) это обстоятельство не является существенным). В совокупности выписанные условия приведут к условиям случая $j=1$ теоремы 10.4. Аналогичные условия случая $j=7$ теоремы 10.2 приведут к условиям случая $j=2$ теоремы 10.4.

При рассмотрении равенств (10.23)—(10.25) поступаем аналогичным образом, а указанная картина соответствия условий полностью повторяется. При этом из условий исключаются неравенства, естественным образом вытекающие из остальных неравенств.

При изучении случаев $j=9,\ \ldots,\ 16$ табл. 10.2 воспользуемся формулой (10.32), а затем соответственно случаями $j=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2$ этой таблицы, но в отношении к функции $\varphi_1(x)=x^{-c-1}\varphi(1/x)$. После пересчета возникнут указанные в случаях $j=9,\ \ldots,\ 16$ условия на функции и параметры.

Замечание 10.3. Обозначим через ${}_1I^c_{e+}(a,\ b)$, ${}_2I^c_{e+}(a,\ b)$, ${}_3I^c_{d-}(a,\ b)$, ${}_4I^c_{d-}(a,\ b)$ операторы вида (10.18)—(10.21), но с пределами интегрирования $(e,\ x)$ и $(x,\ d)$, $0<e<d<\infty$, вместо $(0,\ x)$ и $(x,\ \infty)$. Для этих операторов теорема 10.4 сохраняет силу, причем в условиях A_j табл. 10.2 ограничения, включающие p, опускаются, а в остальных условиях интервалы $(0,\ d)$ и $(e,\ \infty)$ заменяются на $(e,\ d)$, а индексы $0+$ и $-$ в операторах I^α преобразуются соответственно в $e+$ и $d-$ (при этом следует учитывать, что $L_{p,\,*}(e,\ d)=L_p(e,\ d)$).

Справедливость этого замечания следует из возможности доопределения нулем с промежутка $(e,\ d)$ на $(0,\ \infty)$ подынтегральной функции и ограниченности в $L_p(e,\ d)$ оператора умножения на степенную функцию вида x^γ при любом γ (что позволяет устранить из условий A_j ограничения, включающие p и связанные с влиянием веса x^γ в нуле и на бесконечности).

В заключение пункта отметим, что замечание 10.2 в полной мере переносится и на теоремы 10.3, 10.4.

2°. Композиции двух разносторонних интегралов со степенными весами. Выясним теперь условия коммутативности двух операторов $x^{\beta_1}I^{\alpha_1-\beta_1}_{0+}x^{-\alpha_1}$ и $x^{\beta_2}I^{\alpha_2-\beta_2}_{-}x^{-\alpha_2}$ со степенными весами и найдем некоторые важные частные представления таких композиций. Для этого воспользуемся несколько иным подходом к таким операторам.

ТАБЛИЦА 10.2

j	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\mathrm{Re}\, b > 0,\ p(1+\mathrm{Re}\, a) > 1$	${}_1I^c_{0+}(a, b)$	$L_p(0, d)$	$I^c_{0+}(L_{p,*}(0, d))$	(10.22)
2	$\mathrm{Re}\, b < 0,\ p(1+\mathrm{Re}\, b) > 1,$ $p[1+\mathrm{Re}(a+b)] > 1$	${}_1I^c_{0+}(a, b)$	$\{x^b I^{-b}_{0+}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^b I^{c-b}_{0+}\chi,$ $\chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.22)
3	$\mathrm{Re}(c-b) > 0,\ p(1+$ $+\mathrm{Re}\, b) > 1,\ p[1+$ $+\mathrm{Re}(a+b-c)] > 1$	${}_1I^c_{0+}(a, b)$	$L_p(0, d)$	$I^c_{0+}(L_{p,*}(0, d))$	(10.23)
4	$\mathrm{Re}(b-c) > 0,\ p(1+$ $+\mathrm{Re}\, a) > 1$	${}_1I^c_{0+}(a, b)$	$\{x^{c-b} I^{b-c}_{0+}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^{c-b} I^b_{0+}\chi,$ $\chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.23)
5	$\mathrm{Re}(c-b) > 0,\ p(1-$ $-\mathrm{Re}\, a) > 1$	${}_2I^c_{0+}(a, b)$	$L_{p,*}(0, d)$	$I^c_{0+}(L_{p,*}(0, d))$	(10.24)
6	$\mathrm{Re}(b-c) > 0,\ p[1+$ $+\mathrm{Re}(c-a-b)] > 1,\ p[1+$ $+\mathrm{Re}(c-b)] > 1$	${}_2I^c_{0+}(a, b)$	$\{x^{c-b} I^{b-c}_{0+}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^{c-b} I^b_{0+}\psi,$ $\chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.24)
7	$\mathrm{Re}\, b > 0,\ p(1-\mathrm{Re}\, b) > 1,$ $p[1+\mathrm{Re}(c-a-b)] > 1$	${}_2I^c_{0+}(a, b)$	$L_{p,*}(0, d)$	$I^c_{0+}(L_{p,*}(0, d))$	(10.25)
8	$\mathrm{Re}\, b < 0,\ p[1+\mathrm{Re}(c-$ $-a)] > 1$	${}_2I^c_{0+}(a, b)$	$\{x^b I^{-b}_{0+}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^b I^{c-b}_{0+}\chi,$ $\chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.25)
9	$\mathrm{Re}(c-b) > 0,\ p(1-$ $-\mathrm{Re}\, a) > 1$	${}_3I^c_{-}(a, b)$	$L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pc+p-2})$	$I^c_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pc+p-2}))$	(10.26)
10	$\mathrm{Re}(b-c) > 0,\ p[1+$ $+\mathrm{Re}(c-b)] > 1,\ p[1+$ $+\mathrm{Re}(c-a-b)] > 1$	${}_3I^c_{-}(a, b)$	$\{x^{-c} I^{b-c}_{-}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p(1+b-c)-2})\}$	$I^b_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p+pb-2}))$	(10.26)
11	$\mathrm{Re}\, b > 0,\ p(1-\mathrm{Re}\, b) > 1,$ $p[1+\mathrm{Re}(c-a-b)] > 1$	${}_3I^c_{-}(a, b)$	$L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pc+p-2})$	$I^c_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pc+p-2}))$	(10.27)
12	$\mathrm{Re}\, b < 0,\ p[1+\mathrm{Re}(c-$ $-a)] > 1$	${}_3I^c_{-}(a, b)$	$\{x^{-c} I^{-b}_{-}\psi,\ \psi \in$ $\in L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p-pb-2})\}$	$I^{c-b}_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p(1+c-b)-2}))$	(10.27)
13	$\mathrm{Re}(c-b) > 0,\ p(1+$ $+\mathrm{Re}\, b) > 1,\ p[1+\mathrm{Re}(a+$ $+b-c)] > 1$	${}_4I^c_{-}(a, b)$	$L_p((e, \infty);$ $x^{pc+p-2})$	$I^c_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pc+p-2}))$	(10.28)
14	$\mathrm{Re}(b-c) > 0,\ p(1+$ $+\mathrm{Re}\, a) > 1$	${}_4I^c_{-}(a, b)$	$\{x^{-c} I^{b-c}_{-}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p(1+b-c)-2})\}$	$I^b_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pb+p-2}))$	(10.28)
15	$\mathrm{Re}\, b > 0,\ p(1+\mathrm{Re}\, a) > 1$	${}_4I^c_{-}(a, b)$	$L_p((e, \infty);$ $x^{pc+p-2})$	$I^c_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{pc+p-2}))$	(10.29)
16	$\mathrm{Re}\, b < 0,\ p(1+\mathrm{Re}\, b) > 1,$ $p[1+\mathrm{Re}(a+b)] > 1$	${}_4I^c_{-}(a, b)$	$\{x^{-c} I^{-b}_{-}\psi,$ $\psi \in L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p-pb-2})\}$	$I^{c-b}_{-}(L_{p,*}((e, \infty);$ $x^{p(1+c-b)-2}))$	(10.29)

Как следует из формул (7.17), (7.21), после применения к ним обратного преобразования Меллина (1.113) и замен α на $\alpha-\beta$, $f(x)$ на $x^{-\alpha}f(x)$ и s на $s+\beta$ имеют место представления

$$x^\beta I^{\alpha-\beta}_{0+}x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-\beta-s)}f^*(s)\,x^{-s}ds, \quad \mathrm{Re}(\alpha+s) < 1, \tag{10.35}$$

$$x^\beta I^{\alpha-\beta}_{-}x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\alpha+s)}f^*(s)\,x^{-s}ds, \quad \mathrm{Re}(\beta+s) > 0, \tag{10.36}$$

где $f^*(s)$ — преобразование Меллина (1.112) функции $f(x)$. На достаточно хороших функциях эти формулы сохраняют силу при любых значениях α—β (подробнее об этом см. начало § 36).

Составив композицию левых частей (10.35), (10.36) с разными индексами и воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Меллина (1.116), придем к соотношению

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha_1-s)\,\Gamma(\beta_2+s)}{\Gamma(1-\beta_1-s)\,\Gamma(\alpha_2+s)} f^*(s)\, x^{-s} ds,$$

$$-\operatorname{Re}\beta_2 < \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}\alpha_1. \qquad (10.37)$$

Поскольку гамма-множители в правой части можно переставлять местами, то и операторы в скобках из левой части на соответствующих функциях коммутативны. Достаточные условия такой коммутативности и ограниченности этих операторов отражает

Теорема 10.5. *Пусть* $\operatorname{Re}(\alpha_1-\beta_1)>0$, $\operatorname{Re}(\alpha_2-\beta_2)>0$, $p(1-\operatorname{Re}\alpha_1)>1$, $p\operatorname{Re}\beta_2>-1$ *и* $f(x)\in L_p(0,\infty)$, $1\leqslant p<\infty$. *Тогда имеют место соотношения*

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) =$$

$$= (x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}) f(x) = \int_0^\infty \mathrm{k}_0\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,\frac{dt}{t}, \qquad (10.38)$$

$$\mathrm{k}_0(y) = \frac{\Gamma(1+\beta_2-\alpha_1)\, y^{\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2-\beta_2)\,\Gamma(1+\beta_2-\beta_1)} \times$$

$$\times {}_2F_1(1+\beta_2-\alpha_1,\ 1+\beta_2-\alpha_2;\ 1+\beta_2-\beta_1;\ y),\quad y<1,$$

$$\mathrm{k}_0(y) = \frac{\Gamma(1+\beta_2-\alpha_1)\, y^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1)\,\Gamma(1+\alpha_2-\alpha_1)} \times$$

$$\times {}_2F_1(1+\beta_1-\alpha_1,\ 1+\beta_2-\alpha_1;\ 1+\alpha_2-\alpha_1;\ y^{-1}),\quad y>1,$$

причем все указанные в (10.38) операторы ограничены в $L_p(0,\infty)$.

Доказательство. Ограниченность операторов в $L_p(0,\infty)$ является прямым следствием формул (5.45′), (5.46′), которые применяются при указанных в теореме условиях последовательно в том или ином порядке. Совпадение композиций из (10.38) между собой следует из равенства (10.37), а их представление через правую часть (10.38) устанавливается путем непосредственных вычислений композиций или же интеграла (10.37), которое производится по теории вычетов или с помощью теоремы Л. Слейтер из книги О. И. Маричева [10, с. 48].

Укажем важные частные случаи таких композиций.

А. Пусть в (10.37) $\alpha_1=1-2a$, $\alpha_2=c-2a$, $\beta_1=1-c$, $\beta_2=0$. Воспользовавшись формулой 12.24 (1) из § 10 книги О. И. Маричева [10] и обратным переходом по теореме о свертке (1.116), получим следующее композиционное разложение через коммутирующие операторы:

$$\int_0^\infty \frac{t^{2a-1}}{(x+t)^{2a}}\, {}_2F_1\left(a,\ a+\frac{1}{2};\ c;\ \frac{4xt}{(x+t)^2}\right) f(t)\,dt =$$

$$= \mathrm{B}(c,\ c-2a)(x^{1-c} I_{0+}^{c-2a} x^{2a-1})(I_{-}^{c-2a} x^{2a-c}) f(x), \qquad (10.39)$$

$$\operatorname{Re}(c-2a)>0,\quad 2p\operatorname{Re}a>1,\quad f(x)\in L_p(0,\infty),\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Б. Пусть в (10.37) $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta_1=\alpha/2$, $\beta_2=0$. Тогда аналогичным способом, но с помощью формулы 2.5(1) § 10 книги О. И. Маричева [10] получаем следующее разложение:

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}}{|x-t|^{1-\alpha}} f(t)\,dt =$$

$$= 2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,(x^{\alpha/2}I_{0+}^{\alpha/2}x^{-\alpha})(I_{-}^{\alpha/2}x^{-\alpha/2})f(x), \tag{10.40}$$

$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad p(1-\operatorname{Re}\alpha)>1,\quad f(x)\in L_p(0,\infty),\ 1\leqslant p<\infty.$$

Подробнее о таких операторах см. в § 12, п. 3°, в частности ср. (10.40) с (12.39).

В. Пусть в (10.37) $\alpha_1=\beta_2=0$, $\alpha_2=\beta_1=1/2$. Тогда из формулы 2.4(1) § 10 книги О. И. Маричева [10] аналогично находим разложения

$$x^{1/2}I_{0+}^{-1/2}I_{-}^{1/2}x^{-1/2}f(x)=(Sf)(x), \tag{10.41}$$

$$I_{-}^{1/2}I_{0+}^{-1/2}f(x)=(Sf)(x),$$

где $(Sf)(x)$ — сингулярный интеграл (11.1) при $a=0$, $b=\infty$.

Г. Пусть в (10.37) $\alpha_1=\beta_2=-\alpha$, $\alpha_2=\beta_1=0$ или $\alpha_1=\beta_2=0$, $\alpha_2=\beta_1=\alpha$. Тогда под интегралом в правой части (10.37) гамма-функции соответственно преобразуются в функции $\dfrac{\sin s\pi}{\sin(s-\alpha)\pi}=\cos\alpha\pi+\sin\alpha\pi\operatorname{ctg}(s-\alpha)\pi$ и $\dfrac{\sin(s+\alpha)\pi}{\sin s\pi}=\cos\alpha\pi+\sin\alpha\pi\operatorname{ctg}s\pi$, которым в силу (10.41) соответствуют операторы $\cos\alpha\pi E+\sin\alpha\pi x^{-\alpha}Sx^{\alpha}$ и $\cos\alpha\pi E+\sin\alpha\pi S$, E — тождественный оператор. Совершив тогда замены $f=\varphi$ и $I_{0+}^{-\alpha}f=\varphi$, в результате из (10.37) легко получим равенства (11.27) и (11.29), которые в § 11 устанавливаются другим более строгим способом.

3°. Композиции нескольких интегралов со степенными весами. Составив композицию вида (10.37) из трех операторов $x^{\beta_j}I_{0+}^{\alpha_j-\beta_j}x^{-\alpha_j}$ или $x^{\beta_j}I_{-}^{\alpha_j-\beta_j}x^{-\alpha_j}$, $j=1,2,3$, и подобрав параметры α_j, β_j так, чтобы все гамма-функции под интегралом сократились, получим на основе формулы (1.113) следующие соотношения:

$$I_{0+}^{\gamma}x^{\alpha}I_{0+}^{\beta}x^{\gamma}I_{0+}^{\alpha}x^{\beta}f(x)=f(x), \tag{10.42}$$

$$I_{-}^{\gamma}x^{\alpha}I_{-}^{\beta}x^{\gamma}I_{-}^{\alpha}x^{\beta}f(x)=f(x), \tag{10.43}$$

где $\alpha+\beta+\gamma=0$. Очевидно, что эти соотношения после исключения γ приводят к эквивалентным им равенствам (10.6), (10.7). Условия справедливости указанных формул отражает

Теорема 10.6. *Пусть α и β — такие комплексные числа, что определена функция $m(\alpha,\alpha+\beta)$ (см. (10.1)). Тогда в классе функций $f(x)$, представимых в виде $f(x)=x^{u}I_{0+}^{m(\alpha,\alpha+\beta)}x^{v}\psi(x)$, где $\psi(x)\in L_p(0,b)$, $0<b<\infty$, $1\leqslant p<\infty$, имеют место формулы (10.6), (10.42), а в классе функций $f(x)$, представимых в виде $f(x)=x^{u}I_{-}^{m(\alpha,\alpha+\beta)}x^{v}\psi(x)$, где $\psi(x)\in L_p(a,\infty)$, $0<a<\infty$, $1\leqslant p<[\max(|\operatorname{Re}\alpha|,|\operatorname{Re}\beta|,|\operatorname{Re}(\alpha+\beta)|)]^{-1}$, имеют место формулы (10.7), (10.43). Значения параметров u и v для обоих случаев указаны в табл. 10.3. Если функция $m(\alpha,\alpha+\beta)$ не определена, то приведенные утверждения сохраняют силу при дополнительных условиях на $f(x)$, которые получаются из замечания 10.1 после замен x на x^{-1} и $f(x)$ на $x^{-\alpha-\beta-1}f(x^{-1})$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ и $f\in L_p(0, b)$. Тогда из условия $p(1+\operatorname{Re}\beta)>p\geqslant 1$ и неравенства (5.46′) вытекает принадлежность функции $\varphi(x)=x^{-\alpha-\beta}I_{0+}^{\alpha}x^{\beta}f(x)$ пространству $L_p(0, b)$. Значит, композиция в левой части (10.6) существует в $L_p(0, b)$. Правая часть этой формулы при указанных условиях также существует и принадлежит $L_p(0, b)$. Проверив равенство (10.6) на плотном в $L_p(0, b)$ множестве достаточно «хороших» функций, мы можем его распространить на все $L_p(0, b)$, воспользовавшись теоремой Банаха 1.7.

ТАБЛИЦА 10.3

№ п. п.	Условие	Значение
1	$\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$	$u=v=0$
2	$\operatorname{Re}\beta<0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$	$u=-\beta$, $v=0$
3	$\operatorname{Re}\alpha<0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$	$u=-\beta$, $v=\alpha+\beta$
4	$\operatorname{Re}\beta>0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<0$	$u=-\beta$, $v=0$
5	$\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<0$	$u=0$, $v=\alpha$
6	$\operatorname{Re}\alpha<0$, $\operatorname{Re}\beta<0$	$u=v=0$

В случае правостороннего оператора вместо указанного условия $p(1+\operatorname{Re}\beta)>1$, которое выполнялось автоматически, из неравенства (5.45′) появляется условие $p\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1$.

Все остальные пять случаев сводятся к первому, если воспользоваться утверждением первого случая, но по отношению к соответствующим аналогам равенства (10.6):

$$\begin{aligned}
x^{\alpha+\beta}I_{0+}^{-\beta}x^{-\alpha}I_{0+}^{\alpha+\beta}x^{-\beta}(x^{\beta}f(x)) &= I_{0+}^{\alpha}(x^{\beta}f(x)),\\
x^{-\alpha}I_{0+}^{\alpha+\beta}x^{-\beta}I_{0+}^{-\alpha}x^{\alpha+\beta}\psi(x) &= I_{0+}^{\beta}\psi(x),\\
x^{\beta}I_{0+}^{-\alpha-\beta}x^{\alpha}I_{0+}^{\beta}x^{-\alpha-\beta}\psi(x) &= I_{0+}^{-\alpha}\psi(x),\\
x^{-\alpha-\beta}I_{0+}^{\alpha}x^{\beta}I_{0+}^{-\alpha-\beta}x^{\alpha}\psi(x) &= I_{0+}^{-\beta}\psi(x),\\
x^{-\beta}I_{0+}^{-\alpha}x^{\alpha+\beta}I_{0+}^{-\beta}x^{-\alpha}\psi(x) &= I_{0+}^{-\alpha-\beta}\psi(x),
\end{aligned}\tag{10.44}$$

в которых функции $\psi(x)$ связаны с $f(x)$ формулами, указанными в условии теоремы и табл. 10.3. В самом деле, например, первые две формулы (10.44) получаются из (10.6) соответственно применением к (10.6) оператора $x^{\alpha+\beta}I_{0+}^{-\beta}x^{-\alpha}$ и заменой $\psi(x)=x^{-\alpha-\beta}I_{0+}^{\alpha}x^{\beta}f(x)$ и отличаются от (10.6) заменами β на $-\beta$, α на $\alpha+\beta$, f на $x^{\beta}f$ и β на $\alpha+\beta$, α на $-\alpha$, f на ψ. Выписав для этих формул соответствующие им условия первой строки табл. 10.3 и совершив обратный переход к виду (10.6), легко придем к условиям, указанным в строках 2 и 3. В случае правосторонних операторов справедливы аналогичные соотношения, получаемые из (10.44) заменой индекса $0+$ на $-$. Полученные шесть групп условий можно объединить с помощью обозначения (10.1) в условия, приведенные в формулировке теоремы. Последнее утверждение теоремы 10.6 вытекает из теоремы 10.1, замечания 10.1 и указанных замен, связывающих формулы (10.4), (10.5) и (10.7), (10.6). В случае $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma)>0$ композиции из левых частей (10.42), (10.43) выражаются через интегральные операторы, содержащие в ядрах функцию Горна (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, 5.7.1(8)]):

$$F_3(a, a', b, b'; c; x, y)=$$

$$=\sum_{k, l=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k(a')_l(b')_l}{(c)_{k+l}k!l!}x^k y^l,\quad 0<x, y<1.\tag{10.45}$$

В самом деле, композиция двух дробных интегралов, например, вида (10.22) приводит к оператору (10.18). Применив к нему еще один дробный интеграл с весом, получим следующее представление для композиции трех дробных интегралов типа (10.42):

$$I_{0+}^{\alpha}x^{\beta}{}_1I_{0+}^{c}(a,\ b)\varphi(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}t^{\beta}dt\times$$

$$\times\int_0^t\frac{(t-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^x\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c)}\int_\tau^x t^{\beta}(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{c-1}{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{t}{\tau}\right)dt=$$

$$=\int_0^x\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k(-\tau)^{-k}}{(c)_k\,k!}\int_\tau^x t^{\beta}(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{c+k-1}dt=$$

$$=\int_0^x\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c)}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k(-\tau)^{-k}\Gamma(\alpha)\Gamma(c+k)(x-\tau)^{\alpha+c+k-1}x^{\beta}}{(c)_k\,k!\,\Gamma(\alpha+c+k)(\alpha+c+k)_l\,l!}\times$$

$$\times(-\beta)_l(\alpha)_l\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^l=x^{\beta}\int_0^x\frac{(x-\tau)^{\alpha+c-1}}{\Gamma(\alpha+c)}\times$$

$$\times F_3(a,\ \alpha,\ b,\ -\beta;\ \alpha+c;\ 1-x/\tau,\ 1-\tau/x)\,\varphi(\tau)\,d\tau,\quad \operatorname{Re}(\alpha+c)>0. \tag{10.46}$$

Здесь при вычислениях предполагалось, что $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$, применялась теорема Фубини, замена $t=x-\eta(x-\tau)$ и разложение в гипергеометрический ряд внутреннего интеграла с помощью формулы (1.72). Эти операции законны и приводят к правой части (10.46) при условиях сходимости соответствующих рядов, которые затем могут быть ослаблены или даже устранены с помощью принципа аналитического продолжения равенств, если через функцию F_3 из правой части (10.46) обозначать не только двойной ряд (10.45), но и его аналитическое продолжение за пределы области $0<x,\ y<1$. Таким же образом условие $\operatorname{Re}\alpha>0$ можно ослабить до $\operatorname{Re}(\alpha+c)>0$.

Совершив в (10.46) замены α на a', β на $-b'$, $\alpha+c$ на c и приняв во внимание (10.22), (10.35), несложно найти следующий аналог равенства (10.37):

$$\int_0^x\frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}F_3\left(a,\ a',\ b,\ b';\ c;\ 1-\frac{x}{\tau},\ 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(1+a-c-s)\Gamma(1+b-c-s)\Gamma(1-a'-b'-s)}{\Gamma(1+a+b-c-s)\Gamma(1-a'-s)\Gamma(1-b'-s)}\varphi^*(s+c)\,x^{-s}ds, \tag{10.47}$$

$$\operatorname{Re}s<1+\operatorname{Re}(a-c),\ 1+\operatorname{Re}(b-c),\ 1-\operatorname{Re}(a'+b').$$

В силу (10.35) каждая пара гамма-функций (по одной функции из числителя и знаменателя) из правой части (10.47) соответствует одному

дробному интегралу со степенными весами. Значит, шести гамма-функциям из (10.47) соответствует шесть вариантов композиций из трех таких интегралов, причем интегралы внутри каждой композиции могут располагаться в различном порядке шестью способами. Если еще учесть, что каждому такому расположению еще соответствуют шесть вариантов условий, которые связаны с различными вариантами знаков порядков этих интегралов, то становится ясным, что выписывание всех вариантов композиционных разложений оператора (10.47) и условий типа табл. 10.2 не целесообразно.

Композиция произвольного числа операторов (10.35), (10.36) по аналогии с (10.37) приводит к равенствам

$$\prod_{j=1}^{m}(x^{\beta_j}I_{0+}^{\alpha_j-\beta_j}x^{-\alpha_j})\prod_{k=1}^{n}(x^{\delta_k}I_{-}^{\gamma_k-\delta_k}x^{-\gamma_k})f(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(1-\alpha_j-s)}{\Gamma(1-\beta_j-s)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\delta_k+s)}{\Gamma(\gamma_k+s)}f^*(s)\,x^{-s}ds=$$

$$=\int_0^\infty G_{m+n,m+n}^{n,m}\left(\frac{x}{t}\middle|\begin{matrix}(\alpha)_m,(\gamma)_n\\(\delta)_n,(\beta)_m\end{matrix}\right)f(t)\,\frac{dt}{t}, \qquad (10.48)$$

где в правой части содержится G-функция Мейера (1.95). Для справедливости второго из равенств (10.48) необходимо условие $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j-\beta_j)+\right.$ $\left.+\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k-\delta_k)\right)>0$ (см. теорему 36.3, условие (36.21)).

Достаточные условия, обеспечивающие коммутативность операторов, заключенных в круглые скобки слева (10.48), доставляет следующая

Теорема 10.7. *Пусть* $f(x)\in L_p(0,\infty)$, $p(1-\operatorname{Re}\alpha_j)>1$, $j=1,2,\ldots,m$, $p\operatorname{Re}\delta_k>-1$, $k=1,2,\ldots,n$, *и* $p\geqslant 1$, $\operatorname{Re}(\alpha_j-\beta_j)>0$, $\operatorname{Re}(\gamma_k-\delta_k)>0$ *или* $p>1$, $\operatorname{Re}(\alpha_j-\beta_j)\geqslant 0$, $\operatorname{Re}(\gamma_k-\delta_k)\geqslant 0$. *Тогда операторы в скобках левой части* (*10.48*) *коммутативны. Если еще* $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j-\beta_j)+\right.$ $\left.+\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k-\delta_k)\right)>0$, *то левая и правая части* (*10.48*) (*без середины*) *ограниченно действуют из* $L_p(0,\infty)$ *в* $L_p(0,\infty)$ *и совпадают между собой.*

Доказательство следует из ограниченности левой части (10.48) в $L_p(0,\infty)$, имеющей место при условиях теоремы. Рассуждения здесь те же, что и при рассмотрении случая $j=1$ в доказательстве теоремы 10.2, но с учетом замечаний после формулы (5.46′).

Как и в случае теорем 10.1, 10.2, условия теоремы 10.7 можно ослабить, распространив эту теорему на отрицательные значения $\operatorname{Re}(\alpha_j-\beta_j)$ или $\operatorname{Re}(\gamma_k-\delta_k)$ и сузив класс $L_p(0,\infty)$ до соответствующего пространства функций, представимых через дробные интегралы других функций из $L_p(0,\infty)$.

В заключение пункта отметим, что при соответствующих условиях коммутативность имеет место и для произведений более общих операторов вида $x^{h\beta}I_{0+;x^h}^{\alpha-\beta}x^{-h\alpha}$, $x^{m\beta}I_{-;x^m}^{\alpha-\beta}x^{-m\alpha}$, см. § 18, п. 2°.

4°. Композиции с экспоненциальными и степенно-экспоненциальными весами. Вначале рассмотрим случай композиции двух левосторонних интегралов с экспоненциальными весами. Справедлива следующая

Лемма 10.3. *Пусть* $\psi(x)\in L_p(0,\ b)$, $0<b<\infty$, $1\leqslant p<\infty$, *и* $\operatorname{Re}\alpha\neq 0$. *Тогда для того чтобы* $\psi(x)$ *была представима в виде* $\psi(x)=e^{\lambda x}I_{0+}^{\alpha}e^{-\lambda x}f(x)$, *где* $f(x)\in I_{0+}^{m(\alpha)}(L_p(0,\ b))$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(x)\in I_{0+}^{m(-\alpha)}(L_p(0,\ b))$.

Доказательство. В случае $\operatorname{Re}\alpha>0$ утверждение леммы является прямым следствием леммы 31.4, поскольку из этой леммы вытекает ограниченное действие оператора $e^{\lambda x}I_{0+}^{\alpha}e^{-\lambda x}$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, из пространства $L_p(0,\ b)$, $0<b<\infty$, $1\leqslant p<\infty$, на пространство $I_{0+}^{\alpha}(L_p(0,\ b))$. Случай $\operatorname{Re}\alpha<0$ здесь рассматривается так же, как и при доказательстве леммы 10.1.

Сказанное позволяет сформулировать следующий аналог теоремы 10.1.

Теорема 10.8. *Пусть* α *и* β *— такие комплексные числа, что определена функция* $m(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta)$. *Тогда в классе функций* $I_{0+}^{m(\alpha,\beta,\alpha+\beta)}(L_p(0,\ b))$, $0<b<\infty$, $1\leqslant p<\infty$, *операторы* I_{0+}^{α} *и* $e^{\lambda x}I_{0+}^{\beta}e^{-\lambda x}$ *коммутативны, т. е. имеет место равенство*

$$I_{0+}^{\alpha}e^{\lambda x}I_{0+}^{\beta}e^{-\lambda x}f(x)=e^{\lambda x}I_{0+}^{\beta}e^{-\lambda x}I_{0+}^{\alpha}f(x). \tag{10.49}$$

Если $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$, $\operatorname{Re}\beta\neq 0$, *то при* $f(x)\in I_{0+}^{m(\beta)}(L_p(0,\ b))$ *справедливо равенство*

$$I_{0+}^{\alpha}e^{\lambda x}I_{0+}^{\beta}e^{-\lambda x}f(x)=\int_0^x\frac{(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,{}_1F_1(\beta;\ \alpha+\beta;\ \lambda(x-\tau))\,f(\tau)\,d\tau. \tag{10.50}$$

Если $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$, $\operatorname{Re}\alpha\neq 0$, *то при* $f(x)\in I_{0+}^{m(\alpha)}(L_p(0,\ b))$ *справедливо равенство*

$$e^{\lambda x}I_{0+}^{\beta}e^{-\lambda x}I_{0+}^{\alpha}f(x)=\int_0^x\frac{(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,{}_1F_1(\beta;\ \alpha+\beta;\ \lambda(x-\tau))\,f(\tau)\,d\tau. \tag{10.51}$$

В случае $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$ *операторы (10.50), (10.51) ограниченно действуют из указанных пространств на пространство* $I_{0+}^{\alpha+\beta}(L_p(0,\ b))$.

Доказательство. Из всех утверждений остается доказать лишь справедливость равенств (10.49) — (10.51), причем это достаточно сделать в пространстве $L_1(0,\ b)$. В силу теоремы Фубини после вычислений и применения интегрального представления 6.5(1) из справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1] имеем

$$I_{0+}^{\alpha}e^{\lambda x}I_{0+}^{\beta}e^{-\lambda x}f(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,e^{\lambda t}dt\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,e^{-\lambda\tau}f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^x\frac{(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,f(\tau)\,d\tau\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}e^{\lambda u(x-\tau)}du=$$

$$=\int_0^x\frac{(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,{}_1F_1(\beta;\ \alpha+\beta;\ \lambda(x-\tau))\,f(\tau)\,d\tau,\ \operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0. \tag{10.52}$$

Применив далее формулу 6.3(7) указанного справочника и воспользовавшись равенством (10.52), но в обратном порядке, придем к соотношению (10.51). Из (10.50), (10.51) следует равенство (10.49) в случае $\operatorname{Re}\alpha>0$ и $\operatorname{Re}\beta>0$. Последние ограничения можно ослабить, заменив их

на условия, указанные в теореме, которые обеспечивают существование всех операторов из этих равенств. Теорема доказана.

Отметим, что соотношение (10.49) дает возможность композицию произвольного числа операторов $I_{0+}^{\alpha_j} e^{\pm\lambda x}$ с чередующимися знаками при λx выразить через композицию лишь двух таких операторов. Например, справедливы равенства

$$I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\gamma} e^{-\lambda x} f(x) = I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} (e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} \times$$
$$\times e^{-\lambda x} I_{0+}^{\gamma} f(x)) = I_{0+}^{\alpha+\beta} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\gamma} f(x), \tag{10.53}$$

$$I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\gamma} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\delta} e^{\lambda x} f(x) = I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} \times$$
$$\times (I_{0+}^{\beta+\gamma} e^{\lambda x} I_{0+}^{\delta} f(x)) = I_{0+}^{\alpha+\beta+\gamma} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\delta} e^{\lambda x} f(x). \tag{10.54}$$

По аналогии с операторами (10.18) — (10.21) введем операторы

$$(I_{0+}^{c,a,\lambda} f)(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a;\ c;\ \lambda(x-\tau)) f(\tau)\, d\tau, \tag{10.55}$$

$$(I_{-}^{c,a,\lambda} f)(x) = \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a;\ c;\ \lambda(x-\tau)) f(\tau)\, d\tau,\ \operatorname{Re} c > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{10.56}$$

Очевидно, что

$$I_{0+}^{c,0,\lambda} = I_{0+}^{c,a,0} = I_{0+}^{c}, \quad I_{0+}^{c,c,\lambda} = e^{\lambda x} I_{0+}^{c} e^{-\lambda x},$$
$$I_{-}^{c,0,\lambda} = I_{-}^{c,a,0} = I_{-}^{c}, \quad I_{-}^{c,c,\lambda} = e^{\lambda x} I_{-}^{c} e^{-\lambda x}. \tag{10.57}$$

Из соотношений (10.50), (10.51) после замен $\beta = a$, $\alpha + \beta = c$ вытекают первые две из четырех формул:

$$(I_{0+}^{c,a,\lambda} f)(x) = I_{0+}^{c-a} e^{\lambda x} I_{0+}^{a} e^{-\lambda x} f(x), \tag{10.58}$$

$$(I_{0+}^{c,a,\lambda} f)(x) = e^{\lambda x} I_{0+}^{a} e^{-\lambda x} I_{0+}^{c-a} f(x), \tag{10.59}$$

$$(I_{-}^{c,a,\lambda} f)(x) = I_{-}^{c-a} e^{\lambda x} I_{-}^{a} e^{-\lambda x} f(x), \tag{10.60}$$

$$(I_{-}^{c,a,\lambda} f)(x) = e^{\lambda x} I_{-}^{a} e^{-\lambda x} I_{-}^{c-a} f(x), \tag{10.61}$$

две последние устанавливаются аналогично. Для их исследования нам понадобится следующая лемма, которая получается из теорем 18.2, 18.3 и связанных с ними рассуждений.

Лемма 10.4. *Оператор* $e^{\lambda x} I_{-}^{\alpha} e^{-\lambda x} f(x)$ *при* $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $1 \leqslant p < (\operatorname{Re}\alpha)^{-1}$ *ограниченно действует из пространства* $L_p(a, \infty)$, $0 < a < \infty$, *на пространство* $I_{-}^{\alpha}(L_p(a, \infty))$.

Условия, при которых выполняются соотношения (10.58) — (10.61), отражаются следующей легко проверяемой теоремой.

Теорема 10.9. *Пусть* $\operatorname{Re} c > 0$ *и выполняются какие-либо из условий* A_j *табл. 10.4. Тогда оператор* B_j *определен на множестве* C_j *из пространства* $L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, *и ограниченно отображает* C_j *на множество* D_j, *причем имеет место равенство* E_j.

Композиции разносторонних интегралов с экспоненциальными весами, вообще говоря, приводят к интегральным операторам весьма громоздкого вида. Исключение составляют лишь отдельные частные случаи, один из которых мы здесь рассмотрим. Воспользовавшись формулой 2.3.6.10 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1], вычислим следующую композицию:

ТАБЛИЦА 10.4

j	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\operatorname{Re} a > 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$L_p(0, b)$	$I_{0+}^{c}(L_p(0, b))$	(10.58)
2	$\operatorname{Re} a < 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$I_{0+}^{-a}(L_p(0, b))$	$I_{0+}^{c-a}(L_p(0, b))$	(10.58)
3	$\operatorname{Re}(c-a) > 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$L_p(0, b)$	$I_{0+}^{c}(L_p(0, b))$	(10.59)
4	$\operatorname{Re}(c-a) < 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$I_{0+}^{a-c}(L_p(0, b))$	$I_{0+}^{a}(L_p(0, b))$	(10.59)
5	$\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $p \max(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} c) < 1$	$I_{-}^{c,a,\lambda}$	$L_p(a, \infty)$	$I_{-}^{c}(L_p(a, \infty))$	(10.60)
6	$\operatorname{Re} a < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $p \operatorname{Re}(c-a) < 1$	$I_{-}^{c,a,\lambda}$	$\{e^{\lambda x} I_{-}^{-a} \times e^{-\lambda x} \psi, \psi \in L_p(a, \infty)\}$	$I_{-}^{c-a}(L_p(a, \infty))$	(10.60)
7	$\operatorname{Re}(c-a) > 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $p \max(\operatorname{Re} c, \operatorname{Re}(c-a)) < 1$	$I_{-}^{c,a,\lambda}$	$L_p(a, \infty)$	$I_{-}^{c}(L_p(a, \infty))$	(10.61)
8	$\operatorname{Re}(c-a) < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $p \operatorname{Re} a < 1$	$I_{-}^{c,a,\lambda}$	$I_{-}^{a-c}(L_p(a, \infty))$	$\{e^{\lambda x} I_{-}^{a} e^{-\lambda x}\chi, \chi \in L_p(a, \infty)\}$	(10.61)

$$I_{-}^{\alpha} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\alpha} f(x) = \int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{\Gamma^2(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}\,dt +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{f(\tau)\,d\tau}{\Gamma^2(\alpha)} \int_\tau^\infty (t-x)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\lambda^{1/2-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^\infty |x-\tau|^{\alpha-1/2} e^{-\lambda(x+\tau)/2} K_{\alpha-1/2}\left(\frac{\lambda}{2}|x-\tau|\right) f(\tau)\,d\tau, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \qquad (10.62)$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (1.85). Очевидно, что для этого оператора можно доказать соответствующий аналог теоремы 10.9, но свойство типа (10.43) для него не имеет места.

Композиция двух односторонних дробных интегралов со степенно-экспоненциальными весами приводит к формуле

$$I_{0+}^{\alpha} x^{-\delta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} x^{\delta} e^{-\lambda x} f(x) =$$

$$= \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \Phi_1\left(\beta, \delta; \alpha+\beta; 1-\frac{x}{t}, \lambda(x-t)\right) f(t)\,dt, \qquad (10.63)$$

где Φ_1 — одна из функций Гумберта:

$$\Phi_1(\beta, \delta; \gamma; x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_{j+k}(\delta)_j}{(\gamma)_{j+k}\, j!\, k!} x^j y^k, \quad |x| < 1 \qquad (10.64)$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 5.7.1(20)] с исправлением опечатки в индексе). Эта формула устанавливается так же, как и формула (10.50).

§ 11. СВЯЗЬ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С СИНГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Изучается связь операторов дробного интегрирования с сингулярным интегральным оператором и показывается, как левостороннее дробное интегрирование выражается через правостороннее (и наоборот) с помощью сингулярного оператора. Предварительно излагаются необходимые сведения о сингулярном операторе.

1°. Сингулярный оператор S. Пусть по-прежнему $\Omega=[a, b]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$(S\varphi)(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},\quad x\in(a, b),\tag{11.1}$$

где сходимость понимается в смысле главного значения. С теорией таких интегралов и с доказательством приводимых ниже теорем 11.1—11.3 можно ознакомиться по книгам Ф. Д. Гахова [1], Н. И. Мусхелишвили [1], И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4]. Здесь приведем свойства оператора S, которые нам неоднократно понадобятся в дальнейшем. Важным свойством оператора S является свойство его ограниченности в пространствах $H_0^\lambda(\rho)$ и $L_p(\rho)$. Пусть $\rho(x)$ — вес вида (1.7) или (1.9), причем $x_1=a$, $x_n=b$ в случае, если a, b — конечные точки.

Теорема 11.1. *Если* $\operatorname{mes}\Omega<\infty$, $0<\lambda<1$, *то оператор* S *ограничен в пространстве* H_0^λ *и в пространстве* $H_0^\lambda(\rho)$, $\rho(x)=\prod\limits_{k=1}^n|x-x_k|^{\mu_k}$, $x_k\in\Omega$, *если* $\lambda<\mu_k<\lambda+1$ $(k=1, \ldots, n)$.

Теорема 11.2. *Если* $\operatorname{mes}\Omega=\infty$, $0<\lambda<1$, *то оператор* S *ограничен в пространстве* $H_0^\lambda(\rho)$, $\rho(x)=(1+x^2)^{\mu/2}\prod\limits_{k=1}^n|x-x_k|^{\mu_k}$, $x_k\in\Omega$, *если* $\lambda<\mu_k<\lambda+1$ $(k=1, \ldots, n)$ *и* $-\lambda<\mu+\sum\limits_{k=1}^n\mu_k<1-\lambda$.

Теорема 11.3. *Оператор* S *ограничен в пространстве* $L_p(\rho)$, $1<p<\infty$, $\rho(x)=(1+x^2)^{\mu/2}\prod\limits_{k=1}^n|x-x_k|^{\mu_k}$, $x_k\in\Omega$, *если* $-1<\mu_k<p-1$ $(k=1, \ldots, n)$ *и если* (*в случае* $\operatorname{mes}\Omega=\infty$) $-1<\mu+\sum\limits_{k=1}^n\mu_k<p-1$.

В случае $\Omega=R^1$ известно, см. работу С. Пихоридеса (S. K. Pichorides [1]), точное значение нормы сингулярного оператора S в пространстве $L_p(R^1)$:

$$\|S\|=\operatorname{tg}\{\pi[2\min(p, p')]^{-1}\}.\tag{11.1'}$$

Известно также, что в случае $\Omega=R^1$ выполняется равенство $S^{-1}=-S$, так что

$$S^2\varphi=-\varphi,\tag{11.2}$$

а преобразование Фурье сингулярного интеграла $S\varphi$ дается формулой

$$\widehat{(S\varphi)}(x)=i\operatorname{sign}x\,\varphi(x).\tag{11.3}$$

В случае, когда $[a, b]$ — конечный отрезок, справедливы следующие формулы:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{(t-a)^{\mu-1}(b-t)^{-\mu}}{t-x}\,dt=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sin \mu\pi} \left| \dfrac{x-a}{x-b} \right|^{\mu-1} \dfrac{1}{b-x}, & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \\ -\operatorname{ctg} \mu\pi \dfrac{(x-a)^{\mu-1}}{(b-x)^{\mu}}, & \text{если } a < x < b \end{cases} \tag{11.4}$$

$$(0 < \operatorname{Re} \mu < 1);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{\mu} \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sin \mu\pi} \left[1 - \left| \dfrac{x-a}{x-b} \right|^{\mu} \right], & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \\ \dfrac{1}{\sin \mu\pi} \left[1 - \cos \mu\pi \left(\dfrac{x-a}{b-x} \right)^{\mu} \right], & \text{если } a < x < b \end{cases} \tag{11.5}$$

$$(-1 < \operatorname{Re} \mu < 1);$$

$$\int_a^b \frac{(t-a)^{\nu-1} (b-t)^{\mu-1} dt}{t-x} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{\mu+\nu-1}}{b-x} \mathrm{B}(\mu, \nu) {}_2F_1 \left(1, \mu; \mu+\nu; \dfrac{b-a}{b-x} \right), & \text{если } x < a \text{ или } x > b; \\ (x-a)^{\nu-1} (b-x)^{\mu-1} \pi \operatorname{ctg} \mu\pi - (b-a)^{\mu+\nu-2} \mathrm{B}(\mu-1, \nu) \times & \\ \quad \times {}_2F_1 \left(2-\mu-\nu, 1; 2-\mu; \dfrac{b-x}{b-a} \right), & \text{если } a < x < b \end{cases} \tag{11.6}$$

$$(\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0)$$

(см. справочники А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.2.6.5—8] и Г. Бейтмена, А. Эрдейи [4, 15.2(33)]). Заметим, что при $x \notin (a, b)$ интегралы (11.4) — (11.6) вычисляются простыми заменами переменных. Так, например, при $x < a$ замена $s = \dfrac{(t-a)(b-x)}{(b-a)(t-x)}$ приводит (11.4) к бета-функции и эта же замена в силу (1.73) дает формулу (11.6) при $x > b$. Для значений $a < x < b$ требуемые равенства можно получить из формул для $x \notin (a, b)$ с помощью формул Сохоцкого, известных в теории сингулярных интегралов (см. Ф. Д. Гахов [1, с. 38]).

Справедливы также (Ф. Д. Гахов [1, с. 530—531]) формулы

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\frac{\alpha}{2}} (b-t)^{\frac{\alpha}{2}} |t-y|^{1-\alpha} (t-x)} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign}(y-x)}{(x-a)^{\alpha/2} (b-x)^{\alpha/2} |x-y|^{1-\alpha}}, \tag{11.7}$$

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sign}(t-y)\, dt}{(t-a)^{\frac{1+\alpha}{2}} (b-t)^{\frac{1+\alpha}{2}} |t-y|^{1-\alpha} (t-x)} = \frac{\pi \operatorname{tg} \dfrac{\alpha\pi}{2}}{(x-a)^{\frac{1+\alpha}{2}} (b-x)^{\frac{1+\alpha}{2}} |x-y|^{1-\alpha}}, \tag{11.8}$$

где $a < x < b$, $a < y < b$, $0 < \alpha < 1$.

Отметим, наконец, формулу перестановки сингулярных интегралов:

$$\int_a^b \frac{dy}{y-x} \int_a^b \frac{\varphi(y,\ t)\,dt}{t-y} = -\pi^2\varphi(x,\ x) + \int_a^b dt \int_a^b \frac{\varphi(y,\ t)\,dy}{(y-x)(t-y)}, \qquad (11.9)$$

называемую *формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана* (см. Ф. Д. Гахов [1, с. 63]).

2°. Случай оси. В случае оси формулы связи дробных интегралов $I_+^\alpha\varphi$, $I_-^\alpha\varphi$ с сингулярным оператором S имеют самый простой вид.

Теорема 11.4. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\varphi(x)\in L_p(R^1)$. *Тогда дробные интегралы* I_+^α, I_-^α *и сингулярный оператор* S *связаны соотношениями*

$$I_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi I_+^\alpha\varphi + \sin\alpha\pi\, SI_+^\alpha\varphi, \quad 1\leqslant p<1/\alpha, \qquad (11.10)$$

$$I_+^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi I_-^\alpha\varphi - \sin\alpha\pi SI_-^\alpha\varphi, \quad 1\leqslant p<1/\alpha, \qquad (11.11)$$

$$SI_\pm^\alpha\varphi = I_\pm^\alpha S\varphi, \quad 1<p<1/\alpha. \qquad (11.12)$$

Доказательство. Пусть вначале $\varphi\in C_0^\infty$. Рассмотрим интеграл

$$SI_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-x}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Здесь можно поменять порядок интегрирования (такая возможность в случае, когда только один из интегралов является сингулярным, известна, см. книги Ф. Д. Гахова [1], Н. И. Мусхелишвили [1]). Поэтому

$$SI_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{\infty}\frac{dt}{(t-\tau)^{1-\alpha}(t-x)}.$$

Внутренний интеграл после замены $t=\tau+s/(1-s)$

$$\int_\tau^\infty \frac{dt}{(t-\tau)^{1-\alpha}(t-x)} = \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}ds}{\tau-x+s(1+x-\tau)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}(\tau-x)^{\alpha-1}, & x<\tau, \\ -\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi\,(x-\tau)^{\alpha-1}, & x>\tau, \end{cases}$$

согласно (11.4). Следовательно,

$$SI_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\sin\alpha\pi\Gamma(\alpha)}\left[\int_x^\infty\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha}} - \cos\alpha\pi\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}\right],$$

откуда и вытекает (11.10) для $\varphi\in C_0^\infty$. В силу плотности C_0^∞ в $L_p(R^1)$ результат, согласно теореме Банаха 1.7, распространяется на $L_p(R^1)$ за счет ограниченности операторов $I_\pm^\alpha$ из $L(R^1)$ в $L_q(R^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$ (теорема 5.3) и ограниченности оператора S в $L_q(R^1)$ (теорема 11.3). В случае $p=1$ вместо теоремы 5.3 следует привлечь теорему 5.6 (и замечание 5.2).

Формула (11.11) следует из (11.10) на основании перехода (5.9) с учетом того, что $QS=-SQ$, где $Q\varphi=\varphi(-x)$.

Коммутация (11.12) очевидна на хороших функциях в силу того, что на таких функциях можно перейти к образам Фурье (см. формулы (7.1) и (11.3)). Для функций же из L_p остается вновь сослаться на ограниченность операторов $I_{\pm}^{\alpha}$ и S.

Следствие 1. *Справедливо совпадение образов*

$$I_{+}^{\alpha}(L_p) = I_{-}^{\alpha}(L_p) \overset{\text{def}}{=} I^{\alpha}(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha$$

(см. (6.1)). Класс $I^{\alpha}(L_p)$ инвариантен относительно оператора S.

Действительно, $I_{\pm}^{\alpha}\varphi = I_{\mp}^{\alpha}(\cos\alpha\pi\varphi \mp \sin\alpha\pi S\varphi)$, и поэтому совпадение образов вытекает из ограниченности оператора S в L_p.

Следствие 2. *Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то*

$$I_{+}^{\alpha} I_{-}^{\beta} = [\cos(\beta - \alpha)\pi E + \sin(\beta - \alpha)\pi S]\, I_{-}^{\alpha} I_{+}^{\beta},$$

где E — тождественный оператор.

Следствие 3. *Дробные производные Маршо $\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f$, $\mathbf{D}_{-}^{\alpha} f$ связаны друг с другом тождеством*

$$\mathbf{D}_{-}^{\alpha} f = \cos\alpha\pi \mathbf{D}_{+}^{\alpha} f - \sin\alpha\pi S \mathbf{D}_{+}^{\alpha} f, \quad f \in I^{\alpha}(L_p). \tag{11.11'}$$

В самом деле, для получения (11.11') достаточно обозначить $I_{-}^{\alpha}\varphi = f$ в (11.11), применить в соответствии с теоремой 6.1 оператор $\mathbf{D}_{+}^{\alpha}$ к обеим частям в (11.11) и учесть (11.12).

Следствие 4. *При всех $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{D}_{-}^{\alpha} f\|_p \leqslant A \|\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f\|_p, \quad f \in I^{\alpha}(L_p), \tag{11.11''}$$

где $A = |\cos\alpha\pi| + \sin\alpha\pi \operatorname{tg}\{\pi[2\min(p, p')]^{-1}\}$.

Действительно, эта оценка вытекает из (11.11') и (11.1').

Замечание 11.1. Формулы (11.10) — (11.12) справедливы для $\varphi(x) \in L_p(\rho)$, $\rho(x) = (1 + x^2)^{\mu/2} \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\mu_k}$, $x_k \in R^1$, если $-1 < \mu_k < p - 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\alpha p - 1 < \mu + \sum_{k=1}^{n} \mu_k < p - 1$, $p > 1$. Это вытекает из теоремы типа Харди — Литтлвуда 5.5 и теоремы 11.3 согласно теореме Банаха 1.7.

Замечание 11.2. В теории сингулярных интегралов известна (Ф. Д. Гахов [1, с. 43]) простая формула дифференцирования сингулярного интеграла: $(Sf)^{(n)} = S(f^{(n)})$. Она имеет место и в случае дробного дифференцирования:

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha}(Sf) = S(\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f), \quad f \in I^{\alpha}(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha, \tag{11.13}$$

являясь перефразировкой свойства коммутации (11.12).

3°. Случай отрезка и полуоси. Выясним, как связаны между собой дробные интегралы $I_{a+}^{\alpha}\varphi$ и $I_{b-}^{\alpha}\varphi$ в случае конечного отрезка $[a, b]$. Эти связи сложнее, чем связи (11.10) — (11.12): сказывается влияние концов отрезка. Вопрос заключается в следующем: к какому результату приводит композиция $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha}$ (или $\mathscr{D}_{b-}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha}$)? Естественно ожидать, что операторы $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}$, I_{b-}^{α} в каком-то смысле уничтожают действие друг друга и их композиция является оператором, ограниченным, например, в стандартных пространствах H^{λ}, L_p. Мы увидим, что она содержит весовой сингулярный оператор.

Считая пока, что $\varphi \in C_0^{\infty}$, рассмотрим композицию

$$\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} \varphi = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} \varphi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(\tau)\, d\tau \int_a^{\min(x,\tau)} (x-t)^{-\alpha} (\tau - t)^{\alpha-1}\, dt.$$

Введем функцию

$$J_{\varepsilon}(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \Big[\int_a^{x-\varepsilon} \varphi(\tau)\, d\tau \int_a^{\tau} (x-t)^{-\alpha} (\tau - t)^{\alpha-1}\, dt +$$

$$+ \int_{x+\varepsilon}^b \varphi(\tau)\, d\tau \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (\tau - t)^{\alpha-1} dt \Big]$$

и обозначим

$$\mathscr{K}_1(x, \tau) \overset{\text{def}}{=} \int_a^{\tau} (x-t)^{-\alpha} (\tau - t)^{\alpha-1} dt = \int_0^{\frac{\tau-a}{x-\tau}} s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha} ds, \quad \tau < x,$$

$$\mathscr{K}_2(x, \tau) \overset{\text{def}}{=} \int_a^{x} (x-t)^{-\alpha} (\tau - t)^{\alpha-1} dt = \int_0^{\frac{x-a}{\tau-x}} s^{-\alpha} (1+s)^{\alpha-1} ds, \quad \tau > x.$$

Тогда

$$J_{\varepsilon}(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \Big[\mathscr{K}_1(x, x-\varepsilon) \varphi(x-\varepsilon) - \mathscr{K}_2(x, x+\varepsilon) \varphi(x+\varepsilon) +$$

$$+ \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \left(\frac{\tau - a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - x} \Big].$$

Отсюда

$$\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} \varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left\{ \int_a^b \left(\frac{\tau - a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - x} + \right.$$

$$\left. + \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(x) [\mathscr{K}_1(x, x-\varepsilon) - \mathscr{K}_2(x, x+\varepsilon)] \right\}.$$

Вычисляя предел, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\mathscr{K}_1(x, x-\varepsilon) - \mathscr{K}_2(x, x+\varepsilon)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \int_0^{\frac{x-a-\varepsilon}{\varepsilon}} [s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha} - s^{-\alpha} (1+s)^{\alpha-1}]\, ds -$$

$$- \int_{\frac{x-a-\varepsilon}{\varepsilon}}^{\frac{x-a}{\varepsilon}} s^{-\alpha} (1+s)^{\alpha-1} ds \Big\} = \int_0^{\infty} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha}} - \frac{(1+s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}} \right] ds = \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi$$

в силу формулы 2.2.12.3 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1]. Поэтому

$$\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} \varphi = \cos \alpha\pi \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{\tau - a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - x} \qquad (11.14)$$

и искомая связь найдена. Теперь, зная явный вид связи, легко дать строгое ее обоснование. Оно будет дано на функциях $\varphi \in L_p$. Одновременно получим и другие связи.

Теорема 11.5. *Пусть* $0 < \alpha < 1$,

$$r_a(x) = x - a, \quad r_b(x) = b - x. \tag{11.15}$$

Тогда дробные интегралы $I^\alpha_{a+}\varphi$, $I^\alpha_{b-}\varphi$ *и сингулярный оператор* S *связаны между собой соотношениями*

$$I^\alpha_{b-}\varphi = \cos \alpha\pi I^\alpha_{a+}\varphi + \sin \alpha\pi I^\alpha_{a+} r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p > 1, \tag{11.16}$$

$$I^\alpha_{a+}\varphi = \cos \alpha\pi I^\alpha_{b-}\varphi - \sin \alpha\pi I^\alpha_{b-} r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p > 1, \tag{11.17}$$

$$I^\alpha_{b-}\varphi = \cos \alpha\pi I^\alpha_{a+}\varphi + \sin \alpha\pi r_b^\alpha S r_b^{-\alpha} I^\alpha_{a+}\varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p \geqslant 1, \tag{11.18}$$

$$I^\alpha_{a+}\varphi = \cos \alpha\pi I^\alpha_{b-}\varphi - \sin \alpha\pi r_a^\alpha S r_a^{-\alpha} I^\alpha_{b-}\varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p \geqslant 1, \tag{11.19}$$

которые выполняются почти всюду, если $p\alpha \leqslant 1$, *и для всех* $x \in (a, b)$, *если* $p\alpha > 1$.

Доказательство. Пусть вначале $\varphi \in C_0^\infty$. Тождество (11.16) вытекает из (11.14), поскольку $I^\alpha_{a+}\mathcal{D}^\alpha_{a+} f = f$, но может быть проверено и непосредственной перестановкой порядка интегрирования в правой части в (11.16). Тождество (11.18) докажем непосредственной проверкой:

$$r_b^\alpha S \frac{1}{r_b^\alpha} I^\alpha_{a+}\varphi = \frac{(b-x)^\alpha}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau)\, d\tau \int_\tau^b \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(b-t)^{-\alpha}}{t-x}\, dt$$

(произведенная здесь перестановка порядка интегрирования сингулярного интеграла и абсолютно сходящегося, как уже упоминалось, возможна). Отсюда в силу (11.4) правая часть равна $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\sin \alpha\pi} \displaystyle\int_x^b \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - x)^{1-\alpha}} -$

$- \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha\pi}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$, что и дает (11.18). Соотношения (11.17), (11.19) вытекают из (11.16), (11.18) соответственно, если воспользоваться формулами (2.19) и учесть, что $QS = -SQ$.

Итак, тождества (11.16) — (11.19) установлены для $\varphi \in C_0^\infty$. Оператор $r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha$ ограничен в L_p, $1 < p < 1/\alpha$, в силу теоремы 11.3. Тогда ввиду ограниченности операторов I^α_{a+}, I^α_{b-} из L_p в L_q, $q = p/(1 - \alpha p)$, можно сделать вывод о том, что справедливость тождества (11.16) на плотном в L_p множестве C_0^∞ ввиду теоремы 1.7 влечет его справедливость на всех функциях $\varphi \in L_p$, $1 < p < 1/\alpha$. Подобным же образом обосновываются равенства (11.17) — (11.19) для $\varphi \in L_p$, $1 < p < 1/\alpha$. Ввиду вложения $L_{p_1}(a, b) \subset L_{p_2}(a, b)$, $p_1 > p_2$, тождества справедливы и при $p \geqslant 1/\alpha$.

Чтобы пояснить выполнимость тождеств в каждой точке $x \in (a, b)$ при $p > 1/\alpha$, запишем легко проверяемое равенство

$$\frac{1}{r_a^\alpha} S r_a^\alpha \varphi = \frac{1}{r_a^{\alpha-1}} S r_a^{\alpha-1} \varphi + \frac{c}{(x-a)^\alpha}, \quad c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \tag{11.20}$$

считая, что $\varphi \in L_p$, $p > 1/\alpha$. Так как оператор $r_a^{1-\alpha} S r_a^{\alpha-1}$ ограничен, согласно теореме 11.3, в L_p при $p > 1/\alpha$, то правая часть в (11.16) оказывается гельдеровской функцией в силу теоремы 3.6. Поэтому (11.16) справедли-

во в каждой точке. Аналогично обосновывается это утверждение для остальных тождеств.

Остался случай $p=1$ в (11.18) и (11.19). Подобно (11.20) получается, что

$$r_a^\alpha S\frac{1}{r_a^\alpha}f = r_a^{\alpha-1}Sr_a^{1-\alpha}f + \frac{c_1}{(x-a)^{1-\alpha}},\quad c_1=\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^\alpha}$$

в предположении, что существуют интегралы в правой части. Поэтому для $f = I_{b-}^\alpha\varphi$ простыми вычислениями находим

$$r_a^\alpha S\frac{1}{r_a^\alpha}I_{b-}^\alpha\varphi = r_a^{\alpha-1}S\frac{1}{r_a^{\alpha-1}}I_{b-}^\alpha\varphi - \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\pi}\Gamma(1-\alpha)\int_a^b\varphi(t)\,dt. \quad (11.21)$$

Отсюда усматривается ограниченность оператора $r_a^\alpha Sr_a^{-\alpha}I_{b-}^\alpha$ из L_1 в L_r, $1<r<1/(1-\alpha)$. Действительно, для второго слагаемого в правой части это очевидно, а для первого вытекает из теорем 5.6 и 11.3. Аналогично рассматривается случай $p=1$ в (11.18).

Следствие 1. *Классы функций, представимых дробными интегралами* $I_{a+}^\alpha\varphi$ *и* $I_{b-}^\alpha\varphi$ *с плотностью* $\varphi\in L_p$, *совпадают при* $1<p<1/\alpha$.

Действительно, в силу (11.16) и (11.17)

$$I_{b-}^\alpha\varphi = I_{a+}^\alpha(\cos\alpha\pi\varphi + \sin\alpha\pi r_a^{-\alpha}Sr_a^\alpha\varphi),$$

$$I_{a+}^\alpha\varphi = I_{b-}^\alpha(\cos\alpha\pi\varphi - \sin\alpha\pi r_b^{-\alpha}Sr_b^\alpha\varphi),$$

и поэтому следствие вытекает из ограниченности операторов $r_a^{-\alpha}Sr_a^\alpha$, $r_b^{-\alpha}Sr_b^\alpha$ в L_p при $p<1/\alpha$.

Следствие 2. *Справедливы следующие формулы «коммутации»:*

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha r_a^{-\alpha}Sr_a^\alpha\varphi &= r_b^\alpha Sr_b^{-\alpha}I_{a+}^\alpha\varphi,\\ I_{b-}^\alpha r_b^{-\alpha}Sr_b^\alpha\varphi &= r_a^\alpha Sr_a^{-\alpha}I_{b-}^\alpha\varphi. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Подобно (11.13) можно перефразировать формулы (11.22) как формулы дробного дифференцирования сингулярного интеграла:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{a+}^\alpha\left(\int_a^b\left(\frac{b-x}{b-t}\right)^\alpha\frac{f(t)\,dt}{t-x}\right) &= \int_a^b\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\alpha\frac{(\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(t)}{t-x}\,dt,\\ \mathbf{D}_{b-}^\alpha\left(\int_a^b\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\alpha\frac{f(t)\,dt}{t-x}\right) &= \int_a^b\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^\alpha\frac{(\mathbf{D}_{b-}^\alpha f)(t)}{t-x}\,dt \end{aligned} \quad (11.22')$$

для $f\in I^\alpha(L_p)$, $1<p<1/\alpha$.

Следствие 3. *Наряду со связями* (11.16)—(11.19) *справедливы соотношения*

$$I_{b-}^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi I_{a+}^\alpha\varphi + \sin\alpha\pi I_{a+}^\alpha\frac{1}{r_a^{\alpha-1}}Sr_a^{\alpha-1}\varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \quad (11.23)$$

$$I_{a+}^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi I_{b-}^\alpha\varphi - \sin\alpha\pi I_{b-}^\alpha\frac{1}{r_b^{\alpha-1}}Sr_b^{\alpha-1}\varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\frac{\varphi(t)\,dt}{(b-t)^{1-\alpha}}, \quad (11.24)$$

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi I_{a+}^{\alpha}\varphi + \sin\alpha\pi r_b^{\alpha-1} S \frac{1}{r_b^{\alpha-1}} I_{a+}^{\alpha}\varphi + \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t)\,dt, \quad (11.25)$$

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi I_{b-}^{\alpha}\varphi - \sin\alpha\pi r_a^{\alpha-1} S \frac{1}{r_a^{\alpha-1}} I_{b-}^{\alpha}\varphi + \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t)\,dt, \quad (11.26)$$

где $0<\alpha<2$, $\varphi(x)\in L_p(a, b)$ *и* $p>\max(1, 1/\alpha)$ *в (11.23), (11.24) и* $1\leqslant p<\infty$ *в (11.25), (11.26).*

Утверждения следствия 3 вытекают непосредственно из соотношений (11.16) — (11.19) на основании переходов типа (11.20), (11.21). Обоснование их выполнимости для $\varphi\in L_p$ при указанных значениях p проводится так же, как в теореме 11.5 для тождеств (11.16) — (11.19).

Замечание 11.2. В силу теоремы 3.12 доказанные соотношения (11.16) — (11.19) справедливы и для $\varphi(x)\in L_p([a, b], \rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\mu_k}$, $x_k\in[a, b]$, если $-1<\mu_k<p-1$ $(k=1, \ldots, n)$.

В случае, когда $\Omega = R_+^1 = [0, \infty)$, связи между операторами дробного интегрирования I_{0+}^{α}, I_{-}^{α} и сингулярным оператором можно получить из соотношений (11.16) — (11.19) с помощью предельного перехода при $a\to 0$, $b\to\infty$. Эти связи даются следующими формулами:

$$I_{-}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi I_{0+}^{\alpha}\varphi + \sin\alpha\pi I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} S x^{\alpha}\varphi, \quad (11.27)$$

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi I_{-}^{\alpha}\varphi - \sin\alpha\pi I_{-}^{\alpha} S\varphi. \quad (11.28)$$

$$I_{-}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi I_{0+}^{\alpha}\varphi + \sin\alpha\pi S I_{0+}^{\alpha}\varphi, \quad (11.29)$$

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi I_{-}^{\alpha}\varphi - \sin\alpha\pi x^{\alpha} S x^{-\alpha} I_{-}^{\alpha}\varphi, \quad (11.30)$$

где $\varphi(x)\in L_p(R_+^1)$, $1<p<1/\alpha$, в (11.27), (11.28), (11.30) и $1\leqslant p<1/\alpha$ в (11.29). Отметим также, что (11.27), (11.30) следуют из (11.16) и (11.19), (11.28) — из (11.11) с учетом (11.12), а (11.29) — из (11.10). Кроме того, из (11.27) — (11.30) вытекают формулы «коммутации»

$$I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} S x^{\alpha} = S I_{0+}^{\alpha}, \quad x^{\alpha} S x^{-\alpha} I_{-}^{\alpha} = I_{-}^{\alpha} S \quad (11.31)$$

типа (11.20).

Аналогичным образом на полуось R_+^1 можно перенести формулы (11.23) — (11.26).

Завершим этот пункт следующей леммой.

Лемма 11.1. *Пусть* $0<\alpha<1$. *Операторы*

$$A\varphi = \cos\alpha\pi\varphi(x) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}, \quad x>0, \quad (11.32)$$

$$B\varphi = \cos\alpha\pi\varphi(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}, \quad x>0, \quad (11.33)$$

являются взаимно обратными: $AB\varphi\equiv BA\varphi\equiv\varphi$ *для* $\varphi(x)\in L_p(R_+^1)$, $1<p<1/\alpha$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из сопоставления тождеств (11.27), (11.28). Действительно, они имеют вид $I_{-}^{\alpha}\varphi = I_{0+}^{\alpha} B\varphi$, $I_{0+}^{\alpha}\varphi = I_{-}^{\alpha} A\varphi$. Отсюда, очевидно, $AB\varphi\equiv BA\varphi\equiv\varphi$ на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, а тогда и на всех функциях $\varphi(x)\in L_p(R_+^1)$ ввиду ограниченности операторов A и B в $L_p(R_+^1)$, $1<p<1/\alpha$, согласно теореме 11.3.

Заметим, что тождества $AB\varphi\equiv BA\varphi\equiv\varphi$ могут быть проверены и непо-

средственным вычислением композиций AB, BA по формуле Пуанкаре—Бертрана (11.9).

4°. Некоторые другие формулы композиции. Покажем, что если $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$, то «урезание нулем» функции $f(x)$ также принадлежит $I^{\alpha}(L_p)$. Именно пусть $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$ и

$$P_{ab}\varphi=\begin{cases}\varphi(x), & x\in[a,\ b],\\ 0, & x\notin[a,\ b],\end{cases}\tag{11.34}$$

а в случае полуосей $[a,\ b]=R^1_+$ или $[a,\ b]=R^1_-$ будем писать

$$P_+\varphi=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad P_-\varphi=\begin{cases}0, & x>0,\\ \varphi(x), & x<0.\end{cases}\tag{11.35}$$

Покажем также, что $P_{ab}I^{\alpha}_+\varphi\equiv I^{\alpha}_+N\varphi$, $\varphi\in L_p$, $1<p<1/\alpha$, где N — ограниченный оператор в L_p.

Теорема 11.6. *Пусть* $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, *тогда*

$$P_+I^{\alpha}_+\varphi=I^{\alpha}_+\psi,\quad \psi\in L_p(R^1),\tag{11.36}$$

где

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x)+\dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(-t)}{x+t}\,dt, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\tag{11.37}$$

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что $\psi(x)\in L_p$ в силу теоремы 1.5. Далее, очевидно, что $(I^{\alpha}_+\psi)(x)=0$ при $x<0$. Остается доказать, что $(I^{\alpha}_+\psi)(x)=(I^{\alpha}_+\varphi)(x)$ при $x>0$. Имеем $(I^{\alpha}_+\psi)(x)=$ $=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{0}(-\tau)^{\alpha}\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}t^{-\alpha}}{t-x}\,dt$. В силу (11.4) получаем $(I^{\alpha}_+\psi)(x)=(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(x)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=(I^{\alpha}_+\varphi)(x)$, что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что теорема 11.6 означает следующее: если функция $f(x)$ представима дробным интегралом от функции из $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, то этим же свойством обладает и функция $f_+(x)=f(x)$ при $x>0$, $f_+(x)=$ $=0$ при $x<0$.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, *тогда*

$$P_{ab}I^{\alpha}_+\varphi=I^{\alpha}_+\psi,\quad \psi\in L_p(R^1),\tag{11.38}$$

где

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \varphi(x)+\dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(a-t)\,dt}{(x+t-a)^{1-\alpha}}, & a<x<b,\\ \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(a-t)}{(x+t-a)^{1-\alpha}}-\right.\\ \left.-\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(b-t)\,dt}{(x+t-b)^{1-\alpha}}\right], & x>b.\end{cases}$$

Следствие 2. *Пусть $a(x)$ — кусочно-постоянная функция с конечным числом точек разрыва. Тогда $a(x)f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$ для $f\in I^{\alpha}(L_p)$ и $\|af\|_{I^{\alpha}(L_p)}\leqslant c\|f\|_{I^{\alpha}(L_p)}$.*

Теорема 11.7. *Пусть $f(x)$ — кусочно-гельдеровская на оси функция с конечным числом точек разрыва и с показателем гельдеровости $\lambda>\max(\alpha,\ -\alpha+1/p)$ и пусть $f(\infty)=0$. Тогда $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$.*

Доказательство. Для простоты будем считать, что $f(x)$ имеет одну точку разрыва $x=0$. Введем функции

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\geqslant 0,\\ \omega_1(x), & x<0,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}\omega_2(x), & x>0,\\ f(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$$

выбрав функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)\in C_0^{\infty}$ так, чтобы $\omega_1(0)=f(+0)$, $\omega_2(0)=f(-0)$. Тогда $f_i(x)\in H^{\lambda}(R^1)$ и $f_i(\infty)=0$, $i=1,2$. Поэтому $f_i(x)\in I^{\alpha}(L_p)$ в силу теоремы 6.5. Очевидно, $f(x)=\theta(x)f_1(x)+\theta(-x)f_2(x)$, где $\theta(x)=(1+\operatorname{sign}x)/2$, так что $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$ ввиду теоремы 11.6. Теорема доказана.

Ясно, что из (11.36) можно получить аналогичное равенство $P_-I_-^{\alpha}\varphi=I_-^{\alpha}g$ с функцией $g(x)$, записываемой подобно (11.37). В следующей теореме доказывается представление для $P_-I_-^{\alpha}\varphi$ в виде $I_+^{\alpha}g$. Обозначим

$$S_{\alpha}\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{t}{x}\right|^{\alpha}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}. \tag{11.39}$$

Теорема 11.8. *Для $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, справедливо тождество*

$$P_-I_-^{\alpha}\varphi=I_+^{\alpha}N\varphi, \tag{11.40}$$

где N — ограниченный в $L_p(R^1)$ оператор:

$$N\varphi=\cos\alpha\pi P_-\varphi+\sin\alpha\pi S\varphi-\sin\alpha\pi P_+S_{\alpha}P_+\varphi= \tag{11.41}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt, & x>0\\[2ex] \cos\alpha\pi\varphi(x)+\dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}, & x<0.\end{cases} \tag{11.42}$$

Доказательство. Применяя тождество (11.10), имеем

$$P_-I_-^{\alpha}\varphi=(E-P_+)I_+^{\alpha}(\cos\alpha\pi\varphi+\sin\alpha\pi S\varphi). \tag{11.43}$$

Перепишем равенство (11.36) в виде

$$P_+I_+^{\alpha}\varphi=I_+^{\alpha}P_+(\varphi-\sin\alpha\pi S_{\alpha}P_-\varphi). \tag{11.44}$$

Используя (11.44) в (11.43), получаем

$$P_-I_-^{\alpha}\varphi=I_+^{\alpha}(\cos\alpha\pi P_-\varphi+\sin\alpha\pi P_-S\varphi+$$

$$+\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi P_+S_{\alpha}P_-\varphi+\sin^2\alpha\pi P_+S_{\alpha}P_-S\varphi). \tag{11.45}$$

Переставляя порядок интегрирования в последнем слагаемом согласно (11.9), находим $P_+S_{\alpha}P_-S\varphi=-\dfrac{1}{\pi^2x^{\alpha}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}dt}{(t+x)(t+\tau)}$ при

$x>0$. Здесь внутренний интеграл (см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.2.4. 25,26])

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha\,dt}{(t+x)(t+\tau)} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,\frac{|\tau|^\alpha \nu(\tau) - x^\alpha}{\tau - x}, \quad x>0, \tag{11.46}$$

где $\nu(\tau)=1$ при $\tau>0$, $\nu(\tau)=\cos\alpha\pi$ при $\tau<0$. Поэтому

$$P_+S_\alpha P_-S\varphi = \frac{1}{\sin\alpha\pi}(P_+S - P_+S_\alpha P_+ - \cos\alpha\pi P_+S_\alpha P_-)\,\varphi, \tag{11.47}$$

после чего (11.45) превращается в требуемое равенство (11.40). Ограниченность оператора (11.41) в $L_p(R^1)$ при $1<p<1/\alpha$ следует из ограниченности S и S_α в $L_p(R^1)$ согласно теореме 11.3.

§ 12. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

Широкое распространение получили операторы типа дробного интегрирования «с постоянными пределами интегрирования» (они допускают естественное обобщение на случай функций многих переменных, см. § 25). Такие операторы ввиду ряда аналогий с операторами математической физики получили название операторов типа потенциала. Мы не касаемся в этом параграфе соответствующих форм дробного дифференцирования, т. е. не рассматриваем явные формы операторов, обратных к потенциалам. Они будут построены в § 30, п. 4°. Рассмотрение потенциалов начнем со случая функций, заданных на прямой R^1.

1°. Случай оси. Потенциалы Рисса и Феллера. Рассмотрим интеграл

$$I^\alpha\varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}\alpha>0, \quad \alpha\neq 1,\ 3,\ 5,\ \ldots, \tag{12.1}$$

в котором выбор нормирующего множителя прояснится ниже, см. соотношения (12.12), (12.16). Интеграл $I^\alpha\varphi$ называется *потенциалом Рисса*. Наряду с ним будем рассматривать следующую его модификацию:

$$H^\alpha\varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha>0, \quad \alpha\neq 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \tag{12.2}$$

Очевидно, что

$$I^\alpha = [2\cos(\alpha\pi/2)]^{-1}(I_+^\alpha + I_-^\alpha), \tag{12.3}$$

$$H^\alpha = [2\sin(\alpha\pi/2)]^{-1}(I_+^\alpha - I_-^\alpha), \tag{12.4}$$

где $I_\pm^\alpha$ — операторы (5.2), (5.3), так что операторы I^α и H^α определены при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ на функциях $\varphi(t)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\operatorname{Re}\alpha$, и ограничены при $1<p<1/\operatorname{Re}\alpha$ из $L_p(R^1)$ в $L_q(R^1)$, $q=p(1-p\operatorname{Re}\alpha)^{-1}$.

В § 30, п. 4° будет показано, что обратные к I^α и H^α операторы можно построить в виде

$$(I^\alpha)^{-1}f = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{|t|^{1+\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int_0^\infty \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{12.1'}$$

$$(H^{\alpha})^{-1}f = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{|t|^{\alpha}}\operatorname{sign} t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \qquad (12.2')$$

(ср. с формулами (5.57), (5.58) для дробной производной Маршо).

Пусть

$$S\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}. \qquad (12.5)$$

Лемма 12.1. *Операторы I^{α}, H^{α} связаны соотношениями*

$$I^{\alpha}\varphi = SH^{\alpha}\varphi, \qquad (12.6)$$

$$H^{\alpha}\varphi = -SI^{\alpha}\varphi, \qquad (12.7)$$

где $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, $\varphi\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\operatorname{Re}\alpha$.

Доказательство. Достаточно доказать (12.6), так как (12.7) следует из (12.6) в силу (11.2). Равенство же (12.6) получим, сложив (11.10) и (11.11) с учетом (12.3), (12.4).

Следствие. *Операторы дробного интегрирования $I_{\pm}^{\alpha}$ выражаются через операторы типа потенциала I^{α} и H^{α} по формулам*

$$I_{\pm}^{\alpha} = I^{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}E \mp \sin\frac{\alpha\pi}{2}S\right), \qquad (12.8)$$

$$I_{\pm}^{\alpha} = H^{\alpha}\left(\pm\sin\frac{\alpha\pi}{2}E + \cos\frac{\alpha\pi}{2}S\right), \qquad (12.9)$$

где $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ *и* E *— единичный оператор.*

Доказательство. Для проверки равенств (12.8), (12.9) достаточно в правой части воспользоваться тождествами (12.6), (12.7) и после этого соотношениями (12.3), (12.4).

Равенства (12.3), (12.4) приводят к естественному обобщению операторов I^{α}, H^{α} в виде произвольной линейной комбинации операторов I_{+}^{α} и I_{-}^{α}:

$$M_{u,v}^{\alpha}\varphi = uI_{+}^{\alpha}\varphi + vI_{-}^{\alpha}\varphi, \qquad (12.10)$$

где u, v — произвольные постоянные. Оператор (12.10) можно записать в виде

$$M_{u,v}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1 + c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt, \qquad (12.11)$$

где $c_1 = (u+v)/2$, $c_2 = (u-v)/2$, так что

$$M_{u,v}^{\alpha}\varphi = (u+v)\cos\frac{\alpha\pi}{2}K^{\alpha}\varphi + (u-v)\sin\frac{\alpha\pi}{2}H^{\alpha}\varphi. \qquad (12.12)$$

Оператор (12.10) будем называть *потенциалом Феллера*. Подобные операторы в виде

$$I_{\delta}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\{\alpha[\pi/2 + \delta\operatorname{sign}(t-x)]\}}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt \qquad (12.13)$$

были впервые введены В. Феллером (W. Feller [1]), установившим для I_δ^α полугрупповое свойство $I_\delta^\alpha I_\delta^\beta \varphi = I_\delta^{\alpha+\beta}\varphi$. Очевидно, что $I_\delta^\alpha \varphi$ получается из (12.10) при выборе $u = \dfrac{\sin(\alpha\pi/2 - \alpha\delta)}{\sin\alpha\pi}$, $v = \dfrac{\sin(\alpha\pi/2 + \alpha\delta)}{\sin\alpha\pi}$. Отметим также, что

$$I_\delta^\alpha \varphi = \cos\alpha\delta I^\alpha\varphi - \sin\alpha\delta H^\alpha\varphi. \tag{12.14}$$

Замечание 12.1. Оператор $M_{u,v}^\alpha$ имеет очень простую форму обратного оператора (близкую к форме дробного дифференцирования Маршо). Обратный оператор особенно прост в случае операторов I^α, H^α. Обращение операторов типа потенциала $M_{u,v}^\alpha$ дается нами в § 30, п. 4°.

Покажем в теореме 12.1, что композиция двух операторов вида (12.10) — снова оператор такого же вида. Предварительно установим следующую вспомогательную лемму.

Лемма 12.2. *Пусть* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$ *и* $\varphi(x)\in L_p(R^1)$ $1\leqslant p<1/(\alpha+\beta)$. *Тогда*

$$\sin(\alpha+\beta)\pi I_+^\alpha I_-^\beta\varphi = \sin\alpha\pi I_+^{\alpha+\beta}\varphi + \sin\beta\pi I_-^{\alpha+\beta}\varphi, \tag{12.15}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\pi I_-^\alpha I_+^\beta\varphi = \sin\beta\pi I_+^{\alpha+\beta}\varphi + \sin\alpha\pi I_-^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{12.16}$$

Доказательство. В силу тождеств (11.10), (11.11) имеем

$$I_-^\alpha I_+^\beta\varphi = \cos\alpha\pi I_+^{\alpha+\beta}\varphi + \sin\alpha\pi S I_+^{\alpha+\beta}\varphi,$$

$$I_+^\alpha I_-^\beta\varphi = \cos\alpha\pi I_-^{\alpha+\beta}\varphi - \sin\alpha\pi S I_-^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Отсюда с учетом (12.3), (12.4)

$$(I_+^\alpha I_-^\beta + I_-^\alpha I_+^\beta)\varphi = 2\cos\alpha\pi\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\pi I^{\alpha+\beta}\varphi +$$

$$+ 2\sin\alpha\pi\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\pi S H^{\alpha+\beta}\varphi,$$

$$(I_-^\alpha I_+^\beta - I_+^\alpha I_-^\beta)\varphi = 2\cos\alpha\pi\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\pi H^{\alpha+\beta}\varphi +$$

$$+ 2\sin\alpha\pi\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\pi S I^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Применяя лемму 12.1, получаем соотношения

$$(I_+^\alpha I_-^\beta + I_-^\alpha I_+^\beta)\varphi = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pi I^{\alpha+\beta}\varphi,$$

$$(I_-^\alpha I_+^\beta - I_+^\alpha I_-^\beta)\varphi = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\pi H^{\alpha+\beta}\varphi,$$

из которых после простых преобразований получаем (12.15), (12.16).

Теорема 12.1. *Пусть* M_{u_1,v_1}^α *и* M_{u_2,v_2}^β *— операторы вида (12.10) и пусть* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$. *Тогда*

$$M_{u_1,v_1}^\alpha M_{u_2,v_2}^\beta\varphi = M_{u,v}^{\alpha+\beta}\varphi, \tag{12.17}$$

где $\varphi\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/(\alpha+\beta)$, *и*

$$u = u_1u_2 + \frac{u_1v_2\sin\alpha\pi + v_1u_2\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi},$$

$$v = v_1v_2 + \frac{u_1v_2\sin\beta\pi + v_1u_2\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi}.$$

Доказательство. Так как любая из композиций $I_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\beta}\varphi$ определена для $\varphi \in L_p(R^1)$, $1 \leqslant p < 1/(\alpha+\beta)$, то с учетом (5.15) имеем

$$M_{u_1,v_1}^{\alpha} M_{u_2,v_2}^{\beta}\varphi = u_1u_2I_{+}^{\alpha+\beta}\varphi + v_1v_2I_{-}^{\alpha+\beta}\varphi + u_1v_2I_{+}^{\alpha} I_{-}^{\beta}\varphi + v_1u_2I_{-}^{\alpha} I_{+}^{\beta}\varphi. \quad (12.18)$$

Соотношения (12.15), (12.16) дают возможность выразить композиции $I_{+}^{\alpha} I_{-}^{\beta}$, $I_{-}^{\alpha} I_{+}^{\beta}$ через $I_{+}^{\alpha+\beta}$ и $I_{-}^{\alpha+\beta}$, что после простых преобразований превращает (12.18) в (12.17).

Следствие 1. *Если* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$, *то*

$$I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}, \quad (12.19)$$

$$H^{\alpha}H^{\beta} = -I^{\alpha+\beta}. \quad (12.20)$$

$$I^{\alpha}H^{\beta} = H^{\alpha+\beta}. \quad (12.21)$$

Следствие 2. *Если* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$, *то*

$$I_{\delta}^{\alpha} I_{\delta}^{\beta} = I_{\delta}^{\alpha+\beta}. \quad (12.22)$$

Действительно, (12.22) легко получается с помощью формулы (12.14) и равенств (12.19) — (12.21).

Отметим, наконец, что с помощью связей (12.3), (12.4) нетрудно перенести на операторы I^{α}, H^{α} и $M_{u,v}^{\alpha}$ и различные другие свойства операторов $I_{\pm}^{\alpha}$. В частности, справедлива

Теорема 12.2. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $\varphi(x) \in L_1(R^1)$. *Тогда*

$$(\mathcal{F} I^{\alpha}\varphi)(x) = |x|^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \quad (12.23)$$

$$(\mathcal{F} H^{\alpha}\varphi)(x) = i \operatorname{sign} x\, |x|^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \quad (12.24)$$

$$(\mathcal{F} M_{u,v}^{\alpha}\varphi)(x) = \left[(u+v)\cos\frac{\alpha\pi}{2} + i(u-v)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sign} x\right]\frac{\hat{\varphi}(x)}{|x|^{\alpha}}. \quad (12.25)$$

Доказательство легко получается из формулы (7.1) и теоремы 7.1 на основании связей (12.3), (12.4), (12.10).

2°. **Об «урезании» риссова потенциала на полуось.** Аналогично лемме 11.1 зададимся вопросом: если $f(x) = I^{\alpha}\varphi$, то будет ли функция $f_+(x) = f(x)$ при $x>0$ и $f_+(x) = 0$ при $x<0$ также представима риссовым потенциалом

$$\theta_+(x)(I^{\alpha}\varphi)(x) = (I^{\alpha}\psi)(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.26)$$

$$\theta_{\pm}(x) = (1 \pm \operatorname{sign} x)/2, \quad (12.27)$$

и как определить функцию $\psi(x)$ по $\varphi(x)$?

Теорема 12.3. *Для любой функции* $\varphi(x) \in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, *существует функция* $\psi(x)$ *такая, что выполняется равенство (12.26) и при этом*

$$\psi(x) = \theta_+(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}N^{\alpha}\varphi, \quad (12.28)$$

где

$$N^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\dfrac{|t|^{\alpha}\operatorname{sign} t}{|x|^{\alpha}\operatorname{sign} x} - 1}{t-x}\varphi(t)\,dt. \quad (12.29)$$

Доказательство. Из (11.36) вытекает, что $\theta_-(x)(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x) = (I_{+}^{\alpha}\varphi_1)(x)$, где

$$\varphi_1(x) = \theta_-(x)\,\varphi(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\theta_+(x)\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{t}{x}\right|^{\alpha}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}.$$

Тогда в силу (5.9)

$$\theta_+(x)\,(I_-^{\alpha}\varphi)(x) = (I_-^{\alpha}\varphi_2)(x), \tag{12.30}$$

где

$$\varphi_2(x) = \theta_+(x)\,\varphi(x) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\theta_-(x)\int_{0}^{\infty}\frac{t^{\alpha}}{|x|^{\alpha}}\,\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}.$$

Объединяя (11.36) и (12.30), получим с учетом (12.3) равенство

$$\theta_+(x)\,I^{\alpha}\varphi = \frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\,(I_+^{\alpha}\varphi_3 + I_-^{\alpha}\varphi_2), \tag{12.31}$$

где через $\varphi_3(x)$ обозначена функция (11.37). Применяя в (12.31) формулу (12.8), устанавливаем, что

$$\theta_+(x)\,I^{\alpha}\varphi = \frac{1}{2}\,I^{\alpha}\left[\varphi_2 + \varphi_3 + \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\;S(\varphi_2 - \varphi_3)\right].$$

Таким образом, искомая функция $\psi(x)$ в (12.26) есть

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,(\varphi_2 + \varphi_3) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\,S(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Ряд несложных преобразований окончательно приводит $\psi(x)$ к виду (12.28), при этом при вычислении сингулярного интеграла $S(\varphi_2-\varphi_3)$ следует воспользоваться формулой Пуанкаре—Бертрана (11.9) перестановки сингулярных интегралов.

Принадлежность функции $\psi(x)$ пространству $L_p(R^1)$ следует из ограниченности оператора N^{α} в $L_p(R^1)$ при $1<p<1/\alpha$. Последняя получается переходом к полуосям $R_{\pm}^1$ и применением теорем 5.5 и 11.3.

Заметим, что формула (12.26), где $\psi(x)$ дается равенством (12.28), может быть проверена и непосредственно — прямой перестановкой порядка интегрирования в композиции $I^{\alpha}N^{\alpha}$ с учетом того, что возникающий при этом внутренний интеграл вычисляется в явном виде (см., например, справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.2.6.26, 2.2.6.27]):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign} t\,dt}{|t|^{\alpha}\,|t-x|^{1-\alpha}\,(t-y)} = \pi\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sign} x\,\operatorname{sign}(x-y)}{|y|^{\alpha}\,|x-y|^{1-\alpha}}. \tag{12.32}$$

Следствие. *Пусть* $P_{ab}\varphi = \begin{cases}\varphi(x), & x\in[a,\ b],\\ 0, & x\notin[a,\ b].\end{cases}$ *Тогда*

$$P_{ab}I^{\alpha}\varphi = I^{\alpha}\left(P_{ab}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\cdot N_{ab}^{\alpha}\varphi\right), \tag{12.33}$$

где

$$N_{ab}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha} - \left(\frac{t-b}{x-b}\right)^{\alpha}\right]\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\quad \xi^{\alpha} = |\xi|^{\alpha}\operatorname{sign}\xi.$$

3°. Случай полуоси. Потенциалы (12.1), (12.2) можно рассматривать и на полуоси:

$$I_0^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad x>0, \tag{12.34}$$

$$H_0^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\,dt, \quad x>0, \tag{12.35}$$

так что

$$I_0^\alpha = \frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}(I_{0+}^\alpha + I_-^\alpha), \quad H_0^\alpha = \frac{1}{2\sin(\alpha\pi/2)}(I_{0+}^\alpha - I_-^\alpha).$$

Здесь также справедливы соотношения типа (12.6), (12.7):

$$I_0^\alpha \varphi = H_0^\alpha S_{(1+\alpha)/2}\varphi = S_{-(1+\alpha)/2} H_0^\alpha \varphi, \tag{12.36}$$

$$H_0^\alpha \varphi = -I_0^\alpha S_{\alpha/2}\varphi = -S_{-\alpha/2}\, I_0^\alpha \varphi, \tag{12.37}$$

где обозначено

$$S_\nu \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^\nu \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}, \quad x>0. \tag{12.38}$$

Формулы (12.36), (12.37) получаются из (12.46), (12.47), доказываемых ниже, предельным переходом (при $b\to\infty$). Их можно доказать и самостоятельно аналогично выводу формул (12.46), (12.47).

Докажем здесь следующее важное свойство потенциала Рисса $I^\alpha\varphi$ и интеграла $H^\alpha\varphi$ — представление их в виде композиции дробных интегралов.

Теорема 12.4. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $\varphi(x)\in L_p(R_+^1)$, $1\leqslant p<1/\alpha$. *Тогда*

$$I_0^\alpha \varphi = I_-^{\alpha/2} I_{0+}^{\alpha/2} \varphi, \tag{12.39}$$

$$H_0^\alpha \varphi = I_-^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{0+}^{\frac{\alpha+1}{2}} \varphi \tag{12.40}$$

и более общо — при $\alpha+\beta<1$ *справедлива формула*

$$I_-^\alpha I_{0+}^\beta \varphi = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pi I_0^{\alpha+\beta}\varphi + \sin\frac{\beta-\alpha}{2}\pi H_0^{\alpha+\beta}\varphi = \\ = \frac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} I_-^{\alpha+\beta} + \frac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} I_{0+}^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{12.41}$$

Доказательство. Установим (12.41), так как формулы (12.39), (12.40) получаются из (12.41) очевидным образом. После перестановки порядка интегрирования имеем

$$I_-^\alpha I_{0+}^\beta \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty J(x,\ y)\varphi(y)\,dy, \tag{12.42}$$

где обозначено

$$J(x,\ y) = \int_{\max(x,y)}^\infty (t-y)^{\beta-1}(t-x)^{\alpha-1}dt.$$

В силу формулы (1.71) получаем $J(x,\ y) = \mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha-\beta)\,|x-y|^{\alpha+\beta-1}$ при $x>y$ и $J(x,\ y) = \mathrm{B}(\beta,\ 1-\alpha-\beta)\,|x-y|^{\alpha+\beta-1}$ при $x<y$. Поэтому из (12.42) простыми преобразованиями устанавливается (12.41).

Отметим, наконец, что из формул (7.11), (7.12) вытекают следующие соотношения для косинус- и синус-преобразований Фурье:

$$\mathcal{F}_c I_0^\alpha \varphi = x^{-\alpha} \mathcal{F}_c \varphi, \quad \mathcal{F}_s H_0^\alpha \varphi = x^{-\alpha} \mathcal{F}_s \varphi \tag{12.43}$$

(ср. с (12.23), (12.24)).

4°. Случай отрезка. В случае конечного отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ операторы, аналогичные (12.1), (12.2), будем обозначать символами

$$A^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad a < x < b, \tag{12.44}$$

$$B^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\pi/2)} \int_a^b \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\,dt, \quad a < x < b. \tag{12.45}$$

Для них справедливы соотношения, подобные (12.36), (12.37). Именно имеет место

Теорема 12.5. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Тогда*

$$A^\alpha \varphi = B^\alpha S_{(\alpha+1)/2}\, \varphi = S_{-(\alpha+1)/2}\, B^\alpha \varphi, \tag{12.46}$$

$$B^\alpha \varphi = -A^\alpha S_{\alpha/2} \varphi = -S_{-\alpha/2} A^\alpha \varphi, \tag{12.47}$$

где в отличие от (12.38)

$$S_\nu \varphi = \frac{1}{\pi [(x-a)(b-x)]^\nu} \int_a^b \frac{[(t-a)(b-t)]^\nu \varphi(t)}{t-x}\,dt, \tag{12.48}$$

причем тождества (12.46), (12.47) справедливы, например, на функциях $\varphi(t) \in L_p(\rho)$, $1 < p < \infty$, $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, *где* μ, $\nu < p-1$ *в (12.47) и в первом из равенств (12.46), а* μ, $\nu < \dfrac{1+\alpha}{2} p - 1$ *во втором из равенств (12.46).*

Доказательство. Тождества (12.46), (12.47) выводятся из основных тождеств (11.16) — (11.19). Проиллюстрируем это на примере первого из тождеств (12.47). Подставляя в (11.17) вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_1 = \cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\varphi + \sin\dfrac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2}\varphi$, имеем

$$I_{a+}^\alpha \left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\varphi + \sin\frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2}\varphi\right) = I_{b-}^\alpha (\cos\alpha\pi\, E - \sin\alpha\pi r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha) \times$$

$$\times \left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\varphi + \sin\frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2}\varphi\right),$$

где E — тождественный оператор, а $r_b\varphi = (b-x)\varphi(x)$. Применяя здесь формулу перестановки Пуанкаре — Бертрана (11.9), после простых преобразований с учетом (11.5) выводим симметричное соотношение: $I_{a+}^\alpha \left(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\varphi + \sin\dfrac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2}\varphi\right) = I_{b-}^\alpha \left(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\varphi - \sin\dfrac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2}\varphi\right)$.

Отсюда $\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}(I_{a+}^\alpha - I_{b-}^\alpha)\varphi = -\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}(I_{a+}^\alpha + I_{b-}^\alpha) S_{\alpha/2}\varphi$, что совпадает с первым из тождеств (12.47). Аналогичным приемом доказываются и остальные соотношения.

Приведенные рассуждения применимы на достаточно хороших функциях. Обоснование формул (12.46), (12.47) на функциях $\varphi \in L_p(\rho)$ легко осуществляется с помощью теоремы 1.7, если учесть: 1) плотность «хороших»

функций в $L_p(\rho)$; 2) ограниченность в $L_p(\rho)$ операторов, входящих в (12.46), (12.47), в соответствии с теоремами 3.7 и 11.3, дающими ограниченность операторов A^α, B^α, $S_{(\alpha+1)/2}$ при $p(\alpha+1)/2-1<\mu$, $\nu<p-1$, операторов A^α, $S_{-(\alpha+1)/2}B^\alpha$ при $\alpha p-1<\mu$, $\nu<\dfrac{\alpha+1}{2}p-1$ и операторов B^α, A^α, $S_{\alpha/2}$ и $S_{-\alpha/2}A^\alpha$ при $\alpha p-1<\mu$, $\nu<p-1$; 3) вложения в $L_p(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^\mu(b-x)^\nu$, по параметрам μ и ν.

§ 13. ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫЕ ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ НА ОТРЕЗКЕ

Этот параграф примыкает к § 6, где было дано описание функций, являющихся дробными интегралами от функций из $L_p(R^1)$. Здесь будет дано аналогичное описание для отрезка (и полуоси), а также описание дробных интегралов от гельдеровских функций с весом. Последнее получено в виде теоремы об отображении оператором дробного интегрирования пространства $H_0^\lambda(\rho)$ на $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ (теорема 13.13).

Предварительно рассматривается аналог дробной производной Маршо на отрезке. Обратим внимание на получаемые в п. 3° теоремы о продолжении и «склеивании» дробных интегралов. Всюду в этом параграфе $0<\alpha<1$ (можно считать, что $0<\operatorname{Re}\alpha<1$).

1°. Дробная производная Маршо на отрезке. Преобразуем дробную производную Римана—Лиувилля $\mathscr{D}_{a+}^\alpha f$ к виду, подобному (5.57). Считаем для этого функцию $f(x)$ достаточно хорошей — дифференцируемой. Интегрируя в (2.24) по частям, имеем

$$\mathscr{D}_{a+}^\alpha f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha}+\int_a^x (x-t)^{-\alpha}\,d[f(t)-f(x)]\right.=$$

$$=\left.\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}+\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{(x-t)^\alpha}+\alpha\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt\right\}\right. . \quad (13.1)$$

Здесь среднее слагаемое исчезает для $f(t)\in C^1$, и мы обозначим

$$\mathbf{D}_{a+}^\alpha f=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \quad (13.2)$$

так что $\mathscr{D}_{a+}^\alpha f\equiv\mathbf{D}_{a+}^\alpha f$ для достаточно хороших (дифференцируемых) функций в силу (13.1). Конструкция (13.2) и есть аналог дробной производной Маршо в случае отрезка $[a, b]$, $-\infty<a<b\leqslant\infty$.

К конструкции (13.2) можно прийти и по-другому, продолжив функцию $f(x)$ нулем за пределы отрезка $[a, b]$ и применив после этого к ней дробную производную Маршо по всей прямой. Точнее, пусть

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x\notin[a, b].\end{cases} \quad (13.3)$$

Тогда непосредственное вычисление показывает, что $\mathbf{D}_+^\alpha f^*$ при $a<x<b$ в точности совпадает с правой частью в (13.2)

$$(\mathbf{D}_+^\alpha f^*)(x)=(\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(x), \quad a<x<b. \quad (13.4)$$

В связи с равенством (13.4) заметим, что многие результаты этого параграфа, в частности теоремы 13.1—13.4, могут быть выведены как

следствия из соответствующих теорем § 6. Мы, однако, предпочли дать их независимое доказательство без продолжения на всю ось, поскольку вопросы дробного интегродифференцирования на конечном отрезке представляют бо́льший практический интерес в сравнении со случаем всей оси.

Аналогично вводится правосторонняя дробная производная Маршо:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{b-} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt. \quad (13.5)$$

Ясно, что правая часть в (13.2) определена не только на дифференцируемых функциях $f(x)$, но и, например, на функциях $f(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера порядка $\lambda>\alpha$.

Верно ли, что производная Римана—Лиувилля и производная Маршо совпадают на всех функциях, на которых они определены? Ниже (см. следствие из теоремы 13.1) мы увидим, что они совпадают на функциях, представимых дробными интегралами от суммируемых функций.

Подчеркнем, что интеграл в (13.2) будет пониматься, вообще говоря, как условно сходящийся. В соответствии с этим введем подобно (5.59) усеченную дробную производную

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\, \psi_{\varepsilon}(x), \quad (13.6)$$

где обозначено

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \int_{a}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \quad \varepsilon>0. \quad (13.7)$$

Эта запись предполагает, что $x\geqslant a+\varepsilon$. При $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$ для введения $\psi_{\varepsilon}(x)$ нужно доопределить функцию $f(t)$ при $t<a$. Здесь возможны два варианта:

1) ввести $\psi_{\varepsilon}(x)$ при $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$ равенством (13.7), считая, что $f(x)$ продолжена нулем за пределы отрезка $[a, b]$, тогда

$$\psi_{\varepsilon}(x) = f(x) \int_{a}^{x-\varepsilon} (x-t)^{-1-\alpha}\, dt = \frac{f(x)}{\alpha} \left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} - \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\right], \quad (13.8)$$

$$a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon;$$

2) положить $\psi_{\varepsilon}(x)\equiv 0$ при $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$.

Ниже на «не очень хороших» функциях $f(x)$ дробная производная Маршо (13.2) будет пониматься как

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a+} f = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon\to 0} \psi_{\varepsilon}(x), \quad (13.9)$$

где характер предельного перехода будет определяться допускаемыми функциями. В частности, он будет по норме L_p при рассмотрении дробных интегралов от функций из L_p (см. теорему 13.1). Будут использованы оба варианта задания $\psi_{\varepsilon}(x)$ при $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$. Обозначим

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \psi_{\varepsilon}(x). \quad (13.10)$$

Отметим, что способ 1) задания функции $\psi_{\varepsilon}(x)$ при $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$ имеет то преимущество, что он связан со свойством (13.4), т. е. усеченная дробная производная (13.6) совпадает с усеченной производной Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}\ f^*$:

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon} f^*)(x) = (\mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f)(x), \quad a < x < b, \tag{13.11}$$

где $f^*(x)$ — то же, что в (13.3) (при условии, что $\psi_\varepsilon(x)$ для $a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$ задана способом 1)).

Прежде всего убедимся в том, что $\mathbf{D}^{\alpha}_{a+}$ является действительно левым обратным оператором к оператору дробного интегрирования в рамках пространства L_p.

Теорема 13.1. *Пусть* $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда*

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a+} f = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f = \varphi.$$

Доказательство. Так как

$$f(x) - f(x-t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} y^{\alpha-1} \varphi(x-y)\, dy - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{x-a} (y-t)^{\alpha-1} \varphi(x-y)\, dy,$$

то с учетом обозначения (6.10)

$$f(x) - f(x-t) = t^{\alpha-1} \int_0^{x-a} \mathrm{k}\left(\frac{y}{t}\right) \varphi(x-y)\, dy.$$

Поэтому при $a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b$

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_0^{x-a} \frac{\varphi(x-y)}{y}\, dy \int_{y/(x-a)}^{y/\varepsilon} \mathrm{k}(s)\, ds.$$

Используя функцию $\mathcal{K}(t)$, см. (6.12), получаем отсюда

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_\varepsilon(x) = \int_0^{x-a} \varphi(x-y) \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{K}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{x-a} \mathcal{K}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right] dy.$$

Так как в соответствии с (6.7) $\mathcal{K}\left(\dfrac{y}{x-a}\right) = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\dfrac{y}{x-a}\right)^{\alpha-1}$, то

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_\varepsilon(x) = \int_0^{(x-a)/\varepsilon} \mathcal{K}(y) \varphi(x-\varepsilon y)\, dy - \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}.$$

Будем считать для удобства функцию $\varphi(x)$ продолженной нулем за пределы отрезка $[a, b]$. Тогда с учетом (6.8)

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f - \varphi(x) = \int_0^{\infty} \mathcal{K}(y) [\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)]\, dy, \quad a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b. \tag{13.12}$$

Для значений же $a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$, согласно (13.8), имеем

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f - \varphi(x) = \frac{f(x)}{\varepsilon^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int_a^x \frac{\varphi(x-t+a)\, dt}{(t-a)^{1-\alpha}}. \tag{13.13}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), получаем

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{a+,\varepsilon} f - \varphi\|_{L_p(a,b)} \leqslant \int_0^{\infty} \mathcal{K}(y) \|\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)\|_{L_p(a,b)}\, dy + \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \|f\|_{L_p(a,a+\varepsilon)}. \tag{13.14}$$

Здесь первое слагаемое в правой части стремится к нулю на основании теоремы 1.2 и леммы 1.2, а для второго имеем

$$\frac{\|f\|_{L_p(a,a+\varepsilon)}}{\varepsilon^\alpha\Gamma(1-\alpha)}\leqslant\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\int\limits_a^{a+\varepsilon}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}\left\{\int\limits_t^{a+\varepsilon}|\varphi(x-t+a)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p(a,a+\varepsilon)}\to 0 \qquad (13.15)$$

при $\varepsilon\to 0$. Теорема доказана.

Следствие. *На функциях* $f=I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_1(a,\,b)$, *производная Римана—Лиувилля* $\mathcal{D}^\alpha_{a+}f$ *и производная Маршо* $\mathbf{D}^\alpha_{a+}f$ *совпадают почти всюду:* $(\mathcal{D}^\alpha_{a+}f)(x)\equiv(\mathbf{D}^\alpha_{a+}f)(x)=\varphi(x)$.

Действительно, $\mathbf{D}^\alpha_{a+}f=\varphi$ в силу теоремы 13.1 и $\mathcal{D}^\alpha_{a+}f=\varphi$ в силу теоремы 2.1.

Так как абсолютная непрерывность функции $f(x)$ достаточна для того, чтобы $f(x)\in I^\alpha(L_1)$ (см. следствие из леммы 2.1), мы получаем, в частности, что дробная производная Римана—Лиувилля и производная Маршо совпадают (почти всюду) на абсолютно непрерывных функциях. В неявном виде это утверждалось еще в равенстве (2.14).

Замечание 13.1. В теореме 13.1 усеченная производная $\mathbf{D}^\alpha_{a+,\varepsilon}f$ при $a\leqslant x<a+\varepsilon$ определялась заданием функции $\psi_\varepsilon(x)$ способом (13.8). Если же положить $\psi_\varepsilon(x)\equiv 0$ при $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$, то теорема 13.1 останется справедливой за исключением случая $p=1$ (доказательство сохраняется с той лишь разницей, что в (13.14) второе слагаемое заменяется на $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\|\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}\right\|_{L_p(a,a+\varepsilon)}$, что стремится к нулю только при $1<p<\infty$, см. (5.46)).

2°. Описание дробных интегралов от функций из L_p. Достаточные признаки. В терминах функции $\psi_\varepsilon(x)$, определенной равенствами (13.7), (13.8), получаются подобно п. 3° из § 6 необходимые и достаточные условия для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом от функции из $L_p(a,\,b)$. Установим соответствующую теорему в двух вариантах.

Теорема 13.2. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была представима в виде* $f=I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_p(a,\,b)$, $-\infty<a<b<\infty$, *где* $0<\alpha<1$, $1<p<\infty$, *необходимо, а при* $1\leqslant p<\infty$ *и достаточно, чтобы* $f\in L_p(a,\,b)$ *и чтобы в* L_p *существовал* $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\psi_\varepsilon(x)$, *где* $\psi_\varepsilon(x)$ *— функция (13.7), (13.8).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f=I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_p$. Необходимость условия $f\in L_p$ тривиальна. В силу теоремы 13.1 $\mathbf{D}^\alpha_{a+,\varepsilon}f$ сходится в $L_p(a,\,b)$ к $\varphi(x)$. Так как $f(x)(x-a)^{-\alpha}\in L_p(a,\,b)$ в силу неравенства Харди (5.46), то тогда $\psi_\varepsilon(x)$ сходится в $L_p(a,\,b)$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть $f\in L_p$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(x)=\psi(x)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\,\psi_\varepsilon(x). \qquad (13.16)$$

Учитывая (13.8), непосредственно убеждаемся в том, что $\varphi_\varepsilon\in L_p(a,\,b)$. Из фундаментальности последовательности $\{\varphi_\varepsilon\}$ вытекает, что $\varphi_\varepsilon(x)\xrightarrow[L_p]{}\varphi(x)\in L_p$, причем $\varphi(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+\frac{\alpha\psi(x)}{\Gamma(1-\alpha)}$. Покажем, что $f=I^\alpha_{a+}\varphi$. В силу непрерывности оператора I^α_{a+} в $L_p(a,\,b)$ достаточно установить, что $f=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I^\alpha_{a+}\varphi_\varepsilon$. С учетом равенств (13.7), (13.8) при $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b$ получа ем

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\int_{a+\varepsilon}^{x}\frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}(y-a)^{\alpha}}+\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_{a}^{a+\varepsilon}\frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\alpha\int_{a+\varepsilon}^{x}\frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\int_{a}^{y-\varepsilon}\frac{f(y)-f(t)}{(y-t)^{1+\alpha}}\,dt\right\}.$$

Отсюда простыми преобразованиями находим

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int_{a}^{x}\frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}-\alpha\int_{a}^{x}f(t)\,dt\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t+\varepsilon}^{x}\frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}(y-t)^{1+\alpha}}\right\}. \tag{13.17}$$

Справедлива формула

$$\int_{a}^{b}\frac{(y-a)^{\mu-1}(b-y)^{\nu-1}}{(y-c)^{\mu+\nu}}\,dy=\frac{(b-a)^{\mu+\nu-1}\,\mathrm{B}(\mu,\ \nu)}{(b-c)^{\mu}(a-c)^{\nu}}, \tag{13.18}$$

$$c<a<b,\quad \operatorname{Re}\mu>0,\quad \operatorname{Re}\nu>0,$$

доказываемая с помощью замены $y-c=(b-c)(a-c)[(b-a)t+a-c]^{-1}$. В силу этой формулы из (13.17) получаем

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\left\{\int_{a}^{x}\frac{f(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}-\int_{a}^{x-\varepsilon}\frac{f(t)\,(x-\varepsilon-t)^{\alpha}}{x-t}\,dt\right\}.$$

Отсюда нетрудно установить, что

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon}=\int_{0}^{(x-a)/\varepsilon}\mathcal{K}(t)\,f(x-\varepsilon t)\,dt,\quad a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b, \tag{13.19}$$

где $\mathcal{K}(t)$ — функция (6.7). Если же $a\leqslant x<a+\varepsilon$, то, согласно (13.8),

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}}\int_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad a\leqslant x<a+\varepsilon. \tag{13.20}$$

С помощью представлений (13.19), (13.20) уже легко получается подобно действиям в (13.12)—(13.14), что $I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon}\overset{L_p}{\to}f$. Теорема доказана.

Замечание 13.2. Если $p=1$, то для функции $f(x)=I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\varphi\in L_1(a,\ b)$, утверждение $f(x)(x-a)^{-\alpha}\in L_1(a,\ b)$, вообще говоря, неверно (см. контрпример (5.41)). В этом случае, вообще говоря, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\psi_{\varepsilon}\notin L_1$ и необходимость в теореме 13.2 не имеет места при $p=1$. Однако можно подключить случай $p=1$ и в необходимой части, если вместо сходимости в $L_1(a,\ b)$ последовательности ψ_{ε} требовать сходимость в $L_1(a,\ b)$ последовательности (13.16). Введем еще некоторую модификацию функции $\psi_{\varepsilon}(x)$. Именно положим

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon}(x)=\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt,\quad a<x<b, \tag{13.21}$$

в предположении, что функция $f(x)$ продолжена нулем за пределы интервала $[a, b]$. Легко убедиться в том, что $\tilde{\psi}_\varepsilon(x) \equiv [\alpha/\Gamma(1-\alpha)]^{-1} \varphi_\varepsilon(x)$, где $\varphi_\varepsilon(x)$ — функция (13.16). Поэтому при замене $\psi_\varepsilon(x)$ на $\tilde{\psi}_\varepsilon(x)$ теорема 13.2 будет верна при $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha < 1$ и в необходимой и в достаточной части.

Напомним, что при $p=1$ описание дробных интегралов $I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi \in L_1(a, b)$, в других терминах было дано еще в теореме 2.1.

Очевидным образом можно сформулировать аналог теоремы 13.2 для правосторонних дробных интегралов $I^\alpha_{b-}\varphi$, вытекающий из теоремы 13.2 в силу (2.19).

Справедлива теорема, аналогичная теореме 6.2:

Теорема 13.3. *Для того чтобы* $f(x) = I^\alpha_{a+}\varphi$, $-\infty < a < x < b < \infty$, *где* $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) \in L_p(a, b)$ *и чтобы*

$$\sup_{\varepsilon>0} \|\mathbf{D}^\alpha_{a+,\varepsilon} f\|_p < \infty;$$

последнее равносильно тому, что $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|\tilde{\psi}_\varepsilon\|_p < \infty$, *где* $\tilde{\psi}_\varepsilon(x)$ *— функция (13.21), при этом*

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ (L_p)}} \tilde{\psi}_\varepsilon(x).$$

Необходимость, очевидно, содержится в теореме 13.2 с учетом замечания 13.2 при $p=1$, а достаточность получается из представлений (13.19), (13.20) теми же рассуждениями, которыми была получена достаточность в теореме 6.2, см. рассуждения после равенства (6.24).

Укажем вариант теоремы 13.3, удобный тем, что в нем используется информация о функции $\psi_\varepsilon(x)$ только при $a+\varepsilon \leqslant x \leqslant b$ (и охватывающий случай полуоси).

Теорема 13.4. *Для того чтобы* $f = I^\alpha_{a+}\varphi$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, *где* $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ *при* $b < \infty$ *и* $1 < p < 1/\alpha$ *при* $b = \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(a, b)$ *и*

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{a+\varepsilon}^{b} |\psi_\varepsilon(x)|^p \, dx < \infty. \tag{13.22}$$

Эта теорема получается непосредственным анализом доказательства теоремы 13.3.

Введем обозначения $I^\alpha_{a+}(L_p)$, $I^\alpha_{b-}(L_p)$ для пространств дробных интегралов от функций из L_p. Ранее (см. следствие 1 из теоремы 11.4, следствие 1 из теоремы 11.5 и формулы (11.27)—(11.30)) было установлено, что

$$I^\alpha_{a+}(L_p) = I^\alpha_{b-}(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha,$$

где $L_p = L_p(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Следовательно, описания пространств $I^\alpha_{a+}(L_p)$ и $I^\alpha_{b-}(L_p)$ эквивалентны при $1 < p < 1/\alpha$. Будем обозначать

$$I^\alpha[L_p(a, b)] = I^\alpha_{a+}(L_p) = I^\alpha_{b-}(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{13.23}$$

Класс (13.23) превращается аналогично (6.17) в банахово пространство введением эквивалентных норм для $f = I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$:

$$\|f\|_{I^\alpha_{a+}[L_p(a,b)]} = \|\varphi\|_p \underset{1\leqslant p<\infty}{\sim} \|f\|_p + \|\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}^\alpha_{a+,\varepsilon} f\|_p \underset{1<p<\infty}{\sim} \|f\|_p +$$

$$+ \sup_{\varepsilon>0} \|\mathbf{D}^\alpha_{a+,\varepsilon} f\|_p.$$

Пространство $I^\alpha[L_p(a, b)]$ охарактеризовано в теоремах 13.2, 13.3. Его можно рассматривать, согласно теореме 13.2, как соболевское пространство функций из $L_p(a, b)$, имеющих дробную производную $\mathbf{D}^\alpha_+ f \in L_p(a, b)$. В связи с этим отметим, что в литературе часто рассматривается в связи с дробным интегродифференцированием пространство $H^{\alpha, p}(a, b)$ (сужение бесселевых потенциалов на отрезок $[a, b]$), о котором у нас пойдет речь в § 18, п. 4°. Сейчас отметим лишь, что

$$I^\alpha[L_p(a, b)] = H^{\alpha, p}(a, b), \quad 1 < p < 1/\alpha,$$

в случае $-\infty < a < b < \infty$, см. доказательство этого в § 18, п. 4°.

Дадим простое достаточное условие для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом функции из L_p. Пусть

$$\omega_p(f, h) = \sup_{|t|<h} \left\{\int_a^b |f(x) - f(x-t)|^p \, dx\right\}^{1/p} \tag{13.24}$$

в предположении, что $f(x)$ продолжается нулем за пределы отрезка $[a, b]$.

Теорема 13.5. *Если* $f(x) \in L_p(a, b)$ *и* $\int_0^{b-a} t^{-1-\alpha} \omega_p(f, t)\, dt < \infty$, *то* $f(x) \in I^\alpha[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$.

Эта теорема вытекает из теоремы 13.4, если заметить, что

$$\left\{\int_{a+\varepsilon}^b |\psi_\varepsilon(x)|^p \, dx\right\}^{1/p} \leqslant \int_\varepsilon^{b-a} t^{-1-\alpha} \omega_p(f, t)\, dt.$$

В § 14, п. 5° будет дано достаточное условие для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом от функции $\varphi \in L_1(a, b)$ в терминах абсолютной непрерывности функции $f(x)$ с весом.

Простейшее достаточное условие для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом состоит в том, чтобы $f(x) \in H^\lambda$ при $\lambda > \alpha$. Тогда сходимость $\psi_\varepsilon(x)$ очевидна. Ясно, что это условие избыточно: оно дает $f = I^\alpha_{a+}\varphi$, где φ не только из L_p, но и гельдерова, см. ниже лемму 13.1. Более интересно следующее утверждение.

Теорема 13.6. *Пусть* $f(x) = (x-a)^{-\mu} g(x)$, *где* $g(x) \in H^\lambda([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$, $\lambda > \alpha$, $-\alpha < \mu < 1$. *Тогда*

$$|(\mathbf{D}^\alpha_{a+, \varepsilon} f)(x)| \leqslant c/(x-a)^{\mu+\alpha},$$

где c *не зависит от* x *и* ε, *и* $f(x) \in I^\alpha_{a+}(L_p)$ *при* $\mu + \alpha < 1/p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 13.6 доказывается точно так же, как теорема 6.6 (с соответствующими упрощениями: отсутствует бесконечно удаленная точка).

Следствие. *Если* $g(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, $-\alpha < \mu < -\alpha + 1/p$, *то* $(b-x)^{-\mu} g(x) \in I^\alpha[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$.

Действительно, достаточно сослаться на совпадение образов (13.23).

В следующем пункте будет дано обобщение теоремы 13.6 на случай весов вида $\prod_{k=1}^N |x - a_k|^{\mu_k}$, см. теорему 13.12.

Заметим еще, что утверждение $f(x) \in I^\alpha_{a+}(L_p)$ теоремы 13.6 вытекает также из того, что $(x-a)^{-\mu} \in I^\alpha_{a+}(L_p)$ при $p(\mu + \alpha) < 1$ и из следующей теоремы, аналогичной теореме 6.7.

Теорема 13.7. *Пространство* $I^\alpha_{a+}[L_p(a, b)]$, $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, *инвариантно относительно умножения на функции* $a(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, *при этом*

$$\|af\|_{I^\alpha_{a+}(L_p)} \leqslant c \|a\|_{H^\lambda} \|f\|_{I^\alpha_{a+}(L_p)}.$$

Эта теорема доказывается точно так же, как теорема 6.7 с соответствующими упрощениями. Справедлива также следующая

Теорема 13.8. *Пространство* $I^\alpha[L_p(a, b)]$, $1<p<1/\alpha$, *инвариантно относительно сингулярных операторов с весом*

$$S_a f = \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\alpha \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \quad S_b f = \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-t}\right)^\alpha \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \tag{13.25}$$

т. е. если $f = I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi \in L_p$, *то и* $S_a f = I^\alpha_{a+}\psi$, $\psi \in L_p$, *и аналогично для* $S_b f$.

Утверждение теоремы вытекает из тождеств (11.18), (11.19) и равенства (13.23).

3°. Продолжение, сужение и «склеивание» дробных интегралов. Пусть $f(x) \in I^\alpha_{a+}[L_p(a, b)]$ на каком-нибудь отрезке $[a, b]$. Зададимся следующими вопросами: 1) будет ли функция $f(x)$, продолженная нулем за пределы $[a, b]$, принадлежать классу $I^\alpha_{A+}[L_p(A, B)]$ на бóльшем отрезке $[A, B] \supset [a, b]$? 2) будет ли ее сужение на меньший отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ принадлежать $I^\alpha_{c+}[L_p(c, d)]$? Так как дробные интегралы от функций из L_p являются при $p>1/\alpha$ непрерывными функциями (обращающимися в нуль в концевой точке), то, очевидно, ответ на эти вопросы, вообще говоря, отрицателен при $p>1/\alpha$. Если $p<1/\alpha$, то ответ положителен, см. ниже следствия из теорем 13.9, 13.10. Из теорем 13.9, 13.10 будет выведена также очень полезная теорема о «склеивании» дробных интегралов.

Теорема 13.9. *Пусть* $f(x) \in I^\alpha(L_p) = I^\alpha[L_p(R^1)]$, $1<p<1/\alpha$, *и пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. *Тогда сужение функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$ *принадлежит классу* $I^\alpha[L_p(a, b)]$:

$$f(x) = (I^\alpha_{a+}\psi)(x), \quad x > a, \quad \psi(x) \in L_p(a, b), \tag{13.26}$$

где

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{a} \left(\frac{a-\xi}{x-a}\right)^\alpha \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi, \quad \varphi = \mathbf{D}^\alpha_+ f. \tag{13.27}$$

Теорема 13.9 является удобной перефразировкой теоремы 11.6, в которой было установлено, что «обрезание нулем» функции $f(x) \in I^\alpha[L_p(R^1)]$ вне отрезка $[a, b]$ не выводит из класса $I^\alpha[L_p(R^1)]$. Действительно, при $x>0$ равенство (11.36) совпадает с (13.26) (без ограничения общности считаем, что $a=0$).

Замечание 13.3. Полученное в теореме 13.9 тождество

$$(I^\alpha_+\varphi)(x) = (I^\alpha_{a+}\psi)(x), \quad x > a, \tag{13.28}$$

с выбором функции $\psi(x)$ по правилу (13.27) справедливо не только для $\varphi \in L_p(R^1)$, но, очевидно, и для функций $\varphi(x) \in L_p(-\infty, b)$ при $a<x<b$.

Следствие. *Пусть* $\varphi(x) \in L_p(c, b)$, $c<a<b$, $1<p<1/\alpha$. *Справедливо представление*

$$(I^\alpha_{c+}\varphi)(x) = (I^\alpha_{a+}\psi)(x), \quad a < x < b,$$

где $\psi(x) = \varphi(x) + \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \displaystyle\int_c^a \left(\frac{a-\xi}{x-a}\right)^\alpha \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi \in L_p(a, b)$.

Действительно, достаточно в (13.28) взять функцию $\varphi(x) \in L_p(-\infty, b)$, тождественно равную нулю при $x<c$.

Отметим, что утверждение следствия является ответом на известный в теории дробного интегрирования вопрос о существовании связи между

дробными интегралами $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ и $I^{\alpha}_{c+}\varphi$ с разными нижними пределами интегрирования (см. об этом в § 17 в исторических сведениях к § 13).

В следующей теореме речь пойдет о продолжении нулем функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$. Пусть

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{13.29}$$

Теорема 13.10. *Пусть* $f(x) = I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $a \leqslant x \leqslant b$, *где* $\varphi(x) \in L_p(a, b)$, $1 < p < 1/\alpha$. *Тогда*

$$f^*(x) = (I^{\alpha}_{+}\varphi_1)(x), \quad x \in R^1, \tag{13.30}$$

где $\varphi_1(x) \in L_p(R^1)$ *и*

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \varphi(x), & a < x < b, \\ -\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha}} = g(x), & x > b. \end{cases} \tag{13.31}$$

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что $g(x) \in L_p(b, \infty)$. Действительно,

$$g(x) = -\frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{b} \frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{13.32}$$

Внутренний интеграл здесь вычисляется с помощью замены $t = x - (x-\tau)/\xi$, после чего (13.32) принимает вид

$$g(x) = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-\tau}{x-b}\right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{x-\tau}, \tag{13.33}$$

так что $g(x) \in L_p(b, \infty)$ в силу теоремы Харди—Литтлвуда 1.5 об операторах с однородным ядром (в данном случае после сдвига точки в начало координат и отражения на положительную полуось ядро $k(x, t)$ в теореме 1.5 равно $(t/x)^{\alpha}(t+x)^{-1}$). Остается проверить равенство (13.30). При $x \leqslant b$ оно очевидно, а при $x > b$ нужно убедиться в том, что $0 = \displaystyle\int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_b^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$. Это равенство устанавливается непосредственно: нужно подставить в него $g(t)$ из (13.33), переставить после этого порядок интегрирования и применить (11.4). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $-\infty \leqslant a \leqslant c < d \leqslant b < \infty$. *Если* $f(x) \in I^{\alpha}[L_p(c, d)]$, $1 < p < 1/\alpha$, *то*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [c, d] \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [c, d] \end{cases} \in I^{\alpha}[L_p(a, b)].$$

Если $f(x) \in I^{\alpha}[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$, *то*

$$f(x)|_{x \in [c,d]} \in I^{\alpha}[L_p(c, d)].$$

Доказательство получается непосредственным применением теорем 13.9, 13.10 при продолжении функции $f(x)$ с $[a, b]$ или $[c, d]$ нулем на всю ось.

Теорема 13.11 *(о «склеивании»). Пусть функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *заданы на* $[a, c]$ *и* $[c, b]$ *соответственно,* $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant \infty$, *и пусть*

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & a\leqslant x\leqslant c,\\ f_2(x), & c<x\leqslant b.\end{cases}$$

Если $f_1(x)\in I^{\alpha}[L_p(a,\ c)]$, $f_2(x)\in I^{\alpha}[L_p(c,\ b)]$, $1<p<1/\alpha$, *то* $f(x)\in I^{\alpha}[L_p(a,\ b)]$.

Эта теорема выводится из полученного выше следствия, так как $f(x)=f_1^*(x)+f_2^*(x)$, где $f_k^*(x)$ — продолжение нулем функций $f_k(x)$ за пределы их области задания, $k=1,\ 2$.

Проиллюстрируем применение теоремы 13.10. Справедлива

Теорема 13.12. *Пусть* $-\infty<a=x_1<x_2<\ \ldots\ <x_{n-1}<x_n=b<\infty$. *Тогда*

$$g(x)=\frac{f(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}}\in I^{\alpha}[L_p(a,\ b)],\quad 1<p<1/\alpha, \tag{13.34}$$

если $f(x)\in H^{\lambda}([x_k,\ x_{k+1}])$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, $\lambda>\alpha$, *и* $p(\mu_k+\alpha)<1$ $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Доказательство. Для $x\in[x_k,\ x_{k+1}]$ функция $g(x)$ имеет вид $g(x)=(x-x_k)^{-\mu_k}g_1(x)+(x_{k+1}-x)^{-\mu_{k+1}}g_2(x)$, где $g_i(x)\in H^{\lambda}([x_k,\ x_{k+1}])$, $i=1,\ 2$. Тогда $g(x)|_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]}\in I^{\alpha}[L_p(x_k,\ x_{k+1})]$ в силу теоремы 13.6 и следствия из нее. На основании теоремы 13.11 о «склеивании» и $g(x)\in I^{\alpha}[L_p(a,\ b)]$.

4°. Описание дробных интегралов гельдеровских функций. Продолжим рассмотрения, начатые в § 3, пп. 1, 2°, где было установлено, что дробное интегрирование улучшает на порядок α гельдеровские свойства функций (см. теоремы 3.1—3.3). Здесь мы докажем утверждения обратного характера, показав, что дробные производные определены на всех гельдеровских функциях порядка $\lambda>\alpha$ (с весом) и сами являются гельдеровскими порядка $\lambda-\alpha$. После этого будет доказано основное утверждение этого пункта о том, что дробное интегрирование осуществляет изоморфизм (непрерывное взаимно однозначное отображение) класса $H_0^{\lambda}(\rho)$ на $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$. Именно пусть

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k},\quad -\infty<a\leqslant x_1<x_2<\ \ldots\ <x_n\leqslant b<\infty. \tag{13.35}$$

Справедлива следующая

Теорема 13.13. *Пусть* $\rho(x)$ *— вес (13.35), где* $x_1=a$. *При выполнении условий*

$$\lambda+\alpha<1,\quad 0\leqslant\mu_1<\lambda+1,\quad \lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1,\quad k=2,\ \ldots,\ n, \tag{13.36}$$

оператор дробного интегрирования I_{a+}^{α} *изоморфно отображает пространство* $H_0^{\lambda}(\rho)$ *на пространство* $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для оператора I_{b-}^{α}, *если* $x_n=b$ *и выполнены условия*

$$\lambda+\alpha<1,\quad 0\leqslant\mu_n<\lambda+1,\quad \lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{13.37}$$

Доказательство теоремы сравнительно простое в случае веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$ и довольно громоздкое для произвольного веса вида (13.35). Для удобства изложения разобьем его на несколько этапов в виде ряда вспомогательных лемм. Прежде всего докажем теорему для веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$.

Напомним, что класс $H_0^\lambda(\rho)$ состоит из функций $f \in H^\lambda(\rho)$ таких, что $\rho(x)f(x)$ обращается в нуль в точках x_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

Лемма 13.1. *Если* $f(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\alpha < \lambda \leqslant 1$, *то*

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^\alpha} + \psi(x),$$

где $\psi(x) \in H^{\lambda-\alpha}([a, b])$ *и* $\psi(a) = 0$, *при этом* $\|\psi\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leqslant c \|f\|_{H^\lambda}$.

Доказательство. Согласно (13.2) и (1.16), достаточно показать, что

$$\psi_1(x) = \int_0^{x-a} t^{-1-\alpha} [f(x) - f(x-t)]\, dt \in H^{\lambda-\alpha}.$$

Имеем

$$\psi_1(x+h) - \psi_1(x) = \int_0^{x-a} [f(x) - f(x-t)] [(t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}]\, dt +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{1+\alpha}}\, dt + \int_0^{x-a} \frac{f(x+h) - f(x)}{(t+h)^{1+\alpha}}\, dt = I_1 + I_2 + I_3. \tag{13.38}$$

Легко видеть, что

$$|I_1| \leqslant c \int_0^\infty t^\lambda |(t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}|\, dt = c_1 h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1 = c \int_0^\infty t^\lambda |(t+1)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}|\, dt < \infty$,

$$|I_2| \leqslant c \int_{-h}^{0} (t+h)^{\lambda-\alpha-1}\, dt = c_2 h^{\lambda-\alpha},$$

$$|I_3| \leqslant c h^\lambda \int_0^\infty (t+h)^{-\alpha-1}\, dt = c_3 h^{\lambda-\alpha}.$$

Остается заметить, что $\psi_1(a) = 0$, поскольку $|\psi_1(x)| \leqslant c \int_0^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1}\, dt$. Лемма доказана.

Теперь с помощью леммы 13.1 докажем остававшийся пока без доказательства случай $\lambda + \alpha > 1$ в теореме 3.1. Пусть $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in H^\lambda([a, b])$, $0 < \lambda \leqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda + \alpha > 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(a) = 0$. В соответствии с определением 1.6 нужно показать, что $(d/dx)\, I_{a+}^\alpha \varphi \in H^{\lambda+\alpha-1}$, т. е. что $\mathscr{D}_{a+}^{1-\alpha} \varphi \in H^{\lambda-(1-\alpha)}$. Так как $\lambda > 1 - \alpha$, то $\varphi(x)$ представима дробным интегралом порядка $1-\alpha$ в силу теоремы 13.5 и потому дробная производная Римана—Лиувилля $\mathscr{D}_{a+}^{1-\alpha} \varphi$ совпадает с производной Маршо (см. следствие из теоремы 13.1). Тогда с учетом того, что $\varphi(a) = 0$, из леммы 13.1 и вытекает требуемое.

Следующий наш шаг—распространение леммы 13.1 на случай гельдеровских функций с весом.

Лемма 13.2. *Всякая функция* $f(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda + \alpha < 1$, $\rho(x) = (x-a)^\mu$, $0 \leqslant \mu < \lambda + 1$, *представима дробным интегралом* $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, *где* $\varphi \in H_0^\lambda(\rho)$ *и*

$$\|\varphi\|_{H_0^\lambda(\rho)} \leqslant c \|f\|_{H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)}. \tag{13.39}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 13.4, покажем вначале, что $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$, где $\varphi \in L_p$ при каком-нибудь $p > 1$. Тогда в силу теоремы 13.1 $\varphi = \mathbf{D}^{\alpha}_{a+} f$ и можно будет непосредственно проверить (13.39). Обозначим $g(x) = (x-a)^{\mu} f(x) \in H^{\lambda+\alpha}_0$. Проверяя условия теоремы 13.4, видим, что $f(x)/(x-a)^{\alpha} = g(x)/(x-a)^{\alpha+\mu} \in L_p(a, b)$ при $p(\mu-\lambda) < 1$. Далее, при $a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b$ имеем

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{(x-a)^{\mu}} \int_{\varepsilon}^{x-a} \frac{g(x)-g(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt + \int_{\varepsilon}^{x-a} \left[\frac{1}{(x-a)^{\mu}} - \frac{1}{(x-a-t)^{\mu}} \right] \frac{g(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt = A_{\varepsilon}(x) + B_{\varepsilon}(x).$$

Так как $|g(x)-g(x-t)| \leqslant c_1 t^{\lambda+\alpha}$ и $|g(x-t)| \leqslant c_2 (x-t-a)^{\lambda+\alpha}$, то

$$|A_{\varepsilon}(x)| \leqslant c_3 (x-a)^{\lambda-\mu}, \quad |B_{\varepsilon}(x)| \leqslant c_4 (x-a)^{\lambda-\mu},$$

где постоянные $c_3 = c_1 \int_0^1 t^{\lambda-1}\, dt$, $c_4 = c_2 \int_0^1 [(1-t)^{-\mu} - 1](1-t)^{\lambda-\mu} t^{-1-\alpha}\, dt$ не зависят от ε. Следовательно, (13.22) выполнено при $p(\mu-\lambda) < 1$, так что $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi \in L_p$. Остается проверить (13.39). Функция $\varphi(x)$ имеет вид (13.2). Первое слагаемое в (13.2) принадлежит $H^{\lambda}_0(\rho)$ и для него справедлива оценка вида (13.39) в силу свойства (1.16) гельдеровских функций. Остается показать, что $\psi(x) = \int_0^{x-a} \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \in H^{\lambda}_0(\rho)$ и что $\|\psi\|_{H^{\lambda}(\rho)} \leqslant c\, \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$. Для простоты считаем, что $a = 0$. Обозначим $\psi_0(x) = x^{\mu}\psi(x)$. Для оценки разности $\psi_0(x+h) - \psi_0(x)$ представим ее в виде

$$\psi_0(x+h) - \psi_0(x) = \sum_{k=1}^{8} A_k(x),$$

где

$$A_1(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{x+h} \right)^{\mu} \right] \int_0^{x+h} \frac{g(x+h)-g(y)}{(x+h-y)^{1+\alpha}}\, dy,$$

$$A_2(x) = [(x+h)^{\mu} - x^{\mu}] \int_0^{x+h} \frac{(x+h)^{-\mu} - y^{-\mu}}{(x+h-y)^{1+\alpha}}\, g(y)\, dy,$$

$$A_3(x) = \left(\frac{x}{x+h} \right)^{\mu} \int_x^{x+h} \frac{g(x+h)-g(y)}{(x+h-y)^{1+\alpha}}\, dy,$$

$$A_4(x) = x^{\mu} \int_x^{x+h} \frac{(x+h)^{-\mu} - y^{-\mu}}{(x+h-y)^{1+\alpha}}\, g(y)\, dy,$$

$$A_5(x) = \int_0^x [g(x)-g(y)]\, [(x+h-y)^{-1-\alpha} - (x-y)^{-1-\alpha}]\, dy,$$

$$A_6(x) = x^{\mu} \int_0^x g(y)\, (x^{-\mu} - y^{-\mu})\, [(x+h-y)^{-1-\alpha} - (x-y)^{-1-\alpha}]\, dy,$$

$$A_7(x)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{x+h}\right)^{\mu}[g(x+h)-g(x)]\,[h^{-\alpha}-(x+h)^{-\alpha}],$$

$$A_8(x)=\alpha^{-1}x^{\mu}g(x)\,[(x+h)^{-\mu}-x^{-\mu}]\,[h^{-\alpha}-(x+h)^{-\alpha}].$$

Произведя оценку каждого из этих слагаемых, получим

$$|\psi_0(x+h)-\psi_0(x)|\leqslant c\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}\,h^{\lambda}$$

(опускаем выкладки, которые занимают много места, но не сложны; они во многом аналогичны действиям при доказательстве теоремы 3.3). Условие $\psi_0(a)=0$ проверяется легко. Лемма доказана.

Из леммы 13.2 с учетом следствия из теоремы 13.1 вытекает

Следствие. *На функциях $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ при условиях леммы 13.2 дробные производные Римана — Лиувилля и Маршо совпадают.*

Сопоставляя лемму 13.2 с теоремой 3.3, видим, что теорема 13.13 доказана для веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$.

Из леммы 13.2, если применить преобразование $a+b-x\to x$, вытекает

Лемма 13.2′. *Всякая функция $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $\rho(x)=(b-x)^{\mu}$, $0<\lambda+\alpha<1$, $0\leqslant\mu<\lambda+1$, представима в виде $f=I_{b-}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi(x)\in H_0^{\lambda}(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^{\lambda}(\rho)}\leqslant c\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$.*

Прежде чем распространить лемму 13.2 на случай произвольного веса вида (13.35), докажем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. *Если $f=I_{b-}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi\in H_0^{\lambda}(\rho)$, $\lambda+\alpha<1$, $\lambda+\alpha<\mu_1<\lambda+1$, $\lambda<\mu_k<\lambda+1$, $k=2,3,\ldots,n$, $\rho(x)$ — вес (13.35) с $x_1=a$, то $f=I_{a+}^{\alpha}\psi$, где $\psi\in H_0^{\lambda}(\rho)$ и $\|\psi\|_{H^{\lambda}(\rho)}\leqslant c\,\|\varphi\|_{H^{\lambda}(\rho)}$.*

Это утверждение немедленно вытекает из связи (11.16) с учетом ограниченности сингулярного оператора S в пространстве $H_0^{\lambda}(\rho)$ (см. теорему 11.1), при этом $\psi=\cos\alpha\pi\,\varphi+\sin\alpha\pi\,r_a^{-\alpha}Sr_a^{\alpha}\varphi$.

Утверждение 2 *(о продолжении дробных интегралов нулем). Пусть $f(x)=I_{x_j+}^{\alpha}\varphi$ на отрезке $[x_j,\ x_{j+1}]$, где $\varphi\in H_0^{\lambda}(r_j)$ на $[x_j,\ x_{j+1}]$, $r_j(x)=|x-x_j|^{\mu_j}\,|x-x_{j+1}|^{\mu_{j+1}}$, $j=1,2,\ldots,n$. Тогда функция*

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\\ 0, & a\leqslant x<x_j,\ x_{j+1}<x\leqslant b,\end{cases}$$

представима в виде $f^*(x)=I_{a+}^{\alpha}\varphi_1$, где $\varphi_1(x)\in H_0^{\lambda}(\rho)$ на $[a,\ b]$, $\rho(x)$ — вес (13.35), если $0\leqslant\mu_k<\lambda+1$, $k=1,\ldots,j-1$, $\lambda+\alpha<\mu_{j+1}<\lambda+1$, $\lambda<\mu_k<\lambda+1$, $k=j,\ j+2,\ldots,n$, причем

$$\|\varphi_1\|_{H^{\lambda}(\rho)}\leqslant c\,\|\varphi\|_{H^{\lambda}(r_j)}. \tag{13.40}$$

Подобное утверждение было уже доказано для случая дробных интегралов от функций из L_p, см. теорему 13.10. Утверждение 2 доказывается точно так же, как и теорема 13.10, при этом подобно (13.31)

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0, & x<x_j,\\ \varphi(x), & x_j<x<x_{j+1},\\ -\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_{x_j}^{x_{j+1}}f(t)\,(x-t)^{-1-\alpha}\,dt, & x>x_{j+1},\end{cases}$$

и при проверке условия (13.40) следует воспользоваться теоремой 11.1.

Лемма 13.3. *Всякая функция $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $\lambda+\alpha<1$, где*

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k},\quad a=x_1<\ldots<x_n\leqslant b,$$

$$0\leqslant\mu_1<\lambda+1,\quad \lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1,\quad k=2,\ \ldots,\ n,$$

представима в виде $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, *где* $\varphi(x)\in H^{\lambda}_0(\rho)$ *и* $\|\varphi\|_{H^{\lambda}(\rho)}\leqslant c\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$.

Доказательство. Пусть c — произвольная точка из интервала $(a,\ x_2)$. Подобно доказательству теоремы 3.3′ полагаем $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant c,\\ f(c), & x\geqslant c,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ f(x)-f(c), & x\geqslant c,\end{cases}\tag{13.41}$$

так что $f_1(x)\in H^{\lambda+\alpha}_0(\rho_a)$, $f_2(x)\in H^{\lambda+\alpha}_0(\rho_0)$, причем

$$\|f_1\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)}\leqslant c\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)},\quad \|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_0)}\leqslant c\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)},\tag{13.42}$$

где обозначено $\rho_a(x)=(x-a)^{\mu_1}$, $\rho_0(x)=(x-a)^{\lambda+\varepsilon}\prod_{k=2}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}$, $0<\varepsilon<1$.

Заметим, что введение функций (13.41) — в некотором смысле основной момент в доказательстве как теоремы 3.3′, так и настоящей леммы; оно дает возможность отделить точку $x_1=a$, являющуюся нижним пределом интегрирования, от остальных точек x_k, $k=2,\ 3,\ \ldots,\ n$, в которых допускаются особенности.

Всюду в дальнейшем $x_{n+1}=b$ в случае $x_n<b$.

В силу леммы 13.2 справедливо представление $f_1(x)=I^{\alpha}_{a+}\varphi_1$, где $\varphi_1(x)\in H^{\lambda}_0(\rho_a)\subset H^{\lambda}_0(\rho)$, причем

$$\|\varphi_1\|_{H^{\lambda}(\rho)}\leqslant c\,\|\varphi_1\|_{H^{\lambda}(\rho_a)}\leqslant c\,\|f_1\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)}\leqslant c\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}_0(\rho)}.$$

Рассмотрим функцию $f_2(x)$. Введем обозначения

$$r_k(x)=|x-x_k|^{\beta_k}\,|x-x_{k+1}|^{\beta_{k+1}},\quad k=1,\ \ldots,\ n-1;\quad \rho_k(x)=|x-x_k|^{\beta_k},\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

где $\beta_1=\lambda+\varepsilon$, $\varepsilon>\alpha$, $\beta_k=\mu_k$, $k=2,\ \ldots,\ n$. Покажем, что

$$f_2(x)=(I^{\alpha}_{x_k+}\psi_k)(x),\quad x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1},\tag{13.43}$$

где $\psi_k(x)\in H^{\lambda}_0(r_k)$ на $[x_k,\ x_{k+1}]$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, $\psi_n(x)\in H^{\lambda}_0(\rho_n)$ на $[x_n,\ b]$ (если $x_n<b$) и

$$\|\psi_k\|_{H^{\lambda}(r_k)}\leqslant c\,\|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(r_k)},\quad \|\psi_n\|_{H^{\lambda}(\rho_n)}\leqslant c\,\|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_n)}.\tag{13.44}$$

Для $f_2(x)$ на $[x_n,\ b]$ этот факт вытекает из леммы 13.2. Для отрезка же $[x_k,\ x_{k+1}]$, $k=1,\ \ldots,\ n-1$, выберем произвольную точку $c_k\in(x_k,\ x_{k+1})$ и положим $f_2(x)=f^{(1)}_{2,k}(x)+f^{(2)}_{2,k}(x)$, где

$$f^{(1)}_{2,k}(x)=\begin{cases}f_2(x), & x_k\leqslant x\leqslant c_k,\\ f_2(c_k), & c_k\leqslant x\leqslant x_{k+1},\end{cases}\qquad f^{(2)}_{2,k}(x)=\begin{cases}0, & x_k\leqslant x\leqslant c_k,\\ f_2(x)-f_2(c_k), & c_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}.\end{cases}$$

Так как $f^{(1)}_{2,k}(x)\in H^{\lambda+\alpha}_0(\rho_k)$ на $[x_k,\ x_{k+1}]$, то в силу леммы 13.2 $f^{(1)}_{2,k}(x)=I^{\alpha}_{x_k+}\psi^{(1)}_k$, где $\psi^{(1)}_k(x)\in H^{\lambda}_0(\rho_k)\subset H^{\lambda}_0(r_k)$, причем

$$\|\psi^{(1)}_k\|_{H^{\lambda}(r_k)}\leqslant c\,\|f^{(1)}_{2,k}\|_{H^{\lambda}(\rho_k)}\leqslant c\,\|f^{(1)}_{2,k}\|_{H^{\lambda+\alpha}(r_k)}.\tag{13.45}$$

Далее, так как $f^{(2)}_{2,k}(x)\in H^{\lambda+\alpha}_0(\rho_{k+1})$ на $[x_k,\ x_{k+1}]$, то по лемме 13.2′ $f^{(2)}_{2,k}(x)=I^{\alpha}_{x_{k+1}-}\psi^{(2)}_k$, где $\psi^{(2)}_k(x)\in H^{\lambda}_0(\rho_{k+1})\subset H^{\lambda}_0(r_k)$, причем

$$\|\psi^{(2)}_k\|_{H^{\lambda}(r_k)}\leqslant c\,\|f^{(2)}_{2,k}\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_{k+1})}\leqslant c\,\|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(r_k)}.\tag{13.46}$$

Применяя к функции $f_{2,k}^{(2)}(x)$ сформулированное выше утверждение 1, получаем $f_{2,k}^{(2)}(x) = I_{x_k+}^{\alpha}\tilde{\psi}_k^{(2)}$, где $\tilde{\psi}_k^{(2)}(x) \in H_0^{\lambda}(r_k)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ и

$$\|\tilde{\psi}_k^{(2)}\|_{H^{\lambda}(r_k)} \leqslant c\,\|\psi_k^{(2)}\|_{H^{\lambda}(r_k)}. \tag{13.47}$$

Тем самым мы приходим к соотношению (13.43), в котором $\psi_k(x) = \psi_k^{(1)}(x) + \tilde{\psi}_k^{(2)}(x)$. Неравенство (13.44) для норм непосредственно вытекает из оценок (13.45)—(13.47).

Далее, на основании утверждения 2 функция $f_{2,k}^{*}(x)$, являющаяся продолжением функции $f_2(x)$ нулем за пределы отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, представима дробным интегралом $f_{2,k}^{*} = I_{a+}^{\alpha}\tilde{\varphi}_k$, где $\tilde{\varphi}_k(x) \in H_0^{\lambda}(\rho_0)$ на $[a, b]$ и

$$\|\tilde{\varphi}_k\|_{H^{\lambda}(\rho_0)} \leqslant \text{const}\,\|\psi_k\|_{H^{\lambda}(r_k)}, \quad k = 1, \ldots, n-1; \quad \|\tilde{\varphi}_n\|_{H^{\lambda}(\rho_0)} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\,\|\psi_n\|_{H^{\lambda}(\rho_n)}. \tag{13.48}$$

Отсюда следует, что $f_2 = I_{a+}^{\alpha}\varphi_2$, где $\varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{n}\tilde{\varphi}_k(x) \in H_0^{\lambda}(\rho_0)$, и в силу (13.48), (13.44) и оценки (13.42) имеет место неравенство

$$\|\varphi_2\|_{H^{\lambda}(\rho_0)} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}.$$

Покажем, что

$$\varphi_2(x) \in H_0^{\lambda}(\rho) \quad \text{на } [a, b] \text{ и } \|\varphi_2\|_{H^{\lambda}(\rho)} \leqslant \text{const}\,\|\varphi_2\|_{H^{\lambda}(\rho_0)}. \tag{13.49}$$

Учитывая, что $f_2(x) \equiv 0$ при $x \leqslant c$, на основании равенства $\varphi_2(x) = \mathbf{D}_{a+}^{\alpha} f_2$ получаем $\varphi_2(x) \equiv 0$ при $x \leqslant c$ (см. выражение (13.2) для дробной производной Маршо). Отсюда вытекает (13.49), а из него в силу (13.48) получаем $\|\varphi_2\|_{H^{\lambda}(\rho)} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$. Лемма доказана.

Из теоремы 3.4 и леммы 13.3 следует утверждение теоремы 13.13.

5°. Дробное интегрирование функций из объединения весовых гельдеровских классов. Теорема 13.13 описывает действие дробного интегрирования в классах Гельдера со степенным весом в случае, когда показатель гельдеровости λ и показатели веса фиксированы. В приложениях наряду с подобным фактом бывает полезно утверждение о действии дробного интегрирования в классах гельдеровских функций с нефиксированными показателями, т. е. в объединении пространств $H^{\lambda}(\rho)$ (имеется в виду объединение как по λ, так и по весу). Введем соответствующие обозначения для таких объединений.

Через $H^* = H^*(a, b)$ обозначим класс функций, гельдеровских (с каким-нибудь порядком) в интервале (a, b) и имеющих интегрируемые особенности на концах этого интервала. Более точно дадим следующее

Определение 13.1. *К классу $H^* = H^*(a, b)$ отнесем функции $f(x)$, для которых существуют числа λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\varepsilon_2}}, \tag{13.50}$$

где $f^*(x) \in H^{\lambda}([a, b])$.

Класс H^* широко известен как класс функций, использовавшийся в теории сингулярных интегральных уравнений (Н. И. Мусхелишвили [1]), и называется иногда *классом Мусхелишвили.*

Введем еще для удобства обозначение

$$H_0^{\lambda}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{f : f(x) = (x-a)^{\varepsilon_1-1}(b-x)^{\varepsilon_2-1}\,g(x), \quad g(x) \in H^{\lambda}([a, b]),$$
$$g(a) = g(b) = 0\} \tag{13.51}$$

для знакомого нам весового класса Гельдера с фиксированными показателями. Простыми рассуждениями устанавливается равенство

$$H^* = \bigcup_{\substack{0<\lambda\leqslant 1\\ \varepsilon_i>0}} H_0^{\lambda}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = \bigcup_{\substack{0<\lambda\leqslant\lambda_0\\ 0<\varepsilon_i<d(\lambda)}} H_0^{\lambda}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2), \tag{13.52}$$

где $0<\lambda_0\leqslant 1$ и $d(\lambda)$ — любое положительное число. Введем еще аналогичное объединение функций, гельдеровских порядка больше α:

$$H_\alpha^* = \bigcup_{\substack{\alpha<\lambda\leqslant 1\\ \varepsilon_i>0}} H_0^{\lambda}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = \bigcup_{\substack{\alpha<\lambda\leqslant\lambda_0\\ 0<\varepsilon_i<d(\lambda)}} H_0^{\lambda}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2), \tag{13.53}$$

где $\alpha<\lambda_0<1$, $d(\lambda)>0$.

Классы H^*, H_α^* будут использоваться нами в § 30 в приложениях к интегральным уравнениям первого рода. Дадим классу H_α^* эквивалентное описание. Для этого нам понадобится ввести еще вспомогательный класс следующим определением.

Определение 13.2. *Будем говорить, что* $f(x)\in\tilde{H}_\alpha$, *если* $f(x)\in C([a,\ b])$ *и* $f(x)$ *гельдерова какого-нибудь порядка* $\lambda>\alpha$ *вне концов* $x=a$, $x=b$:

$$|f(x)-f(x+h)|\leqslant c(x)\,|h|^{\lambda},\quad \lambda>\alpha,\ x,\ x+h\in(a,\ b), \tag{13.54}$$

где $c(x)$ *может расти при* $x\to a$, $x\to b$, *но так, что* $c(x)\leqslant \leqslant \text{const}\,(x-a)^{-\alpha}(b-x)^{-\alpha}$.

Определение 13.3. *Будем говорить, что* $f(x)\in\tilde{\tilde{H}}_\alpha$, *если* $f(x)$ *гельдерова порядка* $\lambda>\alpha$ *внутри* $(a,\ b)$ *и при* $x\to a$ *имеет вид*

$$f(x)=f(a)+g(x)\,(x-a)^{-\alpha}, \tag{13.55}$$

где $g(x)\in H^{\lambda}([a,\ b])$, $\lambda>\alpha$, *и* $g(a)=0$, *и аналогично при* $x\to b$.

Лемма 13.4. *Классы* $\tilde{H}_\alpha$ *и* $\tilde{\tilde{H}}_\alpha$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть $f(x)\in\tilde{\tilde{H}}_\alpha$. Считая, что $a=0$, $f(a)=0$, для $f(x)=g(x)\,(x-a)^{-\alpha}$, где $g\in H^{\lambda}$, имеем $|f(x)-f(x+h)|\leqslant(x+h)^{-\alpha}\times \times|g(x+h)-g(x)|+|g(x)|\,x^{-\alpha}(x+h)^{-\alpha}[(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}]$. Отсюда оценка $f(x+h)-f(x)|\leqslant cx^{-\alpha}|h|^{\lambda}$ получается простыми рассуждениями с учетом того, что $|g(x)|\leqslant cx^{\lambda}$. Аналогично получается требуемая оценка при $x\to b$, так что $\tilde{\tilde{H}}_\alpha\subseteq\tilde{H}_\alpha$. Обратно, пусть $f(x)\in\tilde{H}_\alpha$. Тогда при $x\to 0$ имеем

$$|f(x)-f(x+h)|\leqslant cx^{-\alpha}|h|^{\lambda}. \tag{13.56}$$

Устремляя здесь $h\to -x$, имеем

$$|f(x)-f(0)|\leqslant cx^{\lambda-\alpha}. \tag{13.57}$$

В таком случае

$$g(x)=x^{\alpha}[f(x)-f(0)]\in H^{\lambda}([0,\ b]). \tag{13.58}$$

Действительно, $g(x+h)-g(x)=[(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}][f(x+h)-f(0)]+[f(x+ +h)-f(x)]\,x^{\alpha}$. Отсюда в силу (13.56) и (13.57) $|g(x+h)-g(x)|\leqslant \leqslant c(x+h)^{\lambda-\alpha}|(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}|+ch^{\lambda}$, $h>0$, что и дает после простых оценок утверждение (13.58). Из него и из аналогичного рассмотрения случая $x\to b$ следует, что $\tilde{H}_\alpha\subseteq\tilde{\tilde{H}}_\alpha$. Лемма 13.4 доказана.

В терминах класса $\tilde{H}_\alpha=\tilde{\tilde{H}}_\alpha$ мы и дадим эквивалентное описание класса (13.53). Справедлива

Лемма 13.5. *Класс* H_α^* *состоит из функций вида*

$$f(x)=\frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\alpha-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\alpha-\varepsilon_2}}, \tag{13.59}$$

где $0<\varepsilon_1<1-\alpha$, $0<\varepsilon_2<1-\alpha$ *и* $f^*(x)\in\tilde{H}_\alpha$.

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой на основе определения класса $\tilde{\tilde{H}}_\alpha$.

Наконец, действие операторов I^α_{a+}, I^α_{b-} дробного интегрирования в классе H^* полностью описывается следующей теоремой.

Теорема 13.14. *Оператор дробного интегрирования порядка* α, $0<\alpha<1$, *отображает класс* H^* *взаимно однозначно на класс* H^*_α:

$$I^\alpha_{a+}(H^*)=I^\alpha_{b-}(H^*)=H^*_\alpha. \tag{13.60}$$

Доказательство. В силу теоремы 13.13

$$I^\alpha_{a+}[H^\lambda_0(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)]=H^{\lambda+\alpha}_0(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2),$$

если $\lambda+\alpha<1$, $0<\varepsilon_i<1-\alpha-\lambda$, $i=1,\ 2$. Тогда

$$I^\alpha_{a+}\Big[\bigcup_{\substack{0<\lambda<1-\alpha\\0<\varepsilon_i<1-\alpha-\lambda}} H^\lambda_0(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\Big]=\bigcup_{\substack{\alpha<\mu<1\\0<\varepsilon_i<1-\mu}} H^\mu_0(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2),$$

что ввиду (13.52), (13.53) означает равенство (13.60) для оператора I^α_{a+}. Аналогично с помощью той же теоремы 13.13 устанавливается равенство (13.60) для оператора I^α_{b-}.

6°. Дробные интегралы и производные функций с заданным модулем непрерывности. Проведенное в п. 4° исследование можно существенно развить, допуская к рассмотрению вместо гельдеровских функций классы функций, для которых

$$\omega(\varphi,\ h)\overset{\text{def}}{=}\sup_{0<t<h}\ \sup_{x,\,x+t\in[a,b]}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|\leqslant c\omega(h),$$

где $\omega(h)$ — заданная непрерывная монотонная функция, $\omega(0)=0$. Пространство таких функций обозначим через $H^\omega=H^\omega([a,\ b])$. Введем в нем норму $\|\varphi\|_{H^\omega}=\|\varphi\|_C+\sup\limits_{h>0}[\omega(\varphi,\ h)/\omega(h)]$. Через H^ω_0 будем обозначать подпространство функций из H^ω, обращающихся в нуль при $x=a$. Класс H^λ гельдеровских функций отвечает степенному случаю $\omega(t)=t^\lambda$. Функцию $\omega(t)$ называют иногда характеристикой или характеристической функцией обобщенного гельдеровского пространства H^ω.

Зададимся следующим вопросом: каково действие дробного интегрирования и дифференцирования в пространствах H^ω? Теорема 13.13 утверждает, что $I^\alpha_{a+}(H^\lambda_0)=H^{\lambda+\alpha}_0$, $\lambda+\alpha<1$. Можно ли получить аналогичное утверждение

$$I^\alpha_{a+}(H^\omega_0)=H^{\omega_\alpha}_0 \tag{13.61}$$

с априорным предположением, что $\omega_\alpha(t)=t^\alpha\omega(t)$, и для каких характеристических функций $\omega(t)$ справедливо это утверждение? Ответим и на этот вопрос, а также осветим более общую весовую ситуацию.

Используемое ниже понятие почти убывания функции $f(t)$ означает, что $f(t_1)\leqslant cf(t_2)$ для всех $t_1\geqslant t_2$, где c не зависит от t_1, t_2. Аналогично определяется почти возрастающая функция.

Следующие две теоремы дают оценку, которую можно назвать оценкой типа Зигмунда по аналогии с оценкой Зигмунда, известной в теории сингулярных интегралов, оценивающей модуль непрерывности $\omega(H\varphi,\ h)$ сопряженной функции $H\varphi$, см. (19.22), через модуль непрерыв-

ности $\omega(\varphi, h)$ самой функции $\varphi(x)$, см., например, работу Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [1].

Теорема 13.15. *Пусть* $\varphi(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и* $\varphi(a)=0$. *Для дробного интеграла* $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $0<\alpha<1$, *справедлива оценка*

$$\omega(I_{a+}^{\alpha}\varphi, h)\leqslant ch\int_{h}^{b-a}\frac{\omega(\varphi, t)}{t^{2-\alpha}}\,dt. \tag{13.62}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (3.4) для разности $f(x+h)-f(x)$ функции $f(x)=I_{+}^{\alpha}\varphi$. Оценим слагаемые J_1, J_2, J_3. Имеем

$$|J_1|\leqslant\int_0^h(h-t)^{\alpha-1}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|\,dt\leqslant\int_0^h(h-t)^{\alpha-1}\omega(\varphi, t)\,dt=$$

$$=h^{\alpha}\int_0^1\frac{\omega(\varphi, h\xi)}{(1-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi=ch^{\alpha}\omega(\varphi, h), \tag{13.63}$$

где $c=\int_0^1(1-\xi)^{\alpha-1}\,d\xi$. При оценке J_2 различаем случаи 1) $x-a\geqslant h$ и 2) $x-a\leqslant h$. В первом случае

$$|J_2|\leqslant h^{\alpha}\int_0^1|t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}|\,\omega(\varphi, th)\,dt+ch^{\alpha}\int_1^{\frac{x-a}{h}}t^{\alpha-2}\omega(\varphi, ht)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\alpha}\,\omega(\varphi, h)+ch\int_h^{b-a}t^{\alpha-2}\,\omega(\varphi, t)\,dt;$$

во втором —

$$|J_2|\leqslant ch^{\alpha}\,\omega(\varphi, h). \tag{13.64}$$

Оценим J_3: $|J_3|\leqslant c\omega(\varphi, x-a)\,|(x+h-a)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}|$. При $x-a\leqslant h$ $|J_3|\leqslant ch^{\alpha}\,\omega(\varphi, h)$. Пусть $x-a\geqslant h$. Тогда

$$|J_3|\leqslant c\omega(\varphi, x-a)\,(x-a)^{\alpha}\left[\left(1+\frac{h}{x-a}\right)^{\alpha}-1\right]\leqslant c\,\frac{\omega(\varphi, x-a)}{(x-a)^{1-\alpha}}\,h. \tag{13.65}$$

Так как

$$\int_h^{b-a}\frac{\omega(\varphi, t)\,dt}{t^{2-\alpha}}\geqslant\int_{x-a}^{b-a}\frac{\omega(\varphi, t)\,dt}{t^{2-\alpha}}\geqslant\omega(\varphi, x-a)\int_{x-a}^{b-a}\frac{dt}{t^{2-\alpha}}\geqslant$$

$$\geqslant c\,\frac{\omega(\varphi, x-a)}{(x-a)^{1-\alpha}},$$

из (13.65) следует, что $|J_3|\leqslant ch\int_h^{b-a}\frac{\omega(\varphi, t)\,dt}{t^{2-\alpha}}$. Из оценок для J_1, J_2, J_3 следует (13.62) с учетом того, что $h^{\alpha}\omega(\varphi, h)$ мажорируется правой частью в (13.62). Последнее легко получить в силу монотонности функции $\omega(\varphi, t)$.

Теорема 13.16. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и* $f(a)=0$. *Тогда для дробной производной* $\mathbf{D}_{a+}^{\alpha}f$, $0<\alpha<1$, *справедлива оценка*

$$\omega(\mathbf{D}^{\alpha}_{a+}f,\ h)\leqslant c\int_0^h \frac{\omega(f,\ t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \tag{13.66}$$

в предположении, что сходится интеграл в правой части.

Доказательство. Начнем с замечания о том, что для функции $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$, справедлива оценка

$$\omega(F,\ h)\leqslant c\int_0^h \frac{\omega(f,\ t)}{t^{1+\alpha}}\,dt. \tag{13.67}$$

Докажем (13.67). Считая, что $h>0$, имеем $F(x+h)-F(x)=[f(x)-f(a)]\times$ $\times[(x+h-a)^{-\alpha}-(x-a)^{-\alpha}]+(x+h-a)^{-\alpha}\,[f(x+h)-f(x)]=A_1+A_2$. Отсюда $|A_2|\leqslant(x+h-a)^{-\alpha}\,\omega(f,\ h)\leqslant h^{-\alpha}\omega(f,\ h)\leqslant c\int_0^h t^{-1-\alpha}\omega(f,\ t)\,dt$; здесь в последнем неравенстве воспользовались почти убыванием функции $t^{-1}\omega(f,\ t)$, см., например, книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1, с. 50]. Далее для A_1 при $x-a\leqslant h$ также с учетом почти убывания функции имеем

$$|A_1|\leqslant(x-a)^{-\alpha}\,\omega(f,\ x-a)\leqslant c\int_0^{x-a} t^{-1-\alpha}\omega(f,\ t)\,dt\leqslant c\int_0^h t^{-1-\alpha}\omega(f,\ t)\,dt.$$

Если же $x-a\geqslant h$, то по теореме о среднем $|A_1|\leqslant ch\,(x-a)^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ x-$ $-a)\leqslant ch^{-\alpha}\,\omega(f,\ h)\leqslant c\int_0^h t^{-1-\alpha}\omega(f,\ t)\,dt$. Собирая оценки для A_1 и A_2, получаем неравенство (13.67).

Для доказательства теоремы достаточно в силу (13.67) рассмотреть только второе слагаемое в выражении (13.2) для дробной производной Маршо, т. е. функцию (13.10). Имеем для нее

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\,[\psi(x+h)-\psi(x)]=\int_0^{x-a}[f(x+h)-f(x+h-t)-f(x)+$$

$$+f(x-t)]\,t^{-1-\alpha}\,dt+\int_{x-a}^{x+h-a}[f(x+h)-f(x+h-t)]\,t^{-1-\alpha}\,dt=B_1+B_2.$$

Пусть $x-a\leqslant h$. Тогда $|B_1|\leqslant 2\int_0^{x-a}\omega(f,\ t)\,t^{-1-\alpha}\,dt\leqslant 2\int_0^h t^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ t)\,dt$. В случае $x-a\geqslant h$ получаем

$$|B_1|\leqslant 2\int_0^h\frac{\omega(f,\ t)\,dt}{t^{1+\alpha}}+2\int_h^{x-a}\frac{\omega(f,\ h)}{t^{1+\alpha}}\,dt\leqslant 2\int_0^h t^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ t)\,dt+$$

$$+2\alpha^{-1}h^{-\alpha}\,\omega(f,\ h)\leqslant(2+4/\alpha)\int_0^h t^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ t)\,dt.$$

Оценим B_2: $|B_2|\leqslant\int_{x-a}^{x+h-a} t^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ t)\,dt$. Если $x-a\leqslant h$, то $|B_2|\leqslant$ $\leqslant\int_0^{2h} t^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ t)\,dt\leqslant 2^{1-\alpha}\int_0^h t^{-1-\alpha}\,\omega(f,\ t)\,dt$. Если же $x-a\geqslant h$, то

после замены $t=\xi+x-a$ получаем с учетом почти убывания функции $t^{-1}\omega(f,\ t)$:

$$|B_2|\leqslant\int_0^h\frac{\omega(f,\ x-a+\xi)}{(x-a+\xi)^{1+\alpha}}\,d\xi\leqslant c\,\frac{\omega(f,\ h)}{h}\int_0^h\frac{d\xi}{(x-a+\xi)^{\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\frac{\omega(f,\ h)}{h^{\alpha}}\,.$$

Собирая оценки для B_1, B_2, приходим к неравенству (13.66). Теорема 13.16 доказана.

Для того чтобы сформулировать утверждение типа (13.61), введем класс функций, в терминах которого будут даны условия на допускаемые характеристические функции $\omega(t)$.

Определение 13.4. *Будем говорить, что*

$$\omega(t)\in\Phi_{\beta}^{\delta},\quad \beta\geqslant 0,\quad \delta\geqslant 0, \tag{13.68}$$

если

1) $\omega(t)$ *непрерывна на* $[0,\ b-a]$, $\omega(0)=0$ *и* $\omega(t)$ *почти возрастает*;

2) $\displaystyle\int_0^t\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\delta}\frac{\omega(\xi)}{\xi}\,d\xi\leqslant c\omega(t)$,

3) $\displaystyle\int_t^{b-a}\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\beta}\frac{\omega(\xi)}{\xi}\,d\xi\leqslant c\omega(t)$.

Класс Φ_{β}^{δ} можно назвать двупараметрическим классом типа Бари—Стечкина (ср. с классом Φ_{β} Бари—Стечкина, см., например, книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1], с. 78). Можно показать, что класс Φ_{β}^{δ} пуст при $\delta\geqslant\beta$, поэтому считаем, что $0<\delta<\beta$.

Теорема 13.17. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $\omega(t)\in\Phi_{1-\alpha}^{0}$. *Тогда оператор* I_{a+}^{α} *изоморфно отображает пространство* H_0^{ω} *на* $H_0^{\omega_\alpha}$ *с характеристикой* $\omega_{\alpha}(t)=t^{\alpha}\omega(t)$.

Теорема 13.17 выводится из оценок типа Зигмунда, полученных в теоремах 13.15, 13.16, с учетом того, что функции $f\in H_0^{\omega_\alpha}$ представимы дробными интегралами $f=I_{a+}^{\alpha}\varphi$ (от функций $\varphi\in H_0^{\omega}$) при условиях, наложенных на $\omega(t)$. Последнее доказывается с помощью теоремы 13.2 или 13.3. Доказательства несложны и предоставляются читателю (см. также подобную теорему 19.8, относящуюся к периодическому случаю).

Укажем, наконец, что имеется распространение этих результатов на весовой случай. Обозначим для этого через $H_0^{\omega}(\rho)$ пространство функций $f(x)$ таких, что $\rho(x)f(x)\in H_0^{\omega}$, $\|f\|_{H_0^{\omega}(\rho)}=\|\rho f\|_{H_0^{\omega}}$.

В случае $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $0\leqslant\mu<2-\alpha$, для функций $\varphi(x)$ таких, что $\rho(x)\varphi(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 13.14, оценка типа Зигмунда (13.62) заменяется оценкой

$$\omega(\rho I_{a+}^{\alpha}\varphi,\ h)\leqslant ch^{\alpha+\nu-1}\int_0^h\frac{\omega(\rho\varphi,\ t)\,dt}{t^{\nu}}+ch\int_h^{b-a}\frac{\omega(\rho\varphi,\ t)}{t^{2-\alpha}}\,dt, \tag{13.69}$$

где $\nu=\max(1,\ \mu)$. Справедлива также следующая

Теорема 13.18. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $0\leqslant\mu<2-\alpha$. *Если* $\omega(t)\in\Phi_{1-\alpha}^{\delta}$ *при* $\delta=\max(\mu-1,\ 0)$, *то оператор* I_{a+}^{α} *изоморфно*

отображает пространство $H_0^{\omega}(\rho)$ *на* $H_0^{\omega_\alpha}(\rho)$ *с тем же весом и характеристикой* $\omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t)$:

$$I_{a+}^{\alpha}[H_0^{\omega}(\rho)] = H_0^{\omega_\alpha}(\rho). \tag{13.70}$$

Доказательство оценки (13.69) и теоремы 13.18 можно найти в работах Х. М. Мурдаева, С. Г. Самко [1—3], где содержится также случай веса $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$.

§ 14. РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В этом параграфе будут рассмотрены различные аспекты дробного интегродифференцирования в теории функций действительного переменного, не отраженные в предыдущих параграфах. Главные из них: 1) действие дробного интегродифференцирования на функциях, удовлетворяющих условию Гельдера по норме пространства L_p, 2) дробное дифференцирование абсолютно непрерывных функций с весом, 3) теорема Рисса о среднем и неравенства типа Колмогорова для дробных интегралов и производных, 4) связь с суммированием рядов и интегралов.

1°. Липшицевы классы H_p^{λ}, $\tilde{H}_p^{\lambda}$. Пусть $\omega_p(f, \delta)$—интегральный модуль непрерывности (13.24) функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$ и продолженной нулем за пределы отрезка $[a, b]$.

Определение 14.1. *Будем говорить, что* $f(x) \in H_p^{\lambda} = H_p^{\lambda}([a, b])$, *где* $0 < \lambda \leqslant 1$, *если* $f(x) \in L_p(a, b)$ *и* $\omega_p(f, \delta) \leqslant c\delta^{\lambda}$. *Если при этом* $\omega_p(f, \delta) = o(\delta^{\lambda})$ *при* $\delta \to 0$, *то будем говорить, что* $f(x) \in h_p^{\lambda} = h_p^{\lambda}([a, b])$.

Классы H_p^{λ}, h_p^{λ} обычно называют *липшицевыми классами* (класс H_p^{λ} часто обозначают $\mathrm{lip}(\lambda, p)$).

Рассмотрим некоторые свойства функций из H_p^{λ}. Основное место здесь будет занимать теорема Харди—Литтлвуда о вложениях классов H_p^{λ}. Предварительно расшифруем определение 14.1, подчеркнув, что имеется в виду

$$\int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|\, dx \leqslant c\delta^{\lambda p}, \tag{14.1}$$

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p dx \leqslant c\delta^{\lambda p} \quad \text{и} \quad \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|^p dx \leqslant c\delta^{\lambda p}, \quad \delta > 0. \tag{14.2}$$

Можно определить липшицев класс одним лишь условием (14.1), т. е. не заботясь о продолжении нулем функции $f(x)$ за пределы $[a, b]$. Так вводимый класс обозначим через $\tilde{H}_p^{\lambda}$:

$$\tilde{H}_p^{\lambda} = \left\{ f(x) : f(x) \in L_p(a, b), \int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leqslant c\delta^{\lambda p}, \quad \delta > 0 \right\}, \tag{14.3}$$

так что $H_p^{\lambda} \subset \tilde{H}_p^{\lambda}$. Аналогично вводится класс $\tilde{h}_p^{\lambda}$ с заменой $O(\delta^{\lambda p})$ в (14.3) на $o(\delta^{\lambda p})$.

В пространствах $\tilde{H}_p^{\lambda}$, H_p^{λ} вводятся нормы равенствами

$$\|f\|_{\tilde{H}_p^{\lambda}} = \|f\|_p + \sup_{0<\delta<b-a} \delta^{-\lambda} \left\{ \int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \tag{14.4}$$

$$\|f\|_{H_p^\lambda} = \|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda} + \sup_{0<\delta<b-a} \delta^{-\lambda} \left\{ \left(\int_a^{a+\delta} + \int_{b-\delta}^{b} \right) |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \qquad (14.4')$$

относительно которых $\tilde{H}_p^\lambda$, H_p^λ являются банаховыми пространствами.

Заметим, что $H^\lambda \to \tilde{H}_p^\lambda$ при $1 < p < \infty$ и $H^\lambda \to H_p^\lambda$ при $1 \leqslant p \leqslant 1/\lambda$. Справедливо также вложение $H_0^\lambda \to H_p^\lambda$ при всех $1 \leqslant p < \infty$. Здесь $H_0^\lambda = H_0^\lambda([a, b])$ — класс гельдеровских функций, обращающихся в нуль при $x = a$, $x = b$. Через $X \to Y$ обозначено непрерывное вложение пространства X в Y. Непосредственно проверяется, что $(x-a)^\mu \in H_p^\lambda$ и $(x-a)^\mu \in \tilde{H}_p^\lambda$ тогда и только тогда, когда $\mu \geqslant \lambda - 1/p$ при $0 < \lambda < 1$ и $\mu > \lambda - 1/p$ при $\lambda = 1$.

Естествен следующий вопрос. Если $f(x) \in H_p^\lambda$, то не приводит ли гладкость функции $f(x)$ («порядка λ») к тому, что $f(x) \in L_r$ при $r > p$? И если это так, то не обладает ли $f(x)$ гладкостью в метрике L_r, т. е. возможно ли вложение $H_p^\lambda \to H_r^\mu$? Ответом на этот вопрос служит следующая теорема Харди—Литтлвуда, доказательство которой мы опускаем (см. литературные ссылки в § 17, п. 1°).

Теорема 14.1. *Если* $\lambda p \leqslant 1$, *то* $H_p^\lambda \to H_r^\mu$, $\tilde{H}_p^\lambda \to \tilde{H}_r^\mu$ *при всех* $p \leqslant r < q$, $q = p/(1-\lambda p)$, *где* $\mu = \lambda - 1/p + 1/r$. *Если* $\lambda p > 1$, *то* $H_p^\lambda \to H_0^{\lambda - 1/p}$, $\tilde{H}_p^\lambda \to H^{\lambda - 1/p}$.

Здесь вложение в класс непрерывных функций при $\lambda p > 1$ понимается, как обычно, с точностью до эквивалентности функций.

Отметим, что из теоремы 14.1 вытекает

Следствие. *Функции* $f(x) \in H_p^\lambda$ *или* $\tilde{H}_p^\lambda$ *интегрируемы в степени* p *с весом*

$$\int_a^b \frac{|f(x)|^p dx}{(x-a)^{\nu p} (b-x)^{\nu p}} \leqslant c \|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda}, \qquad (14.5)$$

где $\nu < \lambda$ *для* $f(x) \in H_p^\lambda$ *и* $\nu < \lambda \leqslant 1/p$ *для* $f(x) \in \tilde{H}_p^\lambda$.

Действительно, если $\lambda p \leqslant 1$, то в силу вложения $\tilde{H}_p^\lambda \to L_r$, $p \leqslant r < p/(1-\lambda p)$, имеем при выборе $p/(\nu - \nu p) < r < p/(1-\lambda p)$:

$$\int_a^b \frac{|f(x)|^p dx}{(x-a)^{\nu p} (b-x)^{\nu p}} \leqslant \|f\|_{L_r}^p \left\{ \int_a^b \frac{dx}{[(x-a)(b-x)]^{\nu r p/(r-p)}} \right\}^{(r-p)/r} \leqslant c \|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda}^p.$$

Если же $\lambda p > 1$, то в силу теоремы 14.1 $|f(x)| \leqslant c(x-a)^{\lambda - 1/p}$ при $x \to a$ и аналогично при $x \to b$, так что выполнимость неравенства (14.5) становится очевидной.

2°. Действие дробного интегрирования в H_p^λ. Покажем, что дробное интегрирование I_{a+}^α действует при $\lambda + \alpha < 1$ из H_p^λ в $H_p^{\lambda+\alpha}$, если отойти от левого конца $x = a$. Если же рассмотрение вести вплоть до точки $x = a$, то $I_{a+}^\alpha : H_p^\lambda \to H_p^{\lambda+\alpha-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (см. теорему 14.3). Предварительно рассмотрим более простой случай $\lambda = 0$, когда удается получить действие I_{a+}^α из $H_p^0 = L_p$ в H_p^α на всем отрезке $[a, b]$ (ср. с теоремой 3.6).

Теорема 14.2. *Операторы* I_{a+}^α, I_{b-}^α, $0 < \alpha \leqslant 1$, *ограниченно действуют из* $L_p(a, b)$ *в* $\tilde{H}_p^\alpha([a, b])$ *при любом* $p \geqslant 1$ *и в* $H_p^\alpha([a, b])$ *при* $1 \leqslant p < 1/\alpha$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \Gamma(\alpha) I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), получаем

$$\Big(\int_a^{b-\delta} |f(x+\delta)-f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \|\varphi\|_p \int_0^{\delta} (\delta-t)^{\alpha-1}dt +$$

$$+ \|\varphi\|_p \int_0^{b-a} [t^{\alpha-1}-(t+\delta)^{\alpha-1}]\,dt \leqslant c\delta^{\alpha}\|\varphi\|_p, \qquad (14.6)$$

и тогда $\|f\|_{\tilde{H}_p^{\lambda}} \leqslant c\|\varphi\|_p$. Для оценки нормы $\|f\|_{H_p^{\lambda}}$ при $1 \leqslant p < 1/\alpha$ проверим условия (14.2). Имеем

$$\Big(\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_0^{\delta} dx \Big| \int_0^{x} t^{\alpha-1}\varphi(x+a-t)\,dt\Big|^p\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\Big(\int_t^{\delta} |\varphi(x+a-t)|^p dt\Big)^{1/p},$$

откуда

$$\Big(\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \delta^{\alpha}\alpha^{-1}\|\varphi\|_p, \quad 1 \leqslant p < \infty,\ \alpha > 0 \qquad (14.7)$$

(в связи с этой оценкой см. теорему 17.2). Далее, для $J(\delta) = \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|^p\,dx$ имеем при $p > 1$ в силу неравенства Харди (3.18):

$$\frac{J(\delta)}{\delta^{\alpha p}} \leqslant \int_{b-\delta}^{b} \frac{|f(x)|^p dx}{(b-x)^{\alpha p}} \leqslant c\|\varphi\|_p^p,$$

что и требуется. Если же $p = 1$, то

$$J(\delta) \leqslant \int_a^{b-\delta} |\varphi(t)|\,dt \int_{b-\delta}^{b} (x-t)^{\alpha-1}dx + \int_{b-\delta}^{b} |\varphi(t)|\,dt \int_t^{b} (x-t)^{\alpha-1}\,dx \leqslant c\delta^{\alpha}\|\varphi\|_p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 14.1. Если $f(x) = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in L_p$, то $\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p dx \leqslant c\delta^{\alpha p}$ при всех $1 \leqslant p < \infty$. Если же $f = I_{b-}^{\alpha}\varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in L_p$, то $\int_{b-\delta}^{b} |f(x)|^p\,dx \leqslant c\delta^{\alpha p}$ при всех $1 \leqslant p < \infty$. Эти оценки для I_{a+}^{α} в окрестности точки b и для I_{b-}^{α} в окрестности точки a выполняются только при $1 \leqslant p < 1/\alpha$ (взять $\varphi(x) \equiv 1$).

Замечание 14.2. Ввиду вложения $\tilde{H}_p^{\alpha} \to H^{\alpha-1/p}$ при $\alpha > 1/p$, предоставляемого теоремой 14.1, теорема 14.2 является усилением теоремы 3.6 о том, что $I_{a+}^{\alpha} : L_p \to H^{\alpha-1/p}$ при $\alpha > 1/p$.

Теорема 14.3. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\lambda + \alpha < 1$. *Оператор* I_{a+}^{α} *осуществляет следующие непрерывные отображения:*

$$\tilde{H}_p^{\lambda}([a, b]) \xrightarrow{I_{a+}^{\alpha}} \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha}([a_1, b]), \quad a_1 > a, \qquad (14.8)$$

$$\tilde{H}_p^{\lambda}([a, b]) \xrightarrow{I_{a+}^{\alpha}} \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha-\varepsilon}([a, b]), \quad 1 \leqslant p \leqslant 1/\lambda. \qquad (14.9)$$

Кроме того, если $\varphi \in H_p^\lambda$ *и дополнительно выполняется условие*

$$\int_{a+\delta}^{b} \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(x-a)^{(1-\alpha)p}} \leqslant c\delta^{(\lambda+\alpha-1)p}, \tag{14.10}$$

то $I_{a+}^\alpha \varphi \in \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha}([a, b])$ *и удовлетворяет первому из условий (14.2).*

Доказательство. Для оценки разности $f(x+\delta)-f(x)$, где $f(x)=\Gamma(\alpha) I_{a+}^\alpha \varphi$, воспользуемся представлением (3.4): $f(x+\delta)-f(x)=J_1+J_2+J_3$, где слагаемые J_1, J_2, J_3 даны своими выражениями в (3.4) (с заменой $g(t)$ на $\varphi(t)$ и h на δ). Очевидно,

$$\left\{\int_a^{b-\delta} |J_2|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant \int_0^\delta (\delta-t)^{\alpha-1} dt \left\{\int_a^{b-\delta} |\varphi(x+t)-\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c\|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \int_0^\delta t^\lambda (\delta-t)^{\alpha-1} dt \leqslant c_1 \delta^{\lambda+\alpha} \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda}.$$

Далее,

$$\left\{\int_a^b |J_3|^p dx\right\}^{1/p} = \left\{\int_0^{b-a-\delta} dx \left| \int_0^x [\varphi(x+a-t)-\varphi(x-a)][t^{\alpha-1}-(t+\delta)^{\alpha-1}] dt \right|^p\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{b-a-\delta} [t^{\alpha-1}-(t+\delta)^{\alpha-1}] dt \left\{\int_{a+t}^b |\varphi(x-t)-\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c\|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \int_0^{b-a} t^\lambda [t^{\alpha-1}-(t+\delta)^{\alpha-1}] dt =$$

$$= c\|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \delta^{\lambda+\alpha} \int_0^{(b-a)/\delta} t^\lambda [t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}] dt \leqslant c_1 \delta^{\lambda+\alpha} \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda}.$$

Осложнения, связанные с левым концом, обусловлены слагаемым J_1. Имеем

$$\left\{\int_{a_1}^{b-\delta} |J_1|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant c \left\{\int_{a_1}^{b-\delta} |\varphi(x)|^p (x-a)^{\alpha p} \left[\left(1+\frac{\delta}{x-a}\right)^\alpha - 1\right]^p dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \delta \left\{\int_{a_1}^b |\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant c_1 \|\varphi\|_p \delta, \tag{14.11}$$

где c_1 не зависит от δ (но зависит от a_1 и $c_1 \to \infty$ при $a_1 \to a$). Тем самым утверждение (14.8) доказано.

Для получения (14.9) проведем оценки в (14.11), захватывая левый конец отрезка $x=a$. Пользуясь неравенством $(1+y)^\alpha - 1 \leqslant cy(1+y)^{\alpha-1}$, получаем

$$\left\{\int_a^{b-\delta} |J_1|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant c\delta \left\{\int_a^b \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(x-a+\delta)^{(1-\alpha)p}}\right\}^{1/p}.$$

Так как $(x-a+\delta)^{(1-\alpha)p} \geqslant (x-a)^{(\lambda-\varepsilon)p} \delta^{(1-\lambda-\alpha+\varepsilon)p}$, где $0<\varepsilon<\min(\lambda, 1-\lambda-\alpha)$, то тогда

$$\left\{\int_a^{b-\delta} |J_1|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant c\delta^{\lambda+\alpha-\varepsilon} \left\{\int_a^b \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(x-a)^{(\lambda-\varepsilon)p}}\right\}^{1/p} \leqslant c_1 \delta^{\lambda+\alpha-\varepsilon} \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda}$$

в силу (14.5).

Пусть теперь $\varphi \in H_p^\lambda$ и выполнено (14.10). Оценку слагаемого J_1 производим следующим образом:

$$\left\{\int_a^{b-\delta} |J_1|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant c\left\{\int_a^{a+\delta} |\varphi(x)|^p\,[(x-a+\delta)^\alpha - (x-a)^\alpha]^p\,dx\right\}^{1/p} +$$

$$+ c\left\{\int_{a+\delta}^{b} |\varphi(x)|^p\,[(x-a+\delta)^\alpha - (x-a)^\alpha]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant c\delta^{\lambda+\alpha}\|\varphi\|_{H_p^\lambda} +$$

$$+ c\delta\left\{\int_{a+\delta}^{b} |\varphi(x)|^p\,(x-a)^{(\alpha-1)p}\,dx\right\}^{1/p}.$$

Применение неравенства (14.10) завершает оценку, так что $I_{a+}^\alpha \varphi \in \in \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha}([a, b])$. Выполнение первого из условий (14.2) для $f = I_{a+}^\alpha \varphi$ проверяется непосредственно.

Замечание 14.3. Подобно следствию из теоремы 3.6, можно показать, что теорема 14.3 имеет место и для классов h_p^λ. В частности $\tilde{h}_p^\lambda([a, b]) \xrightarrow{I_{a+}^\alpha} h_p^{\lambda+\alpha}([a_1, b])$, $a_1 > a$. Можно показать также, что и теорема 14.2 справедлива в виде $L_p(a, b) \xrightarrow{I_{a+}^\alpha} h_p^\alpha([a_1, b])$, $a_1 > a$.

Из теоремы 13.5 вытекает, что функции класса H_p^λ, $\lambda > \alpha$, представимы дробными интегралами порядка α от функций из L_p:

$$H_p^\lambda \subset I^\alpha[L_p(a, b)], \quad \lambda > \alpha, \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{14.12}$$

Если провести более аккуратную, чем в теореме 13.5, проверку условия (13.22):

$$\left\{\int_{a+\varepsilon}^{b} |\psi_\varepsilon(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \int_\varepsilon^{b-a} \frac{dt}{t^{1+\alpha}}\left\{\int_a^{b-t} |f(x+t) - f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

то замечаем, что в силу теоремы 13.4 и

$$\tilde{H}_p^\lambda \subset I^\alpha[L_p(a, b)], \quad \lambda > \alpha, \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{14.13}$$

Уточним вложение (14.13), отметив следующую теорему:

Теорема 14.4. *Пусть* $f(x) \in \tilde{H}_p^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, $1 < p < 1/\alpha$. *Тогда* $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$, *где* $\varphi = \mathbf{D}_{a+}^\alpha f \in \tilde{H}_p^{\lambda-\alpha}([a, b])$ *при* $\lambda \leqslant 1/p$ *и* $\varphi(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \tilde{H}_p^{\lambda-\alpha}([a, b])$ *при* $\lambda > 1/p$.

Доказательство этой теоремы копирует оценки при доказательстве леммы 13.1 с той лишь разницей, что слагаемые I_1, I_2, I_3 в представлении (13.38) нужно оценивать не равномерно, а по норме L_p, применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33). Соответствующие выкладки не сложны и мы их опустим. Следует учесть, что $(x-a)^{-\alpha} \in \tilde{H}_p^{\lambda-\alpha}$ только при $\lambda \leqslant 1/p$.

Следствие. *Формула (2.64) дробного интегрирования по частям справедлива на функциях* $f(x) \in \tilde{H}_p^\lambda$, $g(x) \in H_q^\lambda$, $\lambda > \alpha$, $1/p + 1/q \leqslant 1 + \alpha$.

3°. Дробные интегралы и производные функций, заданных на всей прямой и принадлежащих H_p^λ на любом конечном отрезке. Рассмотрим теперь функции $\varphi(x)$, заданные на всей прямой, и изучим на них действие дробного интегрирования I_+^α в рамках пространств H_p^λ. При этом информация о H_p^λ-поведении функций φ и f будет локальной, а дробный интеграл будет

рассматриваться с бесконечным пределом интегрирования. Это позволит избежать влияния концов отрезка (ср. теоремы 14.6, 14.7 с теоремами 14.3, 14.4). Дробный интеграл $I_+^\alpha\varphi$ будет пониматься как условно сходящийся:

$$I_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \int_{x-N}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{14.14}$$

Такое понимание интеграла вызвано тем, что мы будем допускать сейчас к рассмотрению не обязательно убывающие на бесконечности функции $\varphi(t)$ (в частности, они могут быть периодическими) и существование предела (14.14) ниже в теоремах 14.5—14.7 будет постулироваться (позже, в § 19 мы убедимся в том, что интеграл (14.14) существует как условно сходящийся на 2π-периодических функциях при выборе $N = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, если $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0$).

Теорема 14.5. *Пусть Ω—произвольный отрезок длины l, пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p\,dx \leqslant c, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{14.15}$$

где $c = c(l)$ не зависит от расположения Ω, и пусть $f(x) = I_+^\alpha\varphi$, $0<\alpha<1$, существует в смысле (14.14) почти для всех x. Тогда

$$\int_a^b |f(x) - f(x+h)|^p dx = o(h^{\alpha p}) \text{ при } h \to 0 \tag{14.16}$$

для любого отрезка $[a, b]$ длины $|b-a| \leqslant l$.

Доказательство. Имеем $\Gamma(\alpha) f(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt = \int_{x-d\hbar}^{x} + \int_{x-N\hbar}^{x-d\hbar} + \int_{-\infty}^{x-N\hbar} = f_1 + f_2 + f_3$, где $d>0$, $N>0$—постоянные, выбором которых распорядимся позже. Пусть $\Delta f = f(x) - f(x+h)$. Достаточно показать, что

$$\int_a^b |\Delta f_2|^p dx = o(h^{\alpha p}) \tag{14.17}$$

при всех фиксированных d и N и что

$$\int_a^b |\Delta f_1|^p dx \leqslant \varepsilon h^{\alpha p}, \quad \int_a^b |\Delta f_3|^p\,dx \leqslant \varepsilon h^{\alpha p} \tag{14.18}$$

при всех $0<h\leqslant 1$ и достаточно малых d и достаточно больших N. Имеем

$$\Delta f_2 = \int_{x-N\hbar}^{x-d\hbar} (x-t)^{\alpha-1}[\varphi(t) - \varphi(t-h)]\,dt = O\left(h^{\alpha-1} \int_{x-N\hbar}^{x-d\hbar} |\varphi(t) - \varphi(t-h)|\,dt.\right.$$

Отсюда

$$\int_a^b |\Delta f_2|^p\,dx \leqslant ch^{\alpha p-1} \int_a^b dx \int_{x-N\hbar}^{x-d\hbar} |\varphi(t) - \varphi(t-h)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\alpha p-1} \int_{a-N\hbar}^{b-d\hbar} |\varphi(t) - \varphi(t-h)|^p dt \int_{t+d\hbar}^{t+N\hbar} dx = c_1 h^{\alpha p} \int_{a-N\hbar}^{b-d\hbar} |\varphi(t) - \varphi(t+h)|^p dt. \tag{14.19}$$

Из условия (14.15) следует, что $\varphi(t)$, $\varphi(t-h) \in L_p(a-Nh,\ b-dh)$ при фиксированных d, N и достаточно малых h. Тогда из (14.19) вытекает (14.17) ввиду свойства (1.34).

Далее, для получения первого из неравенств (14.18) достаточно показать, что $\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx \leqslant \varepsilon h^{\alpha p}$ и аналогично для $f_1(x-h)$. С учетом (14.15) имеем $\left(\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \int_0^{dh} t^{\alpha-1}\,dt \left(\int_a^b |f(x-t)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{(dh)^\alpha}{\alpha}\left(\int_{a-dh}^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant$

$\leqslant \varepsilon^{1/p} h^\alpha$ при d достаточно малом. Интеграл $\int_a^b |f_1(x-h)|^p dx$ оценивается аналогично. Наконец,

$$\Delta f_3 = \int_{Nh+h}^{\infty} \varphi(x-t)\,[t^{\alpha-1} - (t-h)^{\alpha-1}]\,dt + \int_{Nh}^{Nh+h} \varphi(x-t)\,t^{\alpha-1}dt = I_1 + I_2.$$

С учетом (14.15) имеем $\left(\int_a^b |I_1|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int_{Nh+h}^{\infty} [(t-h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]\,dt \times$

$\times \left(\int_a^b |\varphi(x-t)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant ch^\alpha \int_{N+1}^{\infty} [(t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]\,dt \leqslant \varepsilon^{1/p} h^\alpha$ при N достаточно большом. Далее,

$$\left(\int_a^b |I_2|^p dx\right)^{1/p} \leqslant (Nh)^{\alpha-1} h^{1-1/p} \left(\int_a^b dx \int_{Nh}^{Nh+h} |\varphi(x-t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant N^{\alpha-1} h^{\alpha-1/p} \left(\int_{a-Nh-h}^{b-Nh} |\varphi(t)|^p dt \int_{t+Nh}^{t+Nh+h} dx\right)^{1/p} = N^{\alpha-1} h^\alpha \left(\int_{a-Nh-h}^{b-Nh} |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Учитывая (14.15), получаем отсюда $\left(\int_a^b |I_2|^p dx\right)^{1/p} \leqslant cN^{\alpha-1} h^\alpha \leqslant \varepsilon^{1/p} h^\alpha$ при N достаточно большом, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 14.6. *Пусть $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$ существует в смысле (14.14) почти для всех x и пусть $\varphi(x)$, $\varphi(x-h) \in L_p(a, b)$ при некоторых a и b. Если*

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-h)|^p dx \leqslant ch^{\lambda p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 0 < \lambda < 1, \tag{14.20}$$

то при тех же a и b

$$\int_a^b |f(x) - f(x-h)|^p dx \leqslant ch^{(\lambda+\alpha)p}, \quad \lambda + \alpha < 1. \tag{14.21}$$

Доказательство. Для $\Delta f = f(x) - f(x-h)$ имеем

$$\Gamma(\alpha)\,\Delta f = \int_h^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(x-t)][(t-h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]\,dt -$$

$$- \int_0^h [\varphi(x) - \varphi(x-t)]\,t^{\alpha-1}dt = J_1 + J_2.$$

Простые оценки дают:

$$\Big(\int_a^b |J_1|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant c \int_h^\infty [(t-h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]\, dt \Big(\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-t)|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_h^\infty t^\lambda [(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]\, dt = c_1 h^{\lambda+\alpha}.$$

Аналогично

$$\Big(\int_a^b |J_2|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant \int_0^h t^{\alpha-1} dt \Big(\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-t)|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant ch^{\lambda+\alpha},$$

что и доказывает теорему.

В следующей теореме дробная производная Маршо понимается как предел по норме $L_p(a, b)$:

$$\mathbf{D}_+^\alpha f = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f)(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{14.22}$$

где $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f$ — усеченная дробная производная Маршо (5.59).

Теорема 14.7. *Пусть $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяет условию (14.15). Если*

$$\int_a^b |f(x) - f(x-h)|^p dx \leqslant ch^{\lambda p}, \quad 0 < \alpha < \lambda < 1, \tag{14.23}$$

то предел (14.22) существует. Если, кроме того,

$$\int_{a-d}^{b-d} |f(x) - f(x-h)|^p dx \leqslant ch^{\lambda p} \tag{14.24}$$

при всех достаточно малых $d>0$ с постоянной c, не зависящей от d, то

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-h)|^p dx \leqslant ch^{(\lambda-\alpha)p}, \quad \varphi = \mathbf{D}_+^\alpha f. \tag{14.25}$$

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f \in L_p(a, b)$, что можно легко получить с учетом условия (14.15) для функции f и условия (14.23). Установим фундаментальность $\varphi_\varepsilon = \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f$ в $L_p(a, b)$. Имеем при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\int_a^b |\varphi_{\varepsilon_1}(x) - \varphi_{\varepsilon_2}(x)|^p dx \leqslant \int_a^b dx \Big(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(x) - f(x-t)|\, t^{-\alpha-1} dt\Big)^p =$$

$$= \int_a^b dx \Big(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(x) - f(x-t)|\, t^{-\alpha-\delta-1/p} t^{\delta-1/p'} dt\Big)^p \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} t^{-1+\delta p'} dt\Big)^{p-1} \Big(\int_a^b dx \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(x) - f(x-t)|^p t^{-p\alpha-1-p\delta} dt\Big), \tag{14.26}$$

где $\delta > 0$; (14.26) мажорируется с учетом (14.23) величиной

$$o(1) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} t^{-p\alpha-1-p\delta}\, dt \int_a^b |f(x) - f(x-t)|^p dx = o(1) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} t^{p(\lambda-\alpha-\delta)-1} dt = o(1)$$

при выборе $0 < \delta < \lambda - \alpha$. Тем самым существование предела (14.22) установлено. Далее, для $\varphi = \mathbf{D}_+^\alpha f$ имеем

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}[\varphi(x)-\varphi(x-h)]=\int_h^\infty [f(x-t)-f(x-h)]\,[(t-h)^{-\alpha-1}-t^{-\alpha-1}]\,dt+$$

$$+\int_h^\infty [f(x)-f(x-h)]\,t^{-\alpha-1}\,dt+\int_0^h [f(x)-f(x-t)]\,t^{-\alpha-1}\,dt=I_1+I_2+I_3.$$

Простые оценки с учетом (14.24) дают $\left(\int_a^b |I_1|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\int_h^\infty [(t-h)^{-1-\alpha}-t^{-1-\alpha}]dt\times$

$\times\left(\int_a^b |f(x-h)-f(x-t)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant c\int_h^\infty [(t-h)^{-1-\alpha}-t^{-1-\alpha}]\,(t-h)^\lambda dt=$

$=c_1h^{\lambda-\alpha}$. Оценка для I_2 очевидна, а для I_3 с учетом (14.23) получаем

$$\left(\int_a^b |I_3|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\int_0^h t^{-\alpha-1}dt\left(\int_a^b |f(x)-f(x-t)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant ch^{\lambda-\alpha},$$

что и доказывает теорему.

Замечание 14.4. В теоремах 14.6, 14.7 мы ограничились O-формой. Нетрудно показать, что теоремы 14,6, 14.7 верны и в o-форме.

4°. Дробные производные абсолютно непрерывных функций. Ранее, в § 2 было установлено, см. лемму 2.2, что абсолютно непрерывные функции $f(x)$ имеют почти всюду дробные производные порядков $\alpha\in(0,1)$ и для них были доказаны формулы (2.24), (2.25). Здесь распространим эти утверждения на более широкий класс функций:

$$f(x)=\frac{f^*(x)}{(x-a)^\mu(b-x)^\nu},\quad \mu\geqslant 0,\ \nu<1-\alpha, \tag{14.27}$$

где $f^*(x)\in AC([a,b])$.

Теорема 14.8. *Функции вида (14.27) представимы дробным интегралом $f=I_{a+}^\alpha\varphi$ или $f=I_{b-}^\alpha\varphi$ от суммируемой функции $\varphi\in L_1(a,b)$.*

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $\nu=0$ (общий случай сводится к этому). Так как $f^*(x)\in AC([a,b])$, то $f^*(x)=f^*(a)+$

$+\int_a^x \psi(t)\,dt$, где $\psi(t)\in L_1$. Так как функция $f^*(a)(x-a)^{-\mu}$ представима в виде дробного интеграла от функции $\mathrm{const}\,(x-a)^{-\nu-a}\in L_1$, то остается показать, что функция $(x-a)^{-\mu}\int_a^x\psi(t)dt$ представима таким образом. Положим

$\varphi(x)=\int_a^x \psi(s)\,A(x,s)\,ds$, где

$$A(x,s)=\frac{\partial}{\partial x}\int_s^x(\xi-a)^{-\mu}(x-\xi)^{-\alpha}d\xi=$$

$$=(s-a)^{-\mu}(x-s)^{-\alpha}-\mu\int_0^{x-s}\frac{d\xi}{(x-a-\xi)^{1+\mu}\,\xi^\alpha},$$

и проверим, что

$$(x-a)^{-\mu}\int_a^x\psi(t)\,dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt. \tag{14.28}$$

Прежде всего убеждаемся в том, что $\varphi(x)\in L_1(a,\ b)$. Действительно, $\|\varphi\|_{L_1}\leqslant\int\limits_a^b|\psi(s)|\,ds\int\limits_s^b|A(x,\ s)|\,dx$. Покажем, что $\int\limits_a^b|A(x,\ s)|\,dx\leqslant$ const. Так как $A(x,\ a)=(1-\mu-\alpha)B(1-\mu,\ 1-\alpha)(x-a)^{-\mu-\alpha}$ и $\frac{\partial}{\partial s}A(x,\ s)=$ $=\alpha(s-a)^{-\mu}(x-s)^{\alpha-1}>0$, то $A(x,\ s)>0$ при всех $a<s<x$. Поэтому

$$\int\limits_a^b A(x,\ s)\,dx=(s-a)^{-\mu}\int\limits_s^b(x-s)^{-\alpha}dx-\mu\int\limits_s^b dx\int\limits_s^x\frac{d\xi}{(\xi-s)^{\alpha}(x+s-a-\xi)^{1+\mu}}=$$

$$=\frac{(s-a)^{-\mu}(b-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\int\limits_s^b\frac{(b+s-a-\xi)^{-\mu}-(s-a)^{-\mu}}{(\xi-s)^{\alpha}}\,ds-$$

$$-\int\limits_s^b\frac{d\xi}{(\xi-s)^{\alpha}(b-a+s-\xi)^{\mu}}\leqslant\text{const}.$$

Переходя к проверке (14.28), имеем $\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\int\limits_a^x\psi(s)\,ds\int\limits_s^x\frac{A(t,\ s)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$. Остается вычислить внутренний интеграл:

$$\int\limits_s^x\frac{A(t,\ s)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\frac{1}{(s-a)^{\mu}}\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}-\mu\int\limits_s^x\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\int\limits_s^t\frac{d\xi}{(t-\xi)^{\alpha}(\xi-a)^{1+\mu}}=$$

$$=\frac{1}{(s-a)^{\mu}}\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}-\mu\int\limits_s^x\frac{d\xi}{(\xi-a)^{\mu+1}}\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}(x-a)^{-\mu},$$

что и дает (14.28) и тем самым доказывает представимость функции $f(x)$ дробным интегралом.

Теорема 14.9. *Для дробных производных функций вида (14.27) справедливы при* $0<\alpha<1$ *формулы*

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)}\int\limits_a^x\frac{(1-\alpha)f(t)+(t-a)f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt,\qquad(14.29)$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)}\int\limits_x^b\frac{(1-\alpha)f(t)-(b-t)f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\,dt.\qquad(14.30)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi=\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$. Согласно теореме 14.5, $\varphi\in L_1$ и $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$. Введем еще функцию $\varphi_1(x)=(x-a)\varphi(x)$ и рассмотрим дробный интеграл: $I^{\alpha}_{a+}\varphi_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{(t-x)\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{(x-a)\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt=$ $=-\alpha I^{\alpha+1}_{a+}\varphi+(x-a)(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)$. Воспользовавшись полугрупповым свойством дробного интегрирования, получаем

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi_1)(x)=-\alpha\int\limits_a^x f(t)dt+(x-a)f(x)\overset{\text{def}}{=}f_1(x).\qquad(14.31)$$

Здесь правая часть—абсолютно непрерывная функция на $[a, b-\delta]$, $\delta>0$. Для первого слагаемого это очевидно, а для второго следует из равенства $(x-a)f(x)=(x-a)^{1-\nu}(b-x)^{-\nu}f^*(x)$, где все множители абсолютно непрерывны на $[a, b-\delta]$, $\delta>0$. Но тогда, согласно лемме 2.2, равенство (14.31) разрешимо относительно φ_1 и мы получаем по формуле (2.24) $\varphi_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f_1'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$. Это и дает формулу (14.29). Аналогично доказывается и (14.30).

Замечание 14.5. Формулы (14.29), (14.30) распространяются на значения $\alpha>1$:

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(x-a)^n}\int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha}[(t-a)^{n-\alpha}f(t)]^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,dt, \quad (14.32)$$

где $n=[\alpha]+1$, $\alpha\neq 1, 2, 3, \ldots$, что обосновывается подобно теореме 14.9.

5°. Теорема Рисса о среднем и неравенства для дробных интегралов и производных. Пусть функция $\varphi(x)$ задана на полуоси $x\geqslant a$. Справедлива следующая теорема, известная как *теорема Рисса о среднем для дробных интегралов.*

Теорема 14.10. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\varphi(x)\in L_1(a, b)$ *и такова, что*

$$f(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)\in C([a, b]), \quad f(a)=0. \quad (14.33)$$

Тогда для любого $x>b$ *существует* $\tau\in[a, b)$ *такое, что*

$$\int_a^b (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt=\int_a^{\tau}(\tau-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt \quad (14.34)$$

или, что то же,

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)-(I^{\alpha}_{b+}\varphi)(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(\tau) \quad (14.35)$$

(последнее в предположении, что $\varphi(t)$ *интегрируема вне* $[a, b]$*).*

Доказательство. Справедливо тождество

$$\int_a^b \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt=\frac{(x-b)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b \frac{f(u)\,du}{(x-u)(b-u)^{\alpha}}, \quad x>b. \quad (14.36)$$

Оно проверяется непосредственно после подстановки $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в правую часть, перестановки порядка интегрирования и вычисления образующегося внутреннего интеграла по формуле (11.4). Так как функция $(x-u)^{-1}(b-u)^{-\alpha}$ не меняет знака для $u\in[a, b]$, то в силу первой теоремы о среднем интегрального исчисления (С. М. Никольский [5, с. 363]) из (14.36) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt=f(\tau_1)M(x), \quad a\leqslant\tau_1\leqslant b, \quad (14.37)$$

где обозначено

$$M(x)=\frac{(x-b)^{\alpha}\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^b \frac{du}{(x-u)(b-u)^{\alpha}}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{(b-a)/(x-a)}\frac{ds}{s^{\alpha}(1-s)^{1-\alpha}} \quad (14.38)$$

(замена $b-u=(x-b)s(1-s)^{-1}$). Так как $0<M(x)<1$, а функция $f(x)$ непрерывна, то найдется точка $\tau\in[a,\ \tau_1)$ такая, что $f(\tau_1)M(x)=f(\tau)$. Тем самым доказано (14.34) или, что то же, (14.35). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы 14.10. Тогда*

$$\left|\int_a^b (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\right|\leqslant \max_{\xi\in[a,\ b]}\left|\int_a^{\xi}(\xi-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\right|,\quad x>b. \tag{14.39}$$

Следствие 2. *Пусть* $\varphi(t)\in L_1(a,\ b)$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\right|\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in[a,\ b]}\left|\int_a^{\xi}(\xi-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\right|,\quad x>b. \tag{14.40}$$

Действительно, (14.39) следует немедленно из (14.34), а (14.40) вытекает из (14.36) без дополнительных условий (14.33), поскольку $\int_a^b |M'(t)|\,dt=$

$$=-\int_a^b M'(t)\,dt=M(a)<1.$$

Докажем с помощью теоремы 14.10 некоторые неравенства для дробных интегралов.

Теорема 14.11. *Пусть* $\varphi(x)\in L_1(a,\ N)$ *при любом* $N>a$. *Если*

$$|\varphi(x)|\leqslant V(x),\quad |(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)|\leqslant W(x),\quad x>a, \tag{14.41}$$

где $V(x)$, $W(x)$ — *неубывающие функции, то для любого* β, $0<\beta<\alpha$, *справедливо неравенство*

$$|(I_{a+}^{\beta}\varphi)(x)|\leqslant c\,[V(x)]^{1-\beta/\alpha}\,[W(x)]^{\beta/\alpha}, \tag{14.42}$$

где c *не зависит от* x *и* β.

Доказательство. Пусть вначале $0<\alpha<1$. Имеем

$$\Gamma(\beta)(I_{a+}^{\beta}\varphi)(x)=\int_a^{\xi}(x-t)^{\beta-1}\varphi(t)\,dt+\int_{\xi}^{x}(x-t)^{\beta-1}\varphi(t)\,dt=I_1+I_2, \tag{14.43}$$

где точку ξ выберем следующим образом:

$$\xi=\begin{cases} x-[W(x)/V(x)]^{1/\alpha}, & \text{если } x>a+[W(x)/V(x)]^{1/\alpha},\\ a, & \text{если } x<a+[W(x)/V(x)]^{1/\alpha},\end{cases} \tag{14.44}$$

так что $I_1=0$ при $x<a+[W(x)/V(x)]^{1/\alpha}$. Заметим, что всегда

$$0<x-\xi\leqslant[W(x)/V(x)]^{1/\alpha}. \tag{14.45}$$

Ввиду монотонности $V(x)\,|I_2|\leqslant\int_{\xi}^{x}V(t)(x-t)^{\beta-1}dt\leqslant\beta^{-1}V(x)(x-\xi)^{\beta}$ и тогда в силу (14.45)

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{\beta}V(x)\left[\frac{W(x)}{V(x)}\right]^{\beta/\alpha}=\frac{1}{\beta}[V(x)]^{1-\beta/\alpha}[W(x)]^{\beta/\alpha}. \tag{14.46}$$

Далее, $I_1=\int_0^{\xi}\varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-\alpha}dt$ и так как $(x-t)^{\beta-\alpha}$ возрастает на $[0,\ \xi]$ при фиксированном x, то, согласно второй теореме о среднем интегрального исчисления (С. М. Никольский [5, с. 368]), имеем

$$I_1=(x-\xi)^{\beta-\alpha}\int_u^{\xi}\varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt,\quad 0\leqslant u\leqslant\xi. \tag{14.47}$$

Применяя к интегралу в (14.47) неравенство (14.40), получаем

$$|I_1| \leqslant (x-\xi)^{\beta-\alpha}\Gamma(\alpha) \operatorname*{ess\,sup}_{y\in[u,\,\xi]} |(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(y)| \leqslant \Gamma(\alpha)(x-\xi)^{\beta-\alpha}W(\xi).$$

Отсюда с учетом (14.44) и монотонности функции $W(\xi)$

$$|I_1| \leqslant \Gamma(\alpha)\left[\frac{W(x)}{V(x)}\right]^{(\beta-\alpha)/\alpha} W(x) = \Gamma(\alpha)[V(x)]^{1-\beta/\alpha}[W(x)]^{\beta/\alpha}. \quad (14.48)$$

Таким образом, из (14.43) и следует в силу оценок (14.46), (14.48) неравенство (14.42) с постоянной $c = \dfrac{1}{\beta\Gamma(\beta)} + \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}$, которая ввиду свойств Г-функции мажорируется постоянной, не зависящей от β.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Выберем целое число n так, чтобы $\alpha/n < 1/2$, и пусть $\alpha_k = \alpha k/n$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим $f_\beta(x) = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant x} |(I^{\beta}_{a+}\varphi)(t)|$ и применим уже доказанную теорему для случая $0 < \alpha < 1$, заменяя V, I^{β}_{a+}, W на $f_{\alpha_{k-1}}$, f_{α_k}, $f_{\alpha_{k+1}}$:

$$f_{\alpha_k}(x) \leqslant c\sqrt{f_{\alpha_{k-1}}(x) f_{\alpha_{k+1}}(x)}, \quad k = 1,2, \ldots, n-1$$

($f_{\alpha_0} = V$, $f_{\alpha_n} = W$). Возведем эти неравенства, отвечающие номерам $k = 1, 2, \ldots, l-1, l, l+1, \ldots, (n-2), (n-1)$, в степень порядка $(n-l), 2(n-l), \ldots, (l-1)(n-l), l(n-l), l(n-l-1), \ldots, 2l, l$ соответственно. После перемножения получим

$$f_{\alpha_l}(x) \leqslant c_1 [V(x)]^{1-\alpha_l/\alpha} [W(x)]^{\alpha_l/\alpha}, \quad (14.49)$$

и тем самым неравенство (14.42) доказано для значений $\beta = \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Так как для любого $\beta \in (0, \alpha)$ найдется такое $l = 1, 2, \ldots, n-1$, что $0 < \beta - \alpha_l < 1$, то $I^{\beta}_{a+}\varphi = I^{\beta-\alpha_l}_{a+} I^{\alpha_l}_{a+}\varphi$, и, применяя еще раз теорему, доказанную для малых α, из (14.49) легко получим утверждение теоремы для произвольного $\beta \in (0, \alpha)$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\varphi_\alpha(x)$ означает монотонную мажоранту дробного интеграла:*

$$\varphi_\alpha(x) = \sup_{0<t<x} |(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(t)|, \quad \varphi(x) \in L_1(0, l), \quad \alpha \geqslant 0.$$

Тогда

$$\varphi_\beta(x) \leqslant c[\varphi_0(x)]^{1-\beta/\alpha}[\varphi_\alpha(x)]^{\beta/\alpha}, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad (14.50)$$

где c не зависит от $\varphi(x)$.

Замечание 14.6. Теорема 14.11 справедлива и в o-форме: *если при $x \to \infty$ имеют место соотношения $\varphi(x)/V(x) \to 0$, $|(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)| \leqslant W(x)$ или $|\varphi(x)| \leqslant V(x)$, $(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)/W(x) \to 0$, то для $0 < \beta < \alpha$*

$$(I^{\beta}_{a+}\varphi)(x)/[V(x)]^{1-\beta/\alpha}[W(x)]^{\beta/\alpha} \to 0. \quad (14.51)$$

Доказательство этого утверждения содержится в работе М. Рисса (M. Riesz [1])

Приведем важную перефразировку теоремы 14.11.

Теорема 14.11′. *Пусть $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}[L_1(a, N)]$, $\alpha > 0$, при любом $N > a$. Если*

$$|f(x)| \leqslant W(x), \quad |(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)| \leqslant V(x), \quad x > a,$$

где $W(x)$, $V(x)$ — невозрастающие функции, то для любого $0 < \gamma < \alpha$

$$|(\mathcal{D}^{\gamma}_{a+}f)(x)| \leqslant c[V(x)]^{\gamma/\alpha}[W(x)]^{1-\gamma/\alpha}. \quad (14.52)$$

Утверждение этой теоремы получается из теоремы 14.11 после переобозначения $I^{\alpha}_{a+}\varphi = f$, $\beta - \alpha = \gamma$.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in I^{\alpha}_{0+}[L_1(0, N)]$ *при любом* $N > 0$. *Если* $f(x)$ *и* $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f$ *ограничены на полуоси* $R^1_+ = (0, \infty)$, *то при* $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$

$$\| \mathcal{D}^{\gamma}_{0+}f \|_{C(R^1_+)} \leqslant K \| f \|^{1-\gamma/\alpha}_{C(R^1_+)} \| \mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f \|^{\gamma/\alpha}_{L_\infty(R^1_+)}. \tag{14.53}$$

Неравенства, оценивающие «промежуточные» производные через «старшую» производную и саму функцию, называют иногда *неравенствами Колмогорова*. Неравенство (14.53) является, таким образом, неравенством типа Колмогорова для дробных порядков.

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о точных постоянных в неравенстве (14.53); см. об этом, а также о других неравенствах для дробных интегралов и производных в § 17, п. 2°, а также в § 19, п. 8°.

6°. Дробное интегродифференцирование и суммирование рядов и интегралов. Имеется тесная связь обобщенного суммирования рядов (в терминах «дробных» средних или так называемых средних Рисса) с дробным интегрированием. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, не обязательно сходящийся. Известны различные методы суммирования расходящихся рядов (см. книгу Г. Харди [1]). Они основаны на том, что вместо частичных сумм

$$C(x) = \sum_{n=1}^{[x]} c_n \tag{14.54}$$

рассматривают те или иные их усреднения и *суммой расходящегося ряда* называют предел усреднения, если он существует. Один из таких способов использует усреднения вида

$$C^{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \sum_{n=1}^{[x]} (x-n)^{\alpha} c_n, \quad \alpha > 0, \tag{14.55}$$

число

$$s = \lim_{x \to \infty} C^{\alpha}(x) \tag{14.56}$$

называется «суммой» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Средние (14.55) называются *«нормальными средними» Рисса*. Известно (Г. Харди [1, с. 115]), что этот способ суммирования рядов регулярен, т. е. он суммирует сходящийся ряд к его обыкновенной сумме. Справедливо следующее равенство

$$C^{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \int_0^x C(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \tag{14.57}$$

где $C(t)$ — частичная сумма (14.54). Равенство (14.57) проверяется интегрированием по частям:

$$\alpha \int_0^x C(t)(x-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^x (x-t)^{\alpha} dC(t) = \sum_{n=1}^{[x]} (x-n)^{\alpha} c_n.$$

Таким образом, средние Рисса (14.55) представляют собой с точностью до множителя $x^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)$ дробный интеграл от частичной суммы ряда.

Средние (14.55) можно аналогично использовать для суммирования интегралов

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \tag{14.58}$$

расходящихся на бесконечности, назвав значением этого интеграла предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x F(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad \alpha>0, \tag{14.59}$$

где $F(t)=\int_0^t f(s)\,ds$.

Аналогично суммируются интегралы

$$\int_0^a f(t)\,dt, \quad f(t)\in L_1(\varepsilon, a), \quad 0<\varepsilon<a, \tag{14.60}$$

расходящиеся из-за неинтегрируемой особенности в точке $t=0$. Если существует предел

$$\lim_{x\to 0} \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt \int_t^a f(s)\,ds \tag{14.61}$$

при некотором $\alpha>0$, то он называется *значением интеграла (14.60)*.

Указанный в (14.59), (14.61) метод суммирования расходящихся интегралов называется *(C, α)-методом* (интегрирование в смысле Чезаро—Лебега).

Имеется ряд исследований, в которых дробное интегрирование используется указанным способом при суммировании рядов и интегралов. Отметим основополагающую в этом вопросе работу Г. Харди, М. Рисса (G. H. Hardy, M. Riesz [1], 1915 г.) и работу L. S. Bosanquet [5], посвященную свойствам интегралов Чезаро — Лебега (14.60), (14.61). См. также книги Г. Г. Харди [1], К. Чандрасекхарана, С. Минакшисундарама (K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram [1]) и литературные указания в § 17, пп. 1, 2°.

§ 15. ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА

В этом параграфе классическое правило Лейбница

$$(fg)^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} f^{(\alpha-n)} g^{(n)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{15.1}$$

обобщается на дифференцирование (и интегрирование) дробного порядка, при этом наряду с обобщением в виде бесконечного ряда (см. (15.12)) рассматривается и некоторый его интегральный аналог (см. (15.17)).

1°. Дробное интегродифференцирование аналитических функций на вещественной оси. Установим предварительно некоторые вспомогательные факты о возможности почленного дробного интегрирования и дифференцирования функциональных рядов.

Лемма 15.1. *Если ряд* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x)\in C([a, b])$, *сходится равномерно на* $[a, b]$, *то допустимо его почленное дробное интегрирование по формуле*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}f_n\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(I_{a+}^{\alpha}f_n)(x),\quad \alpha>0,\quad a<x<b, \tag{15.2}$$

причем ряд справа сходится также равномерно на $[a, b]$.

Доказательство проводится простыми оценками величины $\left|I_{a+}^{\alpha}f-\right.$ $\left.-I_{a+}^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{N}f_n\right)\right|$ с учетом равномерной сходимости ряда.

Лемма 15.2. *Пусть при каждом* $n=0, 1, 2, \ldots$ *существуют дробные производные* $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f_n$, *а ряды* $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f_n$ *сходятся равномерно на любом подынтервале* $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon>0$. *Тогда первый ряд допускает почленное дробное дифференцирование по формуле*

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}f_n\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f_n)(x),\quad \alpha>0,\ a<x<b. \tag{15.3}$$

Доказательство. Так как $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)=(d/dx)^{[\alpha]+1}(I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f)(x)$, лемма 15.2 сводится к лемме 15.1 за счет возможности почленного применения оператора $(d/dx)^{[\alpha]+1}$ на основании известной теоремы математического анализа.

Напомним, см. (2.34), что $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ при $\alpha<0$ означает дробный интеграл $I_{a+}^{-\alpha}$.

Докажем две леммы о представимости в виде ряда дробной производной аналитической в интервале (a, b) функции (т. е. функции, разложимой в степенной ряд в этом интервале).

Лемма 15.3. *Если функция* $f(x)$ *аналитична в интервале* (a, b), *то*

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}f^{(n)}(x),\quad x\in(a, b), \tag{15.4}$$

где $\binom{\alpha}{n}$ — *биномиальный коэффициент* (1.48).

Доказательство. Пусть $\alpha<0$, $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x(x-$ $-t)^{-\alpha-1}f(t)\,dt$. Функцию $f(t)$ можно представить в силу ее аналитичности в виде сходящегося степенного ряда: $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}(x-t)^n$. Здесь, согласно лемме 15.1, возможно почленное дробное интегрирование, что приводит к (15.4). В силу (1.48) случай $\alpha=0$ в (15.4) отвечает равенству $f(x)=f(x)$. Пусть $\alpha>0$. Так как $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)=(d/dx)^{[\alpha]+1}\mathcal{D}_{a+}^{\{\alpha\}-1}f(x)$, то, согласно формуле (15.4), $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\times$ $\times\frac{(x-a)^{n-\{\alpha\}+1}f^{(n)}(x)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+n)}$. Осуществляя почленное дробное дифференцирование (возможность этого следует из леммы 15.2 ввиду равномерной сходимости соответствующих рядов), имеем

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\frac{(x-a)^{n-\{\alpha\}+1}f^{(n)}(x)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+n)}.$$

В силу правила Лейбница (15.1) и равенства (1.49)

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\sum_{k=0}^{[\alpha]+1}\binom{[\alpha]+1}{k}\frac{(x-a)^{n-\alpha+k}f^{(n+k)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\binom{[\alpha]+1}{k}\frac{(x-a)^{n-\alpha+k}f^{(n+k)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.$$

Вводя новую переменную суммирования $j=n+k$ и изменяя его порядок, получаем

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{j}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\binom{[\alpha]+1}{j-n}\right)\frac{(x-a)^{j-\alpha}f^{(j)}(x)}{\Gamma(j-\alpha+1)}. \tag{15.5}$$

Отсюда, согласно тождеству (1.53), вытекает соотношение (15.4).

Лемма 15.4. *Если функция $f(x)$ в окрестности точки a имеет разложение вида*

$$f(x)=(x-a)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n, \tag{15.6}$$

то ее дробная производная $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f$ представима по формуле

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=(x-a)^{\mu-\alpha}g(x), \tag{15.7}$$

где

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}(x-a)^n. \tag{15.8}$$

При этом радиусы сходимости рядов (15.6) и (15.8) совпадают.

Доказательство. Согласно леммам 15.1 и 15.2, к ряду (15.6) можно применить почленное дробное интегродифференцирование. Поэтому утверждения (15.7), (15.8) леммы вытекают из (2.44). Совпадение радиусов сходимости проверяется вычислением этих радиусов по обычной формуле Коши — Адамара с учетом того, что в силу (1.66)

$$\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\sim c_n n^{\alpha},\quad n\to\infty. \tag{15.9}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если $f(x)$ аналитична в (a, b), то и $(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)$, где $\alpha\in R^1$, аналитична* в (a, b).

Заметим, что полугрупповое свойство (2.65), обсуждавшееся в § 2 на произвольных функциях, в случае аналитических функций выполняется при более широких предположениях относительно параметров α и β. Именно из леммы 15.4 вытекает, что если функция f аналитична в правой окрестности точки a, то

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}\mathscr{D}^{\beta}_{a+}f=\mathscr{D}^{\alpha+\beta}_{a+}f,\quad \alpha\in R^1,\quad \beta<1. \tag{15.10}$$

2°. Обобщенное правило Лейбница. Распространение формулы Лейбница (15.1) на дробные значения α осуществим в двух формах.

Теорема 15.1. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ аналитичны на $[a, b]$. Тогда*

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}(fg)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(\mathscr{D}^{\alpha-k}_{a+}f)\,g^{(k)},\quad \alpha\in R^1; \tag{15.11}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}(fg)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\binom{\alpha}{k+\beta}(\mathscr{D}^{\alpha-\beta-k}_{a+}f)(\mathscr{D}^{\beta+k}_{a+}g), \tag{15.12}$$

где $\binom{\alpha}{k+\beta}$ *определяется равенством (1.50);* $\alpha,\ \beta \in R^1$ *и* $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ *при нецелом* β.

Доказательство. В силу (15.4) имеем $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} \times \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(fg)^{(k)}$. Пользуясь обычным правилом Лейбница (15.1), после перемены порядка суммирования получаем

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(x) \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k+j}\binom{k+j}{k}\frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)} f^{(j)}(x). \tag{15.13}$$

Так как $\binom{\alpha}{k+j}\binom{k+j}{k} = \binom{\alpha}{k}\binom{\alpha-k}{j}$, то (15.13) принимает вид

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha-k}{j}\frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)} g^{(k)}(x) f^{(j)}(x).$$

Отсюда, вновь применяя (15.4), приходим к (15.11).

Далее, случай целых β в (15.12) простой перенумерацией $\beta + k = j$ сводится, согласно (1.49), к (15.11). При нецелых же β благодаря такой перенумерации достаточно рассмотреть случай $\beta < 1$. Перепишем (15.11) в виде $\mathcal{D}_{a+}^{\beta}(gf) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k} f^{(k)}\mathcal{D}_{a+}^{\beta-k}g$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta}$, имеем с учетом полугруппового свойства (15.10)

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta}(\mathcal{D}_{a+}^{\beta}(fg)) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k} f^{(k)}\mathcal{D}_{a+}^{\beta-k}g\right). \tag{15.14}$$

Осуществляя почленное дробное дифференцирование (его возможность обосновывается в конце доказательства теоремы), используя (15.11) и снова (15.10), получаем $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}\binom{\alpha-\beta}{j}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-j+k} f \mathcal{D}_{a+}^{\beta-k+j}g$. Изменим порядок суммирования, положив $j-k=n$:

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}\binom{\alpha-\beta}{n+k}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-n}f)(\mathcal{D}_{a+}^{\beta+n}g) +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{0}\sum_{k=-n}^{0}\binom{\beta}{k}\binom{\alpha-\beta}{n+k}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-n}f)(\mathcal{D}_{a+}^{\beta+n}g). \tag{15.15}$$

Из формул (1.48), (1.72), (1.77) следует соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}\binom{\alpha-\beta}{n+k} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\alpha-\beta-n+1)n!}\,{}_2F_1(-\beta,\ \beta-\alpha+n;\ n+1;\ 1) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)},$$

а из (1.53) — $\sum_{k=-n}^{0}\binom{\beta}{k}\binom{\alpha-\beta}{n+k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)}$. Подставляя эти значения в (15.15) и учитывая (1.48), приходим к (15.12).

Для завершения доказательства теоремы обоснуем почленное дробное дифференцирование ряда в (15.14). Согласно лемме 15.4 и равенству (15.12), исходный и продифференцированный ряды можно представить в виде

$$(t-a)^{-\beta}g_1(t)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}(t-a)^k \quad \text{и} \quad (t-a)^{-\alpha}g_2(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)}$$

соответственно, где функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ аналитичны в окрестности точки a. Последние ряды сходятся равномерно по $t\in[a, x]$, при этом сходимость второго из них легко получается с помощью интегрального признака, если заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)\,d\tau}{\Gamma(\tau+1+\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta-\tau+1)}=2^{\alpha}, \tag{15.16}$$

см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.2.2.4]. Поэтому в силу леммы 15.2 допустимо почленное дифференцирование ряда в (15.14).

Интегральный аналог обобщенного правила Лейбница (15.12) отражает

Теорема 15.2. *Если функции f и g аналитичны в окрестности точки a, то справедлива формула*

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg)=\int_{-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{\tau+\beta}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\tau-\beta}f\,\mathcal{D}_{a+}^{\tau+\beta}g\,d\tau, \tag{15.17}$$

$\alpha,\ \beta\in R^1,\ \alpha\neq -1,\ -2,\ \ldots$ при нецелом β, где $\binom{\alpha}{\tau+\beta}$ определяется равенством (1.48).

Доказательство. В силу аналитичности функций f и g в окрестности точки a имеем

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\quad g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m. \tag{15.18}$$

На основании лемм 15.1 и 15.2, а также формулы (2.44) получаем

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\tau-\beta}f)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha+\tau+\beta}}{\Gamma(\tau-\alpha+\beta+n+1)},$$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\tau+\beta}g)(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g^{(m)}(a)(x-a)^{m-\tau-\beta}}{\Gamma(m-\tau-\beta+1)}.$$

Подставим эти выражения в правую часть (15.17):

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{\tau+\beta}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\tau-\beta}f)(\mathcal{D}_{a+}^{\tau+\beta}g)\,d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)f^{(n)}(a)\,g^{(m)}(a)(x-a)^{n+m-\alpha}d\tau}{\Gamma(\tau+\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\tau-\beta+1)\Gamma(\tau-\alpha+\beta+n+1)\Gamma(n-\beta-\tau+1)}. \tag{15.19}$$

Непосредственными оценками показывается, что последний двойной ряд равномерно сходится по τ на всей вещественной оси. Поэтому воз-

можно его почленное интегрирование и, следовательно, равенство (15.19) принимает вид

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+1)\,f^{(n)}(a)\,g^{(m)}(a)\,(x-a)^{n+m-\alpha}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\Gamma(\tau+\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\tau-\beta+1)\,\Gamma(\tau-\alpha+\beta+n+1)\,\Gamma(n-\tau-\beta+1)}.$$

Значение последнего интеграла известно:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\Gamma(\alpha+\tau)\,\Gamma(\beta-\tau)\,\Gamma(\gamma+\tau)\,\Gamma(\delta-\tau)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-3)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha+\delta-1)\,\Gamma(\gamma+\beta-1)\,\Gamma(\gamma+\delta-1)},\qquad(15.20)$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)>3,$$

см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.2.2.9]. Поэтому

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,\frac{g^{(m)}(a)}{m!}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m-\alpha+1)}\,(x-a)^{n+m-\alpha}$$

или в силу (2.44)

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,\frac{g^{(m)}(a)}{m!}\,\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left((x-a)^{n+m}\right)=$$

$$=\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g^{(m)}(a)}{m!}\,(x-a)^{m}\right)=\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что формулы (15.12) и (15.17) после простых замен переменных распространяются и на левостороннее дробное дифференцирование $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$.

В заключение укажем, что имеется большое число обобщений и видоизменений правила Лейбница (15.1). Они касаются формул (15.12) и (15.17) как для лиувиллевской формы дробного интегродифференцирования, так и для других форм (см. об этом § 17, п. 2°).

§ 16. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В настоящем параграфе приводятся асимптотические представления дробных интегралов

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt,\qquad\alpha>0,\qquad(16.1)$$

при $x\to 0$ и $x\to+\infty$, если известна асимптотика функции f вблизи этих точек. При этом наряду с асимптотикой, учитывающей степенные члены

разложений, рассматривается и асимптотика, учитывающая, кроме того, логарифмические и показательные члены.

1°. Определения и свойства асимптотических разложений. Приведем некоторые необходимые определения (более подробно см., например, в монографиях Ю. В. Сидорова, М. В. Федорюка, М. И. Шабунина [1, § 42], М. В. Федорюка [2, глава I] и Ф. Олвера [1, глава I]).

Определение 16.1. *Пусть M — некоторое множество точек на действительной оси и a — его предельная точка. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, определенная при $x\in M$, называется асимптотической последовательностью (при $x\to a$, $x\in M$), если для любого n*

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x\to a,\ x\in M). \tag{16.2}$$

Примерами асимптотических последовательностей являются последовательности 1) $\varphi_n(x) = x^{\mu_n}$, $x\to 0$; 2) $\varphi_n(x) = x^{-\mu_n}$, $x\to\infty$; 3) $\varphi_n(x) = (\ln x)^{-\mu_n}$, $x\to 0$ или $x\to\infty$, где $\{\mu_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = \infty$.

Определение 16.2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность (при $x\to a$, $x\in M$). Формальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, где a_n — некоторые постоянные, называется асимптотическим разложением или асимптотическим рядом функции $f(x)$, если для любого $N\geqslant 0$*

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x) = o(\varphi_N(x)) \quad (x\to a,\ x\in M). \tag{16.3}$$

Для обозначения связи между асимптотическим рядом и функцией f будем использовать символ

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \quad (x\to a,\ x\in M). \tag{16.4}$$

Асимптотическое разложение по степенной асимптотической последовательности (см. примеры 1), 2)) будем называть *степенным асимптотическим рядом.*

В дальнейшем указание на множество M будем опускать. Отметим также, что хотя сходящиеся ряды являются асимптотическими, термин «асимптотический ряд» обычно употребляется по отношению к рядам, которые не обязательно сходятся.

Приведем некоторые свойства асимптотических разложений. Важнейшее из них — единственность: асимптотическое разложение данной функции по данной асимптотической последовательности единственно. Однако разные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение, например:

$$e^{-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^{-n} \text{ и } 0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^{-n} \text{ при } x\to+\infty.$$

Со степенными асимптотическими рядами можно обращаться так же, как и со сходящимися степенными рядами: складывать, перемножать, почленно интегрировать и дифференцировать. Непосредственно, исходя из определения 16.2, доказываются следующие утверждения.

Лемма 16.1. *Пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ — возрастающие последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = \lim\limits_{n\to\infty}\nu_n = +\infty$ и при $x\to\infty$ имеют место асимптотические разложения*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\mu_n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-\nu_n}.$$

Тогда при $x \to +\infty$

$$f(x)+g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\lambda_n}, \quad f(x)\,g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\sigma_n},$$

где возрастающая последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, *получается перегруппировкой членов последовательностей* $\{\mu_n\}$ *и* $\{\nu_n\}$, *а возрастающая последовательность* $\{\sigma_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$, *— перегруппировкой произведений* $\mu_k \nu_j$ *по возрастающим значениям. В частности,* $\lambda_0 = \min(\mu_0, \nu_0)$, $\sigma_0 = \mu_0 \nu_0$.

Лемма 16.2. *Пусть* $\{\mu_n\}$ *— возрастающая последовательность,* $\mu_n > 1$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $(c, +\infty)$ *и*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\mu_n} \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{16.5}$$

то этот ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_x^{\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n - 1} x^{-\mu_n+1} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Замечание 16.1. Утверждения, аналогичные леммам 16.1, 16.2, справедливы и для асимптотических рядов по последовательностям x^{μ_n} при $x \to 0$, т. е. для

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\mu_n} \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{16.6}$$

Нам понадобится также следующая лемма Ватсона.

Лемма 16.3. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *а функция* $f(t)$ *непрерывна при* $0 \leqslant t \leqslant a$ *и бесконечно дифференцируема в окрестности* $t = 0$. *Тогда при* $x \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\int_0^a e^{-xt^\alpha} t^{\beta-1} f(t)\,dt \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^{-\frac{n+\beta}{\alpha}}. \tag{16.7}$$

Доказательство этой леммы см., например, в монографии Ю. В. Сидорова, М. В. Федорюка, М. И. Шабунина [1, с. 408].

2°. Случай степенной асимптотики. Пусть $\{\mu_n\}$ — возрастающая последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$. Будем искать асимптотические разложения дробных интегралов $I_{0+}^{\alpha} f$ при условии, что функция f имеет асимптотику вида (16.5) или (16.6).

Наиболее простой результат дает асимптотика (16.6). Именно верна

Теорема 16.1. *Пусть* $\{\mu_n\}$ *— возрастающая последовательность,* $\mu_n > -1$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$. *Если* $f(x)$ *удовлетворяет условию (16.6), то дробный интеграл* $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$ *при* $x \to 0$ *имеет асимптотическое представление вида*

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\mu_n + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu_n + 1)}\, x^{\mu_n+\alpha}. \tag{16.8}$$

Доказательство. Согласно (16.6), $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n t^{\mu_n} + R_N(t)$. Поэтому в силу формулы (2.44)

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f(xt)\,dt=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n\Gamma(\mu_n+1)}{\Gamma(\alpha+\mu_n+1)}x^{\mu_n+\alpha}+$$

$$+\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 R_N(xt)(1-t)^{\alpha-1}dt. \qquad (16.9)$$

Согласно (16.4), $R_N(t)=o(t^{\mu_n})$ при $t\to 0$. Следовательно, для достаточно больших N $R_N(t)=t^{\mu_N}\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — бесконечно малая функция при $t\to 0$. Отсюда получаем $\int_0^1 R_N(xt)(1-t)^{\alpha-1}dt=o(x^{\mu_N})$ при $x\to 0$, и тогда из (16.9) вытекает утверждение теоремы.

Более сложным является случай, когда $f(t)$ имеет асимптотику (16.5). Здесь известны три основных способа нахождения асимптотического разложения дробного интеграла (16.1): метод последовательных разложений (Э. Я. Риекстыньш [1] и [2, т. 1, § 11]), метод, основанный на представлении $I_{0+}^{\alpha}f$ с помощью равенства Парсеваля для преобразования Меллина (Э. Я. Риекстыньш [2, т. 3, § 31.1—31.3], R. A. Handelsman, J. S. Lew [1, 2], R. Wong [2]) и метод, основанный на теории обобщенных функций (J. P. McClure, R. Wong [1]). Дадим асимптотическое представление (16.1) методом последовательных разложений, который является наиболее элементарным. Для простоты изложения предположим, что $f(t)$ имеет асимптотику

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{-n-\beta},\quad 0<\beta\leqslant 1,\quad \text{при } t\to+\infty. \qquad (16.10)$$

Асимптотическое разложение для $I_{0+}^{\alpha}f$ будет различным в зависимости от того, что $0<\beta<1$ или же $\beta=1$.

Теорема 16.2. *Пусть функция f локально интегрируема на $(0,+\infty)$ и имеет асимптотику (16.10) с $0<\beta<1$. Тогда дробный интеграл $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)$ при $x\to+\infty$ имеет асимптотическое разложение вида*

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-n-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-n-\beta)}a_nx^{\alpha-\beta-n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\Gamma(1+\alpha-n)}x^{\alpha-n}, \qquad (16.11)$$

где постоянные b_n выражаются формулами

$$b_n=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty}f_n(t)\,t^{-\beta}dt,\quad n=1,2,\ldots, \qquad (16.12)$$

$$f_1(t)=t^{\beta}f(t)-a_0,\quad f_{n+1}(t)=tf_n(t)-a_n,\quad n=1,2,\ldots \qquad (16.13)$$

Доказательство. Так как $f(t)=t^{-\beta}[a_0+f_1(t)]$, где $f_1(t)$ — функция из (16.13), то в силу (2.44) имеем

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}I(x)+\frac{a_0\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}x^{\alpha-\beta}, \qquad (16.14)$$

где $I(x)=x^{-\beta}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f_1(xt)t^{-\beta}dt$. Обозначив $g_1(t)=(1-t)^{\alpha-1}-1$ и приняв во внимание (16.13), придем к

$$x^{\beta}I(x)=\int_0^1 f_1(xt)\,g_1(t)\,t^{-\beta}dt+\int_0^1 f_1(xt)\,t^{-\beta}dt=$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f_2(xt)\,\frac{g_1(t)}{t}\,t^{-\beta}dt+a_1\int_0^1\frac{g_1(t)}{t}\,t^{-\beta}dt\right)+\int_0^1 f_1(xt)\,t^{-\beta}dt.$$

Продолжим этот процесс. Введем обозначения

$$\frac{g_n(t)}{t}=g_n^*(t),\quad g_n^*(t)-g_n^*(0)=g_{n+1}(t),$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots,\ g_0^*(t)=(1-t)^{\alpha-1}. \tag{16.15}$$

Тогда $x^{\beta}I(x)$ можно представить в виде

$$x^{\beta}I(x)=\frac{1}{x^N}\int_0^1 f_{N+1}(xt)\,g_N^*(t)\,t^{-\beta}dt+\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{x^n}\int_0^1 g_n^*(t)\,t^{-\beta}dt+$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(1-\alpha)_n}{n!\,x^n}\int_0^1 f_{n+1}(xt)\,t^{-\beta}dt. \tag{16.16}$$

Заметим, что из (16.10), (16.13) и (16.15) вытекают соотношения

$$f_{n+1}(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}t^{-k},\quad t\to+\infty,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{16.17}$$

$$g_n^*(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(g_0^*)^{(k)}(0)}{k!}\,t^{k-n}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k}{k!}\,t^{k-n},\quad g_n^*(0)=\frac{(1-\alpha)_n}{n!}. \tag{16.18}$$

Согласно (16.17) и лемме 16.2, при $x\to+\infty$ имеем оценку вида

$$\int_0^1 f_{n+1}(xt)\,t^{-\beta}dt=x^{\beta-1}\int_0^{\infty}f_{n+1}(t)\,t^{-\beta}dt-x^{\beta-1}\int_x^{\infty}f_{n+1}(t)\,t^{-\beta}dt\sim$$

$$\sim x^{\beta-1}\int_0^{\infty}f_{n+1}(t)\,t^{-\beta}dt-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+n}}{(k+\beta-1)\,x^k},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{16.19}$$

Тогда в силу (16.18) и (16.19) при $x\to+\infty$ находим

$$\int_0^1 f_{N+1}(xt)\,g_N^*(t)\,t^{-\beta}dt=\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k}{k!}\int_0^1 f_{N+1}(xt)\,t^{k-N-\beta}dt\sim$$

$$\sim\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k}{k!}\left[x^{N+\beta-k-1}\int_0^{\infty}f_{N+1}(t)\,t^{k-N-\beta}dt-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+N}}{(n+N+\beta-k-1)\,x^n}\right],$$

или после некоторых преобразований с учетом (1.72) и (1.77)

$$\int_0^1 f_{N+1}(xt)\,g_N^*(t)\,t^{-\beta}dt\sim x^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{x^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{x^n},\quad x\to+\infty,$$

где

$$A_n = \frac{(1-\alpha)_{n+N}}{(n+N)!}\int_0^\infty f_{N+1}(t)\,t^{n-\beta}dt,$$

$$B_n = a_{n+N}\left[\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-n-N-\beta)}{\Gamma(1-n-N-\beta+\alpha)} + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(1-\alpha)_k}{k!\,(n+N+\beta-k-1)}\right].$$

Отсюда вытекает оценка

$$\int_0^1 f_{N+1}(xt)\,g_N^*(t)\,t^{-\beta}dt = O(x^{\beta-1}) \quad \text{при } x\to+\infty. \tag{16.20}$$

Учитывая (16.19) и (16.20), для $I(x)$ при $x\to+\infty$ имеем соотношение

$$I(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{x^{n+\beta}}\left(\int_0^1 g_n^*(t)\,t^{-\beta}dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-\alpha)_k}{k!\,(n+\beta-k-1)}\right) +$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(1-\alpha)_n}{n!\,x^{n+1}}\int_0^\infty f_{n+1}(t)\,t^{-\beta}dt + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right),$$

или в силу (16.18), (1.72) и (1.77)

$$I(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-n-\beta)}{\Gamma(1-n-\beta+\alpha)}\,x^{-n-\beta} + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(1-\alpha)_n}{n!\,x^{n+1}}\times$$

$$\times\int_0^\infty f_{n+1}(t)\,t^{|\beta}dt + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right).$$

Подставляя это выражение в (16.14) и учитывая равенство

$$(1-\alpha)_n = (-1)^n\,\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha-n), \tag{16.21}$$

получаем доказываемую формулу (16.11).

Теорема 16.3. *Пусть функция f локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (16.10) с $\beta = 1$. Тогда дробный интеграл $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)$ при $x\to+\infty$ имеет асимптотическое представление*

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) \sim \ln x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{\Gamma(\alpha-n)}\,x^{\alpha-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{\alpha-n-1}, \tag{16.22}$$

где постоянные c_n находятся по формулам

$$c_0 = a_0[\psi(1)-\psi(\alpha)] + d_1, \quad c_n = \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)}\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k}{k!\,(k-n)} +$$

$$+\frac{(-1)^n d_{n+1}}{\Gamma(\alpha-n)\,n!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{16.23}$$

$$d_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt + \int_1^\infty\left(f_{n+1}(t) - \frac{a_n}{t}\right)dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16.24}$$

$$f_1(t) = f(t), \quad f_{n+1}(t) = tf_n(t) - a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16.25}$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 16.3. Используя обозначения (16.18) и (16.25), вместо (16.16) получаем представление

$$\Gamma(\alpha)\, x^{-\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{x^N}\int_0^1 f_{N+1}(xt)\, g_N^*(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n-1}}{x^n}\int_0^1 g_n^*(t)\, dt + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n!\, x^n}\int_0^1 f_{n+1}(xt)\, dt. \qquad (16.26)$$

Соотношение (16.17) здесь заменяется на

$$f_{n+1}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k-1} t^{-k}, \quad t \to +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (16.27)$$

Интеграл $\int_0^1 f_{n+1}(xt)dt$ с помощью (16.24) представим в виде $\int_0^1 f_{n+1}(xt)\, dt =$

$= \frac{1}{x}\int_0^x f_{n+1}(t)\, dt = \frac{1}{x}\left[a_n \ln x - \int_x^{\infty}\left(f_{n+1}(t) - \frac{a_n}{t}\right)dt + d_{n+1}\right]$. Тогда в силу (16.27) и леммы 16.2 $\int_0^1 f_{n+1}(xt)\, dt \sim \frac{1}{x}\left(a_n \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+n}}{k\, x^k} + \right.$

$\left. + d_{n+1}\right)$, $x \to +\infty$. Подставляя эту оценку в (16.26) и учитывая (16.20) с $\beta = 0$, получаем при $x \to +\infty$ соотношения

$$x^{-\alpha}\Gamma(\alpha)(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n-1}}{x^n}\int_0^1 g_n^*(t)\, dt + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(1-\alpha)_n}{n!\, x^{n+1}} \times$$

$$\times (a_n \ln x + d_{n+1}) - \sum_{n=0}^{N-2}\frac{(1-\alpha)_n}{n!\, x^{n+1}}\sum_{k=1}^{N-n-1}\frac{a_{k+n}}{k\, x^k} + O\left(\frac{\ln x}{x^{N+1}}\right) =$$

$$= \ln x \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(1-\alpha)_n a_n}{n!\, x^{n+1}} + \frac{1}{x}\left(a_0\int_0^1 g_1^*(t)\, dt + d_1\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{x^{n+1}}\left[a_n\left(\int_0^1 g_{n+1}^*(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-\alpha)_k}{k!\,(n-k)}\right) + \right.$$

$$\left. + d_{n+1}\frac{(1-\alpha)_n}{n!}\right] + O\left(\frac{\ln x}{x^{N+1}}\right).$$

Согласно (16.18) с учетом формулы 2.2.4.20 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1], имеем

$$\int_0^1 g_1^*(t)\, dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1} - 1}{t}\, dt = \psi(1) - \psi(1-\alpha),$$

$$\int_0^1 g_{n+1}^*(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-\alpha)_k}{k!\,(n-k)} = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k}{k!\,(k-n)}.$$

Отсюда на основании равенства (16.21) следует искомая формула (16.22).

3°. Случай степенно-логарифмической асимптотики. Пусть функция $f(t)$ имеет степенно-логарифмическую асимптотику

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\mu_n}(\ln t)^{m_n} \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \qquad (16.28)$$

где $\{\mu_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=+\infty$, m_n — произвольные действительные числа. В этом случае асимптотические разложения дробных интегралов $I^{\alpha}_{0+}f$ можно находить так же, как и в п. 2°, модифицированным методом последовательных разложений. Мы не станем на этом останавливаться (см. в § 17, п. 1°, исторические сведения к § 16, п. 3°), а рассмотрим только случай степенно-логарифмической асимптотики вида

$$f(t)\sim t^{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\ln t)^{\gamma-n}\quad\text{при}\quad t\to+\infty, \tag{16.29}$$

где β — неотрицательное, а γ — произвольное фиксированные действительные числа. Асимптотическое разложение $I^{\alpha}_{0+}f$ в этом случае можно получить двумя способами: методом, основанным на представлении $I^{\alpha}_{0+}f$ в виде свертки Меллина (N. Bleinstein [1]), и методом непосредственных оценок (R. Wong [1]). Воспользуемся вторым методом.

Рассмотрим сначала случай $0\leqslant\beta<1$.

Т е о р е м а 16.4. *Пусть вещественнозначная неотрицательная функция $f(x)$ локально интегрируема на $[0, +\infty)$ и имеет разложение (16.29) с $0\leqslant\beta<1$. Тогда при $x\to+\infty$*

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x)\sim x^{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\ln x)^{\gamma-n}, \tag{16.30}$$

где постоянные B_n представимы по формулам

$$B_n=B_n(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\binom{\gamma+k-n}{k}\Omega_k(\alpha,\ \beta), \tag{16.31}$$

$$\Omega_k(\alpha,\ \beta)=\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{-\beta}(\ln t)^k\,dt. \tag{16.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дробный интеграл $I^{\alpha}_{0+}f$ перепишем в виде

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=J_1f+J_2f. \tag{16.33}$$

Покажем, что J_1f асимптотически мало́ по сравнению с J_2f. Выберем $0<\varepsilon<1-\beta$. Так как $(\ln t)^{\gamma}=O(t^{\varepsilon})$ при $t\to+\infty$, то из (16.29) имеем $f(t)=O(t^{\beta-\varepsilon})$ при $t\to+\infty$ и, следовательно,

$$\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\,dt=O(x^{(1-\beta+\varepsilon)/2})\quad\text{при}\quad x\to+\infty. \tag{16.34}$$

Положим $M_{\alpha}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1/2}(1-t)^{\alpha-1}$. Тогда $\Gamma(\alpha)J_1f\leqslant M_{\alpha}x^{\alpha-1}\int\limits_0^{\sqrt{x}}f(t)\,dt$ и в силу (16.34) получаем оценку

$$(J_1f)(x)=O(x^{\alpha-\beta-\delta})\quad\text{при}\quad x\to+\infty, \tag{16.35}$$

где $\delta=(1-\varepsilon-\beta)/2>0$.

Оценим J_2f. Согласно (16.29),

$$f(t) = t^{-\beta} \sum_{n=0}^{N} a_n (\ln t)^{\gamma-n} + R_N(t),$$

$$R_N(t) = O(t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1}) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{16.36}$$

Отсюда

$$(J_2 f)(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} L(\alpha, \beta, \gamma - n; x) + r_N(x), \tag{16.37}$$

где обозначено

$$L(\alpha, \beta, \gamma; x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma} dt,$$

$$r_N(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^{x} (x-t)^{\alpha-1} R_N(t)\, dt. \tag{16.38}$$

Сделаем в (16.38) замену $t = x\tau$

$$L(\alpha, \beta, \gamma; x) = x^{\alpha-\beta} (\ln x)^{\gamma} \int_{x^{-1/2}}^{1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \left(1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right)^{\gamma} d\tau. \tag{16.39}$$

Здесь $|\ln \tau / \ln x| \leqslant 1/2$. Следовательно, $\left(1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} \left(\frac{\ln \tau}{\ln x}\right)^{k}$. Подставив это в (16.39), осуществив почленное интегрирование, приняв во внимание (16.32) и непосредственно проверяемую оценку $\int_{0}^{x^{-1/2}} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} (\ln \tau)^{k} d\tau = O(x^{-\delta})$, $\delta > 0$, при $x \to +\infty$, получим асимптотическое равенство

$$L(\alpha, \beta, \gamma; x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} \Omega_k(\alpha, \beta) (\ln x)^{\gamma-k} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{16.40}$$

Согласно (16.36), существуют постоянные $k > 0$ и $c > 1$ такие, что $|R_N(t)| \leqslant k t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1}$ для $t \geqslant 1$. Отсюда $r_N(x) \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^{x} (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1} dt$, а далее, приняв во внимание (16.40), имеем $r_N(x) = O(x^{\alpha-\beta} (\ln x)^{\gamma-N-1})$ при $x \to +\infty$. Подставляя теперь (16.40) в (16.37) и учитывая последнюю оценку, получаем после перегруппировки членов асимптотическое разложение вида $(J_2 f)(x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\ln x)^{\gamma-n}$ при $x \to +\infty$, где B_n выражается формулой (16.31). Отсюда, согласно (16.33) и (16.35), вытекает утверждение теоремы.

Случай $\beta = 1$ характеризует

Теорема 16.5. *Пусть функция f локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (16.29) с $\beta = 1$. Тогда при $x \to +\infty$*

$$\Gamma(\alpha) x^{1-\alpha} (I_{0+}^{\alpha} f)(x) \sim \int_{0}^{x} f(t)\, dt + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\ln x)^{\gamma-n}, \tag{16.41}$$

где

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \binom{\gamma + k - n}{k} \Lambda_k(\alpha), \tag{16.42}$$

$$\Lambda_k(\alpha)=\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}-1}{t}(\ln t)^k\,dt. \tag{16.43}$$

Доказательство осуществляется аналогично доказательству теоремы 16.4 после записи интеграла $I^{\alpha}_{0+}f$ в форме

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x[(x-t)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}]f(t)\,dt \tag{16.44}$$

и представления второго члена в правой части в виде суммы двух интегралов по интервалам $(0, \sqrt{x})$ и $(\sqrt{x}, x)$ (см. (16.33)).

Случай $\beta>1$ в (16.29) исследуется с помощью разложения $(x-t)^{\alpha-1}$ в ряд Тейлора по степеням x и использования вместо (16.42) представления

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{[\beta]-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\int_0^x f(t)\left(\frac{t}{x}\right)^k dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left[(x-t)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{[\beta]-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\left(\frac{t}{x}\right)^k\right]f(t)\,dt. \tag{16.45}$$

4°. Случай степенно-показательной асимптотики. Нахождение асимптотического представления дробного интеграла $I^{\alpha}_{0+}f$ в случае, когда функция $f(t)$ имеет степенно-показательную асимптотику, основывается на лемме Ватсона (лемма 16.3). Ограничимся здесь рассмотрением случая простейшей степенно-показательной асимптотики в нуле, когда

$$f(t)\sim e^{-1/t}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n \quad \text{при} \quad t\to+0. \tag{16.46}$$

Теорема 16.6. *Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию (16.46), то дробный интеграл $(I^{\alpha}_{0+}f)(x)$ при $x\to+0$ имеет асимптотическое разложение*

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x)\sim e^{-1/x}\sum_{n=0}^{\infty}H_n x^{n+2\alpha}, \tag{16.47}$$

где постоянные H_n имеют вид

$$H_n=H_n(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\Gamma(n-k+\alpha)\,a_k}{(n-k)!\,\Gamma(\alpha+k+1)}. \tag{16.48}$$

Доказательство. Согласно (16.1) и (16.46), справедливо соотношение

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}e^{-1/t}t^n dt \quad \text{при} \quad x\to+0. \tag{16.49}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_{\alpha,n}(x)=\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}e^{-1/t}t^n dt. \tag{16.50}$$

Произведя замену переменной $t=x/(1+\tau)$, имеем

$$J_{\alpha,n}(x)=x^{\alpha+n}e^{-1/x}\int_0^{\infty}e^{-\tau/x}\tau^{\alpha-1}(1+\tau)^{-\alpha-n-1}d\tau.$$

Применив затем лемму 16.3, получаем

$$J_{\alpha,n}(x) \sim x^{2\alpha+n} e^{-1/x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha+n+1)_k \Gamma(k+\alpha)}{k!} x^k \qquad (16.51)$$

при $x \to +0$. Подстановка этого разложения в (16.49) приводит к доказываемой формуле (16.47).

5°. Асимптотическое решение уравнения Абеля. В связи с задачами из приложений часто приходится искать не решение φ уравнения Абеля

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \qquad (16.52)$$

а асимптотику φ в некоторой точке (обычно в нуле или на бесконечности), если известна асимптотика свободного члена f в этой точке. В связи с этим введем понятие асимптотического решения.

Определение 16.3. *Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$, свободный член $f(x)$ уравнения (16.52) имеет асимптотику*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x) \text{ при } x \to a \quad (b_n \in \mathbf{C},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (16.53)$$

Если существует асимптотическая последовательность $\{\chi_n(x)\}$ при $x \to a$, такая, что

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n \chi_n(x) \quad \textit{при } x \to a \quad (d_n \in \mathbf{C},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (16.54)$$

и

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x) \quad \textit{при } x \to a,$$

то асимптотическое разложение (16.54) будем называть асимптотическим решением уравнения (16.52) при $x \to a$.

Отметим, что из свойства единственности асимптотического разложения (данной функции по данной асимптотической последовательности) вытекает единственность асимптотического решения. Однако из существования асимптотического решения, вообще говоря, не следует существование самого решения.

Зная асимптотические разложения дробных интегралов (16.1), можно находить асимптотические решения уравнения Абеля (16.52). Например, следствием теорем 16.1 и 16.4 являются следующие утверждения, характеризующие асимптотические решения уравнения (16.52) при $x \to 0$ и $x \to +\infty$.

1. *Если свободный член $f(x)$ имеет асимптотику*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\mu_n} \quad \textit{при } x \to 0, \qquad (16.55)$$

где μ_n — некоторая возрастающая последовательность, причем $\mu_0 > \alpha - 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$, то асимптотическое решение уравнения (16.52) выражается формулой

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu_n+1)\,a_n}{\Gamma(\mu_n-\alpha+1)} t^{\mu_n-\alpha} \quad \textit{при } t \to 0. \qquad (16.56)$$

2. *Пусть функция f локально интегрируема на* $[0, +\infty)$, $0<\alpha<1$ *и*

$$f(x)\sim x^{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\ln x)^{\nu-n} \quad \textit{при } x\to+\infty, \tag{16.57}$$

где $0\leqslant\beta<1-\alpha$, *а* γ — *произвольное действительное число. Тогда локально интегрируемое на* $[0, +\infty)$ *асимптотическое решение уравнения (16.52) представимо в виде*

$$\varphi(t)\sim t^{-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\ln t)^{\nu-m} \quad \textit{при } t\to\infty, \tag{16.58}$$

где постоянные c_m *находятся (по известным* b_n*) из рекуррентных формул*

$$b_n=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{n} c_{n-m}\binom{\gamma-n+m}{m}\Omega_k(\alpha,\ \alpha+\beta),$$

в которых $\Omega_k(\alpha, \beta)$ *имеют вид (16.32). Например,* $c_0=\dfrac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}b_0$,

$$c_1=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\{b_1+b_0\gamma[\psi(1-\beta)-\psi(1-\alpha-\beta)]\}$$ *и т. д.*

§ 17. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 3

1°. Исторические сведения. К § 10, п. 1°. Вторые из соотношений (10.4), (10.5) иногда называются *первым индексным законом,* см. Э. Лав (E. R. Love [5], 1972 г.). Они характеризуют полугрупповое свойство операторов I_{a+}^{α} и I_{b-}^{α}, рассматриваемых обычно в $L_p(a, b)$, $1\leqslant p<\infty$. Случай $p=1$ см. в теореме 2.5 и в § 4, п. 1°(к § 2, п. 7°), а также в работах Э. Лава (E. R. Love [2, с. 174; 3, с. 1058, 1060], 1967 г.). Последнее из утверждений теоремы 10.1 ранее не публиковалось.

Соотношения (10.4) рассматривали многие авторы. В случае $\mathrm{Re}\alpha>0$, $\mathrm{Re}\beta>0$ их изучали Э. Лав и Л. Юнг (E. R. Love, L. C. Young [1], 1938 г.), Э. Хилле (E. Hille [1], 1939 г.), Х. Кобер (H. Kober [1], 1940 г.). Последний в работе H. Kober [2], 1941 г., исследовал также случай $\mathrm{Re}\alpha=\mathrm{Re}\beta=0$, $a=0$ для функции $f(x)$, принадлежащей некоторому подпространству пространства $L_p(0, b)$, $p\geqslant 2$. М. Рисс (M. Riesz [6, с. 12], 1949 г.) эти соотношения распространил на случай отрицательных $\mathrm{Re}\alpha$ или $\mathrm{Re}\,\beta$, но при условии, что $f\in C^p([a, b])$, $p>\max(-\mathrm{Re}\,\alpha, -\mathrm{Re}(\alpha+\beta))$. Формулы (10.4) для всех значений α и β в различных классах обобщенных функций рассматривали И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], 1959 г., и А. МакБрайд (A. C. McBride [2], 1975 г., [4], 1977 г.; [9], 1983 г.); причем последний использовал в основном классы $F_{p\mu}$ и $F'_{p\mu}$, см. § 8, п. 4°. В классе $L_1(a, b)$ или его подклассах, определяемых условиями существования соответствующих дробных производных, эти формулы при всех значениях α и β подробно исследовал Э. Лав (E. R. Love [5], 1972 г.).

О формулах (10.6), (10.7) см. ниже в подпункте «к § 10, п. 3°».

Частный случай формулы (10.12) при $\alpha_1-\beta_1=\pm 1$ имеется в работе Y. W. Chen [1, с. 309], 1959 г., но, по-видимому, эта формула была известна и ранее. На множестве аналитических функций она рассматривается в диссертации R. Tremblay [1, с. 292], 1974 г.

Теоремы 10.2—10.4 и леммы 10.1, 10.2 публикуются впервые. В случае $p=1$, $\mathrm{Re}\alpha>0$ эти леммы установлены Э. Лавом (E. R. Love [2, с. 181, 184; 3, с. 1063, 1070], 1967 г.), который использовал весовые классы $Q_q=\{f(x); x^q f(x)\in L_1[0, d],\ d<\infty\}$ и $R_r=\{f(x)\colon x^r f(x)\in L_1(a, \infty),\ a>0\}$. В этих же работах подробно исследовались соответственно операторы (10.18), (10.19) и (10.20), (10.21), для которых были указаны композиционные разложения (10.22)—(10.29) лишь при таких значениях параметров, когда функция $f(x)$ принадлежит всему пространству Q_q или R_r. Значения параметров, для которых существование этих разложений может быть обеспечено лишь сужением этих пространств условиями представимости типа $f(x)=I_{0+}^{\mu}\psi(x)$, $\mathrm{Re}\mu>0$, $\psi\in L_p(0, d)$, автором не рассматривались, что несколько сузило глубину исследований.

К § 10, п. 2°. Теорема 10.5 публикуется впервые. Однако первое из соотношений (10.38) в другой форме получил Э. Лав (E. R. Love [7], 1985 г.). Он назвал это равенство *третьим индексным законом* и подробно исследовал условия его справедливости при всех значениях параметров в классе $L_1((0, \infty); x^{\mu}(x+1)^{\nu})$ или соответствующих

подклассах, определяемых условиями представимости, о которых говорилось выше и которые для своего цикла работ он здесь использовал впервые.

Отметим, что обращение оператора (10.39) для функции $f(t)$, у которой $f(t)=0$, $t>a>0$, впервые получили Н. И. Ахиезер, В. А. Щербина [1], 1957 г., см. § 39, п. 2°, 36.7, 36.8.

К § 10, п. 3°. Теоремы 10.6, 10.7 публикуются впервые. Однако соотношения (10.42), (10.43) и (10.6), (10.7), которые характеризуют *второй индексный закон* (по терминологии Э. Лава (E. R. Love [5], 1972 г.)), встречались и ранее. По-видимому, впервые частный случай соотношения (10.6) вида $\mathcal{D}^k x^{2k-1}\mathcal{D}^{k-1}f(x)=x^{k-1}\mathcal{D}^{2k-1}x^k f(x)$, $\mathcal{D}=d/dx$, с помощью формулы Лейбница получил Д. Уиддер (D. V. Widder [1, с. 17, лемма 3.11], 1938 г.). В терминах операторов Кобера $I^{+}_{\eta,\alpha}$, $K^{-}_{\eta,\alpha}$(18.5), (18.6) для случаев $\alpha>0$, $\beta>0$ эти формулы установил Х. Кобер (H. Kober [1], 1940 г.), см. (18.16). Также формулы вида (10.6), (10.7) встречались в работах Т. Хиггинса (T. P. Higgins [4, с. 7—8], 1965 г.) и Э. Лава (E. R. Love [2, (3.9)], 1967 г.), причем последний в работе E. R. Love [5], 1972 г., осуществил подробное исследование формулы (10.6) в классе Q_q для всех значений параметров, получив результаты, аналогичные указанным в теореме 10.6. Подробные исследования второго индексного закона в некоторых классах обобщенных функций осуществили А. Эрдейи (A. Erdelyi [15], 1972 г.) и А. МакБрайд (A. C. McBride [1, 2, 4, 6, 9], 1975—1983 гг.), причем последний изучал его для более общих операторов $I^{\alpha}_{0+;x^m}$, $I^{\alpha}_{-;x^m}$, см. (18.41), и в пространствах $F_{p\mu}$ и $F'_{p\mu}$ см. § 8, п. 4°.

Оператор (10.47) в классах функций Q_q, R_r рассматривал О. И. Маричев [1, 2], 1972—1974 гг., а оператор (10.48) в случае $m=0$ — А. МакБрайд (A. C. McBride [7], 1982 г.) в пространстве $F_{p,\mu}$ и И. Димовски, В. Кирякова (I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova [2], 1985 г.).

К § 10, п. 4°. Теоремы 10.8, 10.9 публикуются впервые. Однако композиции вид $\prod_{j=1}^{n} I^{\alpha_j}_{a+} e^{\lambda_j x} f(x)$ известны давно—они встречались в работах А. В. Летникова [9], 1888 г., и П. А. Некрасова [3], 1888 г., где в таком виде искались решения дифференциальных уравнений порядка n с двучленными коэффициентами. Такие композиции при $n=2$ и их обращения встречались в работе H. T. Davis [2, с. 137], 1927 г., но систематическое исследование таких операторов было проведено значительно позже в работах Т. Прабхакара (T. R. Prabhakar [1], 1969 г.; [2], 1971 г.) в связи с изучением обратимости оператора (10.55). Операторы (10.55) и (10.56) как частные случаи оператора (10.63) и его аналога рассматривались соответственно в работах T. R. Prabhakar [5], 1972 г.; [6], 1977 г.

Оператор из правой части (10.62) в случае $\lambda=1$ изучался в работе Ж. Белварда (J. A. Belward [1], 1972 г.), где было получено его обращение через дробные интегралы, использующее композиционную структуру (10.62) этого оператора.

К § 11, п. 1°. Теорема 11.1 принадлежит И. Племелю (1908 г.) и И. И. Привалову (1916 г.) в невесовом случае (см. доказательство и ссылки в книге Н. И. Мусхелишвили [1]) и Р. В. Дудучаве [1, 2] в весовом случае. Теорема 11.2 получается из теоремы 11.1 несложными преобразованиями (например, отображением · прямой на окружность). Теорема 11.3 принадлежит М. Риссу (M. Riesz, 1927 г.) в невесовом случае и К. И. Бабенко (1948 г.), Б. В. Хведелидзе (1957 г.) в весовом случае (см. литературные ссылки и доказательства, например, в книге И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4]).

К § 11, пп. 2, 3°. Первой работой, содержащей, по крайней мере неявно, идею связи левостороннего и правостороннего дробного интегрирования через посредство сингулярного оператора была статья N. Zeilon [1], 1924 г. В этой работе для случая полуоси фактически имеется формализм, равносильный связи (11.30), а также одной из связей (12.8) (см. с. 9 и 7 указанной работы). Следует сказать, что работа (хотя и выполненная формально и с погрешностями в формулах, в том числе и на указанной с. 9) содержит интересные и оригинальные идеи, явно навеянные работами Т. Карлемана, но не замеченные ни современниками, ни последующими исследователями. В этой статье впервые было рассмотрено обобщенное интегральное уравнение Абеля, содержащее и левостороннее, и правостороннее дробное интегрирование (см. об этом уравнении в § 30). Эта содержательная работа оставалась неизвестной и авторам настоящей книги, обнаружившим ее по счастливой случайности в 1985 г.

Связи (11.10)—(11.12) получены независимо Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [1], 1965 г.) и С. Г. Самко [4], 1967 г., тождество (11.10) получено также Х. Кобером (H. Kober [5], 1967 г.). Следствия 1, 2 из теоремы 11.4 и замечание 11.2 даны в той же работе С. Г. Самко. Связи (11.16)—(11.19) установлены С. Г. Самко [1, 2], 1967 г.; [3, 5], 1968 г., связи (11.18), (11.19) были получены и Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [2], 1965 г.). Можно указать также работы B. Kuttner [1], 1953 г., и Y. W. Chen [2], 1961 г., в которых была предпринята попытка отыскать связь (11.17), однако конкретные связи типа (11.16)—(11.19) там не были обнаружены. Позже связь (11.19) была переоткрыта в работах R. K. Juberg [1—3], 1972—1973 гг.

Модификация связей (11.16), (11.17) для значений $0<\alpha<2$ в виде (11.23), (11.24)

получена А. А. Килбасом [5], 1977 г. (см. также [7]), и Б. С. Рубиным [10], 1977 г. Модификация связей (11.18), (11.19) в виде (11.25), (11.26) установлена Б. С. Рубиным [11], 1980 г.; здесь же даны модификации связей (11.16)—(11.19) при любых $\alpha>0$ (см. об этом ниже в § 17, п. 2°).

К § 11, п. 4°. Теорема 11.6 об урезании лиувиллевского дробного интеграла на полуось и следствие 1 из нее фактически получены Б. С. Рубиным [1], 1972 г. Инвариантность пространства $I^{\alpha}(L_p)$ относительно умножения на характеристическую функцию полуоси другим способом показана также в работе С. Г. Самко [15], 1974 г. Теорема 11.8 доказана С. Г. Самко и ранее не публиковалась.

К § 12, п. 1°. Широкое использование оператора I^{α} начинается с работ М. Рисса (M. Riesz [2], 1936 г.; [4], 1938 г.; [5], 1939 г.), где этот оператор вводился в многомерном случае. Потенциал $H^{\alpha}\varphi$ как самостоятельный объект для исследования появляется в работах Ж. Окикиолу (G. O. Okikiolu [1], 1965 г.; [2], 1966 г.), хотя более общий потенциал I^{α}_{δ}, содержащий в качестве частного случая и потенциал Рисса $I^{\alpha}\varphi$, и потенциал $H^{\alpha}\varphi$, был введен ранее В. Феллером (W. Feller [1], 1952 г.). Связи (12.6), (12.7) доказывались в работах (G. O. Okikiolu [2], 1966 г.) и С. Г. Самко [4], 1968 г., см. также [13], 1971 г., но по крайней мере первая из них была известна еще Г. Торину (G. O. Thorin [1, с. 37], 1948 г.). Лемма 12.2 доказана в работах H. Kober [6], 1968 г., С. Г. Самко [13], 1971 г. Теорема 12.1 получена С. Г. Самко [13]. Равенства (12.19)—(12.21) ранее отмечались в работе H. Kober [6]. Утверждение (12.22) о полугрупповом свойстве операторов I^{α}_{δ} получено В. Феллером (W. Feller [1], 1952 г.). Потенциалы $I^{\alpha}\varphi$, $H^{\alpha}\varphi$ в форме интегралов Стилтьеса рассматривались в книге P. L. Butzer, W. Trebels [2, с. 31—35], 1968 г., см. также [1].

К § 12, п. 2°. Результаты этого пункта получены С. Г. Самко и ранее не публиковались.

К § 12, п. 3°. Связи (12.46), (12.47) получены С. Г. Самко [1], 1967 г., см. также [3], 1968 г.

К § 13, пп. 1, 2°. Утверждение теоремы 13.1 получено Б. С. Рубиным [1], 1972 г. В связи со следствием из теоремы 13.1 отметим, что совпадение (почти всюду) дробных производных Римана—Лиувилля и Маршо на абсолютно непрерывных функциях отмечалось еще Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1, с. 222, лемма 1], 1930 г.). Описание дробных интегралов от функций из $L_p(a, b)$, указанное в теореме 13.2, получено Б. С. Рубиным [1], 1972 г.; [3], 1973 г. Утверждения теорем 13.3—13.5 ранее не отмечались. Близкое к теореме 13.5 утверждение содержится в работе A. Marchaud [1, с. 385], 1927 г. Теорема 13.6 и более общая теорема 13.12 указаны С. Г. Самко и отмечаются впервые. Теорема 13.7 дана С. Г. Самко [14], 1973 г. Случай $p=1$ в этой теореме получен ранее М. М. Джрбашяном, А. Б. Нерсесяном [6, с. 17], 1968 г., при условии $a(x)\in H^1([a, b])$. В связи с теоремой 13.7 отметим, что мультипликаторы в весовом пространстве $x^{-\alpha}I^{\alpha}_{0+}[L_p(R^1_+; \rho)]$, $\rho=x^{\gamma}$, рассматривались в работе F. Penzel [1, с. 18—23].

К § 13, п. 3°. Результаты этого пункта получены Б. С. Рубиным [1], 1972 г., и здесь изложены с некоторыми добавлениями. В связи с представлением $I^{\alpha}_{c+}\varphi=I^{\alpha}_{a+}\psi$, указанным в следствии из теоремы 13.9, отметим, что на проходившей в 1974 г. конференции по дробному исчислению и его приложениям (США, Нью-Хейвен) Э. Лав (E. R. Love) поставил вопрос о существовании такой связи между дробными интегралами с разными нижними пределами интегрирования, см. статью Т. Ослера (T. J. Osler [9, с. 376], 1975 г.). Ответ на этот вопрос, таким образом, был известен в 1972 г. (Б. С. Рубин [1]).

К § 13, п. 4°. Результаты этого пункта получены Б. С. Рубиным [7], 1974 г. Отметим, что теорема 13.13 справедлива, как показано Б. С. Рубиным [22], 1986 г., при всех $\mu_1<1+\lambda$. Это же относится к леммам 13.2, 13.3. Аналогично в (13.37) (соответственно в лемме 13.2′) достаточно считать, что $\mu_1<\lambda+1$.

К § 13, п. 5°. Классы $\hat{H}_{\alpha}$, $\tilde{\tilde{H}}_{\alpha}$ и лемма 13.4 содержатся в работе С. Г. Самко [27, § 9], 1978 г. Там же доказана теорема 13.14. Близкое к теореме 13.14 утверждение в неявном виде содержится в работе Л. фон Вольферсдорфа (L. von Wolfersdorf [2], 1965 г.).

К § 13, п. 6°. Обобщенные классы Гельдера H^{ω}, по-видимому, впервые появляются в работе С. Б. Стечкина [1], 1951 г. Об оценках Зигмунда для сингулярных интегралов см. работу Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [1], 1956 г., и книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1]. Теоремы 13.15—13.17 доказаны Х. М. Мурдаевым [1], 1985 г. Отметим обобщение теоремы 13.16 на многомерный случай в работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [2], 1985 г. Класс Φ^{δ}_{β} введен в работе Х. М. Мурдаева, С. Г. Самко [1], 1985 г., см. также [2]. Он известен в литературе (при $\beta\geqslant 1$) в случае $\delta=0$, см., например, книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1]. При целых $\beta=k$ этот класс вводился С. Г. Сам-

ко, А. Я. Якубовым [2], 1985 г. Класс Φ_β^δ в неявном виде использовался также в работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [1], 1984 г. Оценка (13.69) и теорема 13.18 получены Х. М. Мурдаевым, С. Г. Самко [1], 1985 г., см. также [2, 3], 1986 г.

К § 14, п. 1°. Теорема 14.1 установлена Г. Харди, Д. Литтлвудом (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [4], 1928 г.). Простое доказательство см. в работе В. П. Ильина [1], 1959 г.

К § 14, пп. 2, 3°. Теоремы 14.5—14.7 содержатся в работе Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.) в случае периодических функций. Здесь они даны в несколько более общем виде. Теоремы 14.2—14.4 являются их модификациями.

К § 14, п. 4°. Формулы (14.29), (14.30) установлены А. В. Летниковым [4, с. 20, 58], 1874 г., в случае достаточно хороших функций $f(x)$. Они отмечались в работе К. Мопперта (K. F. Moppert [1, с. 149], 1953 г.) на непрерывно дифференцируемых функциях. Теорема 14.9 об их справедливости на абсолютно непрерывных с весом функциях, а также теорема 14.8 установлены С. Г. Самко и ранее не отмечались.

К § 14, п. 5°. Теорема 14.10 о среднем для дробных интегралов доказана М. Риссом и впервые опубликована в работе G. H. Hardy, M. Riesz [1], 1915 г., а затем в работе M. Riesz [1], 1922 г. Приведенное здесь доказательство этой теоремы также принадлежит М. Риссу, оно изложено в книге K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram [1, лемма 1.41]. Оценка (14.40) в единственном предположении, что $\varphi(t) \in L_1(a, b)$, отмечена в работе S. Verblunsky [1, с. 173], 1931 г.

Теорема 14.11 и утверждение замечания 14.5 доказаны в работе M. Riesz [1], 1922 г. Неравенство типа Колмогорова (14.53) для функций $f(x) \in I_{0+}^\alpha(L_1^{\text{loc}})$ есть немедленное следствие теоремы Рисса 14.11. В других предположениях и на всей прямой такое неравенство доказано в работах Т. Банга (T. Bang [1], 1941 г.) и С. П. Гейсберга [3], 1968 г. Литературные указания в связи с другими неравенствами для дробных интегралов и производных см. в п. 2° этого параграфа и в § 19, п. 8°.

К § 14, п. 6°. Отмеченная здесь связь дробного интегрирования с суммированием рядов и интегралов указана в работе Г. Харди, М. Рисса (G. H. Hardy, M. Riesz [1, с. 21], 1915 г.), где суммирование рядов на основе метода нормальных средних Рисса развито применительно к рядам Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$. О других работах, использующих дробное интегрирование в вопросах суммирования, см. в п. 2° этого параграфа.

К § 15, пп. 1, 2°. Формула Лейбница (15.11) для дробного дифференцирования впервые появляется в работе Ж. Лиувилля (J. Liouville [2, с. 118], 1832 г.), где дробное дифференцирование определялось через разложение функций в ряд по экспонентам. На основе формы Римана—Лиувилля $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$ дробного дифференцирования формула Лейбница доказывалась Х. Хольмгреном (Hj. Holmgren [1, с. 12—13], 1865—1866 гг.), где она дана с остаточным членом в интегральной форме. Год спустя формула Лейбница появляется в работе А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1, с. 466], 1867 г.), а затем у А. В. Летникова [1, с. 58], 1868 г., см. также А. В. Летников [4, с. 83], 1874 г. А. Грюнвальд исходил не из лиувиллевской или римановской формы дробного дифференцирования, а из другой (совпадающей с ней на достаточно хороших функциях) формы определения $\mathcal{D}^\alpha$ через предел разностных отношений. Такая форма излагается в § 20 (как дифференцирование по Грюнвальду—Летникову). Формула Лейбница для дробного дифференцирования рассматривалась также Н. Я. Сониным [2, с. 35], 1872 г.

Строгое доказательство формулы Лейбница (15.12) в терминах, близких к современным, дано Е. Ватанабе (Y. Watanabe [1, с. 12], 1931 г.) для аналитических функций. Приведенное в теореме 15.1 доказательство соотношения (15.12) следует идее Е. Ватанабе.

Серия статей Т. Ослера (T. J. Osler [1, 2, 4, 5, 7, 8], 1971—1973 гг.) посвящена уточнениям, обобщениям и другим формам формул Лейбница (15.12) и (15.17) для дробных производных. В этих работах дробное дифференцирование рассматривается в комплексной области и определяется как обобщение интегральной формулы Коши дифференцирования интеграла Коши (эта форма дробного дифференцирования рассматривается нами в § 22). При этом в отличие от более ранних работ Т. Ослером на этом пути получена точная область сходимости ряда в правой части (15.12). В работах (T. J. Osler [6, 7], 1972 г.) доказаны интегральные аналоги формулы Лейбница. Частным случаем этих аналогов является формула (15.17).

К § 16, п. 2°. Теорема 16.1 хорошо известна (см., например, Э. Я. Риекстыньш [2, т. 3, с. 271]). Теоремы 16.2 и 16.3 получаются фактически из результатов работы Э. Я. Риекстыньша [1], 1970 г., в которой была исследована асимптотика интеграла свертки с переменным верхним пределом

$$\Omega(x) = \int_0^x F(x-t) f(t)\, dt \quad \text{при } x \to +\infty \tag{17.1}$$

в предположении, что функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют при $t\to+\infty$ более общую, чем (16.10), асимптотику (см. далее обзор других результатов). При доказательстве теорем 16.2, 16.3 мы следовали методам этой работы. Заметим только, что в случае $\beta=1$ степенной асимптотики на бесконечности нами дана более точная асимптотика (16.22), чем она может быть найдена в указанной работе Э. Я. Риекстыньша (где вместо $\ln x$ стоит $\ln(x/2)$).

К § 16, п. 3°. В работе Э. Я. Риекстыньша [1], 1970 г., указано на возможность нахождения модифицированным методом последовательных разложений асимптотики более общих, чем дробный интеграл (16.1), интегралов свертки (17.1) в предположении, что входящие в него функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют степенно-логарифмическую асимптотику (16.28). Другие методы нахождения асимптотических разложений интеграла (17.1) можно найти в монографии Э. Я. Риекстыньша [2, пп. 11.3, 15.1, 22.8, 32.3].

Теоремы 16.4 и 16.5 доказаны в работе R. Wong [1], 1978 г. В этой же работе указано, что асимптотические разложения дробных интегралов (16.1) в случае, когда плотность имеет асимптотику (16.29), можно получить методом, развитым в работе N. Bleistein [1], 1975 г. Этот метод, основанный на равенстве Парсеваля (1.116) для преобразования Меллина (1.112), позволяет находить асимптотические разложения интегралов, имеющих вид

$$I(x)=\int_0^a \mathrm{k}(xt)\,f(t)\,dt \quad \text{при } x\to+\infty \tag{17.2}$$

в предположении, что $a=+\infty$, а функции $\mathrm{k}(t)$ и $f(t)$ имеют логарифмическую асимптотику в нуле.

К § 16, п. 4°. Теорема 16.6 является частным случаем более общего результата Э. Я. Риекстыньша [1, теорема 5], позволяющего находить асимптотические разложения интеграла свертки (17.1) при $x\to 0$ в предположении, что функция $F(t)$ имеет асимптотику (16.6), а $f(t)$ — обобщающую (16.46) асимптотику.

2°. Обзор других результатов. 11.1. Связи (11.16)—(11.19) и (11.23)—(11.26) левостороннего и правостороннего дробного интегрирования друг с другом можно распространить на случай произвольного $\alpha>0$. Именно справедливо (Б. С. Рубин [11, с. 919]) тождество

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi=\cos\alpha\pi I_{a+}^{\alpha}\varphi+\sin\alpha\pi I_{a+}^{\alpha}\frac{1}{r_a^{\alpha-n}}Sr_a^{\alpha-n}\varphi+P_n\varphi, \tag{17.3}$$

где $n=[\alpha]$, $P_n\varphi=\sum_{k=1}^{n}c_k(x-a)^{n-k}$,

$$c_k=(-1)^{n-k}[(n-k)!\Gamma(k+\alpha-n)]^{-1}\int_a^b(t-a)^{\alpha+k-1-n}\varphi(t)\,dt.$$

11.2. Пусть $x>0$. Представления для композиций $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}x^{\alpha}I_{-}^{\alpha}x^{-\alpha}$ и $x^{\alpha}\mathcal{D}_{-}^{\alpha}x^{-\alpha}I_{0+}^{\alpha}$ через сингулярный оператор S и некоторые операторы вида (1.44) с однородным ядром получены в работе H. Kober [4, с. 450]. Эти соотношения могут быть получены с помощью связей (11.27)—(11.29) и (3.15), (3.16). В указанной работе (с. 449) показано также, что операторы $x^{-\alpha}I_{0+}^{\alpha}$, $I_{-}^{\alpha}x^{-\alpha}$ имеют одинаковый образ при рассмотрении их в $L_p(R_+^1)$.

12.1. Полугрупповое свойство (12.17) для потенциалов Феллера в указанном в (12.17) общем виде—для M_{u_1,v_1}^{α}, M_{u_2,v_2}^{β} с произвольными коэффициентами u_i, v_i—выполняется при $\alpha+\beta<1$ и лишено, вообще говоря, смысла в предельном случае $\alpha+\beta=1$. При специальном же выборе u_2, v_2 (по заданным u_1, v_1) полугрупповое свойство имеет место и при $\alpha+\beta=1$:

$$M_{u,v}^{\alpha}M_{u,-v}^{1-\alpha}\varphi=M_{a,-b}^{1}\varphi=a\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt-b\int_{x}^{\infty}\varphi(t)\,dt,$$

где $0<\alpha<1$, $\varphi(t)\in L_1(R^1)$ и $a=u^2+uv\cos\alpha\pi$, $b=v^2+uv\cos\alpha\pi$. Из этой формулы вытекает формула обращения

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[u\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}-v\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right]$$

для потенциала Феллера $M^{\alpha}_{u,v}\varphi = f$ в случае $\varphi(x) \in L_1(R^1)$, см. также формулы (30.68) и (30.78). Обозначим еще $\omega_f(x) = u \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt - v \int\limits_{x}^{\infty} f(t)(t-x)^{-\alpha}dt$. Справедлива следующая

Теорема 17.1. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде потенциала Феллера $f = M^{\alpha}_{u,v}\varphi$ от функции $\varphi \in L_1(R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega_f(x) \in AC(R^1)$ и $(u^2 + uv\cos\alpha\pi)\,\omega_f(-\infty) + (v^2 + uv\cos\alpha\pi)\,\omega_f(+\infty) = 0$.*

Здесь $AC(R^1)$ — класс абсолютно непрерывных на прямой функций (см., определение 6.1). Ср. также теорему 17.1 с теоремой 6.3. Приведенные здесь результаты получены в работе С. Г. Самко [13].

12.2. В работе G. O. Okikiolu [4] рассмотрены потенциалы I^{α}, H^{α} (см. (12.1), (12.2)) со степенными весами:

$$I^{\alpha}_{\mu,\nu}\varphi = \frac{|x|^{\mu-\nu-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)\cos\alpha\pi/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{\nu} \frac{\varphi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}},$$

$$H^{\alpha}_{\mu,\nu}\varphi = \frac{|x|^{\mu-\nu-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{\alpha} \frac{\operatorname{sign}(t-x)}{|t-x|^{1-\alpha}} \varphi(t)\,dt$$

и введены их модификации, отличающиеся от них одномерным оператором:

$$\tilde{I}^{\alpha}_{\mu,\nu}\varphi = \frac{|x|^{\mu-\nu-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)\cos\alpha\pi/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{\nu} \left[|t-x|^{\alpha-1} - |t|^{\alpha-1}\right] \varphi(t)\,dt,$$

$$\tilde{H}^{\alpha}_{\mu,\nu}\varphi = \frac{|x|^{\mu-\nu-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{\alpha} \left[\frac{\operatorname{sign}(t-x)}{|t-x|^{1-\alpha}} - \frac{\operatorname{sign} t}{|t|^{1-\alpha}}\right] \varphi(t)\,dt$$

(мы несколько изменили обозначения по сравнению с указанной работой). Для них доказаны формулы композиции типа (12.19)—(12.21).

$$\tilde{I}^{\beta}_{\sigma,\nu+\alpha-\mu} I^{\alpha}_{\mu,\nu} = \tilde{I}^{\alpha+\beta}_{\mu+\sigma,\nu}, \qquad \tilde{H}^{\beta}_{\sigma,\nu+\alpha-\mu} H^{\alpha}_{\mu,\nu} = -\tilde{I}^{\alpha+\beta}_{\mu+\sigma;\nu},$$

$$\tilde{I}^{\beta}_{\sigma,\nu+\alpha-\mu} H^{\alpha}_{\mu,\nu} = \tilde{H}^{\beta}_{\sigma,\nu+\alpha-\mu} I^{\alpha}_{\mu,\nu} = \tilde{H}^{\alpha-\beta}_{\mu+\sigma,\nu}$$

и ограниченность операторов $\tilde{I}^{\alpha}_{\mu,\nu}$, $\tilde{H}^{\alpha}_{\mu,\nu}$ из $L_p(R^1)$ в $L_q(R^1)$ при условиях $p > 1$, $0 < \mu \leqslant \alpha < 1$ (или $0 < \alpha < 1$ при $\mu = 0$), $-1 + 1/p < \nu < -\alpha + 1/p$, $1/r = -\mu + 1/p > 0$.

Отметим также, что в этой работе получено обращение операторов $I^{\alpha}_{\mu,\nu}$, $H^{\alpha}_{\mu,\nu}$ с помощью конструкций типа $\frac{d}{dx}\tilde{I}^{1-\alpha}_{\sigma,\nu+\alpha-\mu}$, $\frac{d}{dx}\tilde{H}^{1-\alpha}_{\sigma,\nu+\alpha-\mu}$.

В работе G. O. Okikiolu [5] исследована связь весового потенциала Рисса $I^{\alpha}_{0,\mu}$ с весовым преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}^{(\nu)}_{\sigma}\varphi = |x|^{\nu+\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{\nu} e^{ixt}\varphi(t)\,dt.$$

Показано, в частности, что $\mathcal{F}^{(\mu+\alpha)}_{\sigma} I^{\alpha}_{0,\mu}\varphi = \mathcal{F}^{(\mu)}_{\sigma}\varphi$, $0 < \alpha < 1$, $-1 < \mu < -\alpha$, и $I^{\alpha}_{0,\nu+\sigma}\mathcal{F}^{(\nu)}_{\sigma}\varphi = \mathcal{F}^{(\nu-\alpha)}_{\sigma}\varphi$, $0 < \alpha < 1$, для достаточно хороших функций $\varphi(x)$.

12.3. Оператор (12.44) является положительно определенным:

$$2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)\,(A^{\alpha}\varphi,\ \varphi) = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{a}^{b} |x-y|^{\alpha-1}\varphi(x)\,\varphi(y)\,dxdy > 0,$$

где $\varphi \in L_2(a, b)$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ (F. G. Tricomi [1]).

13.1. Остановимся здесь на локальных свойствах дробных интегралов $f(x) = I^{\alpha}_{a+}\varphi$ от функций $\varphi(x)$ из $L_p(a, b)$. Для уточнения их поведения в $L_q(a, b)$, $q = p/(1-\alpha p)$, $1 < p < 1/\alpha$, или в $H^{\alpha-1/p}(a, b)$, $p > 1/\alpha$ (см. теоремы 3.5, 3.6), введем следующие величины:

$$\chi_{r,0}(f,\ \varepsilon)=\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\varepsilon}|f(x)|^r\,dx\right)^{1/r},$$

$$\chi_{r,c}(f,\ \varepsilon)=\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}|f(x)|^r\,dx\right)^{1/r}\quad\text{при}\quad 0<c<e,\ 0<\varepsilon<c$$

(для простоты взято $a=0$, $b=e$). Особое внимание будет уделено предельному случаю $p=1/\alpha$, о котором уже говорилось в § 4, п. 2°, 3.3. Приводимые здесь утверждения получены Н. К. Карапетянцем, Б. С. Рубиным [3].

Теорема 17.2. *Пусть* $f=I^{\alpha}_{0+}\varphi$, $\varphi\in L_p(0,\ e)$, $0<\alpha<1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $p_\alpha=p(1-\alpha p)^{-1}$. *Тогда*

$$\chi_{r,0}(f,\ \varepsilon)\leqslant C_r\varepsilon^{\alpha-1/p}\left(\int\limits_0^{\varepsilon}|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\tag{17.4}$$

где $1\leqslant r<p_\alpha$, *если* $p=1$; $1\leqslant r\leqslant p_\alpha$, *если* $1<p<1/\alpha$; $1\leqslant r<\infty$, *если* $p=1/\alpha$; $1\leqslant r\leqslant\infty$, *если* $1/\alpha<p\leqslant\infty$, *и*

$$\chi_{r,c}(f,\ \varepsilon)\leqslant C_r\omega_{\alpha,p}(\varepsilon)\,\|\varphi\|_p,\tag{17.5}$$

где

$$\omega_{\alpha,p}(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon^{\alpha-1/p} & \text{при}\ \ 1<p<1/\alpha,\quad 1\leqslant r\leqslant p_\alpha,\\ \varepsilon^{\alpha-1} & \text{при}\ \ p=1,\quad 1\leqslant r<p_\alpha,\\ (1+|\ln\varepsilon|)^{1/p'} & \text{при}\ \ p=1/\alpha,\quad 1\leqslant r<\infty,\\ 1 & \text{при}\ \ 1/\alpha<p\leqslant\infty,\quad 1\leqslant r\leqslant\infty.\end{cases}$$

Отметим, что постоянная C_r в (17.4) не зависит от e, а в (17.5) не зависит от $c\in[0,\ e]$. При $p<1/\alpha$ постоянная C_r в (17.5) не зависит и от e. При $p\geqslant 1/\alpha$ постоянная C_r в (17.5) не может быть выбрана не зависящей от e. В случае $p=1/\alpha$ для константы C_r в (17.4), (17.5) справедлива асимптотическая оценка

$$C_r=O(r^{1/p'}),\quad r\to\infty.\tag{17.6}$$

При $1\leqslant p\leqslant 1/\alpha$ оценку (17.5) можно уточнить: $\chi_{r,c}(f,\ \varepsilon)=O(\omega_{\alpha,p}(\varepsilon))$ при $\varepsilon\to 0$. Отсюда вытекает одна локальная характеристика дробных интегралов. Именно при $1\leqslant p<\infty$ в условиях теоремы 17.2 для любого $\delta>0$ справедливы соотношения

$$\operatorname*{ess\,inf}_{0<x<\delta}\frac{|f(x)|}{x^{\alpha-1/p}}=0;\quad \operatorname*{ess\,inf}_{|x-c|<\delta}\frac{|f(x)|}{\omega_{\alpha,p}(|x-c|)}=0,\quad 1\leqslant p\leqslant 1/\alpha.\tag{17.7}$$

Эти соотношения дают простые необходимые условия принадлежности функции $f(x)$ классу $I^{\alpha}_{0+}(L_p(0,\ e))$ дробных интегралов от функций из $L_p(0,\ e)$. Например, если функция $f(x)$ непрерывна на $(0,\ e)$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/p-\alpha}f(x)\neq 0$, то $f(x)\notin I^{\alpha}_{0+}(L_p(0,\ e))$. Поэтому же и $f(x)=\omega_{\alpha,p}(|x-c|)\notin I^{\alpha}_{0+}(L_p(0,\ e))$.

Заметим, что утверждения 1), 2) теоремы 17.2 точны в следующем смысле. Например, в случае $p=1/\alpha$ для функции $\varphi_\delta(x)$ из (4.14) с малым $\delta>0$ дробный интеграл $f=I^{\alpha}_{0+}\varphi_\delta$ допускает оценку $f(x)\geqslant\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2}{e}-x\right)^{-1}\right]^{-\delta+1/p'}$ при $1/e<x<2/e$ (см. § 4, п. 2°, 3.3). Поэтому для $c=2/e$ имеем

$$\chi_{1,c}(f,\ \varepsilon)\geqslant\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_{c-\varepsilon}^{c}[\ln(c-x)^{-1}]^{-\delta+1/p'}dx\geqslant\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\delta+1/p'},$$

что и свидетельствует о точности оценки 2).

Пусть, далее, $m_I=\frac{1}{|I|}\int\limits_I|f(x)-f_I|\,dx$, $I\subset(a,\ b)$, см. (4.16), и $\|f\|^*$ — норма (4.15) в пространстве BMO $(a,\ b)$.

Теорема 17.3. *Пусть* $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_p(a,\ b)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<\alpha<1+1/p$. *Тогда*

$$\sup_{I\subset(a,b)}|I|^{\frac{1}{p}-\alpha}m_I f\leqslant c\,\|\varphi\|_p.\tag{17.8}$$

Из неравенства (17.8), проверяемого прямыми оценками при $\alpha=1/p$, вытекает ограниченность I^{α}_{a+} из $L_p(a, b)$ в $\mathrm{BMO}(a, b)$ (и даже в VMO), отмеченная в § 4, п. 2°, 3.3.

Отметим одно уточнение теоремы 17.3 при $\alpha=1/p$, учитывающее поведение $f(x)$ в окрестности конца $x=a$. Обозначим

$$\mathrm{BMO}^0_a(a, b)=\left\{f: f\in \mathrm{BMO}(a, b),\ A=\sup_{0<\varepsilon<b-a}\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_a^{a+\varepsilon} f(x)\,dx\right|<\infty\right\}.$$

Аналогично вводится класс $\mathrm{BMO}^0_b(a, b)$ с соответствующим условием на правом конце. Можно показать, что пространства $\mathrm{BMO}^0_a(a, b)$ и $\mathrm{BMO}^0_b(a, b)$ являются максимальными подклассами в $\mathrm{BMO}(a, b)$, состоящими из функций, продолжимых нулем до функций из классов $\mathrm{BMO}(-\infty, b)$ и $\mathrm{BMO}(a, \infty)$ соответственно.

Теорема 17.4. *При $\alpha=1/p$ операторы I^{α}_{a+} и I^{α}_{b-} ограничены из $L_p(a, b)$, $1<p<\infty$, в $\mathrm{BMO}^0_a(a, b)$ и $\mathrm{BMO}^0_b(a, b)$ соответственно.*

Так как $\mathrm{BMO}(a, b)\subset\bigcap_{r\geqslant 1} L_r(a, b)$, то из неравенства Джона—Ниренберга (Б. С. Кашин, А. А. Саакян [1, с. 210]) вытекает, что

$$\|f\|_r=O(r),\quad r\to\infty, \tag{17.9}$$

для $f\in\mathrm{BMO}(a, b)$.

Можно обобщить построения § 4, п. 2°, 3.3, рассмотрев пространства

$$X_{\gamma,\mu}=\{f:\psi_f(r)=r^{-\gamma}\|f\|_r\in L_\mu(1, \infty)\},\ \gamma\geqslant 0,\ 1\leqslant\mu\leqslant\infty,$$

введенные Н. К. Карапетянцем, Б. С. Рубиным в работе [1], где показано, что $I^{1/p}_{a+}(L_p)\subset X_{1/p,\infty}$. Введем более узкие пространства $Y_{\gamma,\mu,\lambda}$, положив в основу их построения поведение локальных характеристик $\chi_{r,0}(f, \varepsilon)$, $\chi_{r,c}(f, \varepsilon)$ при $r\to\infty$.

Для $I\subset(0, 1)$ обозначим $\omega(I)=1$, если $I=(0, \varepsilon)$, $\varepsilon>0$, и $\omega(I)=(1+|\ln|I||)^{\lambda}$, $\lambda\geqslant 0$, для остальных интервалов. Положим

$$Y_{\gamma,\mu,\lambda}(0, 1)=\{f:\|f\|=\|r^{-\gamma}\sup_{I\subset(0,1)}\omega(I)\chi_r(f, I)\|_{L_\mu(1,\infty)}<\infty\}, \tag{17.10}$$

где $\gamma>0$, $1\leqslant\mu\leqslant\infty$, $\chi_r(f, I)=\chi_{r,0}(f, \varepsilon)$ для $I=(0, \varepsilon)$ и $\chi_r(f, I)=\chi_{r,c}(f, \varepsilon)$ для $I=(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. В силу неравенства $\chi_r(f, I)\geqslant\chi_s(f, I)$, $r\geqslant s$, в определении (17.10. необходимо $\gamma>\mu^{-1}$ при $\mu<\infty$. Можно показать, что пространства $Y_{\gamma,\mu,\lambda}$ банаховы Отметим также, что при $\lambda=0$ пространства $Y_{\gamma,\mu,\lambda}(0, 1)$ совпадают с $L_\infty(0, 1)$.

Теорема 17.5. *Пусть $\alpha=1/p$, $1<p<\infty$. Тогда оператор I^{α}_{0+} ограничен из $L_p(0, 1)$ в пространства $X_{\gamma,\mu}(0, 1)$, $Y_{\gamma,\mu,\lambda}(0, 1)$, если $\lambda=1/p'$, $\gamma>1/p'+1/\mu$ при $1\leqslant\mu<\infty$ и $\gamma>1/p$ при $\mu=\infty$.*

Представляет интерес выяснение взаимосвязи между пространствами $Y_{\gamma,\mu,\lambda}$ и BMO. Не останавливаясь на детальном исследовании этого вопроса, заметим лишь, что при $\lambda=\gamma=1/p'$, $\mu=\infty$ справедливы соотношения

$$Y_{\gamma,\mu,\lambda}(0, 1)\not\subset\mathrm{BMO}(0, 1),\quad \mathrm{BMO}(0, 1)\not\subset Y_{\gamma,\mu,\lambda}(0, 1).$$

Первое утверждение проверяется на примере функции $Y_1(x)=\left\{0,\ \text{при } 0<x<1/2 \text{ и } \left(\ln\frac{1}{x-1/2}\right)^{1/p'} \text{ при } 1/2<x<1\right\}\notin\mathrm{BMO}(0, 1)$. Второе утверждение справедливо для произвольных допустимых значений γ, μ, λ. Действительно, в противном случае для $f\in\mathrm{BMO}(0, 1)$ будем иметь $\sup_{0<\varepsilon<1}\chi_{1,0}(f, \varepsilon)<\infty$, что дает $f\in\mathrm{BMO}^0_0(0, 1)$. Последнее не всегда возможно.

Заметим, что для пространств $\chi_{\gamma,\mu}(0, 1)$ в отличие от $Y_{\gamma,\mu,\lambda}$ вложение $\mathrm{BMO}(0, 1)\subset X_{\gamma,\mu}(0, 1)$ имеет место в силу (17.9), если $\gamma>1+1/\mu$. (Внимание авторов на этот факт обратил Б. Макенхоупт (B. Muckenhoupt).)

13.2. Как установлено в § 13, п. 2°, образы дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}(L_p)$ и $I^{\alpha}_{b-}(L_p)$ совпадают при $1<p<1/\alpha$, см. (13.23). Они совпадают и с образом риссова потенциала $A^{\alpha}\varphi$ на отрезке $[a, b]$ (определяемого равенством (12.44)):

$$I^{\alpha}_{a+}(L_p)=I^{\alpha}_{b-}(L_p)=A^{\alpha}(L_p),\quad 1<p<1/\alpha.$$

Последнее равенство выводится из тождеств (12.46) или (11.16)—(11.19). В случае $p > 1/\alpha$ выполняется соотношение

$$I^{\alpha}_{a+}(L_p) \oplus R^1 = I^{\alpha}_{b-}(L_p) \oplus R^1$$

(Б. С. Рубин [11]; см. в связи с этим тождество (17.3)). В случае $\alpha = 1/p$ ни одно из указанных утверждений не имеет места, в чем можно убедиться с помощью локальных оценок теоремы 17.2. При $p > 1/\alpha$ отметим еще вложения

$$I^{\alpha}_{a+}(L_p) \subset A^{\alpha}(L_p), \quad 0 < \alpha < 2/p,$$

$$I^{\alpha}_{a+}(L_p) \subset A^{\alpha}(L_p) \oplus P_1, \quad 2/p < \alpha < 1,$$

$$A^{\alpha}(L_p) \subset I^{\alpha}_{a+}(L_p) \oplus P_0, \quad 1/p < \alpha < 1,$$

где P_j, $j=0, 1$,— пространства полиномов степени j. Эти вложения выводятся из связей операторов I^{α}_{a+}, I^{α}_{b-}, A^{α} друг с другом через посредство сингулярного оператора, см. (11.16)—(11.19), (12.46), (12.47). Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [3] указали другое доказательство первых двух из этих вложений с помощью представлений

$$A^{\alpha} = x^{\alpha/2} I^{\alpha/2}_{0+} x^{-\alpha} I^{\alpha/2}_{1-} x^{\alpha/2},$$

$$I^{\alpha}_{0+} = x^{\alpha/2} I^{\alpha/2}_{0+} x^{-\alpha} I^{\alpha/2}_{0+} x^{\alpha/2}.$$

13.3. Имеет место следующее обобщение теоремы 13.6 на случай пространства L_p с весом. Пусть $\rho(x) = (x-a)^{\gamma}(b-x)^{\delta}$. Справедлива (С. Г. Самко [27, § 8, теорема 8.6] и [5, с. 306] при более жестких ограничениях) следующая

Теорема 17.6. *Если* $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}[L_p(\rho)]$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, *то и*

$$(x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu} f(x) \in I^{\alpha}_{a+}[L_p(\rho_1)], \quad \rho_1(x) = \frac{\rho(x)}{(x-a)^{\mu p}(b-x)^{\nu p}},$$

при условиях $-1 < \mu < 1$, $\alpha - 1 < \nu < 1 - \alpha$, $\gamma < p - 1 + \min(0, p\mu)$, $(\alpha + \nu)p - 1 < \delta < p - 1 + \min(0, p\nu)$.

13.4. Теорема 13.18 распространяется на случай веса, «привязанного» к обоим концам отрезка $[a, b]$. Именно пусть $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$, $\mu \geqslant 0$, $\nu > 0$, $\mu + \alpha < 2$, $\mu + \nu < 2$. Справедлива (Х. М. Мурдаев, С. Г. Самко [1, 2]) следующая

Теорема 17.7. *Оператор дробного интегрирования* I^{α}_{a+}, $0 < \alpha < 1$, *изоморфно отображает весовое обобщенное пространство Гельдера* $H^{\omega}_0(\rho)$ *на пространство* $H^{\omega_{\alpha}}_0(\rho)$:

$$I^{\alpha}_{a+}[H^{\omega}_0(\rho)] = H^{\omega_{\alpha}}_0(\rho), \quad \omega_{\alpha}(\delta) = \delta^{\alpha}\omega(\delta),$$

если $\omega(\delta) \in \Phi^{\gamma-1}_{\beta}$, $\gamma = \max(1, \mu, \nu)$, $\beta = \min(1-\alpha, \nu-\alpha)$, где $\Phi^{\gamma-1}_{\beta}$—*класс (13.68).*

13.5. Изложенные в § 13, п. 3° теоремы о сужении, продолжении нулем и склеивании дробных интегралов распространены в работе А. И. Линкер, Б. С. Рубина [1] на свертки со степенно-логарифмическими ядрами.

14.1. Теорема Рисса о среднем в форме неравенства (14.40) справедлива в случае бесконечного предела интегрирования:

$$\left| \int_{-\infty}^{b} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \right| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\xi < b} \left| \int_{-\infty}^{\xi} (\xi - t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \right|, \quad 0 < \alpha < 1,$$

при единственном предположении, что интеграл левой части сходится (G. L. Isaacs [1]).

14.2. Имеет место следующее обобщение теоремы Рисса о среднем (14.40). Пусть $\varphi(x) \in L_1(0, l)$, $l > 0$. Тогда для $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \leqslant 1 - \alpha$ $\operatorname*{ess\,min}_{0<t\leqslant l} t^{\lambda}(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(t) \leqslant$

$$\leqslant \frac{x^{\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<l} t^{\lambda}(I^{\alpha}_{0+}\varphi)(t)$$

в предположении, что в этом неравенстве правая (левая) часть неотрицательна (неположительна) (L. S. Bosanquet [7]).

В работе J. Steinig [1] с помощью этой обобщенной теоремы Рисса о среднем исследован вопрос: как влияет наличие локальных экстремумов у дробного интеграла

$x^{\lambda}(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)$ с весом x^{λ} на перемену знаков самой функции $\varphi(x)$ (дробный аналог простой теоремы о том, что функция меняет знак в точках локального экстремума своей первообразной)? В этой же работе рассмотрен также некоторый аналог теоремы Ролля для производных дробного порядка.

Отметим еще, что имеется распространение теоремы Рисса о среднем на значения $\alpha>1$, см. H. Türke, K. Zeller [1].

В указанной выше работе L. S. Bosanquet [7] имеется также обобщение теоремы Рисса о среднем на случай, когда степенное ядро $(x-t)^{\alpha-1}$ заменено более общим ядром $G(x-t)$ типа Н. Я. Сонина (см. о последнем в § 4, п. 2°, 2.4).

14.3. Теорема Рисса о среднем (14.40) распространяется на функции, интегрируемые в смысле Данжуа—Перрона в работах S. Verblunsky [1], J. C. Burkill [1]. В последней работе, а также в работах W. L. G. Sargent [1—3] рассмотрено также интегрирование Чезаро—Перрона дробного порядка (так называемое $C_{\alpha}p$-интегрирование).

14.4. В работе L. S. Bosanquet [3] доказан дискретный аналог неравенства Рисса (14.40) в виде

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} A_{n-\nu}^{\alpha-1} a_{\nu}\right| \leqslant \max_{0\leqslant\mu\leqslant m}\left|\sum_{\nu=0}^{\mu} A_{\mu-\nu}^{\alpha-1} a_{\nu}\right|,$$

где $A_k^{\sigma}=\binom{k+\sigma}{k}$, $n\geqslant m\geqslant 0$, a_{ν}—произвольная последовательность (указанные суммы являются дискретным аналогом разностей дробного порядка).

Некоторые аналоги «интерполяционного» неравенства Рисса (14.42) для дискретных разностей дробного порядка доказаны в работе того же автора [6].

14.5. Для дробной производной Маршо $(\mathbf{D}_{+}^{\alpha}f)(x)$, $x\in R^1$, $0<\alpha<1$, справедливо неравенство (типа Адамара)

$$\|\mathbf{D}_{+}^{\alpha}f\|_C \leqslant k\,\|f\|_C^{1-\alpha/2}\,\|f'\|_{H^1}^{\alpha/2},$$

где $\|f\|_C=\sup_{x\in R^1}|f(x)|$, $\|g\|_{H^1}=\sup_{x,y\in R^1}|g(x)-g(y)|/|x-y|$ с точной постоянной $k=2^{2-\alpha/2}\,(2^{1/(1-\alpha)}-1)^{\alpha-1}/\Gamma(3-\alpha)$ (С. П. Гейсберг [1]).

14.6. Неравенство типа Колмогорова

$$\|I_{-}^{\beta}f\|_{L_p(R_+^1)} \leqslant k\,\|I_{-}^{\alpha}f\|_{L_p(R_+^1)}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\,\|I_{-}^{\gamma}f\|_{L_p(R_+^1)}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad 1<p<\infty,$$

где $-A<\alpha<\beta<\gamma<A$ и $k=k(p, A)$, доказано в работе G. H. Hardy, E. Landau, J. E. Littlewood [1]. Такое же неравенство для дробного интегродифференцирования I_{0+}^{α} (обобщающее неравенство (14.53)) доказано в работе R. J. Hughes [1]. Подобное неравенство

$$\|\mathscr{D}_{-}^{\alpha}f\|_{C(R_+^1)} \leqslant k\,\|f\|_{L_2(R_+^1)}^{\nu_1}\,\|f^{(n)}\|_{L_2(R_+^1)}^{\nu_2}$$

для функций $f\in L_2(R_+^1)$, имеющих обобщенную производную $f^{(n)}(x)\in L_2(R_+^1)$, получено Г. Г. Магарил-Ильяевым, В. М. Тихомировым [1] вместе с точными границами его выполнения: $\alpha\in(-1/2,\ n-1/2)$, $\nu_1=n^{-1}(n-\alpha-1/2)$, $\nu_2=1-\nu_1$ и точной постоянной k.

Распространение неравенства Колмогорова на дробные степени операторов в банаховом пространстве дано в работе W. Trebels, U. Westphal [1] в виде

$$\|(-A)^{\beta}f\| \leqslant k\,\|f\|^{1-\beta/\gamma}\,\|(-A)^{\gamma}f\|^{\beta/\gamma}, \quad 0<\beta<\gamma,$$

где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, $(-A)^{\beta}$ определяется формулой (5.85).

14.7. Справедливо следующее неравенство «типа Опяла»:

$$\int_a^b |(I_{a+}^{\alpha}f)(x)|^p\,|(I_{a+}^{\alpha}f)(x)|^q\,x^{\gamma-\alpha p-\beta q-1}\omega(x)\,dx \leqslant c\int_a^b |f(x)|^r\,x^{\gamma-1}\omega(x)\,dx,$$

где $p>0$, $q>0$, $p+q=r\geqslant 1$, $\gamma<r$, $0\leqslant a<b\leqslant\infty$, $\omega(x)$ убывает, $\omega(x)>0$ при $a<x<b$ (E. R. Love [9]).

Отметим еще неравенство

$$\int_a^b s(x)\,\varphi\left[\frac{|(I_{a+}^{\alpha} f)(x)|}{(I_{a+}^{\alpha} g)(x)}\right]dx \leqslant \int_a^b G(x)\,\varphi\left[\frac{|f(x)|}{g(x)}\right]dx,$$

где $G = gI_{b-}^{\alpha}\left(\frac{s}{I_{a+}^{\alpha} g}\right)$, $\varphi(u)$ — положительная выпуклая возрастающая функция, $s(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$ (Е. К. Годунова, В. И. Левин [1]). Имеются обобщения этого неравенства в работах Г. И. Розановой [1] и Р. Х. Садиковой [1]).

14.8. В работе R. Askey [1] отмечены интересные связи дробного интегрирования с методами получения различных неравенств для тригонометрических и алгебраических многочленов.

14.9. Пусть $c(t) = \sum_{n=1}^{[t]} c_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ суммируем к сумме s в смысле $s = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \int_0^x c(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt$ при некотором $\alpha > 0$ (см. § 14, п. 6°), то он суммируем в этом смысле к той же сумме при любом $\alpha' > \alpha$ (G. H. Hardy, M. Riesz [1, с. 29]).

14.10. Пусть $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, $c(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} c_n$ и пусть

$$C_{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} c(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{\lambda_n \leqslant 2} (x-\lambda_n)^{\alpha} c_n, \quad \alpha > 0,$$

есть обобщение средних Рисса (14.55). В работе L. S. Bosanquet [4] доказано, что если $\underline{\lim} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ и $C_{\alpha}(x) = o(x^{\gamma})$, $\gamma > -1$, при $x \to +\infty$, то $C_{\beta}(x) = o(x^{\beta-\alpha+\gamma})$ для $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Случай $\gamma = \alpha$, $\beta = 0$ был ранее рассмотрен в работе G. H. Hardy, M. Riesz [1].

14.11. Дробное интегрирование можно использовать для исследования предела функции в точке подобно тому, как оно используется для суммирования рядов (см. § 14, п. 6°). Именно пусть функция $\varphi(t)$ задана при $t > 0$. Будем говорить, что $\varphi(t) \xrightarrow[t\to\alpha]{} 0$ в смысле (C, α)-метода, если $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \int_0^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt = 0$. Пусть теперь функция $f(x)$ такова, что существует предел

$$2S = \alpha \lim_{\xi\to 0} \frac{1}{\xi^{\alpha}} \int_0^{\xi} [f(x_0+t) + f(x_0-t)](\xi-t)^{\alpha-1}\,dt, \quad \alpha > 0.$$

Число S назовем обобщенным значением функции f в точке x_0. Обозначив $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$ скажем, что $f(x)$ имеет в точке x_0 значение S в смысле (C, α)-метода, если $\varphi(t) \to 0$ при $t \to 0$ в смысле этого метода. Исследование функций, имеющих конечные значения, в указанном смысле проведено в работе S. Verblunsky [1].

14.12. В терминах дробного интегрирования имеются (L. S. Bosanquet [2]) достаточные условия (A)-суммируемости ряда Фурье (ряд Σa_n называется (A)-суммируемым к сумме S, если $\Sigma a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$ к сумме $A(x)$ с ограниченной вариацией в $[0, 1]$, имеющей конечный предел $\lim_{x\to 1-0} A(x) = S$). Пусть $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ и $2\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S$. В указанной работе даказано, что ряд Фурье функции $f(x)$ $(A$-суммируем к сумме S в точке x_0, если найдутся такие $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\int_0^{\varepsilon} t^{-1-\alpha} |(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(t)|\,dt < \infty.$$

Более слабое условие $\int_t^1 t^{-1-\alpha} (I_{0+}^{\alpha}\varphi)(t)\,dt = o\left(\log\frac{1}{t}\right)$, $\alpha \geqslant 0$, используется при суммировании интеграла Фурье (R. N. Mohapatra [1]).

14.13. В работах W. Beekmann [1, 2] показано, что интегральное преобразование

$$(C^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt, \quad x > 0,$$

является «совершенным» в том смысле, что множество всех функций из некоторых линейных пространств B, имеющих конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$, плотно в множестве тех функций из B, для которых существует $\lim\limits_{x\to\infty}(C^{\alpha}\varphi)(x)$ (более точные формулировки см. в указанных работах).

14.14. В работе J. Cossar [1] исследована суммируемость интегралов вида $\int\limits_0^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ $(C,\ \alpha)$-методом, приводящая к сходящемуся интегралу $\int\limits_0^{\infty}(I_{0+}^{\alpha}f)(x)\times$ $\times(\mathscr{D}_{-}^{\alpha}\varphi)(x)\,dx$, $\alpha>1$ (формула дробного интегрирования по частям), где $\mathscr{D}_{-}^{\alpha}\varphi$ — дробная производная Коссара (9.1).

14.15. Отмеченная в § 14, п. 6° связь дробного интегрирования с методами суммирования рядов имеется не только в случае метода средних Рисса, но и в случае других методов. Так, в работе B. Kuttner, N. Tripathy [1] исследована связь дробного интегрирования с методами суммирования Хаусдорфа. Отметим также, что в статье L. S. Bosanquet, E. H. Linfoot [1] использованы «обобщенные» средние Рисса со степенно-логарифмическим ядром, что приводит к «дробным интегралам» со степенно-логарифмическим ядром.

Упомянем, наконец, в связи с дробным интегрированием в вопросах суммируемости рядов работы T. M. Flett [1, 2], Sulaxana K. Gupta [1], G. H. Hardy, W. W. Rogosinski [1], S. Minakshisundaram [1], M. Mikolás [1—3, 7], F. T. Wang [1, 2], R. E. A. C. Paley [1], C.-T. Loo [1].

14.16. Известна связь между дифференцируемостью функций и скоростью приближения ее алгебраическими или тригонометрическими многочленами (см., например, книгу А. Ф. Тимана [3]). Первой работой, содержащей исследование дробного интегродифференцирования методами конструктивной теории функций, была работа P. Montel [1]. В ней доказано обобщение теоремы С. Н. Бернштейна на случай дробных производных, утверждающее, что скорость приближения функции $f(x)$ алгебраическими многочленами, задаваемая неравенством $|f(x)-P_n(x)|\leqslant An^{-\gamma}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, $\gamma>0$, влечет существование у функции $f(x)$ всех дробных производных $(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}f)(x)$, $a=-1$, порядка $\alpha<\gamma$. Уже в работе П. Монтеля дано распространение этой теоремы на случай функций двух переменных, см. о дробных производных функций многих переменных в § 24 и упомянутое обобщение теоремы С. Н. Бернштейна в § 29, п. 2°, 24.8.

Имеется большое число исследований, связанных с приближением тригонометрическими многочленами периодических функций, имеющих производные дробного порядка, см. указания об этом в § 23, п. 2°, 19.6. В непериодическом случае такие исследования проводились в работах И. И. Ибрагимова [1, 2], Ф. Г. Насибова [1], где рассматривалось приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами (см. также некоторое распространение результатов последней работы на случай функций двух переменных в работе [2] того же автора). В работах А. П. Старовойтова [1—4] исследовалось приближение интегралов дробного порядка рациональными функциями.

15.1. Наряду с формулой Лейбница (15.11) для дробной производной имеет место формула Лейбница с остаточным членом:

$$\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}(uv)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha-k}uv^{(k)}+R_n, \tag{17.11}$$

$$R_n=\frac{(-1)^n}{\Gamma(-\alpha)(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{-\alpha-1}u(t)\,dt\int_t^x(x-\xi)^{n-1}v^{(n)}(\xi)\,d\xi$$

(Hj. Holmgren [1, с. 12], Y. Watanabe [1, с. 16], M. A. Al-Bassam [1]). Формула (17.11) имеет то преимущество по сравнению с (15.11), что не требует бесконечной дифференцируемости функции $v(x)$.

15.2. В работе E. L. Post [2, с. 755] формула (15.11) распространена на обобщенные дробные производные вида (20.10) (см. § 23, п. 2°, 20.6). В работе Y. Watanabe [1] доказана более общая, чем (15.12), формула

$$\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}(fg)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{\beta+n}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha-\beta-n}f\mathscr{D}_{a+}^{\beta+n}g \tag{17.12}$$

методом разложения функций f и g в степенные ряды.

15.3. T. J. Osler [1, 5, 7, 8] получил ряд обобщений правил Лейбница (17.12) и (15.17) с помощью обобщения интегральной формулы Коши для дробных производных (см.

(22.4)). В работах T. J. Osler [1, 8] формула (17.12) перенесена на дробные производные (и интегралы) от функции f по функции φ вида

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\varphi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{\varphi^{-1}(0)}^{x} f(t)[\varphi(x) - \varphi(t)]^{-\alpha-1} \varphi'(t)\, dt$$

(см. далее § 18, п. 2°) и дано обобщение формулы (17.12) вида

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\varphi} f(x,\ x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{\beta+n} \mathcal{D}^{\alpha-\beta-n}_{\varphi(x),\,\psi(x)} f(x,\ t)|_{t=x}, \tag{17·13}$$

где $\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{\varphi,\psi} f$ означает смешанную дробную производную от $f(x, t)$ по функции φ по первой переменной и по функции ψ по второй переменной порядков α и β соответственно. В работах T. J. Osler [5, 8] отмечена связь соотношения (17.12) с равенством Парсеваля, известным в теории рядов Фурье, с помощью чего даны дальнейшие обобщения формулы (17.13). Эти результаты были применены в указанных работах к разложению в ряд некоторых специальных функций. В работе T. J. Osler [7] доказан общий интегральный аналог правила Лейбница, частными случаями которого являются (15.17) и интегральные аналоги правил (17.12), (17.13). Отметим также, что в работе J. L. Lavoie, R. Tremblay, T. J. Osler [1] обобщающая (17.12) формула

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}(x^{p+q} f(x))\, g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c \binom{\alpha}{cn+\beta} \mathcal{D}^{\alpha-\beta-cn}_{a+}(x^{p} f(x))\, \mathcal{D}^{\beta+cn}_{a+}(x^{q} g(x)), \quad 0 < c \leqslant 1,$$

и ее интегральный аналог были доказаны с помощью вычисления дробных производных через так называемые интегралы Похгаммера (см. § 22) при более слабых ограничениях, чем в указанных выше работах T. J. Osler.

15.4. В работе T. J. Osler [10] следующие обобщения формулы Лейбница — формула Уокера (J. J. Walker)

$$\mathcal{D}^{N}[f^{N} uv] = \sum_{n=0}^{N} W(N,\ n),$$

$$W(\alpha,\ \omega) = \binom{\alpha}{\omega} \mathcal{D}^{\alpha-\omega}(f^{\alpha-\omega} v)\, \mathcal{D}^{\omega-1}(f^{\omega} u')$$

и формула Коши

$$\mathcal{D}^{N-1}[f^{N} \mathcal{D}(uv)] = \sum_{n=0}^{N} C(N,\ n),$$

$$C(\alpha,\ \omega) = \binom{\alpha}{\omega} \mathcal{D}^{\alpha-\omega-1}(f^{\alpha-\omega} v')\, \mathcal{D}^{\omega-1}(f^{\omega} u'),$$

где $\binom{\alpha}{\omega}$ — биномиальные коэффициенты (1.50), распространены со значений $N=1, 2, 3, \ldots$ на произвольные значения $N \in \mathbf{C}$.

15.5. В работах W. A. Al-Salam, A. Verma [2], R. P. Agarwal [3] правило Лейбница (15.11) перенесено на так называемые дробные q-производные (см. § 23, п. 2°, 18.15).

15.6. В работе J. C. Polking [1] установлен аналог правила Лейбница для многомерного оператора дифференцирования дробного порядка $\mathcal{D}^{\alpha}_{p,q}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, вида

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{p,q} f)(x) = \left[\int_0^{\infty} \left(\int_{|y|\leqslant 1} \left|\frac{f(x+\rho y) - f(x)}{\rho^{\alpha}}\right|^{p} dy\right)^{q/p} \frac{d\rho}{\rho}\right]^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{p,\infty} f)(x) = \sup_{0<\rho<\infty} \rho^{-\alpha} \left(\int_{|y|\leqslant 1} |f(x+\rho y) - f(x)|^{p} dy\right)^{1/p}, \quad q = \infty.$$

15.7. В работе M. C. Gaer, L. A. Rubel [2] получены правило Лейбница (15.1) и его обобщения для дробной производной, специфически определяемой в комплексной плоскости в терминах некоторой целой функции экспоненциального типа (см. § 23, п. 2°, 22.9).

15.8. Обобщенное правило Лейбница (15.11) применено в работах H. L. Manocha [3],

H. L. Manocha, B. L. Sharma [1] для установления ряда соотношений, связывающих функции гипергеометрического типа.

16.1. В работе Э. Я. Риекстыньша [1] получены асимптотические разложения более общего, чем дробный интеграл (16.1), интеграла свертки (17.1) в следующих случаях: 1) при $x \to +0$ в предположении, что функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют обобщающую (16.6) и (16.46) асимптотику $f(t) \sim e^{-a/t^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\mu_n}$ при $t \to +0$, где $a \geqslant 0$, $\alpha > 0$, μ_n — монотонно возрастающая последовательность, $\mu_0 > -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$; 2) при $x \to +\infty$, когда $F(t)$ и $f(t)$ имеют обобщающее (16.10) асимптотическое представление

$$f(t) \sim \sum_{m=0}^{M} b_m t^{\lambda_m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n-\beta}, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \tag{17.14}$$

Отметим, что Э. Я. Риекстыньш использовал модификацию метода последовательных разложений, впервые примененного в работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [1], для нахождения асимптотики при $x \to +\infty$ интеграла (17.2) (см. также монографию Э. Я. Риекстыньша [2, т. 1, § 11]).

16.2. В работе N. Berger, R. A. Handelsman [1] даны асимптотические разложения дробного интеграла $(I^\alpha_{0+;x^p} f)(x)$ по функции x^p (см. (18.41)) в следующих двух случаях: а) при $x \to +0$ в предположении, что функция $f(t)$ имеет при $t \to +0$ разложение (16.6); б) при $x \to +\infty$ с условием, что $f(t)$ имеет асимптотику

$$f(t) \sim e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\mu_n}, \quad a \geqslant 0, \tag{17.15}$$

где μ_n — возрастающая последовательность, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} \mu_n = +\infty$. Исследование опирается на развитые в работах R. A. Handelsman, J. S. Lew [1, 2] методы, основанные на использовании равенства Парсеваля (1.116) для преобразования Меллина (1.112). Эти методы позволяют находить асимптотические разложения интегралов (17.2) при условии, что функции $k(t)$ и $f(t)$ алгебраически определены при $t \to +0$ и $t \to +\infty$ (см. также монографию Э. Я. Риекстыньша [2, т. 3, § 31.1—31.3]). В указанной работе N. Berger, R. Handelsman [1] были получены следующие результаты: 1) если $f(t)$ при $x \to +0$ имеет асимптотику (16.6), то при $x \to +0$

$$(I^\alpha_{0+;x^p} f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(1 + \mu_n/p)}{\Gamma(1 + \alpha + \mu_n/p)} x^{\mu_n + p\alpha}; \tag{17.16}$$

2) если $f(t)$ при $t \to +\infty$ обладает асимптотическим представлением (17.15), то при $x \to +\infty$

$$(I^\alpha_{0+;x^p} f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathfrak{M}\{f;\ p(n+1)\}}{n!\,\Gamma(\alpha - n)} x^{p(\alpha-n-1)}, \quad \text{если } a > 0 \tag{17.17}$$

($\mathfrak{M}$ — преобразование Меллина (1.112)), и

$$(I^\alpha_{0+;x^p} f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathfrak{M}\{f;\ p(n+1)\}}{n!\,\Gamma(\alpha - n)} x^{p(\alpha-n-1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \Gamma(1 - \mu_m/p)}{\Gamma(1 + \alpha - \mu_m/p)} x^{p\alpha - \mu_m}, \tag{17.18}$$

если $a = 0$, $\mu_m \neq p(n+1)$ для любых n, $m = 0, 1, 2, \ldots$

В частности, когда f имеет асимптотику (16.10) с $0 < \beta < 1$, из (17.18) вытекает равносильное (16.11) асимптотическое разложение дробного интеграла (16.1) при $x \to +\infty$:

$$(I^\alpha_{0+} f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(1 - \beta - n)}{\Gamma(1 + \alpha - \beta - n)} x^{\alpha-\beta-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathfrak{M}\{f;\ n+1\}}{n!\,\Gamma(\alpha - n)} x^{\alpha-n-1}. \tag{17.19}$$

В работе N. Berger, R. Handelsman [1] даны также приложения этих результатов к нахождению асимптотических представлений решений краевых задач для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу и осесимметричной теории потенциала (см. § 40, 41).

16.3. В случае, когда $f(t)$ осциллирует при $t\to\infty$, для нахождения асимптотического представления дробного интеграла $I_{0+}^{\alpha}f$ можно использовать один из методов, приведенных в п. 32.2 монографии Э. Я. Риекстыньша [2, т. 3].

16.4. В работе A. Erdelyi [16] получены асимптотические разложения при $x\to+\infty$ интегралов

$$\int_a^{+\infty} e^{-x(t-a)}\,(\mathcal{D}_{0+}^{1-\lambda}f)(t)\,dt, \quad \int_0^a e^{-xt}\,(\mathcal{D}_{0+}^{1-\alpha}f)(t)\,dt, \quad 0<a<+\infty,$$

где $\mathcal{D}_{0+}^{1-\lambda}f$, $0<\lambda<1$, — дробная производная (2.22).

16.5. В работе R. Wong [1] найдены пять первых членов асимптотического разложения дробного интеграла $(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)$ при $x\to+\infty$ в предположении, что $\varphi(t)$ имеет степенно-логарифмическую асимптотику вида

$$\varphi(t)\sim t^{-\beta}(\ln t)^{\gamma}\left[c_0+c_1\frac{\ln\ln t}{\ln t}+c_2\frac{(\ln\ln t)^2}{(\ln t)^2}+\ldots\right] \text{ при } t\to+\infty,$$

где $0\leqslant\beta\leqslant1$, $\gamma\in R^1$ (ср. с (16.29)). Этот результат и теоремы 16.4, 16.5 применены для получения асимптотических решений $\varphi(x)$ нелинейных интегральных уравнений

$$\sqrt{\pi}\varphi(x)=\int_0^x (x-t)^{-1/2}\,[f(t)-\varphi^n(t)]\,dt, \quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{17.20}$$

в предположении, что известная функция $f(t)$ имеет при $t\to+\infty$ степенную асимптотику (16.5).

Отметим, что ранее в работах R. A. Handelsman, W. E. Olmstead [1], W. E. Olmstead, R. A. Handelsman [1] даны главные члены асимптотики решений $\varphi(x)$ уравнений (17.20) (в этих и других случаях) и указано приложение к одной задаче теории теплопроводности.

16.6. Задачу об асимптотике дробных интегралов $I_{0+}^{\alpha}\varphi$ при заданной асимптотике функции φ можно поставить при фиксированном числе членов асимптотики. Именно пусть $\varphi_n(x)$, $x\in R_+^1$, — асимптотическая последовательность и пусть функция $\varphi(x)$ такова, что (16.3) выполняется при $x\to\infty$ для некоторого фиксированного N (и не обязательно выполняется для номера $N+1$). Какова тогда асимптотика $I_{0+}^{\alpha}\varphi$ при $x\to\infty$? В случае $\varphi_n(x)=x^{-n}$ вопрос об асимптотике в такой постановке рассматривался в работах М. А. Бетилгириева [1, 2] в связи с решением интегрального уравнения свертки на полуоси (уравнения Винера — Хопфа), символ которого имеет вещественные нули дробного порядка.

ГЛАВА 4

Другие формы дробных интегралов и производных

Настоящая глава завершает изложение теории одномерного дробного интегродифференцирования. В ней изучаются различные типы дробных интегралов и производных функций вещественного и комплексного переменных. Одни из них являются модификациями или непосредственными обобщениями рассмотренных в предыдущих главах дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля. Другие основаны на совершенно иных подходах. Однако, несмотря на это, имеет место совпадение ряда форм дробного интегродифференцирования друг с другом на определенных классах функций, а в ряде случаев совпадают даже области определения различных форм дробного дифференцирования, что и показывается в данной главе. Обратим особое внимание на интересный подход через разности дробного порядка, восходящий к А. Грюнвальду и А. В. Летникову. Он рассмотрен в § 20 и в периодическом и непериодическом случаях. Отдельный параграф посвящен изложению дробного интегрирования и дифференцирования в комплексной области.

В заключение главы в § 23, п. 3° собраны данные в книге ответы на некоторые вопросы, поставленные в 1974 г. на первой конференции по дробному исчислению в г. Нью-Хейвене, США.

§ 18. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ МОДИФИКАЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

В теории и приложениях весьма широко используются различные модификации и обобщения классических операторов дробного интегродифференцирования. К таким модификациям относятся рассматриваемые в этом параграфе операторы типа Эрдейи—Кобера, дробные интегралы от функции по функции, дробные интегралы и производные по Адамару, операторы бесселева дробного интегродифференцирования, дробные интегралы Чженя и обобщенный интеграл Джрбашяна.

1°. Операторы типа Эрдейи—Кобера. При исследовании парных интегральных уравнений (см. § 38) и в других приложениях широко применяются следующие модификации интегралов и производных Римана — Лиувилля:

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x^{\sigma}-t^{\sigma})^{\alpha-1}t^{\sigma\eta+\sigma-1}f(t)\,dt,\quad \alpha>0, \tag{18.1}$$

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=x^{-\sigma(\alpha+\eta)}\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n x^{\sigma(\alpha+n+\eta)}I^{\alpha+n}_{a+;\sigma,\eta}f(x),\quad \alpha>-n, \tag{18.2}$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=\frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b (t^{\sigma}-x^{\sigma})^{\alpha-1}t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1}f(t)\,dt,\quad \alpha>0, \tag{18.3}$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=x^{\sigma\eta}\left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n x^{\sigma(n-\eta)}I^{\alpha+n}_{b-;\sigma,\eta-n}f(x),\quad \alpha>-n, \tag{18.4}$$

где $0\leqslant a<x<b\leqslant\infty$ при произвольных действительных σ или $-\infty\leqslant a<x<b\leqslant\infty$ при целых σ. В частности, при $a=0$, $b=+\infty$ и $\sigma=1$ интегралы (18.1) и (18.3) принимают вид

$$I^{+}_{\eta,\alpha}f(x)=I^{\alpha}_{0+;1,\eta}f(x)=\frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{\eta}f(t)\,dt,\quad \alpha>0, \tag{18.5}$$

$$K^{-}_{\eta,\alpha}f(x)=I^{\alpha}_{\infty-;1,\eta}f(x)=$$

$$=\frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^{\infty}(t-x)^{\alpha-1}t^{-\eta-\alpha}f(t)\,dt,\quad \alpha>0. \tag{18.6}$$

Операторы (18.1) и (18.3) при $a=0$, $b=+\infty$ называют *операторами Эрдейи*, а (18.5) и (18.6) — *операторами Кобера (или Кобера—Эрдейи)*. В связи с этим операторы (18.1) — (18.4) естественно назвать *операторами типа Эрдейи—Кобера*.

Будем использовать также следующие обозначения: при $a=-\infty$, $b=+\infty$

$$I^{\alpha}_{-\infty+;\sigma,\eta}=I^{\alpha}_{+,\sigma,\eta},\quad I^{\alpha}_{+\infty-;\sigma,\eta}=I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}, \tag{18.7}$$

а при $\sigma=2$

$$I^{\alpha}_{0+;2,\eta}=I_{\eta,\alpha},\quad I^{\alpha}_{-;2,\eta}=K_{\eta,\alpha}. \tag{18.8}$$

Операторы (18.8) часто называют *операторами Эрдейи—Кобера*.

Операторы (18.1), (18.3) (в частности, операторы (18.5), (18.6)) являются операторами с однородными ядрами степени -1. Поэтому из теоремы 1.5 следует их ограниченность в пространстве $L_p(a, b)$, $1\leqslant p<\infty$, при $a>0$ и $b<+\infty$. При $a=0$, $b=+\infty$ оператор (18.1) ограничен в $L_p(0, \infty)$, $1\leqslant p<\infty$, при условии $\eta>-1+1/(p\sigma)$, а оператор (18.3) — при условии $\eta>-1/(p\sigma)$. В частности, оператор (18.5) ограничен в $L_p(0, \infty)$, $1\leqslant p<\infty$, при $\eta>-1/p'$, а оператор (18.6) — при $\eta>-1/p$.

После замены $x^{\sigma}=y$, $t^{\sigma}=\tau$ формулы (18.1) — (18.4) сводятся к обычным определениям интегралов и производных Римана—Лиувилля (см. § 2):

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=y^{-\alpha-\eta}(I^{\alpha}_{a\sigma+}\varphi)(y),\quad \varphi(y)=y^{\eta}f(x),\quad x^{\sigma}=y, \tag{18.9}$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=y^{\eta}(I^{\alpha}_{b\sigma-}\psi)(y),\quad \psi(y)=y^{-\alpha-\eta}f(x),\quad x^{\sigma}=y, \tag{18.10}$$

поэтому полагают при $\alpha=0$

$$I^{0}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=f(x),\quad I^{0}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=f(x). \tag{18.11}$$

Отметим, что свойство

$$\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n=x^{1-\sigma}\left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma-1} \tag{18.12}$$

дает возможность равенства (18.2), (18.4) переписать в эквивалентном виде:

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x) = x^{1-\sigma(1+\alpha+\eta)}\left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma(1+\alpha+n+\eta)-1} I^{\alpha+n}_{a+;\sigma,\eta}f(x), \quad (18.13)$$

$$\alpha > -n,$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x) = x^{1+\sigma(\eta-1)}\left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma(n-\eta+1)-1} I^{\alpha+n}_{b-;\sigma,\eta-n}f(x), \quad (18.14)$$

$$\alpha > -n.$$

Соотношения (18.9), (18.10) позволяют известные свойства интегралов Римана—Лиувилля I^{α}_{a+}, I^{α}_{b-} перенести на операторы типа Эрдейи—Кобера. Перечислим основные из таких свойств, имея в виду их использование в § 38 при решении парных интегральных уравнений:

а) *формулы сдвига:*

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}x^{\sigma\beta}f(x) = x^{\sigma\beta}I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta+\beta}f(x),$$
$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}x^{\sigma\beta}f(x) = x^{\sigma\beta}I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta-\beta}f(x); \quad (18.15)$$

б) *формулы композиции:*

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}I^{\beta}_{a+;\sigma,\eta+\alpha}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{a+;\sigma,\eta}f(x);$$
$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}I^{\beta}_{b-;\sigma,\eta+\alpha}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{b-;\sigma,\eta}f(x); \quad (18.16)$$

которые имеют место при $\beta>0$, $\alpha+\beta\geqslant 0$ или $\beta<0$, $\alpha>0$ или же $\alpha<0$, $\alpha+\beta\leqslant 0$ на соответствующих классах функций f (см. теорему 2.5);

в) формулы разложения на композиции:

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x) = n^{-\alpha}\prod_{k=1}^{n} I^{\alpha/n}_{a+;n\sigma,(\eta+k)/n-1}f(x),$$
$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x) = n^{-\alpha}\prod_{k=1}^{n} I^{\alpha/n}_{b-;n\sigma,(\eta+k-1)/n}f(x). \quad (18.16')$$

г) *значения обратных операторов:*

$$(I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta})^{-1}f(x) = I^{-\alpha}_{a+;\sigma,\eta+\alpha}f(x),$$
$$(I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta})^{-1}f(x) = I^{-\alpha}_{b-;\sigma,\eta+\alpha}f(x); \quad (18.17)$$

д) *формула дробного интегрирования по частям:*

$$\int_a^b x^{\sigma-1}f(x)\,I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}g(x)\,dx = \int_a^b x^{\sigma-1}g(x)\,I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)\,dx. \quad (18.18)$$

Пусть $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя (1.83). Определим с помощью формулы (при $\sigma>0$)

$$S_{\eta,\alpha;\sigma}f(x) = \sigma^{\alpha}x^{\alpha\sigma/2}\int_0^{\infty} t^{-\alpha\sigma/2+\sigma-1}J_{2\eta+\alpha}\left(\frac{2}{\sigma}(xt)^{\sigma/2}\right)f(t)\,dt \quad (18.19)$$

оператор модифицированного преобразования Ханкеля $S_{\eta,\alpha,\sigma}$. После соответствующих замен переменных и функций оператор (18.19) приводится к форме обычного двойственного себе преобразования Ханкеля (см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [4, с. 12]), откуда обратными

заменами легко получить следующее представление для обратного к (18.19) оператора:

$$S^{-1}_{\eta,\alpha;\sigma}f(x) = S_{\eta+\alpha,-\alpha;\sigma}f(x), \quad \operatorname{Re}(2\eta+\alpha) \geqslant -1/2. \tag{18.20}$$

Для оператора (18.19) имеют место следующие *формулы композиций:*

$$I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\beta}S_{\eta,\beta;\sigma}f(x) = S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x),$$
$$I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}f(x) = S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x); \tag{18.21}$$

$$S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}S_{\eta,\alpha;\sigma}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{0+;\sigma,\eta}f(x),$$
$$S_{\eta,\alpha;\sigma}S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{-;\sigma,\eta}f(x); \tag{18.22}$$

$$S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}f(x) = S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x),$$
$$S_{\eta,\alpha;\sigma}I^{\beta}_{-;\sigma,\eta+\alpha}f(x) = S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x). \tag{18.23}$$

Все они устанавливаются с помощью определений входящих в них операторов, последующего изменения порядка интегрирования и вычисления внутренних интегралов при некоторых условиях их сходимости типа $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta>0$. При этом удобно пользоваться равенствами 2.12.4.6, 2.12.4.17, 2.12.31.1 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2]. На остальные значения параметров α, β, η эти соотношения могут быть распространены с помощью аналитического продолжения, но в более узких классах функций, где определены соответствующие операторы.

2°. Дробный интеграл от функции по другой функции. В интегралах типа Эрдейи—Кобера использовалась степень $(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{\alpha-1}$ вместо $(x-t)^{\alpha-1}$. Развивая эту идею, можно ввести дробное интегрирование вида

$$I^{\alpha}_{a+;g}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{[g(x)-g(t)]^{1-\alpha}}\,g'(t)\,dt, \tag{18.24}$$
$$\alpha>0, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

определенное для любой функции $\varphi(t)\in L_1(a, b)$ и монотонной функции $g(t)$, имеющей непрерывную производную. Интеграл (18.24) называют иногда *дробным интегралом функции* $\varphi(x)$ *по функции* $g(x)$ *порядка* α.

Если

$$g'(x) \neq 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{18.25}$$

то оператор $I^{\alpha}_{a+;g}$ легко записывается через обычный оператор дробного интегрирования Римана—Лиувилля после соответствующих замен переменных:

$$I^{\alpha}_{a+;g}\varphi = QI^{\alpha}_{c+}Q^{-1}\varphi, \quad c = g(a), \tag{18.26}$$

где Q — оператор подстановки: $(Qf)(x) = f[g(x)]$. Поэтому многие свойства дробного интеграла (18.24), в частности полугрупповое свойство

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}I^{\beta}_{a+;\,g}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{a+;\,g}\varphi, \tag{18.27}$$

немедленно следуют при условии (18.25) из соответствующих свойств дробного интеграла Римана—Лиувилля I^{α}_{c+}. Из (18.26) и формулы (2.44) следует также, что для функции $g_{\beta}(x) = [g(x)-g(a)]^{\beta-1}$ имеет место равенство

$$(I^{\alpha}_{a+;\,g}g_{\beta})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}g_{\alpha+\beta}(x), \quad \alpha,\ \beta>0. \tag{18.28}$$

Ввиду связи (18.26) можно ввести соответствующее дробное дифференцирование $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+;\,g}f$ такое, чтобы $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+;\,g}f = Q\mathscr{D}^{\alpha}_{c+}Q^{-1}f$. После простых преобразований это приводит к равенству

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+;\,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{1}{g'(x)}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}\,g'(t)\,dt, \quad 0<\alpha<1. \tag{18.29}$$

Выражение (18.29) будем называть *дробной производной Римана—Лиувилля функции $f(x)$ по функции $g(x)$ порядка α $(0<\alpha<1)$*. Производные более высоких порядков определяются формулой, аналогичной первому из равенств (2.30).

В форме Маршо (13.2) производной (18.29) легко придать вид

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+;\,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{f(x)}{[g(x)-g(a)]^{\alpha}} +$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{[g(x)-g(t)]^{1+\alpha}}\,g'(t)\,dt, \quad 0<\alpha<1. \tag{18.30}$$

Для этого достаточно к оператору $\mathbf{D}^{\alpha}_{c+}$, $c=g(a)$, определенному равенством (13.2), применить операторы Q, Q^{-1} справа и слева соответственно.

Следуя А. Эрдейи (A. Erdelyi [9]), покажем, что имеет место

Теорема 18.1. *Класс функций, представимых дробным интегралом $I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi$, $0<\alpha<1$, от функции из $\varphi\in L_p(a,\,b)$, $1\leqslant p<\infty$, $-\infty<a<b<\infty$, не зависит от выбора функции $g(x)$:*

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}(L_p) = I^{\alpha}_{a+}(L_p),$$

если $g(x)\in C^1([a,\,b])$, $g'(x)\in H^{\lambda}([a,\,b])$ и имеет место (18.25). При этом

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi = I^{\alpha}_{a+}\psi, \quad \psi(x) = [g'(x)]^{\alpha}\,\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial\Phi(x,\,s)}{\partial x}\,\varphi(s)\,ds\in L_p, \tag{18.31}$$

где $\Phi(x,\,s) = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,g'(s)\displaystyle\int_s^x (x-u)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}h(s,\,u)\,du,$

$$h(s,\,u) = \left[\frac{u-s}{g(u)-g(s)}\right]^{1-\alpha} = \left[\int_0^1 g'(u+(s-u)\,\xi)\,d\xi\right]^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}(L_p)\subseteq I^{\alpha}_{a+}(L_1). \tag{18.32}$$

Пусть $f(x) = I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi$, $\varphi\in L_p$. В соответствии с теоремой 2.3 покажем, что

$$f_{1-\alpha} \overset{\text{def}}{=} I^{1-\alpha}_{a+}f = I^{1-\alpha}_{a+}\,I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi\in AC([a,\,b]), \quad f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{18.33}$$

Имеем

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{du}{(x-u)^{\alpha}}\int_a^u \frac{g'(s)\,\varphi(s)\,ds}{[g(u)-g(s)]^{1-\alpha}} =$$

$$= \int_a^x \Phi(x,\,s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{18.34}$$

Так как

$$\Phi(x,\ s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}g'(s)\int_0^1\xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{-\alpha}h(s,\ s+(x-s)\xi)\,d\xi, \quad (18.35)$$

то $\Phi(s,\ s)=[g'(s)]^{\alpha}$ и поэтому $\Phi(x,\ s)=[g'(s)]^{\alpha}+\int_s^x\frac{\partial\Phi(u,\ s)}{\partial u}du$. Подставив это в (18.34), после перестановки порядка интегрирования приходим к равенству

$$f_{1-\alpha}(x)=\int_a^x\psi(t)\,dt, \quad (18.36)$$

где $\psi(t)$—функция (18.31). Из условий, которым удовлетворяет $g(t)$, легко выводится, что $\left|\frac{\partial h(s,\ u)}{\partial u}\right|\leqslant c(u-s)^{\lambda-1}$, тогда из (18.35) видим, что и $\left|\frac{\partial\Phi(x,\ s)}{\partial x}\right|\leqslant c(x-s)^{\lambda-1}$. Следовательно, $\psi(t)\in L_p(a,\ b)$, а тогда ввиду (18.36) оба условия (18.33) выполняются. Тем самым доказано вложение (18.32), а также

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}(L_p)\subseteq I^{\alpha}_{a+}(L_p), \quad (18.37)$$

поскольку $\psi\in L_p$.

Равенство (18.31) является уравнением Вольтерра относительно функции $\varphi(t)$. Ввиду (18.25) оно разрешимо в L_p при любой функции $\psi(x)\in L_p$ (см., например, книгу А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина [1, с. 461] для $p=2$ и работу П. П. Забрейко [1] для произвольного $p>1$). Это означает, что из (18.37) следует, что $I^{\alpha}_{a+;g}(L_p)=I^{\alpha}_{a+}(L_p)$. Теорема доказана.

Выделим особо случай $g(x)=x^{\sigma}$ (как в операторах типа Эрдейи—Кобера) при $b=\infty$. Будем обозначать

$$I^{\alpha}_{-;x^{\sigma}}\varphi=\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{t^{\sigma-1}\varphi(t)\,dt}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}\alpha>0, \quad (18.38)$$

так что в терминах (18.3), (18.5) можно записать, что

$$I^{\alpha}_{-;x^{\sigma}}\varphi=x^{\sigma\alpha}\,I^{\alpha}_{-;\sigma,-\alpha}\varphi(x). \quad (18.39)$$

Обратный к (18.38) оператор дробного дифференцирования имеет вид

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{-;x^{\sigma}}f=x^{\sigma\alpha}\,I^{-\alpha}_{-;\sigma,\alpha}f(x)=\frac{\sigma^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{x^{\sigma-1}dx}\right)^{n}\times$$

$$\times\int_x^{\infty}\frac{t^{\sigma-1}f(t)\,dt}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{\alpha-n+1}}, \quad n=[\operatorname{Re}\alpha]+1. \quad (18.40)$$

Аналогично на основе формул (18.1)—(18.5) определяются операторы

$$I^{\alpha}_{+;x^{\sigma}},\ I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}},\ I^{\alpha}_{b-;x^{\sigma}},\ \mathcal{D}^{\alpha}_{+;x^{\sigma}},\ \mathcal{D}^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}},\ \mathcal{D}^{\alpha}_{b-;x^{\sigma}}. \quad (18.41)$$

Укажем для них аналоги формул (18.16′):

$$I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}f(x)=n^{-\alpha}\,x^{\sigma\alpha+\sigma n}(x^{-\sigma\alpha-\sigma}\,I^{\alpha/n}_{a+;x^{\sigma n}})^{n}f(x),$$

$$I^{\alpha}_{b-;x^{\sigma}}f(x)=n^{-\alpha}\,x^{\sigma\alpha+\sigma n}(x^{-\sigma\alpha-\sigma}\,I^{\alpha/n}_{a+;x^{\sigma n}})^{n}f(x). \quad (18.41')$$

3°. **Дробное интегродифференцирование по Адамару.** Дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля является формально дроб-

ной степенью $(d/dx)^\alpha$ оператора дифференцирования d/dx и обладает свойством инвариантности относительно сдвига (если иметь в виду случай всей прямой).

Ж. Адамар (J. Hadamard [1]) предложил конструкцию дробного интегродифференцирования, являющуюся дробной степенью типа $\left(x\frac{d}{dx}\right)^\alpha$. Эта конструкция приспособлена к полуоси и инвариантна относительно растяжения. Именно Ж. Адамар ввел дробные интегралы вида

$$\mathfrak{J}_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{t\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}, \quad x>0,\ \alpha>0. \tag{18.42}$$

Аналогично можно ввести

$$\mathfrak{J}_-^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}}, \quad x>0,\ \alpha>0. \tag{18.43}$$

Операторы $\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi$ удобно представлять в виде (см. обозначения (5.5))

$$\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)_\pm^{\alpha-1}\varphi(xt)\,dt. \tag{18.44}$$

Выражения (18.42)—(18.44) будем называть *дробными интегралами Адамара*. Если $\Pi_\delta f = f(\delta x)$, $\delta>0$, — оператор растяжения, то, очевидно,

$$\Pi_\delta\mathfrak{J}_\pm^\alpha = \mathfrak{J}_\pm^\alpha\Pi_\delta. \tag{18.45}$$

Ясно, что оператор (18.42) является дробным интегралом вида (18.24) с функцией $g(t)=\ln t$, так что дробное интегрирование Адамара (18.42) есть «дробный интеграл функции φ по функции $g(t)=\ln t$». Однако здесь не выполняется условие существования непрерывной производной $g'(t)$. Поэтому интегралы (18.42), (18.43) нуждаются в особом рассмотрении (условие непрерывности $g'(t)$ было бы выполнено, если в (18.42) взять нижний предел интегрирования равным $a>0$, но тогда нарушится свойство инвариантности интеграла относительно растяжения).

Нетрудно видеть, что операторы $\mathfrak{J}_\pm^\alpha$ связаны с хорошо знакомыми нам операторами Римана—Лиувилля $I_\pm^\alpha$ заменами переменных: $(\mathfrak{J}_+^\alpha\varphi)(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(e^t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ и аналогично для $\mathfrak{J}_-^\alpha\varphi$. Таким образом, справедливо соотношение

$$\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi = A^{-1}I_\pm^\alpha A\varphi, \quad (A\varphi)(x) = \varphi(e^x). \tag{18.46}$$

Связь (18.46) позволяет переносить на операторы $\mathfrak{J}_\pm^\alpha$ различные свойства операторов $I_\pm^\alpha$. Так, например, замечая, что

$$\|A\varphi\|_{L_p(R^1)} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_p(R_+^1)}, \tag{18.47}$$

где

$$\mathscr{L}_p(R_+^1) = \left\{\varphi(t): \int_0^\infty |\varphi(t)|^p\frac{dt}{t}<\infty\right\}, \tag{18.48}$$

из (18.46) и теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 заключаем, что операторы $\mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha}$ ограниченно действуют из $\mathcal{L}_p(R_+^1)$ в $\mathcal{L}_q(R_+^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$, при $1<p<1/\alpha$.

Из связи (18.46) видим также, что операторы $\mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha}$ обладают полугрупповым свойством:

$$\mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha}\mathfrak{I}_{\pm}^{\beta}\varphi=\mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha+\beta}\varphi \tag{18.49}$$

при соответствующих предположениях о функциях φ и показателях α, β.

Рассмотрим также *адамаровские дробные интегралы* вида

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad x>a\geqslant 0, \tag{18.50}$$

$$\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{\varphi(t)}{\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad 0<x<b, \tag{18.51}$$

так что $\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}=\mathfrak{I}_{+}^{\alpha}$, $\mathfrak{I}_{\infty-}^{\alpha}=\mathfrak{I}_{-}^{\alpha}$. Подобно (18.46) имеем

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}\varphi=A^{-1}I_{a_1+}^{\alpha}A\varphi,\quad \mathfrak{I}_{b-}^{\alpha}\varphi=A^{-1}I_{b_1-}^{\alpha}A\varphi, \tag{18.52}$$

где $a_1=\ln a$, $b_1=\ln b$.

Непосредственным вычислением проверяются свойства

$$x\frac{d}{dx}\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha+1}=\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha},\quad -x\frac{d}{dx}\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha+1}=\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{18.53}$$

Дробная производная по Адамару, вводимая подобно дробной производной Римана—Лиувилля, имеет в соответствии с (18.53) вид

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}f\overset{\text{def}}{=}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}\mathfrak{I}_{+}^{1-\{\alpha\}}f=\mathfrak{I}_{+}^{1-\{\alpha\}}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}f,\quad \alpha>0, \tag{18.54}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α, а $\{\alpha\}=\alpha-[\alpha]$ (аналогично выписываются дробные производные $\mathfrak{D}_{-}^{\alpha}f$, $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}f$, $\mathfrak{D}_{b-}^{\alpha}f$). В частности, при $0<\alpha<1$

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}}\frac{dt}{t}. \tag{18.55}$$

Производную (18.55) нетрудно привести к виду, аналогичному дробной производной Маршо (5.57). Именно, действуя подобно (5.56) или пользуясь связью (18.46), соотношение (18.55)′ приводим к форме

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1\frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}, \tag{18.56}$$

считая $f(x)$ достаточно хорошей функцией. Дробному интегралу (18.43) отвечает дробное дифференцирование

$$\mathfrak{D}_{-}^{\alpha} f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln \frac{t}{x}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}; \qquad (18.56')$$

При $\alpha \geqslant 1$ аналогом дробной производной Маршо (5.80) будет служить выражение

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_{0}^{1} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f(t^k x) \frac{dt}{|\ln t|^{1+\alpha} t}, \quad l > \alpha. \qquad (18.57)$$

Для дробных производных $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f$, $a > 0$, в случае $0 < \alpha < 1$ вместо (18.56) будем иметь

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \qquad (18.58)$$

(ср. с (13.2)).

В заключение пункта отметим, как действует дробное интегродифференцирование по Адамару на степенных функциях:

$$\mathfrak{J}_{+}^{\alpha}(x^{\mu}) = \mu^{-\alpha} x^{\mu}, \quad \mu > 0, \qquad (18.59)$$

$$\mathfrak{J}_{-}^{\alpha}(x^{\mu}) = |\mu|^{-\alpha} x^{\mu}, \quad \mu < 0, \qquad (18.60)$$

где $-\infty < \alpha < \infty$ ($\mathfrak{J}_{\pm}^{\alpha}$ при $\alpha < 0$ понимается как $\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha}$). Последние соотношения получаются простыми вычислениями.

4°. Одномерная модификация бесселева дробного интегродифференцирования и пространства $H^{s,p} = L_p^s$. Операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля, действующие на всей оси, обладают, как мы знаем, тем недостатком, что они не сохраняют, например, классов $L_p(R^1)$ и в рамках $L_p(R^1)$ определены не при всех значениях α. В ряде вопросов, например при построении соболевских классов дифференцируемых функций дробной гладкости, удобно было бы иметь дело с операторами дробного интегрирования, определенными в $L_p(R^1)$ при всех $\alpha > 0$ и при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и сохраняющими $L_p(R^1)$. Способ введения таких операторов подсказывается картиной в образах Фурье. Именно пусть

$$G^{\alpha}\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (18.61)$$

есть оператор свертки, действие которого в образах Фурье дается равенством

$$\widehat{G^{\alpha}\varphi} = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} \hat{\varphi}(x), \quad \operatorname{Re}\alpha > 0 \qquad (18.62)$$

(см. (7.1) и (12.23), (12.24)). Функция $G_{\alpha}(x)$, преобразование Фурье которой есть $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$, вычисляется в терминах бесселевых функций. Поэтому оператор (18.61) называют *оператором бесселева дробного интегрирования* (или еще *бесселевым потенциалом*). Подробнее о таком операторе см. в § 27. Подобный оператор играет существенную роль в теории дробного дифференцирования функций многих переменных. Его можно использовать и в случае функций одного переменного, однако специфика одномерного случая позволяет ввести аналогичные дробные интегралы более простой природы. Именно введем *модификации*

бесселева потенциала (18.61), (18.62), определяемые вместо (18.62) равенством

$$\widehat{G_{\pm}^{\alpha}\varphi} = \frac{1}{(1 \mp ix)^{\alpha}}\hat{\varphi}(x), \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{18.63}$$

выбрав ветвь степенной функции по формуле (5.27) (ср. с (18.62) и (12.23)). В силу формулы (7.9) получаем, что операторы $G_{\pm}^{\alpha}$ могут быть записаны как свертки с элементарными функциями

$$G_{\pm}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{\mp x} x_{\pm}^{\alpha-1} * \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\varphi(x \mp t)}{t^{1-\alpha}}\, dt, \tag{18.64}$$

так что

$$G_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(x-t)}\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt,$$

$$G_{-}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{e^{x-t}\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dt. \tag{18.65}$$

Операторы (18.65) определены при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ на функциях $\varphi(x) \in L_p(R^1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в силу теоремы 1.4.

Отметим, что из (18.62), (18.63) следует соотношение

$$G_{+}^{\alpha/2} G_{-}^{\alpha/2} = G^{\alpha}. \tag{18.66}$$

Для дробных интегралов $G_{\pm}^{\alpha}$ имеют место простые формулы дифференцирования вида

$$\pm \frac{d}{dx} G_{\pm}^{\alpha} = G_{\pm}^{\alpha-1} - G_{\pm}^{\alpha}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 1, \tag{18.67}$$

которые обобщаются на

$$\left(E \pm \frac{d}{dx}\right)^{n} G_{\pm}^{\alpha} = G_{\pm}^{\alpha-n}, \quad \operatorname{Re}\alpha > n, \tag{18.68}$$

где E—единичный оператор. Справедливость последних формул легко просматривается в образах Фурье, их можно также установить непосредственным дифференцированием интегралов (18.65).

В силу представлений

$$G_{\pm}^{\alpha} = e^{\mp x} I_{\pm}^{\alpha} e^{\pm x} \tag{18.69}$$

из (5.15) вытекает

$$G_{\pm}^{\alpha} G_{\pm}^{\beta} \varphi = G_{\pm}^{\alpha+\beta}\varphi, \quad \varphi \in L_p(R^1), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{18.70}$$

где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, так что каждое из семейств операторов $\{G_{+}^{\alpha}\}_{\alpha>0}$, $\{G_{-}^{\alpha}\}_{\alpha>0}$ образует полугруппу в $L_p(R^1)$. Она является непрерывной, что устанавливается подобно теореме 2.6.

Введем соответствующие дробные производные как операции, обратные к (18.65), т. е. к бесселевому дробному интегрированию. Так как $(G_{\pm}^{\alpha})^{-1} = e^{\mp x}(I_{\pm}^{\alpha})^{-1} e^{\pm x}$ в силу (18.69), то построение операторов $(G_{\pm}^{\alpha})^{-1}$ очевидно. Пусть $0 < \alpha < 1$. Поскольку для оператора $(I_{\pm}^{\alpha})^{-1}$ можно допускать две формы—лиувиллевскую (5.6) и Маршо (5.57), то мы введем соответственно

$$(E+\mathscr{D})^{\alpha} f \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{-x}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t}\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(E + \frac{d}{dx}\right) \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(x-t)}\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt \tag{18.71}$$

и аналогично для $(E-\mathscr{D})^{\alpha} f$, а также

$$(E \pm \mathbf{D})^{\alpha} f \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x) - e^{-t} f(x \mp t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \tag{18.72}$$

Обозначения в левых частях (18.71) и (18.72) навязаны, очевидно, формулой (18.68). Дробные производные $(E \pm \mathscr{D})^{\alpha} f$ и $(E \pm \mathbf{D})^{\alpha} f$ совпадают (при одинаковом выборе знаков) на «достаточно хороших» функциях $f(x)$.

Нетрудно видеть, что «бесселева» дробная производная (18.72) связана с производной Маршо $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f$ равенством

$$(E \pm \mathbf{D})^{\alpha} f = \mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f + a_{\pm} * f, \tag{18.73}$$

где $a_{\pm}(x) = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{1 - e^{\mp x}}{x_{\pm}^{1+\alpha}} \in L_1(R^1)$.

Рассмотрим теперь пространства

$$G^{\alpha}(L_p), \quad G_{+}^{\alpha}(L_p), \quad G_{-}^{\alpha}(L_p), \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

состоящие из функций, представимых интегралами соответственно (18.62), (18.65) от функций $\varphi \in L_p(R^1)$. Они совпадают:

$$G^{\alpha}(L_p) = G_{+}^{\alpha}(L_p) = G_{-}^{\alpha}(L_p), \quad 1 < p < \infty,$$

согласно следствию из теоремы 1.6. Для пространства $G^{\alpha}(L_p)$ приняты в литературе и другие обозначения, например $H^{\alpha, p}$ или L_p^{α}, которыми мы также будем пользоваться, так что

$$L_p^{\alpha}(R^1) = H^{\alpha, p}(R^1) = G^{\alpha}(L_p), \quad 1 < p < \infty.$$

Они известны под названием *пространств бесселевых потенциалов*. Позже, в § 27 мы подробнее познакомимся с этими пространствами в более общем случае функций многих переменных. Такие пространства представляют собой один из наиболее распространенных вариантов пространств дифференцируемых функций дробной гладкости. Им посвящена обширная литература (см. книги С. М. Никольского [4], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1] и имеющиеся там ссылки и литературные указания к § 27 в § 29). В этом параграфе отметим простое описание пространства $L_p^{\alpha}(R^1)$ в одномерном случае, предоставляемое следующей теоремой, и важное следствие из этого описания.

Теорема 18.2. *Для того чтобы* $f(x) \in L_p^{\alpha}(R^1)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f \in L_p(R^1)$, $(E + \mathbf{D})^{\alpha} f \in L_p(R^1)$, *где «бесселева» дробная производная понимается как условно сходящийся интеграл по норме пространства* L_p:

$$(E + \mathbf{D})^{\alpha} f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - e^{-t} f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \tag{18.74}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 6.1, 6.2 с соответствующими упрощениями благодаря экспоненциально убывающему множителю в ядре; отметим, например, что вместо представления (6.6) получается представление

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)-e^{-t}f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon t}\mathcal{K}(t)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt, \quad f = G_{+}^{\alpha}\varphi, \quad (18.75)$$

где $\mathcal{K}(t)$—ядро (6.7).

Следствие. *Сопоставляя теорему 18.2 с теоремой 6.2 и учитывая связь (18.73) бесселева дифференцирования и дифференцирования Маршо, получаем*

$$L_p \cap I^{\alpha}(L_p) = H^{\alpha,p}(R^1), \quad 1<p<1/\alpha. \quad (18.76)$$

Отметим, что теорема 18.2 распространяется на все значения $\alpha>0$, если $(E+\mathbf{D})^{\alpha}$ реализовать в виде

$$(E+\mathbf{D})^{\alpha}f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} f(x-kt)\,\frac{dt}{t^{1+\alpha}} \quad (18.77)$$

в соответствии с формулой (5.80) и равенством $(E+\mathbf{D})^{\alpha} = e^{-x}\mathbf{D}_{+}^{\alpha}e^{x}$.

В литературе иногда рассматривают пространство $H^{s,p}([a, b])$, определяемое как пространство сужений функций из $H^{s,p}(R^1)$ на отрезок $[a, b]$ с нормой $\|f\|_{H^{s,p}([a,\,b])} = \inf \|g\|_{H^{s,p}(R^1)}$, где инфинум берется по всем функциям $g\in H^{s,p}(R^1)$, совпадающим с $f(x)$ на $[a, b]$. В данной книге важно отметить, что пространства $H^{s,p}([a, b])$ совпадают, вообще говоря, с изученными в § 13 пространствами $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ дробных интегралов от функций из $L_p(a, b)$. Именно справедлива следующая

Теорема 18.3. *Пусть* $0<\alpha<1/p$, $1<p<\infty$. *Тогда*

$$H^{\alpha,p}([a, b]) = I^{\alpha}[L_p(a, b)] \quad (18.78)$$

с точностью до эквивалентности норм, $-\infty<a<b<\infty$.

Доказательство. Пусть $f(x)\in H^{\alpha,p}([a, b])$. Тогда существует $g(x)\in H^{\alpha,p}(R^1)$, $g(x)=f(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$. Ввиду (18.76) $g(x)\in I^{\alpha}(L_p)$. Но тогда $f(x)\in I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ согласно теореме 13.9. Обратно, пусть $f(x)\in I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ и $f^*(x)$ — ее продолжение нулем за пределы отрезка $[a, b]$, см. (13.29). В силу теоремы 13.10 $f^*(x)\in I^{\alpha}(L_p(R^1))$. Так как, очевидно, $f^*(x)\in L_p(R^1)$, то ввиду (18.76) $f^*(x)\in H^{\alpha,p}(R^1)$, что и требовалось.

Замечание 18.1. Анализ доказательства теоремы 18.3 показывает, что в случае $1/p<\alpha<1/p+1$ справедливо равенство

$$H_0^{\alpha,p}([a, b]) = I_{a+}^{\alpha}[L_p(a, b)], \quad (18.79)$$

где $H_0^{\alpha,p}([a, b])$ состоит из функций $f(x)\in H^{\alpha,p}([a, b])$ таких, что $f(a)=0$. Можно показать, что в граничном случае $\alpha=1/p$ не выполняется не только равенство (18.78), но и пространство $H^{\alpha,p}([a, b])$ не вложено в $I_{a+}^{\alpha}[L_p(a, b)]$ (причина этого—неограниченность оператора (13.27) в L_p при $\alpha=1/p$). В случае произвольного $\alpha>1/p$, $\alpha-1/p\neq 1, 2, \ldots$, равенство (18.78) выполняется при условии, что в определении класса $H_0^{\alpha,p}([a, b])$ добавлено предположение $f^{(k)}(a)=0$, $k=0, 1, \ldots, [\alpha-1/p]$.

5°. Дробный интеграл Чженя. При рассмотрении дробного интегрирования Римана—Лиувилля $I_{\pm}^{\alpha}\varphi$ на всей прямой точки $+\infty$ и $-\infty$ не

равноправны. Это проявляется, например, в том, что дробный интеграл $I_{\pm}^{\alpha}\varphi$ сохраняет, вообще говоря, характер убывания функции $\varphi(x)$ на $\mp\infty$ и не сохраняет его на $\pm\infty$ (см. (7.8)). В этом пункте мы рассмотрим, следуя Ю. Чженю (Y. W. Chen [2]), модификацию дробного интегрирования Римана—Лиувилля, для которой левая и правая бесконечно удаленные точки равноправны.

Зафиксируем произвольную точку $c\in R^1$ и положим

$$(I_c^{\alpha}\varphi)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_c^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, & x>c,\\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^c \varphi(t)(t-x)^{\alpha-1}dt, & x<c,\end{cases} \tag{18.80}$$

где $\alpha>0$. Выражение (18.80) будем называть *дробным интегралом Чженя*. Конструкция (18.80) имеет очевидное преимущество в сравнении с $I_{+}^{\alpha}\varphi$ или $I_{-}^{\alpha}\varphi$: она применима к функции с любым поведением на бесконечности (ее можно рассматривать и на конечном отрезке $[a, b]$, $a<c<b$, при полном равноправии концов a и b).

Введя функции

$$P_{c+}\varphi=\varphi_{c+}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>c,\\ 0, & x<c,\end{cases}\qquad P_{c-}\varphi=\varphi_{c-}(x)=\begin{cases}0, & x>c,\\ \varphi(x), & x<c,\end{cases} \tag{18.81}$$

можно записать дробный интеграл (18.80) в виде

$$(I_c^{\alpha}\varphi)(x)=(I_{+}^{\alpha}\varphi_{c+})(x)+(I_{-}^{\alpha}\varphi_{c-})(x) \tag{18.82}$$

или в операторной форме

$$I_c^{\alpha}=I_{+}^{\alpha}P_{c+}+I_{-}^{\alpha}P_{c-}=P_{c+}I_{+}^{\alpha}P_{c+}+P_{c-}I_{-}^{\alpha}P_{c-}. \tag{18.83}$$

Из (18.82) в силу формул (2.44), (2.45) получаем

$$I_c^{\alpha}(|x-c|^{\beta-1})=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}|x-c|^{\alpha+\beta-1}. \tag{18.84}$$

Для функций $\varphi(t)$ с «достаточно хорошим» поведением на бесконечности, например для $\varphi(t)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\alpha$, интеграл $I_c^{\alpha}\varphi$ можно представить в виде

$$I_c^{\alpha}\varphi=\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\operatorname{sign}(t-c)\,dt. \tag{18.85}$$

Из (18.83) нетрудно заключить, что операторы I_c^{α} обладают полугрупповым свойством:

$$I_c^{\alpha}I_c^{\beta}\varphi=I_c^{\alpha+\beta}\varphi \tag{18.86}$$

(для любой локально интегрируемой функции $\varphi(t)$ и $\alpha>0$, $\beta>0$).

Рассмотрим вопрос об операторе, обратном к I_c^{α}, т. е. о соответствующей дробной производной. Формально имеем

$$(\mathcal{D}_c^{\alpha}f)(x)\overset{\text{def}}{=}(I_c^{\alpha})^{-1}f=\begin{cases}(\mathcal{D}_{c+}^{\alpha}f)(x), & x>c,\\ (\mathcal{D}_{c-}^{\alpha}f)(x), & x<c.\end{cases} \tag{18.87}$$

В частности,

$$(\mathscr{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_c^x f(t)\,(x-t)^{-\alpha}\,dt, & x>c,\\[2ex] -\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^c f(t)(t-x)^{-\alpha}\,dt, & x<c,\end{cases} \tag{18.88}$$

если $0<\alpha<1$. В случае $\alpha\geqslant 1$ следует воспользоваться равенствами (2.30), (2.31). Очевидно,

$$(\mathscr{D}_c^n f)(x)=[\operatorname{sign}(x-c)]^n f^{(n)}(x), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{18.89}$$

Обоснование обращения, т. е. равенство $\mathscr{D}_c^\alpha I_c^\alpha\varphi\equiv\varphi(x)$, $\alpha>0$, для $\varphi(x)\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^1)$ немедленно следует из теоремы 2.4.

Вспоминая выражение для дробных производных в форме Маршо, см. (13.2) и (13.5), из (18.88) получаем при $0<\alpha<1$:

$$(\mathscr{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)|x-c|^\alpha}+$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\min(x,\,c)}^{\max(x,c)}\frac{f(x)-f(t)}{|x-t|^{1+\alpha}}\,dt. \tag{18.90}$$

Переход от (18.88) к (18.90) возможен на «достаточно хороших» функциях (см. § 13, п. 1°). Обозначим через $(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)$ правую часть в формуле (18.90). Тогда на «достаточно хороших» функциях имеем

$$(\mathscr{D}_c^\alpha f)(x)=(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x). \tag{18.91}$$

Правой части $(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)$ можно придать также вид

$$(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f_{c+}(x-t)-f_{c-}(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt=$$

$$=\mathbf{D}_+^\alpha P_{c+}f+\mathbf{D}_-^\alpha P_{c-}f, \tag{18.92}$$

где $\mathbf{D}_\pm^\alpha$—дробное дифференцирование Маршо (5.57), (5.58) и использованы обозначения (18.81). В форме (18.92) производную $(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)$ можно записать и при $\alpha\geqslant 1$, используя конструкцию (5.80) дробных производных Маршо, приводящую к представлению

$$(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{1}{\varkappa(\alpha,\ l)}\int_0^\infty\frac{(\Delta_t^l f_{c+})(x)+(\Delta_{-t}^l f_{c-})(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{18.93}$$

где $l>\alpha$ и $\varkappa(\alpha,\ l)$ — нормировочный множитель (5.81).

Зададимся далее естественным вопросом о том, как влияет на дробное интегрирование Чженя разный выбор точки c. Различаются ли операции $I_c^\alpha\varphi$ и $I_d^\alpha\varphi$ своими функциональными свойствами? Более конкретно, если функция $f(x)$ представима дробным интегралом $f(x)=I_c^\alpha\varphi$ от функции φ из некоторого класса, например L_p, то представима ли она в виде $f(x)=I_d^\alpha\psi$, где $\psi\in L_p$? Ответ на этот вопрос дается ниже в теореме 18.3. Предварительно же в следующей лемме выясним возможность представления $I_c^\alpha\varphi$ в виде $I_c^\alpha\varphi=I_+^\alpha\psi$.

Лемма 18.1. *Пусть $f(x)$ представима в виде $f(x)=(I_c^\alpha\varphi)(x)$, где $\varphi(x)\in L_p(-\infty, b)$, $1<p<1/\alpha$, при какой-нибудь b. Тогда*

$$f(x)=I_+^\alpha\psi_c,\quad \psi_c(x)=N_c\varphi=v_c(x)\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{c}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,$$

$$-\infty<x<b, \tag{18.94}$$

где $v_c(x)=1$ при $x>c$ и $v_c(x)=\cos\alpha\pi$ при $x<c$, а $\psi_c(x)\in L_p(-\infty, b)$. Если $\varphi\in L_p(R^1)$, то и $\psi_c(x)\in L_p(R^1)$.

Доказательство. В равенстве (18.82) заменим I_-^α по формуле (11.10) с учетом (11.12) на I_+^α. Тогда получим $I_c^\alpha\varphi=I_+^\alpha(P_{c+}\varphi+\cos\alpha\pi P_{c-}\varphi+\sin\alpha\pi SP_{c-}\varphi)$, что совпадает с (18.94). Оператор $N_c=P_{c+}+\cos\alpha\pi P_{c-}+\sin\alpha\pi SP_{c-}$ ограничен в $L_p(R^1)$ согласно теореме 11.3. Лемма доказана.

Лемма 18.2. *Оператор*

$$N_c=P_{c+}+\cos\alpha\pi P_{c-}+\sin\alpha\pi SP_{c-} \tag{18.95}$$

обратим в $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, при этом

$$N_c^{-1}=P_{c+}+\cos\alpha\pi P_{c-}-\sin\alpha\pi S_\alpha^c P_{c-}, \tag{18.96}$$

где S_α^c—сингулярный оператор типа (11.39):

$$S_\alpha^c\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{t-c}{x-c}\right|^\alpha\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}. \tag{18.97}$$

Доказательство. Для простоты будем считать, что $c=0$, и запишем $P_{c\pm}=P_\pm$, $S_\alpha^c=S_\alpha$. Операторы (18.95), (18.96) имеют вид $N_0=P_++AP_-$, $N_0^{-1}=P_++BP_-$, где $A\varphi=\cos\alpha\pi\varphi+\sin\alpha\pi S\varphi$, $B\varphi=\cos\alpha\pi\varphi-\sin\alpha\pi S_\alpha\varphi$. Нужно показать, что

$$(P_++AP_-)(P_++BP_-)\varphi=(P_++BP_-)(P_++AP_-)\varphi=\varphi \tag{18.98}$$

для $\varphi(t)\in L_p(R^1)$. Между тем лемма 11.1 утверждает, что операторы A и B взаимно обратны в L_p на полуоси:

$$P_-AP_-BP_-\varphi=P_-BP_-AP_-\varphi=P_-\varphi,\quad \varphi\in L_p(R^1),\ 1<p<1/\alpha. \tag{18.99}$$

После перемножения в (18.98) с учетом (18.99) видим, что (18.98) сводится к выполнению равенств $P_+BP_-+P_+AP_-BP_-=0$, $P_+AP_-+P_+BP_-AP_-=0$. Подставляя сюда выражения операторов A и B, эти равенства приводим к виду

$$\sin\alpha\pi P_+SP_-S_\alpha P_-=\cos\alpha\pi P_+SP_--P_+S_\alpha P_-, \tag{18.100}$$

$$\sin\alpha\pi P_+S_\alpha P_-SP_-=P_+SP_--\cos\alpha\pi P_+S_\alpha P_-. \tag{18.101}$$

Выполнимость их проверяется непосредственным вычислением левых частей с помощью формулы Пуанкаре—Бертрана (11.9) (собственно говоря, формула (18.101) уже была получена нами ранее, см. равенство (11.47); можно заметить также, что (18.100) следует из (18.101), так как $r_\alpha P_+SP_-S_\alpha P_-=(P_+S-{}_\alpha P_-SP_-)r_\alpha$, где $r_\alpha\varphi=|x|^\alpha\varphi(x))$. Лемма доказана.

Теорема 18.4. *Пусть $f(x)$ представима в виде $f(x)=(I_c^\alpha\varphi)(x)$, $c\in R^1$, где $\varphi(x)\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^1)$, $p>1$, $p\neq 1/\alpha$, $0<\alpha<1$. Тогда $f(x)$ представима в виде*

$$f(x)=(I_d^\alpha\psi)(x),\quad 1<p<1/\alpha, \tag{18.102}$$

$$f(x)=f(d)+(I_d^\alpha\psi)(x),\quad p>1/\alpha, \tag{18.103}$$

при любом выборе точки d, где $\psi(x)\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^1)$ (если $\varphi\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, то $\psi\in L_p(R^1)$), при этом $\psi(x)$ вычисляются по формулам

$$\psi(x)=N_{cd}\varphi\overset{\text{def}}{=}\nu_{cd}(x)\,\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_c^d\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\quad 1<p<1/\alpha,\tag{18.104}$$

$$\psi(x)=\tilde N_{cd}\varphi\overset{\text{def}}{=}\nu_{cd}(x)\,\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\mu_{cd}(x)\int_c^d\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha-1}\times$$

$$\times\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\quad p>1/\alpha,\tag{18.105}$$

где

$$\nu_{cd}(x)=\begin{cases}\cos\alpha\pi, & x\in(c,\ d),\\ 1\ , & x\notin(c,\ d),\end{cases}\qquad \mu_{cd}(x)=\operatorname{sign}[(x-c)(c-d)].$$

Доказательство. Пусть вначале $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — две произвольные функции из $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$. Согласно лемме 18.1, имеем $I_c^\alpha\varphi=I_+^\alpha N_c\varphi$, $I_d^\alpha\psi=I_+^\alpha N_d\psi$, где операторы N_c, N_d строятся в виде (18.94) или, что то же самое, (18.95). Следовательно, требуемое равенство $I_c^\alpha\varphi=I_d^\alpha\psi$ будет достигнуто, если $N_c\varphi=N_d\psi$. Так как оператор N_d обратим в $L_p(R^1)$ при $1<p<1/\alpha$ согласно лемме 18.2, то $\psi=N_d^{-1}N_c\varphi$. Вычислим композицию $N_d^{-1}N_c$:

$$N_d^{-1}N_c\varphi=\varphi+N_d^{-1}(N_c-N_d)\,\varphi.\tag{18.106}$$

Очевидно, что $N_c-N_d=(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}+\sin\alpha\pi SP_{cd}$, где

$$P_{cd}\varphi=\begin{cases}\varphi(x), & x\in(d,\ c),\\ 0, & x\notin(d,\ c)\end{cases}$$

для определенности считаем, что $d<c$). Поэтому

$$N_d^{-1}(N_c-N_d)=(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}+\sin\alpha\pi P_{d+}SP_{cd}+$$
$$+\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi P_{d-}SP_{cd}-\sin^2\alpha\pi S_\alpha^d P_{d-}SP_{cd}.\tag{18.107}$$

Вычисление композиции $S_\alpha^d P_{d-}SP_{cd}$ по формуле Пуанкаре — Бертрана (11.9) с учетом формулы (11.46) дает после простых преобразований

$$\sin\alpha\pi S_\alpha^d P_{d-}SP_{cd}=P_{d+}SP_{cd}+\cos\alpha\pi P_{d-}SP_{cd}-S_\alpha^d P_{cd},$$

что после подстановки в (18.107) приводит к выражению $N_d^{-1}(N_c-N_d)=(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}+\sin\alpha\pi\,S_\alpha^d P_{cd}$. Тогда из (18.101) имеем

$$\psi=N_d^{-1}N_c\varphi=\varphi+(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}\varphi+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_d^c\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

что совпадает с (18.104).

Итак, доказано тождество

$$I_c^\alpha\varphi=I_d^\alpha N_{cd}\varphi,\tag{18.108}$$

т. е. тождество (18.102), (18.104) для $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$. Так как операторы I_c^α и I_d^α имеют переменные верхний и нижний пределы интегрирования, а оператор N_{cd} ограничен, согласно теореме 11.3, в L_p

на любом конечном отрезке, тождество (18.103) верно и для $\varphi \in L_p^{\mathrm{loc}}$ (функцию $\varphi \in L_p^{\mathrm{loc}}$ можно приблизить функциями из $L_p(R^1)$ по норме L_p на любом конечном интервале).

Остается случай $p > 1/\alpha$. Ввиду вложения $L_p^{\mathrm{loc}} \subset L_r^{\mathrm{loc}}$, $r < 1/\alpha$, представление (18.102) с функцией (18.104) по-прежнему имеет место, однако нельзя утверждать, что $\psi \in L_p$, поскольку оператор N_{cd} не ограничен в L_p при $\alpha > 1/p$. Поэтому функцию (18.104) преобразуем к другому виду. Пусть для определенности $d < c$. Тогда при $t > d$ имеем $\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha} = \operatorname{sign}(x-d)\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha-1} + \frac{|t-d|^{\alpha-1}}{|x-d|^{\alpha}}(t-x)$, что проверяется непосредственно. Поэтому $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{1}{|x-d|^{\alpha}} \int_d^c (t-d)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt$. А так как $\int_d^c (t-d)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt = f(d)\,\Gamma(\alpha)$ (заметим, что $f(x)$ непрерывна при $p > 1/\alpha$), то отсюда

$$I_d^{\alpha} \psi = I_d^{\alpha} \tilde{\psi} + \frac{f(d)}{\Gamma(1-\alpha)} I_d^{\alpha}(|x-d|^{-\alpha}) = I_d^{\alpha} \tilde{\psi} + f(d)$$

в силу (18.84). Тем самым из (18.102) получено (18.103). Остается заметить, что оператор (18.105) ограничен в L_p, $p > 1/\alpha$, согласно теореме 11.3. Теорема доказана.

6°. Обобщенный дробный интеграл Джрбашяна. Рассмотрим случай отрезка $[0, 1]$. Дробный интеграл Римана—Лиувилля можно записать в виде

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \varphi(xt)(1-t)^{\alpha-1} dt, \quad x > 0. \tag{18.109}$$

Обобщим конструкцию (18.109), заменив функцию $\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ произвольной (интегрируемой) функцией, отвлекаясь от множителя x^{α}. Именно, следуя Ж. Адамару (J. Hadamard [1]) и М. М. Джрбашяну [4, 5], введем оператор

$$(L^{(\omega)}\varphi)(x) = -\int_0^1 \varphi(xt)\,\omega'(t)\, dt, \tag{18.110}$$

где функция $\omega(x) \in C([0, 1])$ удовлетворяет условиям:

1) $\omega(x)$ монотонна,

2) $\omega(0) = 1$, $\omega(1) = 0$, $\omega(x) \neq 0$ при $0 < x < 1$,

3) $\omega'(x) \in L_1(0,1)$.

При условии 3) оператор (18.110) определен на ограниченных функциях $\varphi(x)$.

Если $\omega(t) = \frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, то очевидно, $(L^{(\omega)}\varphi)(x) = x^{-\alpha}(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)$.

Заметим, что интегрированием по частям равенство (18.110) приводится к виду $(L^{(\omega)}\varphi)(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xt)\,\omega(t)\, dt$ для непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$.

Конструкция (18.110) хорошо приспособлена к степенным функциям:

$$L^{(\omega)}(x^{\mu}) = \Delta_{\omega}(\mu)\, x^{\mu}, \quad \mu > -1, \tag{18.111}$$

где $\Delta_\omega(\mu) = -\int_0^1 t^\mu \omega'(t)\,dt$, а в случае $\mu > 0$

$$\Delta_\omega(\mu) = \mu \int_0^1 t^{\mu-1}\omega(t)\,dt. \tag{18.112}$$

Поэтому на функциях $\varphi(t)$, представимых степенным рядом

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \tag{18.113}$$

действие оператора $L^{(\omega)}$ дается равенством

$$(L^{(\omega)}\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_\omega(k)\, a_k x^k. \tag{18.114}$$

Следующая лемма обобщает утверждение леммы 15.4.

Лемма 18.3. *Радиусы сходимости рядов (18.113), (18.114) совпадают.*

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\Delta_\omega(k)} = 1. \tag{18.115}$$

Ввиду (18.112) имеем

$$k(1-\varepsilon)^{k-1} \int_{1-\varepsilon}^{1} \omega(t)\,dt \leqslant \Delta_\omega(k) \leqslant k \int_0^1 \omega(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

для любого $\varepsilon > 0$. Учитывая условия 1), 2), получаем $1-\varepsilon \leqslant \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\Delta_\omega(k)} \leqslant 1$, откуда ввиду произвола ε следует (18.115). Лемма доказана.

Равенство (18.111) показывает, как должно быть введено обобщенное дифференцирование $M^{(\omega)}$, обратное к $L^{(\omega)}$: $M^{(\omega)}L^{(\omega)}\varphi = L^{(\omega)}M^{(\omega)}\varphi$. Очевидно, $M^{(\omega)}$ должно вводиться так, чтобы $M^{(\omega)}(x^\mu) = \dfrac{1}{\Delta_\omega(\mu)}\, x^\mu$.

Мы ограничимся утверждением, что в работе М. М. Джрбашяна [5] показано, что для каждой функции $\omega(t)$ существует неубывающая ограниченная функция $\alpha_\omega(x)$, такая, что

$$\int_0^1 x^\mu d\alpha_\omega(x) = \frac{1}{\Delta_\omega(\mu)}, \quad (M^{(\omega)}\varphi)(x) = \int_0^1 \varphi(xt)\,d\alpha_\omega(t).$$

Замечание 18.2. М. М. Джрбашян [4, 5] рассматривал операторы $L^{(\omega)}\varphi$ в более общем виде

$$L^{(\omega)}\varphi = -\frac{d}{dx}\left\{x \int_0^1 \varphi(xt)\,dp(t)\right\}, \quad p(t) = t\int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,$$

с менее ограничительными предположениями относительно $\omega(t)$, чем указаны в 1)—3). Мы же для простоты ограничились оператором $L^{(\omega)}$ в виде (18.110).

§ 19. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕЙЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обычная форма I_{a+}^{α} или I_{b-}^{α} дробного интегрирования по Риману—Лиувиллю оказывается неудобной в теории тригонометрических рядов, имеющей дело с периодическими функциями. Естественно, что для периодических функций операция дробного интегродифференцирования должна быть введена так, чтобы она переводила их в периодические (с тем же периодом). Дробное интегродифференцирование по Риману—Лиувиллю этим свойством не обладает. В теории тригонометрических рядов пользуются другим определением дробного интегродифференцирования, предложенным Г. Вейлем. Оно и будет рассмотрено в этом параграфе.

1°. Определения. Связь с рядами Фурье. Пусть $\varphi(x)$ есть 2π-периодическая функция на R^1 и пусть

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}, \quad \varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \varphi(x)\, dx, \tag{19.1}$$

—ее ряд Фурье. Всюду в этом параграфе будут рассматриваться функции с нулевым средним значением по периоду:

$$2\pi\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0, \tag{19.2}$$

т. е. мы «отсеиваем» постоянные, рассматривая дробные интегралы периодических функций. Напомним, что свертка

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)\, \varphi(x-t)\, dt \tag{19.3}$$

двух периодических функций имеет своим рядом Фурье

$$(A\varphi)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi_k e^{ikx}, \tag{19.4}$$

где a_k, φ_k — коэффициенты Фурье функций $a(x)$, $\varphi(x)$. Последовательность $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется иногда *мультипликатором Фурье оператора свертки* A.

Так как $\varphi^{(n)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^n \varphi_k e^{ikx}$, то определим, следуя Г. Вейлю, дробное интегрирование так, чтобы

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{(\pm ik)^{\alpha}} e^{ikx} \tag{19.5}$$

(с учетом (19.2)) и аналогично чтобы для дробного дифференцирования

$$\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm ik)^{\alpha} \varphi_k e^{ikx} \tag{19.6}$$

(ср. с формулами (7.1), (7.4)). Тем самым будет соблюдено требование, чтобы дробный интеграл или производная 2π-периодической функции были также 2π-периодическими функциями. Здесь в соответствии с (7.3) $(\pm ik)^{\alpha} = |k|^{\alpha} e^{\pm \frac{\alpha\pi i}{2} \operatorname{sign} k}$. Согласно (19.3), (19.4), определение (19.5) можно истолковать в виде

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\Psi_{\pm}^{\alpha}(t)\,dt, \quad \alpha > 0, \tag{19.7}$$

где

$$\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^{\alpha}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}} \tag{19.8}$$

(штрих означает пропуск слагаемого с номером $k=0$). Конструкцию (19.7) и будем называть *дробным интегралом Вейля порядка* α. Известно (А. Зигмунд [2, с. 201]), что ряд (19.8) сходится при $\alpha>0$ для всех $t\in[0, 2\pi]$. Функция $\Psi_{\pm}^{\alpha}$ может быть выражена через обобщенную дзета-функцию Римана (1.87)

$$\Gamma(\alpha)\,\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = (2\pi)^{\alpha}\zeta(1-\alpha,\ \pm t/(2\pi)), \quad 0<t<2\pi, \tag{19.9}$$

согласно формуле Гурвица (1.88). В неявном виде равенство (19.9) содержится также в доказываемом ниже равенстве (19.11). При целых $\alpha=1, 2, \ldots$ функция $\Psi_{\pm}^{\alpha}(t)$ может быть записана в силу (1.89) в виде

$$\Psi_{\pm}^{m}(t) = -\frac{(\pm 2\pi)^m}{m!} B_m\left(\frac{t}{2\pi}\right), \quad 0<t<2\pi, \tag{19.10}$$

где $B_m(t)$ — многочлен Бернулли.

Ввиду (19.5) ясно, что $I_{\pm}^{(\alpha)} I_{\pm}^{(\beta)}\varphi = I_{\pm}^{(\alpha+\beta)}\varphi$ при одинаковом выборе знаков. Заметим, что случаи целых $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ отвечают обычному интегрированию (при котором из всех первообразных выбирается та, у которой среднее значение по периоду равно нулю: это позволяет сохранить периодичность при интегрировании), поскольку ряд Фурье допускает почленное интегрирование. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать случай $0<\alpha<1$.

Остановимся подробнее для определенности на «левостороннем» дробном интеграле $I_{+}^{(\alpha)}\varphi$ (заметим, что $\Psi_{-}^{\alpha}(t) = \Psi_{+}^{\alpha}(t)$).

Лемма 19.1. *Функция* $\Psi_{+}^{\alpha}(t)$ *имеет при* $0<\alpha<1$ *вид*

$$\Psi_{+}^{\alpha}(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} t_{+}^{\alpha-1} + r_{\alpha}(t), \quad -2\pi < t \leqslant 2\pi, \tag{19.11}$$

где функция

$$r_{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty}\left[2\pi\sum_{m=1}^{n}(t+2\pi m)^{\alpha-1} - \frac{(2\pi n)^{\alpha}}{\alpha}\right] \tag{19.12}$$

бесконечно дифференцируема при $t\in(-2\pi, 2\pi]$.

Доказательство. Обозначим

$$G(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}(t+2\pi m)_{+}^{\alpha-1} - (2\pi)^{\alpha-1}\frac{n^{\alpha}}{\alpha}\right], \tag{19.13}$$

так что нужно доказать, что $G(t)\equiv\Psi_{+}^{\alpha}(t)$ при $-2\pi<t\leqslant 2\pi$. Для этого достаточно показать в соответствии с (19.8), что коэффициенты Фурье функции $G(t)$ совпадают с $(ik)^{-\alpha}$:

$$G_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t)\,e^{-ikt}\,dt = (ik)^{-\alpha}. \tag{19.14}$$

Доказательство этого основывается на формуле

$$G(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t+2\pi m), \tag{19.15}$$

где функция $g(t)$ определяется равенством $g(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}\left[t_+^{\alpha-1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi m}^{2(m+1)\pi} s_+^{\alpha-1}\,ds\right]$ при $2\pi m \leqslant t < 2(m+1)\pi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$

Равенство (19.15) проверяется непосредственно с учетом того, что $(2\pi)^{\alpha-1}n^\alpha/\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2n\pi} t^{\alpha-1}dt$, и того, что $\int\limits_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} t^{\alpha-1}dt \to 0$ при $n \to \infty$.

Функция $g(t)$ абсолютно интегрируема по R^1. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\left|t^{\alpha-1} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} s^{\alpha-1}\,ds\right|dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\left|\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}[t^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}]\,ds\right|dt.$$

Применяя теорему о среднем (при $m \geqslant 1$), получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt \leqslant$ $\leqslant c_1 + c_2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\xi^{\alpha-2}\,d\xi \leqslant c_1 + c_3\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-2} < \infty$, поскольку $\xi = \xi_{\text{ср}} \in$ $\in (2m\pi,\ 2m\pi + 2\pi)$. Из абсолютной интегрируемости $g(t)$ и равенства $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}|g(t+2m\pi)|\,dt = \int\limits_0^{\infty}|g(t)|\,dt$ следует, что ряд (19.15) является абсолютно сходящимся почти для всех t (воспользовались тем, что сходимость ряда $\Sigma\int\limits_a^b |f_m(t)|\,dt$ влечет сходимость почти всюду ряда $\Sigma|f_m(t)|$; см. А. Зигмунд [1, с. 49]).

Известно (А. Зигмунд [1, с. 116]), что коэффициенты Фурье суммы $G(t)$ ряда вида (19.15) совпадают с преобразованием Фурье функции $g(t)$ в точках $k = 0, \pm 1, \ldots$, т. е. $G_k = \tilde{g}(k)$, где $\tilde{g}(x)$ — преобразование Фурье (1.104). Следовательно, $G_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}g(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\left[t^{\alpha-1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} s_+^{\alpha-1}\,ds\right]e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ikt}dt$, $k \neq 0$, с учетом того, что интеграл по периоду от e^{-ikt} равен нулю при $k \neq 0$. Используя значение оставшегося интеграла, вычисленное в (7.6), мы и получаем (19.14). Остается добавить, что бесконечная дифференцируемость функции $r_\alpha(t)$ при $-2\pi < t \leqslant 2\pi$ усматривается из (19.12), при этом $r_\alpha^{(j)}(t) =$ $= c_j\sum\limits_{m=1}^{\infty}(t+2m\pi)^{\alpha-1-j}$, где c_j — постоянная, $j \geqslant 1$.

Следствие. *Функции $\Psi_\pm^\alpha(t)$ и их производные допускают при $|t| \leqslant \pi$ оценку*

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}\Psi_\pm^\alpha(t)\right| \leqslant c|t|^{\alpha-1-j},\quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{19.16}$$

В силу леммы 19.1 и следствия из нее определение дробного интеграла Вейля равенством (19.7) корректно в том смысле, что оно применимо к любой интегрируемой функции, интеграл существует почти всюду и дает также интегрируемую функцию (ясно также, что $I_\pm^{(\alpha)}\varphi$—непрерывная функция, если $\varphi(t)$ непрерывна).

Ввиду (19.11) получаем

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_\alpha(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad 0<x\leqslant 2\pi.$$

Здесь второе слагаемое бесконечно дифференцируемо при $0<x<2\pi$, так что дробный интеграл Вейля (19.7) отличается от дробного интеграла Римана—Лиувилля $I_{0+}^{\alpha}\varphi$ (первое слагаемое) несущественно с точки зрения дифференциальных свойств, если иметь в виду внутренние точки интервала $(0, 2\pi)$. Поведение второго слагаемого на концах $x=0$, $x=2\pi$, вообще говоря, такое же, как и первого.

Дробную производную по Вейлю естественно определить при $0<\alpha<1$ равенством

$$\mathscr{D}_\pm^{(\alpha)} f = \pm\frac{d}{dx} I_\pm^{(1-\alpha)} f \tag{19.17}$$

в соответствии с (19.6). В периодическом случае удобным является и некоторый другой подход к определению дробной производной—через конечные разности дробного порядка, см. об этом в следующем параграфе.

Дробную производную (19.17) можно назвать *производной Вейля—Лиувилля* в сравнении с выражением

$$\mathbf{D}_\pm^{(\alpha)} f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x-t)-f(x)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_\pm^{1-\alpha}(t)\,dt, \tag{19.18}$$

которое можно было бы назвать в этом плане *производной Вейля—Маршо* (ср. с (5.57), (5.58)). Выражение (19.18) получается из (19.17) формальным дифференцированием под знаком интеграла с последующим интегрированием по частям.

Лемма 19.2. *Дробные производные (19.17) и (19.18) совпадают на функциях* $f(x)\in H^\lambda([0,\ 2\pi])$, $\lambda>\alpha$: $\mathscr{D}_\pm^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_\pm^{(\alpha)} f$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$. Тогда

$$\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{2\pi} \Psi_+^{1-\alpha}(t)\,d\,[F(x)-F(x-t)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\left\{\Psi_+^{1-\alpha}(t)\,[F(x)-F(x-t)]\Big|_0^{2\pi} - \right.$$

$$\left. -\int_0^{2\pi} [F(x)-F(x-t)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_+^{1-\alpha}(t)\,dt\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} [F'(x)-F'(x-t)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_+^{1-\alpha}(t)\,dt = \mathbf{D}_+^{(\alpha)} f,$$

где все переходы легко обосновываются для $f(x)\in H^\lambda$, $\lambda>\alpha$, с учетом свойства (19.16).

2°. Простейшие свойства дробного интеграла Вейля. Справедлива следующая

Лемма 19.3. *На 2π-периодических функциях $\varphi(t)\in L_1(0,2\pi)$ с нулевым средним значением (19.2) дробный интеграл Вейля совпадает с дробным интегралом Римана—Лиувилля по всей прямой:*

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = I_+^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad 0<\alpha<1, \tag{19.19}$$

где интеграл справа понимается как условно сходящийся:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbf{Z}^+}} \int_{x-2n\pi}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{19.20}$$

Справедливо также представление абсолютно сходящимся интегралом:

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \varphi(x-t)\left\{t^{\alpha-1} - \left(2\pi\left[\frac{t}{2\pi}\right]\right)^{\alpha-1}\right\} dt. \tag{19.21}$$

Доказательство. Так как предел в (19.12) равномерен по $t\in[0,\ 2\pi]$, то из (19.11)

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\left[\sum_{k=0}^{n} (t+2\pi k)^{\alpha-1} - \frac{(2\pi)^{\alpha-1} n^{\alpha}}{\alpha}\right] dt.$$

Учитывая (19.2) и периодичность функции $\varphi(t)$, имеем $I_+^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_{2\pi k}^{2(k+1)\pi} \varphi(x-t)t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{2(n+1)\pi} \varphi(x-t)\,t^{\alpha-1}dt,$ что ввиду (19.20) и дает (19.19). Для получения (19.21) достаточно заметить, что $\int\limits_{2\pi k}^{2(k+1)\pi} \varphi(x-t)\,(2\pi k)^{\alpha-1}\,dt = 0$ для всех $k = [t/2\pi] = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Следует подчеркнуть, что толкование интеграла в (19.19) в смысле (19.20) вызвано существом дела, а его сходимость связана с обращением в нуль среднего значения по периоду функции $\varphi(t)$.

Между дробными интегралами $I_+^{(\alpha)}\varphi$ и $I_-^{(\alpha)}\varphi$ существует связь типа (11.10), (11.11). Именно введем сингулярный оператор с ядром Гильберта

$$H\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dt \tag{19.22}$$

(понимаемый в смысле главного значения), связывающий, как известно (А. Зигмунд [1, с. 88]), сопряженные тригонометрические ряды:

$$\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx},\quad H\varphi \sim -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} k\,\varphi_k e^{ikx}. \tag{19.23}$$

Теорема 19.1. *Для $\varphi(t)\in L_p(0,\ 2\pi)$, $1<p<\infty$, выполняются следующие соотношения:*

$$I_-^{(\alpha)}\varphi = \cos\alpha\pi I_+^{(\alpha)}\varphi + \sin\alpha\pi\, HI_+^{(\alpha)}\varphi, \tag{19.24}$$

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = \cos\alpha\pi I_-^{(\alpha)}\varphi - \sin\alpha\pi HI_-^{(\alpha)}\varphi. \tag{19.25}$$

Доказательство. Известно, что сингулярный оператор H ограничен в $L_p(0,\ 2\pi)$, $1<p<\infty$ (теорема Рисса, см., например, книгу Н. К. Бари [1, с. 566] или А. Зигмунда [1, с. 404]). Операторы $I_{\pm}^{(\alpha)}$ также ограничены в $L_p(0,\ 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$ (это вытекает из того, что $\Psi_{\pm}^{\alpha}(t)\in L_1$). Поэтому (19.24), (19.25) достаточно проверить на плотном в $L_p(0,\ 2\pi)$ множестве бесконечно дифференцируемых функций. На таких функциях дробное интегрирование действует по правилу (19.5), так что вместо (19.24) достаточно с учетом (19.23) доказать равенство $\frac{1}{(-ik)^{\alpha}} = \frac{\cos\alpha\pi}{(ik)^{\alpha}} + \frac{\sin\alpha\pi\,(-i\operatorname{sign} k)}{(ik)^{\alpha}}$, которое очевидно. Аналогично проверяется (19.25).

3°. Другие формы дробного интегрирования периодических функций. Можно ввести для периодических функций аналог риссова потенциала (12.1). Отправляясь от (12.23), мы должны ввести его так, чтобы

$$I^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi_k}{|k|^\alpha} e^{ikx}. \tag{19.26}$$

Так как $|k|^{-\alpha} = \dfrac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}[(ik)^\alpha + (-ik)^\alpha]$, то $I^{(\alpha)}\varphi$ можно ввести как свертку:

$$I^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\Psi^\alpha(t)\,dt, \tag{19.27}$$

где

$$\Psi^\alpha(t) = \frac{\Psi_+^\alpha(t) + \Psi_-^\alpha(t)}{2\cos(\alpha\pi/2)} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^\alpha}. \tag{19.28}$$

Так же как и дробное интегрирование (19.7) по Вейлю, оператор (19.27) типа потенциала Рисса обладает полугрупповым свойством: $I^{(\alpha)}I^{(\beta)} = I^{(\alpha+\beta)}$, что очевидным образом усматривается из (19.26).

Из связей (19.24), (19.25) вытекает после простых преобразований следующая связь оператора $I^{(\alpha)}$ с дробным интегрированием $I_+^{(\alpha)}$:

$$I^{(\alpha)}\varphi = \cos(\alpha\pi/2)\,I_+^{(\alpha)}\varphi + \sin(\alpha\pi/2)\,I_+^{(\alpha)}H\varphi, \tag{19.29}$$

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = \cos(\alpha\pi/2)\,I^{(\alpha)}\varphi - \sin(\alpha\pi/2)\,I^{(\alpha)}H\varphi, \tag{19.30}$$

где $\varphi(x) \in L_p(0,\ 2\pi)$, $p > 1$.

Можно пойти дальше и называть оператором дробного интегрирования порядка α всякий оператор свертки (19.3), для которого

$$a_k \sim \frac{c}{|k|^\alpha} \text{ при } |k| \to \infty \tag{19.31}$$

(с различными, вообще говоря, значениями постоянной c при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$). Операторы $I_\pm^{(\alpha)}$, $I^{(\alpha)}$ являются примерами таких операторов. Они обладают полугрупповым свойством, но имеют тот «недостаток», что являются свертками с неэлементарными функциями. Можно, наоборот, указать свертки с элементарными функциями со свойством типа (19.31), но без полугруппового свойства. Так, например, для оператора $I_1^{(\alpha)}\varphi = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{[\sin(x-\xi)]_+^{1-\alpha}}$, где $t_+^{\alpha-1}$ понимается как обычно, см. (5.5), имеем с учетом формулы 2.5.12.36 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1]:

$$I_1^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\varphi_k e^{ikx}, \quad a_k = \frac{e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} + (-1)^k e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2^{1+\alpha}\pi}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k+1+\alpha}{2}\right)}. \tag{19.32}$$

Здесь условие (19.31) выполнено в силу (1.66). Однако из (19.32) видно, что полугрупповое свойство не выполняется.

Отметим еще двупараметрическое семейство операторов дробного интегрирования

$$I_{\mu}^{(\alpha)}\varphi = \int_0^{2\pi} K_{\alpha,\mu}(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$K_{\alpha,\mu}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx - \mu\pi/2)}{k^{\alpha}}$$

(такие операторы широко используются в вопросах приближения периодических функций, см. литературные указания в § 23, пп. 1 и 2°, 19.6). Простыми преобразованиями получается формула

$$K_{\alpha,\mu}(x) = \frac{\sin[(\mu+\alpha)\pi/2]}{\sin\alpha\pi}\,\Psi_{+}^{(\alpha)}(x) + \frac{\sin[(\alpha-\mu)\pi/2]}{\sin\alpha\pi}\,\Psi_{-}^{(\alpha)}(x),$$

так что оператор $I_{\mu}^{(\alpha)}$ является линейной комбинацией операторов дробного интегрирования Вейля:

$$I_{\mu}^{(\alpha)}\varphi = \frac{\sin[(\mu+\alpha)\pi/2]}{\sin\alpha\pi}\,I_{+}^{(\alpha)}\varphi + \frac{\sin[(\alpha-\mu)\pi/2]}{\sin\alpha\pi}\,I_{-}^{(\alpha)}\varphi$$

(здесь усматривается явная аналогия с потенциалами Феллера, которые мы рассматривали в непериодическом случае в § 12, см. равенства (12.10), (12.13)). Очевидно, что $I_{\alpha}^{(\alpha)} = I_{+}^{\alpha}$, $I_{-\alpha}^{(\alpha)} = I_{-}^{(\alpha)}$.

4°. Совпадение дробной производной Вейля с дробной производной Маршо. Из леммы 19.3 и определения (19.17) вытекает, что дробная производная Вейля (19.17) совпадает с дробной производной Римана—Лиувилля:

$$\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1, \tag{19.33}$$

при условии, что $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ и интеграл в (19.33) понимается в смысле (19.20). Таким образом, дробное интегродифференцирование по Вейлю совпадает с дробным интегродифференцированием Римана—Лиувилля от периодически продолженной на всю прямую функции при надлежащем толковании неабсолютно сходящегося интеграла. Покажем, что если пользоваться формой Вейля—Маршо (19.18) дробного дифференцирования, то отпадает необходимость в условной сходимости интеграла на бесконечности. Докажем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x-t)-f(x)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\,dt \equiv \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \tag{19.34}$$

для 2π-периодических функций $f(x)$, т. е.

$$\mathbf{D}_{+}^{(\alpha)}f \equiv \mathbf{D}_{+}^{\alpha}f. \tag{19.35}$$

Хотя в (19.34) оба интеграла должны пониматься, вообще говоря, как условно сходящиеся в окрестности $t=0$, для нас важно то, что интеграл в правой части является «хорошим» на бесконечности: он сходится при $t\to\infty$ без требования, чтобы $\int_0^2 f(t)\,dt = 0$, и является при $t\to\infty$, вообще говоря, абсолютно сходящимся.

Для точного толкования равенства (19.34) введем соответствующую «усеченную» дробную производную

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi} [f(x-t) - f(x)] \frac{d}{dt} \Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\, dt \tag{19.36}$$

и пусть $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ — знакомое нам по (5.59) усечение правой части в (19.34). Отметим, что $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ является 2π-периодической функцией, если $f(x)$ такова.

Лемма 19.4. *Пусть* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Усеченные дробные производные* $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f$ *и* $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ *сходятся (почти для всех* x *или по норме* $L_p(0, 2\pi)$*) одновременно и*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f. \tag{19.37}$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f - a_\varepsilon f(x) + \int_0^{\infty} b_\varepsilon(t) f(x-t)\, dt, \tag{19.38}$$

где постоянная a_ε есть сумма ряда $a_\varepsilon = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum\limits_{m=1}^{\infty} [(2m\pi)^{-\alpha} - (2\pi m + \varepsilon)^{-\alpha}]$, а функция $b_\varepsilon(t)$ определяется условиями: $b_\varepsilon(t) = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-1-\alpha}$ при $2m\pi \leqslant t < 2\pi m + \varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$, и $b_\varepsilon(t) = 0$ вне этих интервалов. Тождество (19.38) получается из (19.36) непосредственными преобразованиями, сходными с действиями при доказательстве леммы 19.3, с учетом того, что $\dfrac{d}{dt}\Psi_{+}^{1-\alpha}(t) = -\dfrac{2\pi\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \sum\limits_{m=0}^{\infty} (t+2m\pi)^{-\alpha-1}$, $0 < t < 2\pi$, согласно (19.11), (19.12).

Очевидно, $a_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Далее, $b_\varepsilon(t) \in L_1(0, \infty)$ и $\int\limits_0^{\infty} b_\varepsilon(t)\, dt = a_\varepsilon \to 0$. Поэтому в (19.38) второе и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю (как почти всюду, так и по норме $L_p(0, 2\pi)$), что и доказывает лемму.

Замечание 19.1. Пределы (19.37) заведомо существуют на функциях $f(x) \in H^{\lambda}$, $\lambda > \alpha$ (или $f(x) \in H_p^{\lambda}$, $\lambda > \alpha$, см. об этом ниже, в п. 5°). Заметим также, что на таких функциях все три обсуждаемые формы дробной производной совпадают:

$$\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_{+}^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_{+}^{\alpha} f. \tag{19.39}$$

Второе из этих равенств вытекает из леммы 19.4, первое установлено выше, см. лемму 19.2.

5°. Представимость периодических функций дробным интегралом Вейля. Пусть $f(x)$—2π-периодическая функция, $x \in R^1$. Покажем, что сходимость по норме $L_p(0, 2\pi)$ усеченной дробной производной Маршо

$$(\mathbf{D}_{\varepsilon}^{\alpha} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad 0 < x < 2\pi, \tag{19.40}$$

равносильна представимости функции $f(x)$ дробным интегралом Вейля от функции из $L_p(0, 2\pi)$. Именно справедлива следующая

Теорема 19.2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для* $f \in X_{2\pi}$, *где* $X_{2\pi} = L_p(0, 2\pi)$ $1 \leqslant p < \infty$, *или* $X_{2\pi} = C(0, 2\pi)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует функция* $\varphi(x) \in X_{2\pi}$ *такая, что* $\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon} f - \varphi\|_{X_{2\pi}} \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} 0$;

2) $f(x) = f_0 + I^{(\alpha)}_{+}\varphi$, *где* $\varphi \in X_{2\pi}$ *и* $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$. *При* $X_{2\pi} = L_p(0, 2\pi)$ *эти утверждения эквивалентны также следующему:*

3) $\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon} f\|_p \leqslant c$, *где* c *не зависит от* ε.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $f_0 = 0$. Пусть выполнено 2). Тогда $f(x) = I^{\alpha}_{+}\varphi$ в силу леммы 19.3 с условно сходящимся интегралом $I^{\alpha}_{+}\varphi$. Воспользуемся построениями § 6, где показано, что для разности $f(x) - f(x-t)$ функции $f(x) = I^{\alpha}_{+}\varphi$ справедливо представление (6.9) (уже с абсолютно сходящимся интегралом). В силу этого представления справедлива формула (6.6):

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon} f)(x) = \int\limits_0^{\infty} \mathcal{K}(t)\,\varphi(x - \varepsilon t)\,dt \tag{19.41}$$

с ядром $\mathcal{K}(t) \in L_1(0, \infty)$ (легко видеть, что хотя эта формула выводилась для $\varphi(x) \in L_1(R^1)$, она верна и для 2π-периодической функции $\varphi(x) \in X_{2\pi}$ в силу того, что $\mathcal{K}(t) \in L_1(R^1)$). Учитывая (6.8), мы и получаем из (19.41) утверждения 1) и 3) теоремы.

Пусть теперь выполнено 1). Воспользуемся представлением (6.23)

$$A_h \mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon} f = \int\limits_0^{\infty} \mathcal{K}(t)\,[f(x - \varepsilon t) - f(x - h - \varepsilon t)]\,dt, \quad \text{где } A_h \text{ — оператор} \tag{6.22}$$

(также непосредственным анализом убеждаемся в том, что это представление имеет место в нашем 2π-периодическом случае). Рассуждая, как и в § 6, п. 3° (см. выкладки после равенства (6.23), в которых нужно заменить $L_q(R^1)$-сходимость на сходимость $X_{2\pi}$), получаем $f(x) - f(x-h) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} [(I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon)(x) - (I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon)(x-h)]$, где $\varphi_\varepsilon(x) = \mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon} f$. Здесь уже интеграл $I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon$ от периодической функции φ_ε существует в смысле (19.20) $\left(\text{мы учитываем, что } \int\limits_0^{2\pi} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 0\right)$. Так как две 2π-периодические функции, имеющие тождественно совпадающие разности, различаются лишь на постоянную, то с учетом того, что $h = 0$,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} I^{(\alpha)}_{+}\varphi_\varepsilon = I^{(\alpha)}_{+}\left(\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon\right), \tag{19.42}$$

где предел берется по норме $L_p(0, 2\pi)$. Равенство (19.42) и дает утверждение 2).

В случае, если выполнено 3), рассуждения также аналогичны выкладкам, приведенным в § 6, п. 3°. Теорема доказана.

Заметим в заключение, что $I^{(\alpha)}_{+}[L_p(0, 2\pi)] = I^{(\alpha)}_{-}[L_p(0, 2\pi)]$ при всех $1 < p < \infty$ и $\alpha > 0$. Это вытекает из тождеств (19.24), (19.25) в силу того, что оператор H коммутирует с $I^{(\alpha)}_{+}$, $I^{(\alpha)}_{-}$ и ограничен в L_p. Из 19.29), (19.30) вытекает также, что $I^{(\alpha)}_{+}(L_p) = I^{(\alpha)}(L_p)$ при $p > 1$. Поэтому имеем

$$I^{(\alpha)}(L_p) = I^{(\alpha)}_{+}[L_p(0, 2\pi)] = I^{(\alpha)}_{-}[L_p(0, 2\pi)], \tag{19.43}$$
$$1 < p < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Замечание 19.2. Теорема 19.2 дает описание пространства $I^{(\alpha)}(L_p)$ в терминах левостороннего либо правостороннего усеченного дробного дифференцирования Маршо в случае $0 < \alpha < 1$. Ее можно

распространить на случай произвольных $\alpha>0$, если воспользоваться соответствующей конструкцией (5.80) дробной производной Маршо. Именно пусть

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f=\frac{1}{\varkappa(\alpha,\ l)}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(\Delta^{l}_{t}f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt,\quad \alpha>0, \tag{19.44}$$

где $l>\alpha$ и постоянная $\varkappa(\alpha,\ l)$ указана в (5.81). Тогда теорема 19.2 справедлива для любого $\alpha>0$, если $\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}$ в ее формулировке означает конструкцию (19.44) с выбором $l>\alpha$. Доказательство этого мы не приводим. Соответствующий непериодический аналог такого утверждения дан нами в случае функций многих переменных в § 27.

Завершим этот пункт следующей простой теоремой.

Теорема 19.3. *Для того чтобы функция* $f(x)\in L_p(0,\ 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$ (*или* $C(0,\ 2\pi)$), *была представима дробным интегралом*

$$f(x)=f_0+I^{(\alpha)}_{+}\varphi,\quad \varphi\in L_p(0,\ 2\pi)\quad (\textit{или } C(0,\ 2\pi)), \tag{19.45}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $g(x)\in L_p(0,\ 2\pi)$ (*или* $C(0,\ 2\pi)$ *соответственно*), *для которой*

$$(ik)^{\alpha}f_k=g_k,\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{19.46}$$

при этом $g(x)\equiv\varphi(x)$. *В случае* $p>1$ *(19.46) эквивалентно условию*

$$|k|^{\alpha}f_k=\psi_k,\quad k\in\mathbf{Z},\quad \psi(x)\in L_p(0,\ 2\pi) \tag{19.47}$$

(*но уже* $\psi(x)\neq\varphi(x)$).

Доказательство. Пусть выполнено (19.45). Тогда непосредственное вычисление коэффициентов Фурье в (19.45) дает $f_k=(I^{(\alpha)}_{+}\varphi)_k=(ik)^{-\alpha}\varphi_k$ согласно (19.5). Обратно, пусть существует $g\in L_p$ или C такая, что имеет место (19.46), т. е. $f_k=g_k/(ik)^{\alpha}$. Согласно (19.5), $f_k=(I^{\alpha}_{+}g)_k$. В силу теоремы единственности для рядов Фурье $f(x)=f_0+I^{(\alpha)}_{+}\varphi$.

Для получения (19.47) остается заметить, что при $p>1$ представимость функции $f(x)$ дробным интегралом $I^{(\alpha)}_{+}\varphi$, $\varphi\in L_p$, эквивалентна представимости потенциалом Рисса (19.26), (19.27), см. (19.43).

6°. Действие дробного интегрирования и дифференцирования Вейля в классах гельдеровских функций. Рассматриваем 2π-периодические функции, непрерывные на всей прямой (так что $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$). Пусть, как обычно, $\omega(\varphi,\ t)=\sup\limits_{\substack{x\in R^1\\ |h|\leqslant t}}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|$ означает модуль непрерывности функции $\varphi(x)$. Следующая теорема, выясняющая характер улучшения оператором $I^{(\alpha)}_{+}$ свойств гладкости функции $\varphi(x)$, аналогична теореме 13.15.

Теорема 19.4. *Пусть* $f(x)=(I^{(\alpha)}_{+}\varphi)(x)$, *где* $\varphi(x)$ — *непрерывная* 2π-*периодическая функция и* $0<\alpha<1$. *Справедливы оценки*

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant ch\int\limits_{h}^{\pi}\frac{\omega(\varphi,\ t)}{t^{2-\alpha}}\,dt, \tag{19.48}$$

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant ch^2\int\limits_{h}^{\pi}\frac{\omega(\varphi,\ t)}{t^{3-\alpha}}\,dt. \tag{19.49}$$

Доказательство. Представим разность $f(x+h)-f(x)$ в виде

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x-t)-\varphi(x)]\,[\Psi^{\alpha}_{+}(t+h)-\Psi^{\alpha}_{+}(t)]\,dt \tag{19.50}$$

с учетом периодичности функции $\varphi(x)$ и равенства $\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_+^\alpha(t)\,dt=0$. Отсюда $f(x+h)-f(x)=\int_{|t|<2h}+\int_{|t|>2h}=A+B$ (можно считать, что $0<h<\pi/2$). Для первого слагаемого имеем

$$|A|\leqslant c\int_{-2h}^{2h}\omega(\varphi,\ |t|)\,(|\Psi_+^\alpha(t+h)|+|\Psi_+^\alpha(t)|)\,dt.$$

Так как здесь $\omega(\varphi,\ |t|)\leqslant\omega(\varphi,\ 2h)\leqslant 2\omega(\varphi,\ h)$ (см., например, А. Ф. Тиман [3, с. 111]), то с учетом оценки (19.16) (с $j=0$) имеем

$$|A|\leqslant c\omega(\varphi,\ h)\int_{-3h}^{3h}|\Psi_+^\alpha(t)|\,dt\leqslant c_1\omega(\varphi,\ h)\int_0^{3h}t^{\alpha-1}dt\leqslant c_2h^\alpha\omega(\varphi,\ h). \quad (19.51)$$

Для B на основании теоремы о среднем и неравенства (19.16) (с $j=0$) получаем $|B|\leqslant ch\int_{2h<|t|<\pi}\omega(\varphi,\ |t|)\left|\left(\frac{d}{dt}\Psi_+^\alpha\right)(t+\theta h)\right|dt\leqslant c_1h\int_{2h<|t|<\pi}\omega(\varphi,\ |t|)\times$ $\times(|t|-h)^{\alpha-2}dt$. Здесь $|t|-h\geqslant|t|/2$, поэтому

$$|B|\leqslant ch\int_{2h}^{\pi}\omega(\varphi,\ t)\,t^{\alpha-2}dt. \quad (19.52)$$

Так как $h^\alpha\omega(\varphi,\ h)\leqslant ch\int_{2h}^{\pi}\omega(\varphi,\ t)\,t^{\alpha-2}dt$, то из (19.51), (19.52) следует оценка (19.48).

Для получения (19.49) подобно (19.50) имеем $f(x+h)-2f(x)+$ $+f(x-h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x-t)-\varphi(x)]\,[\Psi_+^\alpha(t+h)-2\Psi_+^\alpha(t)+\Psi_+^\alpha(t-h)]dt=$ $=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant 2h}+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant 2h}=A_1+B_1$. Точно так же, как и выше, получаем

$$|A_1|\leqslant ch^\alpha\omega(\varphi,\ h). \quad (19.53)$$

Оценим B_1. Из представления (5.75) для конечных разностей и из неравенства (19.16) (при $j=2$) вытекает

$$|\Psi_+^\alpha(t+h)-2\Psi_+^\alpha(t)+\Psi_+^\alpha(t-h)|\leqslant ch^2t^{\alpha-3} \quad (19.54)$$

при $|t|\geqslant 2h$ (следует только отметить, что в (5.75) рассматривались нецентрированные разности, а сейчас мы используем центрированную разность; легко, однако, установить, как видоизменяется тождество (5.75) при использовании центрированных разностей). С помощью (19.54) заключаем, что $|B_1|$ мажорируется правой частью из (19.49). Тогда с учетом (19.53) неравенство (19.49) доказано.

Теорема 19.5. *Для непрерывной 2π-периодической функции справедлива оценка*

$$\omega(\mathbf{D}_+^{(\alpha)}f,\ h)\leqslant c\int_0^h\omega(f,\ t)\,t^{-1-\alpha}dt,\quad 0<\alpha<1, \quad (19.55)$$

в предположении, что сходится интеграл в правой части.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=(\mathbf{D}_+^{(\alpha)}f)(x)$. Из (19.18) получаем представление $\varphi(x+h)-\varphi(x)=1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\Delta(x,\ h,\ t)(d/dt)\,\Psi_+^{1-\alpha}(t)\,dt,\ h>0$, где

обозначено $\Delta(x, h, t)=f(x+h-t)-f(x-h)+f(x)$. Очевидно, $|\Delta(x, h, t)|\leqslant \leqslant \alpha\omega(f, |t|)$, $|\Delta(x, h, t)|\leqslant 2\omega(f, h)$. Поэтому с учетом оценки (19.16) имеем

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant c\left(\int\limits_{|t|\leqslant h}+\int\limits_{h\leqslant|t|\leqslant\pi}\right)\omega(f, |t|)\,|t|^{-1-\alpha}dt\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^h \omega(f, t)\,t^{-1-\alpha}dt+\omega(f, h)\,h^{-\alpha}\right). \qquad (19.56)$$

Так как $\omega(f, h)/h\leqslant 2\omega(f, t)/t$ (см., например, книгу А. Ф. Тимана [3, с 111]), то в (19.56) второе слагаемое мажорируется первым и мы получаем (19.55). Теорема доказана.

В силу леммы 19.4 получаем из теоремы 19.5.

Следствие. *Пусть $f(x)$—непрерывная 2π-периодическая функция и* $\varphi(x)=\int\limits_0^\infty [f(x)-f(x-t)]\,t^{-1-\alpha}dt$, $0<\alpha<1$. *Тогда*

$$\omega(\varphi, h)\leqslant c\int\limits_0^h \omega(f, t)\,t^{-1-\alpha}dt. \qquad (19.57)$$

Рассмотрим теперь обобщенный класс Гельдера $H_0^\omega([0, 2\pi])$, состоящий из непрерывных на всей прямой 2π-периодических функций с нулевым средним значением, для которых $\omega(\varphi, t)\leqslant c\omega(t)$, где $\omega(t)$ — заданная непрерывная функция. Норма в $H_0^\omega([0, 2\pi])$ вводится подобно § 13, п. 6°. Подчеркнем, что теперь нижний нулевой индекс в обозначении класса H_0^ω несет в отличие от непериодического случая, см. § 13, п. 6°, ту информацию, что $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0$.

Через $\Lambda_0^\omega([0, 2\pi])$ обозначим класс непрерывных 2π-периодических функций с нулевым средним значением, для которых

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant c\omega(h), \quad h>0,$$

назовем его *обобщенным классом Зигмунда*. Пусть $\|f\|_{\Lambda_0^\omega}=\|f\|_C+$ $+\sup\limits_{x, h}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|/\omega(h)$.

Всюду ниже $\omega(t)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(t)\in C([0, 2\pi]), \quad \omega(0)=0, \quad \omega(t_1)\leqslant c\omega(t_2), \quad t_1\leqslant t_2. \qquad (19.58)$$

Непосредственно из теоремы 19.4 вытекает

Теорема 19.6. *Пусть $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (19.58). Оператор $I_+^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, дробного интегрирования Вейля ограниченно действует из $H_0^\omega([0, 2\pi])$ в $H_0^{\omega_\alpha}([0, 2\pi])$, $\omega_\alpha(t)=t^\alpha\omega(t)$, если*

$$\int\limits_h^\pi\left(\frac{h}{t}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\leqslant c\omega(h), \qquad (19.59)$$

и из $H_0^\omega([0, 2\pi])$ в $\Lambda_0^{\omega_\alpha}([0, 2\pi])$ при более слабом предположении

$$\int\limits_h^\pi\left(\frac{h}{t}\right)^{2-\alpha}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\leqslant c\omega(h). \qquad (19.60)$$

Следствие. *Оператор Вейля $I_+^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, ограниченно действует из $H_0^\lambda([0, 2\pi])$ в $H_0^{\lambda+\alpha}([0, 2\pi])$, $\lambda+\alpha<1$, и из $H_0^\lambda([0, 2\pi])$ в класс Зигмунда*

$$\Lambda_0^{\lambda+\alpha}=\{f(x): |f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant ch^{\lambda+\alpha}, \ f_0=0\} \qquad (19.61)$$

при $\lambda+\alpha<2$.

Действительно, для $\omega(t)=t^{\lambda}$ условие (19.59) выполняется при $\lambda+\alpha<1$, а (19.60) — при $\lambda+\alpha<2$.

Замечание 19.3. Если рассматривать 2π-периодические функции, принадлежащие классу H_0^{ω} на $[0, 2\pi]$, но не обязательно непрерывные на всей прямой, т. е. такие, для которых не обязательно $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, то для них утверждение теоремы 19.6 видоизменяется так:

$$I_+^{(\alpha)}(\varphi-\varphi_*)\in H^{\omega\alpha}([0,\ 2\pi]),$$

где $\varphi_*(x)$ — 2π-периодическая функция, равная $[\varphi(0)-\varphi(2\pi)](\pi-x)/(2\pi)$ на $[0, 2\pi]$.

Замечание 19.4. Утверждение следствия неулучшаемо в том смысле, что $I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi\notin H^1$, вообще говоря, для $\varphi\in H_0^{1-\lambda}$. Соответствующим контрпримером служит функция Вейерштрасса (см. А. Зигмунд [2, с. 207]).

Теорема 19.7. *Пусть* $\omega(t)$ *удовлетворяет условиям (19.58) и* $\int_0^h t^{-1}\omega(t)\,dt\leqslant c\omega(h)$. *Тогда оператор* $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}$ *дробного дифференцирования Вейля—Маршо (и оператор* $\mathbf{D}_+^{\alpha}$ *дробного дифференцирования Маршо),* $0<\alpha<1$, *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\omega\alpha}([0, 2\pi])$ *в* $H_0^{\omega}([0, 2\pi])$.

Эта теорема немедленно следует из оценки (19.55).

Следствие. *Если* $f(x)\in H^{\lambda}([0, 2\pi])$, $0<\alpha<\lambda\leqslant 1$, *то* $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}f\in H_0^{\lambda-\alpha}([0, 2\pi])$.

При $\lambda=1$ справедливо утверждение несколько более сильное, чем сформулированное в следствии: $\Lambda_0^1\overset{\mathbf{D}_{\pm}^{(\alpha)}}{\Longrightarrow}H_0^{1-\alpha}$, где Λ_0^1—класс (19.61) с $\lambda+\alpha=1$. Доказательство этого утверждения мы не приводим, его можно найти в книге А. Зигмунда [2, с. 206].

Наконец, объединяя теоремы 19.6 и 19.7, приходим к следующей теореме, в которой используется класс Φ_{β}^{σ}, определенный в (13.68).

Теорема 19.8. *Пусть* $\omega(t)\in\Phi_{1-\alpha}^0$. *Тогда оператор* $I_+^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, *дробного интегрирования Вейля изоморфно отображает* $H_0^{\omega}([0, 2\pi])$ *на* $H_0^{\omega\alpha}([0, 2\pi])$.

Доказательство. Из условий, наложенных на $\omega(t)$, следует, что $I_+^{(\alpha)}$ ограничен из H_0^{ω} в $H_0^{\omega\alpha}$ согласно теореме 19.6, а $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}$ — из $H_0^{\omega\alpha}$ в H_0^{ω} согласно теореме 19.7. Поэтому остается лишь показать, что всякая функция $f(x)\in H^{\omega\alpha}$ представима дробным интегралом Вейля $f(x)=I_+^{(\alpha)}\varphi$ от функции φ из H_0^{ω}. Так как $H_0^{\omega}\subset C([0, 2\pi])$, то в силу теоремы 19.2 функция $f(x)$ будет представима дробным интегралом Вейля (от функции $\varphi\in C$), если $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f$ сходится по норме C. Так как

$$|\mathbf{D}_{+,\varepsilon_1}^{\alpha}f-\mathbf{D}_{+,\varepsilon_2}^{\alpha}f|\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{\omega_{\alpha}(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt=c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\to 0,$$

то $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f$ сходится в C. Поэтому в силу теоремы 19.2 $f=I_+^{(\alpha)}\varphi$, $\varphi\in C([0, 2\pi])$. Так как $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}I_+^{(\alpha)}\varphi\equiv\varphi$, $\varphi\in L_1([0, 2\pi])$, то из теоремы 19.7 следует, что φ не только из $C([0, 2\pi])$, но и из H_0^{ω}. Теорема 19.8 доказана.

Следствие. *Дробное интегрирование Вейля изоморфно отображает класс Гельдера* $H_0^{\lambda}([0, 2\pi])$, $0<\lambda<1-\alpha$, *на класс* $H_0^{\lambda+\alpha}([0, 2\pi])$.

Действительно, $\omega(t)=t^{\lambda}\in\Phi^0_{1-\lambda}$ при $0<\lambda<1-\alpha$.

Приведем еще «мультипликаторную» перефразировку теоремы 19.8.

Теорема 19.8′. *Пусть $f(x)$—непрерывная 2π-периодическая функция и $I^{(\alpha)}$ — оператор* (19.26), *заданный мультипликатором $|k|^{-\alpha}$. Для любой функции $\omega(t)\in\Phi^0_{1-\alpha}$ оператор $I^{(\alpha)}$ изоморфно отображает пространство $H^{\omega}_0([0,\ 2\pi])$ на $H^{\omega_\alpha}_0$ $([0,\ 2\pi])$.*

Доказательство. Всспользуемся тождествами (19.29), (19.30). Сингулярный оператор H с ядром Гильберта ограничен в пространстве $H^{\omega}_0([0,\ 2\pi])$ при указанных условиях на $\omega(t)$, что вытекает из оценки Зигмунда для сингулярного интеграла (см., например, работу Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [2] или книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1, с. 160]). Поэтому из тождеств (19.29), (19.30) следует, что $I^{(\alpha)}(H^{\omega})=I^{(\alpha)}_{+}(H^{\omega})$. В таком случае утверждение теоремы 19.8′ вытекает из теоремы 19.8.

В заключение этого пункта отметим, что теоремы Харди — Литтлвуда 3.5, 3.6 о действии дробных интегралов в пространствах L_p справедливы и в периодическом случае для дробных интегралов Вейля:

$$L_p(0,\ 2\pi)\xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}}L_q(0,\ 2\pi),\quad q=p/(1-\alpha p)\ \text{при}\ 0<\alpha<1/p\ \ (1<p<\infty),\tag{19.62}$$

$$L_p(0,\ 2\pi)\xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}}H^{\alpha-1/p}([0,\ 2\pi])\ \text{при}\ 1/p<\alpha<1/p+1\ \ (1\leqslant p<\infty)\tag{19.63}$$

можно заменить $H^{\alpha-1/p}([0,\ 2\pi])$ на класс $h^{\alpha-1/p}([0,\ 2\pi])$, ср. со следствием теоремы 3.6). Случаю $\alpha-1/p=1$ отвечает утверждение

$$L_p(0,\ 2\pi)\xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}}\lambda^1_0([0,\ 2\pi])$$

(ср. с теоремой 3.6), где λ^1_0 — класс функций, определяемый аналогично классу (19.61) с заменой $O(h)$ на $o(h)$ в (19.61).

Доказательство периодических аналогов (19.62), (19.63) теорем 3.5, 3.6 мы не приводим. Его можно найти в книге А. Зигмунда [2]. Очевидно, утверждение (19.62) содержится в теореме 3.5 ввиду оценки (19.16) (с $j=0$).

7°. Дробные интегралы и производные Вейля периодических функций из H^{λ}_p. Приведем здесь теорему Харди — Литтлвуда о дробном интегрировании и дифференцировании периодических функций, удовлетворяющих интегральному условию Гельдера.

Через $H^{\lambda}_p([0,\ 2\pi])$ обозначаем класс 2π-периодических функций $\varphi(x)\in L_p(0,\ 2\pi)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi}|\varphi(x)-\varphi(x-\delta)|^p dx\leqslant c\delta^{\lambda}\tag{19.64}$$

(ср. с (14.1), (14.2)), а через $h^{\lambda}_p([0,\ 2\pi])$—условию

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^{\lambda}}\int_0^{2\pi}|\varphi(x)-\varphi(x-\delta)|^p dx=0.\tag{19.65}$$

Теорема 19.9. *Пусть $1\leqslant p<\infty$, $0<\alpha<1$, $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$ и пусть $I^{(\alpha)}_{\pm}$, $\mathbf{D}^{(\alpha)}_{\pm}$ — дробное интегродифференцирование (19.7), (19.18) по Вейлю. Тогда*

$$L_p(0,\ 2\pi)\xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}}h^{\alpha}_p([0,\ 2\pi]),\tag{19.66}$$

$$H_p^{\lambda}([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{I_{\pm}^{(\alpha)}} H_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]), \tag{19.67}$$

$$H_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{D_{\pm}^{(\alpha)}} H_p^{\lambda}([0,\ 2\pi]). \tag{19.68}$$

Эта теорема является непосредственным следствием теорем 14.5—14.7 в силу периодичности рассматриваемых функций. Можно показать, что утверждения (19.67), (19.68) справедливы также в o-форме:

$$h_p^{\lambda}([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{I_{\pm}^{(\alpha)}} h_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]), \tag{19.69}$$

$$h_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{D_{\pm}^{(\alpha)}} h_p^{\lambda}([0,\ 2\pi]). \tag{19.70}$$

Из (19.67), (19.68) заключаем, что оператор $I_{\pm}^{(\alpha)}$ дробного интегрирования Вейля отображает H_p^{λ} на $H_p^{\lambda+\alpha}$, $\lambda+\alpha<1$, взаимно однозначно (предварительно нужно убедиться в том, что $H_p^{\lambda+\alpha}\subset I^{(\alpha)}(L_p)$). Анализ доказательства теорем 14.6, 14.7 показывает при этом, что отображение

$$I_{\pm}^{(\alpha)}(H_p^{\lambda}) = H_p^{\lambda+\alpha} \tag{19.71}$$

является изоморфизмом.

8°. Неравенство Бернштейна для дробных производных тригонометрических многочленов. Пусть

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \tag{19.72}$$

— произвольный тригонометрический многочлен. Известны (см., например, книгу С. М. Никольского [4, с. 94]) неравенства С. Н. Бернштейна:

$$\|T_n'\|_C \leqslant n\|T_n\|_C, \quad \|T_n'\|_p \leqslant n\|T_n\|_p, \quad 1\leqslant p<\infty. \tag{19.73}$$

В следующей теореме доказывается их аналог для дробных производных Вейля (19.6).

Теорема 19.10. *Для тригонометрического многочлена $T_n(x)$ справедлива оценка*

$$\|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}T_n\|_p \leqslant c(\alpha)\, n^{\alpha}\|T_n\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \tag{19.74}$$

где $c(\alpha) = 2^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$.

Доказательство. Пусть вначале $p=\infty$. В силу (19.39) дробную производную можно рассматривать в форме Маршо: $\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}T_n = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\times$

$\times\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{T_n(x)-T_n(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}\,dt$. Отсюда

$$|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}T_n| \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{2/n}\frac{|T_n(x)-T_n(x\mp t)|}{t^{1+\alpha}}\,dt + \frac{2\alpha\|T_n\|_C}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{2/n}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}. \tag{19.75}$$

Так как $|T_n(x)-T_n(x\mp t)|\leqslant t\|T_n'\|_C$, то в силу первого из неравенств (19.73) простыми оценками из (19.75) получаем

$$\|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}T_n\|_C \leqslant \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\,n^{\alpha}\|T_n\|_C. \tag{19.76}$$

Пусть теперь $1 \leqslant p < \infty$. Введем оператор свертки с многочленом $T_n(x)$: $A_n\varphi = \int_0^{2\pi} T_n(x-t)\,\varphi(t)\,dt$. Очевидно, $(A_n\varphi)(x)$—тригонометрический многочлен того же порядка n. В силу доказанной оценки (19.76) получаем

$$\|(\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} A_n\varphi)(x)\| \leqslant c(\alpha)\, n^{\alpha}\, \|A_n\varphi\|_C \leqslant c(\alpha)\, n^{\alpha}\, \|T_n\|_p\, \|\varphi\|_{p'}. \tag{19.77}$$

с учетом неравенства Гельдера. Кроме того, очевидно, $(\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} A_n\varphi)(x) = \int_0^{2\pi} (\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n)(x-y)\,\varphi(y)\,dy$, и потому в силу неравенства Гельдера

$$\|(\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} A_n\varphi)(x)\| \leqslant \|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n\|_p\, \|\varphi\|_{p'}. \tag{19.78}$$

Неравенства (19.77), (19.78) выполняются на всех функциях $\varphi \in L_{p'}$, но второе из них точное, так как в нем достигается знак равенства на функции $\varphi(x) = |g(x)|^{p-1} \operatorname{sign} g(x) \in L_{p'}$, $g(x) = \mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n$. Но тогда $\|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n\|_p \leqslant c(\alpha)\, n^{\alpha}\, \|T_n\|_p$, что и требовалось.

Заметим, что неравенство (19.74) для $1 \leqslant p < \infty$ можно получить точно так же, как и для $p = \infty$, осуществляя те же действия (19.75), (19.76) по норме пространства L_p с помощью неравенства Минковского, если использовать второе из неравенств (19.73). Изложенное доказательство теоремы 19.10 использует только первое из неравенств (19.73).

Замечание 19.5. Если T_n — тригонометрический многочлен, то $\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n$ — также тригонометрический многочлен того же порядка. Поэтому из (19.74), (19.73) следует, что оценка вида (19.74) выполняется для любого $\alpha > 0$ с постоянной $c(\alpha) = 2^{1+N-\alpha}/\Gamma(2+N-\alpha)$, где N — наибольшее целое число, меньшее α. Эта постоянная является загрубленной при $\alpha > 1$. Для таких α выполняется неравенство

$$\|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n\|_p \leqslant n^{\alpha}\, \|T_n\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad \alpha \geqslant 1, \tag{19.79}$$

с точной постоянной, равной 1. Доказательство этого дано П. И. Лизоркиным [3] в более общем контексте «тригонометрических интегралов» $T_n(x) = \int_{-n}^{n} e^{ixt}\, d\sigma(t)$.

Замечание 19.6. Неравенство Бернштейна для дробных производных почти периодических функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\lambda_k x} \tag{19.80}$$

выполняется в форме

$$\|\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)} f\|_{L_\infty} \leqslant c(\alpha)\, n^{\alpha}\, \|f\|_{L_\infty}, \quad n = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k|, \tag{19.81}$$

с той же постоянной $c(\alpha) = 2^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$ (T. Bang [1, с. 21—22], 1941 г.), $0 < \alpha < 1$.

К неравенству Бернштейна (19.81) примыкает неравенство Фавара для дробных интегралов почти периодических функций (19.80):

$$\|I_{\pm}^{(\alpha)} f\|_{L_\infty} \leqslant \frac{c}{[\min |\lambda_k|]^{\alpha}}\, \|f\|_{L_\infty}, \quad \alpha > 0, \tag{19.82}$$

где c зависит от α, но не зависит от $f(x)$ (T. Bang [1]).

§ 20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЧЕРЕЗ РАЗНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА (производная Грюнвальда—Летникова)

Хорошо известно, что для функции $f(x)$, дифференцируемой до порядка n, справедлива формула

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n}, \tag{20.1}$$

где $(\Delta_h^n f)(x)$—конечная разность (5.72) функции $f(x)$. Это равенство можно использовать для определения дробной производной, заменяя в нем n на $\alpha>0$, предварительно истолковав надлежащим образом разность $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ дробного порядка.

Отметим, что излагаемый в этом параграфе подход к дробному дифференцированию и интегрированию через конечные разности сравнительно менее широко употребим в математическом анализе по сравнению с другими (Римана—Лиувилля, Маршо и др.). Однако этот подход, естественный с точки зрения развития математического анализа и предложенный давно А. Грюнвальдом (A. K. Grünwald [1]), А. В. Летниковым [1], в последнее время вновь привлек к себе внимание как с точки зрения теории функций, см., например, работы П. Бутцера, У. Вестфаль (P. L. Butzer, U. Westphal [1]) и Я. С. Бугрова [1], так и с точки зрения удобства в приближенных вычислениях, см., например, работу В. А. Желудева [2]. Отметим, что в п. 2° мы существенно основываемся на указанной работе П. Бутцера, У. Вестфаль.

При рассмотрении конечных разностей дробного порядка функции $f(x)$ естественно предполагать заданными на всей прямой. Если ограничиться только левосторонними или только правосторонними сдвигами, то можно рассмотреть и случай полуоси. О случае конечного отрезка будет особо сказано в п. 4°. Будем отдельно исследовать периодический и непериодический случаи.

Через $X=X(R^1)$ будем обозначать одно из пространств $L_p(R^1)$, $1\leqslant p<\infty$, $C(R^1)$, а в периодическом случае $X_{2\pi}=X(0,\ 2\pi)$ будет означать одно из подобных пространств на $[0,\ 2\pi]$.

1°. Разности дробного порядка и их свойства. Для функции $f(x)$, заданной на всей прямой, отправляясь от (5.72), положим

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = (E-\tau_h)^\alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \quad \alpha>0, \tag{20.2}$$

где $\binom{\alpha}{k}$—биномиальные коэффициенты (1.48). Так как

$$c(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{k}\right| < \infty \tag{20.3}$$

в силу (1.51), то ряд (20.2) сходится абсолютно и равномерно при всех $\alpha>0$ для любой ограниченной функции; если $f(x)\in X(X_{2\pi})$, то он сходится по норме $X(X_{2\pi})$. Заметим, что $c(\alpha)=2^\alpha$ при целом α и $c(\alpha)\leqslant \leqslant 2^{[\alpha]+1}$ при нецелом α.

Разность (20.2) назовем *левосторонней,* если $h>0$, и *правосторонней,* если $h<0$.

Замечание 20.1. Разность (20.2), вообще говоря, не определена

при $\alpha<0$, так как ряд (20.2) может оказаться расходящимся. Это так, например, для $f(x)\equiv 1$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{\alpha}{j}=(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+1)} \tag{20.4}$$

(А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев [1, 4.2.1.5]), что расходится при $n\to\infty$, если $\alpha<0$, см. (1.66). Поэтому определение (20.2) заведомо неприемлемо при $\alpha<0$ в периодическом случае. В непериодическом случае ряд (20.2) будет сходиться при $\alpha<0$, если $f(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности: $|f(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-\mu}$, $\mu>|\alpha|$.

Отметим некоторые простые свойства разностей (20.2):

Свойство 1. $(\Delta_h^\alpha(\Delta_h^\beta f))(x)=(\Delta_h^{\alpha+\beta}f)(x)$.

Свойство 2. Если $f\in X(X_{2\pi})$, то $\lim\limits_{h\to 0}\|\Delta_h^\alpha f\|_{X(X_{2\pi})}=0$.

Свойство 3. $\|\Delta_h^{\alpha+\beta}f\|_{X(X_{2\pi})}\leqslant c(\alpha)\|\Delta_h^\beta f\|_{X(X_{2\pi})}$.

Свойство 1 устанавливается непосредственной проверкой, из него в соответствии с (20.3) следует свойство 3. Свойство 2 устанавливается стандартными средствами функционального анализа (ввиду равномерной по h ограниченности оператора Δ_h^α свойство 2 достаточно проверить на плотном в $X(X_{2\pi})$ множестве «хороших» функций).

В непериодическом случае для функции $f(x)$, например из $L_1(R^1)$, преобразование Фурье действует на $\Delta_h^\alpha f$ по формуле

$$\widehat{(\Delta_h^\alpha f)}(x)=(1-e^{ixh})^\alpha\hat{f}(x), \tag{20.5}$$

а в периодическом случае аналогичное свойство выполняется для коэффициентов Фурье:

$$(\Delta_h^\alpha f)_k=(1-e^{-ikh})^\alpha f_k,\quad f_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-ikt}dt. \tag{20.6}$$

Формулы (20.5), (20.6) устанавливаются непосредственной проверкой.

Отправляясь от (20.1), введем функцию

$$f_\pm^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{(\Delta_{\pm h}^\alpha f)(x)}{h^\alpha},\quad \alpha>0, \tag{20.7}$$

где предел может рассматриваться в зависимости от изучаемых вопросов для каждого x, почти для всех x или по норме пространства X (или $X_{2\pi}$). Функцию (20.7) будем называть *дробной производной Грюнвальда—Летникова*. В случае, когда предел в (20.7) понимается по норме пространства $X(X_{2\pi})$, производную (20.7) можно назвать *сильной производной Грюнвальда—Летникова в* $X(X_{2\pi})$.

Ниже в теоремах 20.2, 20.4 мы покажем, что производная Грюнвальда—Летникова совпадает с производной Маршо

$$\mathbf{D}_\pm^\alpha f=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\quad 0<\alpha<1, \tag{20.8}$$

в случае $\alpha\geqslant 1$ вместо (20.8) нужно вести речь о форме (5.80). Более того, мы увидим, что дробные производные Грюнвальда—Летникова и Маршо имеют, вообще говоря, одинаковые области определения, т. е. сходимость в (20.7) влечет сходимость в (20.8) и наоборот.

Заметим, что можно было бы вместо (20.7) ввести дробное дифференцирование следующим симметричным образом:

$$f^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)+(\Delta_{-h}^\alpha f)(x)}{|h|^\alpha}. \tag{20.7'}$$

В этом случае оно совпадает не с дробной производной Маршо (20.8), а с операцией (12.1′), обратной риссову потенциалу:

$$f^{\alpha)}(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \quad (20.8')$$

Поэтому дробную производную (20.7′) можно назвать *производной Грюнвальда—Летникова—Рисса.* Мы не станем останавливаться на ее рассмотрении, которое совершенно аналогично изучению производных (20.7) в этом параграфе.

Замечание 20.2. Конструкцию (20.7) можно использовать и для определения дробного интеграла, взяв $\alpha<0$ в (20.7). Согласно замечанию 20.1, такое определение дробного интеграла будет корректно для функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности. Далее в п. 4° мы подробнее остановимся на этом в случае функций, заданных на отрезке.

Заметим, что можно ввести обобщенные разности, порождаемые не степенной функцией $(I-\tau_h)^\alpha$, а произвольной аналитической функцией $a(I-\tau_h)$. Пусть функция $a(\xi)$, $0\leqslant\xi\leqslant 2$, удовлетворяет условиям:

1) она аналитична в окрестности точки $\xi = 1$:

$$a(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\xi - 1)^k, \quad a_k = a^{(k)}(1)/k!, \quad (20.9)$$

где ряд сходится при $|\xi - 1| \leqslant 1$;

2) сходимость в точках $\xi = 0$, $\xi = 2$ абсолютная:

$$c(a) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty;$$

3) $a(\xi)$ обращается в нуль при $\xi = 0$:

$$a(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = 0.$$

Положим: $a(I-\tau_h) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \tau_h^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \tau_{kh}$. Этот оператор порождает обобщенную разность

$$(a - \Delta_h f)(x) \overset{\text{def}}{=} a(I-\tau_h) f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k f(x-kh),$$

совпадающую, очевидно, с $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ в случае $a(\xi) = \xi^\alpha$.

Легко доказывается свойство $a - \Delta_h(b - \Delta_h f) = ab - \Delta_h f$, где $ab - \Delta_h f$ — обобщенная разность, определяемая произведением $a(\xi)\, b(\xi)$. Это свойство обобщает свойство 1 разностей $\Delta_h^\alpha f$.

Можно, следуя Э. Посту (E. L. Post [2]), ввести обобщенное дифференцирование $a(\mathscr{D})f$, определив его, подобно (20.7), равенством

$$a(\mathscr{D})f = \lim_{h\to 0} a\left(\frac{I-\tau_h}{h}\right) f, \quad (20.10)$$

где

$$a\left(\frac{I-\tau_h}{h}\right) f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{I-\tau_h}{h} - I\right)^j f. \quad (20.11)$$

Можно было бы дать другое определение:

$$a[\mathscr{D}]f = \lim_{h\to 0} \frac{a - \Delta_h^\alpha f}{a(h)}. \quad (20.12)$$

При этом определение (20.10) имеет тот недостаток по сравнению с (20.12), что оно, вообще говоря, формальное: ряд (20.11) может оказаться расходящимся при малых h, если ряд (20.9) не сходится при больших ξ. Поэтому определению (20.10), (20.11) можно придать смысл (для неаналитических при всех ξ функций $a(\xi)$) лишь ценой особых ограничений на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость ряда (20.11). Тем не менее определение (20.10) естественнее определения (20.12), ибо именно при определении (20.10) справедлива для периодических функций $f(x)$ формула

$$[a(\mathscr{D})f]_k = a(ik)f_k, \tag{20.13}$$

где f_k — коэффициент Фурье функции f. (Уже равенство (20.13) предполагает задание $a(\xi)$ на всей комплексной плоскости.)

Мы не будем более подробно останавливаться на обобщенном дифференцировании $a(\mathscr{D})$, как и вообще в книге на подобных обобщениях дифференцирования. Отметим только, что, применяя формально равенства (20.10), (20.11), получаем следующее представление на бесконечно дифференцируемых функциях $f(x)$:

$$a(\mathscr{D})f = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j (I-\mathscr{D})^j f = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j b_j \mathscr{D}^j f,$$

$$\mathscr{D} = d/dx,\ b_j = \sum_{\nu=j}^{\infty}(-1)^\nu \binom{\nu}{j} a_\nu.$$

Подчеркнем, что определения этого пункта имеют смысл и для функций, заданных на полуоси, например R_+^1 (или R_-^1), если ограничиться рассмотрением правосторонних (левосторонних) разностей дробного порядка.

2°. Совпадение дробной производной Грюнвальда—Летникова с производной Маршо. Периодический случай. Прежде всего покажем, что существование у функции $f(x)$ сильной производной Грюнвальда—Летникова (20.7) равносильно представимости функции $f(x)$ дробным интегралом Вейля (с точностью до постоянного слагаемого), см. теорему 20.1. Предварительно установим некоторые вспомогательные утверждения, связанные с интегральным представлением разности $\Delta_h^\alpha f$ дробного порядка для функций $f(x)$, представимых дробным интегралом.

Пусть $\mathrm{k}_\alpha(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x_+^{\alpha-1}$ и

$$\mathrm{p}_\alpha(x) = (\Delta_1^\alpha \mathrm{k}_\alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{\alpha}{j}(x-j)_+^{\alpha-1}. \tag{20.14}$$

Нам понадобится также функция

$$\chi_\alpha(x;\ h) = \frac{2\pi}{h}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_\alpha\left(\frac{x+2\pi j}{h}\right) = \frac{2\pi}{h}\sum_{-\frac{x}{2\pi}<j<\infty}{}'\,\mathrm{p}_\alpha\left(\frac{x+2\pi j}{h}\right). \tag{20.15}$$

Лемма 20.1. *Функция* $\mathrm{p}_\alpha(x)$, $\alpha>0$, *обладает свойствами:*

1) $\mathrm{p}_\alpha(x) \in L_1(R^1)$, $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_\alpha(x)\,dx = 1$;

2) $\widehat{\mathrm{p}_\alpha}(x) = \left(\dfrac{1-e^{ix}}{-ix}\right)^\alpha$, *где выбрано значение степенной функции, при котором* $\widehat{\mathrm{p}_\alpha}(0) = 1$;

3) $\mathrm{p}_\alpha(x) \equiv 0$ *при* $x > \alpha$ *в случае целого* $\alpha = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Начнем с наиболее простого свойства 3). В случае целого α имеем при $x > \alpha$

$$\mathrm{p}_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (x-j)^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Delta_1^\alpha x^{\alpha-1}.$$

Но $(\Delta_h^l P_m)(x) \equiv 0$ при $l > m$ для любого многочлена $P_m(x)$ степени m (см. (5.75)). Следовательно, $\Delta_1^\alpha x^{\alpha-1} \equiv 0$ и тогда $\mathrm{p}_\alpha(x) \equiv 0$ при $x > \alpha$.

Перейдем к доказательству наиболее трудного первого утверждения в свойстве 1). Можно считать, согласно свойству 3), что α — нецелое. Очевидно, что функция $\mathrm{p}_\alpha(x)$ локально абсолютно интегрируема. Покажем, что $\int_n^\infty |\mathrm{p}_\alpha(t)|\,dt < \infty$ при каком-нибудь $n \geqslant [\alpha] + 1$. Для этой цели докажем далее вспомогательную формулу (20.17).

Воспользуемся асимптотическим свойством (1.66) отношения гамма-функций, переписав его при $b = 1$ и $a = \alpha - r$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, в виде $\dfrac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)} = y^{\alpha-r-1} \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{c_{k,r}}{y^k} + O(y^{\alpha-r-N-2})$, $y \to \infty$, где $c_{k,r}$ постоянные, $c_{k,r} = \dfrac{(-1)^k}{k!}(r+1-\alpha_k) B_k^{\alpha-r}(\alpha-r)$. Отсюда

$$\frac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)} = \sum_{j=r}^{N} c_{j-r,r} y^{\alpha-j-1} + O(y^{\alpha-N-2}), \quad y \to \infty, \quad r = 0, 1, \ldots, N. \tag{20.16}$$

Рассматривая (20.16) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $y^{\alpha-1-j}$, видим, что эта система треугольна с диагональными элементами $c_{0,r} = 1$. Но тогда степени $x^{\alpha-1-j}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, с точностью до $O(y^{\alpha-N-2})$ могут быть выражены в виде линейной комбинации функций $\dfrac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)}$, $r = 0, 1, \ldots, N$. В частности, при $j = 0$

$$y^{\alpha-1} = \sum_{r=0}^{N} b_r \frac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)} + O(y^{\alpha-N-r}). \tag{20.17}$$

Отсюда, в частности, для $m = 1, 2, \ldots$

$$m^{\alpha-1} = \sum_{r=0}^{N} c_r \binom{m+\alpha-r-1}{m} + O(m^{\alpha-N-r}), \tag{20.18}$$

где $c_r = b_r \Gamma(2-r)$ постоянные, зависящие от r и N, но не зависящие от m. Из (20.18) заключаем, что

$$(m+\xi)^{\alpha-1} = \sum_{r=0}^{N} P_r(\xi) \binom{m+\alpha-r-1}{m} + O(m^{\alpha-N-2}), \tag{20.19}$$

где $P_r(\xi)$ — многочлены от переменной ξ, а O в (20.19) равномерно по $\xi \in [0, 1]$. (Для получения (20.19) из (20.18) достаточно в произведении $(m+\xi)^{\alpha-1} = m^{\alpha-1}\left(1 + \dfrac{\xi}{m}\right)^{\alpha-1}$ воспользоваться представлением (20.18) для первого множителя и формулой Тейлора вместе с формулой (20.18) для второго.)

Для оценки интеграла $\int_n^\infty |\mathrm{p}_\alpha(x)|\,dx$ воспользуемся асимптотическим представлением (20.19). Пусть $n \leqslant k \leqslant x < k+1$, так что $x = k + \xi$, $0 \leqslant \xi < 1$. Применяя (20.16) при $m = k - j$ и $N = n - 1$, имеем

$$\mathrm{p}_\alpha(x) = \mathrm{p}_\alpha(k+\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (k-j+\xi)^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \binom{\alpha}{k} \xi^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \sum_{r=0}^{n-1} P_r(\xi) \binom{k-j+\alpha-r-1}{k-j} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} O((k-j)^{\alpha-n-1}) = A_k + B_k + C_k.$$

Учитывая (1.51), получаем $|A_k| \leqslant ck^{-1-\alpha}\xi^{\alpha-1}$, где c не зависит от k. Далее, с учетом формул (1.52), (1.53) имеем $B_k = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-1} P_r(\xi) \times$ $\times \sum_{j=0}^{k-1} \binom{\alpha}{j} \binom{r-\alpha}{k-j} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-1} P_r(\xi) \left[\binom{r}{k} - \binom{\alpha}{k} \right] = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \binom{\alpha}{k} \times$ $\times \sum_{r=0}^{n-1} P_r(\xi)$, так как $r \leqslant n-1 < k$. Отсюда $|B_k| \leqslant ck^{-1-\alpha}$ согласно (1.51).

И наконец, $|C_k| \leqslant ck^{\alpha-n-1} + c \sum_{j=1}^{k-1} j^{-1-\alpha}(k-j)^{\alpha-n-1} \leqslant c \left\{ k^{\alpha-n-1} + \right.$ $+ k^{\alpha-n-1} \sum_{j=1}^{[(k-1)/2]} j^{-\alpha-1} + k^{-\alpha-1} \left. \sum_{j=\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{k-1} (k-j)^{\alpha-n-1} \right\} \leqslant c \{k^{\alpha-n-1} +$ $+ k^{-\alpha-1}\}$. В таком случае $\int_n^\infty |\mathrm{p}_\alpha(x)|\,dx \leqslant c \sum_{k=n}^{\infty} (k^{\alpha-n-1} + k^{-\alpha-1}) < \infty$ и первое утверждение свойства 1) доказано.

Свойство 2) получается непосредственным применением к $\mathrm{p}_\alpha(x)$ преобразования Фурье с учетом формулы (7.6). Из него получается при $x = 0$ второе утверждение свойства 1). Лемма доказана.

Лемма 20.2. *При всех* $\alpha > 0$ *и* $h > 0$

1) $\int_0^{2\pi} \chi_\alpha(x;\ h)\,dx = 2\pi$;

2) $\|\chi_\alpha(\cdot;\ h)\|_{L_1(0,2\pi)} \leqslant M < \infty$, M *не зависит от* h;

3) $\lim\limits_{h \to 0+} \int_\delta^{2\pi} \chi_\alpha(x;\ h)\,dx = 0$ *при* $\delta > 0$;

4) *коэффициенты Фурье функции* $\chi_\alpha(x;\ h)$ *вычисляются по формуле*

$$(\chi_\alpha(\cdot;\ h))_k = \left(\frac{1 - e^{-ihh}}{ikh} \right)^\alpha \tag{20.20}$$

(с естественным доопределением $(\chi_\alpha(\cdot;\ h))_0 = 1$).

Доказательство. Свойства 1) — 4) являются следствием стандартных рассуждений из теории рядов Фурье, основанных на формуле суммирования Пуассона. Именно, хорошо известно и легко проверяется,

что если $G(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(x+2\pi j)$, то

$$g(x)\in L_1(R^1)\Rightarrow \|G\|_{L_1(0,2\pi)}\leqslant \|g\|_{L_1(R^1)},\quad G_k=\tilde{g}(k) \tag{20.21}$$

(мы уже пользовались этим приемом при доказательстве леммы 19.1). Пользуясь переходом (20.21), мы получаем, что

$$\int_0^{2\pi}\chi_\alpha(x;\ h)\,dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_\alpha(x)\,dx,\quad \int_{\delta}^{2\pi}|\chi_\alpha(x;\ h)|\,dx\leqslant 2\pi\int_{\delta/h}^{\infty}|\mathrm{p}_\alpha(x)|\,dx,$$

$$[\chi_\alpha(\cdot;\ h)]_k=\tilde{\mathrm{p}}_\alpha(k), \tag{20.22}$$

где $\tilde{\mathrm{p}}_\alpha(k)$ — обратное преобразование Фурье функции $\mathrm{p}_\alpha(x)$. Из (20.22) в силу леммы 20.1 и следуют свойства 1) — 4) леммы 20.2.

Наконец, потребность в функции $\chi_\alpha(x;\ h)$ проясняется равенством

$$\chi_\alpha(x,\ h)=\frac{(\Delta_h^\alpha\Psi_+^\alpha)(x)}{h^\alpha}+1, \tag{20.23}$$

где $\Psi_+^\alpha(x)$ — знакомое нам ядро (19.8) дробного интеграла Вейля (19.7). Для доказательства этого равенства достаточно показать, что совпадают коэффициенты Фурье: $(\chi_\alpha(\cdot;\ h))_k=h^{-\alpha}(\Delta_h^\alpha\Psi_+^\alpha)_k$, $k\neq 0$. Последнее вытекает из (20.20), (20.6) и (19.8).

Теперь мы подготовлены к доказательству основных утверждений. В теоремах 20.1 и 20.2 пространство $X_{2\pi}$ — любое из пространств $L_p(0,\ 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$, $C(0,\ 2\pi)$.

Т е о р е м а 20.1. *Пусть $f(x)\in X_{2\pi}$. Для того чтобы в $X_{2\pi}$ существовала (сильная) производная Грюнвальда—Летникова (20.7), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi_\pm(x)\in X_{2\pi}$ такая, что*

$$f(x)=I_\pm^{(\alpha)}\varphi_\pm+f_0,\quad f_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx, \tag{20.24}$$

при этом $\varphi_\pm(x)=f_\pm^{(\alpha)}(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности выберем левостороннее дробное дифференцирование (знак +). Пусть существует производная (20.7) в смысле сходимости в $X_{2\pi}$. Тогда

$$(f_+^{(\alpha)})_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}\lim_{\substack{h\to+0\\(X_{2\pi})}}h^{-\alpha}(\Delta_h^\alpha f)(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{h\to+0}h^{-\alpha}\int_0^{2\pi}(\Delta_h^\alpha f)(x)e^{-ikx}dx.$$

В силу (20.6) отсюда $(f_+^{(\alpha)})_k=(ik)^\alpha f_k$. Так как $f_+^{(\alpha)}(x)\in X_{2\pi}$, то тогда (20.24) выполнено в силу теоремы 19.3.

Обратно, пусть выполнено (20.24). Тогда

$$(\Delta_h^\alpha f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_+(t)(\Delta_h^\alpha\Psi_+^\alpha)(x-t)\,dt.$$

Применяя формулу (20.23), имеем

$$\frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_+(t)\chi_\alpha(x-t,\ h)\,dt. \tag{20.24'}$$

Отсюда требуемый предельный переход $\left\|\frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha}-\varphi_+\right\|_{X_{2\pi}}\to 0$ обосновывается теоремой 1.3. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 20.1 и теоремы 19.2 вытекает

Теорема 20.2. *Пусть $f\in X_{2\pi}$. Тогда дробная производная (20.7) Грюнвальда—Летникова существует одновременно с производной Маршо (19.34) и они совпадают:*

$$\lim_{\substack{h\to+0\\(X_{2\pi})}}\frac{(\Delta_{\pm h}^\alpha f)(x)}{h^\alpha}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(X_{2\pi})}}\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}\,dt. \tag{20.25}$$

При $X_{2\pi}=L_p(0,\,2\pi)$, $1<p<\infty$, производная Грюнвальда—Летникова и производная Маршо существуют одновременно и при разном выборе знаков $\pm$.

Отметим, что утверждение теоремы 20.2 об одновременном существовании дробных производных при разном выборе знаков вытекает из соотношений (19.24), (19.25).

Теорема 20.2 распространяется на значения $\alpha\geqslant 1$ при соответствующем толковании дробной производной Маршо, см. замечание 19.2.

В теореме 19.2 было установлено, что условие $\|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f\|_{L(_p0,\,2\pi)}\leqslant c$ равномерной ограниченности усеченных производных Маршо необходимо и достаточно для существования в L_p дробной производной Маршо (или, что то же самое, для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α от функции из L_p). Следующая теорема дает аналогичное утверждение для производной Грюнвальда—Летникова.

Теорема 20.3. *Пусть $f(x)\in L_p(0,\,2\pi)$, $1<p<\infty$. Для существования производной Грюнвальда—Летникова $f_+^{(\alpha)}(x)$ или $f_-^{(\alpha)}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_{L_p(0,\,2\pi)}\leqslant ch^\alpha,\quad h>0, \tag{20.26}$$

где c не зависит от h.

Доказательство. В доказательстве нуждается переход от (20.26) к существованию предела $\lim\limits_{h\to+0}h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f$ по норме L_p. Известно, что в пространстве L_p ограниченные множества слабо компактны, т. е. из всякого ограниченного множества в нем можно выделить слабосходящуюся последовательность (Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1, с. 314]). Поэтому существует последовательность $h_m\to 0$ и функция $g(x)\in L_p$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{2\pi}h_m^{-\alpha}(\Delta_{h_m}^\alpha f)(x)\,\psi(x)\,dx=\int_0^{2\pi}g(x)\,\psi(x)\,dx \tag{20.27}$$

для всех функций $\psi(x)\in L_{p'}(0,\,2\pi)$. Выберем здесь $\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\,e^{-ikx}$. Тогда (20.27) превращается в равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{h_m^\alpha}(\Delta_{h_m}^\alpha f)_k=g_k.$$

Отсюда в силу (20.6) получаем, что $(ik)^\alpha f_k=g_k$, $g(x)\in L_p$. Тогда, согласно теореме 19.3, функция $f(x)$ представима в виде (20.24), что на основании теоремы 20.1 равносильно существованию в L_p производной Грюнвальда — Летникова.

Замечание 20.3. Неравенство (20.26) можно уточнить:

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_{X_{2\pi}}\leqslant ch^\alpha\|\mathbf{D}_+^{(\alpha)}f\|_{X_{2\pi}},\quad c=\sup_{h>0}\int_0^{2\pi}|\chi_\alpha(x;\,h)|\,dx \tag{20.26'}$$

для функций $f(x)$, представимых в виде (20.24). Это вытекает из (20.24′).

3°. **Совпадение дробной производной Грюнвальда—Летникова с производной Маршо. Непериодический случай.** На всей прямой R^1 дробное интегрирование не сохраняет пространства L_p. Поэтому, когда дробная производная Грюнвальда — Летникова $f_{\pm}^{\alpha)}$ или производная Маршо $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f$ будут пониматься в смысле сходимости в $L_p(R^1)$, мы не будем требовать, чтобы сами функции были из $L_p(R^1)$ — это было бы заведомым сужением постановки задачи, ср. теорему 20.4 с аналогичной теоремой 20.2.

Теорема 20.4. *Пусть $f(x) \in L_r(R^1)$ при каком-нибудь $1 \leqslant r < \infty$. Тогда пределы*

$$f_{\pm}^{\alpha)}(x) = \lim_{\substack{h \to +0 \\ (L_p(R^1))}} \frac{(\Delta_{\pm h}^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}}, \qquad (\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p(R^1))}} (\mathbf{D}_{\pm, \varepsilon}^{\alpha} f)(x), \tag{20.28}$$

существуют одновременно и совпадают (при одинаковом выборе знаков), $1 < p < 1/\alpha$.

Доказательство. Пусть существует второй из пределов (20.28). Тогда $f(x) = I_{+}^{\alpha} \varphi$, $\varphi = \mathbf{D}_{+}^{\alpha} f \in L_p$, в силу теоремы 6.2. Применяя к дробному интегралу $f = I_{+}^{\alpha} \varphi$ разность дробного порядка, имеем

$$(\Delta_h^{\alpha} f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathrm{k}_{\alpha}(x - t - hj)\, dt, \tag{20.29}$$

где $\mathrm{k}_{\alpha}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x_{+}^{\alpha-1}$ (почленное интегрирование ряда легко обосновывается). Из (20.29) после замены $x - t = h\tau$ получаем

$$\frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} = \frac{1}{h^{\alpha}} (\Delta_h^{\alpha} I_{+}^{\alpha} \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}_{\alpha}(\tau) \varphi(x - \tau h)\, d\tau, \tag{20.30}$$

где $\mathrm{p}_{\alpha}(\tau)$ — функция (20.14). В силу леммы 20.1 ядро $\mathrm{p}_{\alpha}(\tau)$ является усредняющим, так что, согласно теореме 1.3, правая часть в (20.30) сходится в $L_p(R^1)$ к $\varphi(x)$ при $h \to +0$. Поэтому из (20.30) $\lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ (L_p(R^1))}} \dfrac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} = \varphi(x) = (\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f)(x)$.

Обратно, пусть существует производная Грюнвальда — Летникова $f_{+}^{\alpha)}(x)$. Докажем тождество

$$I_{+}^{\alpha}\left(\frac{\Delta_h^{\alpha} f}{h^{\alpha}}\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}_{\alpha}(t) f(x - ht)\, dt \tag{20.31}$$

в предположениях теоремы относительно $f(x)$. На «хороших» функциях $f(x)$ тождество (20.31) немедленно сводится к (20.30), так как I_{+}^{α} и Δ_h^{α} коммутируют на хороших функциях. Суть дела заключается в обосновании тождества (20.31) в ситуации, когда I_{+}^{α} применимо к $\Delta_h^{\alpha} f$, но не применимо, вообще говоря, к каждому члену ряда $\Delta_h^{\alpha} f$. Для получения (20.31) воспользуемся приемом, примененным при доказательстве теоремы 6.2. Пусть A_{ξ} — оператор (6.22). Имеем (на «хороших» функциях):

$$A_\xi(\Delta_h^\alpha f/h^\alpha) = h^{-\alpha}[(I_+^\alpha \Delta_h^\alpha f)(x) - (I_+^\alpha \Delta_h^\alpha f)(x-\xi)] =$$
$$= h^{-\alpha}[(\Delta_h^\alpha I_+^\alpha f)(x) - (\Delta_h^\alpha I_+^\alpha f)(x-\xi)].$$

Применяя тождество (20.30), получаем

$$A_\xi(\Delta_h^\alpha f/h^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(t) f(x-th)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(t) f(x-\xi-th)\,dt. \quad (20.32)$$

Ввиду ограниченности в L_r операторов в левой и правой частях равенство (20.32) справедливо не только на «хороших» функциях, но и на всем пространстве L_r. Тождество (20.32) означает, что

$$\Delta_\xi^1 I_+^\alpha\left(\frac{1}{h^\alpha}\Delta_h^\alpha f\right) = \Delta_\xi^1 \frac{1}{h} p_\alpha\left(\frac{x}{h}\right) * f, \quad (20.33)$$

где Δ_ξ^1 — разность первого порядка. Так как функции, имеющие тождественно совпадающие конечные разности, сами могут отличаться только на постоянную, а рассматриваемые функции принадлежат $L_r(R^1)$, то эта постоянная равна нулю и из (20.33) получаем (20.31).

Переходя же в (20.31) к пределу при $h \to 0$ в соответствии с теоремой 1.3 и на основании свойств ядра $p_\alpha(t)$, получаем, что $f(x) = I_+^\alpha\left(\lim\limits_{h\to+0}\frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha}\right) = I_+^\alpha \varphi$, $\varphi = f_+^{\alpha)}$. Таким образом, существование у функции $f(x)$ производной Грюнвальда — Летникова влечет за собой представимость функции $f(x)$ дробным интегралом от этой производной, а тогда функция $f(x)$ имеет, согласно теореме 6.1, дробную производную Маршо, совпадающую с $\varphi = f_+^{\alpha)}$. Теорема доказана.

Докажем, наконец, теорему, аналогичную теореме 20.3.

Теорема 20.5. *Пусть* $f(x) \in L_r(R^1)$, $1 \leqslant r < \infty$. *Для того чтобы* $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leqslant ch^\alpha, \quad h > 0. \quad (20.34)$$

Доказательство. Необходимость вытекает из равенства (20.30). Для доказательства достаточности воспользуемся тождеством (20.31), справедливым при наших предположениях о $f(x)$. Из равномерной ограниченности в L_p функций $h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f$ вытекает в силу слабой компактности пространства $L_p(R^1)$ существование такой последовательности $h_m \to 0$ и функции $\varphi(x) \in L_p(R^1)$, что $h_m^{-\alpha}\Delta_{h_m}^\alpha f$ слабо сходится к $\varphi(x)$ в $L_p(R^1)$. Так как правая часть в (20.31) сходится к $f(x)$ по норме L_r, то и тем более она слабо сходится в L_r. Тогда существует слабый предел (w-lim) в L_r и левой части:

$$\underset{\substack{m\to\infty\\(L_r)}}{\text{w-lim}} I_+^\alpha(\Delta_{h_m}^\alpha f/h_m^\alpha) = f(x). \quad (20.35)$$

Кроме того, так как $h_m^{-\alpha}\Delta_{h_m}^\alpha f$ слабо сходится в L_p, а оператор I_+^α ограничен из L_p в L_q, $q = p/(1-\alpha p)$, то существует и предел

$$\underset{\substack{m\to\infty\\(L_q)}}{\text{w-lim}} I_+^\alpha\left(\frac{\Delta_{h_m}^\alpha f}{h_m^\alpha}\right) = I_+^\alpha\left(\underset{\substack{m\to\infty\\(L_p)}}{\text{w-lim}}\frac{\Delta_{h_m}^\alpha f}{h_m^\alpha}\right) = I_+^\alpha\varphi. \quad (20.36)$$

Так как слабые пределы в L_q и в L_r одной и той же последовательности обязаны совпадать почти всюду, то из (20.35), (20.36) заключаем, что $I_+^\alpha\varphi = f(x)$ почти всюду, что и требовалось.

Замечание 20.3′. Подобно (20.26′) справедливо уточнение неравенства (20.34):

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leqslant ch^\alpha \|\mathbf{D}_+^\alpha f\|_p, \quad c = \int_{-\infty}^{\infty} |p_\alpha(x)|\,dx, \quad h > 0, \tag{20.34'}$$

для $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$, что вытекает из (20.30). Для таких функций $f(x)$ справедливо также неравенство

$$|(\Delta_h^\alpha f)(x)| \leqslant ch^\alpha \sup_x |(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x)|, \quad h > 0. \tag{20.34''}$$

Замечание 20.4. В непериодическом случае мы ограничились для простоты рассмотрением функций, заданных на всей прямой. Теорема 20.4 остается, очевидно, справедливой и на полуоси R_+^1 для правостороннего дробного дифференцирования $f_-^{\alpha)}$ и $\mathbf{D}_-^\alpha f$ (достаточно продолжить $f(x)$ нулем на отрицательную полуось).

Отвечающее же случаю полуоси утверждение теоремы 20.5 (также получаемое продолжением нулем) сформулируем особо.

Теорема 20.5'. *Пусть* $f(x) \in L_r(R_+^1)$, $1 \leqslant r < \infty$. *Для того чтобы* $f(x)$ *имела в* $L_p(R_+^1)$ *дробную производную Маршо* $\mathbf{D}_-^\alpha f = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}_{-,\varepsilon}^\alpha f$, $1 < p < 1/\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\|\Delta_{-h}^\alpha f\|_p \leqslant ch^\alpha$, $h > 0$, *где* c *не зависит от* h.

Замечание 20.5. Теоремы 20.4 и 20.5' даны для $p \in (1, 1/\alpha)$, но можно показать, что они справедливы для $p \in (1, \infty)$, что требует, однако, других средств доказательства.

4°. Дробное дифференцирование Грюнвальда—Летникова на конечном отрезке. Непосредственное определение разности $\Delta_h^\alpha f$ дробного порядка равенством (20.2) предполагает задание функции $f(x)$ по крайней мере на полуоси. В случае функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[a, b]$, естественный способ определения разности $\Delta_h^\alpha f$ состоит в том, чтобы предварительно продолжить $f(x)$ нулем за пределы отрезка $[a, b]$. Обозначив поэтому

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

для функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, по определению полагаем

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) \overset{\text{def}}{=} (\Delta_h^\alpha f^*)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f^*(x - jh). \tag{20.37}$$

Определение (20.37) можно, очевидно, переписать в терминах самой функции $f(x)$, явно не используя ее продолжение:

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh), \quad x > a, \tag{20.38}$$

$$(\Delta_{-h}^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x + jh), \quad x < b, \tag{20.39}$$

где $h > 0$. После этого дробные производные $f_{a+}^{\alpha)}$, $f_{b-}^{\alpha)}$ типа Грюнвальда—Летникова вводятся тем же способом, что и на всей прямой:

$$f_{a+}^{\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh), \tag{20.40}$$

$$f_{b-}^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}f(x+jh). \tag{20.41}$$

Можно выбрать в (20.38), (20.39) переменный шаг h, зависящий от x: $h=(x-a)/n$ в (20.38), $h=(b-x)/n$ в (20.39), и тогда определение (20.40) примет вид

$$f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}f\left(x-j\frac{x-a}{n}\right) \tag{20.42}$$

и аналогично для $f_{b-}^{(\alpha)}$.

Именно таким способом определяли дробную производную А. Грюнвальд и А. В. Летников. На этом пути можно строить независимую теорию дробного дифференцирования, отправляясь непосредственно от определений (20.40), (20.41). В этом, однако, нет особой необходимости ввиду того, что и в случае отрезка дробные производные Грюнвальда — Летникова совпадают с другими более употребляемыми формами дробного дифференцирования, в частности с производной Маршо. Справедлива следующая

Теорема 20.6. *Пусть $f(x)\in L_p(a,\ b)$, $1\leqslant p<\infty$. Предел (20.40) по норме пространства $L_p(a,\ b)$ существует тогда и только тогда, когда существует в $L_p(a,\ b)$ дробная производная Маршо (13.9) и они совпадают:*

$$f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt,\quad 0<\alpha<1. \tag{20.43}$$

Эта теорема является непосредственным следствием из определения (20.40), равенства (20.37), теоремы 20.4 и равенств (13.2), (13.4).

На основании совпадения (20.43) двух определений дробного дифференцирования можно получать различные свойства для объектов (20.40), (20.41). Отметим, в частности, простейшие формулы, вытекающие из (20.43):

$$f(x)\equiv 1\Rightarrow f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} \tag{20.44}$$

(хотя (20.37) устанавливается и непосредственно с учетом (20.4));

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}(x-jh-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \tag{20.45}$$

(ср. с (2.44)) и т. п.

Остановимся особо на определении дробного интегрирования по Грюнвальду — Летникову (см. замечания 20.1, 20.2). Положим, отправляясь от (20.40):

$$J_{a+}^{\alpha}\varphi=\lim_{h\to+0}h^{\alpha}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}(-1)^{j}\binom{-\alpha}{j}\varphi(x-jh)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{h\to+0}h^{\alpha}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)}\varphi(x-jh). \tag{20.46}$$

Аналогично определяется $J^{\alpha}_{b-}\varphi$. Покажем, что конструкция (20.46) в точности совпадает с дробным интегралом Римана—Лиувилля.

Теорема 20.7. *Пусть* $\alpha>0$ *и* $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. *Предел (20.46) существует почти для всех* x *и*

$$J^{\alpha}_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \varphi(x-t)\, t^{\alpha-1} dt. \tag{20.47}$$

Доказательство. Так как функция $t^{\alpha-1}\varphi(x-t)$ интегрируема при почти всех x, то правая часть в (20.47) при почти всех x есть предел интегральной суммы $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Sigma \varphi(x-\xi_j)\xi_j^{\alpha-1}\Delta x_j$, $x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}$. Выбрав здесь, в частности, $x_j = jh$, $j \leqslant [(x-a)/h]$ и $\xi_j = x_j$, получаем $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{h\to+0} h^{\alpha} \sum_{j=1}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} j^{\alpha-1}\varphi(x-jh)$. Это совпадает с пределом (20.46), поскольку $\left| j^{\alpha-1} - \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)} \right| \leqslant \frac{c}{j^{2-\alpha}}$ согласно (1.66), а $\lim_{h\to+0} h^{\alpha} \sum_{j=1}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} j^{\alpha-2}|\varphi(x-jh)| = 0$ почти для всех x.

Можно доказать утверждение, аналогичное теореме 20.7 и для функций, заданных на оси или полуоси, в случае достаточно быстрого их убывания на бесконечности.

§ 21. ОПЕРАТОРЫ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

Одним из непосредственных обобщений дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $I^{\alpha}_{b-}\varphi$ на конечном отрезке $[a, b]$ вещественной оси являются интегралы вида

$$(I^{\alpha,\beta}_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt,$$

$$(I^{\alpha,\beta}_{b-}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t-x}}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \tag{21.1}$$

$$\alpha > 0,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma > b-a,$$

содержащие наряду со степенной и логарифмическую особенность. Будем называть их *операторами со степенно-логарифмическими ядрами*. Такие интегралы возникают при исследовании интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмическими ядрами (см. § 32, 33).

Обращение операторов $I^{\alpha,\beta}_{a+}$ будет получено в § 32. В этом параграфе рассмотрим действие операторов со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах гельдеровских и суммируемых функций. Полученные результаты, формулируемые и доказываемые для интегралов $I^{\alpha,\beta}_{a+}\varphi$, обобщают некоторые результаты § 3 для дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi = I^{\alpha,0}_{a+}\varphi$. Отметим также, что для операторов (21.1) существенную роль

играет класс $H^{\lambda, k}$ (см. определение 1.7) в отличие от операторов дробного интегрирования, где он появляется только в отдельных случаях (см. теоремы 3.1 и 3.6). Излагаемые здесь результаты будут использованы ниже в § 34.

1°. Действие в пространстве H^{λ}. Следующая ниже теорема показывает, как операторы со степенно-логарифмическим ядром улучшают порядок гельдеровости функции $\varphi(t)$ вне точки $x=a$ (ср. с теоремой 3.1).

Теорема 21.1. *Пусть* $\varphi(t)\in H^{\lambda}([a, b])$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. *Если* $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$, *то*

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) = \frac{\varphi(a)}{\Gamma(\alpha)}\Phi_{\beta,\alpha}(x)+\psi(x), \tag{21.2}$$

где

$$\Phi_{\beta,\alpha}(x) = \int_0^{x-a} t^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}\,dt, \tag{21.3}$$

а $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha,\beta}$ *при* $\lambda+\alpha\neq 1$ *и* $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha,\beta+1}$ *при* $\lambda+\alpha=1$, *при этом*

$$|\psi(x)|\leqslant A(x-a)^{\lambda+\alpha}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-a},\quad A>0\ (x\to a). \tag{21.4}$$

Функция $\Phi_{\beta,\alpha}(x)$ *бесконечно дифференцируема вне точки* $x=a$, *а при* $x\to a$ *имеет степенно-логарифмическое поведение:*

$$\Phi_{m,\alpha}(x) = (x-a)^{\alpha}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m)_k}{\alpha^{k+1}}\ln^{m-k}\frac{\gamma}{x-a} \tag{21.5}$$

при целом $\beta=m$. *Если* β *нецелое, то при любом* $N=1, 2, \ldots$

$$\Phi_{\beta,\alpha}(x) = (x-a)^{\alpha}\sum_{k=0}^{N}\frac{(\beta)_k}{\alpha^{k+1}}\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{x-a}+r_N(x), \tag{21.6}$$

где $r_N(x) = \dfrac{(\beta)_{N+1}}{\alpha^{N+1}}\dfrac{(x-a)^{\alpha}}{\left(\ln\dfrac{\gamma}{x-a}\right)^{N+1-\beta}}$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1, достаточно рассмотреть случай $\beta>0$. Равенство (21.2) получаем, если положим

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,[\varphi(t)-\varphi(a)]\,dt.$$

Равенства (21.5), (21.6) выводятся из (21.3) последовательным интегрированием по частям. Для функции $\psi(x)$ имеем

$$|\psi(x)|\leqslant\Gamma^{-1}(\alpha)\|\varphi\|_{H^{\lambda}}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\lambda}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,dt$$

или после замены $t=a+\tau(x-a)$

$$|\psi(x)|\leqslant c(x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1\tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\lambda}\left(\ln\frac{1}{x-a}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta}d\tau.$$

Применяя известную оценку

$$(a+b)^{\nu}\leqslant 2^{\max(\nu,1)}(a^{\nu}+b^{\nu}),\quad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\quad \nu>0 \tag{21.7}$$

(см., например, Н. К. Бари [1, с. 31]), получаем неравенство $|\psi(x)| \leqslant (x-a)^{\lambda+\alpha}\left[c_1\left|\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-a}\right| + c_2\right]$, откуда вытекает (21.4).

Рассматривая далее $\psi(x)$, считаем для простоты, что $a=0$, $b=1$, $\gamma > 1$. Обозначим

$$g(x) = \varphi(x) - \varphi(0), \quad |g(x)| \leqslant \|\varphi\|_{H^\lambda} x^\lambda. \tag{21.8}$$

Заметим, что

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \|\varphi\|_{H^\lambda} |x-y|^\lambda. \tag{21.9}$$

Пусть $0 < h < 1/2$; x, $x+h \in [0, 1]$. Исследуем вначале случай $\lambda + \alpha \leqslant 1$. Имеем $\Gamma(\alpha)[\psi(x+h) - \psi(x)] = g(x)\int\limits_x^{x+h} t^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}\,dt + \int\limits_{-h}^{0}(t+h)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t+h}[g(x-t)-g(x)]\,dt + \int\limits_0^x\left[\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{1-\alpha}} - \frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}}{t^{1-\alpha}}\right]\times [g(x-t)-g(x)]\,dt = I_1 + I_2 + I_3$.

Согласно (21.8), $|I_1| \leqslant \|\varphi\|_{H^\lambda} x^\lambda \int\limits_x^{x+h} t^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}\,dt$. Если $x \leqslant h$, то, осуществляя замену $t = h\tau$ и учитывая неравенство (21.7), находим $|I_1| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}\left|\int\limits_0^{2h}\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}}{t^{1-\alpha}}\,dt\right| = ch^{\lambda+\alpha}\int\limits_0^2\frac{\left|\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right|^{\beta}}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau \leqslant h^{\lambda+\alpha}\left(c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h} + c_2\right) \leqslant ch^{\lambda+\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$. Если же $x > h$, то, производя замену $t = x\tau$ и опять используя (21.7), имеем $|I_1| \leqslant cx^{\lambda+\alpha}\int\limits_1^{1+h/x}\frac{\left(\ln\frac{\gamma}{\tau}+\ln\frac{1}{x}\right)^{\beta}}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau \leqslant cx^{\lambda+\alpha}\left(\ln^{\beta}\frac{1}{x}\int\limits_1^{1+h/x}\tau^{\alpha-1}d\tau + \int\limits_1^{1+h/x}\tau^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau}\,d\tau\right)$. Так как $\tau^{\alpha-1}\times \ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau} \leqslant \ln^{\beta}\gamma$, то отсюда $|I_1| \leqslant \frac{c_1 h}{x^{1-\alpha-\lambda}}\left(\ln^{\beta}\frac{1}{x}+1\right) \leqslant ch^{\lambda+\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$ и при $x > h$.

Далее, после замены $t = h(\tau-1)$ в I_2 с учетом (21.7) и (21.8) получаем $|I_2| \leqslant c\int\limits_{-h}^{0}\frac{|t|^{\lambda}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{1-\alpha}}\,dt \leqslant ch^{\lambda+\alpha}\int\limits_0^1\frac{\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta}(1-\tau)^{\lambda}}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau \leqslant ch^{\lambda+\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$.

Оценим, наконец, I_3: $|I_3| \leqslant c\int\limits_0^x\left|\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{1-\alpha}} - \frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}}{t^{1-\alpha}}\right|dt = ch^{\lambda+\alpha}\int\limits_0^{x/h}\tau^{\lambda}\left|\tau^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{h\tau}\right|d\tau$. Отсюда при $x \leqslant h$ в силу (21.7) находим

$$|I_3| \leqslant c_1 h^{\lambda+\alpha} \int_0^1 \tau^{\alpha+\lambda-1} \left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right)^{\beta} d\tau \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^{\beta} \frac{1}{h},$$

а если $x > h$, то $|I_3| \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \left(\int_0^1 + \int_1^{x/h} \right) \tau^{\lambda} \left| \tau^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{h\tau} - (\tau+1)^{\alpha-1} \times \right.$

$\left. \times \ln^{\beta} \frac{\gamma}{h(\tau+1)} \right| d\tau = I_{31} + I_{32}$. Для I_{31} аналогично предыдущему устанавливаем, что $|I_{31}| \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^{\beta}(1/h)$, а для I_{32} используем вытекающую из теоремы о среднем оценку

$$\left| \tau^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\tau} - (\tau+1)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\tau+1} \right| \leqslant c\tau^{\alpha-2} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\tau}, \quad \tau \geqslant 1. \quad (21.10)$$

Тогда с учетом (21.7) имеем $|I_{32}| \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \int_1^{x/h} \frac{\left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right)^{\beta}}{\tau^{2-\alpha-\lambda}} d\tau \leqslant$

$\leqslant ch^{\lambda+\alpha} \left(\ln^{\beta} \frac{1}{h} \int_1^{x/h} \frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha-\lambda}} + \int_1^{x/h} \frac{\ln^{\beta} \frac{\gamma}{\tau}}{\tau^{2-\alpha-\lambda}} d\tau \right)$. Отсюда при $\lambda + \alpha < 1$ в силу сходимости интегралов $\int_1^{\infty} \tau^{\alpha+\lambda-2} d\tau$ и $\int_1^{\infty} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\tau} \tau^{\alpha+\lambda-2} d\tau$ получаем, что $|I_{32}| \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^{\beta} \frac{1}{h}$, а если $\lambda + \alpha = 1$, то $|I_{32}| \leqslant h^{\lambda+\alpha} \left(c \ln^{\beta} \frac{1}{h} \ln \frac{x}{h} + \right.$

$\left. + c_1 \ln^{\beta+1} \frac{x}{h} + c_2 \right) \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^{\beta+1} \frac{1}{h}$. Собирая оценки для I_1, I_2 и I_3, приходим к утверждению теоремы при $\lambda + \alpha \leqslant 1$.

Пусть теперь $\lambda + \alpha > 1$. Нужно показать, что $\psi'(x) = (d/dx) I_{0+}^{\alpha;\beta} g \in$ $\in H^{\lambda+\alpha-1,\beta}$. Преобразуем $\frac{d}{dx} I_{0+}^{\alpha;\beta} g$ к виду

$$\Gamma(\alpha) \frac{d}{dx} (I_{0+}^{\alpha;\beta} g)(x) = x^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x} g(x) +$$

$$+ \int_0^x \frac{d}{dt} \left(t^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{t} \right) [g(x-t) - g(x)] dt = G_1(x) + G_2(x). \quad (21.11)$$

Для непрерывно дифференцируемых функций g формула (21.11) проверяется непосредственным дифференцированием с последующим интегрированием по частям. Для гельдеровских g равенство левой и правой частей (21.11) доказывается так же, как и равенство лиувиллевской дробной производной и производной Маршо на отрезке (см. в § 13 следствие из теоремы 13.1 и следствие из леммы 13.2).

Покажем, что в (21.11) $G_1(x)$, $G_2(x) \in H^{\lambda+\alpha-1,\beta}$. Имеем $G_1(x+h) -$ $- G_1(x) = (x+h)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x+h} [g(x+h) - g(x)] + \left[(x+h)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x+h} - \right.$

$\left. - x^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x} \right] g(x) = G_{11} + G_{12}$. Для G_{11} с учетом (21.9) получаем $|G_{11}| \leqslant$ $\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{1}{h}$. Для G_{12} в силу (21.8) находим $|G_{12}| \leqslant Ax^{\lambda} \left| x^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x} - \right.$

$-(x+h)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h}\Big|$. Отсюда при $x\leqslant h$ имеем $|G_{12}|\leqslant 2Ax^{\lambda+\alpha-1}\times$ $\times\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x}\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$. Если же $x>h$, то, согласно (21.10), $|G_{12}|\leqslant$ $\leqslant cx^{\lambda+\alpha-2}h\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x}\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$. Введем обозначение

$$K(t)=\frac{d}{dt}\left(t^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}\right),\quad |K(t)|\leqslant ct^{\alpha-2}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t}. \tag{21.12}$$

Тогда $G_2(x+h)-G_2(x)=\int\limits_{-h}^{0}K(t+h)\,[g(x-t)-g(x+t)]\,dt+[g(x+h)-$ $-g(x)]\int\limits_{0}^{x}K(t+h)\,dt+\int\limits_{0}^{x}[K(t+h)-K(t)]\,[g(x-t)-g(x)]\,dt=G_{21}+$ $+G_{22}+G_{23}$. Для G_{21} в силу (21.9), (21.12) и (21.7) получаем $|G_{21}|\leqslant$ $\leqslant c\int\limits_{-h}^{0}(t+h)^{\lambda+\alpha-2}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t+h}\,dt\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\int\limits_{0}^{1}\tau^{\lambda+\alpha-2}\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta}d\tau\leqslant$ $\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$. Далее, $|G_{22}|\leqslant ch^{\lambda}\int\limits_{0}^{x}(t+h)^{\alpha-2}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t+h}\,dt=ch^{\lambda+\alpha-1}\times$ $\times\int\limits_{0}^{x/h}(\tau+1)^{\alpha-2}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\,d\tau\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\left(\ln^{\beta}\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{x/h}(\tau+1)^{\alpha-2}\,d\tau+\right.$ $\left.+\int\limits_{0}^{x/h}(\tau+1)^{\alpha-2}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau+1}\,d\tau\right)\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$ в силу сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{\infty}(\tau+1)^{\alpha-2}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau+1}\,d\tau$ при $\beta\geqslant 0$. Наконец, для G_{23}, согласно (21.12) и (21.9), имеем

$$|G_{23}|\leqslant\sum_{k=0}^{1}c_k\int\limits_{0}^{x}\left|\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{2-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{t}}{t^{2-\alpha}}\right|t^{\lambda}dt=$$

$$=h^{\lambda+\alpha-1}\sum_{k=0}^{1}c_k\int\limits_{0}^{x/h}\left|\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{\tau h}}{\tau^{2-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}}{(\tau+1)^{2-\alpha}}\right|\tau^{\lambda}\,d\tau.$$

Отсюда при $x\leqslant h$ находим

$$|G_{23}|\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\sum_{k=0}^{1}c_k\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{\left|\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{\tau h}\right|}{\tau^{2-\alpha-\lambda}}\,d\tau+\int\limits_{0}^{1}\frac{\left|\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\right|}{(\tau+1)^{2-\alpha}\tau^{-\lambda}}\,d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\left(c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+c_2\ln^{\max(0,\beta)}\frac{1}{h}\right)\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{1}{h}.$$

Если же $x>h$, то, согласно (21.10) и (21.7),

$$|G_{23}|\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\sum_{k=0}^{1}c_k\left(\int\limits_{0}^{1}+\int\limits_{1}^{x/h}\right)\left|\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{\tau h}}{\tau^{2-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}}{(\tau+1)^{2-\alpha}}\right|\tau^{\lambda}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\left(c\ln^{\beta}\frac{1}{h}+\sum_{k=0}^{1}c_k\int_1^{x/h}\frac{\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta-k}}{\tau^{3-\alpha-\lambda}}\,d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{1}{h},$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Оператор*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,dt,\quad 0<\alpha<1,\ \beta\geqslant 0,$$

ограниченно действует из пространства H^{λ}, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, *в пространство* $H^{\lambda+\alpha,\beta}$, *если* $\lambda+\alpha\neq 1$, *и в пространство* $H^{\lambda+\alpha,\beta+1}$, *если* $\lambda+\alpha=1$.

Следствие 2. *Оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из пространства* $C=H^0$ *в* $H^{\alpha,\beta}$.

Замечание 21.1. Оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограничен даже из L_∞ в $H^{\alpha,\beta}$, что усматривается из анализа доказательства.

2°. Действие в пространстве $H_0^{\lambda}(\rho)$. Так же, как в § 3, начнем исследования со случая простейших весов $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$ и $\rho(x)=(b-x)^{\mu}$.

Теорема 21.2. *Пусть* $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$. *Тогда оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $\beta\geqslant 0$, *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\lambda}(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$, *если* $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $\mu<\lambda+1$, *или* $\rho(x)=(b-x)^{\nu}$, $\nu>\lambda+\alpha$.

Доказательство. Пусть сначала $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$. В силу теоремы 3.3 достаточно рассмотреть случай $\beta>0$. Считаем, что $a=0$, $b=1$. Пусть $\varphi(t)\in H_0^{\lambda}(\rho)$, так что $\varphi(t)=g(t)\,t^{-\mu}$, где $g(t)\in H^{\lambda}$, $g(0)=0$. Нужно показать, что $G(x)=\int_0^x\left(\frac{x}{t}\right)^{\mu}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\in H_0^{\lambda+\alpha,\beta}$ и $\|G\|_{H^{\lambda+\alpha,\beta}}\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}$.

Представим $G(x)$ в виде

$$G(x)=\int_0^x\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt+\int_0^x\frac{[x^{\mu}-t^{\mu}]}{t^{\mu}(x-t)^{1-\alpha}}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,g(t)\,dt=$$

$$=\Phi(x)+\Psi(x).\qquad(21.13)$$

В соответствии с теоремой 21.1 $\Phi(x)\in H_0^{\lambda+\alpha,\beta}$. Для $\Psi(x)$ имеем (см. (3.7))

$$\Psi(x+h)-\Psi(x)=\int_x^{x+h}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}\,\frac{(x+h)^{\mu}-t^{\mu}}{t^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt+$$

$$+[(x+h)^{\mu}-x^{\mu}]\int_0^x\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}\,\frac{(x+h-t)^{\alpha-1}}{t^{\mu}}\,g(t)\,dt+\qquad(21.14)$$

$$+\int_0^x\frac{x^{\mu}-t^{\mu}}{t^{\mu}}\left[\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}}{(x+h-t)^{1-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]g(t)\,dt=J_1+J_2+J_3.$$

Оценим J_1. Пусть $\mu \leqslant 1$. Так как $|g(t)| \leqslant \|g\|_{H^\lambda} t^\lambda$, то в силу (3.9) и (21.7) находим, что

$$|J_1| \leqslant |\mu| \|g\|_{H^\lambda} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^\alpha}{(t-x)^{1-\lambda}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} dt \leqslant |\mu| \|g\|_{H^\lambda} h^{\lambda+\alpha} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{\tau^\alpha}{(1-\tau)^{1-\lambda}} \left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau}\right)^\beta d\tau \leqslant c \|g\|_{H^\lambda} h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Если же $\mu > 1$, то, согласно (3.8),

$$|J_1| \leqslant |\mu| \|g\|_{H^\lambda} (x+h)^{\mu-1} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^\alpha}{t^{\mu-\lambda}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} dt \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{h^\alpha \ln^\beta \frac{\gamma}{h}}{(x+h)^{1-\mu}} \int_x^{x+h} \frac{dt}{t^{\mu-\lambda}} = c \frac{h^\alpha \ln^\beta \frac{\gamma}{h}}{(x+h)^{1-\mu}} [(x+h)^{\lambda-\mu+1} - x^{\lambda-\mu+1}] \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} (x+h)^{\lambda-1} \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Оценим J_2. Если $x \leqslant h$, то при $\mu \geqslant 0$ имеем

$$|J_2| \leqslant ch^\mu \int_0^x \frac{t^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} dt \leqslant ch^{\mu+\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} \int_0^x t^{\lambda-\mu} dt \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\mu+\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} x^{\lambda-\mu+1} \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h},$$

а при $\mu < 0$

$$|J_2| \leqslant cx^\mu \int_0^x \frac{t^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} dt \leqslant cx^\mu h^{\alpha-1} \times$$

$$\times \ln^\beta \frac{\gamma}{h} \int_0^x t^{\lambda-\mu} dt = ch^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} x^{\lambda+1} \leqslant ch^{\alpha+\lambda} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Если же $x > h$, то, применяя неравенства (3.9) и (21.7), при $\mu \leqslant 1$ получаем

$$|J_2| \leqslant |\mu| hx^{\mu-1} \int_0^x \frac{t^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} dt \leqslant$$

$$\leqslant ch \int_0^x \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}}{t^{1-\lambda}(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{ch}{x^{1-\lambda-\alpha}} \int_0^1 \frac{\left(\ln \frac{\gamma}{x} + \ln \frac{1}{h}\right)^\beta}{(1-\tau)^\lambda \tau^{1-\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{h \ln^\beta \frac{1}{h}}{x^{1-\lambda-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h},$$

а при $\mu > 1$ в силу (3.8)

$$|J_2| \leqslant \mu h (x+h)^{\mu-1} \int_x^{x+h} \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t}}{t^{\mu-\lambda}(x+h-t)^{1-\alpha}}\, dt = \mu \frac{h}{(x+h)^{1-\lambda-\alpha}} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-\mu} \tau^{\alpha-1} \left(\ln \frac{\gamma}{x+h} + \ln \frac{1}{\tau} \right)^\beta d\tau \leqslant c \frac{h}{(x+h)^{1-\lambda-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h} \leqslant$$

$$\leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Для J_3, произведя замену $t = sx$, находим оценку

$$|J_3| \leqslant \|g\|_{H^\lambda} x^{\lambda+\alpha} \int_0^1 \frac{1-s^\mu}{s^{\mu-\lambda}} \left| \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{1-s+h/x}}{(1-s+h/x)^{1-\alpha}} - \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{1-s}}{(1-s)^{1-\alpha}} \right| ds.$$

Если $x \leqslant h$, то $|J_3| \leqslant c \|g\|_{H^\lambda} h^{\lambda+\alpha}$, а при $x > h$, согласно (21.10), справедливо

$$|J_3| \leqslant \|g\|_{H^\lambda} x^{\lambda+\alpha-1} h \int_0^1 \frac{1-s^\mu}{s^{\mu-\lambda}(1-s)^{2-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{1-s}\, ds \leqslant c \|g\|_{H^\lambda} h^{\lambda+\alpha}.$$

Собирая оценки для J_1, J_2 и J_3, получаем

$$|\Psi(x+h) - \Psi(x)| \leqslant c \|g\|_{H^\lambda} h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Отсюда, учитывая (21.13) и неравенство $|G(x)| \leqslant c \|g\|_{H^\lambda} x^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{\gamma}{x}$ заключаем, что $G(x) \in H^{\lambda+\alpha,\beta}$. Таким образом, для случая $\rho(x) = (x-a)^\mu$, $\mu < \lambda + 1$, теорема доказана. Доказательство теоремы для случая $\rho(x) = (b-x)^\nu$, $\nu > \lambda + \alpha$, производится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.3, с использованием неравенств (3.8), (3.9), (21.7) и (21.10).

Из теоремы 21.2 вытекает утверждение, аналогичное теореме 3.3′.

Теорема 21.2′. *Пусть* $0 < \lambda < 1$, $\lambda + \alpha < 1$. *Тогда оператор* I^α_{a+} *ограниченно действует из* $H^\lambda_0(\rho)$ *в* $H^{\lambda+\alpha,\beta}_0(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, $\mu < \lambda + 1$, $\nu > \lambda + \alpha$.

Доказательство теоремы 21.2′ проводится аналогично доказательству теоремы 3.3′ с использованием следующего неравенства для функций из $H^{\lambda,\beta}_0(\rho)$: $\|g\|_{H^{\lambda,\beta}(\rho)} \leqslant \max(\|g\|_{H^{\lambda,\beta}(\rho_a)}, \|g\|_{H^{\lambda,\beta}(\rho_b)})$, где $\rho_a(x) = (x-a)^\mu$, $\rho_b(x) = (b-x)^\nu$.

Для распространения теоремы 21.2 и теоремы 21.2′ на случай общего веса (1.7) требуется утверждение типа леммы 3.1 для интегралов с ядром $(x+t)^{\alpha-1} \ln^\mu \frac{\gamma}{x+t}$, $x > 0$, $t > 0$, которое имеет следующий вид.

Лемма 21.1. *Пусть функция* $\varphi(x)$, $0 < x \leqslant l$, *допускает оценку* $|\varphi(x)| \leqslant kx^{-\nu}$, $\alpha < \gamma < 1$. *Тогда*

$$f(x) = \int_0^l \frac{\ln^\mu \frac{\gamma}{x+t}}{(x+t)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt \in H^{\alpha+\beta,\mu}([0, l];\ x^{\nu+\beta})$$

для любых $\mu \geqslant 0$, $\gamma > 2l$ *и* $\beta \geqslant 0$ *таких, что* $\alpha + \beta \leqslant 1$, *при этом* $\|f\|_{H^{\alpha+\beta,\mu}(x^\gamma+\beta)} \leqslant ck$, *где постоянная* c *не зависит от* $\varphi(x)$.

Доказательство леммы осуществляется с использованием неравенств (21.7), (21.10) по аналогии с доказательством леммы 3.1.

Теорема 21.3. *Пусть* $\rho(x)$ — *вес (3.12),* $\lambda + \alpha < 1$ *и выполняются условия:*

1) $\mu_1 < \lambda + 1$;
2) $\lambda + \alpha < \mu_k < \lambda + 1$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$;
3) $\lambda + \alpha < \mu_n < \lambda + 1$ *при* $x_n < b$ *и* $\lambda + \alpha < \mu_n$ *при* $x_n = b$.

Тогда оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* $H_0^\lambda(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.4, с использованием теорем 21.2, 21.2′ и леммы 21.2.

Замечание 21.2. Условие $\lambda + \alpha < \mu_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, в теореме 21.3 ослабить нельзя: при $\lambda + \alpha \geqslant \mu_k$ теорема 21.3 становится неверной. Действительно, положив $\rho(x) = (b-x)^\mu$, $\mu \leqslant \lambda + \alpha$ и $\varphi(x) = (x-a)^\lambda \times (b-x)^\mu$, непосредственной проверкой устанавливаем, что $(\rho I_{a+}^{\alpha,\beta} \rho^{-1}\varphi)(x) = \dfrac{(b-x)^\mu}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{(t-a)^\lambda}{(b-t)^{\mu-\lambda}} (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, dt \neq O\left((b-x)^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{b-x}\right)$ при $x \to b$. Следовательно, $f = I_{a+}^{\alpha,\beta} \rho^{-1} \varphi \notin H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$ (см. также замечание 3.2).

3°. Действие в пространстве L_p. С помощью обобщенного неравенства Минковского легко показать, что оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограничен в пространстве $L_p = L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$: $\|I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi\|_{L_p} \leqslant c\|\varphi\|_{L_p} \dfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \ln^\beta \dfrac{\gamma}{b-a}$. Более точное описание этого утверждения содержат следующие две теоремы.

Теорема 21.4. *Если* $0 < \alpha < 1$, $\beta \geqslant 0$, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, *то оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из пространства* L_p *в пространство* L_s, $1 \leqslant s < q = p(1-\alpha p)^{-1}$.

Эта теорема следует из теоремы 3.5, так как

$$|I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi| \leqslant cI_{a+}^{\alpha-\varepsilon}(|\varphi|) \tag{21.15}$$

при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha < 1$.

Теорема 21.5. *Пусть* $p > 1$ *и* $1/p < \alpha \leqslant 1 + 1/p$. *Тогда оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* L_p *в* $H^{\alpha-1/p,\beta}$, *если* $\alpha < 1 + 1/p$, *и в* $H^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}$, *если* $\alpha = \dfrac{1}{p} + 1$, *причем*

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) = o\left((x-a)^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{x-a}\right) \quad \text{при } x \to a. \tag{21.16}$$

Доказательство. Для простоты будем считать, что $a = 0$, $b = 1$. Оценка (21.16) следует из неравенства Гельдера с учетом (21.7):

$$|I_{0+}^{\alpha,\beta}\varphi| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^x |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)p'} \ln^{\beta p'} \frac{\gamma}{x-t}\, dt\right)^{1/p'} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1/p} \left(\int_0^1 \tau^{(\alpha-1)p'} \left(\ln \frac{1}{x} + \ln \frac{\gamma}{\tau}\right)^\beta d\tau\right)^{1/p'} \left(\int_0^x |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant cx^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{x} \left(\int_0^x |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p}. \tag{21.17}$$

Пусть $x,\ x+h\in[0,\ 1]$ и $0<h\leqslant 1/2$. Имеем

$$\Gamma(\alpha)\,[(I_{0+}^{\alpha;\beta}\varphi)(x+h)-(I_{0+}^{\alpha;\beta}\varphi)(x)]=\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}\,\varphi(t)\,dt+\int_0^x\left[(x+h-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}-\right.$$

$$\left.-(x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\right]\varphi(t)\,dt=\Phi_1+\Phi_2. \qquad (21.18)$$

Применяя неравенство Гельдера и приняв во внимание (21.7), находим

$$|\Phi_1|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x+h-t}\,dt\right)^{1/p}=$$

$$=\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int_0^1\tau^{(\alpha-1)p'}\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{h}\right)^{\beta p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h},$$

$$|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int_0^{x/h}\left|\tau^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau h}-(\tau+1)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\right|^{p'}d\tau\right)^{1/p'}.$$

Отсюда при $x\leqslant h$ получаем $|\Phi_2|\leqslant 2\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int_0^1\tau^{(\alpha-1)p'}\left(\ln\frac{1}{h}+\right.\right.$ $\left.\left.+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant C\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$. Если же $x>h$, то, применяя неравенства (21.7) и (21.10), имеем $|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left\{\left(\int_0^1+\int_1^{x/h}\right)|\tau^{\alpha-1}\times\right.$ $\times\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau h}-(\tau+1)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\Big|^{p'}d\tau\Big\}^{1/p'}\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\Big[c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+$ $+c_2\left(\int_1^{x/h}\tau^{(\alpha-2)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau h}\,d\tau\right)^{1/p'}\Big]$. Тогда при $\alpha-1<1/p$: $|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}\times$ $\times h^{\alpha-1/p}\left(c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+c_2\right)\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$ в силу сходимости интеграла $\int_1^{\infty}\tau^{(\alpha-2)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau}\,d\tau$. Если же $\alpha-1=1/p$, то

$$|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left[c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+c_2\left(\ln^{\beta p'}\frac{1}{h}\int_1^{x/h}\frac{d\tau}{\tau}\right)^{1/p'}+\right.$$

$$\left.+c_3\left(\int_1^{(x-a)/h}\frac{\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau}}{\tau}\,d\tau\right)^{1/p'}\right]\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta+1/p'}\frac{1}{h}.$$

Собирая оценки для Φ_1 и Φ_2, завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что случаю $p=\infty$ в теореме 21.5 отвечает отраженное в замечании 21.1 утверждение об ограниченности $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ из L_∞ в $H^{\alpha,\beta}$.

Замечание 21.3. В случае чисто логарифмического ядра ($\alpha = 1$) и $0 < \beta < 1/p'$ утверждение теоремы 21.5 можно улучшить: при $0 < \beta < 1/p'$ оператор $I_{a+}^{1,\beta}$ ограниченно действует из L_p в H^β.

Действительно, оценим Φ_2 в (21.18). Используя неравенство $|a^\beta - b^\beta| \leqslant |a-b|^\beta$, $0 < \beta < 1$, и неравенство Гельдера, имеем

$$|\Phi_2| \leqslant \|\varphi\|_{L_p} h^{1/p'} \left(\int_0^{\frac{x-a}{h}} \ln^{\beta p'} \frac{t+1}{t}\, dt \right)^{1/p'} \leqslant \|\varphi\|_{L_p} h^{1/p'} \left[c + \right.$$

$$\left. + c_1 \left(\int_{\frac{h}{x-a}}^{1} \frac{dt}{t^{2-\beta p'}} \right)^{1/p'} \right] \leqslant \|\varphi\|_{L_p} h^{1/p'} \left[c + c_1 \left(\frac{h}{x-a} \right)^{\beta - 1/p'} \right] \leqslant$$

$$\leqslant c \|\varphi\|_{L_p} h^\beta .$$

4°. Действие в пространстве $L_p(\rho)$. Как и в п. 2°, рассмотрим вначале вес $\rho(x) = (x-a)^\mu$. Будем различать случаи $1 < p < 1/\alpha$ и $p > 1/\alpha$.

Теорема 21.6. *Если $p > 1$, $\mu < p - 1$, $0 < \alpha < 1/p$, то оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^\mu$, в $L_s(r)$, где $1 \leqslant s < q = p\,(1 - \alpha p)^{-1}$, $r(x) = (x-a)^{\mu q/p}$.*

Эта теорема следует из теоремы 3.7 в силу (21.15).

Теорема 21.7. *Если $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha \leqslant 1/p + 1$, то оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^\mu$, $\mu < p - 1$, в $H^{\alpha - 1/p, \beta}(\rho^{1/p})$, если $\alpha < 1/p + 1$, и в $H^{1, \beta + 1/p'}(\rho^{1/p})$, если $\alpha = 1/p + 1$, при этом*

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta} \varphi)(x) = o\left((x-a)^{\alpha - (1+\mu)/p} \ln^\beta \frac{1}{x-a} \right), \quad x \to a. \tag{21.19}$$

Доказательство. Положим $a = 0$ и $b = 1$. Пусть $\varphi(x) = x^{-\nu} g(x)$, $\nu = \mu/p$, $g \in L_p$. Оценка (21.19) получается такими же действиями, как в (21.17).

Покажем, что

$$G(x) = \int_0^x \left(\frac{x}{t} \right)^\nu (x-t)^{\alpha - 1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, g(t)\, dt \in H^{\alpha - 1/p, \beta}.$$

$$\|G\|_{H^{\alpha - 1/p, \beta}} \leqslant c \|g\|_{L_p}, \tag{21.20}$$

если $\alpha - 1/p < 1$, и

$$G(x) \in H^{1, \beta + 1/p'}, \quad \|G\|_{H^{1, \beta + 1/p'}} \leqslant c \|g\|_{L_p}, \tag{21.21}$$

если $\alpha - 1/p = 1$.

Представим $G(x)$ в виде

$$G(x) = \Phi(x) + \Psi(x), \tag{21.22}$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ — такие же функции, что и в (21.13), но с заменой μ на $\nu = \mu/p$, причем $\nu < 1$ в силу условия теоремы. Пусть $h > 0$. Согласно теореме 21.5,

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leqslant \begin{cases} c h^{\alpha - 1/p} \ln^\beta \dfrac{1}{h} \|g\|_{L_p} & \text{при } \alpha - 1/p < 1, \\ c h \ln^{\beta + 1/p'} \dfrac{1}{h} \|g\|_{L_p} & \text{при } \alpha - 1/p = 1. \end{cases} \tag{21.23}$$

Составим для функции $\Psi(x)$ представление вида (21.14): $\Psi(x+h)-\Psi(x)=J_1+J_2+J_3$, где J_1, J_2, J_3 — те же слагаемые, что и в (21.14), но с заменой μ на $\nu=\mu/p$.

Пусть $\mu>0$ и, следовательно, $\nu>0$. Используя неравенства Гельдера и (21.7), а также гельдеровость функции x^ν, получаем

$$|J_1|\leqslant\|g\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{(\nu+\alpha-1)p'}}{(t-x)^{\nu p'}}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x+h-t}\,dt\right)^{1/p'}=$$

$$=\|g\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int_0^1\frac{\tau^{(\nu+\alpha-1)p'}}{(1-\tau)^{\nu p'}}\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|g\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}.$$

Для J_2 также с помощью неравенства Гельдера имеем

$$|J_2|\leqslant[(x+h)^\nu-x^\nu]\,\|g\|_{L_p}\left(\int_0^x\frac{(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}}{t^{\nu p'}}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x+h-t}\,dt\right)^{1/p'}.$$

Отсюда при $x\leqslant h$

$$|J_2|\leqslant ch^{\nu+\alpha-1}\ln^\beta\frac{\gamma}{h}\,\|g\|_{L_p}\left(\int_0^x t^{-\nu p'}\,dt\right)^{1/p'}\leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Если же $x>h$, то, используя (3.9) и (21.7), находим

$$|J_2|\leqslant\nu h\,x^{\nu-1}\,\|g\|_{L_p}\left(\int_0^x\frac{(x-t)^{(\alpha-1)p'}}{t^{\nu p'}}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x-t}\,dt\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Для J_3, применяя неравенство Гельдера и производя замену $t=sx$, получаем $|J_3|\leqslant\|g\|_{H^\lambda}x^{\alpha-1/p}\left(\int_0^1\left(\frac{1-s^\nu}{s^\nu}\right)^{p'}\left|\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{1-s+h(x-a)^{-1}}}{[1-s+h(x-a)^{-1}]^{1-\alpha}}-\right.\right.$

$\left.\left.-\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{1-s}}{(1-s)^{1-\alpha}}\right|^{p'}ds\right)^{1/p'}$. Если $x\leqslant h$, то $|J_3|\leqslant ch^{\alpha-1/p}\,\|g\|_{H^\lambda}$, а при $x>h$ в силу (21.10) $|J_3|\leqslant\frac{ch}{x^{1+1/p-\alpha}}\,\|g\|_{L_p}\leqslant ch^{\alpha-1/p}\,\|g\|_{L_p}$. Собирая оценки для J_1, J_2 и J_3, имеем

$$|\Psi(x+h)-\Psi(x)|\leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Отсюда согласно (21.22), (21.23) получаем (21.20) и (21.21), что и доказывает теорему при $\mu>0$. При $\mu=0$ утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы 21.5.

Пусть теперь $\mu<0$ $(\nu<0)$. Тогда $|J_1|\leqslant 2\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}\times$

$\times \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x+h-t} |g(t)|\, dt \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}$. Для J_2 при $x \leqslant h$ имеем оценку $|J_2| \leqslant 2 |I_{0+}^{\alpha,\beta} g| \leqslant cx^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \frac{1}{x} \|g\|_{L_p} \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}$, при $x > h$ такую же оценку получаем рассуждениями, аналогичными проведенным в случае $\nu > 0$.

Для J_3, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|J_3| \leqslant 2 \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \left(\int_0^{x/h} \left| \tau^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{\tau h} - (\tau+1)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{(\tau+1)h} \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'}.$$

Отсюда при $x \leqslant h$ находим

$$|J_3| \leqslant 4 \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \left(\int_0^1 \tau^{(\alpha-1)p'} \left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right)^{\beta p'} d\tau \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \frac{1}{h}.$$

Если же $x > h$, то с учетом (21.10) имеем

$$|J_3| \leqslant \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \left[c_1 \ln^{\beta} \frac{1}{h} + c_2 \left(\int_1^{x/h} \tau^{(\alpha-2)p'} \ln^{\beta p'} \frac{\gamma}{\tau h}\, d\tau \right)^{1/p'} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} c \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \dfrac{1}{h}, & \text{если } \alpha - \dfrac{1}{p} < 1, \\ c \|g\|_{L_p} h \ln^{\beta+1/p'} \dfrac{1}{h}, & \text{если } \alpha - \dfrac{1}{p} = 1. \end{cases}$$

Отсюда вытекают (21.20), (21.21) для случая $\mu < 0$. Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условий теоремы 21.7 оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^{\mu}$, *в* $h_0^{\alpha-1/p,\beta}(\rho^{1/p})$, *если* $\alpha < 1/p + 1$, *и в* $h_0^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, *если* $\alpha = 1/p + 1$.

Это следствие доказывается аналогично следствию теоремы 3.8.

Рассмотрим теперь вес $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b$.

Теорема 21.8. *Если* $1 < p < 1/\alpha$, $\mu < p-1$ *и* $a < d \leqslant b$, *то оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b$, *в* $L_s(r)$, *где* $1 \leqslant s < q = p(1-\alpha p)^{-1}$, $r(x) = |x-d|^{\nu}$, *а* ν *выражается формулами (3.21).*

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.9 в силу (21.15).

Теорема 21.9. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha \leqslant 1/p + 1$, $0 < \mu < p-1$ *при* $a < d < b$ *или* $\mu > 0$ *при* $d = b$. *Тогда:*

1) *при* $\alpha - 1/p < 1$ *оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b$, *в* $H_0^{\min(\alpha-1/p,\,\mu/p),\beta}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu \neq \alpha p - 1$, *и в* $H_0^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu = \alpha p - 1$;

2) *при* $\alpha - 1/p = 1$ *оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d < b$, *в* $H_0^{\mu/p,\beta}(\rho^{1/p})$ *и из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (b-x)^{\mu}$, *в* $H_0^{\mu/p,\beta}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu < p$, *или в* $H_0^{1,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu \geqslant p$.

Доказательство проведем по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.11. Пусть $\nu = \mu/p$, $g(t) = |t-d|^{\nu} \varphi(t) \in L_p(a, b)$,

$$f(x) = \int_a^x \left| \frac{x-d}{t-d} \right|^{\nu} (x-t)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x-t}\, g(t)\, dt.$$

Нужно доказать, что при $\alpha - 1/p < 1$

$$\|f\|_{H^{\lambda,\beta}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \quad \lambda = \min(\alpha - 1/p,\ \mu/p), \quad \text{если } \mu \neq \alpha p - 1,$$
$$\|f\|_{H^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \quad \text{если } \mu = \alpha p - 1, \tag{21.24}$$

а при $\alpha - 1/p = 1$

$$\|f\|_{H^{\mu/p,\beta}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \quad \text{если } d < b \text{ или } d = b,\ \mu < p,$$
$$\|f\|_{H^{1,\beta+1/p'}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \quad \text{если } d = b,\ \mu \geqslant p. \tag{21.25}$$

Зафиксировав точку $a_1 \in (a, d)$, согласно теореме 21.7, имеем, что $f \in H^{\alpha-1/p,\beta}(a, a_1)$, если $\alpha - 1/p < 1$, и $f \in H^{1,\beta+1/p'}(a, a_1)$, если $\alpha - 1/p = 1$. Покажем, что f удовлетворяет оценкам (21.24) или (21.25) на $[a_1, d]$. Представим f в виде $f = \Phi + \Psi$, где Φ и Ψ — те же функции, что и в (21.13), но с заменой x^μ на $|d - x|^\nu$. Тогда в силу теоремы 21.7 $\Phi \in H^{\alpha-1/p,\beta}$, если $\alpha - 1/p < 1$, и $\Phi \in H^{1,\beta+1/p'}$, если $\alpha - 1/p = 1$. Функцию Ψ представим в виде $\Psi = J_1 + J_2 + J_3$, где J_1, J_2, J_3 — те же, что и в (21.14), но с заменой x^μ на $|d - x|^\nu$. Пусть $0 < h \leqslant 1/2$, $a_1 < x < x + h < d$. Тогда для J_1 имеем

$$|J_1| \leqslant \|g\|_{L_p} \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{|(d-x-h)^\nu - (d-t)^\nu|}{(d-t)^\nu (x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|g\|_{L_p} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} \left(\int_x^{x+h} \frac{(d-t)^{-\nu p'}\,dt}{(x+h-t)^{(1-\alpha-\nu)p'}} \right)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Для J_2 находим $|J_2| \leqslant ch^\nu \ln^\beta \dfrac{\gamma}{h}\,\|g\|_{L_p} \left[c + c_1 \left(\displaystyle\int_{a_1}^{x} \frac{(d-t)^{-\nu p'}\,dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} \right]$.

Отсюда на основании оценки для (3.27) с учетом обозначения $\nu = \mu/p$ получаем

$$|J_2| \leqslant \begin{cases} ch^\lambda \ln^\beta \dfrac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}, \quad \lambda = \min\left(\alpha - \dfrac{1}{p}, \dfrac{\mu}{p}\right), & \text{при } \mu \neq \alpha p - 1, \\ ch \ln^{\beta+1/p'} \dfrac{1}{h}\,\|g\|_{L_p} & \text{при } \mu = \alpha p - 1. \end{cases}$$

Заметим, что если $\alpha - 1/p = 1$, то при $a < d < b$ имеем $\mu/p < 1 = \alpha - 1/p$ (согласно условию теоремы $\mu < p - 1$) и поэтому здесь реализуется только один случай $\mu < \alpha p - 1 = p$. Зафиксировав произвольно точку $\delta \in (a, a_1)$, перепишем J_3 в виде

$$J_3 = \left(\int_a^\delta + \int_\delta^{a_1} + \int_{a_1}^x \right) \frac{[(d-x)^\nu - (d-t)^\nu]}{(d-t)^\nu} \left[(x+h-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} - \right.$$
$$\left. - (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \right] g(t)\,dt = J_{31} + J_{32} + J_{33}.$$

Очевидно, что $|J_{31}| \leqslant ch\,\|g\|_{L_p}$. Для J_{32} имеем

$$|J_{32}| \leqslant c\,\|g\|_{L_p} \left(\int_\delta^{a_1} \left| (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} - (x+h-t)^{\alpha-1} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Наконец, $|J_{33}| \leqslant c\,\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_{a_1}^{x}\left(\frac{x-t}{d-t}\right)^{\nu p'}\right.$ $|(x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t} - (x+h-t)^{\alpha-1}\times$

$\times \ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}\Big|^{p'} dt\Big)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha-1/p}\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_{0}^{\frac{x-a_1}{h}}\right.\Big|\tau^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau h} - (\tau+1)^{\alpha-1}\times$

$\times \ln^{\beta}\frac{\gamma}{h+\tau h}\Big|^{p'} d\tau\Big)^{1/p'}$. Отсюда при $x-a_1 \leqslant h$ получаем $|J_{33}| \leqslant$

$\leqslant 2ch^{\alpha-1/p}\,\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_{0}^{1}\tau^{(\alpha-1)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau h}\,d\tau\right)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}$, а при

$x-a_1 > h$ приходим к

$$|J_{33}| \leqslant h^{\alpha-1/p}\,\|g\|_{L_p}\left[c\ln^{\beta}\frac{1}{h} + c_1\left(\int\limits_{1}^{\frac{x-a_1}{h}}\tau^{(\alpha-2)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau h}\,d\tau\right)^{1/p'}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} ch^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\dfrac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}, & \text{если } \alpha - 1/p < 1, \\ ch\ln^{\beta+1/p'}\dfrac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}, & \text{если } \alpha - 1/p = 1. \end{cases}$$

Собирая оценки для J_1, J_2 и J_3, заключаем, что f удовлетворяет неравенствам (21.24) или (21.25) на $[a_1, d]$. Аналогично доказывается справедливость такого же результата и на $[d, b]$ при $d<b$. Поскольку нами доказаны оценки (21.24), (21.25) на отрезках $[a, a_1]$, $[a_1, d]$ и $[d, b]$ (при $d<b$), то эти оценки распространяются и на $[a, b]$. Рассуждениями, подобными приведенным выше, устанавливается, что $f(d)=0$. Это завершает доказательство теоремы 21.8.

В заключение пункта отметим, что на основании теорем 21.6—21.9 можно сформулировать соответствующие теоремы и для случая общего степенного веса (1.7) (например, подобные теоремам 3.10 и 3.12) и что в случае чисто логарифмического ядра ($\alpha=1$) при $0<\beta<1/p'$ утверждения теорем 3.7 и 3.9 можно улучшить (см. замечание 21.3).

5°. Асимптотические разложения. Асимптотические представления интегралов со степенно-логарифмическим ядром $I_{0+}^{\alpha,\beta}\varphi$ можно находить методами, изложенными в § 16 для дробных интегралов. В случае, когда φ имеет степенную асимптотику вида (16.5) или (16.6), а также аналогичную степенно-логарифмическую асимптотику, можно применить метод последовательных разложений или метод, основанный на равенстве Парсеваля (1.116) для преобразования Меллина (1.112). В случае, когда φ имеет степенно-логарифмическую асимптотику вида (16.28), можно также пользоваться двумя способами: методом, основанным на представлении $I_{0+}^{\alpha,\beta}\varphi$ в виде свертки Меллина (1.114), и методом непосредственных оценок (см. § 16 и исторические сведения к § 16 в § 17, п. 1°).

Получим, например, асимптотическое разложение интеграла

$$(J_{0+}^{\alpha,\nu}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\ln^{\nu}(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad 0<\alpha<1,$$

$$\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (21.26)$$

при $x \to +\infty$, когда φ имеет степенно-логарифмическую асимптотику (16.29). Так же, как и в § 16, воспользуемся методом непосредственных оценок.

Теорема 21.10. *Пусть функция φ локально интегрируема на $[0, +\infty)$ и*

$$\varphi(t) \sim t^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\ln t)^{\nu-n} \quad \text{при } t \to \infty, \tag{21.27}$$

где $0 < \beta < 1$, $-\infty < \gamma < \infty$ — произвольные фиксированные числа. Тогда при $x \to \infty$ справедливо разложение

$$(J_{0+}^{\alpha,\nu} \varphi)(x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\ln x)^{\nu+\gamma-n}, \tag{21.28}$$

где постоянные b_n выражаются формулами

$$b_n = b_n(\alpha, \beta, \nu, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{\nu}{k} \binom{\gamma - n + m}{m-k} \Omega_{k, m-k}(\alpha, \beta),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.29}$$

причем

$$\Omega_{k,m}(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \ln^k \tau \ln^m (1-\tau)\, d\tau = (-1)^k \frac{\partial^{k+m}}{\partial \alpha^m \partial \beta^k} B(\alpha, \beta),$$

$a \binom{\nu}{k}, \binom{\gamma - n + m}{m-k}$ *— биномиальные коэффициенты (1.48).*

Доказательство. Представим (21.26) в виде

$$(J_{0+}^{\alpha,\nu} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} + \int_{x-\sqrt{x}}^{x} \right) (x-t)^{\alpha-1} \ln^\nu (x-t)\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= J_1\varphi + J_2\varphi + J_3\varphi.$$

Интегралы $J_1\varphi$ и $J_3\varphi$ асимптотически малы по сравнению с $J_2\varphi$:

$$J_1\varphi = O(x^{\alpha-\beta-\rho_1}), \quad J_3\varphi = O(x^{\alpha-\beta-\rho_2}) \quad \text{при } x \to \infty,$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ — фиксированные числа. Докажем оценку для $J_3\varphi$. Выберем ε так, чтобы $0 < \varepsilon < \alpha/3$. Поскольку $\ln^\nu t = O(t^\varepsilon)$ при $t \to \infty$, то из (21.27) имеем $\varphi(t) = O(t^{-\beta+\varepsilon})$ при $t \to \infty$. Осуществив в $J_3\varphi$ замену $x - t = x\tau$, придем для достаточно больших x к неравенствам $J_3\varphi \leqslant$

$$\leqslant c \int_0^{x^{-1/2}} (x\tau)^{\alpha-1} \ln^\nu (x\tau) [x(1-\tau)]^{-\beta+\varepsilon} x\, d\tau \leqslant c M_{-\beta+\varepsilon} x^{-\beta+\varepsilon} \int_0^{\sqrt{x}} t^{\alpha-1} \ln^\nu t\, dt,$$

где $M_\alpha = \max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant 1/2} (1-\tau)^{\alpha-1}$. При $t \to \infty$ имеем $t^{\alpha-1} \ln^\nu t = O(t^{\alpha-1+\varepsilon})$ и, следовательно, $\int_0^{\sqrt{x}} t^{\alpha-1} \ln^\nu t\, dt = O(x^{(\alpha+\varepsilon)/2})$ при $x \to \infty$. Учитывая это, приходим к оценке для $J_3\varphi$ с $\rho_2 = (\alpha - 3\varepsilon)/2$. Оценка для $J_1\varphi$ доказывается аналогично.

Оценим $J_2\varphi$. В силу (21.27) имеем

$$\varphi(t) = t^{-\beta} \sum_{n=0}^{N} a_n (\ln t)^{\nu-n} + R_N(t), \quad R_N(t) = O(t^{-\beta} (\ln t)^{\nu-N-1}) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{21.30}$$

Поэтому

$$J_2\varphi = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} L(\alpha,\ \beta,\ \nu,\ \gamma - n;\ x) + r_N(x), \tag{21.31}$$

где обозначено

$$L(\alpha,\ \beta,\ \nu,\ \gamma;\ x) = \int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} (x-t)^{\alpha-1} \ln^{\nu}(x-t)\, t^{-\beta} \ln^{\gamma} t\, dt,$$

$$r_N(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} (x-t)^{\alpha-1} \ln^{\nu}(x-t)\, R_N(t)\, dt. \tag{21.32}$$

Произведем в (21.32) замену $x - t = \tau x$:

$$L(\alpha,\ \beta,\ \nu,\ \gamma;\ x) =$$

$$= x^{\alpha-\beta} \ln^{\nu+\gamma} x \int_{x^{-1/2}}^{1-x^{-1/2}} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \left[1 + \frac{\ln(1-\tau)}{\ln x}\right]^{\nu} \left[1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right]^{\gamma} d\tau. \tag{21.33}$$

Так как на участке интегрирования $x^{-1/2} \leqslant \tau \leqslant 1 - x^{-1/2}$ выполняются неравенства $\left|\frac{\ln(1-\tau)}{\ln x}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, $\left|\frac{\ln \tau}{\ln x}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\left[1 + \frac{\ln(1-\tau)}{\ln x}\right]^{\nu} \left[1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right]^{\gamma} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{\nu}{k} \binom{\gamma}{m-k} \ln^{k}(1-\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \ln^{m-k} \tau\right] \ln^{-m} x.$$

Подставив это выражение в (21.33), осуществив почленное интегрирование и приняв во внимание непосредственно проверяемые оценки при $x \to \infty$ вида

$$\int_{0}^{x^{-1/2}} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \ln^{m} \tau \ln^{k}(1-\tau)\, d\tau = O(x^{-\delta_1}), \quad \delta_1 > 0,$$

$$\int_{1-x^{-1/2}}^{1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \ln^{m} \tau \ln^{k}(1-\tau)\, d\tau = O(x^{-\delta_2}), \quad \delta_2 > 0,$$

придем к асимптотическому равенству при $x \to \infty$:

$$L(\alpha,\ \beta,\ \nu,\ \gamma;\ x) \sim$$

$$\sim x^{\alpha-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{\nu}{k} \binom{\gamma}{m-k} \Omega_{k,m-k}(\alpha,\ \beta)\right] (\ln x)^{\nu+\gamma-m}. \tag{21.34}$$

Подставив, наконец, соотношение (21.34) в (21.31), в силу вытекающей из (21.30) оценки $r_N(x) = O(x^{\alpha-\beta} \ln^{\nu+\gamma-N-1} x)$, $x \to \infty$, окончательно получим (21.28), (21.29). Теорема доказана.

Замечание 21.4. Теорема 21.10 обобщает теорему 16.4; ее результаты можно использовать для асимптотического решения уравнения (21.26) (см. § 16, п. 5° и § 34, п. 2°, 32.4).

§ 22. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Все предыдущее изложение относилось к функциям вещественного переменного. Перейдем теперь к рассмотрению идей и понятий, связанных с дробным дифференцированием и интегрированием функций комплексного переменного. Подчеркнем, что развитие теории дробного дифференцирования с самого начала велось в комплексной области (Ж. Лиувилль, А. Грюнвальд, А. В. Летников, Н. Я. Сонин и др.). Известны и широко использовались следующие подходы к определению дробного интегрирования и дифференцирования в комплексной плоскости:

I. *Дробное интегродифференцирование аналитических функций, представленных рядами из экспонент* (подход Ж. Лиувилля) *или степенными рядами* (подход Ж. Адамара). Этот подход основан на почленном интегродифференцировании ряда, при этом равенства $\mathscr{D}^\alpha e^{az} = a^\alpha e^{az}$, $\mathscr{D}^\alpha (z-z_0)^\mu = \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu-\alpha)}(z-z_0)^{\mu-\alpha}$ принимаются в качестве определения, α, a и μ — произвольные числа.

Для функций $f(z)=f(re^{i\varphi})$, аналитических в круге, подход Ж. Адамара означает интегродифференцирование Римана — Лиувилля I^α_{0+} по радиальной переменной r.

II. *Перенос дробного интегродифференцирования по Вейлю на функции, аналитические в круге, по правилу*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \Rightarrow I^{(\alpha)}f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{(ik)^\alpha} z^k \tag{22.1}$$

(Г. Харди, Д. Литтлвуд). Фактически — это дробное интегродифференцирование $I^{(\alpha)}_+$ Вейля функции $f(re^{i\varphi})$ по угловой переменной φ.

III. *Непосредственное распространение дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля в комплексную область:*

$$(I^\alpha_{z_0} f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{z_0}^{z} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{22.2}$$

$$(\mathscr{D}^\alpha_{z_0} f)(z) = \frac{d^m}{dz^m}(I^{m-\alpha}_{z_0} f)(z), \quad m = [\operatorname{Re}\alpha]+1, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{22.3}$$

с интегрированием, как правило, по прямолинейному отрезку в комплексной плоскости, соединяющему точки z_0 и z. В (22.2) можно интегрировать по кривой, соединяющей точки z_0 и z и лежащей в области определения функции $f(z)$. Функция $f(z)$ может быть задана только на кривой. См. об этом ниже в § 23.

Заметим, что при рассмотрении функции $f(z)$ в некоторой области определение (22.2), (22.3) с интегрированием по отрезку $[z_0, z]$ предполагает, очевидно, звездообразность области относительно точки z_0. Последнее означает, что с каждой точкой z области принадлежит отрезок $[z_0, z]$.

IV. *Определение, основанное на обобщении формулы дифференцирования интеграла типа Коши:*

$$f^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}} \tag{22.4}$$

(Н. Я. Сонин, П. А. Некрасов и др.). Подчеркнем, что определение (22.4) применяется к аналитическим функциям и его, очевидно, не следует относить к произвольным функциям.

Подчеркнем, что определения (22.2) — (22.4) требуют аккуратной работы, связанной с выделением ветви многозначной функции. Это достигается обычно проведением разреза из точки ветвления z на бесконечность или фиксацией тем или иным способом $\arg(t-z)$. В (22.4) существен также выбор кривой $\mathscr{L}$, охватывающей точку z. Разный выбор разреза, фиксирующего ветвь функции $(t-z)^{1+\alpha}$ в (22.4), и кривой $\mathscr{L}$ приводит к разным, вообще говоря, значениям $f^{(\alpha)}(z)$.

Укажем, наконец, что существуют обобщения указанных выше подходов I—IV в различных направлениях. См. об этом далее в п. 3°.

Всюду ниже будем считать для простоты α вещественным, хотя все излагаемое ниже легко распространяется на случай комплексных α, $\operatorname{Re}\alpha\neq 0$.

1°. Определения и простейшие свойства дробного интегродифференцирования в комплексной области. Пусть функция $f(z)$ задана в некоторой области G комплексной плоскости. Примем в качестве исходного определения дробного интеграла функции $f(z)$ непосредственное распространение (22.2) интеграла Римана — Лиувилля. Чтобы интеграл (22.2) имел смысл для всех $z\in G$, считаем, что область G звездообразна относительно точки z_0. В (22.2) присутствует многозначная функция $(z-t)^{1-\alpha}$. Зафиксируем точку z и выберем для однозначного толкования интеграла (22.2) главное значение функции $(z-t)^{1-\alpha}$. Под этим будем понимать следующее. Учитывая, что точка t лежит на отрезке $[z_0, z]$, выберем из всех возможных значений $\arg(z-t)$ то, которое совпадает с

$$\arg(z-t)=\arg(z-z_0). \tag{22.5}$$

Это, разумеется, требует фиксации $\arg(z-z_0)$. Будем считать всюду в дальнейшем, что

$$0\leqslant \arg(z-z_0)<2\pi. \tag{22.6}$$

Тогда, исходя из (22.5), положим

$$(z-t)^{1-\alpha}=|z-t|^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\arg(z-z_0)}. \tag{22.7}$$

Интеграл

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{z_0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}},\qquad \alpha>0, \tag{22.8}$$

где интегрирование производится по прямолинейному отрезку $[z_0, z]$ и выбрано главное значение (22.7), и будем называть *дробным интегралом порядка* α функции $f(z)$. Условие (22.6) означает, что мы рассматриваем дробный интеграл $(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)$ в плоскости, разрезанной по лучу, проведенному параллельно вещественной оси из точки z_0 в бесконечно удаленную точку $+\infty+i\operatorname{Im} z_0$.

Из (22.8) в силу (22.7) имеем также следующую форму записи $I^{\alpha}_{z_0}f$:

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{e^{i\alpha\varphi}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r \rho^{\alpha-1}f(z_0+(r-\rho)e^{i\varphi})\,d\rho, \tag{22.9}$$

$$\varphi=\arg(z-z_0),\quad r=|z-z_0|.$$

В этой записи, очевидно, устранена в явном виде неоднозначность. Если обозначить $f^*(\rho)=f(z_0+\rho e^{i\varphi})$, то

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=e^{i\alpha\varphi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r \rho^{\alpha-1}f^*(r-\rho)\,d\rho, \tag{22.10}$$

т. е. дробный интеграл $I^{\alpha}_{z_0}f$ есть (с точностью до множителя $e^{i\alpha\arg(z-z_0)}$) дробный интеграл Римана — Лиувилля $(I^{\alpha}_{0+}f^*)(r)$ по радиальной переменной $r=|z-z_0|$.

Так как $t=z_0+\xi(z-z_0)$, где $0\leqslant\xi\leqslant 1$, то из (22.8) получаем после замены переменной

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{(z-z_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{\alpha-1}f[(1-\xi)z_0+\xi z]\,d\xi, \tag{22.11}$$

где

$$(z-z_0)^{\alpha}=|z-z_0|^{\alpha}e^{i\alpha\arg(z-z_0)}. \tag{22.12}$$

Заметим, что мы воспользовались тем, что $[(z-z_0)(1-\xi)]^{\alpha-1}=(z-z_0)^{\alpha-1}(1-\xi)^{\alpha-1}$. Подчеркнем, что, вообще говоря, $(uv)^{\alpha-1}\neq u^{\alpha-1}v^{\alpha-1}$ в силу многозначности степенной функции, однако

$$(zu)^{\alpha-1}=z^{\alpha-1}u^{\alpha-1} \tag{22.13}$$

при любом выборе ветви степенной функции, если $u>0$.

Заметим, наконец, что дробный интеграл $(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)$ определен в каждой точке $z\in G$ (почти в каждой), если функция $f(z)$ непрерывна (локально интегрируема).

Дробной производной порядка α назовем выражение (22.3). Подобно (22.11) можно записать при $0<\alpha<1$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^{1-\alpha}\int_0^1\frac{f((1-\xi)z_0+\xi z)}{(1-\xi)^{\alpha}}\,d\xi\right]. \tag{22.14}$$

Как обычно, будем считать, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f\overset{\text{def}}{=}I^{-\alpha}_{z_0}f$ при $\alpha<0$.

Лемма 22.1. *Пусть функция $f(z)$ локально интегрируема (непрерывна) в области G. Тогда для почти всех (для всех) $z\in G$ выполняется полугрупповое свойство*

$$(I^{\alpha}_{z_0}I^{\beta}_{z_0}f)(z)=(I^{\alpha+\beta}_{z_0}f)(z),\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\geqslant 0. \tag{22.15}$$

Доказательство получается подобно вещественному случаю (см. теорему 2.5) непосредственной перестановкой порядка интегрирования в левой части в (22.15) (возможной в силу теоремы Фубини) и вычислением возникающего при этом интеграла

$$\int_{\zeta}^{z}\frac{dt}{(t-\zeta)^{1-\alpha}(z-t)^{1-\beta}}=\mathrm{B}(\alpha,\beta)(z-\zeta)^{\alpha+\beta-1}, \tag{22.16}$$

что получается после замены $t=\zeta+s(z-\zeta)$ с учетом (22.13).

Рассмотрим дробное интегрирование, отвечающее случаю бесконечно удаленной точки z_0. Обозначим для этого $\tau=e^{i\theta}$, $-\pi\leqslant\theta<\pi$, и введем оператор

$$(I^{\alpha}_{+,\,\theta}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{e^{i\theta}\cdot\infty}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}}, \tag{22.17}$$

где интегрирование производится по лучу, идущему из бесконечности в точку z параллельно вектору $\tau=e^{i\theta}$, и выбрано главное значение $(z-t)^{1-\alpha}$. Здесь формально $z_0=e^{i\theta}\cdot\infty$, и мы подчеркнем, что выбор θ в интервале $[-\pi,\pi)$ соответствует договоренности (22.6) о выборе $\arg(z-z_0)=\arg(z-e^{i\theta}\cdot\infty)=\arg e^{i(\theta+\pi)}$ в интервале $[0,2\pi)$.

Определение (22.17) предполагает, что область G, где задана функция $f(z)$, является звездообразной относительно точки $e^{i\theta}\cdot\infty$ (с каждой точкой $z\in G$ области G принадлежит луч $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$). Очевидно, такая область G является полуполосой, параллельной вектору $\tau=e^{i\theta}$. В частности, это может быть полуплоскость (с криволинейной границей), содержащая точку $e^{i\theta}\cdot\infty$. Функция $f(z)$ должна, очевидно, убывать на бесконечности так, чтобы обеспечить сходимость интеграла.

Определим также «правосторонний» дробный интеграл

$$(I^{\alpha}_{-,\,\theta}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{z}^{e^{i\theta}\cdot\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1-\alpha}}, \tag{22.18}$$

где интегрирование производится от точки z по лучу $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$ и также выбрано главное значение степенной функции.

Нетрудно видеть, что

$$(I^{\alpha}_{+,\,\theta}f)(z)=e^{i(\theta+\pi)\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho, \tag{22.19}$$

$$(I^{\alpha}_{-,\,\theta}f)(z)=e^{i\theta\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho \tag{22.20}$$

при указанном выборе значений степенной функции. Из (22.19), (22.20) видим, что $I^{\alpha}_{-,\theta}f\equiv e^{i\alpha\pi}I^{\alpha}_{+,\theta}f$. Тем не менее имеет смысл пользоваться обеими конструкциями, поскольку операторы $I^{\alpha}_{+,\theta}$, $I^{\alpha}_{-,\theta}$ могут рассматриваться при разных значениях θ, а это означает при разных, вообще говоря, областях определения функций $f(z)$.

Подобно (22.3) определяются операции

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm,\,\theta}f)(z)=\left(\pm\frac{d}{dz}\right)^{m}(I^{m-\alpha}_{\pm,\,\theta}f)(z),\quad m=[\operatorname{Re}\alpha]+1,\quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{22.21}$$

Выделим случаи $\tau=\mp 1$, т. е. $\theta=-\pi$ и $\theta=0$. Тогда в (22.17), (22.18) интегрирование ведется по лучу, параллельному вещественной оси. В этом случае, сохраняя обозначение (5.2), будем писать $I^{\alpha}_{+,\,-\pi}f=I^{\alpha}_{+}f$, $I^{\alpha}_{-,\,0}f=I^{\alpha}_{-}f$, так что, согласно (22.19), (22.20),

$$(I^{\alpha}_{\pm}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(z\mp\rho)}{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho. \tag{22.22}$$

Соответствующие дробные производные имеют, согласно (22.21), вид $(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}f)(z)=\left(\pm\dfrac{d}{dz}\right)^{m}(I^{m-\alpha}_{\pm}f)(z)$. Дробное интегродифференцирование $(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}f)(z)$ предполагает, что функция $f(z)$ задана в горизонтальной полуполосе (левой или правой соответственно знаку $\pm$).

* В случае $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ дробную производную (22.21) можно записать в форме Маршо

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{+,\,\theta}f)(z)=\frac{\alpha e^{-i(\theta+\pi)\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(z)-f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho$$

(подобно тому как это делалось в § 5, см. (5.56), (5.57)) и аналогично для $(\mathscr{D}^{\alpha}_{-,\theta}f)(z)$. Случаю $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$ отвечают конструкции типа (5.80):

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z) = \frac{e^{-i(\theta+\pi)\alpha}}{\varkappa(\alpha,\ l)} \int_0^{\infty} \frac{(\Delta^{l}_{\rho e^{i\theta}}f)(z)}{\rho^{1+\alpha}}\, d\rho, \qquad (22.21')$$

где $(\Delta^{l}_{\rho e^{i\theta}}f)(z)$ — конечная разность (5.72) с шагом $\rho e^{i\theta}$, $\varkappa(\alpha,\ l)$ — постоянная (5.81). Переход от (22.21) к (22.21′) осуществляется на достаточно хороших функциях подобно действиям в § 5, п. 5°. Следует лишь подчеркнуть, что, как и в § 5, дробная производная в форме (22.21′) может существовать тогда, когда в форме (22.21) она не существует. Поэтому область определения оператора, порожденного правой частью в (22.21′), шире, вообще говоря, чем оператора (22.21), и его можно поэтому обозначить символом $(\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z)$ подобно (5.80).

2°. Дробное интегродифференцирование аналитических функций. Дробное интегродифференцирование (22.8), (22.3) Римана — Лиувилля от аналитической функции $f(z)$ дает аналитическую же функцию только при целых α, приводя к функции с ветвлением в точке z_0 при нецелых α (это видно непосредственно из (22.11), (22.14)). Поэтому, желая сохранить аналитичность, можно было бы видоизменить определение дробного интегродифференцирования так, чтобы оно не давало ветвления. Можно, например, отбросить множитель $(z-z_0)^{\alpha}$ в (22.11) или $(z-z_0)^{-\alpha}$ в (22.14); это равносильно рассмотрению $(z-z_0)^{-\alpha}I^{\alpha}_{z_0}f$, $\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0}[(z-z_0)^{\alpha}f(z)]$ вместо $I^{\alpha}_{z_0}f$, $\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0}f$ соответственно. Очень часто так и поступают при рассмотрении (обобщенного) интегродифференцирования аналитических функций, см. об этом в п. 3°. Здесь же, сохраняя исходное определение (22.8), (22.3), мы, напротив, расширим класс рассматриваемых функций, допуская с самого начала для них ветвление в точке z_0. Более точно будем предполагать, что функции $f(z)$ имеют вид $f(z) = (z-z_0)^{\mu}g(z)$, $\mu \in R^1$, где $g(z)$ аналитична в окрестности точки z_0. Тогда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+\mu}, \quad c_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}. \qquad (22.23)$$

Возникающие здесь неоднозначности будем устранять выбором главной ветви и подчеркнем, что всюду в дальнейшем $(z-z_0)^{\mu}$ есть функция, аналитическая в плоскости с разрезом по лучу $(z_0,\ z_0+\infty)$:

$$(z-z_0)^{\mu} = |z-z_0|^{\mu} e^{i\mu \arg(z-z_0)},$$

$$0 \leqslant \arg(z-z_0) < 2\pi.$$

Лемма 22.2. *Пусть $f(z)$ — функция (22.23). Тогда при всех $\alpha \in R^1$*

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z) = (z-z_0)^{\mu+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+1)} c_k (z-z_0)^k, \qquad (22.24)$$

$$\mu \neq -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,$$

при этом радиусы сходимости рядов (22.23), (22.24) совпадают.

Подобное утверждение доказано нами ранее в случае аналитических функций на вещественной оси (см. лемму 15.4). Лемма 23.2 доказывается аналогично с учетом того, что ряд (22.23) можно почленно интегрировать и дифференцировать и с учетом того, что $\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0}[(z-z_0)^{\beta}] = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \times$

$\times (z-z_0)^{\beta-\alpha}$. Последнее устанавливается непосредственно на основании равенства (22.16).

Формула (22.24) связывает исходное определение (22.2), (22.3) дробного интегродифференцирования с подходом Ж. Адамара. С подходом Ж. Лиувилля связано дробное интегродифференцирование (22.17), (22.18), (22.21). Непосредственно из (22.19) видим с учетом формулы (7.5), что

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{+,\,\theta}\, e^{az} = a^{\alpha} e^{az} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(ae^{i\theta}) < 0. \tag{22.25}$$

Правая часть в (22.25) в действительности зависит от θ: значение θ сказывается на выборе ветви многозначной функции a^{α}. Именно в (22.25) a^{α} означает $a^{\alpha} = |a|^{\alpha} e^{i\alpha \operatorname{Arg} a}$, $0 < \theta + \operatorname{Arg} a < 2\pi$ (точнее, $\pi/2 < \theta + \operatorname{Arg} a < 3\pi/2$ с учетом того, что $\operatorname{Re}(ae^{i\theta}) < 0$). В частности,

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{+} e^{az} = a^{\alpha} e^{az}, \quad \text{если } \operatorname{Re} a > 0, \tag{22.26}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{-} e^{az} = (-a)^{\alpha} e^{az}, \quad \text{если } \operatorname{Re} a < 0, \tag{22.27}$$

с главным значением $(\pm a)^{\alpha}$. Из (22.26), (22.27) вытекает, что для функций $f(z)$, представимых рядами Дирихле $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$, где все $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ или все $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, имеем

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{+} f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^{\alpha} e^{\lambda_k z}, \quad \operatorname{Re}\lambda_k > 0,$$

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{-} f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-\lambda_k)^{\alpha} e^{\lambda_k z}, \quad \operatorname{Re}\lambda_k < 0$$

(Ж. Лиувилль полагал по определению $(\mathscr{D}^{\alpha} f)(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^{\alpha} e^{\lambda_k z}$ при любых λ_k).

Перейдем к одному из главных вопросов в теории дробного дифференцирования аналитических функций — распространению формулы Коши

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

на нецелые значения n. У возникающей при этом многозначной функции $(t-z)^{-\alpha-1}$ выделим однозначную ветвь, проведя разрез из точки z через z_0 на бесконечность и рассматривая в плоскости, разрезанной таким способом, однозначную функцию (z фиксировано):

$$(t-z)^{-\alpha-1} = |t-z|^{-\alpha-1} e^{-(1+\alpha)\arg(t-z)} \tag{22.28}$$

с главным значением $\arg(t-z)$, т. е. $\arg(t-z) = 0$, если $t-z > 0$. Учитывая, что разрез может пойти параллельно вещественной оси вправо от точки z, уточним это выделение условием

$$\arg(t-z)\big|_{t \in C_+} \in (-2\pi,\ 0], \tag{22.29}$$

где C_+ — берег разреза, указанный на рис. 1.

Теорема 22.1. *Пусть $f(z) = (z-z_0)^{\mu} g(z)$, где $\mu > -1$, функция $g(z)$ аналитична в области G и выбрано главное значение $(z-z_0)^{\mu}$. Тогда при всех $\alpha \in R^1$, кроме $\alpha = -1, -2, \ldots$,*

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0} f)(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{\mathscr{L}_{z_0}} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}, \tag{22.30}$$

где ветвь функции $(t-z)^{-\alpha-1}$ зафиксирована условиями (22.28), (22.29), а замкнутый контур $\mathscr{L}_{z_0}$, лежащий в G, проходит через точку z_0 и охватывает точку z в положительном направлении. В частности, при выборе окружности $|t-z|=|z-z_0|$ в качестве $\mathscr{L}_{z_0}$

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi|z-z_0|^{\alpha}}\int_0^{2\pi}e^{-i\alpha\theta}f(z+|z-z_0|e^{i\theta})\,d\theta. \qquad (22.30')$$

Доказательство. Пусть вначале $\alpha<0$. Так как подынтегральная функция в (22.30) аналитична в области G, разрезанной от z к z_0, то в силу интегральной теоремы Коши

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}_{z_0}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\left[\lim_{\gamma_+\to C_+}\int_{\gamma_+}\dots+\right.$$

$$\left.+\lim_{\gamma_-\to C_-}\int_{\gamma_-}\dots+\lim_{\gamma\to\{z\}}\int_{\gamma}\dots\right],$$

где $\gamma_{\pm}$— прямые, параллельные берегам разреза, см. рис. 1, а γ—окружность радиуса ε, охватывающая точку z. Отсюда имеем с учетом скачка $(t-z)^{-1-\alpha}$ на разрезе

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}_{z_0}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}(1-e^{-2\alpha\pi i})\int_{z_0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}+$$

$$+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\alpha}\int_0^{2\pi}f(z+\varepsilon e^{i\varphi})\,e^{-i\alpha\varphi}d\varphi. \qquad (22.31)$$

Здесь $(t-z)^{-1-\alpha}=e^{-(1+\alpha)\pi i}(z-t)^{-1-\alpha}$ при выборе (22.29), где $(z-t)^{-1-\alpha}$ совпадает с выбранным в (22.7) значением (при замене $1-\alpha$ на $-1-\alpha$). Поэтому из (22.31) получаем

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}_{z_0}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}=(I^{-\alpha}_{z_0}f)(z), \qquad (22.32)$$

что и доказывает (22.30) при $\alpha<0$. Если же $\alpha>0$, то, отправляясь непосредственно от определения (22.3), получим (22.30), дифференцируя равенство (22.32) (записанное для значения $\alpha-[\alpha]-1$ вместо α) соответствующее число раз под знаком интеграла. Теорема доказана.

Заметим, что правую часть в формуле (22.30) часто принимают в качестве определения дробной производной (любого порядка α, $\alpha\neq -1, -2, \dots$) аналитической функции.

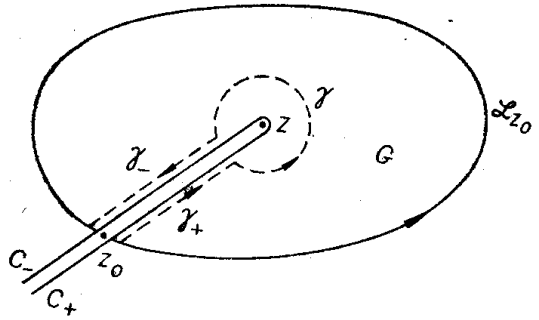


Рис. 1. Контур интегрирования

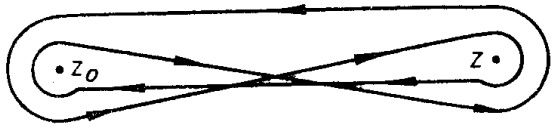


Рис. 2. Петля Похгаммера

Замечание 22.1. Формулу (22.30) удобно записывать в виде

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}_{z_0}}\frac{f(t)dt}{\left(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{1+\alpha}(t-z_0)^{1+\alpha}}$$

с тем же контуром $\mathcal{L}_{z_0}$, где выбрана главная ветвь функции $(1-w)^{1+\alpha}$, рассматриваемой в плоскости с разрезом по лучам $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$,

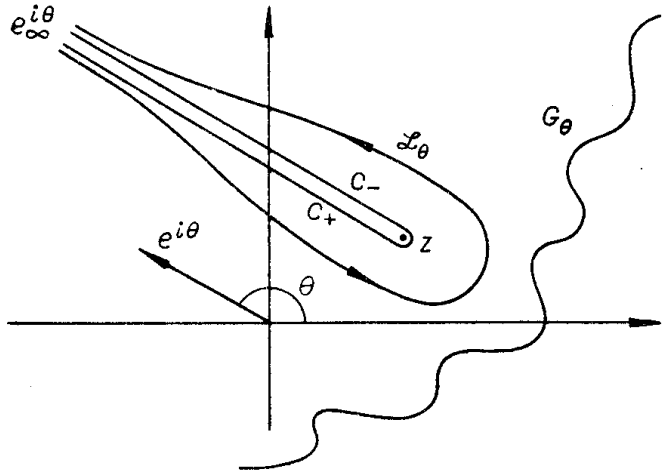


Рис. 3. Контур Ханкеля

а функция $(t-z_0)^{1+\alpha}$ рассматривается в плоскости с разрезом по лучу из точки z через z_0 на бесконечность. В частности, при $z_0=0$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{0}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}_0}\frac{f(t)}{\left(1-\dfrac{z}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}, \qquad (22.33)$$

где контур $\mathcal{L}_0$ охватывает точку z, проходя через начало координат.

Замечание 22.2. Ограничение $\mu>-1$ в теореме 22.1 может быть изменено на $\mu\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, если в качестве контура $\mathcal{L}_{z_0}$ взять так называемую «петлю Похгаммера» $C=(z+, z_0+, z-, z_0-)$, рис. 2 (L. Pochhammer), и изменить коэффициент перед интегралом:

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{e^{-\mu\pi i}\Gamma(1+\alpha)}{4\pi\sin\mu\pi}\int\limits_{C}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}, f(t)=(t-z_0)^{\mu}g(t). \qquad (22.33')$$

Остановимся еще на формуле (22.30) для дробного дифференцирования с бесконечно удаленной «начальной» точкой $z_0=e^{i\theta}\cdot\infty$, $-\pi\leqslant\theta<\pi$. Пусть функция $f(z)$ аналитична в криволинейной полуплоскости G_θ, содержащей бесконечно удаленную точку $e^{i\theta}\cdot\infty$. Аналогично теореме 22.1 получается, что при всех $\alpha\in R^1$, $\alpha\neq -1, -2, \ldots$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}_\theta}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}},$$

где уходящий на бесконечность контур Ханкеля $\mathcal{L}_\theta=\mathcal{L}_\theta(z)$ любой такой, который содержит внутри себя луч $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$ и обходится в положительном направлении (рис. 3), а главная ветвь функции $(t-z)^{1+\alpha}=|t-z|^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)\arg(t-z)}$, аналитической в плоскости с разрезом вдоль луча $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$, зафиксирована условием $\arg(t-z)|_{t\in C_+}\in(-2\pi, 0]$, так что

$$\arg(t-z)|_{t\in C_+}=\begin{cases}\theta, & -\pi\leqslant\theta\leqslant 0,\\ \theta-2\pi, & 0<\theta<2\pi.\end{cases}$$

В заключение этого пункта приведем без доказательства теорему Харди — Литтлвуда о действии дробного интегрирования

$$(I_0^\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}} = \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} f(z\xi)\,d\xi \qquad (22.34)$$

в классах Харди H_p функций, аналитических в единичном круге. Класс H_p, $0<p<\infty$, состоит из функций $f(z)$, аналитических в единичном круге, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{r>0} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi < \infty.$$

Теорема 22.2. *Пусть* $0<p<\infty$, $0<\alpha<1/p$, $\gamma>-1$. *Оператор* $z^{-\gamma-\alpha} I_0^\alpha z^\gamma f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^\gamma (1-\xi)^{\alpha-1} f(z\xi)\,d\xi$ *ограничен из* H_p *в* H_q, $1/q = 1/p - \alpha$.

Доказательство этой теоремы, кроме оригинальных работ Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5, 7]) можно найти в книге А. Зигмунда [2, с. 209] (ср. теорему 22.2 с теоремами 3.5, 3.7).

3°. Обобщения дробного интегродифференцирования аналитических функций. Пусть функция

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k \qquad (22.35)$$

аналитична в единичном круге, так что, согласно (22.24),

$$(\mathcal{D}_0^\alpha f)(z) = z^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} f_k z^k. \qquad (22.36)$$

Естественный путь обобщения интегродифференцирования (22.36) — замена множителя $\Gamma(k+1)/\Gamma(k-\alpha+1)$ в (22.36) более общим выражением. Начнем с обобщения, называемого обобщенным интегродифференцированием Гельфонда — Леонтьева. Отправляясь от простого факта, что обычное дифференцирование d/dz отвечает множителю $\Gamma(k+1)/\Gamma(k)$ в (22.36), введем, следуя А. О. Гельфонду, А. Ф. Леонтьеву [1], операцию

$$\mathcal{D}^n(a; f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_{k-n}}{a_k} f_k z^{k-n}, \qquad (22.37)$$

где $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Функция $a(z)$ предполагается целой порядка ρ и типа $\sigma \neq 0$ (относительно этих понятий см., например, книгу А. Ф. Леонтьева [1]) и такой, что

$$\lim_{k\to\infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho} \qquad (22.38)$$

(известно (А. Ф. Леонтьев [1, с. 13]), что (22.38) всегда выполняется для верхнего предела $\overline{\lim}$). В силу (22.38) существует предел $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k-n]{|a_{k-n}/a_k|} = 1$, и потому ряд (22.37) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (22.35). Оператор (22.37) называется *оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева*. Очевидно, что $\mathcal{D}^n(a; f) = d^n f/dz^n$ в случае $a(z) = e^z$.

Оператор

$$I^n(a;\ f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{a_k} f_k z^{k+n}, \tag{22.39}$$

являющийся правым обратным к (22.37), называется *оператором обобщенного интегрирования Гельфонда — Леонтьева.*

Заметим, что, хотя операторы $\mathscr{D}^n$, I^n непосредственно обобщают интегродифференцирование целого порядка n, они содержат в себе и операции интегродифференцирования дробного характера. В этом убедимся, рассмотрев следующий специальный случай:

$$a(z) = E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0, \tag{22.40}$$

т. е. случай функции Миттаг-Леффлера (1.90) (она имеет порядок $\rho = 1/\alpha$, тип $\sigma = 1$ и для нее выполнено условие (22.38)). Соответствующий оператор обобщенного интегрирования (порядка $n = 1$) есть

$$(\mathscr{I}_\alpha f)(z) \overset{\text{def}}{=} I^1(E_{1/\alpha};\ f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} f_k z^{k+1}. \tag{22.41}$$

Л е м м а 22.3. *Оператор обобщенного интегрирования (22.41) имеет следующее интегральное представление:*

$$(\mathscr{I}_\alpha f)(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha - 1} f(zt^\alpha)\, dt. \tag{22.42}$$

Утверждение леммы становится очевидным, если заметить, что

$$\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} = \frac{B(\alpha,\ \alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha - 1} t^{\alpha k} dt.$$

Лемма 22.3 позволяет распространить определение оператора интегрирования (22.41) с аналитических функций $f(z)$ на непрерывные (и даже интегрируемые), заданные в области, звездообразной относительно начала координат.

Заметим еще, что

$$(\mathscr{I}_\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z^{\frac{1}{\alpha}} - t^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha - 1} f(t)\, \frac{t^{\frac{1}{\alpha} - 1}}{\alpha}\, dt,$$

где интегрирование производится по отрезку, соединяющему точки 0 и z, и надлежащим образом выбраны ветви многозначных функций. Поэтому оператор $\mathscr{I}_\alpha$ можно интерпретировать так же, как оператор дробного интегрирования порядка α функции $f(z)$ по функции $g(z) = z^{1/\alpha}$, см. § 18, п. 2°. Учитывая это, мы можем построить (левый) обратный к $\mathscr{I}_\alpha$ оператор дифференцирования $\mathscr{D}_\alpha$ на основании формулы (18.29):

$$(\mathscr{D}_\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{1}{g'(z)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(t)\, g'(t)\, dt}{[g(z) - g(t)]^\alpha},$$

где $g(z) = z^{1/\alpha}$. После простых преобразований это приводит к равенству

$$(\mathscr{D}_\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{z} + \alpha\frac{d}{dz}\right)\int_0^1 \frac{f(zt^\alpha)\,dt}{(1-t)^\alpha}. \quad (22.43)$$

Оператор $\mathscr{D}_\alpha$ отвечает, очевидно, разложению

$$(\mathscr{D}_\alpha f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1-\alpha)} f_k z^{k-1}. \quad (22.44)$$

Можно пойти по пути дальнейшего обобщения, если заменить $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}$ в (22.36) произвольной последовательностью b_k (удовлетворяющей некоторым предположениям). Именно пусть функция

$$b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (22.45)$$

аналитична в единичном круге. Рассмотрим оператор

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = b \circ f = \sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k z^k. \quad (22.46)$$

Это выражение называют *произведением (композицией) Адамара* функций $b(z)$ и $f(z)$. Конечно, конструкция (22.46) — очень широкое обобщение понятия интегродифференцирования. Она будет обобщать дифференцирование, если $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Операция (22.46) обратима, если $b_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и в этом случае мы обозначим

$$b_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / b_k. \quad (22.47)$$

Соответствующую операцию

$$I\{b;\ f\} = \mathscr{D}\{b_*;\ f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{b_k} z^k$$

назовем *обобщенным интегрированием* (в предположении, что $b_k \to \infty$). Заметим, что функции $b(z)$ и $b_*(z)$ называют обычно союзными (В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев [1, с. 168]). Справедлива следующая

Лемма 22.4. *Пусть ряды (22.45), (22.47) сходятся в единичном круге. Если $g(z) = b \circ f$, где $f(z)$ аналитична при $|z| < 1$, то*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} b\left(\frac{z}{t}\right) f(t)\,\frac{dt}{t}, \quad (22.48)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} b_*\left(\frac{z}{t}\right) g(t)\,\frac{dt}{t}, \quad |z| < r < 1. \quad (22.49)$$

Равенства (22.48), (22.49) получаются разложением $f(t)$, $g(t)$, $b(z/t)$, $b_*(z/t)$ в ряды и почленным интегрированием.

Выбирая различные функции $b(z)$, будем получать интегродифференциальные операции различных типов. Рассмотрим примеры.

1. Пусть

$$b(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)} z^k, \quad |z| < 1. \quad (22.50)$$

Тогда $\mathscr{D}\{b;\ f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)} f_k z^k$, что совпадает в силу (22.24) с

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \mathscr{D}_0^{\alpha}[z^{\alpha} f(z)], \tag{22.51}$$

а в силу (22.48) с

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f_*(t)}{\left(1-\frac{z}{t}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \tag{22.52}$$

(ср. с (22.30) и (22.33)). Таким образом, при выборе (22.50) функции $b(z)$ мы получаем дробное дифференцирование Римана — Лиувилля функции $z^{\alpha}f(z)$. Формула (22.51) позволяет получить обратный к $\mathscr{D}\{b;\ f\}$ оператор $I\{b;\ f\}$ в виде

$$I\{b;\ f\} = z^{-\alpha}(I_0^{\alpha} f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(zt)\, dt. \tag{22.53}$$

Его можно построить, согласно (22.49), также в виде

$$I\{b;\ f\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} {}_2F_1\left(1,\ 1;\ 1+\alpha;\ \frac{z}{t}\right) f(t)\, \frac{dt}{t}, \tag{22.54}$$

где $|z|<r<1$ и ${}_2F_1(1,\ 1;\ 1+\alpha;\ z)$ — гипергеометрическая функция (1.72), которой в данном случае равно союзное ядро $b_*(z)$.

Если бы мы взяли $b(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)z}{(1-z)^{1+\alpha}}$ вместо (22.50), то получили бы, что

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k)} f_k z^k = z\mathscr{D}_0^{\alpha}[z^{\alpha-1} f(z)]. \tag{22.55}$$

Последнюю конструкцию называют иногда *дробной производной Рушевея.*

2. Пусть $b(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^{\alpha} z^k$. Тогда

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^{\alpha} f_k z^k \tag{22.56}$$

есть дробное дифференцирование по Вейлю, совпадающее с дифференцированием Вейля $\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f$, см. (19.6), функции $f(z) = f(re^{i\varphi})$ по угловой переменной φ.

3. Выберем, наконец, $b(z)$ так, чтобы $\mathscr{D}\{b;\ f\}$ совпадало с обобщенным интегродифференцированием

$$(L^{(\omega)} f)(z) = -\int_0^1 f(zt)\, \omega'(t)\, dt \tag{22.57}$$

по М. М. Джрбашяну (см. § 18, п. 6°; заметим, что (22.57) можно рассматривать как результат применения оператора (18.110) к функции $f(z) = f(re^{i\varphi})$ по радиальной переменной r). Отправляясь от (18.111)—(18.114), введем функцию

$$b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\omega}(k)\, z^k.$$

Тогда, очевидно, $\mathscr{D}\{b;\ f\} = (L^{(\omega)} f)(z)$.

Относительно других обобщений см. также § 23.

§ 23. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 4

1°. Исторические сведения. К § 18, п. 1°. Операторы (18.5) и (18.6) введены Х. Кобером (H. Kober [1], 1940 г.), операторы (18.1) и (18.3) при $a=0$ и $b=+\infty$ — А. Эрдейи (A. Erdelyi [6], 1950 г., см. также [13]), операторы (18.2) и (18.4) в форме (18.13) и (18.14) — Дж. Лаундесом (J. S. Lowndes [2], 1971 г., $\alpha>-1$; [6], 1980 г., $\alpha>-n$).

Операторы (18.8) также связывают с именами А. Эрдейи и Х. Кобера, по-видимому, первым их так назвал И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.). Отметим, однако, что впервые интеграл

$$(A^{(\rho)}f)(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\rho)\,\Gamma(1/2-\rho)}\int_0^x\frac{t^{2\eta+1}f(t)\,dt}{(x^2-t^2)^{\rho+1/2}},$$

для которого $(A^{(1/2-\alpha)}f)(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}x^{2\alpha+2\eta}}{2\Gamma(3/2-\alpha)}I_{\eta,\alpha}f(x)$, появился в работах Н. Я. Сонина, см. по поводу операторов $A^{(\rho)}$ книгу Н. Я. Сонина [6, с. 208] и работу Б. М. Левитана [1, с. 129], 1951 г. В последней работе оператор $A^{(\rho)}$ как преобразующий тригонометрические функции в функции Бесселя рассматривался в связи с разложениями в ряды по функциям Бесселя. Следует также сказать, что идеи, связанные с дробным дифференцированием «по функции x^2» или «по функции $\sqrt{x}$», содержались еще у Ж. Лиувилля (J. Liouville [1, с. 10], 1832 г., и др.).

Формулы (18.15), (18.16) и (18.18) для операторов (18.5), (18.6) получены Х. Кобером (H. Kober [1]), формулы (18.15) и (18.18) для операторов (18.1) и (18.3) при $a=0$, $b=+\infty$ — А. Эрдейи (A. Erdelyi [6]), а формулы (18.17) — Дж. Лаундесом (J. S. Lowndes [2, 6]). Формулы (18.16′), (18.41′) при $a=0$, $b=\infty$ установлены А. МакБрайдом (A. C. McBride [10, с. 243—244], 1984 г.), указавшим условия их справедливости в классе $F_{p\mu}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ (о классе $F_{p\mu}$ см. в § 8, п. 4°). Случай $\sigma=1$, $a=0$ первой из формул (18.16′) встречается у Р. Бушмана (R. G. Buschman [5], 1964 г.). При $\sigma=1$ представления (18.20) и (18.22) для более общих, чем (18.19) и (18.5), (18.6), операторов урезанных модифицированных преобразований Ханкеля и Кобера (см. далее п. 2°, 18.2, 18.3) найдены А. Эрдейи (A. Erdelyi [4], 1940 г.). При $\sigma=2$ формулы (18.15)—(18.23) для операторов (18.8) приведены в работе И. Снеддона (I. N. Sneddon [2]).

К § 18, п. 2°. Дробный интеграл от функции по функции — понятие, известное еще математикам прошлого века. Оно введено Х. Хольмгреном (Hj. Holmgren [1, с. 10], 1866 г.), хотя в зародыше идеи такого понятия развивались еще в работе Ж. Лиувилля (J. Liouville [7], 1835 г.). Работа Х. Хольмгрена содержит детальное исследование композиций $D^{\lambda_1}_{\theta_1(x)}f_1(x)\,D^{\lambda_2}_{\theta_2(x)}\ldots D^{\lambda_n}_{\theta_n(x)}f_n(x)\,u(x)$, где $f_j(x)$ — операция умножения на функцию $f_j(x)$, а $D^{\lambda_j}_{\theta_j(x)}$ — дробное дифференцирование «по функции $\theta_j(x)$»; вся композиция применяется к функции $u(x)$. В современных работах понятие производной функции по функции появляется в работе А. Эрдейи (A. Erdelyi [9], 1964 г.) и независимо Дж. Таленти (G. Talenti [1], 1965 г.), см. также A. Erdelyi [14], 1970 г. Случай целого порядка интегрирования функции по функции см. в работе Ф. А. Шелковникова [1], 1951 г. Некоторым простым свойствам интегралов от функции по функции посвящена заметка A. Chrysovergis [1], 1971 г. Отметим еще, что в совершенно неявном виде дробный интеграл от функции по функции содержится еще в работе В. Сьюелла (W. Sewell [2, гл. 3, п. 14], 1937 г.) при доказательстве инвариантности относительно конформных отображений свойства дробной дифференцируемости функций, заданных на кривых.

Дробные интегралы от функции по функции в комплексной плоскости исследовали Т. Ослер (T. J. Osler [1, 2], 1970 г.; [5, 7], 1972 г.). Дробное дифференцирование от функции по функции в форме Грюнвальда—Летникова, рассмотренной в § 20, п. 4°, изучалось В. А. Красновым [2], 1977 г.

Теорема 18.1 доказана А. Эрдейи (A. Erdelyi [9], 1964 г.), однако доказательство в [9] содержит погрешность: не обоснована представимость дробным интегралом.

К § 18, п. 3°. Дробное интегродифференцирование (18.42) введено Ж. Адамаром (J. Hadamard [1], 1892 г.). Модификация адамаровского дробного дифференцирования в виде аналогов (18.56)—(18.58) дробного дифференцирования Маршо ранее не вводилась.

К § 18, п. 4°. Бесселево дробное интегрирование (18.61) возникло давно и особенно интенсивно стало разрабатываться и использоваться после работ N. Aronszajn, K. T. Smith [1], 1961 г., N. Aronszajn, F. Mulla, P. Szeptycki [1], 1963 г., N. Aronszajn [1], 1965 г., посвященных многомерным бесселевым потенциалам. Рассматриваемое в п. 4° дробное интегродифференцирование $(E\pm\mathscr{D})^\alpha$ также известно, см., например, книгу Т. Ливермана (T. P. G. Liverman [1, с. 28—31], 1964 г.), где оно имеется в форме (18.71), приспособ-

ленной к полуоси. Используемые здесь формы оператора $(E\pm\mathbf{D})^{\alpha}$ содержатся в работе Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко [1], 1975 г. В ней же получена связь (18.73). В этой работе операторы $(E\pm\mathbf{D})^{\alpha}$ использованы при исследовании нормальной разрешимости сингулярных интегральных уравнений в свертках. Отметим также работу Н. К. Карапетянца [1], 1977 г., в которой операторы $(E\pm D)^{\alpha}$ применены к решению интегрального уравнения Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка.

Утверждение теоремы 18.2 было известно, но в явном виде нигде, по-видимому, не отмечалось. Утверждение (18.78) теоремы 18.3 о совпадении $H^{s,p}([a,b])$ и $I^{\alpha}[L_p(a,b)]$ при $1<p<1/\alpha$ также известно и является немедленным следствием из теорем Б. С. Рубина [1], 1972 г., о продолжении и сужении дробных интегралов (теоремы 13.9 и 13.10 в книге). В явном виде теорема 18.3 фактически содержится в работе L. Biacino [2, теорема 2.1], 1984 г.

К § 18, п. 5°. Рассматриваемые здесь конструкции дробного интегрирования введены Ю. Чженем в работе Y. W. Chen [2], 1961 г., где также доказаны лемма 18.1 и теорема 18.4 Здесь приведены другие доказательства. Отметим, что в указанной работе имеется неточность в формулировке этой теоремы в случае $p>1/\alpha$.

К § 18, п. 6°. Рассматриваемые здесь конструкции введены М. М. Джрбашяном [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

К § 19, пп. 1—3°. Определение дробного дифференцирования периодических функций, рассматриваемого в § 19, было дано Г. Вейлем (H. Weyl [1], 1917 г.). Имеется прекрасное изложение основополагающих результатов для дробного интегродифференцирования Вейля в книге А. Зигмунда [2, гл. XII, § 8, 9]. Мы воспользовались этой книгой при освещении ряда результатов в § 19. Отметим, что дробное интегродифференцирование почти периодических функций изучалось в работах E. R. Love [1], 1938 г.; B. S. Nagy [2], 1939 г.; S. Takahashi [1], 1940 г.; T. Bang [1], 1941 г. В первой из этих работ дробные интегралы и производные рассматривались на всей прямой также и от произвольных ограниченных функций (см. об этом § 9, п. 2°, 5.3).

Представление (19.9) функции $\Psi_{+}^{\alpha}(x)$ через дзета-функцию Римана взято из работы М. Миколаша (M. Mikolás [1], 1959 г.). Связь с дзета-функцией в другом плане отмечалась еще Г. Харди (G. H. Hardy [2], 1922 г.).

Представление функции $\Psi_{+}^{\alpha}(t)$ в виде (19.11) принадлежит Г. Вейлю (H. Weyl [1, с. 300], 1917 г.), доказательство леммы заимствовано из книги А. Зигмунда [2, гл. XII, § 8]. Некоторые свойства ядра Вейля $\Psi_{+}^{\alpha}(x)$, важные в вопросах приближения тригонометрическими многочленами, были получены в работах Б. Надя (B. S. Nagy [1], 1938 г.), см. также работу В. К. Дзядыка [1], 1953 г. Конструкция (19.18) ранее не использовалась. Утверждение (19.19) леммы 19.3 было указано еще Г. Вейлем (H. Weyl [1, с. 300], 1917 г.). Запись дробного интеграла Вейля в виде (19.21) предложена М. Миколашем (M. Mikolás [1, с. 80], 1959 г.).

Связи (19.24), (19.25) в явном виде ранее, по-видимому, не отмечались. Операторы $I_{\mu}^{(\alpha)}$(свертки с ядром $K_{\alpha,\mu}(x)$) широко используются в теории приближения периодических функций, см., например, работы С. М. Никольского, А. В. Ефимова, С. А. Теляковского и др., указанные далее в п. 2°, 19.6).

К § 19, п. 4°. Формальное совпадение (19.35) дробной производной Вейля с производной Маршо фактически содержится в работе Г. Вейля (H. Weyl [1, с. 301—302], 1917 г.). Лемма 19.4 новая.

К § 19, п. 5°. Теорема 19.2 доказана С. Г. Самко [33], 1985 г., эквивалентность утверждений (19.46) и (19.47) в теореме 19.3 — в работе P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 129], 1975 г.

К § 19, п. 6°. Оценки (19.48), (19.49) и теорема 19.6 доказаны в статье Х. М. Мурдаева [2], 1985 г. Утверждение следствия из теоремы 19.6 при $\lambda+\alpha<1$ получено Г. Харди, Д. Литтлвудом (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3, с. 589], 1928 г.) и там же содержится утверждение замечания 19.4; случай $\alpha+\lambda=1$ принадлежит А. Зигмунду (A. Zygmund [2, с. 53], 1945 г.). Теоремы 19.7, 19.8 доказаны Х. М. Мурдаевым [2], 1985 г. Утверждение следствия из теоремы 19.7 и утверждение (19.62) принадлежат Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3, с. 576 и 591], 1928 г.; см. также [2], 1926 г.).

К § 19, п. 7°. Утверждения этого пункта, за исключением изоморфизма (19.71), принадлежат Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3, с. 592—604], 1928 г.).

К § 19, п. 8°. Распространение неравенства Бернштейна для тригонометрических многочленов на дробные производные в метрике $C([0,2\pi])$ впервые в явном виде получил П. Сайвин (P. Civin [1], 1940 г.; [2], 1941 г.), но в других терминах оно по существу содержалось в работе В. Сьюелла (W. Sewell [2, с. 111], 1937 г.). Отметим, что аналогичное неравенство для дробных производных алгебраических многочленов, рассматриваемых на конечном отрезке, было фактически получено П. Монтелем (P. Montel [1, с. 170], 1918 г.). Распространение на случай $L_p(0,2\pi)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, дано И. И. Огиевецким [3, 4], 1958 г. В работе П. Сайвина рассматривался более общий случай целых

функций экспоненциального типа, но постоянная в неравенстве была весьма загрублена. Точная постоянная, равная 1, как в классическом неравенстве Бернштейна, была получена при всех $\alpha \geqslant 1$ П. И. Лизоркиным [3], 1965 г., также для целых функций экспоненциального типа., см. п. 2° этого параграфа. Приведенное в теореме 19.10 простое доказательство для $0<\alpha<1$ с постоянной, указанной в (19.74), содержится в работе С. П. Гейсберга [2], 1967 г. Однако в более общем виде (19.81) неравенство Бернштейна для дробных производных было получено другим способом ранее в работе T. Bang [1, с. 21—22], 1941 г.

Неравенство Фавара (19.82) для дробных интегралов периодических функций $f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k e^{ikx}$ впервые было получено Б. Надем (B. S. Nagy [1, с. 123], 1938 г.).

К § 20, п. 1°. Формула, представляющая дробное дифференцирование в виде предела разностных отношений, впервые появляется у Ж. Лиувилля (J. Liouville [2, с. 107—110], 1832 г.). Она используется Ж. Лиувиллем в работе J. Liouville [6, с. 224], 1835 г., для вывода формулы Фурье дробного дифференцирования из своего подхода и для вычисления дробных производных от функций $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$ в работе J. Liouville [2, с. 136], 1832 г. Эти эпизоды не находят развития у Ж. Лиувилля. В 1867 г. появляется работа А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1]), в которой развивается подход к дробному интегродифференцированию на основе равенства (20.7) или, точнее, на основе (20.42), однако рассуждения здесь носят еще эмпирический характер. Первое строгое построение теории дробного интегродифференцирования на этом пути осуществил А. В. Летников [1], 1868 г. Этому подходу была посвящена также статья Р. Моста (R. Most [1], 1871 г.). Следует сказать, что у А. Грюнвальда и А. В. Летникова построения велись в комплексной плоскости, при этом приращение h в (20.7) было фактически комплексным с фиксированным направлением (определяемым начальной точкой a, см. (20.42)). На долгие годы подход Грюнвальда—Летникова остается в забвении ввиду явной предпочтительности формы интегродифференцирования Римана—Лиувилля. Спустя лишь многие годы, появляются работы W. L. Ferrar [1], 1928 г.; N. Stuloff [1], 1951 г.; K. F. Moppert [1], 1953 г.; M. Mikolás [4], 1963 г.; [5], 1964 г., в которых излагается подход Грюнвальда — Летникова на более современном языке, даны примеры, рассмотрены связи с другими формами и т. п. Результаты А. В. Летникова отражены также в статье Ю. Л. Рабиновича [1]. Новую жизнь подход Грюнвальда—Летникова обрел с публикацией работ У. Вестфаль (U. Westphal [4], 1974 г.), П. Бутцера, У. Вестфаль (P. L. Butzer, U. Westphal [1], 1975 г.), в которых этот подход был переосмыслен с позиций современной теории функций и различные классические вопросы дробного исчисления были связаны с современными задачами функционального анализа и теории функций, см. также работу Я. С. Бугрова [1], 1985 г. В этом же плане следует отметить работу P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1], 1977 г. Отметим, наконец, что подход через разности дробного порядка в рамках обобщенных функций развивался в работах A. Brédimas [1—5], 1973—1976 гг.

Обобщенное дифференцирование $a(\mathscr{D})$, см. (20.10), вводилось Э. Постом (E. L. Post [2, с. 726], 1930 г.). Заметим, что обобщенное дифференцирование $\mathscr{D}^{\alpha}\log\mathscr{D}$, $\varphi(\mathscr{D})\log\mathscr{D}$ и др. на основе другого подхода исследовал Х. Дэвис (H. T. Davis [3, с. 78—85], 1936 г.).

К § 20, п. 2°. В этом пункте мы использовали построения из работ У. Вестфаль (U. Westphal [3, 4], 1974 г.), см. также П. Бутцер, У. Вестфаль (P. L. Butzer, U. Westphal [1], 1975 г.), в частности введенные в этих работах функции (20.14), (20.15). Лемма 20.1 доказана U. Westphal [3, с. 560], см. также P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 127—128], откуда и заимствовано ее доказательство (лишь дано независимое от [3] доказательство разложения (20.19)). Утверждение 1) леммы 20.1 было известно Л. Бозанке (L. S. Bosanquet [5], 1945 г.), см. U. Westphal [4, с. 562]. Лемма 20.2 и теорема 20.1 получены P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 128—129]. Теорема 20.2 является новой. Теорема 20.3 установлена P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 133].

К § 20, п. 3°. Теорема 20.4 получена С. Г. Самко [33], 1985 г. Близкий вариант теоремы 20.4 содержится в работе U. Westphal [4, с. 568] в общем контексте дробных степеней операторов, однако при ограничении, что функции и их дробные производные берутся из одного и того же пространства, см. ниже п. 2° (на бесконечной прямой такое предположение ограничительно по существу). Теоремы 20.5, 20.5′ являются аналогами теоремы 20.3 и ранее не отмечались; близкий вариант теоремы 20.5 (при $r=p$, $1<p<\infty$) содержится в работе Я. С. Бугрова [1, с. 62, 64], 1985 г.

К § 20, п. 4°. Определения (20.42), (20.46) восходят, как отмечалось, к А. Грюнвальду, А. В. Летникову. Совпадение (20.47) интеграла (20.46) с интегралом Римана—Лиувилля содержится (в случае достаточно хороших функций) в работах А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1, с. 455—458], 1867 г.), А. В. Летникова [1, с. 19], 1868 г. Теорема 20.6 новая.

К § 21, п. 1°. Теорема 21.1 для операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ со степенно-логарифмическими ядрами при натуральных β (и $\gamma=1$) из H^{λ} получена А. А. Килбасом [1], 1975 г.

К § 21, п. 2°. Утверждения теорем 21.2, 21.3 о действии операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ из $H^{\lambda}(\rho)$ при натуральных β ($\gamma=1$) доказаны А. А. Килбасом [6], 1978 г., для случаев простейшего веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$ и общего степенного веса (3.12) в случаях $0\leqslant\mu<\lambda+1$ и $0\leqslant\mu_1<\lambda+1$, $\lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1$, $k=2, 3, \ldots, n$, соответственно.

К § 21, пп. 3—4°. Приведенные здесь результаты являются новыми. Отмеченная в замечании 21.3 гельдеровость (точнее, обобщенная степенно-логарифмическая гельдеровость) чисто логарифмических интегралов

$$(I_{a+}^{1,\beta}\varphi)(x)=\int_a^x \ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,\varphi(t)\,dt,\quad \varphi\in L_p(a,b),\quad \beta>0,$$

была при $p>1/\alpha$ отмечена А. А. Килбасом, С. Г. Самко [1], 1978 г.

К § 21, п. 5°. Приведенное в теореме 21.10 асимптотическое разложение интеграла $I_{0+}^{\alpha,\nu}\varphi$ с натуральными степенями логарифма следует результатам работы А. А. Килбаса [8], 1982 г., где наряду со случаем $0<\beta<1$ в асимптотике (21.27) рассмотрены и случаи $\beta=1$ и $\beta>1$. В указанной работе имеется погрешность: вместо интеграла

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ln^{\nu}(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad 0<\alpha<1,\quad -1<\nu<+\infty,$$

допускающего комплексные значения, следует рассматривать интеграл

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,|\ln(x-t)|^{\nu}\,\varphi(t)\,dt.$$

К § 22, пп. 1—2°. Теория дробного интегродифференцирования с самого зарождения развивалась в комплексной области, достаточно сослаться, например, на работы Ж. Лиувилля (J. Liouville [1—8], 1832—1837 гг.) с исходным определением дробного дифференцирования функций, разложимых в ряд из экспонент, или на работы А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1], 1867 г.), А. В. Летникова [1], 1868 г., Н. Я. Сонина [2], 1872 г. Подход, связываемый с Ж. Адамаром, дан им в работе J. Hadamard [1], 1892 г.

Дробное интегрирование Вейля (22.1) (подход II) в комплексной плоскости впервые появляется в работе Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5], 1932 г.). Подход III — дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля (22.2), (22.3) с интегрированием по прямолинейному отрезку $[z_0, z]$ встречается в первых же работах по теории дробного интегродифференцирования. Формула (22.11) содержится уже у Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1, с. 1], 1865—1866 гг.) В работе А. К. Grünwald [1], 1867 г., дробное интегродифференцирование определяется с помощью конечных разностей дробного порядка (см. § 20) в комплексной плоскости и устанавливается сводимость этого определения к определению Римана—Лиувилля.

Дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля с интегрированием по произвольной кривой в комплексной плоскости детально исследовал В. Сьюелл (W. E. Sewell [1, 2], 1935, 1937 гг.) в связи с вопросами приближения полиномами в комплексной плоскости (см. об этом также ниже в п. 2°).

Что же касается подхода IV, то обобщенная формула Коши (22.4) впервые встречается у Н. Я. Сонина [2], 1872 г., доказавшего, в частности, совпадение (22.32) дробной производной Коши с дробным интегралом $I_{z_0}^{-\alpha}$ при $\alpha<0$. Позже эта формула рассматривалась Ж. Лораном (H. Laurent [1], 1884 г.), П. А. Некрасовым [1, с. 87], 1888 г., А. Кругом (A. Krug [1], 1890 г.). Этот подход использовали П. Монтель (P. Montel [1, с. 167], 1914 г.), Г. Харди, Д. Литтлвуд (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5], 1932 г.). Формула (22.4) встречается в работе L. M. Blumenthal [1, с. 490], 1931 г., в которой дробное интегрирование трактовалось с точки зрения теории композиций, развитой В. Вольтерра. Конструкция (22.30) впервые указана А. В. Летниковым [3, с. 428], 1872 г.

Дробное интегродифференцирование в виде (22.17), (22.18), (22.21) ранее, по-видимому, не рассматривалось, за исключением случаев $I_{+,-\pi}^{\alpha}$, $\mathcal{D}_{+,-\pi}^{\alpha}$ и $I_{+,0}^{\alpha}$, $\mathcal{D}_{+,0}^{\alpha}$, встречающихся в работах К. Нишимото (K. Nishimoto [1—5, 7] и др., 1976—1984 гг.), см. также S. Owa, K. Nishimoto [1].

Теорема 22.2 принадлежит Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5], 1932 г.; [7], 1941 г.).

К § 22, п. 3°. Представление дробного интеграла I_0^{α} в виде (22.34) использовалось Ж. Адамаром (J. Hadamard [1], 1892 г.). Это вместе с интегралами (18.44) послужило ему отправной точкой для того, чтобы предложить идею рассмотрения общих конструкций $\int_0^1 V(t)f(zt)dt$ (вида (22.57)). Однако эта идея не была им реализована надлежащим

образом. Реализация такой идеи с достаточно богатым содержанием была дана в работах М. М. Джрбашяна [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

Обобщенное интегродифференцирование по Гельфонду—Леонтьеву восходит к работе А. О. Гельфонда, А. Ф. Леонтьева [1], 1951 г. Имеется обширная литература, содержащая различные обобщения и развития идей, связанных с этим понятием. См. по этому поводу работы Ю. Ф. Коробейника [1, 2], 1964 г.; [3], 1965 г.; [4], 1983 г., в которых идея обобщенного интегродифференцирования аналитических функций развита в наибольшей общности. Ю. Ф. Коробейником [4] введены и исследованы также операторы обобщенного дифференцирования $\mathscr{D}_c$ и интегрирования J_c, определенные на произвольных числовых семействах $C=\{C_\alpha\}_{\alpha\in M}$, где M — не обязательно счетное множество. Отметим работу Н. И. Нагнибиды [1], 1966 г., содержащую исследование некоторых вопросов, связанных с операторами Гельфонда—Леонтьева. Оператор (22.41) указан в качестве примера в работе А. О. Гельфонда, А. Ф. Леонтьева [1], 1951 г. Представление его в виде (22.42) дано в работе И. Димовского (I. H. Dimovski [1], 1981 г.; см. также [3, с. 105], 1982 г.). Близкую к (22.43) конструкцию см. в I. H. Dimovski [2; 3, с. 106], 1982 г.

Соображения, основанные на переходе от произведения Адамара (22.46) к свертке (22.48), общеизвестны, см., например, книгу В. И. Смирнова, Н. А. Лебедева [1, с. 169]. Интегральные операторы (22.48) в более общей ситуации исследованы Ю. Ф. Коробейником [3], 1965 г., см. об этом ниже в п. 2° этого параграфа. В примерах 1—3 мы следовали работе В. И. Белого [6], 1977 г., где рассматривалась конструкция обобщенного дифференцирования (22.46) в связи с построением интегральных представлений для функций, аналитических в круговом кольце, см. также работу Э. С. Белинского, В. И. Белого [1], 1971 г. Вариант (22.55) имеется также в работах S. Owa [3], 1981 г.; [6], 1982 г.; [13], 1985 г.

Обобщенное интегродифференцирование (22.57) введено и использовано в ряде вопросов теории аналитических функций в работах М. М. Джрбашяна [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

2°. Обзор других результатов. 18.1. Пусть $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}$ — операторы (18.1), (18.7), а $\mathfrak{M}$ — оператор преобразования Меллина (1.112). Если $f\in L_p(0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, то $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}f$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}f\in L_p(0,\infty)$ и при $s=1/p+i\tau$, $-\infty<\tau<\infty$,

$$(\mathfrak{M}I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}f)(s)=\frac{\Gamma(1+\eta-s/\sigma)}{\Gamma(1+\eta+\alpha-s/\sigma)}(\mathfrak{M}f)(s),\quad \operatorname{Re}(\eta-s/\sigma)>-1, \tag{23.1}$$

$$(\mathfrak{M}I^\alpha_{-,\sigma,\eta}f)(s)=\frac{\Gamma(\eta+s/\sigma)}{\Gamma(\eta+\alpha+s/\sigma)}(\mathfrak{M}f)(s),\quad \operatorname{Re}(\eta+s/\sigma)>0. \tag{23.2}$$

Если $2<p<\infty$, а $f\in\mathfrak{M}_p=\{g: g=\mathfrak{M}^{-1}\varphi,\ \varphi\in L_p,\ (\sigma p^{-1}-i\infty,\ \sigma p^{-1}+i\infty),\ 1/p+1/p'=1\}$, то $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}f$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}f\in\mathfrak{M}_p$ и имеют место формулы (23.1), (23.2) (A. Erdelyi [6, лемма 5]). Отметим, что впервые эти утверждения при $\sigma=1$ для операторов (18.5), (18.6) доказал H. Kober [1, теоремы 5а, 5в]. В работе P. G. Rooney [4] изучено действие операторов $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}$ из весового пространства $L_p(R_1^+;x^\mu)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; см. также § 9, п. 2°, 5.6.

Пусть $\mathfrak{M}$, L, L^{-1} — операторы преобразований Меллина (1.112) и Лапласа (1.119), (1.120); $I^+_{\eta,\alpha}$, $K^-_{\eta,\alpha}$ — операторы Кобера (18.5), (18.6). Пусть еще выполняются условия: $\alpha>0$, $\eta>0$; $f(x)$, $x^{-1/2}f(x)\in L(0,\infty)$; $f^*(s)=\mathfrak{M}\{f(t);s\}\in L(1/2-i\infty,\ 1/2+i\infty)$; $x^{-1/2}(I^+_{\eta,\alpha}f)(x)$, $x^{-1/2}(K^-_{\eta,\alpha}f)(x)\in L(0,\infty)$. Тогда имеют место представления

$$(I^+_{\eta,\alpha}f)(x)=x^{-\alpha-\eta}L^{-1}\{t^{-\alpha}L[\tau^\eta f(\tau);t];x\},$$

$$(K^-_{\eta,\alpha}f)(x)=\{y^{1-\alpha-\eta}L^{-1}\{t^{-\alpha}L[\tau^{\eta-1}f(1/\tau);t];y\}\}_{y=x^{-1}}$$

(C. Fox [7]).

В работе K. J. Srivastava [2] показано, что композиции $I^+_{\eta,\alpha}I^+_{\xi,\alpha}$, $K^-_{\eta,\alpha}K^-_{\xi,\alpha}$ операторов Кобера (18.5), (18.6) являются композициями двух операторов вида $\int_0^\infty (xt)^\gamma w_{\mu,\nu}(xt)f(t)\,dt$, где $w_{\mu,\nu}(x)=x^{1/2}\int_0^\infty \tau^{-1}J_\nu(\tau)J_\mu(x/\tau)\,d\tau$ — функция Ватсона, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя (1.83).

Пусть $I^+_{\eta,\alpha}$, $K^-_{\eta,\alpha}$ — операторы Кобера (18.5), (18.6); $Rf(x)=x^{-1}f(x^{-1})$; $\operatorname{Re}\nu$, $\operatorname{Re}(\nu+2\alpha)\neq -2,-4,\ldots$, $T_\alpha=(I^+_{\nu/2,\alpha})^{-1}RI^+_{\nu/2,\alpha}$ при $\operatorname{Re}\alpha>0$ и $T_\alpha=(K^-_{\nu/2+\alpha,-\alpha})^{-1}RK^-_{\nu/2+\alpha,-\nu}$ при $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$. Если $f\in L_2(0,\infty)$, то $T_\alpha f\in L_2(0,\infty)$, причем $T_\alpha^{-1}f=T_\alpha f$, $T_0f=Rf$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}T_\alpha f\left(\dfrac{x}{\alpha^2}\right)=\int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt})f(t)\,dt$, где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода (1.83) (A. Erdelyi [5]).

18.2. Пусть $S_{\eta,\alpha} \equiv S_{\eta,\alpha,1}$ — оператор модифицированного преобразования Ханкеля (18.19), а $S_\eta = S_{\eta,0}$. Если $\operatorname{Re}\eta > -1/2$, то на функциях из $L_2(0, \infty)$ имеют место следующие представления для операторов Кобера (18.5), (18.6):

$$\begin{gathered} I^+_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+2\alpha} S_{2\eta+\alpha,\alpha} = S_{2\eta+\alpha,\alpha} S_{2\eta}, \\ K^+_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+\alpha,\alpha} S_{2\eta+2\alpha} = S_{2\eta} S_{2\eta+\alpha,\alpha}, \\ I^+_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+\alpha+\beta,\alpha-\beta} S_{2\eta+\beta,\beta}, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant \operatorname{Re}\alpha, \\ K^-_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+\beta,\beta} S_{2\eta+\alpha+\beta,\alpha-\beta} \end{gathered} \tag{23.3}$$

(H. Kober [1]; ср. с соотношениями (18.22)).

В работе A. Erdelyi, H. Kober [1] установлены соотношения, связывающие операторы Кобера (18.5), (18.6) и урезанные преобразования Ханкеля:

$$ {}_mS_\nu f(x) = \int_0^\infty J_{\nu,m}(2\sqrt{xt})\, f(t)\, dt, \quad f \in L_p(0, \infty), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, $$

$$ J_{\nu,m}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \quad \operatorname{Re}\nu/2' + 1/p' \neq 0, -1, -2, \ldots, $$

где $J_{\nu,m}(z)$ — урезанная функция Бесселя (ср. с (1.83)).

В работе J. M. Ch. Joshi [1] операторы Кобера (18.5), (18.6) применены для нахождения связей между обобщенными преобразованиями Ханкеля вида

$$ \int_0^\infty (xt)^{\lambda+1/2} J^\mu_\lambda\left[\left(\frac{x^2t^2}{4}\right)^\mu\right] f(t)\, dt, \quad \int_0^\infty (xt)^\nu J^\mu_\lambda[(xt)^\mu] f(t)\, dt, $$

где $J^\mu_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\,\Gamma(1+\lambda+\mu k)}$, $\mu > 0$, — функция Бесселя — Мейтленда, см. книгу О. И. Маричева [10, с. 288], а индексы λ принимают различные значения.

В работе V. M. Bhise [2] операторы Эрдейи—Кобера (18.5), (18.6) применены для исследования некоторых свойств интегрального преобразования

$$ (Kf)(x) = \int_0^\infty G^{21}_{24}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} k-m-(\nu+1)/2, & m-k+(\nu+1)/2 \\ \nu/2, \ \nu/2+2m, & -\nu/2, \ -\nu/2-2m \end{matrix}\right) f(t)\, dt $$

с G-функцией Мейера в ядре, называемого *обобщенным преобразованием Ханкеля* и сводящегося при $k+m=1/2$ к преобразованию Ханкеля.

18.3. В работе B. L. J. Braaksma, A. Schuitman [1] предложена модификация дробного интеграла типа Эрдейи—Кобера (18.1) в духе конструкции А. Эрдейи (9.3):

$$ \tilde{I}^\alpha_{0+,\sigma,\eta}\varphi(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1} \varphi(t)\, dt - \right. $$

$$ \left. - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\sigma k} x^{\sigma(\alpha-1)} t^{\sigma(\eta+1)-1} \varphi(t)\, dt\right] \tag{23.4} $$

и аналогичная модификация $\tilde{I}^\alpha_{-,\sigma,\eta}\varphi$ оператора (18.3) с $b = +\infty$. В указанной работе изучены свойства операторов $\tilde{I}^\alpha_{0+,\sigma,\eta}$, $\tilde{I}^\alpha_{-,\sigma,\eta}$ в специальных пространствах $T(\lambda, \mu)$:

$$ T(\lambda, \mu) = \{\varphi \in C^\infty(0, \infty): \sup_{\substack{t>0 \\ \lambda_n \leqslant c < \mu_n}} |t^{c+p}\varphi^{(p)}(t)|, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n, $$

$n = 0, 1, 2, \ldots$; $\lambda_n < \mu_n$, $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$; $\mu_0 < \mu_1 < \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu\}$ основных и $T'(1-\mu, 1-\lambda)$ обобщенных функций (отличных от

рассмотренных в § 8), а также даны связи таких модифицированных дробных интегралов с модифицированным преобразованием Ханкеля ${}_mS_\nu f$ (см. выше п. 18.2).

18.4. Более общие, чем (18.5), (18.6), операторы

$$(Rf)(x) = \frac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x {}_2F_1(1-\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ t/x)\, t^\nu f(t)\, dt, \tag{23.5}$$

$$(Kf)(x) = \frac{x^\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty {}_2F_1(1-\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ x/t)\, t^{-\delta-1} f(t)\, dt, \tag{23.6}$$

где ${}_2F_1$—гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), ввел P. Саксена (R. K. Saxena [5]), при этом он получил аналоги формул (23.1), (23.2) для преобразования Меллина и формулы (18.18) дробного интегрирования по частям. В работе M. E. Nieva del Pino [1] найдены преобразования Варма (9.6), Мейера и Ханкеля (см. § 1, п. 4°) операторов (23.5), (23.6). Обобщения операторов Эрдейи—Кобера (18.5), (18.6) типа (23.5), (23.6) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре рассматривались также в работах S. L. Kalla, R. K. Saxena [1], R. K. Saxena, R. K. Kumbhat [1], с функцией типа гипергеометрической функции Райта ${}_pF_q$— B. A. Маловичко [1], с функцией Бесселя — J. S. Lowndes [1], с G-функцией Мейера — B. P. Parashar [1], S. L. Kalla [6, 12], с H-функцией Фокса — S. L. Kalla [4, 12], R. K. Saxena, R. K. Kumbhat [2], с произвольной функцией некоторого класса — S. L. Kalla [7]. См. также далее § 35—39.

18.5. Пусть $F_{p\mu}$ — пространство основных, а $F'_{p\mu}$ — пространство обобщенных функций, введенные в § 8, п. 4°, H_m^c — оператор вида

$$H_m^c f(x) \equiv \int_0^x \frac{(x^m - t^m)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{x^m}{t^m}\right) m t^{m-1} f(t)\, dt, \tag{23.7}$$

$m > 0$, $\operatorname{Re} c > 0$, $a,\ b \in \mathbf{C}$, ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72). В работе A. C. McBride [1] показано, что оператор $H_m^c f$ представим в виде

$$H_m^c f(x) = I_{0+,m}^{c-b} x^{-ma} I_{0+,m}^b x^{ma} f(x), \quad x > 0,$$

где $I_{0+,m}^\alpha \equiv I_{0+;m,0}^\alpha$ — оператор типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.2), и непрерывно действует из $F_{p\mu}$ в $F_{p,\mu+mc}$ и из $F'_{p\mu}$ в $F'_{p,\mu-mc}$. Аналогичные исследования проведены для трех других операторов, получающихся из $H_m^c f$ перестановкой x^m и t^m в функции ${}_2F_1$ или такой же перестановкой во всем ядре с заменой промежутка интегрирования $(0,\ x)$ на $(x,\ \infty)$, см. также далее § 39, п. 2°, 36.2.

Свойства операторов типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.4), $a = 0$, $b = \infty$, в пространствах $F_{p\mu}$ и $F'_{p\mu}$ изучены в работах A. C. McBride [2, 4]. В статье A. C. McBride [5] исследовано действие операторов преобразования Ханкеля (см. § 1, п. 4°) и модифицированного преобразования Ханкеля (18.19) при $\sigma = 2$ из $F_{p,\mu}$, $F'_{p,\mu}$ в $F_{p,2/p-\mu-1}$, $F'_{p,2/p-\mu-1}$ соответственно и установлены различные соотношения между ними и операторами дробного интегрирования типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.3); в частности, доказаны формулы (18.20) — (18.23) при $\sigma = 2$.

Отметим еще, что впервые операторы типа (23.7) при $m=1$, но в других пространствах функций Q_q и R_r, см. § 17, п. 1°, рассмотрел E. R. Love [2, 3], а аналогичный $H_m^c f$ оператор с переменным нижним пределом изучил T. P. Higgins [3], см. далее § 39, п. 2°, 36.1, 36.2.

18.6. В работах M. Saigo, [1—3], см. также [6, 7], введены интегральные операторы

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\, {}_2F_1\left(\alpha+\beta,\ -\eta;\ \alpha;\ \frac{x-t}{x-a}\right) f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \quad n = [-\operatorname{Re}\alpha] + 1;$$

$$(I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1}\, {}_2F_1\left(\alpha+\beta,\ -\eta;\ \alpha;\ \frac{t-x}{b-x}\right) f(t) dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$(I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \quad n = [-\operatorname{Re}\alpha] + 1;$$

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, t^{-\alpha-\beta}\, {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \quad n = [-\operatorname{Re}\alpha] + 1,$$

сводящиеся при $\beta = -\alpha$ и $\beta = 0$ к дробным интегралам и производным Римана — Лиувилля (§ 2, 5) и Кобера (§ 18, п. 1°) соответственно. Исследованы различные свойства этих операторов. В частности, в работе M. Saigo [1] установлены композиционные разложения операторов $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$, $I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}$ типа (10.18) — (10.29), условия выполнимости формулы интегрирования по частям

$$\int_0^\infty g(x)\,(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}g)(x)\,dx,$$

условия справедливости аналогов полугруппового свойства (2.65):

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta}\, I_{a+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f = I_{a+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f,$$

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta}\, I_{a+}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta}f = I_{a+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta}f,$$

$$I_{-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}\, I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}f = I_{-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f,$$

$$I_{-}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta}\, I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}f = I_{-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta}f$$

(первые две из них остаются справедливыми при замене индекса $a+$ на $b-$), а также исследовано действие операторов $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$, $I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}$ в весовых пространствах $L_p((0,\infty); x^\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В работах M. Saigo [2, 3, 6, 7] указано, что из последних равенств вытекают следующие представления для обратных операторов:

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{a+}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}, \quad (I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{b-}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta},$$

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{-}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}$$

и установлен характер гельдеровости функций $I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta}f$, $I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}f$ на отрезке $[a, b]$ в предположении, что $f(x) \in H^\lambda([a, b])$, $0 < \lambda < 1$.

18.7. Развивая идею A. Erdelyi [3], см. об этом в § 4, п. 2°, 2.6 и в § 9, п. 2°, 5.4, С. А. Акопян, А. Б. Нерсесян [1] использовали формулу (18.18) дробного интегрирования по частям для операторов $I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha}$ Эрдейи—Кобера при $\sigma=2$ для построения новых биортогональных систем функций:

$$\Phi_{n,\nu}(x) = \left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^\alpha x^{\nu+\alpha} J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu}x),$$

$$\Psi_m(x) = -\frac{2^2}{J_{\nu+1}^2(j_{m,\nu})\,\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t^2-x^2)^{-\alpha}\, t^{1-\nu} J_\nu(j_{m,\nu}t)\, dt,$$

где $j_{n,\nu}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни функции Бесселя $J_\nu(z)$, $0 \leqslant \alpha < 1$. В случае $\nu = 1/2$ отсюда получается обобщенная биортогональная система Шлемильха.

18.8. Операторы типа Эрдейи—Кобера $(x^{1-\sigma}d/dx)^\alpha$ использовались в работе М. И. Ключанцева [1] для построения оператора преобразования F_r для дифференциальных операторов

$$B_r = \frac{d^r}{dx^r} + \frac{b_1}{x}\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} + \cdots + \frac{b_r}{x^r}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

т. е. такого оператора F_r, что $F_r^{-1} B_r F_r = d^r/dx^r$. Оператор F_r на функциях v, удовлетворяющих некоторым условиям четности, имеет вид

$$F_r v = \prod_{k=1}^{r-1} x^{a_k} \left(\frac{d}{x^{r-1}dx}\right)^{c_k},$$

где a_k и c_k находятся по коэффициентам $b_1, \ldots, b_r$.

В работе K. Trimèche [1] содержится обобщение

$$(X\varphi)(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt,\quad (\,'X\varphi)(x)=\int_x^\infty K(t,x)\,A(t)\,\varphi(t)\,dt$$

операторов Эрдейи — Кобера с некоторым ядром $K(x, t)$, которое служит аналогичным оператором преобразования: $\Delta X\varphi\equiv X\frac{d^2}{dx^2}f$, для дифференциального оператора $\Delta=\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{d}{dx}\right)-q(x)$.

18.9. В работе P. G. Rooney [1] исследовалось действие дробного интегрирования $I^\alpha_{0+;1,s}=x^{-\alpha-s}I^\alpha_{0+}x^s$, $I^\alpha_{-;1,s}=x^sI^\alpha_-x^{-\alpha-s}$ (см. (18.1), (18.7)) типа Эрдейи—Кобера в пространствах Лоренца $L(p, q)$, о которых см., например, R. O'Neil [1]. Показано, что

$$\|I^\alpha_{0+;1,s}\|_{L(p,q)}\leqslant\frac{\Gamma(s+1-1/p)}{\Gamma(\alpha+s+1-1/p)},\quad \|I^\alpha_{-;1,s}\|_{L(p,q)}\leqslant\frac{\Gamma(s+1/p)}{\Gamma(\alpha+s+1/p)}$$

при $1\leqslant p<\infty$, $q\geqslant p$, $\alpha>0$ и $s>-1/p'$ в первом случае и $s>-1/p$ во втором. Даны приложения к действию в $L(p, q)$ интегрального преобразования Варма (9 6) и интегрального преобразования $\int_0^\infty (xt)^{-m-1/2}e^{-xt/2}M_{k,m}(xt)\,f(t)\,dt$ со специальной функцией Уиттекера $M_{k,m}(z)$ (Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 251]).

18.10. Пусть $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$, $I^\alpha_{-;\sigma,\eta}$ — операторы левостороннего и правостороннего дробного интегрирования Эрдейи — Кобера (см. (18.1), (18.7)). Связь их друг с другом, подобно связи (11.27) — (11.30), дана в работе P. G. Rooney [2] в виде

$$I^\beta_{-;\sigma,\eta}H_1=I^\alpha_{0+;\sigma,\xi},\quad \operatorname{Re}\beta\leqslant\operatorname{Re}\alpha,$$

$$I^\alpha_{0+;\sigma,\xi}H_2=I^\beta_{-;\sigma,\eta},\quad \operatorname{Re}\alpha\leqslant\operatorname{Re}\beta,$$

где H_1, H_2 — операторы, ограниченность которых в пространстве с весом $L_p(R^1_+, x^\mu)$ получается с помощью теоремы о Фурье-мультипликаторах. На основе такой связи сделаны выводы о вложении образов $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}[L_p(R^1_+; x^\mu)]$, $I^\beta_{-;\sigma,\eta}[L_p(R^1_+; x^\mu)]$ друг в друга или об их совпадении, см. также P. G. Rooney [3]. Даны приложения к вложениям образов $\widetilde{S}_{\rho,\lambda,\gamma}(L_p(R^1_+; x^\mu))$, где $\widetilde{S}_{\rho,\lambda,\gamma}=S_{\frac{\lambda+\gamma+\rho-1}{2},1-\rho,2}S_{\frac{\lambda+\rho-1}{2},1-\rho,2}$ — оператор композиции двух модифицированных преобразований Ханкеля (18.19), см. также P. G. Rooney [4].

18.11. В работе C. Fox [1] показано, что дробное интегрирование Эрдейи—Кобера при некоторых условиях сохраняет свойства интегральных преобразований быть так называемыми цепными.

18.12. Дробные производные и интегралы Адамара (18.42), (18.43), (18.56), (18.56′) использовались в работах Р. Г. Мамедова, Г. Н. Оруджаева [1, 2] для построения некоторых классов дробнодифференцируемых функций на полуоси, которые хорошо приспособлены для применения преобразования Меллина.

18.13. Пусть $f(x)\in L_2(R^1_+, \rho_\alpha)$, где взят вес $\rho_\alpha(x)=e^{-x}x^\alpha$, $\alpha\geqslant 0$, и пусть $f(x)=\sum_{n=0}^\infty \ln\hat{L}^{(\alpha)}_n(x)$, где $\hat{L}^{(\alpha)}_n(x)=[\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(n+1)]^{-1/2}L^{(\alpha)}_n(x)$ — ортонормированная система многочленов Лагерра (см. § 9, п. 2°, 5.4). Для того чтобы $\sum_{n=0}^\infty c_n^2n^\nu<\infty$, $0<\nu<1$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была представима в виде

$$f(x)=\int_x^\infty e^{x-t}(t-x)^{\nu-1}\varphi(t)\,dt,\quad \varphi(t)\in L_2(R^1_+, \rho_{\alpha+\nu})$$ (С. З. Рафальсон [1]).

18.14. Дробное дифференцирование Чженя (18.87) было применено в работе А. В. Скорикова [2] к описанию пространства $L^\alpha_p([a, b])=H^{\alpha,p}([a, b])$ бесселевых потенциалов на отрезке, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. В этой работе первоначальное определение

пространства $L_p^\alpha([a, b])$ дано в терминах дробного дифференцирования Чженя. Это определение при $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$ имеет вид

$$L_p^\alpha([a, b]) = \{f : f \in L_p,\ \mathbf{D}_c^\alpha f \in L_p\}, \tag{23.8}$$

где $\mathbf{D}_c^\alpha f$ — производная Чженя — Маршо (18.91) — (18.93), $a \leqslant c \leqslant b$. Показано, что это определение не зависит от выбора точки c и что $L_p^\alpha([a, b])$ совпадает с пространством сужений на $[a, b]$ бесселевых потенциалов из $L_p(R^1)$. Эти утверждения представляют собой развитие теоремы 18.3, отвечающей случаю $c = a$ или $c = b$. В случае $p > 1/\alpha$ определение (23.8) модифицировано в [2] с учетом непрерывности функций из L_p^α при $p > 1/\alpha$.

18.15. В ряде работ W. A. Al-Salam [1, 2], W. A. Al-Salam, A. Verma [1], R. P. Agarwal [2, 3], S. Sharma [1], M. Upadhyay [1] вводились и исследовались некоторые объекты, названные *дробными q-интегралами* и *q-производными*. Однако их определение, не содержащее предельных переходов, не является определением интегралов и производных в общепринятом смысле, а является расширением на дробные показатели восходящего к F. H. Jackson [1, 2] понятия q-производной: $(\mathscr{D}_q f)(x) = \dfrac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$, играющего важную роль в комбинаторном анализе.

Подобные конструкции дробного порядка впервые вводились в работах W. A. Al-Salam [1, 2] в виде

$$({}_qI_{-}^{\nu} f)(x) = q^{-\nu(\nu+1)/2} x^\nu (1-q)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{bmatrix} -\nu \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} \times$$

$$\times f(xq^{-\nu-k}), \quad -\infty < \nu < \infty, \quad 0 < q < 1,$$

где $\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{[\alpha]\,[\alpha-1] \cdots [\alpha-k+1]}{[1]\,[2] \cdots [k]}$, $[\alpha] = \dfrac{1-q^\alpha}{1-q}$. Имеются и другие формы дробных q-интегралов и q-производных (W. A. Al-Salam [1], R. P. Agarwal [2, 3]). В указанных работах содержится ряд приложений дробных q-интегралов и q-производных. См. также работу M. A. Khan [1] и монографию H. Exton [1], в которой более подробно излагается соответствующая «q-теория».

19.1. Пусть $X_{2\pi}$ — то же, что и в теореме 19.2. Скажем, что 2π-периодическая функция $f(x) \in X_{2\pi}$ имеет в $X_{2\pi}$ *сильную дробную производную Вейля*, если существуют функция $\varphi(x) \in X_{2\pi}$ и последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_{n,k} e^{ikx}$ такие, что $\|f - T_n\|_{X_{2\pi}}$, $\|\varphi - T_n^{(\alpha)}\|_{X_{2\pi}} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по определению $\varphi = \mathscr{D}_+^{(\alpha)} f$ — сильная производная Вейля. Здесь $T_n^{(\alpha)} = \sum_{k=-n}^{n} (ik)^\alpha a_{n,k} e^{ikx}$ — дробная производная Вейля многочлена $T_n(x)$. Справедлива (см. работы В. Н. Малоземова [1 — 4]) следующая

Теорема 23.1. *Существование сильной (в $X_{2\pi}$) дробной производной Вейля функции $f(x) \in X_{2\pi}$ равносильно ее представимости дробным интегралом Вейля: $f(x) = f_0 + I_+^{(\alpha)}\varphi$, $\varphi \in X_{2\pi}$, $\alpha > 0$.*

Сопоставляя эту теорему с теоремой 19.2, видим, что существование сильной в $X_{2\pi}$ дробной производной Вейля равносильно сходимости в $X_{2\pi}$ усеченной дробной производной Маршо.

19.2. К теоремам 19.3 и 19.2 (с замечанием 19.2), описывающим функции $f(x)$, представимые дробными интегралами от функций из L_p, примыкает следующее утверждение. Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее целое такое, что $m \geqslant \alpha$. В работе A. Katsaras, D. Liu [1] введена модификация (ср. с (19.17)) дробной производной Вейля в виде

$$D_+^{(\alpha)} f = \lim_{h_i \to 0} h_1^{-1} \cdots h_m^{-1} \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_m} I^{(m-\alpha)} f, \tag{23.9}$$

где $\Delta_h f = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_m} f = \Delta_{h_1}(\Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_m} f)$ и $I^{(m-\alpha)} f$ — дробный интеграл (19.26), (19.27). Доказано, что для функции $f \in L_p$ существование предела в (23.9) по норме L_p, $1 \leqslant p < \infty$, равносильно существованию функции $g(x) \in L_p$ такой, что $g_n = (i \operatorname{sign} n)^m |n|^\alpha f_n$.

19.3. Известную в теории рядов Фурье (Н. К. Бари [1, с.647]) теорему Саса обобщает следующее утверждение (Д. Л. Кудрявцев [1]).

Теорема 23.2. *Пусть* $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ *и существует* $\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f \in L_p(0, 2\pi)$ *(в том смысле, что существует функция* $\varphi = (\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f) \in L_p$ *с коэффициентами Фурье* $\varphi_n = (in)^\alpha f_n$*),* $1 \leqslant p < 2$, $\alpha > 0$. *Тогда при любом* $\gamma > (\alpha + 1 - 1/p)^{-1}$ *справедливы оценки*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^\gamma < \infty, \qquad \sum_{|n|=N+1}^{\infty} |f_n|^\gamma = o\left(N^{1-\gamma(\alpha+1-1/p)}\right). \tag{23.10}$$

19.4. Д. Л. Кудрявцевым [1] введено обобщение $\mathscr{D}^{\alpha,\beta}$ дробного интегродифференцирования Вейля, определяемое разложением

$$\mathscr{D}^{\alpha,\beta} f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^\alpha \ln^\beta |n| \, e^{inx}$$

и названное им *дробно-логарифмической производной порядка* (α, β). Для $\mathscr{D}^{\alpha,\beta} f$ доказано утверждение более общее, чем упомянутое выше в теореме 23.2. Именно, если существует $\mathscr{D}^{\alpha,\beta} f \in L_p$ в предположениях этой теоремы, то вместо (23.10) имеем

$$\sum_{|n|=N+1}^{\infty} |f_n|^\gamma = o\left(N^{1-\gamma(\alpha+1-1/p)} \ln^{-\beta\gamma} N\right).$$

19.5. В работе М. Г. Есмаганбетова, К. Ж. Наурызбаева, Е. С. Смаилова [1] доказаны теоремы, связывающие существование (в L_p) дробной производной Вейля $\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f$ периодической функции $f(x)$ с поведением норм в L_p дробных производных частичных сумм $S_n(f)$ ряда Фурье. В частности, доказаны оценки типа

$$\|\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f\|_p \leqslant c \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma r - 1} \|\mathscr{D}^{(\alpha+r)} S_n(f)\|_p^\gamma\right]^{1/\gamma},$$

где $\alpha \geqslant 0$, $r > 0$, $\gamma = \min(r, p)$ и др.

19.6. В § 17, п. 2°, 14.16, упоминалось о применении методов теории приближений в вопросах дробного интегродифференцирования. В периодическом случае существенную роль сыграли работы J. Favard [1], B. S. Nagy [1], С. М. Никольского [1, 3], D. Kralik [1], И. И. Огиевецкого [1, 2, 5], А. Ф. Тимана [2]. В частности, в работах B. S. Nagy [1], С. М. Никольского [3], А. Ф. Тимана [2] получена оценка $E_n(I_+^{(\alpha)} f) \leqslant cn^{-\alpha} \omega_k(f, 1/n)$, где $E_n(f)$ — наилучшее приближение в L_p функции f тригонометрическими многочленами, $\omega_k(f, 1/n)$ — модуль непрерывности порядка k в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. К этим ссылкам добавим работы Xie Ting-fan [1], R. Taberski [1—4, 6], P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1], М. Г. Есмаганбетова [1]. Есть много работ, посвященных различным вопросам приближения теми или иными тригонометрическими суммами периодических функций, имеющих дробные производные (В. Т. Пинкевич [1], С. М. Никольский [1, 3], А. Ф. Тиман [1], В. К. Дзядык [1], S. Izumi, M. Sato [1], С. Б. Стечкин [2], А. В. Ефимов [1—4], Сунь Юн-Шен [1], С. А. Теляковский [1, 2], А. К. Покало [1], В. Н. Русак [1—3], В. В. Жук [1] и др.); см. также ссылки в этих работах. В статье В. Ф. Бабенко [1] дана оценка поперечников Колмогорова классов периодических функций, представимых в виде дробных интегралов $I_\mu^{(\alpha)} \varphi$, $\varphi \in L_1$ или $\varphi \in L_\infty$.

19.7. Утверждение (19.62) теоремы Харди—Литтлвуда перестает быть верным для $p = 1$. Его заменяет следующий результат. Если $0 < \alpha < 1$, $q = 1/(1-\alpha)$, то

$$\|I_+^{(\alpha)} \varphi\|_{L_q(0, 2\pi)} \leqslant A \int_0^{2\pi} |f(x)| \left(\ln^+ |f(x)|\right)^{1-\alpha} dx + A,$$

где постоянная A зависит только от α (A. Zygmund [1]). Обобщение этого результата на случай, когда $\int_0^{2\pi} |f(x)| \left(\ln^+ |f(x)|\right)^s dx < \infty$, $s > 0$, дано в работе R. O'Neil [3].

19.8. Пусть $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. В работе S. Izumi [1] даны различные достаточные условия на коэффициенты a_n для того, чтобы существование конечного предела

$\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_x^\pi (t-x)^{\alpha-1}f(t)\,dt$ обеспечивало бы сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}a_n$, $0<\alpha<1$. В случае $\alpha=1$ необходимые и достаточные условия сходимости в близких термина даны в работе N. Matsuyama [1].

19.9. В выражении $\mathscr{D}^{(\alpha)}f=\dfrac{d^m g(x)}{dx^m}$, $g(x)=(I^{(m-\alpha)}f)(x)$, $m-1<\alpha<m$, дробной производной Вейля периодической функции $f(x)$ дифференцирование $(d/dx)^m$ можно понимать в смысле Пеано (это означает существование полинома $P_x(t)$ степени не больше m такого, что $g(x+t)-P_x(t)=o(|t|^m)$. Так понимаемые дробные производные рассматривались в работе A. Zygmund [3], где выяснена связь условия $f(x+t)-P_x(t)=O(|t|^{m+\beta})$ с дробной дифференцируемостью функции $f(x)$. В непериодическом случае см. работу E. M. Stein, A. Zygmund [1]. Развитие идей этих работ для функций $f(x)$, имеющих лакунарный ряд Фурье, дано в работе G. V. Welland [1], а распространение на случай функций многих переменных — в работе G. V. Welland [2].

20.1. Определение (20.7) дробного дифференцирования естественным образом распространяется на случай дробных степеней операторов (инфинитезимальных операторов, см. об этом в § 5, п. 7°). Идея построения теории дробных степеней операторов через дробные разности принадлежит П. Бутцеру (P. L. Butzer) и была реализована в работе U. Westphal [4]. Пусть T_t, A и X — то же, что в § 5, п. 7°. Введем дробную степень $(-A)^\alpha$, $\alpha>0$, равенством

$$(-A)^\alpha f=\lim_{t\to 0+} t^{-\alpha}(E-T_t)^\alpha f, \tag{23.11}$$

где, подобно (20.2), $(E-T_t)^\alpha f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}T_{kt}$ и предел — по норме пространства X. Справедлива (U. Westphal [4]) следующая

Теорема 23.3. *Область определения $D((-A)^\alpha)$ оператора $(-A)^\alpha$ плотна в X, при этом $D((-A)^\alpha)\subset D((-A)^\beta)$, $\alpha>\beta>0$, $(-A)^\alpha$ — замкнутый оператор.*

К теореме 20.4 примыкает также следующая теорема (U. Westphal [3]; см. также комментарий к § 20, п. 3° в исторических сведениях в этом параграфе).

Теорема 23.4. *Для $f\in X$ предел (23.11) существует в X тогда и только тогда, когда существует в X предел*

$$\frac{1}{\varkappa(\alpha,\ l)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(E-T_t)^l f\,dt,\quad l>\alpha,$$

и оба предела совпадают (значение $\varkappa(\alpha,\ l)$ см. в (5.81)).

Идея введения дробного дифференцирования по Грюнвальду — Летникову допускает другое далеко идущее обобщение: заменяя в разности дробного порядка $(\Delta_h^\alpha f)(x)=(E-\tau_h)^\alpha f$ оператор сдвига τ_h тем или иным оператором обобщенного сдвига, можно получить различные формы дробного дифференцирования. В работе P. L. Butzer, R. L. Stens [1] эта идея реализована при рассмотрении дробных производных, связанных с преобразованием Чебышева $(\tau_h f)(x)=(1/2)[f(xh+\sqrt{(1-x^2)(1-h^2)})+f(xh-\sqrt{(1-x^2)(1-h^2)})]$, $-1<x<1$, $-1<h<1$. В указанной работе введено дробное дифференцирование

$$\mathscr{D}^{(\alpha)}f=\lim_{h\to 1-0}\frac{(\overline{\Delta}_h^\alpha f)(x)}{(1-h)^\alpha},\quad (\overline{\Delta}_h^\alpha f)(x)=(-1)^{[\alpha]}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(\tau_h^j f)(x)$$

(где предел понимается по норме пространства $X=C$ или $X=L_p$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$). В частности, $\mathscr{D}^{(1)}f=(1-x^2)f''(x)-xf'(x)$ и $\mathscr{D}^{(1/2)}f=-\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d}{dx}(Hf)(x)$, где Hf — сингулярный оператор Гильберта (19.22). Функции $f(x)\in X$, имеющие в X дробные производные $(\mathscr{D}^{(\alpha)}f)(x)$, охарактеризованы как те и только те функции, которые представимы «дробным интегралом» $f=\varphi*\psi_\alpha$, где $f*\varphi=(1/\pi)\int\limits_{-1}^{1}(\tau_x f)(t)\,\varphi(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$, $\psi_\alpha(x)$ — функция, для которой $\hat{\psi}_\alpha(k)=(-1)^{[\alpha]}k^{-2\alpha}$. Здесь $\hat{f}(k)=(1/\pi)\int\limits_{-1}^{1}f(t)\cos(k\arccos t)(1-t^2)^{-1/2}dt$ — коэффициенты Фурье — Чебышева.

20.2. Сопоставление дифференцирования по Грюнвальду—Летникову и Риману—Лиувиллю дается следующей теоремой (U. Westphal [3]), где $X=L_p(R^1_+)$, $1\leqslant p<\infty$, или $X=C_0$— пространство ограниченных равномерно непрерывных на R^1_+ функций $f(x)$, таких, что $f(0)=0$.

Теорема 23.5. *Пусть $f(x)\in X$ и $\alpha>0$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *существует производная Грюнвальда — Летникова по норме пространства X:* $\lim\limits_{h\to 0+}\| h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f - f_+^{(\alpha)}\|_X = 0$;

2) $\dfrac{d^k}{dx^k}(I_{0+}^{n+1-\alpha}f)(x)\in AC_{\text{loc}}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, *где* $n=[\alpha]$, *и* $\mathscr{D}_{0+}^\alpha f\in X$.

20.3. Интересный вариант введения разностей дробного порядка предложен в работе L. S. Bosanquet [4, с. 240]:

$$\Delta_h^{(\alpha)} f(x) \overset{\text{def}}{=} \alpha\int_0^h (h-t)^{\alpha-1}(\mathscr{D}_{0+}^\alpha f)(x+t)\,dt,$$

так что $\Delta_h^{(\alpha)} f(x)/h^\alpha \to (\mathscr{D}_{0+}^\alpha f)(x)$ при $h\to 0$.

20.4. Обобщением неравенства типа Бернштейна (19.74) служит следующее утверждение (П. И. Лизоркин [3, с. 118]). Пусть $g(x)=\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt}d\omega(t)$, где $\omega(t)$ имеет ограниченную вариацию в $[-\sigma, \sigma]$. Тогда для дробной производной

$$g^{(\alpha)}(x)=\int_{-\sigma}^{\sigma}(ix)^\alpha e^{ixt}d\omega(t),\quad \alpha\geqslant 1,$$

функции $g(x)$ справедливо неравенство $\|g^{(\alpha)}\|_p\leqslant\sigma^\alpha\|g\|_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

20.5. К неравенствам типа Бернштейна (19.74) примыкает неравенство для дробной производной Вейля тригонометрического многочлена $T_n(x)$:

$$\|\mathscr{D}_+^{(\alpha)}T_n\|_p\leqslant\left(\frac{n}{2\sin(nh/2)}\right)^\alpha\|\Delta_h^\alpha T_n\|_p,\quad 0<h<\frac{2\pi}{n},$$

(R. Taberski [3]), обобщающее неравенство Стечкина—Никольского и неравенство для дробной производной типа Грюнвальда—Летникова целой функции $G(x)$ экспоненциального типа σ:

$$\|G^{(\alpha)}\|_p\leqslant\sigma^\alpha[2\sin(\sigma h/2)]^{-\alpha}\|\Delta_h^\alpha G\|_p,\quad 0<h<2\pi/\sigma$$

(R. Taberski [5, с. 133]). Здесь $\Delta_h^\alpha f$ — «центрированная» конечная разность дробного порядка.

20.6. Для обобщенного дифференцирования $a(\mathscr{D})f$ по Э. Посту, см. определение (20.10), справедливо обобщенное правило Лейбница:

$$a(\mathscr{D})[u(x)v(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}u^{(k)}(x)\,a^{(k)}(\mathscr{D})\,v(x)$$

(E. L. Post [2, с. 755]). Из него, в частности, при $a(x)=x^\alpha$ получается формула Лейбница (15.11).

20.7. Разности дробного порядка используются для введения модулей непрерывности дробного порядка: $\omega_\alpha(f,h)=\omega_{\alpha,X}(f,h)=\sup\limits_{|t|<h}\|\Delta_t^\alpha f\|_X$, где X — банахово пространство. Свойства таких модулей непрерывности исследовались в работах P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1], R. Taberski [3], Г. Гаймназарова [1], В. Г. Пономаренко [1, 2], см. также некоторые модифицированные (усредненные) разности дробного порядка в работах D. P. Drianov [1, 2]. В работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [3] рассмотрен обобщенный класс Гельдера $H^{\varphi,\alpha}=H_X^{\varphi,\alpha}$, определяемый модулем непрерывности дробного порядка:

$$H^{\varphi,\alpha}=\{f(x): f(x)\in X,\quad \sup_{\delta>0}\omega_\alpha(f,\delta)/\varphi(\delta)<\infty\},$$

где $X=L_p(0,2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$, или $X=C(0,2\pi)$. Показано, что $H^{\varphi,\alpha}=H^{\varphi,\beta}$ при $\beta\geqslant\alpha>0$ для $\varphi(\delta)\in\Phi_\alpha^0$ (см. (13.68)). Для степенных функций $\varphi(\delta)=\delta^\lambda$ это было

установлено ранее (P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1]). О классе $H^{\Phi,\alpha}$ в многомерном случае см. в работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [4].

Можно рассматривать более общие модули непрерывности в соответствии с идеями Э. Поста, см. (20.11). Далеко идущие обобщения модулей непрерывности можно найти в работах J. Boman [1], J. Boman, H. S. Shapiro [1], H. S. Shapiro [1, с. 219].

21.1. В работе А. А. Килбаса [9] показана обобщенная гельдеровость некоторых многомерных интегралов типа потенциала по ограниченной области многомерного евклидова пространства R^n, частным случаем которых являются интегралы со степенно-логарифмическими ядрами.

21.2. В работе Э. Я. Риекстыньша [1] показана возможность найти модифицированным методом последовательных разложений асимптотику более общего, чем дробный интеграл (16.1), интеграла свертки (17.1) при $x\to+\infty$ в предположении, что входящие в него функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют при $t\to+\infty$ степенно-логарифмическую асимптотику. Другие методы нахождения асимптотических разложений интегралов вида (17.1), (17.2) в этом случае, а также в случае чисто логарифмической асимптотики читатель может найти в монографии Э. Я. Риекстыньша [2] (см., например, § 32).

22.1. Можно рассматривать дробное интегродифференцирование функций, заданных на кривых в комплексной плоскости. Обстоятельное исследование в такой ситуации провел W. E. Sewell [1, 2], рассматривавший дробное интегродифференцирование (22.2), (22.3) с интегрированием вдоль кривой, на которой задана функция. Им, в частности, выделен класс спрямляемых кривых, на которых дробный интеграл сходится абсолютно при $f(z)\equiv 1$. На кривых этого класса доказаны следующие результаты: а) существование младших производных $(\mathcal{D}^\beta f)(z)$ при существовании $(\mathcal{D}^\alpha f)(z)$, $\beta<\alpha$; б) полугрупповое свойство; в) инвариантность дробной дифференцируемости при конформных отображениях (отметим, что здесь в построениях В. Сьюелла в неявном виде содержится производная от функции по функции, см. о последнем понятии в § 18, п. 3°); г) теоремы типа Харди — Литтлвуда (типа леммы 13.1) о существовании дробной производной $\mathcal{D}^\alpha f$ на кривой, если $f(z)$ удовлетворяет на этой кривой условию Гельдера порядка $\lambda>\alpha$; д) неравенство типа Бернштейна: $|P_n^{(\alpha)}(z)|\leqslant An^\alpha$ (вне «начальной» точки интегрирования z_0), где $P_n(z)$ — многочлен, а также ряд других теорем, связанных с приближением многочленами в комплексной области.

Ряд уточнений и обобщений результатов В. Сьюелла содержится в работах В. И. Белого [1—6], В. И. Белого, Ю. И. Волкова [1], где имеются также различные приложения дробного интегродифференцирования к задачам теории приближения в комплексной области.

В связи с дробным интегродифференцированием по кривым упомянем также работу W. Fabian [1], в которой дробный интеграл (производная) $(\mathcal{D}_{z_0}^\alpha f)(z)$ рассматривается при любых, в том числе комплексных, α вдоль кривой L_{z_0}, начинающейся из точки z_0 и уходящей на бесконечность. Изучается поведение $z^{-\mu}(\mathcal{D}_{z_0}^\alpha f)(z)$ при $z\to\infty$ вдоль кривой, если известно, что $z^{-\nu}f(z)\to A=\text{const}$ при $z\to\infty$ вдоль кривой. Эти результаты применяются в [1] к суммированию рядов и интегралов.

В другой работе W. Fabian [3] для дробной производной $\mathcal{D}_{z_0}^\alpha f$ вдоль такой же кривой исследуется характер ветвления в точке z_0, а также в точках, в которых для $f(z)$ допускаются особенности.

22.2. T. Carleman [2, с. 42—47] доказал теорему: для всякой функции $f(x)$, $x\in R^1$, такой, что $\int_0^A |f(x)|\,dx$ растет не быстрее $|A|^\gamma$ при каком-нибудь $\gamma>0$, существуют функции $f_+(z)$, $f_-(z)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbf{C}_+$, $\mathbf{C}_-$ соответственно и такие, что

$$\lim_{y\to+0}\int_{x'}^{x''}[f_+(x+iy)-f_-(x-iy)]\,dx=\int_{x'}^{x''}f(x)\,dx$$

равномерно по всем x', $x''\in[a,b]$ для любого отрезка $[a,b]$. Результат о единственности функций $f_\pm(z)$ дан Т. Карлеманом в терминах дробных интегралов. Именно Т. Карлеман показал единственность функций $f_\pm(z)$ с точностью до многочленов в классе функций, удовлетворяющих при каких-нибудь $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ условию

$$\sup_{z\in\mathbf{C}_\pm}\left|\frac{(I_{z_0}^\alpha f_\pm)(z)}{(z-z_0)^\alpha(z-\bar z_0)^\beta}\right|<\infty,$$

где $z_0\in\mathbf{C}_\pm$ (при соответственном выборе знаков).

22.3. Для дробного дифференцирования Вейля $f^{(\alpha)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^\alpha f_k z^k$ аналитичес-

ких в круге функций $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ в работе G. H. Hardy, J. E. Littlewood [7, с. 232] доказана оценка

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|f^{(\alpha)}(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leqslant c(1-r)^{-\alpha}\left(\int_0^{2\pi}|f(r^{1/2}e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}, \quad 0<r<1,$$

а также аналогичная оценка для дробного дифференцирования $\mathscr{D}_0^\alpha f$ с добавлением множителя $r^{-\alpha}$ в правой части.

В работе T. M. Flett [5] использовалась модификация дробного интегрирования Вейля в виде

$$\mathfrak{B}^\alpha f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k^\alpha}z^k, \qquad f_0=0,$$

а в работах T. M. Flett [6—8] — в виде

$$\mathfrak{I}^\alpha f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{(k+1)^\alpha}z^k. \tag{23.12}$$

Эти операторы имеют представление

$$\mathfrak{B}^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^z\frac{\varphi(t)\,dt}{[\ln(z/t)]^{1-\alpha}t}, \qquad \mathfrak{I}^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)z}\int_0^z\frac{\varphi(t)\,dt}{[\ln(z/t)]^{1-\alpha}},$$

т. е. являются конструкциями типа Адамара (18.42). Отметим, в частности, полученную в работе T. M. Flett [5] оценку

$$|(\mathfrak{B}^\alpha f)(re^{i\theta})|\leqslant Ar(1-r)^{-\alpha}\Phi(\theta), \quad 0\leqslant r<1,$$

где $\Phi(\theta)=\sup\limits_{z\in S_\eta(\theta)}|f(z)|$, $S_\eta(\theta)$ — часть единичного круга, заключенная между касательными, проведенными из точки $e^{i\theta}$ к окружности радиуса η с центром в 0, и бо́льшей дугой этой окружности между точками касания.

В работе T. M. Flett [7, теорема 6] выяснено действие оператора $\mathfrak{I}^\alpha$ в классах Бергмана $A^{p,\beta}$, $0<p<\infty$, $\beta>-1$, аналитических в единичном круге функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{A^{p,\beta}}^p=\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p(1-r)^\alpha\,d\theta dr<\infty.$$

Именно $\mathfrak{I}^\alpha: A^{p,\beta}\to A^{p,\beta-\alpha p}$ для любых $\alpha\in R^1$, таких, что $\beta-\alpha p>-1$.

Уточнение теоремы 22.2 Харди—Литтлвуда о действии оператора $\mathfrak{I}^\alpha$ из пространства Харди H^p, $0<p<\infty$, в пространство H^q, $q=\gamma p/(\gamma-\alpha)$, при дополнительном предположении, что $f(z)=O((1-|z|)^{-\gamma})$, $0<\alpha<\gamma\leqslant 1/p$, получено в работе Kim Hong Oh [1]. Отметим, наконец, что в работе [2] этого автора теорема 22.2 распространена на случай функций $f(z,w)$ двух переменных, где $(z,w)\in\mathbf{C}^2$, $|z|\leqslant 1$, $|w|\leqslant 1$.

22.4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5] доказали теоремы вида 14.6, 14.7 и 19.9 о действии дробного интегродифференцирования в липшицевых пространствах функций $f(z)$, аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i(\theta+h)})-f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}\leqslant c|h|^\lambda, \quad p\geqslant 1.$$

Эти результаты были распространены в работе A. E. Gwilliam [1] на значения $0<p<1$.

22.5. В работе А. А. Пекарского [3] предложена модификация дробной производной $(\mathscr{D}_0^\alpha f)(z)$ аналитических в единичном круге функций:

$$f^{(\alpha)}(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{t^{-1-[\alpha]}f(t)}{(1-z/t)^{1+\alpha}}dt=\mathscr{D}_0^\alpha[z^{\alpha-[\alpha]}f(z)], \tag{23.13}$$

где $\alpha>0$, $|z|<\rho<1$ (ср. с (22.33) и (22.52)). Эта модификация отвечает разложению $f^{(\alpha)}(z)=\sum\limits_{k=[\alpha]}^{\infty}\frac{\Gamma(k-[\alpha]+1+\alpha)}{\Gamma(k-[\alpha]+1)}f_k z^{k-[\alpha]}$ (ср. с (22.36)). Она имеет то удобство

в теории аналитических функций, что, подобно операции $z^\alpha(\mathscr{D}_{0+}^\alpha f)(z)$ и операции (23.12), переводит аналитические функции в аналитические. Отметим, что в этой работе получены неравенства типа Бернштейна для дробных производных (23.13) рациональных функций. Исследования в указанной работе, а также в работах того же автора [1, 2] связаны с аппроксимацией аналитических функций из пространств Харди — Бесова рациональными функциями (в [2] использовалось дробное дифференцирование вида (23.12)).

22.6. Пусть $f_\alpha(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^{-\alpha}f_k z^k$ — дробный интеграл Вейля, см. (22.56). В ряде работ I. I. Hirshman [1], T. M. Flett [2, 4] изучены функции типа Литтлвуда — Пэли

$$g_{k,\alpha}(\theta)=\left\{\int_0^1(1-\rho)^{k-\alpha k-1}\,|\rho^{-1}f_{\alpha-1}(\rho e^{i\theta})|^k d\rho\right\}^{1/k}$$

и некоторые другие их модификации с дробными интегралами (производными) Вейля. Доказаны, в частности, оценки нормы $g_{k,\alpha}(\theta)$ в $L_p(-\pi,\pi)$ через норму f в классе Харди H_p, $0<p<\infty$. В связи с этим смотри также работы G. Sunouchi [1], S. Koizumi [1].

22.7. В работе J. L. Lavoie, R. Tremblay, T. J. Osler [1], см. также J. L. Lavoie, T. J. Osler, R. Tremblay [1], с помощью модификации интегральной формулы Коши (22.4) введено дробное интегродифференцирование $\mathscr{D}^\alpha$ аналитических функций вида $t^\beta(\ln t)^\delta f(t)$ ($\delta=0$ или $\delta=1$),имеющих степенно-логарифмическое ветвление. Модификация заключается в том, что интегрирование ведется по петле Похгаммера ($z+$, $0+$, $z-$, $0-$), см. рис. 2. Ее целью является обеспечение единой формы записи для всех α и β (за исключением $\alpha=-1, -2, \ldots$, $\beta=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Для такого дробного интегродифференцирования доказаны полугрупповое свойство и формула Лейбница для $\mathscr{D}^\alpha(uv)$. Последней формуле в комплексной плоскости посвящен ряд работ T. J. Osler [1, 4, 5, 7, 8], где исходным определением дробного интегродифференцирования служит формула (22.30). По поводу формулы Лейбница см. также § 17, п. 2°, 15.3.

О роли, которую в случае функций с ветвлением играет выбор контура интегрирования (выбор «петель Похгаммера»), см. также работу L. M. B. C. Campos [1].

22.8. В работе T. J. Osler [2] изучена производная от функции по функции (см. § 18, п. 3°), определяемая как

$$\mathscr{D}^\alpha_{h(z)}f(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)h'(t)\,dt}{[h(t)-h(z)]^{1+\alpha}},$$

где разрез для $[h(t)-h(z)]^{-1-\alpha}$ проходит через точки $t=z$ и $t=h^{-1}(0)$, а контур L проходит через точку $h^{-1}(0)$ и охватывает точку z. Доказана, в частности, формула перехода

$$\mathscr{D}^\alpha_{g(z)}f(z)=\mathscr{D}^\alpha_{h(z)}\left\{\frac{f(z)g'(z)}{h'(z)}\left[\frac{h(z)-h(w)}{g(z)-g(w)}\right]^{1+\alpha}\right\}\Bigg|_{w=z},$$

где подставляется $w=z$ после вычисления $\mathscr{D}^\alpha_{h(z)}\{\ldots\}$.

22.9. В работах M. C. Gaer [1] и M. C. Gaer, L. A. Rubel [1, 2] развит своеобразный подход к дробному интегродифференцированию через исследование его как (целой) функции параметра α. Рассмотрение ведется в классе функций G, аналитических в окрестности вещественной прямой R^1 и исчезающих на бесконечности. Показав, что для любого $t\in R^1$ и любой функции $f\in G$ существует единственная целая (по α) функция $F(z,t)$ экспоненциального типа с порядком роста по мнимой оси, меньшим π, такая, что $\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)=F(n,t)$, авторы определили дробную производную $f^{(z)}(t)$ произвольного порядка z как $f^{(z)}(t)=\Gamma(1+z)F(z,t)$. На основе этого в указанных работах проведено исследование интегродифференцирования $f^{(z)}(t)$.

22.10. В работе H. Kober [7] дробное интегрирование в форме Лиувилля $(1/\Gamma(\alpha))\times$ $\times\int_0^\infty t^{\alpha-1}f(t\pm z)\,dt$ (а также в форме Рисса) исследовано в пространствах Харди функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости или полосе.

22.11. Разности дробного порядка (с фиксированным шагом $h=1$) в комплексной плоскости рассматривались в работе J. B. Diaz, T. J. Osler [1] в виде

$$\Delta^\alpha f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(z+\alpha-k),\quad z\in\mathbf{C},$$

ср. с (20.2). Основной результат работы — формула

$$\Delta^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(t)\,\Gamma(t-z-\alpha)}{\Gamma(t-z+1)}\,dt,$$

где контур C охватывает луч $L=\{t : t=z+\alpha-\xi,\ \xi\geqslant 0\}$ в положительном направлении; функция $f(z)$ предполагается аналитической в области, содержащей луч L и такой, что $|f(z)|\leqslant M|(-z)^{\alpha-p}|$. Доказана также формула Лейбница для разностей $\Delta^{\alpha} f(z)$.

22.12. Большой круг применений дробного интегродифференцирования в теории аналитических и мероморфных функций был дан в работах М. М. Джрбашяна. Так, в его работах [1; 2, гл. IX, § 1—3; 3] использовано дробное интегродифференцирование для описания новых классов мероморфных функций и получения параметрических представлений для этих классов. В частности, в терминах функции $v_{\alpha}(\rho e^{i\varphi}, z) = \rho^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\log|1-\rho e^{i\varphi}/z|$, $\alpha>-1$, где интегродифференцирование применяется по переменной ρ, получено обобщение известной в теории мероморфных функций формулы Иенсена — Неванлинны.

В работах М. М. Джрбашяна [6, 7] дробное интегродифференцирование $\mathcal{D}_{-}^{\alpha}$ использовано для обобщения понятия квазианалитичности функций. Это обобщение основано на замене производных целого порядка в импликации $f^{(n)}(x_0)=0$, $n=0, 1, \ldots \Rightarrow f(x)=0$ на дробные производные вида $(\mathcal{D}_{-}^{n\alpha} f)(x_0)$, $0<\alpha<1$. О применении дробного дифференцирования в теории квазианалитических функций см. также в работе М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [3].

В работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [4, 5] дробное интегродифференцирование Римана — Лиувилля использовалось для построения и исследования разложений по биортогональным системам, связанным с функциями Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$. Показано, что среди этих биортогональных систем содержатся системы собственных (и присоединенных) функций некоторых взаимно сопряженных краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. В связи с этим в работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [5, 6] проведено обстоятельное исследование таких краевых задач. Дальнейшее развитие эти вопросы получили в работах М. М. Джрбашяна [8—11].

22.13. Имеются результаты о поведении на бесконечности функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. В работе Y. Komatu [1] доказано, что если $\operatorname{Re} f(z)>0$, то $z^{\alpha-1}(\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha} f)(z) \to c/\Gamma(2-\alpha)$ при $z\to\infty$, $|\arg z|\leqslant a<\pi/2$, где c не зависит от $f(z)$ и α, $\alpha\in R^1$, $\operatorname{Re} z_0>0$, $\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha} f$ — интегродифференцирование (22.3). Доказан также аналог такого утверждения для единичного круга.

В работе Y. Komatu [2] для функций $f(z)$, аналитических в единичном круге и таких, что $\operatorname{Re} f(z)>0$ и $f(0)=1$, доказана оценка $\|I_0^{\alpha} f\|_{L_p(|z|=r)} \leqslant r^{-\alpha}\|I_0^{\alpha} k\|_{L_p(|z|=r)}$, где $k(z)$ — конкретная функция, $\alpha>0$, $I_0^{\alpha} f$ — дробный интеграл (22.2) при $z_0=0$.

22.14. Дробное интегродифференцирование Римана — Лиувилля $(\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha} f)(z)$, $\alpha\in R^1$, а также его модификация (22.55) использовались для изучения свойств однолистных, выпуклых и звездообразных функций (неравенства для дробных производных таких функций; вопросы, связанные с проблемой Бибербаха о коэффициентах однолистных функций, оценки коэффициентов и др.) в работах S. Owa [1 — 15], G. L. Reddy, K. S. Padmanabhan [1], H. M. Srivastava, S. Owa [1, 2], S. Owa, K. Nishimoto [2], S. Owa, C. Y. Shen [1], T. Sekine, S. Owa, K. Nishimoto [1], H. M. Srivastava, T. Sekine, S. Owa, K. Nishimoto [1], S. Owa, O. P. Ahuja [1], S. Owa, M Obradovic [1].

22.15. В работе I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova [1] рассмотрено весовое обобщение $(\mathcal{D}_{\alpha,\mu} f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k+\mu)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+\mu)} f_k z^{k-1}$ специального оператора Гельфонда — Леонтьева (22.41) и для (правого) обратного к нему оператора интегрирования $(J_{\alpha,\mu} f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k+\mu)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\mu)} f_k z^{k+1}$ получено интегральное представление типа (22.42):

$$(J_{\alpha,\mu} f)(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-1} f(zt^{\alpha})\,dt, \quad \mu\geqslant 1.$$

В работе Н. Е. Линчука [1] описаны все линейные непрерывные операторы $T : H(G)\to H(G)$, коммутирующие с оператором $J_{\alpha,\mu}$; $H(G)$ — пространство аналитических в звездообразной области функций с топологией компактной сходимости.

22.16. Операторы обобщенного интегродифференцирования (22.46) в виде $L^\alpha f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha f_k z^k$ исследовались в работе Y. Komatu [3] с полугрупповой точки зрения и для них получено в отличие от равенства (22.48) представление

$$L^\alpha f = \int_0^1 t^{-1} f(zt)\, d\sigma_\alpha(t), \quad f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Здесь мера $d\sigma_\alpha(t)$ определяется по α и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выделен случай $a_k = 1/k$, отвечающий оператору $\mathfrak{B}^\alpha$ дробного интегрирования типа Адамара, см. п. 22.3. О некоторых неравенствах для операторов $L^\alpha f$ см. также Y. Komatu [4].

22.17. Пусть $a \in R^1$, $H(a)$ — класс функций $f(z)$, аналитических в области $S(a) = \{z \in C: |\operatorname{Im} z| < a, \ 0 < a \leqslant +\infty\}$ и обладающих свойством: для любого числа t, $0 \leqslant t < a$, существует $A(t) \geqslant 0$ такое, что для каждого $z = x + iy \in \overline{S(t)}$ выполняется неравенство $|f(z)| \leqslant A(t) \exp\{x^2/2 - |x|(t^2 - y^2)^{1/2}\}$. В работе П. К. Русева [1] показано, что оператор типа Эрдейи — Кобера (18.8)

$$(I_{-1/2,\alpha+1/2} f)(z) = 2[\Gamma(\alpha + 1/2)]^{-1} \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - 1/2} f(zt)\, dt$$

при $-1/2 < \alpha < 1/2$ осуществляет изоморфизм топологического векторного пространства $H(a)$, наделенного топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $S(a)$. На основании этого показано, что необходимым и *достаточным условием разложимости* аналитической функции $f(z)$ в полосе $S(a)$ в ряд по обобщенным полиномам Лагерра $\{L_n^{(\alpha)}(z^2)\}_{n=0}^{\infty}$ (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 188]) при $\alpha \in R^1$, $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, является принадлежность $f(z)$ подпространству $H(a)$, состоящему из четных функций.

22.18. Пусть

$$(Pf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} b\left(\frac{z}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t^2} \tag{23.14}$$

— оператор типа (22.48), где спрямляемая замкнутая жорданова кривая C_z охватывает точку z и лежит в области аналитичности G функции $f(z)$, а функция $b(z)$ аналитична при $|z-1| > 0$ и имеет на бесконечности нуль не ниже второго порядка. Ю. Ф. Коробейником [1, 2] показано, что оператор (23.14) дает общее представление линейного оператора, непрерывного в пространстве $H(G)$ аналитических в области G функций, а в случае, если $0 \in G$, он совпадает для z, достаточно близких к 0, с некоторым оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева. При этом оператор P и его степени допускают также представление в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка:

$$(P^m f)(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Delta_{k,m}}{k!} z^{k-m} f^{(k)}(z), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где числа $\Delta_{k,m}$ определяются по $b(z)$ и удовлетворяют условию $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\Delta_{k,m}|} = 0$, $m \geqslant 1$.

3°. Ответы на некоторые вопросы, поставленные на конференции по дробному исчислению (г. Нью-Хейвен, 1974 г.). Завершим часть книги, относящейся к теории дробного исчисления функций одного переменного, «закрыв» некоторые вопросы, поставленные на указанной конференции, см. T. J. Osler [9]. Приведем те из вопросов, на которые имеются ответы.

1. *Вопрос А. Эрдейи* (A. Erdelyi). Пусть $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и S — множество неотрицательных α таких, что $(\mathscr{D}_{0+}^\alpha f)(x)$ существует и непрерывна (локально интегрируема). Содержит ли S максимальный элемент?

2. *Вопрос Л. Лорха* (Lee Lorch). Имеет ли теорема о среднем в дифференциальном исчислении аналог, связывающий разности дробного порядка с производными (того же) дробного порядка?

3. *Вопрос Э. Лава* (E. R. Love). Известны ли теоремы, связывающие дробные интегралы $I_{a+}^\alpha \varphi$, $I_{b+}^\alpha \varphi$ с разными нижними пределами интегрирования?

4а. *Вопрос Б. Росса* (B. Ross). Операция $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}\mathscr{D}^{\beta}_{b+}$ при $a \neq b$ может рассматриваться с точки зрения отклонения от полугруппового свойства $\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}\mathscr{D}^{\beta}_{a+} = \mathscr{D}^{\alpha+\beta}_{a+}$. Каковы теоремы, характеризующие это отклонение?

7. *Вопрос Дж. Лью* (J. S. Lew). Пусть $\{I^{\alpha}\}_{\alpha\geqslant 0}$ — семейство операторов в $L_1(0, 1)$ или $L_2(0, 1)$. Будут ли условия $I^0 f = f$, $I^1 f = \int\limits_0^t f(u)\,\mathrm{du}$, $I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}$, I^{α} непрерывен в некоторой операторной топологии, $I^{\alpha} f \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$ определять семейство $\{I^{\alpha}\}_{\alpha\geqslant 0}$ однозначно?

Ответы. 1. Ответ на этот вопрос отрицателен: для $f(x) = x^{\beta}\ln x$, $\beta > 0$, множество S есть открытый справа интервал $S = [0, \beta)$ или $S = [0, \beta + 1)$ соответственно случаям непрерывности или интегрируемости $(\mathscr{D}^{\alpha}_{0+}f)(x)$. Во втором случае и для $f(x) = x^{\beta}$, $\beta > 0$, имеем $S = [0, \beta + 1)$.

2. В случае, например, функций, заданных на всей оси, ответ легко может быть дан в форме $(\Delta^{\alpha}_h f)(x) = h^{\alpha}(\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f)_h(x)$, где $g_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(\tau)\varphi(x - \tau h)\,d\tau$ — усреднение функции $\varphi(x)$ с ядром (20.14), см. формулу (20.30). Однако неясно, можно ли (в случае непрерывных функций) записать равенство $(\Delta^{\alpha}_h f)(x) = h^{\alpha}(\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f)(\xi)$, $\xi \in R^1$. Оно заведомо справедливо в случае целых $\alpha = l$, что вытекает, например, из формулы

$$(\Delta^{l}_h f)(x) = \int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h f^{(l)}(x + t_1 + \ldots + t_l)\,\mathrm{dt}_1 \ldots \mathrm{dt}_l.$$

3. Ответ дан в § 13, см. следствие из теоремы 13.9.

4а. Ответ найден также в следствии из теоремы 13.9: $(I^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{c+}\varphi)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+}\psi)(x)$, $x > a > c$, где $\psi(x)$ — то же, что в указанном следствии.

7. Ответ см. в § 4, п. 2°, 2.12.

ГЛАВА 5

Дробное интегро-дифференцирование функций многих переменных

В этой главе исследуем интегрирование и дифференцирование дробного порядка функций многих переменных. Здесь можно рассматривать частные производные дробного порядка $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_k^\alpha}$, смешанные дробные производные $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ и т. п. вместе с соответствующими дробными интегралами. Этому подходу посвящен § 24. Можно пойти по другому пути — вводить дробные степени $(-\Delta)^{\alpha/2}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Такой подход развит в § 25, 26. Он допускает естественное обобщение — можно вводить дробные степени $[P(\mathscr{D})]^\alpha$ дифференциального оператора $P(\mathscr{D})$ в частных производных с постоянными коэффициентами. Мы не останавливаемся в этой книге на таком обобщении, рассмотрев лишь некоторые специальные случаи операторов $P(\mathscr{D})$ в § 27 и 28. В § 29 можно найти ссылки на более общие ситуации.

Всюду в этой главе будут приняты следующие обозначения. Через R^n обозначаем n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и т. п. — точки (векторы) в R^n; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, $x \cdot t = x_1 t_1 + \ldots + x_n t_n$ — скалярное произведение в R^n; $x \circ t = (x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)$ — вектор в R^n; $dt = dt_1 \ldots dt_n$. Будем обозначать $R^n_{+\ldots+} = \{x : x \in R^n, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$ — октант в R^n с неотрицательными координатами, S_{n-1} — единичную сферу в R^n с центром в начале координат, $|S_{n-1}| = 2\pi^{n/2}\Gamma^{-1}(n/2)$ — ее площадь. Через $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ обозначаем мультииндекс, так что $x^j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$, а через $|j| = j_1 + j_2 + \ldots + j_n$ — длину мультииндекса (не опасаясь смешения с обозначением для расстояния в R^n). Пусть $\mathscr{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Тогда $\mathscr{D}^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$.

Запись $\alpha > 0$ в случае, когда $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, означает, что $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Как обычно, $L_p(R^n)$ обозначает пространство функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$,

для которых $\|f\|_p = \{\int_{R^n} |f(x)|^p dx\}^{1/p} < \infty$, а $C_0^\infty = C_0^\infty(R^n)$ — класс бесконечно дифференцируемых финитных функций.

§ 24. ЧАСТНЫЕ И СМЕШАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Дадим непосредственное распространение операций дробного интегродифференцирования Римана—Лиувилля на случай многих переменных, когда эти операции применяются независимо по каждой переменной или по некоторым из них. Рассмотрим наряду с интегродифференцированием по Риману—Лиувиллю и другие его формы (Маршо, Грюнвальда—Летникова, Вейля для периодических функций многих переменных).

1°. Многомерное интегральное уравнение Абеля. Начнем с обобщения уравнения (2.1) на случай многих переменных. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — функции n независимых переменных и $a = (a_1, \ldots, a_n)$—фиксированная точка в R^n. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_1}^{x_1} \ldots \int_{a_n}^{x_n} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a, \tag{24.1}$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad (x-t)^{\alpha-1} = (x_1-t_1)^{\alpha_1-1} \ldots (x_n-t_n)^{\alpha_n-1}, \tag{24.2}$$
$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_n), \quad dt = dt_1 \ldots dt_n$$

и запись $x > a$ означает, что $x_1 > a_1, \ldots, x_n > a_n$.

Считая, что $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, действуем по каждой переменной точно так же, как в (2.2), (2.3). Придем к соотношению

$$\int_{a_1}^{x_1} \ldots \int_{a_n}^{x_n} \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a_1}^{x_1} \ldots \int_{a_n}^{x_n} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

с учетом обозначений (24.2). Дифференцируя это равенство по $x_1, \ldots, x_n$, получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \int_{a_1}^{x_1} \ldots \int_{a_n}^{x_n} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{24.3}$$

Таким образом, если уравнение (24.1) имеет решение, то оно единственно и дается формулой (24.3).

2°. Частные и смешанные дробные интегралы и производные. Отправляясь от одномерного определения (2.17), естественно ввести *частный интеграл Римана—Лиувилля дробного порядка* α_k по k-й переменной равенством

$$(I_{a_k+}^{\alpha_k}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{a_k}^{x_k} \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{(x_k-\xi)^{1-\alpha_k}}\,d\xi, \tag{24.4}$$

где $\alpha_k > 0$. Это определение предполагает, что функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ заданы при $x_k > a_k$. Если ввести обозначение $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ для k-го единичного орта, то частный дробный интеграл (24.4) можно компактно записать в виде

$$(I_{a_k+}^{\alpha_k}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^{x_k-a_k}\frac{\varphi(x-\xi e_k)}{\xi^{1-\alpha_k}}\,d\xi.$$

Далее, выражение

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = (I_{a_1+}^{\alpha_1}\ldots I_{a_n+}^{\alpha_n}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_1}^{x_1}\ldots\int_{a_n}^{x_n}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha>0, \tag{24.5}$$

определенное для функций $\varphi(x)$, заданных при $x_k > a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, будем называть *(левосторонним) смешанным дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Смешанный дробный интеграл может применяться по части переменных, т. е. могут допускаться значения $\alpha_k = 0$. В этом случае полагаем $I_{a_k+}^{\alpha_k}\varphi \equiv \varphi$ в (24.5) и, считая для простоты, что $\alpha_k = 0$ для $k = m+1, \ldots, n$ и $\alpha_k > 0$ для $k = 1, 2, \ldots, m$, имеем

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_m)}\int_{a_1}^{x_1}\ldots\int_{a_m}^{x_m}\frac{\varphi(\tau, x'')}{(x'-\tau)^{1-\alpha'}}\,d\tau, \tag{24.6}$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $(x'-\tau)^{1-\alpha} = \prod_{k=1}^{m}(x_k-\tau_k)^{1-\alpha_k}$, $1-\alpha' = (1-\alpha_1, \ldots, 1-\alpha_m)$.

Аналогично определяется (правосторонний) смешанный дробный интеграл $I_{b-}^{\alpha}\varphi$ для функций $\varphi(x)$, заданных при $x < b$. Возможен более общий вариант, когда по части переменных применяется левостороннее интегрирование, а по другой части — правостороннее, например,

$$(I_{a+,\,b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_1}^{x_1}\ldots\int_{a_m}^{x_m}\int_{x_{m+1}}^{b_{m+1}}\ldots\int_{x_n}^{b_n}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x'-t')^{1-\alpha'}(t''-x'')^{1-\alpha''}}, \tag{24.7}$$

где x', x'' — те же, что в (24.6), $1-\alpha'' = (1-\alpha_{m+1}, \ldots, 1-\alpha_n)$, а $t = (t', t'')$, $t' = (t_1, \ldots, t_m)$, $t'' = (t_{m+1}, \ldots, t_n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Аналогично (24.4), отправляясь от (2.22), вводим *частную дробную производную Римана—Лиувилля порядка* α_k, $0 < \alpha_k < 1$, по k-й переменной

$$(\mathcal{D}_{a_k+}^{\alpha_k}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\int_{a_k}^{x_k}\frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{(x_k-\xi)^{\alpha_k}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\int_0^{x_k-a_k}\xi^{-\alpha_k}f(x-\xi e_k)\,d\xi.$$

Для дифференцируемых функций $f(x)$ это выражение можно записать подобно (2.24) в виде

$$(\mathcal{D}_{a_k+}^{\alpha_k}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)}\left[\frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{(x_k-a_k)^{\alpha_k}} + \right.$$

$$\left. + \int_{a_k}^{x_k}\frac{\frac{\partial f}{\partial\xi}(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{(x_k-\xi)^{\alpha_k}}\,d\xi\right]. \tag{24.8}$$

Ввиду обращения (24.3), справедливого при $0<\alpha_k<1$, правую часть в (24.3) будем называть *смешанной дробной производной Римана—Лиувилля порядка* $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Подобно (24.6) смешанная дробная производная может применяться по части переменных. Именно пусть, как и в (24.6), $\alpha_k=0$ для $k=m+1, \ldots, n$ и $0<\alpha_k<1, k=1, 2, \ldots, m$. Выражение

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} \int_{a_1}^{x_1} \ldots \int_{a_m}^{x_m} \frac{f(\tau, x'')}{(x'-\tau)^{\alpha}} d\tau \quad (24.9)$$

и будем называть *смешанной дробной производной Римана—Лиувилля порядка* $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots, 0)$.

Заметим, что в (24.9) существен порядок дифференцирования. Так, функция $f(x_1, x_2)=(x_2-a_2)^{\alpha_2-1} g(x_1)$, $0<\alpha_2<1$, где $g(x_1)$ лишь непрерывна, но не более того, имеет производную $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f \equiv 0$ при указанном в (24.9) порядке, но не имеет этой производной, если в (24.9) взять $\partial^2/\partial x_2 \partial x_1$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема до порядка m, то выражение (24.9) можно привести к виду, подобному (24.8), с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Ограничимся соответствующей записью в случае двух переменных, $x=(x_1, x_2)$:

$$(\mathcal{D}^{(\alpha_1, \alpha_2)}_{(a_1, a_2)+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \left[\frac{f(a_1, a_2)}{(x_1-a_1)^{\alpha_1}(x_2-a_2)^{\alpha_2}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{(x_1-a_1)^{\alpha_1}} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial f(a_1, t_2)}{\partial t_2} \frac{dt_2}{(x_2-t_2)^{\alpha_2}} + \frac{1}{(x_2-a_2)^{\alpha_2}} \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial f(t_1, a_2)}{\partial t_1} \times$$

$$\left. \times \frac{dt_1}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}} + \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{dt_1 dt_2}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}(x_2-t_2)^{\alpha_2}} \right].$$

В случае $\alpha_k>1$ смешанные дробные производные вводим, следуя (2.30), равенством

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = \mathcal{D}^{j} I^{j-\alpha}_{a+}f, \quad \alpha \geqslant 0, \quad (24.10)$$

где $j=([\alpha_1]+1, \ldots, [\alpha_m]+1, 0, \ldots, 0)$.

Можно, очевидно, вводить интегродифференциальные операции I^{α}_{a+}, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, с порядками α_k разных знаков, т. е. такие операции, когда по одной части переменных применяется дробное интегрирование, а по другой — дробное дифференцирование.

Подобно (2.21) проверяется выполнение полугруппового свойства

$$I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad (24.11)$$

где $\alpha+\beta$ — сумма векторов α, β. Здесь $\varphi(x)$ — произвольная функция, суммируемая в любой ограниченной части октанта $x>a$.

Непосредственно проверяется, что для любого монома $x^{\beta-1}=x_1^{\beta_1-1} \ldots x_n^{\beta_n-1}$ его частные и смешанные дробные интегралы и производные (24.4), (24.5), (24.9), (24.10) при выборе $a=(0, \ldots, 0)$ вычисляются по формуле

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}(x^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1},$$

где $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)>0$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — любое, $\dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} = I^{-\alpha_i}_{0+}$ при $\alpha_i<0$ и $\Gamma(\beta)=\Gamma(\beta_1) \ldots \Gamma(\beta_n)$ (ср. с (2.44)).

В случае функций, заданных во всем пространстве R^n, будем рассматривать *лиувиллевские дробные интегралы*

$$I^{\alpha}_{+\ldots+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt, \tag{24.12}$$

$$I^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} t^{\alpha-1}\varphi(x+t)\,dt, \tag{24.13}$$

где $R^n_{+\ldots+}$ — октант $\{t: t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0\}$, $t^{\alpha-1} = t_1^{\alpha_1-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1}$. Можно ввести также подобно (24.7) дробное интегрирование типа $I^{\alpha}_{\pm\ \pm\ldots\pm}\varphi$ с произвольным выбором знаков $+$ и $-$.

Лиувиллевские частные производные $\mathcal{D}^{\alpha_k}_{+}f$ вводятся равенствами

$$\frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}} f \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^{\alpha_k}_{+} f \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_0^{\infty} \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{\xi^{\alpha}}\,d\xi, \tag{24.14}$$

а смешанные лиувиллевские производные

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{+\ldots+}f, \quad \mathcal{D}^{\alpha}_{-\ldots-}f \tag{24.15}$$

записываются аналогично (24.9), (24.10), например,

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{-\ldots-}f = \frac{(-1)^{n+[\alpha_1]+\ldots+[\alpha_n]}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma[[\alpha_k]+1-\alpha_k]} \frac{\partial^{[\alpha_1]+\ldots+[\alpha_n]+n}}{\partial x_1^{[\alpha_1]+1}\ldots\partial x_n^{[\alpha_n]+1}} \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} t^{\alpha-1}\varphi(x+t)dt. \tag{24.15'}$$

Отметим аналог формулы (5.16) «дробного интегрирования по частям»:

$$\int\limits_{R^n} \varphi(x)(I^{\alpha}_{+\ldots+}\psi)(x)\,dx = \int\limits_{R^n} \psi(x)(I^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi)(x)\,dx, \tag{24.16}$$

вытекающий непосредственно из (5.16).

3°. **Случай двух переменных. Тензорное произведение операторов.** Рассмотрим здесь отдельно случай двух переменных x_1, x_2. Нам будет удобно пользоваться понятием тензорного произведения операторов. Приведем соответствующее

Определение 24.1. *Пусть A_1u и A_2v — линейные операторы, заданные на функциях $u(x_1)$, $v(x_2)$ одного переменного. Тензорным произведением операторов A_1 и A_2 называется оператор $A_1 \otimes A_2$, определенный на функциях вида*

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_i u_i(x_1)\,v_i(x_2) \tag{24.17}$$

равенством

$$(A_1 \otimes A_2)\varphi = \sum_i A_1u_iA_2v_i. \tag{24.18}$$

При рассмотрении конкретных классов X функций φ (например, $X = L_p(R^2)$) функции вида (24.17) образуют обычно плотное в X множество и поэтому оператор $A_1 \otimes A_2$ в случае его непрерывности единственным образом продолжается с функций (24.17) на все пространство X.

Из определения 24.1 вытекает, что смешанный дробный интеграл $I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2)$, является тензорным произведением одномерных дробных интегралов:

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi = I^{\alpha_1}_{a_1+}\otimes I^{\alpha_2}_{a_2+}\varphi,\quad \alpha_i\geqslant 0,\quad \alpha_2\geqslant 0, \tag{24.19}$$

и то же самое относится к дробному дифференцированию:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = \mathcal{D}^{\alpha_1}_{a_1+}\otimes \mathcal{D}^{\alpha_2}_{a_2+}f,\quad \alpha_1\geqslant 0,\quad \alpha_2\geqslant 0.$$

В случае, когда α_1 и α_2 разных знаков, полагаем

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi = \mathcal{D}^{-\alpha_1}_{a_1+}\otimes I^{\alpha_2}_{a_2+}\varphi,\quad \alpha_1<0,\quad \alpha_2\geqslant 0.$$

Для функций $\varphi(x_1,\ x_2)$, заданных на всей плоскости, лиувиллевские формы (24.12), (24.13) дробного интегрирования принимают вид

$$I^{\alpha}_{\pm\pm}\varphi = I^{\alpha_1}_{\pm}\otimes I^{\alpha_2}_{\pm}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x_1\mp t_1,\ x_2\mp t_2)}{t_1^{1-\alpha_1}t_2^{1-\alpha_2}}\,dt_1dt_2. \tag{24.20}$$

Можно рассматривать также операторы

$$I^{\alpha}_{\pm\mp}\varphi = I^{\alpha_1}_{\pm}\otimes I^{\alpha_2}_{\mp}\varphi,\quad \alpha_1\geqslant 0,\quad \alpha_2\geqslant 0, \tag{24.21}$$

при соответственном выборе знаков. Случаю $\alpha_1=0$ или $\alpha_2=0$ отвечает частное дробное интегрирование

$$I^{(\alpha_1,\ 0)}_{\pm\pm} = I^{\alpha_1}_{\pm}\otimes E,\quad I^{(0,\ \alpha_2)}_{\pm\pm} = E\otimes I^{\alpha_2}_{\pm}, \tag{24.22}$$

где E — единичный оператор.

Пусть $Q_1\varphi=\varphi(-x_1,\ x_2)$, $Q_2\varphi=\varphi(x_1,\ -x_2)$, $Q_{12}\varphi=\varphi(-x_1,\ -x_2)$, так что в соответствии с (5.9) и определением (24.18)

$$Q_1 = Q\otimes E,\quad Q_2 = E\otimes Q,\quad Q_{12}=Q_1Q_2 = Q\otimes Q.$$

Справедливы очевидные равенства

$$Q_1I^{\alpha}_{++} = I^{\alpha}_{-+}Q_1,\quad Q_2I^{\alpha}_{++} = I^{\alpha}_{+-}Q_2,\quad Q_{12}I^{\alpha}_{++} = I^{\alpha}_{--}Q_{12}$$

(ср. с (5.9)).

Тождества, аналогичные равенствам (24.19)—(24.22), можно записать и для дробного дифференцирования, например,

$$\mathcal{D}^{(\alpha_1,\ 0)}_{\pm}f = (\mathcal{D}^{\alpha_1}_{\pm}\otimes E)f = \pm\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{\infty}t_1^{\alpha_1-1}f(x_1\mp t_1,\ x_2)\,dt_1, \tag{24.23}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm\pm}f = \mathcal{D}^{\alpha_1}_{\pm}\otimes\mathcal{D}^{\alpha_2}_{\pm}f \quad \text{и т. п.}$$

Понятие тензорного произведения операторов легко распространяется на случай n переменных. Останавливаться на этом не станем.

4°. Действие операторов дробного интегрирования в пространствах $L_{\overline{p}}(R^n)$ (со смешанной нормой). Для простоты изложения ограничимся случаем двух переменных x_1, x_2. Желая получить естественный аналог теоремы Харди — Литтлвуда 5.3, будем рассматривать действие операторов $I^{(\alpha_1,\ 0)}_{\pm}$, $I^{(0,\ \alpha_2)}_{\pm}$, $I^{(\alpha_1,\ \alpha_2)}_{\pm\pm}$ не из $L_p(R^2)$ в $L_q(R^2)$ подобно теореме 5.3, а в рамках пространств функций, интегрируемых по каждой переменной в различных, вообще говоря, степенях p_1 и p_2. Именно введем пространство $L_{\overline{p}}(R^2)$, $\overline{p}=(p_1,\ p_2)$, функций $f(x_1,\ x_2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left\{\int\limits_{R^1}\left[\int\limits_{R^1}|f(x_1,\ x_2)|^{p_1}dx_1\right]^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{1/p_2} < \infty. \qquad (24.24)$$

Считаем, как обычно, что $1 \leqslant p_i < \infty$, $i = 1, 2$. Пространство $L_{\bar{p}}(R^2)$ называют *пространством со смешанной нормой*. В случае $p_1 = p_2 = p$, очевидно, $L_{\bar{p}}(R^2) = L_p(R^2)$.

Прежде чем дать основную теорему, докажем следующую лемму.

Лемма 24.1. *Пусть A_1 — произвольный линейный оператор, ограниченный из $L_{p_1}(R^1)$ в $L_{q_1}(R^1)$, а A_2 — оператор свертки*

$$A_2\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\,\varphi(x_2 - \xi)\,d\xi$$

с неотрицательным ядром $k(\xi) \geqslant 0$, ограниченный из $L_{p_2}(R^1)$ в $L_{q_2}(R^1)$, $1 \leqslant p_i < \infty$, $1 \leqslant q_i < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда оператор $A_1 \otimes A_2$ ограничен из $L_{\bar{p}}(R^2)$ в $L_{\bar{q}}(R^2)$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$.

Доказательство. Непосредственно с помощью теоремы Фубини 1.1 проверяется, что оператор $A_1 \otimes E$ ограничен из $L_{p_1, q_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ (при любом q_2), если оператор A_1 ограничен из $L_{p_1}(R^1)$ в $L_{q_1}(R^1)$. Так как $A_1 \otimes A_2 = (A_1 \otimes E)(E \otimes A_2)$, то достаточно доказать тогда, что оператор $E \otimes A_2$ ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{p_1, q_2}(R^2)$. Имеем

$$(E \otimes A_2)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t_2)\,\varphi(x_1,\ x_2 - t_2)\,dt_2,$$

и применение обобщенного неравенства Минковского (1.33) дает:

$$\left\{\int\limits_{R^1}|(E \otimes A_2)\varphi|^{p_1}dx_1\right\}^{1/p_1} \leqslant \int\limits_{R^1} k(t_2)\,\|\varphi(\cdot,\ x_2 - t_2)\|_{p_1}dt_2, \qquad (24.25)$$

где норма справа применена по первой переменной. Здесь $\|\varphi(\cdot,\ t_2)\|_{p_1} \in \in L_{p_2}(R^1)$. Поэтому в силу ограниченности оператора A_2 из $L_{p_2}(R^2)$ в $L_{q_2}(R^2)$ получаем, оценивая (24.25) по норме пространства $L_{q_2}(R^1)$ по переменной x_2:

$$\|(E \otimes A_2)\varphi\|_{p_1, q_2} = \|\,\|(E \otimes A_2)\varphi\|_{p_1}\|_{q_2} \leqslant c\,\|\varphi\|_{p_1, p_2},$$

что и требовалось.

Теорема 24.1. *Пусть $1 \leqslant p_i < \infty$, $1 \leqslant q_i < \infty$, $i = 1, 2$. Оператор частного дробного интегрирования $I_{\pm}^{(\alpha_1,\ 0)}$ ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда*

$$1 < p_1 < 1/\alpha_1, \quad 1 \leqslant p_2 < \infty, \quad 1/q_1 = 1/p_1 - \alpha_1, \quad q_2 = p_2. \qquad (24.26)$$

Операторы смешанного дробного интегрирования $I_{\pm\pm}^{(\alpha_1,\ \alpha_2)}$ ограничены из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда

$$1 < p_i < 1/\alpha_i, \quad 1/q_i = 1/p_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2. \qquad (24.27)$$

Утверждение теоремы в достаточной части вытекает на основании равенств (24.22), (24.20) непосредственно из леммы 24.1 и одномерной теоремы Харди — Литтлвуда 5.3. Проверка необходимости условий (24.26), (24.27) осуществляется точно так же, как для функций одного переменного в теореме 5.3 с помощью оператора растяжения по каждой переменной: $\Pi_\delta\varphi = \varphi(\delta \circ x)$, $\delta \circ x = (\delta_1 x_1, \ldots, \delta_n x_n)$, $\delta > 0$, для которого $\|\Pi_\delta\varphi\|_{\bar{p}} = \delta^{-1/\bar{p}}\|\varphi\|_{\bar{p}}$, где $\delta^{-1/\bar{p}} = \delta_1^{-1/p_1} \ldots \delta_n^{-1/p_n}$.

Замечание 24.1. Отметим, что в пространстве $L_{\bar{p}}(R^2)$ (при определении которого в (24.24) интегрирование ведется сначала по x_1, затем по x_2) поведение операторов $A_1 \otimes E$, $E \otimes A_2$ неравноправно. Именно $A_1 \otimes E$

ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, p_2}(R^2)$ при любом p_2, если A_1 ограничен из $L_{p_1}(R^1)$ в $L_{q_1}(R^1)$ (теорема Фубини). Однако ограниченность A_2 из $L_{q_1}(R^1)$ в $L_{q_2}(R^2)$ влечет за собой ограниченность $E \otimes A_2$ из $L_{p_1, q_1}(R^2)$ в $L_{p_1, q_2}(R^2)$ не при всех p_1. (Укажем работу В. Л. Крепкогорского [1], в которой построены примеры операторов A_2, ограниченных в $L_2(R^1)$, таких, что $E \otimes A_2$ ограничен в $L_{p_1, 2}(R^2)$ не при всех p_1.)

5°. **Связь с сингулярным интегралом.** Для функций двух переменных рассмотрим оператор

$$N\varphi = a_0\varphi(x_1, x_2) + \frac{a_1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t_1, x_2)}{t_1 - x_1}dt_1 +$$

$$+\frac{a_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x_1, t_2)}{t_2 - x_2}dt_2 + \frac{a_{12}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t_1, t_2)\,dt_1dt_2}{(t_1 - x_1)(t_2 - x_2)}, \quad (24.28)$$

называемый *бисингулярным интегральным оператором.* Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_{12} у нас будут постоянными. Используя обозначение $S\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t - x}$ для одномерного сингулярного оператора, можем записать бисингулярный оператор (24.28) в терминах тензорных произведений:

$$N = a_0E \otimes E + a_1S \otimes E + a_2E \otimes S + a_{12}S \otimes S.$$

Лемма 24.2. *Бисингулярные операторы* $S \otimes E$, $E \otimes S$, $S \otimes S$ *ограничены в пространстве* $L_{\overline{p}}(R^2)$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$.

В этой лемме ограниченность $S \otimes E$ вытекает из леммы 24.1. Доказательство ограниченности оператора $E \otimes S$ не приводим, замечая лишь, что его можно получить с помощью одной теоремы Дж. Шварца о сингулярных операторах со значениями в банаховом пространстве (J. T. Schwartz [1]), см. по этому поводу статью П. И. Лизоркина [7]. Ограниченность $S \otimes S$ следует из того, что $S \otimes S = (S \otimes E)(E \otimes S)$.

Обозначим через

$$N_{\alpha_1}\varphi = \cos\alpha_1\pi\varphi + \sin\alpha_1\pi S\varphi$$

одномерный сингулярный оператор, возникающий в тождествах (11.10), (11.11), связывающих одномерное дробное интегрирование I_+^α, I_-^α друг с другом. Введем аналогичный бисингулярный оператор

$$N_{\alpha_1, \alpha_2}\varphi = N_{\alpha_1} \otimes N_{\alpha_2}\varphi. \quad (24.29)$$

С его помощью можно записать связи между операторами $I_{++}^\alpha, I_{+-}^\alpha, I_{--}^\alpha$. Именно справедлива

Теорема 24.2. *Пусть* $\varphi(x_1, x_2) \in L_{\overline{p}}(R^2)$, $1 < p_i < 1/\alpha_i$, $i = 1, 2$. *Справедливы тождества*

$$I_{++}^\alpha\varphi = I_{-+}^\alpha N_{\alpha_1, 0}\varphi, \quad (24.30)$$

$$I_{++}^\alpha\varphi = I_{+-}^\alpha N_{0, \alpha_2}\varphi, \quad (24.31)$$

$$I_{++}^\alpha\varphi = I_{--}^\alpha N_{\alpha_1, \alpha_2}\varphi, \quad I_{--}^\alpha\varphi = I_{++}^\alpha N_{-\alpha_1, -\alpha_2}\varphi. \quad (24.32)$$

Доказательство. Тождества (24.30) — (24.32) следуют из тождеств (11.10), (11.11) для функций одного переменного. Действительно, из тождеств (11.10), (11.11) непосредственно видна справедливость равенств (24.30) — (24.32) на функциях вида $\varphi(x_1, x_2) = \sum_s u_s(x_1)\,v_s(x_2)$, $u_s(x_1) \in L_{p_1}(R^1)$, $v_s(x_2) \in L_{p_2}(R^1)$. Такие функции плотны в $L_{\overline{p}}(R^2)$ (достаточно в

качестве функций $u_s(x_1)$, $v_s(x_2)$ взять ступенчатые функции). Поэтому выполнимость требуемых тождеств на всем пространстве $L_{\bar{p}}(R^2)$ вытекает из ограниченности операторов, стоящих в левой и правой частях тождеств. Эта ограниченность следует из теоремы 24.1 и леммы 24.2.

6°. Частные и смешанные дробные производные в форме Маршо. Согласно (5.57), частные дробные производные Лиувилля (24.14) могут быть записаны (на достаточно хороших функциях) в форме Маршо:

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha_k} f = \frac{\alpha_k}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x \mp \xi e_k)}{\xi^{1+\alpha_k}}\, d\xi, \quad 0 < \alpha_k < 1, \tag{24.33}$$

где $e_k = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. В случае $\alpha_k \geqslant 1$ подобный переход делаем на основании равенства (5.80):

$$\mathcal{D}_{+}^{\alpha_k} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha_k, l_k)} \int_0^\infty \frac{(\Delta_{\xi e_k}^{l_k} f)(x)}{\xi^{1+\alpha_k}}\, d\xi, \tag{24.34}$$

где целое число l_k взято так, что $l_k > \alpha_k$, конечная разность $\Delta_{\xi e_k}^{l_k}$ применена по переменной x_k, $\varkappa(\alpha_k, l_k)$ — постоянная (5.81). Отсюда нетрудно видеть, что для смешанных дробных производных $\mathcal{D}_{\pm\ldots\pm}^{\alpha} f$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, вместо (24.34) получим

$$\mathcal{D}_{\pm\ldots\pm}^{\alpha} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_{R^n_{+\ldots+}} \frac{(\Delta_{\pm t}^{l} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad \alpha > 0, \tag{24.35}$$

где введена конечная разность

$$(\Delta_t^l f)(x) = \Delta_{t_1}^{l_1} [\Delta_{t_2}^{l_2} \ldots (\Delta_{t_n}^{l_n} f)](x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant l} (-1)^{|j|} \binom{l}{j} f(x - j \circ t) \tag{24.36}$$

векторного порядка $l = (l_1, \ldots, l_n)$ с векторным шагом $t = (t_1, \ldots, t_n)$; здесь $j \circ h = (j_1 h_1, \ldots, j_n h_n)$, l_k — целые числа, такие, что $0 < \alpha_k < l_k$, и $\binom{l}{j} = \prod_{k=1}^{n} \binom{l_k}{j_k}$. Нормировочная постоянная $\varkappa(\alpha, l)$ в (24.35) равна

$$\varkappa(\alpha, l) = \prod_{k=1}^{n} \varkappa(\alpha_k, l_k).$$

Правую часть в (24.35) будем обозначать отдельным символом $\mathbf{D}_{\pm\ldots\pm}^{\alpha} f$, учитывая, что она может существовать и тогда, когда $\mathcal{D}_{\pm\ldots\pm}^{\alpha} f$ не существует.

В (24.35) можно рассматривать различные варианты дробного дифференцирования (типа $\mathcal{D}_{+--+\ldots}^{\alpha}$), отвечающие разному выбору знаков: по одним переменным применяется левостороннее, по другим — правостороннее дробное дифференцирование. В этом случае выбирается шаг разности типа $(t_1, -t_2, -t_3, t_4, \ldots)$, отвечающий выбранному распределению знаков $+$ и $-$.

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) > 0$. Усеченной дробной производной Маршо назовем выражение

$$\mathbf{D}_{+\ldots+,\,\varepsilon}^{\alpha} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_{\varepsilon_1}^\infty \ldots \int_{\varepsilon_n}^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \tag{24.37}$$

В равенствах (24.35), (24.37) предполагалось, что $\alpha > 0$. Читатель может легко выписать соответствующие конструкции в случаях, когда $\alpha_k = 0$ для некоторых $k = 1, 2, \ldots$

В заключение этого пункта остановимся на понятии дробного интегродифференцирования по направлению. Здесь возможны различные варианты определений. Рассмотренная ранее форма (24.33) дробного частного дифференцирования по k-й переменной допускает непосредственное обобщение на дифференцирование в заданном направлении. Именно пусть $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $|\omega|=1$, есть вектор в R^n, задающий направление. *Дробной производной порядка* $\alpha(\in R^1)$, $0<\alpha<1$, *в направлении* ω назовем, следуя (24.33), выражение

$$(\mathcal{D}_\omega^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-\xi\omega)}{\xi^{1+\alpha}}\, d\xi. \tag{24.38}$$

В случае произвольного $\alpha \in R_+^1$ дробную производную по направлению введем, отправляясь от (24.34), равенством

$$(\mathcal{D}_\omega^\alpha f)(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_0^\infty \frac{(\Delta_{\xi\omega}^l f)(x)}{\xi^{1+\alpha}}\, d\xi \tag{24.38'}$$

с помощью конечной разности, взятой вдоль направления ω, $|\omega|=1$. Это определение приспособлено для функций $f(x)$, заданных в R^n (или, по крайней мере, в бесконечной области, содержащей вместе с каждой своей точкой и выходящий из нее луч, параллельный вектору $-\omega$). Для функций, заданных в ограниченной области Ω в R^n, можно ввести аналог дробной производной Маршо на отрезке, см. (13.2). Именно пусть $a=(a_1, \ldots, a_n)$ — фиксированная точка в области Ω. Можно ввести, отправляясь от (13.2) и (24.38), выражение

$$\mathbf{D}_{a+}^\alpha f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)|x-a|^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{|x-a|} \frac{f(x)-f\left(x-\xi\frac{x-a}{|x-a|}\right)}{\xi^{1+\alpha}}\, d\xi, \quad 0<\alpha<1, \tag{24.38''}$$

и назвать его дробной производной порядка α в точке x в направлении из точки a (аналогичный вариант с $\mathbf{D}_{a-}^\alpha f$ назвали бы производной по направлению к точке a).

Можно ввести также «дробный интеграл по направлению»:

$$I_\omega^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} f(x-\xi\omega)\, d\xi. \tag{24.39}$$

На достаточно хороших функциях $f(x)$ можно записать дробную производную (24.38) в виде

$$\mathcal{D}_\omega^\alpha f = \frac{d}{d\omega} I_\omega^\alpha f, \quad 0<\alpha<1,$$

где $\frac{d}{d\omega}$ означает обычное дифференцирование в направлении ω. Операция (24.38') дробного дифференцирования по направлению является обратной по отношению к дробному интегрированию (24.39) по направлению: $\mathcal{D}_\omega^\alpha I_\omega^\alpha \varphi \equiv \varphi$ в случае достаточно хороших функций $\varphi(x)$. В этом можно убедиться непосредственно, но проще всего сослаться на формулы (24.48') преобразования Фурье дробных интегралов и производных. Из этих формул вытекает также полугрупповое свойство $I_\omega^\alpha I_\omega^\beta \varphi \equiv I_\omega^{\alpha+\beta}\varphi$.

По поводу дробного интегродифференцирования по направлению см. также § 29, п. 2°.

7°. Описание дробных интегралов от функций из $L_{\overline{p}}(R^2)$. В этом пункте рассматриваются функции $f(x_1, x_2)$ двух переменных. Получаемые здесь утверждения примыкают к соответствующим построениям § 6, п. 2°, являясь их непосредственным распространением на частное и смешанное дробное интегродифференцирование функций двух переменных. Следуя (6.7), обозначим $\mathcal{K}_\alpha(t) = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \dfrac{t_+^{\alpha-1} - (t-1)_+^{\alpha-1}}{t}$, подчеркнув зависимость этого ядра от α. Подобно (6.6) получаем равенства

$$\mathbf{D}_{+,\,\varepsilon_1}^{(\alpha_1,\,0)} I_+^{(\alpha_1,\,0)}\varphi = \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_1}(t)\,\varphi(x_1 - \varepsilon_1 t,\ x_2)\,dt, \tag{24.40}$$

$$\mathbf{D}_{+,\,\varepsilon_2}^{(0,\,\alpha_2)} I_+^{(0,\,\alpha_2)}\varphi = \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_2}(t)\,\varphi(x_1,\ x_2 - \varepsilon_2 t)\,dt, \tag{24.41}$$

$$\mathbf{D}_{++,\,\varepsilon}^{\alpha} I_{++}^{\alpha}\varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_1}(t_1)\,\mathcal{K}_{\alpha_2}(t_2)\,\varphi(x_1 - \varepsilon_1 t_1,\ x_2 - \varepsilon_2 t_2)\,dt_1 dt_2, \tag{24.42}$$

где $\mathbf{D}_{+,\,\varepsilon_1}^{(\alpha_1,\,0)} = \mathbf{D}_{+,\,\varepsilon_1}^{\alpha_1} \otimes E$ — усеченное дробное дифференцирование Маршо (5.59) по первой переменной (и аналогично $\mathbf{D}_{+,\,\varepsilon_2}^{(0,\,\alpha_2)}$—по второй), а $\mathbf{D}_{++,\,\varepsilon}^{\alpha}$ — усеченное смешанное дробное дифференцирование Маршо (24.37). Из равенств (24.40) — (24.42) выводится

Теорема 24.3. *Пусть* $f(x_1, x_2) = I_+^{(\alpha_1,\,0)}\varphi$, *где* $\varphi(x_1, x_2) \in L_{\overline{p}}(R^2)$, $1 \leqslant p_1 < 1/\alpha_1$, $1 \leqslant p_2 < \infty$. *Тогда* $\varphi(x_1, x_2) = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} \mathbf{D}_{+,\,\varepsilon_1}^{(\alpha_1,\,0)} f$, *где предел понимается по норме пространства* $L_{\overline{p}}(R^2)$. *Аналогично, если* $f(x_1, x_2) = I_{++}^{\alpha}\varphi$, *где* $\varphi(x_1, x_2) \in L_{\overline{p}}(R^2)$, $1 \leqslant p_i < 1/\alpha_i$, $i = 1, 2$, *то*

$$\varphi(x_1, x_2) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_{\overline{p}}(R^2))}} \mathbf{D}_{++,\,\varepsilon}^{\alpha} f. \tag{24.43}$$

Теорема 24.3 доказывается на основании равенств (24.40) — (24.42) точ-

Теорема 24.4. *Для того чтобы* $f(x)\in I^{\alpha}(L_{\overline{p}})$, *где* $0<\alpha_i<1$, $1<p_i<\dfrac{1}{\alpha_i}$, $i=1, 2$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $f(x)\in L_{\overline{p}_{\alpha}}(R^2)$,

2) существовал $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}^{\alpha}_{++,\,\varepsilon}f$ *по норме пространства* $L_{\overline{p}}(R^2)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 24.3. Достаточность получается по схеме доказательства достаточности в теореме 6.2. Нужно показать, что условия 1) и 2) влекут за собой представимость $f(x)=I^{\alpha}_{++}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p}}(R^2)$. Обозначим $g(x)=I^{\alpha}_{++}\mathbf{D}^{\alpha}_{++}f$, где $\mathbf{D}^{\alpha}_{++}f=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}^{\alpha}_{++,\,\varepsilon}f\in L_{\overline{p}}$ и вместо равенства $f(x)=g(x)$ будем доказывать равенство их конечных разностей:

$$(\Delta^{(1,1)}_{(h_1,h_2)}f)(x)=(\Delta^{(1,1)}_{(h_1,h_2)}g)(x), \tag{24.46}$$

где использована смешанная разность первого порядка по каждой переменной (см. (24.36)). Дальнейшие рассуждения ведутся точно так же, как в теореме 6.2 после равенства (6.21), и потому предоставляются читателю. Отметим только два узловых момента: а) вместо оператора (6.22) следует взять оператор

$$A_h\varphi=\iint\limits_{R^2}a_h(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad a_h(x)=(\Delta^{(1,1)}_h\mathrm{k}_{\alpha})(x),$$

где $h=(h_1, h_2)$, $\mathrm{k}_{\alpha}(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}\,x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}$ при $x_1>0$, $x_2>0$ и $\mathrm{k}_{\alpha}(x)=0$ при $x_1<0$ или $x_2<0$; б) вместо тождества (6.23) придем к равенству

$$A_h\mathbf{D}^{\alpha}_{++,\,\varepsilon}f=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\mathcal{K}_{\alpha_1}(t_1)\,\mathcal{K}_{\alpha_2}(t_2)\,(\Delta^{(1,1)}_{(h_1,h_2)}f)(x-\varepsilon t)\,dt.$$

Теорема 24.4 позволяет получить информацию о частных дробных производных из информации о смешанной дробной производной и о самой функции. Именно справедливо

Следствие. *Если* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}^{\alpha}_{++,\,\varepsilon}f\in L_{\overline{p}}(R^2)$, $f\in L_{\overline{p}_{\alpha}}(R^2)$, *то* $\mathbf{D}^{(\alpha_1,\,0)}_{+}f\in L_{p_1,\,r_2}(R^2)$, $\mathbf{D}^{(0,\,\alpha_2)}_{+}f\in L_{r_1,\,p_2}(R^2)$, $r_i=p_i/(1-\alpha_ip_i)$, $i=1, 2$.

Действительно, в силу теоремы 24.4 $f=I^{\alpha}_{++}\varphi$, $\varphi\in L_{p_1,\,p_2}$, и тогда $\mathbf{D}^{(\alpha_1,\,0)}_{+}f=\mathbf{D}^{(\alpha_1,\,0)}_{+}I^{(\alpha_1,\,\alpha_2)}_{++}\varphi=I^{\alpha_2}_{+}\varphi\in L_{p_1,\,r_2}(R^2)$, что и требовалось.

8°. Интегральные преобразования дробных интегралов и производных. В этом пункте рассматриваем функции n переменных, заданные на всем пространстве R^n. Пусть

$$\mathcal{F}\varphi=\hat{\varphi}(x)=\int\limits_{R^n}e^{ix\cdot t}\varphi(t)\,dt$$

есть многомерное преобразование Фурье. Так как оно состоит в последовательном применении одномерного преобразования Фурье по каждой переменной, то из теоремы 7.1 заключаем, что для лиувиллевских дробных интегралов (24.12), (24.13) справедливы при $0\leqslant\alpha_k<1$, $k=1, \ldots, n$, формулы

$$\mathcal{F}I^{\alpha}_{+\ldots+}\varphi=(-ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \tag{24.47}$$

$$\mathcal{F}I^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi=(ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \tag{24.48}$$

где $(-ix)^{\alpha}=(-ix_1)^{\alpha_1}\ldots(-ix_n)^{\alpha_n}$ и аналогично для $(ix)^{\alpha}$, а $\varphi(x)\in L_1(R^n)$.

Можно записать также очевидные формулы для $I^{\alpha}_{\pm\ldots\pm}\varphi$ при всевозможных выборах знаков + и —.

Непосредственным вычислением устанавливается также формула

$$\mathcal{F}(I^{\alpha}_{\omega}f) = (-ix\cdot\omega)^{-\alpha}\hat{f}(x), \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}^{\alpha}_{\omega}f) = (-ix\cdot\omega)^{\alpha}\hat{f}(x), \tag{24.48'}$$

где $I^{\alpha}_{\omega}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{\omega}f$ — дробное интегрирование и дифференцирование (24.39), (24.38), (24.38') по направлению ω.

Аналогично (7.14) для многомерного преобразования Лапласа

$$L\varphi = \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} e^{-y\cdot t}\varphi(t)\,dt, \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \tag{24.49}$$

где $R^n_{+\ldots+}$ — октант $\{t : t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0\}$, получается формула

$$(LI^{\alpha}_{0+}\varphi)(y) = y^{-\alpha}(L\varphi)(y), \tag{24.50}$$

где

$$I^{\alpha}_{0+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{x_1}\ldots\int\limits_0^{x_n}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt. \tag{24.51}$$

Известная формула дифференцирования интеграла Лапласа

$$(-\mathcal{D})^k L\varphi = L[t^k\varphi(t)], \quad k = (k_1, \ldots, k_n),$$

распространяется на дробное дифференцирование:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{-\ldots-}L\varphi = L\psi, \quad \psi(t) = t^{\alpha}\varphi(t), \quad \alpha \geqslant 0, \tag{24.52}$$

$$I^{\alpha}_{-\ldots-}L\varphi = L\psi, \quad \psi(t) = t^{-\alpha}\varphi(t), \quad \alpha < 1, \tag{24.53}$$

в чем легко убедиться непосредственной перестановкой порядка интегрирования в левой части. Формула (24.52) верна и при $\alpha \geqslant 1$, если считать, что $t^{-\alpha}\varphi(t)$ интегрируема при $t=0$.

Для многомерного преобразования Меллина

$$(\mathfrak{M}\varphi)(x) = \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} t^{x-1}\varphi(t)\,dt \tag{24.54}$$

подобно (7.20), (7.21) справедливы равенства

$$(\mathfrak{M}I^{\alpha}_{0+}\varphi)(x) = \frac{\Gamma(1-x-\alpha)}{\Gamma(1-x)}(\mathfrak{M}\varphi)(x+\alpha), \tag{24.55}$$

$$(\mathfrak{M}I^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi)(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)}(\mathfrak{M}\varphi)(x+\alpha), \tag{24.56}$$

где, как обычно, $\Gamma(x+\alpha) = \Gamma(x_1+\alpha_1)\ldots\Gamma(x_n+\alpha_n)$ и т. п.

Мы не останавливаемся на доказательствах приведенных формул: они легко выводятся из соответствующих одномерных формул в § 7 при надлежащих предположениях относительно функций $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$. Например, в (24.52) достаточно предполагать, что $t^{-\alpha}\varphi(t)$ локально интегрируема и медленно растет на бесконечности.

9°. Пространство Лизоркина, инвариантное относительно дробного интегродифференцирования. Следуя § 8, п. 2°, введем такое пространство Φ функций многих переменных, которое будет инвариантным относительно частного и смешанного дробного интегродифференцирования. Как и в § 8, п. 2°, идея такого пространства ясна в образах Фурье. Именно в силу формул (24.47), (24.48) ясно, что требуемая инвариантность

класса Φ будет иметь место, если функции $\varphi(t)$ этого класса будут иметь образы Фурье $\hat{\varphi}(x)$, тождественно аннулирующиеся на гиперплоскостях $x_k=0$. Обозначим поэтому через Ψ подкласс шварцева пространства $S(R^n)$, состоящий из функций, исчезающих вместе со всеми своими производными на гиперплоскостях $x_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$:

$$\Psi = \{\psi(x): \psi \in S(R^n),\ (\mathscr{D}^j\psi)(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) \equiv 0,$$
$$|j| = 0, 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Примером функции $\psi(x) \in \Psi$ служит функция $\psi(x) = e^{-|x|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^{-2}}$.

Классом Лизоркина назовем класс прообразов Фурье функций из Ψ:

$$\Phi = \Phi(R^n) = \{\varphi: \varphi \in S(R^n),\ \hat{\varphi} \in \Psi\}. \tag{24.56'}$$

Так как

$$\hat{\varphi}^{(j)}(x)|_{x_k=0} = \int_{R^{n-1}} e^{ix'\cdot t'} (t')^{j'} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t', \xi)\, \xi^{j_k} d\xi,$$

где $t' = (t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$, $j' = (j_1, \ldots, j_{k-1}, j_{k+1}, \ldots, j_n)$, то непосредственно из определения следует, что класс $\Phi(R^n)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(t) \in S(R^n)$, для которых равны нулю все моменты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, \ldots, t_{k-1}, \xi, t_{k+1}, \ldots, t_n)\, \xi^m d\xi = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

вдоль координатных осей, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Также непосредственно из определения заключаем, что если $\varphi(t) \in \Phi(R^n)$, то и любой лиувиллевский дробный интеграл (производная) $I^{\alpha}_{\pm\ldots\pm}\varphi$ принадлежит $\Phi(R^n)$, $-\infty < \alpha < \infty$.

Имеет место

Лемма 24.3. *Формулы (24.47), (24.48) на функциях* $\varphi(x) \in \Phi(R^n)$ *справедливы при* $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 24.3 выводится из леммы 8.1 (с учетом того, что для $\varphi \in \Phi(R^n)$ функция $\varphi(t_1, \ldots, t_{k-1}, \xi, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ при фиксированных $t_1, t_2, \ldots$ принадлежит классу $\Phi(R^1)$).

Можно, как и в § 8, п. 2°, ввести пространство $\Phi'(R^n)$ обобщенных функций над $\Phi(R^n)$ и рассмотреть действие дробного интегродифференцирования над такими обобщенными функциями. Останавливаться на этом не станем. Отметим лишь, что на этом пути получается, например, обоснование формулы дробного интегрирования дельта-функции Дирака $\delta = \delta(x)$:

$$I^{\alpha}_{+\ldots+}\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_+^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \tag{24.57}$$

где $t_+^{\alpha-1} = t_1^{\alpha_1-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1}$, если $t_1 > 0, \ldots, t_n > 0$, и $t_+^{\alpha-1} \equiv 0$, если $t_k < 0$ хотя бы для одного $k = 1, 2, \ldots, n$.

10°. Дробные производные и интегралы периодических функций многих переменных. Рассмотрим периодические функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ многих переменных; пусть $\Delta = \{x: 0 \leqslant x_i < 2\pi\}$ — куб периодов, а $c_k = (2\pi)^{-n} \int_{\Delta} f(x) e^{ik\cdot x} dx$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{-\infty < |k| < \infty} c_k e^{ik\cdot x} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n} e^{i(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n)}.$$

Дробное интегродифференцирование Вейля периодической функции $f(x)$ определяется подобно (19.5), (19.6). Если в одномерном случае дробный интеграл был определен на всех (суммируемых) функциях, не содержащих постоянную c_0 в ряде Фурье, то теперь нужно будет исключить из рассмотрения функции, постоянные по каждой переменной. Именно следуя (19.5), вводим кратный (смешанный) интеграл Вейля периодической функции так, чтобы

$$I^{(\alpha)}f = \sum_{-\infty<|k|<\infty}{}' \frac{c_k}{(ik)^\alpha} e^{ik\cdot x}, \tag{24.58}$$

где штрих означает пропуск всех (!) слагаемых с мультииндексами $k=(k_1, \ldots, k_n)$, у которых $k_i=0$ хотя бы для одного $i=1, \ldots, n$. Это означает, что рассматриваются функции, у которых $c_k=0$ для таких k, т. е.

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, d\xi = 0 \tag{24.59}$$

для $i=1, 2, \ldots, n$. Следуя работе П. И. Лизоркина, С. М. Никольского [1], будем называть периодическую функцию $f(x)$ *нейтральной* на Δ, если она удовлетворяет условию (24.59) при всех $i=1, 2, \ldots, n$.

Что же касается дробного дифференцирования, то оно будет определяться разложением

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}f \sim \sum_{-\infty<|k|<\infty} c_k\,(ik)^\alpha e^{ik\cdot x}. \tag{24.60}$$

В (24.58), (24.60) мы выбрали для определенности вариант левостороннего дробного интегродифференцирования по каждой переменной. В соответствии с обозначениями, например, (24.12), (24.13) дробное интегродифференцирование можно было бы обозначать символами $I_{+\ldots+}^{(\alpha)}$, $\mathcal{D}_{+\ldots+}^{(\alpha)}$, но мы не будем здесь рассматривать для периодических функций других вариантов, кроме левостороннего.

Дробный интеграл Вейля (24.58), рассматриваемый на суммируемых по Δ функциях $f(x_1, \ldots, x_n)$ с нулевыми средними значениями (24.59) по каждой переменной, истолковывается подобно (19.7) в виде

$$I^{(\alpha)}f = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_\Delta f(x-t)\prod_{i=1}^n \Psi_+^{\alpha_i}(t_i)\,dt, \quad \alpha_i>0, \tag{24.61}$$

где $\Psi_+^{\alpha_i}(t_i)$ — функции (19.8) одного переменного.

Можно допускать случаи, когда $\alpha_i=0$ для некоторых i. Тогда в (24.61) нужно исключить интегрирование по соответствующим переменным. Для простоты записи считаем, что $\alpha_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Дробное дифференцирование Вейля (24.60) при $0<\alpha<1$ записывается на достаточно хороших функциях f в виде

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}f = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} I^{(1-\alpha)}f, \tag{24.62}$$

где $1-\alpha=(1-\alpha_1, \ldots, 1-\alpha_n)$.

Теорема 24.5. *Оператор $I^{(\alpha)}$ ограничен в пространстве $L_p(\Delta)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Если $1<p<\beta=(\max\limits_i \alpha_i)^{-1}$, то $I^{(\alpha)}$ ограничен из $L_p(\Delta)$ в $L_q(\Delta)$, $q=p/(1-\beta p)$.*

Первое утверждение теоремы очевидно ввиду того, что $\prod\limits_{i=1}^n \Psi_+^{\alpha_i}(t_i)\in L_1(\Delta)$ (см. (19.11)), а второе получается последовательным применением соответствующего одномерного утверждения (19.62) с учетом вложения $L_p(\Delta)\subset L_r(\Delta)$, $p>r$.

Можно получить утверждение, аналогичное теореме 24.1 об ограниченности оператора Вейля $I^{(\alpha)}$ в рамках пространств L_p^- со смешанной нормой. Предоставим это читателю.

Аналогично лемме 19.3 (с использованием свойств функций $\Psi_+^{\alpha_i}(t_i)$) получается

Теорема 24.6. *На 2π-периодических функциях $\varphi(t)\in L_1(\Delta)$ с нулевыми средними значениями (24.59) дробный интеграл Вейля (24.61) совпадает с дробным интегралом Лиувилля:*

$$I^{(\alpha)}\varphi = I^{\alpha}_{+\ldots+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} \varphi(x-t)\, t^{\alpha-1}dt, \quad 0<\alpha<1,$$

при условии, что интеграл справа понимается как условно сходящийся на бесконечности:

$$\int\limits_{R^n_{+\ldots+}} \varphi(x-t)\, t^{\alpha-1}dt = \lim_{|m|\to\infty} \int\limits_0^{2\pi m_1} \ldots \int\limits_0^{2\pi m_n} \varphi(x-t)\, t^{\alpha-1}dt,$$

$$m = (m_1, \ldots, m_n)\in \mathbf{Z}^n.$$

Подобным же образом можно распространить на многомерный случай и другие построения § 19, относящиеся к дробному интегродифференцированию функций одного переменного. Отметим, например, аналогичное (19.34) совпадение дробных производных Вейля (24.62) с производными Маршо (24.35):

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}f = \frac{1}{\varkappa(\alpha,\ l)} \int\limits_{R^n_{+\ldots+}} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad \alpha>0. \tag{24.63}$$

Приведем также формулировку теоремы, доказываемой подобно теореме 19.2.

Теорема 24.7. *Пусть $f(x)$ периодична с кубом периодов Δ, нейтральна на Δ и $f(x)\in L_p(\Delta)$, $1\leqslant p<\infty$. Для того чтобы $f(x)$ была представима смешанным дробным интегралом Вейля (24.61):*

$$f(x) = I^{(\alpha)}\varphi, \quad \varphi\in L_p(\Delta), \quad \alpha>0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}^{\alpha}_{+\ldots+,\ \varepsilon} f\in L_p(\Delta)$, где предел вычисляется по норме пространства $L_p(\Delta)$.

11°. Дробное дифференцирование по Грюнвальду—Летникову. В случае функции $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ многих переменных частные и смешанные дробные производные по Грюнвальду—Летникову определим, следуя (20.7). Именно пусть $h=(h_1, \ldots, h_n)$ — векторное приращение и

$$(\Delta_h^{\alpha}f)(x) = \sum_{0\leqslant|j|<\infty} (-1)^{|j|} \binom{\alpha}{j} f(x-j\circ h) \tag{24.64}$$

— разность дробного векторного порядка $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, с векторным шагом h. В (24.64) j — мультииндекс и $j\circ h=(j_1h_1, \ldots, j_nh_n)$, $\binom{\alpha}{j} = \binom{\alpha_1}{j_1}\ldots\binom{\alpha_n}{j_n}$, так что в случае, когда все α_i — целые, (24.64) превращается в (24.36). Определим теперь дробную производную Грюнвальда — Летникова порядка $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ равенством

$$f^{(\alpha)}_{+\ldots+}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta^\alpha_h f)(x)}{h^\alpha}, \tag{24.65}$$

$$f^{(\alpha)}_{-\ldots-}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta^\alpha_{-h} f)(x)}{h^\alpha}, \tag{24.66}$$

где $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}$, $h_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Читатель без особого труда может с помощью результатов для одномерного дробного дифференцирования Грюнвальда—Летникова, изложенных в § 20, получить некоторые их многомерные аналоги. Остановимся, например, на распространении теоремы 20.2 на случай многих переменных, т. е. на теореме о том, что в случае периодических функций $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ смешанная дробная производная Грюнвальда — Летникова (24.65) существует одновременно со смешанной дробной производной Маршо. Пусть $\Delta=\{x : 0\leqslant x_i<2\pi\}$ — куб периодов функции $f(x)$.

Теорема 24.8. *Пусть периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $L_p(\Delta)$, $1\leqslant p<\infty$. Дробная смешанная производная Грюнвальда—Летникова (24.65) существует одновременно со смешанной дробной производной Маршо, и они совпадают:*

$$\lim_{\substack{h\to+0\\(L_p(\Delta))}} \frac{(\Delta^\alpha_h f)(x)}{h^\alpha} = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\(L_p(\Delta))}} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \ldots \int_{\varepsilon_n}^{\infty} \frac{(\Delta^l_t f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Доказательство теоремы, проводимое подобно доказательству теоремы 20.2 (с учетом теоремы 24.6 и результатов § 20), предоставляется читателю.

12°. Операторы типа полипотенциала. Введем, отправляясь от (12.1), оператор типа риссова потенциала по каждой переменной:

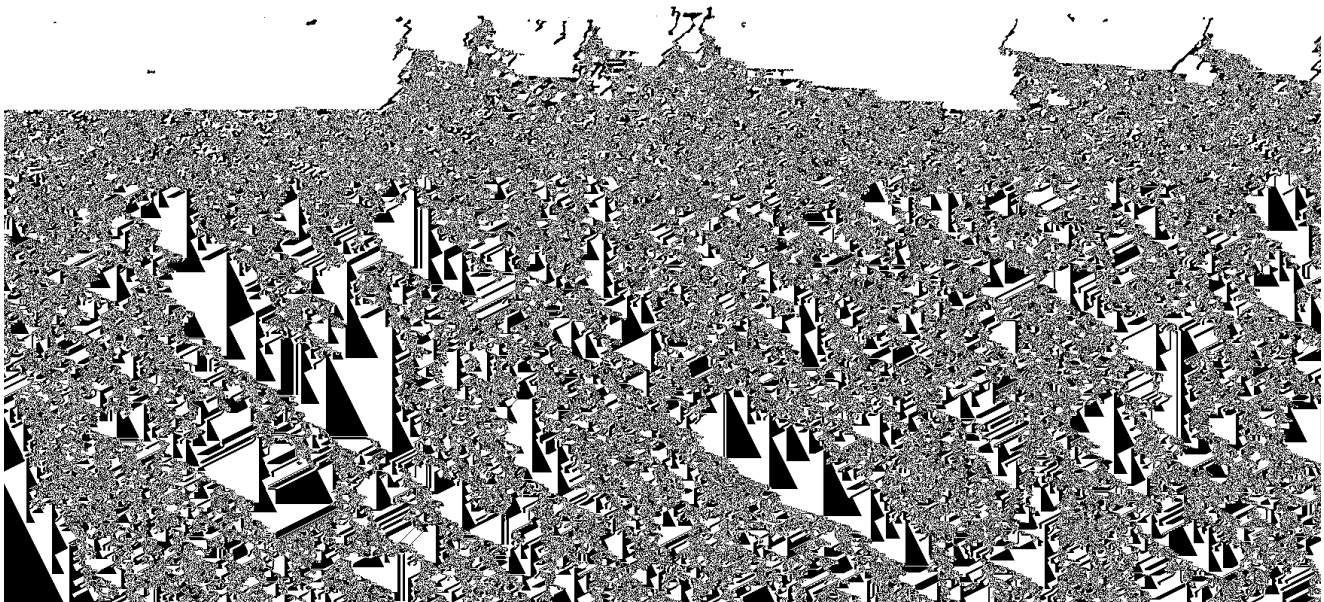
$$\mathscr{K}^\alpha \varphi = \frac{1}{A} \int_{R^n} \frac{\varphi(t)\, dt}{\prod_{k=1}^{n} |x_k - t_k|^{1-\alpha_k}}, \tag{24.67}$$

где $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \neq 1, 3, 5, \ldots$, $k = 1, \ldots, n$; $A = 2^n \prod_{k=1}^{n} \Gamma(\alpha_k) \cos \alpha_k \pi/2$.

Будем называть (24.67) оператором типа полипотенциала (Рисса). Можно ввести также, обобщая (12.2), оператор

$$\mathscr{H}^\alpha \varphi = \frac{1}{B} \int_{R^n} \varphi(t) \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sign}(x_k - t_k)}{|x_k - t_k|^{1-\alpha_k}}\, dt, \tag{24.68}$$

где $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \neq 2, 4, 6, \ldots$; $B = 2^n \prod_{k=1}^{n} \Gamma(\alpha_k) \sin \alpha_k \pi/2$.



см. п. 4° этого параграфа. Именно рассмотрим, обобщая (24.24), пространство $L_{\bar{p}}(R^n)$ функций со смешанной нормой

$$\|f\|_{\bar{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{R^1}\left\{\ldots\left\{\int\limits_{R^1}\left[\int\limits_{R^1}|f(x_1, \ldots, x_n)|^{p_1}dx_1\right]^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{p_3/p_2}\ldots\right\}^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right\}^{1/p_n} < \infty.$$

Справедлива следующая

Теорема 24.9. *Оператор типа полипотенциала* $\mathcal{H}^{\alpha}$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k > 0$, *ограничен из* $L_{\bar{p}}(R^n)$ *в* $L_{\bar{q}}(R^n)$, *где* $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\bar{q}=(q_1, \ldots, q_n)$, $1 \leqslant p_k < \infty$, $1 \leqslant q_k < \infty$, *тогда и только тогда, когда*

$$1 < p_k < 1/\alpha_k, \quad q_k = p_k/(1-\alpha_k p_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 24.9 доказывается подобно теореме 24.1: достаточную часть можно получить, последовательно применяя одномерную теорему Харди—Литтлвуда 5.3 по каждой переменной, а в необходимой части следует воспользоваться оператором растяжения.

Можно без особых трудностей распространить различные результаты для одномерных операторов типа потенциала, изложенные в § 12, на случай операторов типа полипотенциала. Мы остановимся вкратце только на связи операторов $\mathcal{H}^{\alpha}$, $\mathcal{H}^{\alpha}$ друг с другом с помощью полисингулярного оператора. В одномерном случае такая связь давалась тождествами (12.6), (12.7). С помощью этих одномерных тождеств нетрудно получить, что для полипотенциалов $\mathcal{H}^{\alpha}$, $\mathcal{H}^{\alpha}$ справедливы равенства

$$\mathcal{H}^{\alpha}\varphi = S\mathcal{H}^{\alpha}\varphi, \quad \mathcal{H}^{\alpha}\varphi = -S\mathcal{H}^{\alpha}\varphi, \tag{24.69}$$

где S — полисингулярный оператор:

$$S\varphi = \int\limits_{R^n}\frac{\varphi(t)\,dt}{\prod\limits_{k=1}^{n}(t_k - x_k)}$$

(понимаемый в смысле главного значения по каждой переменной). Предполагается, что $\alpha_k > 0$. В случае, когда $\alpha_k = 0$ для некоторых k, полипотенциалы и полисингулярный оператор применяются только по тем переменным, для которых $\alpha_n \neq 0$.

Легко доказывается также на основании равенств (12.19)—(12.21), что

$$\mathcal{H}^{\alpha}\mathcal{H}^{\beta} = \mathcal{H}^{\alpha+\beta}, \quad \mathcal{H}^{\alpha}\mathcal{H}^{\beta} = -\mathcal{H}^{\alpha+\beta}, \quad \mathcal{H}^{\alpha}\mathcal{H}^{\beta} = \mathcal{H}^{\alpha+\beta}, \tag{24.70}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.

Преобразование Фурье полипотенциала $\mathcal{H}^{\alpha}\varphi$ вычисляется в силу (12.23) по формуле

$$\widehat{(\mathcal{H}^{\alpha}\varphi)}(x) = \prod_{k=1}^{n}|x_k|^{-\alpha_k}\hat{\varphi}(x) \tag{24.71}$$

(ср. с (24.47), (24.48)).

Можно ввести также операторы типа бесселевых полипотенциалов:

$$G^{\alpha}\varphi = \int\limits_{R^n}\prod_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}(x_k - t_k)\,\varphi(t)\,dt, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{24.72}$$

(см. (18.61)), где ядро $G_{\alpha_k}(x_k)$ имеет своим образом Фурье по переменной x_k функцию $(1+|x_k|^2)^{-\alpha_k/2}$. Удобна еще модификация полипотенциала (24.72) в духе (18.64), (18.65):

$$G_{+}^{\alpha}\varphi = \int\limits_{R^n_{+\ldots+}}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-t_k}}{\Gamma(\alpha_k)\,t_k^{1-\alpha_k}}\,\varphi(x-t)\,dt. \tag{24.73}$$

Можно рассмотреть пространства функций

$$G^{\alpha}(L_p), \quad G^{\alpha}_{+}(L_p), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

представимых в виде (24.72), (24.73) соответственно от функций $\varphi \in L_p(R^n)$. Нетрудно вывести из следствия теоремы 1.6 (с учетом формул (18.62), (18.63)), что

$$G^{\alpha}(L_p) = G^{\alpha}_{+}(L_p), \quad 1 < p < \infty. \tag{24.74}$$

Пространства $G^{\alpha}(L_p)$, $G^{\alpha}_{+}(L_p)$ могут быть охарактеризованы в терминах существования (и принадлежности L_p) смешанных дробных производных и потому имеют название пространств функций с доминирующей смешанной производной (см. об этом в § 29, п. 2°, 24.4).

§ 25. РИССОВО ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Изучим дробное интегродифференцирование функций многих переменных, которое является дробной степенью $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа. Идея введения такой степени прозрачна в образах Фурье: $(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}|x|^{\alpha}\mathcal{F}f$ (на достаточно хороших функциях f, см. равенство (25.6) ниже). Построения этого параграфа нацелены на явную реализацию этой дробной степени и на изложение ее свойств. Отрицательные степени $(-\Delta)^{-\alpha/2}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, будут потенциалами Рисса

$$I^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{R^n} \frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad \alpha \neq n,\ n+2,\ n+4,\ \ldots, \tag{25.1}$$

которые рассмотрены нами в одномерном случае в § 12; о нормировочной постоянной $\gamma_n(\alpha)$ см. далее. Положительные степени оператора Лапласа будут реализованы в виде так называемых гиперсингулярных интегралов $\mathbf{D}^{\alpha}f$, см. (25.59). Операцию

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}|x|^{-\alpha}\mathcal{F}f = \begin{cases} I^{\alpha}f, & \operatorname{Re}\alpha > 0, \\ \mathbf{D}^{-\alpha}f, & \operatorname{Re}\alpha < 0 \end{cases} \tag{25.2}$$

(точные определения см. ниже) и будем называть *(дробным) риссовым интегродифференцированием.*

Удобным и естественным средством исследования операции риссова интегродифференцирования служит преобразование Фурье.

1°. Предварительные сведения. Пусть

$$f(x) = (\mathcal{F}\varphi)(x) = \hat{\varphi}(x) = \int_{R^n} \varphi(y)\, e^{ix\cdot y}dy \tag{25.3}$$

есть преобразование Фурье функции $\varphi(y) = \varphi(y_1, \ldots, y_n)$, а

$$\varphi(x) = (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(y) e^{-ix\cdot y}dy$$

— обратное преобразование Фурье. Хорошо известно, что

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^j f) = (-ix)^j \hat{f}(x), \quad j = (j_1, \ldots, j_n), \tag{25.4}$$

так что для оператора Лапласа Δ имеем

$$\mathcal{F}(\Delta\varphi) = -|x|^2 \mathcal{F}\varphi \tag{25.5}$$

или

$$-\Delta\varphi = \mathcal{F}^{-1}|x|^2 \mathcal{F}\varphi. \tag{25.6}$$

Хорошо известно также, что для свертки

$$f * \varphi = \int_{R^n} f(x-y)\,\varphi(y)\,dy \tag{25.7}$$

преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(f * \varphi) = \hat{f} \cdot \hat{\varphi}. \tag{25.8}$$

Поэтому, рассматривая потенциал Рисса (25.1), мы так или иначе заинтересованы в том, чтобы знать преобразование Фурье функции $|x|^{\alpha-n}$. Оно будет вычислено в п. 2° с помощью формулы Бохнера для преобразования Фурье радиальных функций, которая содержится в приводимой ниже лемме. Отметим, что *радиальной функцией* называется функция $\varphi=\varphi(|x|)$, зависящая только от расстояния $|x|$. Воспользуемся при доказательстве следующей ниже леммы известной формулой математического анализа:

$$\int_{S_{n-1}} f(x\cdot\sigma)\,d\sigma = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} f(|x|t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt, \tag{25.9}$$

где S_{n-1} — единичная сфера в R^n с центром в начале координат, $d\sigma$ — элемент площади на S_{n-1} (ее доказательство см., например, в книге Г. М. Фихтенгольца [1, с. 405—407] или в книге С. Г. Самко [31, с. 42—43]).

Лемма 25.1. *Преобразование Фурье радиальной функции есть также радиальная функция, при этом справедлива формула*

$$\int_{|y|<N} e^{ix\cdot y}\varphi(|y|)\,dy = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{(n-2)/2}} \int_0^N \varphi(\rho)\,\rho^{n/2}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|x|)\,d\rho \tag{25.10}$$

для любой локально суммируемой функции $\varphi(\rho)$ *и формула*

$$\int_{R^n} e^{ix\cdot y}\varphi(|y|)\,dy = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{(n-2)/2}} \int_0^\infty \varphi(\rho)\,\rho^{n/2}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|x|)\,d\rho \tag{25.11}$$

для любой функции $\varphi(\rho)$, *такой, что*

$$\int_0^\infty \rho^{n-1}(1+\rho)^{(1-n)/2}|\varphi(\rho)|\,d\rho < \infty \tag{25.12}$$

при условии, что интеграл в левой части в (25.11) понимается как условно сходящийся (он абсолютно сходится, если $\int_0^\infty \rho^{n-1}|\varphi(\rho)|\,d\rho<\infty$).

Доказательство. Переходя к сферическим координатам в левой части в (25.10), имеем

$$\int_{|y|<N} e^{ix\cdot y}\varphi(|y|)\,dy = \int_0^N \varphi(\rho)\,\rho^{n-1}d\rho \int_{S_{n-1}} e^{i\rho x\cdot\sigma}d\sigma.$$

В силу формулы (25.9) и формулы Пуассона (2.52) получаем равенство

$$\int_{S_{n-1}} e^{ix\cdot\sigma}d\sigma = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|), \tag{25.13}$$

что приводит к (25.10). Так как $|J_\nu(\rho)| \leqslant c/\sqrt{\rho}$ при $\rho \to \infty$, то для функций, удовлетворяющих условию (25.12), существует предел при $N \to \infty$ правой части в (25.10), что и дает (25.11). Лемма доказана.

В данной книге небезынтересно отметить, что n-мерное преобразование Фурье радиальной функции может быть выражено через одномерное преобразование Фурье с помощью дробного (вообще говоря) интегродифференцирования. С этой целью введем для радиальной функции $\varphi(|x|)$ обозначение

$$(\mathcal{F}_* \varphi)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irt} \varphi(t)\, dt, \quad \varphi(-t) \equiv \varphi(t).$$

Справедлива

Лемма 25.1′. *При условии (25.12) справедливы формулы*

$$\hat{\varphi}(x) = \pi^{(n-1)/2} (\mathcal{F}_* I_{-;\, x^2}^{(n-1)/2} \varphi)(r), \quad r = |x|, \tag{25.14}$$

$$\varphi(r) = \pi^{\frac{1-n}{2}} (\mathcal{D}_{-;\, x^2}^{(n-1)/2} \mathcal{F}_*^{-1} f)(r), \tag{25.14′}$$

где $f(r) = \hat{\varphi}(x)|_{|x|=r}$, $\hat{\varphi}(x)$ *означает* n*-мерное преобразование Фурье функции* $\varphi(|x|)$ *по* x, *а* $\mathcal{D}_{-;\, x^2}^{(n-1)/2}$, $I_{-;\, x^2}^{(n-1)/2}$ *— интегродифференцирование (18.38), (18.40)* $\left(\mathcal{D}_{-;\, x^2}^{(n-1)/2} \equiv \left(-\frac{d}{dr^2}\right)^{(n-1)/2}\right.$ *при нечетном* n*).*

Доказательство. Так как, согласно лемме 25.1, $\hat{\varphi}(x)$ зависит только от радиуса $\hat{\varphi}(x) = f(|x|)$, достаточно рассмотреть $\varphi(x)$ только для $x = (|x|, 0, \ldots, 0)$. Для таких x имеем

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|\xi_1} d\xi_1 \int_{R^{n-1}} \varphi(|\xi|)\, d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Переходя к полярным координатам во внутреннем интеграле, имеем

$$\hat{\varphi}(x) = |S_{n-2}| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|\xi_1} d\xi_1 \int_0^{\infty} \varphi\left(\sqrt{\rho^2 + \xi_1^2}\right) \rho^{n-2} d\rho =$$

$$= |S_{n-2}| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|\xi_1} d\xi_1 \int_{|\xi_1|}^{\infty} t\varphi(t)(t^2 - \xi_1^2)^{(n-3)/2} dt.$$

Отсюда в соответствии с обозначением (18.38) и получается равенство (25.14). Из него обращением одномерного преобразования Фурье $\mathcal{F}_*$ и интеграла $I_{-;\, x^2}^{(n-1)/2}$ получается (25.14′).

Нам понадобится пространство Лизоркина основных функций, приспособленное к риссову интегродифференцированию. В отличие от такого пространства для частных дробных лиувиллевских производных (см. § 24, п. 9°) здесь достаточно требовать обращения в нуль образов Фурье не на координатных плоскостях, а только в одной точке — начале координат. Положим

$$\Psi = \{\psi(x) : \psi \in S(R^n), \quad (\mathcal{D}^j \psi)(0) = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{25.15}$$

(ср. с определением такого класса в § 24, п. 9°, который, очевидно, существенно уже класса (25.15)). Примером функции класса (25.15) служит функция $\psi(x) = \exp(-|x|^2 - |x|^{-2})$. Рассмотрим теперь класс Ф, двойственный к (25.15), состоящий из преобразований Фурье функций из Ψ:

$$\Phi = \mathcal{F}(\Psi) = \{\varphi(x) : \varphi \in S(R^n), \quad \varphi = \hat{\psi}, \quad \psi \in \Psi\}. \tag{25.16}$$

Он допускает простое описание: класс Φ состоит из тех и только тех шварцевых функций φ, которые ортогональны многочленам:

$$\int_{R^n} x^j \varphi(x)\,dx = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \ldots \tag{25.17}$$

Действительно, преобразование Фурье переводит, как известно (см., например, книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, с. 208]), пространство S на себя и $\int_{R^n} x^j \varphi(x)\,dx = i^{-|j|} \int_{R^n} (ix)^j \varphi(x) e^{ix\cdot 0} dx = i^{-|j|} (\mathcal{D}^j \hat{\varphi})(0) = 0$ согласно (25.15).

Таким образом, Φ есть класс шварцевых функций, все моменты (25.17) которых равны нулю.

В Φ можно ввести топологию пространства $S(R^n)$, относительно которой Φ — полное пространство.

Ниже будем рассматривать обобщенные функции над Φ (и над Ψ) для обоснования совершаемых действий. Напомним, что преобразованием Фурье обобщенной функции $f(\in\Phi')$ называется функционал $\hat{f} = \mathcal{F}f$, действующий по правилу

$$(\hat{f}, \psi) = (f, \hat{\psi}), \quad \psi \in \Psi. \tag{25.18}$$

Это определение корректно, так как $F(\Psi) = \Phi$ и преобразование Фурье является непрерывной операцией в топологии шварцева пространства $S(R^n)$ (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2, с. 208]). Если g — функционал из Ψ', то аналогично равенство

$$(\hat{g}, \varphi) = (g, \hat{\varphi}), \quad \varphi \in \Phi, \tag{25.18'}$$

служит определением преобразования Фурье функционала $g \in \Psi'$.

Функция $|x|^{-\alpha}$ как элемент пространства Ψ' порождает регулярный функционал $(|x|^{-\alpha}, \psi) = \int_{R^n} |x|^{-\alpha} \psi(x)\,dx$ при всех $\alpha \in C^1$ ввиду того, что $(\mathcal{D}^j\psi)(0) = 0$, $|j| = 0, 1, 2, \ldots$ Но уже как элемент пространства S' или Φ' — это нерегулярный функционал при $\operatorname{Re}\alpha \geqslant n$. Для таких α он будет пониматься в смысле регуляризации, получаемой аналитическим продолжением функционала $(|x|^{-\alpha}, \psi)$ из полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha < n$. Аналитическое продолжение осуществляется равенством

$$\left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \sum_{|j|\leqslant m} (\mathcal{D}^j\varphi)(0)\, x^j/j!}{|x|^\alpha}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)\,dx}{|x|^\alpha} + \sum_{i=0}^{[m/2]} \frac{c_i}{n-\alpha+2i} (\Delta^i\varphi)(0), \quad \alpha - n \neq 0, 2, 4, \ldots, \tag{25.19}$$

где $\varphi \in S(R^n)$, $m > \operatorname{Re}\alpha - n - 1$ и обозначено $c_i = \pi^{n/2} 2^{1-2i} [i!\,\Gamma(i+n/2)]^{-1}$. Последнее равенство дает явную реализацию аналитического продолжения в полуплоскость $\operatorname{Re}\alpha < m+n+1$ функционала $(|x|^{-\alpha}, \varphi)$. Мы уже столкнулись с регуляризацией типа (25.19) в одномерном случае, см. (5.68).

Формула (25.19) выводится стандартным путем — вычитанием отрезка ряда Тейлора — с учетом того, что

$$\sum_{|j|\leqslant m} \frac{1}{j!} (\mathcal{D}^j\varphi)(0) \int_{|x|<1} x^j |x|^{-\alpha} dx = \sum_{i=0}^{[m/2]} \frac{c_i}{n-\alpha+2i} (\Delta^i\varphi)(0).$$

Последнее получается непосредственными преобразованиями с помощью равенства

$$\Delta^m = \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j!} \mathcal{D}^{2j}. \tag{25.20}$$

В исключенных в (25.19) случаях $\alpha - n = 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, полагаем по определению

$$\left(\frac{1}{|x|^{n+2k}}, \varphi\right) = \lim_{\alpha \to n+2k} \left[\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}, \varphi\right) + \frac{c_k}{\alpha - n - 2k} (\Delta^k \varphi)(0)\right]. \tag{25.21}$$

Регуляризацию (25.19) можно записать более компактно при выборе $m = [\operatorname{Re}\alpha] - n$ (при $\operatorname{Re}\alpha > n$):

$$\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}, \varphi\right) = \int_{R^n} \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{|j| \leqslant [\operatorname{Re}\alpha]-n} \frac{1}{j!} (\mathcal{D}^j \varphi)(0)\, x^j}{|x|^{\alpha}}\, dx, \tag{25.22}$$

однако при этом приходится исключить целые значения $\operatorname{Re}\alpha = n,\ n+1,\ n+2, \ldots$

Замечание 25.1. Определенный равенством (25.19) функционал аналитичен по параметру α для всех значений $\alpha \in C^1$ (за счет возможности выбрать m как угодно большим; очевидно, что правая часть в (25.19) не зависит от этого выбора), кроме точек $\alpha = \alpha_k = n + 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ В точках же α_k функционал (25.19) имеет простой полюс, допуская в окрестности точек α_k представление

$$\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}, \varphi\right) = (g_{\alpha}, \varphi) - \frac{c_k}{\alpha - \alpha_k} (\Delta^k \varphi)(0), \tag{25.23}$$

где (g_{α}, φ) — функция, аналитическая в окрестности точки α_k, при этом

$$\lim_{\alpha \to \alpha_k} (g_{\alpha}, \varphi) = \left(\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \varphi\right). \tag{25.24}$$

2°. Потенциал Рисса и его преобразование Фурье. Инвариантное пространство Лизоркина. Рассуждая пока формально, видим, что операция (25.2) должна реализовываться как свертка (в обобщенном смысле) функции f с функцией $\mathcal{F}^{-1}(|x|^{-\alpha})$. Займемся вычислением этой функции, понимая преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. В качестве основного класса здесь удобно использовать пространство Лизоркина (25.16). Справедлива следующая

Лемма 25.2. *Преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$, понимаемое в смысле (25.18′), вычисляется по формуле*

$$\mathcal{F}(|x|^{-\alpha}) = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha \neq n + 2k, \quad \alpha \neq -2k, \\ |x|^{\alpha-n} \ln \dfrac{1}{|x|}, & \alpha = n + 2k, \\ (-\Delta)^{-\alpha/2}\delta, & \alpha = -2k, \end{cases} \tag{25.25}$$

где $\delta = \delta(x)$ — дельта-функция, $k = 0, 1, 2, \ldots$, множитель $\gamma_n(\alpha)$ равен:

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^{\alpha}\pi^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\dfrac{n-\alpha}{2}\right), & \alpha \neq n + 2k, \quad \alpha \neq -2k, \\ 1, & \alpha = -2k, \\ (-1)^{(n-\alpha)/2}\, \pi^{n/2} 2^{\alpha-1} \left[\dfrac{\alpha - n}{2}\right]! \, \Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right), & \alpha = n + 2k. \end{cases} \tag{25.26}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\alpha < n$. Тогда $|x|^{-\alpha}$ — локально суммируемая функция. Воспользуемся для вычисления ее преобразования Фурье формулой Бохнера (25.11). Считаем пока, что $(n+1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$, так что тогда для $\varphi(\rho) = \rho^{-\alpha}$ условие (25.12) выполнено. Формула (25.11) дает $\mathcal{F}(|x|^{-\alpha}) = |x|^{\alpha-n} J$, где $J = (2\pi)^{n/2} \int\limits_0^\infty \rho^{-\alpha+n/2} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho)\, d\rho$.

Справедлива формула (интеграл Вебера)

$$\int\limits_0^\infty \rho^\beta J_\nu(\rho)\, d\rho = 2^\beta \Gamma\left(\frac{\nu+\beta+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu-\beta+1}{2}\right) \tag{25.27}$$

(получается подстановкой интеграла Пуассона (2.52) в левую часть в (25.27) с последующей перестановкой порядка интегрирования). Поэтому $J = (2\pi)^{n/2} 2^{-\alpha+n/2} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, т. е. мы получили первую строку из (25.25) при $(n+1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Для остальных значений α преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$ уже будет пониматься в смысле (25.18′). В соответствии с (25.18′) нужно показать, что

$$\frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} \left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \hat{\varphi}\right), \quad \varphi \in \Phi, \quad \alpha \neq n+2k, \quad \alpha \neq -2k. \tag{25.28}$$

В силу только что доказанного равенство (25.28) выполняется при $(n+1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Левая часть в (25.28) понимается в смысле (25.19) при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$. Правая часть определена и аналитична при всех $\alpha \in C^1$, так как $\hat{\varphi} \in \Psi$. Левая часть аналитична при всех $\alpha \in C^1$, кроме точек $\alpha = -2k$ и $\alpha = n+2k$, где имеет устранимую особенность: в первой серии точек $(|x|^{\alpha-n}, \varphi)$ имеет полюс, погашаемый нулем функции $1/\gamma_n(\alpha)$, а во второй серии точек — нуль в силу (25.17), погашаемый нулем функции $\gamma_n(\alpha)$. Поэтому в силу теоремы единственности аналитических функций выполнимость равенства (25.28) следует из его выполнимости при $(n+1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

Остались случаи $\alpha = -2k$, $\alpha = n+2k$, отвечающие устранимой особенности левой части в (25.28). Первый случай немедленно следует из (25.4). Для рассмотрения значений $\alpha = \alpha_k = n+2k$ перепишем (25.28) для α в окрестности точек α_k следующим образом: $(\alpha - \alpha_k)(|x|^{-\alpha}, \hat{\varphi}) = (2\pi)^n \times$ $\times a(\alpha)(|x|^{\alpha-n}, \varphi)$, где $a(\alpha) = (\alpha - \alpha_k)/\gamma_n(\alpha)$. Дифференцируя это равенство по α, получаем

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha-\alpha_k}{|x|^\alpha}, \hat{\varphi}\right) = (2\pi)^n \left(\frac{a'(\alpha) + a(\alpha)\ln|x|}{|x|^{n-\alpha}}, \varphi\right). \tag{25.29}$$

Ввиду представления (25.23) и свойства непрерывности (25.24) имеем $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha-\alpha_k}{|x|^\alpha}, \hat{\varphi}\right) = (g_\alpha, \hat{\varphi}) + (\alpha - \alpha_k)\frac{d}{d\alpha}(g_\alpha, \hat{\varphi}) \to \left(\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \hat{\varphi}\right)$ при $\alpha \to \alpha_k$. Тогда из (25.29)

$$\left(\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \hat{\varphi}\right) = (2\pi)^k a(\alpha_k) \left(\frac{\ln|x|}{|x|^{n-\alpha_k}}, \varphi\right) \tag{25.30}$$

с учетом того, что $(|x|^{\alpha_k - n}, \varphi) = 0$ в силу (25.17). Равенство (25.30) и дает вторую строчку в (25.25). Значение постоянной в виде $a(\alpha_k) = -[\gamma_n(\alpha_k)]^{-1}$ получается несложными преобразованиями. Лемма доказана.

Замечание 25.2. Если в (25.25) преобразование Фурье понимать в смысле обобщенных функций не над $\Phi = \Phi(R^n)$, а над пространством

Шварца $S(R^n)$, то в (25.25) следует заменить $\ln\frac{1}{|x|}$ на $\ln\frac{1}{|x|}+d_k$, где

$$d_k = \gamma_n(\alpha_k)\lim_{\alpha\to\alpha_k}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\alpha-\alpha_k}{\gamma_n(\alpha)}\right] =$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\left[\Gamma'(1) + \Gamma'\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\right], \quad \alpha_k = n+2k,$$

что легко усматривается из действий в (25.29), (25.30).

Таким образом, операция $\mathcal{F}^{-1}|x|^{-\alpha}\mathcal{F}$ должна реализовываться как свертка с функцией (25.25). При $\operatorname{Re}\alpha>0$ эта функция локально суммируема и свертка с нею есть потенциал Рисса (25.1) за исключением значений $\alpha=n,\ n+2,\ n+4,\ \ldots$ В исключенных случаях нужно, согласно (25.25), ввести логарифмический множитель. Мы определим, таким образом, риссов потенциал при всех α, $\operatorname{Re}\alpha>0$, как свертку

$$I^\alpha\varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{R^n} k_\alpha(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{25.31}$$

где

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha-n\neq 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \\ |x|^{\alpha-n}\ln\dfrac{1}{|x|}, & \alpha-n=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \end{cases} \tag{25.32}$$

и нормировочный множитель дается равенствами (25.26). Функция $k_\alpha(x)$ называется *риссовым ядром*.

Если в интеграле $I^\alpha\varphi = [\gamma_n(\alpha)]^{-1}\int_{R^n}|y|^{\alpha-n}\varphi(x-y)\,dy$, $\alpha-n\neq 0,\ 2,\ 4,\ \ldots$, перейти к полярным координатам, получим

$$I^\alpha\varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{S_{n-1}} d\sigma\int_0^\infty \frac{\varphi(x-\xi\sigma)}{\xi^{1-\alpha}}\,d\xi, \tag{25.33}$$

т. е. потенциал Рисса можно интерпретировать как результат дробного интегрирования порядка α в направлении вектора σ (см. (24.39)) с последующим интегрированием по σ. В обозначении (24.39) равенство (25.33) имеет вид

$$I^\alpha\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2\pi^{(n+1)/2}}\int_{S_{n-1}}(I_\sigma^\alpha\varphi)(x)\,d\sigma. \tag{25.34}$$

Преобразование Фурье риссова потенциала $I^\alpha\varphi$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, сводится к делению на $|x|^\alpha$:

$$\mathcal{F}(I^\alpha\varphi) = \frac{1}{|x|^\alpha}\hat{\varphi}(x), \tag{25.35}$$

по крайней мере, для функций $\varphi(x)\in\Phi$. Обоснование этого фактически дано в лемме 25.2. Действительно, (25.35) равносильно равенству

$$\int_{R^n} k_\alpha(y)\,\varphi(x+y)\,dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{ix\cdot y}\frac{\hat{\varphi}(y)}{|y|^\alpha}\,dy, \quad \varphi\in\Phi, \tag{25.36}$$

что доказано в лемме 25.2 при $x=0$ (см. равенство (25.28)) и вытекает из (25.28) в силу инвариантности Φ относительно сдвига.

Из (25.35) заключаем, что

$$\Delta I^{\alpha}\varphi = -I^{\alpha-2}\varphi, \quad \varphi\in\Phi, \quad \operatorname{Re}\alpha>2.$$

Теорема 25.1. *Пространство Лизоркина Φ инвариантно относительно риссова потенциала I^{α}, причем $I^{\alpha}(\Phi)=\Phi$ и*

$$I^{\alpha}I^{\beta}\varphi = I^{\alpha+\beta}\varphi, \quad \varphi\in\Phi, \quad \operatorname{Re}\alpha>0, \quad \operatorname{Re}\beta>0. \tag{25.37}$$

Доказательство. Инвариантность пространства Φ видна из (25.35) или (25.36): так как $|y|^{-\alpha}\hat{\varphi}(y)\in\Psi$ при любом α для $\varphi(y)\in\Phi$, то правая часть в (25.36) принадлежит пространству Φ, т. е. $I^{\alpha}(\Phi)\subseteq\Phi$. Так как любая функция класса Ψ может быть представлена в виде $\psi(x) = |x|^{-\alpha}\psi_1(x)$, где $\psi_1(x)\in\Psi$, то $I^{\alpha}(\Phi)=\Phi$. Полугрупповое свойство (25.37) следует из (25.35).

Замечание 25.3. Для функций $\varphi(x)\in S(R^n)$ потенциал Рисса не обязан быстро убывать на бесконечности. Так, если $\varphi(x)\geqslant 0$ и $\varphi(x)\geqslant A>0$, например, при $|x|<1$, то $(I^{\alpha}\varphi)(x)\geqslant c|x|^{\alpha-n}$ при $|x|\to\infty$ (см. по этому поводу (7.8) в одномерном случае). Действительно, $(I^{\alpha}\varphi)(x)\geqslant A[\gamma_n(\alpha)]^{-1}\int\limits_{|y|<1}|x-y|^{\alpha-n}dy$. Переходя здесь к полярным координатам, получаем $(I^{\alpha}\varphi)(x)\geqslant c\int\limits_{S_{n-1}}d\sigma\int\limits_0^1\rho^{n-1}(\rho^2-2\rho\sigma\cdot x+|x|^2)^{(\alpha-n)/2}d\rho\geqslant\frac{c}{2}\times$

$$\times\int\limits_{S_{n-1}}d\sigma\int\limits_0^1\rho^{n-1}(\rho^2+|x|^2)^{(\alpha-n)/2}d\rho\geqslant c_1|x|^{\alpha-n}.$$

Замечание 25.4. Выбор класса Лизоркина Φ для записи полугруппового свойства (25.37) при всех α, β с $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ существен. Именно равенство (25.37) на функциях $\varphi(x)$ из класса Шварца $S(R^n)$ имеет смысл ввиду замечания 25.3 при ограничении $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<n$.

Отметим, что из полугруппового свойства (25.37), переставляя порядок интегрирования в левой части, получаем равенство

$$\int\limits_{R^n}|e-y|^{\alpha-n}|y|^{\beta-n}dy = \gamma_n(\alpha)\gamma_n(\beta)/\gamma_n(\alpha+\beta), \quad \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<n, \tag{25.38}$$

для любого единичного вектора e, $|e|=1$. Отметим еще формулу

$$I^{\alpha}(e^{ia\cdot y}) = |a|^{-\alpha}e^{ia\cdot x}, \quad a=(a_1,\ \ldots,\ a_n). \tag{25.39}$$

Она является перефразировкой утверждения $\hat{k}_{\alpha}(a)=|a|^{-\alpha}$. Потенциал Рисса от $e^{ia\cdot y}$ является условно сходящимся интегралом при $0<\alpha<(n+1)/2$. В случае $\alpha\geqslant(n+1)/2$ его следует понимать в смысле аналитического продолжения по α.

3°. Действие оператора I^{α} в пространствах $L_p(R^n)$ и $L_p(R^n;\rho)$. Прежде всего отмечаем, что оператор I^{α} определен на функциях $\varphi(y)\in L_p(R^n)$ при $1\leqslant p<n/\alpha$, $0<\alpha<n$. Это проверяется подобно одномерному случаю (см. § 5, п. 1°):

$$\gamma_n(\alpha)I^{\alpha}\varphi = \int\limits_{|y|<1}|y|^{\alpha-n}\varphi(x-y)\,dy + \int\limits_{|y|>1}|y|^{\alpha-n}\varphi(x-y)\,dy.$$

Здесь существование почти для всех $x\in R^n$ первого слагаемого можно установить, показав с помощью неравенства Минковского, что оно при-

надлежит локально L_p, а второе существует для всех x при $1 \leqslant p < n/\alpha$ в силу неравенства Гельдера.

Обобщением теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 на случай многомерного риссова интегрирования I^α служит следующая теорема Соболева.

Теорема 25.2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\alpha > 0$. *Оператор* I^α *ограничен из* $L_p(R^n)$ *в* $L_q(R^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}. \tag{25.40}$$

Доказательство этой теоремы мы опускаем так же, как и в одномерном случае, равно как и доказательство других теорем из этого пункта. В § 29, п. 1° можно найти соответствующие литературные ссылки.

Показатель $q = np/(n-\alpha p)$ в (25.40) называется *предельным показателем Соболева*. Ниже, в § 26, п. 7°, рассмотрим риссов потенциал от функций $\varphi \in L_p(R^n)$ и при $p \geqslant n/\alpha$, понимая потенциал Рисса в обобщенном смысле.

Пусть $L_p(R^n; \rho)$ — весовое пространство функций с конечной нормой $\|f\|_{L_p(R^n;\,\rho)} = \left\{ \int\limits_{R^n} \rho(x) |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$, где $\rho(x)$ — неотрицательная функция. Справедливо следующее обобщение теоремы Соболева 25.2 на случай веса, являющегося степенью расстояния $|x|$.

Теорема 25.3. *Оператор* I^α *ограничен из* $L_p(R^n; |x|^\gamma)$ *в* $L_r(R^n; |x|^\mu)$, *если*

$$\alpha > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 < r < \infty, \quad \alpha p - n < \gamma < n(p-1),$$

$$\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{p}, \quad \frac{\mu + n}{r} = \frac{\gamma + n}{p} - \alpha. \tag{25.41}$$

Эта теорема содержит (в достаточной части) теорему 25.2 при $\gamma = 0$, $\mu = 0$ и $r = np(n-\alpha p)^{-1}$. Отметим также полезный частный случай $\gamma = 0$, $\mu = -\alpha p$, $r = p$ в теореме 25.3:

$$\int\limits_{R^n} |x|^{-\alpha p} |(I^\alpha \varphi)(x)|^p dx \leqslant A \|\varphi\|_p^p, \quad 1 < p < n/\alpha \tag{25.42}$$

(обобщение неравенства Харди (5.45)).

В случае $r = np(n-\alpha p)^{-1}$ имеется также распространение теоремы 25.3 на веса общей природы. Именно пусть вес $\rho(x)$ удовлетворяет так называемому *условию Макенхоупта—Видена*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \rho^{q/p}(x)\, dx \right)^{p/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \rho^{1/(1-p)}(x)\, dx \right)^{p-1} \leqslant c < \infty, \tag{25.43}$$

где Q — произвольный n-мерный куб, $|Q|$ — его мера. Справедлива следующая

Теорема 25.4. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $q = np/(n-\alpha p)$. *Для того чтобы оператор* I^α *был ограничен из* $L_p(R^n; \rho)$ *в* $L_q(R^n; \rho^{q/p})$, *необходимо и достаточно, чтобы вес* $\rho(x)$ *удовлетворял условию (25.43) с* $q = np/(n-\alpha p)$.

Мы не приводим доказательства теорем 25.3 и 25.4, см. по этому поводу литературные ссылки в § 29, п. 1°.

В случае $p = 1$ утверждение теоремы Соболева не имеет места, но выполняется более слабое утверждение — так называемая оценка слабого типа. Именно пусть $\lambda_f(t)$ — функция распределения функции $f(x)$, $x \in R^n$:

$$\lambda_f(t) = \operatorname{mes}\{x : |f(x)| > t\}, \quad t > 0. \tag{25.44}$$

Очевидно, $\lambda_f(t) \leqslant t^{-p} \|f\|_p^p$, $\|f\|_p^p = \int\limits_{R^n} |f(x)|^p dx$, так что оценка

$$t\lambda_{Tf}^{1/q}(t) \leqslant c\|f\|_p \tag{25.45}$$

является более слабой, чем оценка $\|Tf\|_q \leqslant c\|f\|_p$, дающая ограниченность оператора T из L_p в L_q. В терминах (25.44), (25.45) и заменяется информация о потенциале Рисса в теореме Соболева. Именно справедлива оценка

$$\operatorname{mes}\{x : |(I^\alpha \varphi)(x)| > t\} \leqslant \left(\frac{c}{t}\|\varphi\|_1\right)^q, \quad q = \frac{n}{n-\alpha}, \tag{25.46}$$

где $0 < \alpha < n$ и c не зависит от $t > 0$.

Отметим еще действие потенциала Рисса в классах гельдеровских функций $f(x)$, $x \in \dot{R}^n$, где $\dot{R}^n$ — пространство R^n, компактифицированное одной бесконечно удаленной точкой. Для существования потенциала Рисса $I^\alpha\varphi$ от гельдеровских функций требуется обращение $\varphi(x)$ в нуль при $x = \infty$, и нам будет удобно добиться этого за счет веса. Именно пусть

$$H^\lambda(\dot{R}^n;\ \rho) = \{f(x) : \rho(x) f(x) \in H^\lambda(\dot{R}^n)\},\ 0 < \lambda < 1,$$

где (ср. с (1.5), (1.6))

$$H^\lambda(\dot{R}^n) = \left\{f(x) : f(x) \in C(\dot{R}^n),\ |f(x+h) - f(x)| \leqslant \frac{c|h|^\lambda}{(1+|x|)^\lambda (1+|x+h|)^\lambda}\right\}.$$

В пространстве $H^\lambda(\dot{R}^n;\ \rho)$ естественным образом вводится норма, превращающая его в банахово пространство. Справедлива следующая

Теорема 25.5. *Оператор I^α, $0 < \alpha < 1$, изоморфно отображает пространство $H^\lambda(\dot{R}^n;\ (1+|x|^2)^{(n+\alpha)/2})$ на пространство $H^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^n;\ (1+|x|^2)^{(n-\alpha)/2})$, $\lambda + \alpha < 1$.*

Доказательство теоремы, получаемое отображением с помощью стереографической проекции пространства $\dot{R}^n$ на единичную сферу $S_n \subset R^{n+1}$, опустим. Отметим лишь, что при этом отображении потенциал Рисса $I^\alpha\varphi$ переходит (с точностью до веса) в аналогичный потенциал по сфере, т. е. по компактному множеству, где гельдеровость получается прямыми оценками (см. работу Б. Г. Вакулова [1]).

В заключение этого пункта отметим простые соотношения, связывающие потенциалы Рисса с одномерными дробными интегралами лиувиллевского типа. Указанная связь осуществляется с помощью *интегралов Пуассона* и *Гаусса—Вейерштрасса,* которые определяются равенствами

$$(P_t\varphi)(x) = \int\limits_{R^n} P(y,\ t)\varphi(x-y)\,dy,\ t > 0, \tag{25.47}$$

$$(W_t\varphi)(x) = \int\limits_{R^n} W(y,\ t)\varphi(x-y)\,dy,\ t > 0. \tag{25.48}$$

Здесь

$$P(x,\ t) = \frac{c_n t}{(|x|^2 + t^2)^{(n+1)/2}},\ c_n = \pi^{-(n+1)/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \tag{25.49}$$

— ядро Пуассона и

$$W(x,\ t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)} \tag{25.50}$$

— ядро Гаусса—Вейерштрасса.

Теорема 25.6. *Для потенциала Рисса $I^\alpha\varphi$, $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 < p < n/\alpha$, имеют место представления*

$$(I^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}(P_t\varphi)(x)\,dt=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{\infty}t^{\frac{\alpha}{2}-1}(W_t\varphi)(x)\,dt. \quad (25.51)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$(P_tI^{\alpha}\varphi)(x)=(I_{-}^{\alpha}(P_\tau\varphi)(x))(t), \quad (25.52)$$

$$(W_tI^{\alpha}\varphi)(x)=(I_{-}^{\alpha/2}(W_\tau\varphi)(x))(t), \quad (25.53)$$

в которых операторы I_{-}^{α}, $I_{-}^{\alpha/2}$ применяются по переменной τ.

Доказательство. Подставляя выражения для $P_t\varphi$ и $W_t\varphi$ в (25.51) и меняя порядок интегрирования, приходим к легко вычисляемым внутренним интегралам и в результате получаем $I^{\alpha}\varphi$. Равенства (25.52), (25.53) выводятся из (25.51) применением операторов P_t, W_t с учетом полугруппового свойства $P_tP_\tau=P_{t+\tau}$, $W_tW_\tau=W_{t+\tau}$.

Заметим, что равенства (25.51)—(25.53) прозрачны в образах Фурье, если учесть, что

$$\hat{P}(\cdot,\ t)=e^{-t|x|}, \quad (25.54)$$

$$\hat{W}(\cdot,\ t)=e^{-t|x|^2} \quad (25.55)$$

(см., например, И. Стейн, Г. Вейс [1]).

Сравнивая (25.51) с лиувиллевским дробным интегралом (5.4) или, более общо, с выражением (5.86) для отрицательной дробной степени оператора, видим, что потенциал Рисса есть реализация формулы (5.86) при выборе оператора Пуассона в качестве полугруппы $T_t\varphi=P_t\varphi$ в (5.86).

4°. Риссово дифференцирование (гиперсингулярный интеграл). Риссово дифференцирование $(-\Delta)^{\alpha/2}f=\mathcal{F}^{-1}|x|^{\alpha}\mathcal{F}f$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, ввиду леммы 25.2 ожидает реализации в виде свертки с обобщенной функцией $|x|^{-\alpha-n}$. Такая свертка, т. е. интеграл с ядром $|x-y|^{-\alpha-n}$, в противоположность потенциалу Рисса имеет порядок особенности больше размерности пространства R^n и будет поэтому называться *гиперсингулярным интегралом.* Такой интеграл расходится, и потому рассматриваемая свертка нуждается в корректном определении. Пусть вначале $0<\alpha<1$ (или $0<\operatorname{Re}\alpha<1$). Сходимость свертки с $|x|^{-n-\alpha}$ можно обеспечить (на достаточно хороших функциях), взяв ее в виде

$$\int_{R^n}\frac{f(y)-f(x)}{|y-x|^{n+\alpha}}\,dy=-\int_{R^n}\frac{f(x)-f(x-y)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy. \quad (25.56)$$

Этот интеграл сходится при $0<\alpha<1$ на дифференцируемых и ограниченных функциях и является многомерным аналогом дробной производной Маршо (5.58). Распространение на случай $\alpha\geqslant 1$ можно дать либо в терминах регуляризации, вычитая отрезок ряда Тейлора подобно (25.19) или (25.22), либо с помощью взятия конечных разностей. Оба подхода мы уже рассматривали в одномерном случае при изучении дробной производной Маршо порядка $\alpha\geqslant 1$, см. (5.68) и (5.80). Для реализации риссова дифференцирования будем использовать подход через конечные разности, более предпочтительный, хотя и равносильный, вообще говоря, первому (см. об этом в случае гладких функций в § 26, п. 5°).

Введем конечные разности $(\Delta_h^lf)(x)$ функции $f(x)$ многих переменных с векторным шагом h. Пусть τ_h — оператор сдвига на вектор h:

$$(\tau_hf)(x)=f(x-h),\ x,\ h\in R^n.$$

Различают *центрированные разности*

$$(\Delta_h^l f)(x) = (\tau_{-\frac{h}{2}} - \tau_{\frac{h}{2}})^l f = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f\left[x + \left(\frac{l}{2} - k\right) h\right] \quad (25.57)$$

(с векторным шагом h и с центром в точке x) и *нецентрированные разности*

$$(\Delta_h^l f)(x) = (E - \tau_h)^l f = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f(x - kh). \quad (25.58)$$

Чтобы не усложнять записей, будем использовать обозначение $(\Delta_h^l f)(x)$ для каждой из этих разностей, оговаривая тип разности в тех случаях, когда это существенно. Мы рассматриваем оба типа разности, так как не всегда можно будет использовать один тип разности (см. ниже § 26, п. 4°).

Итак, реализация операции $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, ожидается в виде *гиперсингулярного интеграла*

$$\mathbf{D}^\alpha f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \quad (25.59)$$

где нормировочный множитель $d_{n,l}(\alpha)$ будет выбран так, что $\mathbf{D}^\alpha f$ не зависит от l, лишь бы $l > \alpha$. Конструкцию

$$\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy \quad (25.60)$$

назовем *усеченным гиперсингулярным интегралом.*

Будет удобно иметь еще обозначение для интеграла (25.59) без нормировочного множителя:

$$T^\alpha f = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \quad l > \alpha. \quad (25.61)$$

Следующий параграф посвящен детальному исследованию гиперсингулярных интегралов (25.59) и более общих конструкций. Здесь же остановимся только на главной мысли о том, что гиперсингулярный интеграл (25.59) и есть риссова производная в том смысле, что

$$\widehat{\mathbf{D}^\alpha f} = |x|^\alpha \hat{f}(x) \quad (25.62)$$

при надлежащем выборе нормировочного множителя $d_{n,l}(\alpha)$ в (25.59). Справедлива следующая

Лемма 25.3. *Преобразование Фурье интеграла $T^\alpha f$ вычисляется по формуле*

$$\mathcal{F}(T^\alpha f) = d_{n,l}(\alpha) |x|^\alpha \hat{f}(x), \quad f \in C_0^\infty, \quad (25.63)$$

где

$$d_{n,l}(\alpha) = \int_{R^n} (1 - e^{it_1})^l |t|^{-n-\alpha}\, dt \quad (25.64)$$

в случае нецентрированной разности $(\Delta_l^l f)(x)$ *и*

$$d_{n,l}(\alpha) = \int_{R^n} (e^{iy_1/2} - e^{-iy_1/2})^l |y|^{-n-\alpha}\, dy = 2^{l-\alpha} i^l \int_{R^n} \sin^l y_1 |y|^{-n-\alpha}\, dy \quad (25.65)$$

в случае центрированной разности.

Доказательство. Пусть $T_\varepsilon^\alpha f$ — усеченный интеграл (25.61), урезанный подобно (25.60). Пусть вначале разность $\Delta_y^l f$ — нецентрированная. Тогда

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon^\alpha f) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha}} \int\limits_{R^n} e^{ix\cdot\eta} f(\eta - ky)\, d\eta =$$

$$= \hat{f}(x) \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int\limits_{|y|>\varepsilon} |y|^{-n-\alpha} e^{ikx\cdot y}\, dy,$$

т. е.

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon^\alpha f) = \hat{f}(x) \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{(1 - e^{ix\cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}}\, dy. \tag{25.66}$$

Нетрудно показать, что здесь возможен предельный переход (например, по норме L_2) при $\varepsilon \to 0$, так что

$$\mathcal{F}(T^\alpha f) = |x|^\alpha \hat{f}(x) \int\limits_{R^n} \frac{(1 - e^{i\xi\cdot x/|x|})^l}{|\xi|^{n+\alpha}}\, d\xi \tag{25.67}$$

(совершили преобразование подобия $y = |x|^{-1}\xi$). Осуществим еще одну замену переменных под знаком интеграла:

$$\xi = \omega_x(\eta), \quad \omega_x(e_1) = \frac{x}{|x|}, \tag{25.68}$$

где $\omega_x(\eta)$ — вращение в R^n, переводящее орт $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ в единичный вектор $x/|x|$. Очевидно, $|\xi| = |\eta|$, $\xi \cdot \frac{x}{|x|} = \eta \cdot e_1 = \eta_1$, так что

$$\int\limits_{R^n} \frac{(1 - e^{i\xi\cdot x/|x|})^l}{|\xi|^{n+\alpha}}\, d\xi = \int\limits_{R^n} \frac{(1 - e^{i\eta_1})^l}{|\eta|^{n+\alpha}}\, d\eta$$

и (25.67) превращается в (25.63), (25.64).

Если же разность центрирована, то аналогичные действия приводят к равенству (25.63) с нормировочной постоянной (25.65). Лемма доказана.

Из равенства (25.63) следует формула (25.62) после деления на $d_{n,l}(\alpha)$, однако здесь требуется осторожность из-за возможного обращения в нуль постоянной $d_{n,l}(\alpha)$ при некоторых α. В случае центрированной разности вопрос решается просто: как видно из (25.65), нормировочная постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ равна нулю для всех α при нечетном l и заведомо отлична от нуля при четном l.

Таким образом, конструкция T^α является тождественным нулем: $T^\alpha f \equiv 0$ в случае центрированной разности нечетного порядка. Следовательно, центрированную разность нужно брать только четного порядка $l = 2, 4, 6, \ldots$, и тогда переход от (25.63) к (25.62) возможен при любых α, $0 < \alpha < l$.

Вопрос о необращении $d_{n,l}(\alpha)$ в нуль в случае нецентрированной разности сложнее и будет рассмотрен ниже в § 26, где проводится подробное исследование гиперсингулярных интегралов. В частности, будет показано, что $d_{n,l}(\alpha)$ как функция параметра α имеет нули в интервале $(0, l)$.

Сформулируем следствие из леммы 25.3.

Следствие. *При выборе нормирующего множителя по формулам (25.64), (25.65) (в случае, если он не обращается в нуль) гиперсингулярный интеграл* $\mathbf{D}^\alpha f$ *не зависит от выбора* l, $l > \alpha$.

В заключение этого пункта отметим примыкающие к (25.51) формулы

$$\mathbf{D}^\alpha f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} (E - P_t)^l f\, dt, \quad 0 < \alpha < l, \tag{25.69}$$

$$\mathbf{D}^\alpha f = \frac{1}{\varkappa\left(\frac{\alpha}{2}, l\right)} \int_0^\infty t^{-1-\frac{\alpha}{2}} (E - W_t)^l f\, dt, \quad 0 < \alpha < 2l, \tag{25.70}$$

где $\varkappa(\alpha, l)$ — постоянная (5.81), а $P_t f$, $W_t f$ — интегралы Пуассона и Гаусса—Вейерштрасса (25.47), (25.48). На «хороших» функциях эти формулы получаются из (25.52), (25.53) обращением одномерных операторов I_-^α, $I_-^{\alpha/2}$ с помощью производной Маршо (5.57) с дальнейшим предельным переходом к пределу при $t \to 0$. Формулы (25.69), (25.70) являются реализацией формулы (5.85) при конкретном выборе полугруппы T_t в (5.85). При этом формула (25.69) реализует дробную степень $(\sqrt{-\Delta})^\alpha$, а формула (25.70) — дробную степень $(-\Delta)^{\alpha/2}$.

5°. **Односторонние риссовы потенциалы.** *Односторонними риссовыми потенциалами* будем называть интегральные операторы

$$I_\pm^\alpha \varphi = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{R_+^n} \frac{y_n^\alpha}{|y|^n} \varphi(x \mp y)\, dy, \quad c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}. \tag{25.71}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, а интегрирование ведется по полупространству $R_+^n = \{x : x \in R^n, \ x_n > 0\}$. В силу оценки $y_n^\alpha |y|^{-n} \leqslant |y|^{\alpha-n}$ операторы (25.71) близки по свойствам к потенциалам Рисса $I^\alpha \varphi$. Например, они ограничены из L_p в L_q, $q = np/(n - \alpha p)$, для $1 < p < n/\alpha$. Интегралы $I_\pm^\alpha \varphi$ являются непосредственными обобщениями лиувиллевских дробных интегралов (5.4), совпадая с ними при $n = 1$. Поэтому мы сохраняем для них то же обозначение. Как и в одномерном случае, потенциалы $I_+^\alpha \varphi$ будем называть левосторонними, а $I_-^\alpha \varphi$ — правосторонними. Обозначим $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и заметим, что конструкции (25.71) представляют собой «сплетение» операторов одномерного дробного интегрирования с интегралом Пуассона:

$$I_\pm^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y_n^{\alpha-1} (P_{y_n} \varphi(\cdot, x_n \mp y_n))(x')\, dy_n, \tag{25.72}$$

где

$$(P_{y_n} \varphi(\cdot, x_n - y_n))(x') = c_{n-1} y_n \int_{R^{n-1}} \frac{\varphi(x' - y', x_n - y_n)}{(|y'|^2 + y_n^2)^{n/2}}\, dy'.$$

Вычислим преобразование Фурье потенциалов $I_\pm^\alpha \varphi$. Как и в п. 2°, нам удобно привлечь для этой цели пространства Лизоркина Φ и Ψ из § 24, п. 9°.

Лемма 25.4. *Пусть* $\alpha > 0$, $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$. *Тогда*

$$\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(x_n)_\pm^\alpha}{|x|^n} \hat{\psi}(x)\, dx = \int_{R^n} (|\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha} \psi(\xi)\, d\xi, \tag{25.73}$$

$$\widehat{(I_\pm^\alpha \varphi)}(\xi) = (|\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha} \hat{\varphi}(\xi). \tag{25.74}$$

Доказательство. Положим $\mathrm{k}_{\pm,\varepsilon}^\alpha(x) = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} (x_n)_\pm^\alpha |x|^{-n} e^{-\varepsilon|x_n|} =$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x_n)_\pm^{\alpha-1} e^{-\varepsilon|x_n|} P(x', |x_n|)$, где $P(x', |x_n|)$—ядро Пуассона (25.49)

$P(x', |x_n|) = c_{n-1}|x_n|(|x'|^2 + x_n^2)^{-n/2}$. С учетом (25.54) имеем $\widehat{k^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}}(\xi) = (\mathcal{F}_{x_n}\mathcal{F}_{x'}k^{\alpha}_{\pm,\varepsilon})(\xi) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty} x_n^{\alpha-1} e^{-x_n(\varepsilon+|\xi'|\mp i\xi_n)}dx_n$. Из формулы (7.5) следует, что последний интеграл равен $(\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n)^{\alpha}$ (предполагается, что $\arg(\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n) = 0$ при $\xi_n = 0$). Отсюда

$$\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{(x_n)_{\pm}^{\alpha}\, e^{-\varepsilon|x_n|}}{|x|^n}\hat{\psi}(x)\,dx = \int\limits_{R^n}(\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha}\psi(\xi)\,d\xi. \quad (25.75)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (25.73), откуда, в свою очередь, легко выводится (25.74). Лемма доказана.

Следствие 1. *Потенциалы $I^{\alpha}_{\pm}$ обладают полугрупповым свойством*: $I^{\alpha}_{\pm} I^{\beta}_{\pm} = I^{\alpha+\beta}_{\pm}$.

Следствие 2. *Справедливо представление риссова потенциала I^{α} в виде композиции односторонних потенциалов:*

$$I^{\alpha} = I^{\alpha/2}_{+} I^{\alpha/2}_{-} = I^{\alpha/2}_{-} I^{\alpha/2}_{+}. \quad (25.76)$$

Найдем явный вид обратных к $I^{\alpha}_{\pm}$ операторов. Искомые конструкции должны совпадать при $n = 1$ с производными Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}$ (см. (5.57), (5.58)). Применим формально к обеим частям равенства $(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x) = f(x)$, $x = (x', x_n)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}_{x'}$ по переменной x'. С учетом (25.54) получаем

$$(I^{\alpha}_{+} e^{y_n|\xi'|}(\mathcal{F}_{x'}\varphi)(\xi', y_n))(x_n) = (\mathcal{F}_{x'}f)(\xi', x_n)e^{x_n|\xi'|},$$

где оператор I^{α}_{+} применен по одной переменной y_n. Обращая его с помощью производной Маршо (5.57), приходим к соотношению

$$e^{x_n|\xi'|}(\mathcal{F}_{x'}\varphi)(\xi', x_n) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)A_l(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\Bigg(\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\times$$

$$\times(\mathcal{F}_{x'}f)(\xi', x_n - ky_n)e^{(x_n - y_n^k)|\xi'|}\Bigg)\frac{dy_n}{y_n^{1+\alpha}},$$

из которого после умножения на $e^{-x_n|\xi'|}$ и применения обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{x'}$ окончательно имеем

$$\varphi(x) = \frac{c_{n-1}}{\varkappa(\alpha, l)}\int\limits_{R^n_+}\frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n}(\Delta^l_y f)(x)\,dy,\ l > \alpha,$$

где $\Delta^l_y f$—нецентрированная разность (25.58). Таким образом,

$$(I^{\alpha}_{\pm})^{-1}f = \frac{c_{n-1}}{\varkappa(\alpha, l)}\int\limits_{R^n_+}\frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n}(\Delta^l_{\pm y}f)(x)\,dy \overset{\text{def}}{=} \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f,\ l > \alpha. \quad (25.77)$$

Интегралы (25.77) являются гиперсингулярными. Можно показать, что для $f \in S(R^n)$ они сходятся (условно) в следующем смысле:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f,$$

где $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f = \dfrac{c_{n-1}}{\varkappa(\alpha, l)}\displaystyle\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_{R^{n-1}}\frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n}(\Delta^l_{\pm y}f)(x)\,dy.$

Конструкции $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f$ совпадают с дробными производными Маршо при $n=1$. По этой причине для них сохранено то же обозначение.

Отметим еще, что $\widehat{(\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f)}(\xi)=(|\xi'|\mp i\xi_n)^{\alpha}\hat{f}(\xi)$.

§ 26. ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОСТРАНСТВО $I^{\alpha}(L_p)$ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Перейдем к подробному рассмотрению гиперсингулярного интеграла

$$\mathbf{D}^{\alpha}f=\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{(\Delta^l_y f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy,\quad l>\alpha, \tag{26.1}$$

введенного в § 25. Будет, в частности, показано, что гиперсингулярный интеграл порождает «настоящий» обратный оператор к риссову потенциалу I^{α} при рассмотрении последнего в рамках пространств L_p. Будет выяснено, какими преимуществами обладает форма конечной разности — центрированная или нецентрированная — при определении гиперсингулярного интеграла. Кроме того, будут рассмотрены гиперсингулярные интегралы, более общие, чем $\mathbf{D}^{\alpha}f$. Они окажутся естественным обобщением дифференциальных операторов в частных производных на случай дробных порядков, поскольку, как будет показано, всякий однородный дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами может быть записан в виде гиперсингулярного интеграла.

Особое место в этом параграфе занимает п. 7°, где изучается пространство $I^{\alpha}(L_p)$ риссовых потенциалов от функций из L_p, рассматриваются пространства $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$, обобщающие, вообще говоря, соболевские пространства $L^{\alpha}_p(R^n)$, и выясняется взаимоотношение между пространствами $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ и пространством $I^{\alpha}(L_p)$. В качестве основного результата отметим, что

$$L^{\alpha}_{p,r}(R^n)=L_r\cap I^{\alpha}(L_p). \tag{26.2}$$

1°. Исследование нормировочных постоянных $d_{n,l}(\alpha)$ как функций параметра α. Как выяснено в конце § 25, необходимо прежде всего решить вопрос о нулях функций $d_{n,l}(\alpha)$, используемых в (26.1). Найдем в настоящем пункте эти нули, одновременно получив представления интегралов (25.64), (25.65) в виде элементарных функций (параметра α).

Введем следующие функции параметра α:

$$A_l(\alpha)=\begin{cases}A'_l(\alpha)=\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}k^{\alpha} & \text{в случае нецентрированной разности,}\\ A''_l(\alpha)=2\sum\limits_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}\left(\frac{l}{2}-k\right)^{\alpha} & \text{в случае центрированной разности,}\end{cases} \tag{26.3}$$

через которые будут выражены постоянные $d_{n,l}(\alpha)$. Здесь $l=1, 2, \ldots$ Первая из этих функций знакома нам по одномерному случаю, где она возникла при вычислении нормировочного множителя для дробной производной Маршо порядка $\alpha\geqslant 1$, см. (5.73), (5.80). Там мы рассматривали дробные производные Маршо только с нецентрированными разностями. Вторую из функций (26.3) в случае четного $l=2, 4, \ldots$ можно записать также в виде

$$A''_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}\left|\frac{l}{2}-k\right|^{\alpha} \tag{26.4}$$

(при нечетном l сумма в правой части в (26.4) тождественно равна нулю и отличается от $A_l''(\alpha)$).

Лемма 26.1. *Функция* $A_l'(\alpha)$, $\alpha \in R^1$, *обращается в нуль в точках* $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, l-1$, *и только в них. Функция* $A_l''(\alpha)$ *имеет своими нулями четные числа* $\alpha = 2, 4, 6, \ldots, l-2$ *при четном* l *и нечетные числа* $\alpha = 1, 3, \ldots, l-2$ *при нечетном* l.

Доказательство. Рассмотрим вначале $A_l(\alpha) = A_l'(\alpha)$. Воспользуемся формулой

$$A_l'(\alpha) = \frac{l}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{l-1}}{|\ln \xi|^{\alpha}} d\xi, \quad \alpha < l, \tag{26.5}$$

полученной в § 5, см. равенства (5.81). Из (26.5) видно, что при $\alpha < l$ нули функции $A_l'(\alpha)$ суть полюса гамма-функции: $\alpha = 1, 2, \ldots, l-1$. При $\alpha = l$, очевидно, $A_l'(\alpha) \neq 0$ в силу (5.74′). Пусть $\alpha > l$. Справедлива рекуррентная формула $\frac{1}{l+1} A_{l+1}'(\alpha+1) = A_{l+1}'(\alpha) - A_l'(\alpha)$, проверяемая непосредственно на основании определения (26.3). С ее помощью методом индукции легко показывается, что при $\alpha > l$ выполняется неравенство $A_l'(\alpha) > 0$ в случае нечетного l и $A_l'(\alpha) < 0$ в случае четного l. Следовательно, $A_l'(\alpha) \neq 0$ и при $\alpha > l$.

Пусть теперь $A_l(\alpha) = A_l''(\alpha)$. С учетом (26.4) заключаем, что если α — целое и одинаковой четности с l, то

$$A_l''(\alpha) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} \binom{l}{k} \left(\frac{l}{2} - k\right)^{\alpha}.$$

Так как $(\rho^{1/2} - \rho^{-1/2})^l = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{\nu} \binom{l}{\nu} \rho^{l/2-\nu}$, то

$$-\left(\rho \frac{d}{d\rho}\right)^{\alpha} \left(\frac{\rho - 1}{\sqrt{\rho}}\right)^l \Big|_{\rho=1} = A_l''(\alpha) \tag{26.6}$$

при целом α, имеющем одинаковую четность с l, откуда и следует утверждение леммы для $A_l''(\alpha)$.

Замечание 26.1. В лемме 26.1 решен вопрос о вещественных нулях функции $A_l(\alpha) = A_l'(\alpha)$. В некоторых задачах, связанных с гиперсингулярными интегралами (см. С. Г. Самко [31, с. 140]), представляет особый интерес вопрос об отсутствии других нулей у квазиполинома $A_l(z)$ в комплексной плоскости кроме точек $z = 1, 2, \ldots, l-1$. Этот вопрос является открытым.

Теорема 26.1. *Нормировочные постоянные* $d_{n,l}(\alpha)$ *в (26.1) являются аналитическими функциями параметра* α *и вычисляются по формулам*

$$d_{n,l}(\alpha) = \beta_n(\alpha) \frac{A_l(\alpha)}{\sin(\alpha\pi/2)}, \tag{26.7}$$

$$\beta_n(\alpha) = \frac{\pi^{1+n/2}}{2^{\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \tag{26.8}$$

за исключением случая центрированной разности нечетного порядка l, *когда* $d_{n,l}(\alpha) \equiv 0$. *Постоянная* $d_{n,l}(\alpha)$ *отлична от нуля при всех* $\alpha > 0$ *в случае центрированной разности и четного* l, *а в случае нецентрирован-*

ной разности она обращается в нуль при $\alpha>0$ только в точках $\alpha=1, 3, 5, \ldots, 2[l/2]-1$.

Доказательство. Начнем с замечания, что $A_l(\alpha)=0$ при целом четном α согласно лемме 26.1, так что $A_l(\alpha)/\sin(\alpha\pi/2)$ в (26.7) понимается при $\alpha=2, 4, 6, \ldots$ как

$$\lim_{\xi\to\alpha}\frac{A_l(\xi)}{\sin(\xi\pi/2)}=\frac{2}{\pi}(-1)^{\alpha/2}\frac{d}{d\alpha}A_l(\alpha). \tag{26.9}$$

Вычисляя интеграл (25.64) в случае нецентрированной разности, имеем

$$d_{n,l}(\alpha)=\int_{R^1}(1-e^{iy_1})^l\,dy_1\int_{R^{n-1}}(|\tilde{y}|^2+y_1^2)^{-(\alpha+n)/2}d\tilde{y}=$$

$$=\int_{R^1}(1-e^{iy_1})^l|y_1|^{-1-\alpha}\,dy_1\int_{R^{n-1}}(1+|\eta|^2)^{-(\alpha+n)/2}\,d\eta. \tag{26.10}$$

Интеграл по R^{n-1} находим переходом к полярным координатам:

$$\int_{R^{n-1}}(1+|\eta|^2)^{-(\alpha+n)/2}d\eta=|S_{n-2}|\int_0^\infty\rho^{n-2}(1+\rho^2)^{-(n+\alpha)/2}\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}|S_{n-2}|\int_0^\infty r^{(n-3)/2}(1+r)^{-(n+\alpha)/2}\,dr=\frac{1}{2}|S_{n-2}|\,\mathrm{B}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1+\alpha}{2}\right).$$

Так как

$$|S_{n-1}|=2\pi^{(n-1)/2}\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right), \tag{26.11}$$

то

$$\int_{R^{n-1}}(1+|\eta|^2)^{-(\alpha+n)/2}\,d\eta=\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right).$$

Поэтому

$$d_{n,l}(\alpha)=\frac{\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{(1-e^{it})^l+(1-e^{-it})^l}{t^{1+\alpha}}\,dt=$$

$$=\frac{2\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty t^{-1-\alpha}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\cos kt\,dt.$$

Пусть $0<\alpha<1$. Воспользовавшись равенством $\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}=0$, оставшийся интеграл приводим с учетом вытекающей из (7.6) формулы

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin kx\,dx=\frac{\pi k^{\alpha-1}}{2\sin(\alpha\pi/2)\,\Gamma(\alpha)} \tag{26.12}$$

к виду

$$\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\int_0^\infty t^{-1-\alpha}(\cos kt-1)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}k\int_0^\infty t^{-\alpha}\sin kt\,dt=\frac{\pi A_l(\alpha)}{2\Gamma(1+\alpha)\sin(\alpha\pi/2)},$$

что дает указанное в (26.7) значение $d_{n,l}(\alpha)$. Для остальных значений $\alpha \geqslant 1$ требуемый результат получается аналитическим продолжением по α.

В случае центрированной разности аналогично (26.10) получаем при четном l:

$$d_{n,l}(\alpha) = (-1)^{l/2} \frac{2^{l-\alpha+1}\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\sin^l t}{t^{1+\alpha}}\, dt. \quad (26.13)$$

Воспользуемся формулой

$$\sin^l t = 2^{1-l} \sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} (1 - \cos 2kt),$$

получаемой разложением $\sin^l t$ в ряд Фурье по $\cos kt$ на отрезке $[0, \pi]$. После интегрирования по частям имеем (при $0 < \alpha < 2$):

$$\int_0^\infty t^{-1-\alpha} \sin^l t\, dt = 2^{1-l} \sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} \frac{2k}{\alpha} \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin 2kt\, dt =$$

$$= \frac{\pi 2^{\alpha-l}}{\Gamma(1+\alpha)\sin(\alpha\pi/2)} \sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} k^\alpha. \quad (26.14)$$

Нетрудно видеть, что $\sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-1} k^\alpha = \frac{(-1)^{l/2}}{2} A_l''(\alpha)$. Поэтому (26.14) приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{\sin^l t}{t^{1+\alpha}}\, dt = (-1)^{l/2} \frac{2^{\alpha-l-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{A_l(\alpha)}{\sin(\alpha\pi/2)}. \quad (26.15)$$

Подставляя это выражение в (26.13), после простых преобразований получаем (26.7). На значения $\alpha \geqslant 1$ требуемый результат распространяем аналитическим продолжением по α. Наконец, равенство $d_{n,l}(\alpha) \equiv 0$ в случае центрированной разности и нечетного l усматривается непосредственно из (25.65).

Остается вопрос о необращении $d_{n,l}(\alpha)$ в нуль. Случай центрированной разности ясен ввиду (25.65). Пусть разность нецентрированная. В силу формулы (26.7) вопрос сводится к нулям функции $A_l(\alpha) = A_l'(\alpha)$, что выяснено в лемме 26.1. Нули этой функции — точки $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, l-1$ — являются простыми согласно (26.5). Поэтому в соответствии с (26.9) $d_{n,l}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha = 2, 4, 6, \ldots$ и остаются лишь точки $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ Теорема доказана.

Выпишем еще значения $d_{n,l}(\alpha)$ для четных α в явном виде:

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{(-1)^{\alpha/2}\pi^{n/2}2^{1-\alpha}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \frac{dA_l(\alpha)}{d\alpha}, \quad l = 1, 2, 3, \ldots, \quad (26.16)$$

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{(-1)^{1+(\alpha+l)/2}\, 2^{2-\alpha}\pi^{n/2} l!}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \frac{dA_l(\alpha)}{d\alpha}, \quad l = 2, 4, 6, \ldots, \quad (26.17)$$

$$\alpha = 2, 4, 6, \ldots,$$

соответственно случаям нецентрированной и центрированной разности.

Ввиду теоремы 26.1 оператор $\mathbf{D}^\alpha f$ определен равенством (26.1) корректно при выборе нормировочной постоянной $d_{n,l}(\alpha)$ по формулам (25.64), (25.65), (26.7) во всех случаях, кроме $\alpha=1, 3, 5, \ldots$, при использовании нецентрированной разности. В этом случае $d_{n,l}(\alpha)=0$ и мы сталкиваемся с явлением «аннигиляции» конструкции (25.61):

$$T^\alpha f = 0, \ \alpha = 1, \ 3, \ 5, \ \ldots < l, \tag{26.18}$$

при использовании нецентрированной разности.

Таким образом, нецентрированная разность, с одной стороны, имеет то преимущество перед центрированной, что ее порядок не обязательно четный (требование выбрать l четным означает, вообще говоря, увеличение порядка l), а с другой стороны, нецентрированная разность приводит к нежелательным эффектам (26.18) при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ Этот случай мы рассмотрим особо в п. 2°.

2°. Сходимость гиперсингулярного интеграла на дифференцируемых функциях и снижение порядка l до $l>2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности. Покажем, что гиперсингулярный интеграл (26.1) сходится абсолютно на функциях $f(x)$, имеющих ограниченные производные до порядка $[\alpha]+1$. Для определенности ограничимся случаем нецентрированной разности.

Справедлива формула

$$(\Delta_h^l f)(x) = m \sum_{|j|=m} \frac{h^j}{j!} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{m-k} k^m \binom{l}{k} (\mathscr{D}^j f)(x-kuh)\,du, \quad l \geqslant m, \tag{26.19}$$

где $h^j = h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}$, доказанная нами ранее в одномерном случае, см. (5.75). В случае многих переменных она доказывается совершенно аналогично с помощью формулы Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в интегральной форме.

Из (26.19) заключаем, что

$$|(\Delta_h^l f)(x)| \leqslant c\,|h|^m \sup_{\substack{x \in R^n \\ |j|=m}} |(\mathscr{D}^j f)(x)| = c_1\,|h|^m, \quad l \geqslant m. \tag{26.20}$$

С помощью (26.20) легко получаем, что интеграл (26.1) сходится абсолютно, если функция $f(x)$ и ее производные $(\mathscr{D}^j f)(x)$, $|j|=[\alpha]+1$, ограничены.

Покажем, что гиперсингулярный интеграл (26.1) сходится условно при $l>2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности. Другими словами, в качестве l можно брать не обязательно целое число, большее α, а можно взять ближайшее к α (слева или справа) целое нечетное число. Будем считать, что l нечетно, поскольку, если l четно и $l>2[\alpha/2]$, то $l>\alpha$.

Справедливо непосредственно проверяемое тождество

$$(\tau-1)^l = P_l(\tau) + \left(\frac{1}{\tau} + \ldots + \frac{1}{\tau^{(l-1)/2}} + \frac{1}{2\tau^{(l+1)/2}}\right)(\tau-1)^{l+1}, \tag{26.21}$$

где функция $P_l(\tau) = \dfrac{1}{2}(\tau-1)^l(\tau+1)\tau^{-(l+1)/2}$ антиинвариантна относительно инверсии: $P_l(\tau^{-1}) = -P_l(\tau)$. Равенству (26.21) соответствует тождество в конечных разностях:

$$(\Delta_y^l f)(x) = (P_y^l f)(x) - \sum_{k=1}^{(l-1)/2} (\Delta_y^{l+1} f)(x+ky) - \frac{1}{2}(\Delta_y^{l+1} f)\left(x + \frac{l+1}{2} y\right), \quad x, y \in R^n, \tag{26.22}$$

где функция $(P_y^l f)(x)$ нечетна по y. В таком случае предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y|>\varepsilon}\frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy=-\sum_{k=1}^{(l-1)/2}\int\limits_{R^n}\frac{(\Delta_y^{l+1}f)(x+ky)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^n}\frac{(\Delta_y^{l+1}f)\left(x+\dfrac{l+1}{2}\,y\right)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy \tag{26.23}$$

существует, поскольку $l+1>\alpha$, что и дает условную сходимость гиперсингулярного интеграла $\mathbf{D}^\alpha f$.

Возвратимся к явлению аннигиляции (26.18) гиперсингулярного интеграла нечетного порядка с нецентрированной разностью. Так как допускается $l>2[\alpha/2]$, то этого явления можно избежать, выбирая $l=\alpha$ при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ Тогда $A_l(l)\neq 0$, и определение гиперсингулярного интеграла при $l=\alpha=1, 3, 5, \ldots$ равенством (26.1) становится корректным. Следует только подчеркнуть, что условная сходимость в этом случае существенна (даже на самых хороших функциях).

Далее везде без дополнительных оговорок считаем, что $l>\alpha$ и l четно в случае центрированной разности и $l>2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности с обязательным выбором $l=\alpha$ при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ (но в п. 4° при обобщении гиперсингулярного интеграла (26.1) будет допускаться нечетное l и в случае центрированной разности).

Отметим в этом пункте следующую лемму, примыкающую к формуле (25.34).

Лемма 26.2. *Риссово дифференцирование* $(-\Delta)^{\alpha/2}=\mathbf{D}^\alpha$ *может быть интерпретировано как результат дробного дифференцирования по произвольному направлению* σ, $|\sigma|=1$, *с последующим интегрированием по* σ:

$$\mathbf{D}^\alpha f=-\frac{\Gamma(-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)}\int\limits_{S_{n-1}}(\mathscr{D}_\sigma^\alpha f)(x)\,d\sigma, \tag{26.24}$$

где $\beta_n(\alpha)$ *— постоянная (26.8),* $(\mathscr{D}_\sigma^\alpha f)(x)$ *— дробная производная (24.38), (24.38′) по направлению* σ, *и* $\mathbf{D}^\alpha f$ *взято с нецентрированной разностью.*

Доказательство получается переходом к полярным координатам в интеграле (26.1).

3°. Гиперсингулярный интеграл как обратный риссову потенциалу. Гиперсингулярный интеграл (26.1) порождает обратный оператор к риссову потенциалу $I^\alpha\varphi$:

$$\mathbf{D}^\alpha I^\alpha\varphi=\varphi \tag{26.25}$$

для достаточно хороших функций, например, $\varphi\in\Phi(R^n)$, что прозрачно в образах Фурье, см. (25.35) и (25.62). Покажем, что обращение (26.25) справедливо на всей области определения риссова потенциала в рамках L_p-пространств: $\varphi(x)\in L_p(R^n)$, $1\leqslant p<n/\alpha$.

Важно подчеркнуть при этом, что гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}^\alpha$ применяется к «не очень хорошим» функциям $I^\alpha\varphi$ и уже не является, вообще говоря, абсолютно сходящимся. Он будет пониматься как условно сходящийся по норме пространства L_p:

$$\mathbf{D}^\alpha f=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f, \tag{26.26}$$

где $\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f$ — усеченный гиперсингулярный интеграл (25.60).

Введем некоторые вспомогательные функции — конечные разности рисова ядра $\mathrm{k}_\alpha(x)$. Именно введем функцию ($\alpha > 0$, $l = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\Delta_{l,\alpha}(x, h) = (\Delta_h^l \mathrm{k}_\alpha)(x) \tag{26.27}$$

и выделим важный для нас случай $h = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, положив

$$\mathrm{k}_{l,\alpha}(x) = \Delta_{l,\alpha}(x, e_1), \tag{26.28}$$

так что

$$\mathrm{k}_{l,\alpha}(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} |x - ke_1|^{\alpha-n} \tag{26.29}$$

при $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \ldots$ и выборе нецентрированной разности. Немаловажную роль в наших построениях будет играть ядро

$$\mathscr{K}_{l,\alpha}(|x|) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)|x|^n} \int\limits_{|y|<|x|} \mathrm{k}_{l,\alpha}(y)\, dy. \tag{26.30}$$

Так как $\hat{\mathrm{k}}_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$ согласно (25.25), то преобразование Фурье функции (26.27) вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(\Delta_{l,\alpha}(\cdot, h))(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}(1 - e^{ix\cdot h})^l & \text{в случае нецентрированной разности,} \\ |x|^{-\alpha}(e^{ix\cdot h/2} - e^{-ix\cdot h/2})^l & \text{в случае центрированной разности.} \end{cases} \tag{26.31}$$

Функция $\Delta_{l,\alpha}(x, h)$ может быть выражена через $\mathrm{k}_{l,\alpha}(x)$ с помощью вращения:

$$\Delta_{l,\alpha}(x, h) = |h|^{\alpha-n} \mathrm{k}_{l,\alpha}\left(\frac{|x|}{|h|^2}\, \omega_x^{-1}(h)\right), \tag{26.32}$$

где $l > \alpha - n$ при $\alpha - n = 0, 2, 4, \ldots$ Здесь $\omega_x(h)$ — вращение (25.68). Формула (26.32) проверяется непосредственно, с помощью равенства $|x - ke_1| = \left||x|e_1 - k\frac{x}{|x|}\right|$, из которого следует, что $\left|\frac{x}{|h|^2}\omega_x^{-1}(h) - ke_1\right| = |h|^{-1}|x - kh|$, и с учетом того, что $\ln|h| \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} |x - kh|^{\alpha-n} \equiv 0$ при $\alpha - n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ и $l > \alpha - n$.

Лемма 26.3. *Функция $\mathrm{k}_{l,\alpha}(x)$ удовлетворяет оценке*

$$|\mathrm{k}_{l,\alpha}(x)| \leqslant c(1 + |x|)^{\alpha-n-l} \text{ при } |x| \geqslant l + 1, \tag{26.33}$$

так что при $l > \alpha$

$$\mathrm{k}_{l,\alpha}(x) \in L_q(R^n),\ 1 - \alpha/n < 1/q \leqslant 1, \tag{26.34}$$

при этом

$$\int\limits_{R^n} \mathrm{k}_{l,\alpha}(x)\, dx = 0. \tag{26.35}$$

Равенство (26.35) верно и при $2[\alpha/2] < l \leqslant \alpha$ в случае нечетного l и нецентрированной разности в (26.28), если интеграл в (26.35) понимать как $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{\left|x - \frac{l}{2}e_1\right| < N} \mathrm{k}_{l,\alpha}(x)\, dx$.

Доказательство. Обозначим $W(s) = \mathrm{k}_\alpha(x + se_1)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, так что $\mathrm{k}_{l,\alpha}(x) = (\Delta_1^l W)(0)$. В силу известного тождества

$$(\Delta_\xi^l W)(s) = \int_0^\xi \ldots \int_0^\xi W^{(l)}(s + s_1 + \ldots + s_l)\, ds_1 \ldots ds_l \tag{26.36}$$

получаем, что $k_{l,\alpha}(x) = W^{(l)}(\theta)$, $0 < \theta < l$, откуда (26.33) следует без труда $\left(\text{с учетом оценки } \left|\frac{d^l}{d\rho^l}(\rho^k \ln \rho)\right| \leqslant c\rho^{k-l} \text{ при } \rho > 1 \text{ и } l > k \text{ в случае } \alpha - n = 0, 2, 4, \ldots\right)$. Так как $k_{l,\alpha}(x)$ локально суммируема в степени q, $1/q > 1 - \alpha/n$, то из (26.33) следует (26.34). Равенство (26.35), т. е. равенство $\hat{k}_{l,\alpha}(0) = 0$, следует при $l > \alpha$ из (26.31). И, наконец,

$$\int\limits_{\left|x - \frac{l}{2}e_1\right| < N} k_{l,\alpha}(x)\,dx = \int\limits_{\substack{|y|<N \\ y_1>0}} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} k_\alpha\left(y + \left(\frac{l}{2} - \nu\right)e_1\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{\substack{|y|<N \\ y_1>0}} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} k_\alpha\left(y - \left(\frac{l}{2} - \nu\right)e_1\right)dy.$$

Поменяв индекс ν на $l - \nu$ во втором слагаемом, видим, что оно отличается от первого множителем $(-1)^l$. Поэтому

$$\int\limits_{\left|x - \frac{l}{2}e_1\right| < N} k_{l,\alpha}(x)\,dx = 0 \tag{26.37}$$

для всех $N > 0$ при нечетном l. Лемма 26.3 доказана.

Лемма 26.4. *Справедливы оценки*

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| \leqslant c \begin{cases} |x|^{\min(\alpha-n,\,0)}, & \alpha \neq n, \\ \ln \dfrac{1}{|x|}, & \alpha = n, \end{cases} \quad \text{при } |x| \leqslant 1, \tag{26.38}$$

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| \leqslant c\,|x|^{\alpha-n-l^*} \quad \text{при } |x| \geqslant 1, \tag{26.39}$$

где $l^* = l$ во всех случаях, когда $l > \alpha$ и $l^* = l + 1$ в случае $2[\alpha/2] < l \leqslant \alpha$ (при использовании нецентрированной разности в (26.28)), так что $\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|) \in L_q(R^n)$, $1 - \alpha/n < 1/q \leqslant 1$.

Доказательство. Получение оценки (26.38) очевидно. Для $|x| \to \infty$ имеем при $l > \alpha$ в силу (26.35) и (26.33):

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| = \frac{1}{|x|^n} \cdot \left|\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{|y|>|x|} k_{l,\alpha}(y)\,dy\right| \leqslant \frac{c}{|x|^{n+l-\alpha}}.$$

Если же $2[\alpha/2] < l \leqslant \alpha$ (так что l нечетно), то оценку (26.39) можно получить за счет предоставляемой равенством (26.37) возможности интегрировать не по шару $|y| < |x|$, а по слою $|x| - l/2 < |y| < |x| + l/2$. Именно в силу (26.37) имеем при $|x| > l + 1$ с учетом (26.39):

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| \leqslant \frac{1}{|x|^n |d_{n,l}(\alpha)|} \int\limits_{|x| - \frac{l}{2} < |y| < |x| + \frac{l}{2}} |k_{l,\alpha}(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{|x|^n} \cdot \left|\left(|x| + \frac{l}{2}\right)^{\alpha-l} - \left(|x| - \frac{l}{2}\right)^{\alpha-l}\right| \leqslant c_1 |x|^{-n+\alpha-l-1}.$$

Лемма 26.4 доказана.

Докажем теперь следующую подготовительную теорему для обращения риссова потенциала $I^\alpha\varphi$, являющуюся многомерным обобщением леммы 6.1.

Теорема 26.2. *Пусть* $f(x) = I^\alpha \varphi$, $0 < \alpha < n$, $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 \leqslant p < n/\alpha$. *Тогда для усеченного гиперсингулярного интеграла* $\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f$ *справедливо представление*

$$(\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) = \int_{R^n} \mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|)\, \varphi(x - \varepsilon y)\, dy. \tag{26.40}$$

Доказательство. Применяя конечную разность к потенциалу Рисса, имеем

$$(\Delta^l_y f)(x) = \int_{R^n} \Delta_{l,\alpha}(\xi,\ y)\, \varphi(x - \xi)\, d\xi, \tag{26.41}$$

где $\Delta_{l,\alpha}(\xi,\ y)$ — функция (26.27). Отсюда

$$(\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \varphi(x - \xi)\, d\xi \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Delta_{l,\alpha}(\xi,\ y)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy$$

(перестановка порядка интегрирования возможна ввиду абсолютной сходимости интегралов при $\varepsilon > 0$). Применим формулу (26.32) и сделаем после этого замену $\frac{|\xi|}{|y|^2} \cdot \omega_x^{-1}(y) = z \in R^n$, где $\omega_x^{-1}(y)$ — вращение, обратное вращению (25.68). Тогда $|y| = |\xi|/|z|$ и

$$(\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{\varphi(x - \xi)}{|\xi|^n}\, d\xi \int_{|z|<|\xi|/\varepsilon} \mathrm{k}_{l,\alpha}(z)\, dz.$$

Преобразование подобия $\xi \to \varepsilon\xi$ приводит это равенство к (26.40).

Замечание 26.2. Ядро $\mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|)$ является усредняющим:

$$\int_{R^n} \mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|)\, dy = 1. \tag{26.42}$$

Это равенство (следствие выбора нормировочных постоянных) легко установить косвенным путем: пусть $\varphi \in \Phi$, тогда в (26.40) возможен предельный переход при $\varepsilon \to 0$: $\mathbf{D}^\alpha f = \varphi(x) \int_{R^n} \mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|)\, dy$. Так как $\mathbf{D}^\alpha f = \varphi$ для $f = I^\alpha \varphi$ при $\varphi \in \Phi$ в силу (26.25), то отсюда и следует (26.42).

Следствие. *Преобразование Фурье ядра* $\mathscr{K}_{l,\alpha}(|x|)$ *можно вычислить по формуле*

$$\widehat{\mathscr{K}_{l,\alpha}}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)\,|x|^n} \int_{|y|>1} \frac{(1 - e^{ix\cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}}\, dy \tag{26.43}$$

(выписано для случая нецентрированной разности в (26.27)).

Действительно, взяв в (26.40) $f \in \Phi$, имеем $\widehat{\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f}(x) = \widehat{\mathscr{K}}_{l,\alpha}(\varepsilon x)\, \widehat{\mathbf{D}^\alpha f}(x)$. В силу (25.66) и (25.62) отсюда при $\varepsilon = 1$ и следует (26.43).

Теорема 26.3. *Оператор* $\mathbf{D}^\alpha f = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f$ *является левым обратным к риссову потенциалу в пространствах* $L_p(R^n)$:

$$\mathbf{D}^\alpha I^\alpha \varphi \equiv \varphi,\ \varphi \in L_p(R^n),\ 1 \leqslant p < n/\alpha. \tag{26.44}$$

Доказательство этой теоремы подготовлено теоремой 26.2. Действительно, из (26.40) с учетом (26.42) имеем

$$(\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) - \varphi(x) = \int_{R^n} \mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|)\, [\varphi(x - \varepsilon y) - \varphi(x)]\, dy. \tag{26.45}$$

Применяя неравенство Минковского, получаем

$$\|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p \leqslant \int_{R^n} |\mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|)|\, \omega_p^1(\varphi, \varepsilon y)\, dy, \tag{26.46}$$

где $\omega_p^1(\varphi, h) = \left\{ \int_{R^n} |\varphi(x) - \varphi(x+h)|^p\, dx \right\}^{1/p}$. Отсюда $\|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так как $\mathscr{K}_{l,\alpha}(|y|) \in L_1(R^n)$ на основании леммы 26.4.

Подчеркнем, что в теореме 26.2 мы установили, что риссова производная (гиперсингулярный интеграл) $\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f$ сходится на образе $I^\alpha(L_p)$ риссова потенциала по норме пространства L_p и в (26.46) дана оценка этой сходимости. Можно показать, что имеет место сходимость и почти всюду. Останавливаться на этом не станем (см. о сходимости почти всюду в § 29, п. 2°, 26.1).

В заключение этого пункта отметим, что введенные в предыдущем параграфе конструкции (25.69), (25.70) можно применять для обращения риссовых потенциалов $I^\alpha\varphi$, $\varphi \in L_p$, наряду с рассмотренными выше гиперсингулярными интегралами, т. е. справедлива (см. литературные ссылки в § 29) следующая

Теорема 26.3′. *Пусть* $f = I^\alpha\varphi$, $0 < \alpha < n$, $1 \leqslant p < n/\alpha$. *Тогда*

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\alpha} (E - P_t)^l f\, dt, \quad l > \alpha,$$

в смысле сходимости по L_p*-норме или почти всюду.*

Аналогичное утверждение справедливо и для конструкции (25.70).

4°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой. Обобщая гиперсингулярный интеграл (26.1), введем конструкцию вида

$$(\mathbf{D}_\Omega^\alpha f)(x) = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, \Omega(x, y)\, dy,$$

где функцию $\Omega(x, y)$, не зависящую от $f(x)$, назовем *характеристикой*, следуя терминологии, принятой в теории многомерных сингулярных интегралов (С. Г. Михлин [2]). В таком общем виде мы не станем рассматривать эти конструкции, а ограничимся случаем, когда характеристика $\Omega(x, y)$ не зависит от x и однородна по y: $\Omega = \Omega(y')$, $y' = y/|y|$:

$$\mathbf{D}_\Omega^\alpha f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, \Omega(y')\, dy, \quad l > \alpha \tag{26.47}$$

(нормировочный множитель взят по-прежнему, несмотря на появление произвольной однородной характеристики $\Omega(y')$ с тем, чтобы $\mathbf{D}_\Omega^\alpha f$ не зависело от выбора $l > \alpha$, см. следствие 1 из теоремы 26.4).

Относительно более общих характеристик см. литературные указания в § 29.

Отметим сразу, что наличие характеристики $\Omega(y')$ в гиперсингулярном интеграле позволит рассматривать его и с центрированными разностями нечетного порядка.

Произведем сейчас некоторую классификацию гиперсингулярных интегралов (26.47) и коснемся в этом пункте следующих вопросов:

а) каковы формулы вычисления преобразования Фурье для $\mathbf{D}_\Omega^\alpha f$?

б) при каких условиях на $\Omega(y')$ сходимость (по норме L_p) гиперсингулярного интеграла $\mathbf{D}^\alpha f$ с постоянной характеристикой влечет за собой сходимость гиперсингулярного интеграла с характеристикой $\Omega(y')$ и наоборот?

Ниже, в п. 6°, выясним, насколько богат класс гиперсингулярных интегралов (26.47). Будет показано, что он содержит, в частности, операторы вида $\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$, где $a(x)=|x|^{\alpha}a(x')$, $x'=x/|x|$, — достаточно гладкая однородная степени α функция. В случае целых α класс операторов (26.47) содержит в себе все однородные дифференциальные операторы в частных производных порядка α.

Прежде всего дадим следующее

Определение 26.1. *Интеграл (26.47) будем называть гиперсингулярным интегралом нейтрального типа, если он построен с помощью нецентрированной разности, и гиперсингулярным интегралом четного (нечетного) типа, если он построен с помощью центрированной разности четного (нечетного) типа порядка l.*

Интеграл (26.47) сходится при $l>\alpha$ в силу (26.20) в случае «достаточно хорошей» функции $f(x)$, если $\Omega(y')\in L_1(S_{n-1})$. Для гиперсингулярного интеграла нейтрального типа и четной характеристики $\Omega(y')=\Omega(-y')$ порядок разности можно снизить за счет условной сходимости до

$$l>2[\alpha/2] \tag{26.48}$$

с обязательным выбором $l=\alpha$ при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ Это показывается точно так же, как в п. 2°. Всюду ниже считаем l выбранным указанным способом.

Нейтральный тип гиперсингулярного интеграла имеет некоторые преимущества перед четным и нечетным типом (это уже проявилось в возможности понижения порядка l в (26.48)). Он более универсален в вопросах обращения операторов типа потенциала, см. книгу С. Г. Самко [31, гл. V]. В частности, гиперсингулярные интегралы четного (нечетного) типа имеет смысл рассматривать только для четных (нечетных) характеристик $\Omega(y')$. Именно если характеристика произвольна:

$$\Omega(y')=\Omega_+(y')+\Omega_-(y'),\ \Omega_{\pm}(y')=\frac{\Omega(y')\pm\Omega(-y')}{2},$$

то

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega}f\equiv\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega_+}f,\ \mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega}f\equiv\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega_-}f \tag{26.49}$$

для интегралов четного и нечетного типа соответственно (т. е. интегралы четного или нечетного типа аннулируются в случае характеристики противоположной четности). Соотношения (26.49) вытекают, например, из полученных ниже формул (26.69)—(26.71). С другой стороны, гиперсингулярные интегралы нейтрального типа имеют свои «странности», которые отражены в следующем замечании.

Замечание 26.3. Гиперсингулярный интеграл нейтрального типа в случае $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ тождественно аннулируется: $\int\limits_{R^n}|y|^{-n-\alpha}(\Delta^l_y f)(x)\times$ $\times\Omega(y')\,dy\equiv 0$, каковы бы ни были f и Ω, если $l>\alpha$. Это установлено в п. 1°, см. (26.18), для $\Omega(y')=\text{const}$. Для $\Omega(y')\neq\text{const}$ эта аннигиляция будет видна в образах Фурье (см. равенства (26.58), (26.59)). Если же $l=\alpha$, то гиперсингулярный интеграл нейтрального типа сходится (условно) тогда и только тогда, когда $\Omega(y')$ четна. Это можно усмотреть из действий в п. 2°, вставляя в левую часть (26.23) характеристику $\Omega(y')$.

Замечание 26.4. В случае гиперсингулярного интеграла нечетного типа нормирующий множитель $d_{n,l}(\alpha)$ в (26.47) не был еще определен (постоянная (25.65) равна нулю при нечетном l). Отправляясь от (26.7) и учитывая, что $A_l^{''}(\alpha)=0$ при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$, согласно лемме 26.1, положим по определению

$$d_{n,l}(\alpha)=\beta_n(\alpha)\,\frac{A_l^{''}(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)} \tag{26.50}$$

для гиперсингулярных интегралов нечетного типа.

Отметим еще, что для гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой справедлива формула

$$\mathbf{D}_{\Omega}^{\alpha} f = -\frac{\Gamma(-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma)\,(\mathcal{D}_{\sigma}^{\alpha} f)(x)\,d\sigma, \tag{26.51}$$

где $(\mathcal{D}_{\sigma}^{\alpha} f)(x)$ — дробная производная (24.38), (24.38′) по направлению σ. Эта формула обобщает (26.24) и также получается переходом к полярным координатам в (26.47).

А. Вычисление преобразования Фурье $\mathcal{F}(\mathbf{D}_{\Omega}^{\alpha} f)$. Действуя, как в (25.66), (25.67), нетрудно получить, что в образах Фурье справедливо равенство

$$\mathcal{F}(\mathbf{D}_{\Omega}^{\alpha} f) = \mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)\,\hat{f}(x), \tag{26.52}$$

где функция $\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \begin{cases} \displaystyle\int_{R^n} \frac{(1-e^{ix\cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}}\,\Omega(y')\,dy & \text{в случае нецентрированной разности,} \\ \displaystyle\int_{R^n} \frac{(e^{\frac{i}{2}x\cdot y} - e^{-\frac{i}{2}x\cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}}\,\Omega(y')\,dy & \text{в случае центрированной разности.} \end{cases} \tag{26.53}$$

Функцию $\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)$ будем называть *символом гиперсингулярного интеграла* $\mathbf{D}_{\Omega}^{\alpha} f$ (следуя терминологии, принятой в теории многомерных сингулярных интегралов Кальдерона — Зигмунда, см. книгу С. Г. Михлина [2]). Очевидно, символ $\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)$ однороден степени α:

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = |x|^{\alpha}\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x'), \quad x' = x/|x|. \tag{26.54}$$

Теорема 26.4. *Пусть* $\Omega(\sigma) \in L_1(S_{n-1})$. *Справедливы следующие представления символа*:

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \frac{\omega_n(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma)\,(-ix\cdot\sigma)^{\alpha}\,d\sigma, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \ldots, \tag{26.55}$$

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \omega_n(\alpha) \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma)\,|x\cdot\sigma|^{\alpha}\,d\sigma, \tag{26.56}$$

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = -i\omega_n(\alpha) \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma)\,|x\cdot\sigma|^{\alpha}\,\operatorname{sign}(x\cdot\sigma)\,d\sigma \tag{26.57}$$

для гиперсингулярного интеграла соответственно нейтрального, четного и нечетного типа, $\omega_n(\alpha) = \Gamma(n+\alpha)[2\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma(1/2+\alpha/2)]^{-1}$. *В (26.55)* $(i\xi)^{\alpha} = |\xi|^{\alpha} e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sign}\xi}$. *В случае четной характеристики* $\Omega(\sigma)$ *формулы (26.55), (26.56) совпадают и верны для гиперсингулярного интеграла нейтрального типа и при* $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$

Доказательство. При использовании нецентрированной разности имеем

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma)\,d\sigma \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{i\rho x\cdot\sigma})^l}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho. \tag{26.58}$$

В силу аналитичности по α внутреннего интеграла его достаточно вычислить при $0 < \alpha < 1$. Пользуясь тем, что $\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} = 0$, получаем

$$\int_0^\infty \rho^{-1-\alpha}(1-e^{i\rho\xi})^l d\rho = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\Big[\int_0^\infty \rho^{-1-\alpha}(\cos k\rho\xi - 1)\,d\rho + \\ + i\int_0^\infty \rho^{-1-\alpha}\sin k\rho\xi\, d\rho\Big],$$

где $\xi = x\cdot\sigma$. Интегрирование по частям в первом интеграле и формула (26.12) дают

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{i\rho\xi})^l}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho = \frac{\pi A_l'(\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\sin\alpha\pi}(-i\xi)^\alpha,\ \alpha>0,\ l>\alpha, \quad (26.59)$$

что и превращает (26.58) в (26.55) с учетом (26.7).

В случае центрированной разности аналогично (26.58) приходим к внутреннему интегралу

$$I(\xi) = \int_0^\infty \rho^{-1-\alpha}(e^{\frac{i}{2}\rho\xi} - e^{-\frac{i}{2}\rho\xi})^l d\rho = \\ = \sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu\binom{l}{\nu}\int_0^\infty \rho^{-1-\alpha}[e^{i\xi\left(\frac{l}{2}-\nu\right)\rho} - 1]\,d\rho,\ \xi = x\cdot\sigma$$

(преобразовали его при $0<\alpha<1$). Применив (26.59), получим

$$I(\xi) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi\,\Gamma(1+\alpha)}\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^{\nu-1}\binom{l}{\nu}\left[-i\xi\left(\frac{l}{2}-\nu\right)\right]^\alpha = \\ = \frac{\pi|\xi|^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\left\{\frac{1}{\sin(\alpha\pi/2)}\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^{\nu-1}\binom{l}{\nu}\left|\frac{l}{2}-\nu\right|^\alpha + \right. \\ \left. + i\,\frac{\operatorname{sign}\xi}{\cos(\alpha\pi/2)}\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu\binom{l}{\nu}\left|\frac{l}{2}-\nu\right|^\alpha \operatorname{sign}\left(\frac{l}{2}-\nu\right)\right\}.$$

Замечая, что $\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu\binom{l}{\nu}\left|\frac{l}{2}-\nu\right|^\alpha \equiv 0$ при нечетном l и $\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu \times \binom{l}{\nu}\left|\frac{l}{2}-\nu\right|^\alpha \operatorname{sign}\left(\frac{l}{2}-\nu\right)\equiv 0$ при четном l, получаем, что $I(\xi) = \frac{\pi A_l''(\alpha)|\xi|^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}$ при четном l и $I(\xi) = -\frac{\pi i A_l''(\alpha)|\xi|^\alpha\operatorname{sign}\xi}{2\Gamma(1+\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}$ при нечетном l, что и дает (26.56), (26.57). Теорема 26.4 доказана.

Следствие 1. *Гиперсингулярные интегралы (26.47) не зависят от порядка l конечной разности при сделанном выборе нормировочной постоянной $d_{n,l}(\alpha)$.*

Следствие 2. *Гиперсингулярные интегралы нейтрального и четного типа с четной характеристикой совпадают.*

Из (26.55)—(26.57) заключаем также, что для целых $\alpha=1, 2, \ldots$ гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}_\Omega^\alpha f$ является однородным дифференциальным оператором в частных производных порядка α при надлежащем выборе типа гиперсингулярного интеграла. Именно справедливо

Следствие 3. *При $\alpha=2, 4, 6, \ldots$ символ гиперсингулярного интеграла нейтрального и четного типа, а при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ символ гиперсингулярного интеграла нечетного типа является многочленом:*

$$\mathscr{D}_\Omega^\alpha(x) = \frac{\pi}{2\delta\beta_n(\alpha)}\sum_{|j|=\alpha}\frac{\Omega_j}{j!}x^j, \quad (26.60)$$

где $\delta=1$ для гиперсингулярного интеграла нейтрального и четного типа и $\delta=i$ для гиперсингулярного интеграла нечетного типа, а Ω_j — сферические моменты функции $\Omega(\sigma)$:

$$\Omega_j = \int_{S_{n-1}} \sigma^j \Omega(\sigma)\, d\sigma. \tag{26.61}$$

Для получения (26.60) из (26.55)—(26.57) следует воспользоваться равенством

$$(x\cdot\sigma)^m = \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j!} x^j \sigma^j .$$

Б. Сходимость гиперсингулярных интегралов с разными характеристиками. Мы хотим найти ответ на следующий вопрос. Пусть функция $f(x)$ такова, что на ней сходится гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}^\alpha_{\Omega_1} f$ с некоторой характеристикой $\Omega_1(y')$. Будет ли сходиться на этой же функции гиперсингулярный интеграл с другой характеристикой $\Omega_2(y')$? Этот вопрос удобно расчленить следующим образом: влечет ли сходимость гиперсингулярного интеграла с постоянной характеристикой (т. е. сходимость риссовой производной (26.1)) за собой и сходимость такого интеграла с произвольной характеристикой и наоборот? В одну сторону этот вопрос будет решаться безусловно: сходимость $\mathbf{D}^\alpha f$ влечет сходимость $\mathbf{D}^\alpha_\Omega f$ при произвольной ограниченной характеристике (условие ограниченности можно ослабить). Так как, очевидно, сходимость $\mathbf{D}^\alpha_\Omega f$ с характеристикой $\Omega(y')\equiv 0$ не может приводить к сходимости $\mathbf{D}^\alpha f$, то для обратного утверждения потребуется некоторое условие эллиптичности на характеристику $\Omega(y')$.

Относительно самой функции $f(x)$ сделаем априорное предположение, что $f(x)\in L_r(R^n)$, $1<r<\infty$, а сходимость гиперсингулярного интеграла от этой функции будем рассматривать по норме пространства $L_p(R^n)$, $1<r<\infty$:

$$\mathbf{D}^\alpha_\Omega f = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f, \tag{26.62}$$

где

$$\mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{(\Delta^l_y f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y')\, dy.$$

Не вдаваясь в подробности, приведем только схему рассуждений. Детали доказательств можно найти в работах В. А. Ногина, С. Г. Самко [1, 3].

Пусть $f(x)\in L_r(R^n)$ и существует в $L_p(R^n)$ риссова производная $\mathbf{D}^\alpha f$. На таких функциях непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f = A_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha f, \tag{26.63}$$

где A_ε — оператор свертки с ядром

$$a_\varepsilon(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Delta_{l,\alpha}(x,\, y)\,\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \tag{26.64}$$

$\Delta_{l,\alpha}(x,\, y)$—функция (26.27). Это ядро локально суммируемо и $|a_\varepsilon(x)|\leqslant c\,|x|^{-n}$ при $|x|\to\infty$. Используя свойства функции $\Delta_{l,\alpha}(x,\, y)$ (см. п. 3° данного параграфа), можно показать, что оператор свертки с этим ядром ограничен в L_p равномерно по ε: $\|A_\varepsilon\|_{L_p\to L_p}\leqslant c$, где c не зависит от ε. Это обстоятельство позволяет с помощью теоремы Банаха—Штейнгауза обосновать предельный переход в (26.63) при $\varepsilon\to 0$. Предельный оператор $A = \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon$ есть многомерный сингулярный оператор вида $A\varphi = \Omega_0\varphi + B\varphi$,

где Ω_0—среднее значение характеристики по сфере, B — некоторый оператор Кальдерона—Зигмунда, ограниченный в $L_p(R^n)$, $1<p<\infty$. Тем самым из (26.63) получается утверждение о сходимости $\mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon}f$ в $L_p(R^n)$. Для получения обратного утверждения требуется, чтобы предельный оператор A был обратим. Вычисляя преобразование Фурье ядра этого сингулярного оператора, можно показать, что условие обратимости оператора A имеет (при использовании гиперсингулярных интегралов нейтрального типа) следующий вид:

$$\int\limits_{S_{n-1}} (-ix\cdot\sigma)^\alpha \Omega(\sigma)\,d\sigma \neq 0,\ |x|=1 \tag{26.65}$$

(ср. с (26.55)). Для характеристики $\Omega(\sigma)$, достаточно гладкой и удовлетворяющей условию эллиптичности (26.65), из (26.63) выводится обратное утверждение о том, что сходимость (в L_p) $\mathbf{D}^\alpha_\Omega f$ влечет за собой сходимость $\mathbf{D}^\alpha f$ в L_p, $f\in L_r$. Приведенные рассуждения обосновываются при условиях $1<p<\infty$, $1<r<\infty$, $1/p-\alpha/n\leqslant 1/r\leqslant 1/p$.

5°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой как свертки с обобщенной функцией. Покажем, что гиперсингулярный интеграл (26.47) можно представить в виде свертки с обобщенной функцией вида $\Omega(x')/|x|^{n+\alpha}$, т. е что гиперсингулярный интеграл совпадает с регуляризацией расходящегося интеграла. В соответствии с регуляризацией (25.19) введем регуляризацию аналогичного расходящегося интеграла с характеристикой $\Omega(x')$ равенством

$$\text{p. f.}\ \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f = \int\limits_{|y|<1} \Omega(y')\,\frac{f(x-y)-(R_y^{l-1}f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy + \int\limits_{|y|>1} \frac{\Omega(y')\,f(x-y)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy + \sum_{|j|\leqslant l-1} \frac{(-1)^{|j|}}{j!}(\mathscr{D}^j f)(x)\ \text{p. f.}\int\limits_{|y|<1}\frac{y^j\Omega(y')\,dy}{|y|^{n+\alpha}}, \tag{26.66}$$

где

$$(R_y^{l-1}f)(x) = \sum_{|j|\leqslant l-1}\frac{(-y)^j}{j!}(\mathscr{D}^j f)(x)$$

есть отрезок ряда Тейлора, $l>\alpha$. Переходя к сферическим координатам, легко получить (в соответствии с определением 5.2 p. f.-интеграла), что

$$\text{p. f.}\int\limits_{|y|<1}\frac{y^j\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}}\,dy = \begin{cases}\Omega_j/(|j|-\alpha), & |j|\neq\alpha,\\ 0, & |j|=\alpha,\end{cases}$$

где Ω_j—сферические моменты (26.61). Поэтому

$$\text{p. f.}\ \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f = \int\limits_{R^n}\Omega(y')\,\frac{f(x-y)-\chi(y)(R_y^{l-1}f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\,dy + \sum_{|j|\leqslant l-1}{}' \frac{(-1)^{|j|}\Omega_j}{j!\,(|j|-\alpha)}(\mathscr{D}^j f)(x),\ l>\alpha, \tag{26.67}$$

где штрих означает пропуск слагаемых с номером $|j|=\alpha$ в случае целого α, а $\chi(y)$ — характеристическая функция шара $|y|<1$.

Если в качестве l выбрать ближайшее целое к α, $l>\alpha$, т. е. $l=[\alpha]+1$, то (26.67) можно записать в виде

$$\text{p. f.}\ \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f = \int\limits_{R^n}\frac{f(x-y)-(R_y^{[\alpha]}f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\,\Omega(y')\,dy,\quad \alpha\neq 1,2,3,\ldots \tag{26.68}$$

что проверяется непосредственными преобразованиями. Запись (26.68) имеет, очевидно, преимущество перед (26.67) своей компактностью, но не пригодна при целых α (в случае целых α ей можно придать смысл только ценою ограничения $\int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma)\, d\sigma = 0$, что исключает, в частности, $\Omega(\sigma) = \mathrm{const}$).

Теорема 26.5. *Пусть* $\Omega(\sigma) \in L_1(S_{n-1})$, *а* $f(x) \in C^l(R^n)$ *и ограничена. Справедливы формулы*

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = -\frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)}\ p.\ f.\ \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f,\ \alpha \neq 2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \tag{26.69}$$

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = -\frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)}\ p.\ f.\ \frac{\Omega(x') + \Omega(-x')}{2|x|^{n+\alpha}} * f,\ \alpha \neq 2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \tag{26.70}$$

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = -\frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)}\ p.\ f.\ \frac{\Omega(x') - \Omega(-x')}{2|x|^{n+\alpha}} * f,\ \alpha \neq 1,\ 3,\ 5,\ \ldots, \tag{26.71}$$

для гиперсингулярных интегралов соответственно нейтрального, четного и нечетного типа. В исключенных в (26.69)—(26.71) случаях целых α *гиперсингулярный интеграл является дифференциальным оператором в частных производных порядка* α:

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = \frac{(-1)^{[\alpha/2]}\pi}{2\beta_n(\alpha)} \sum_{|j|=\alpha} \frac{\Omega_j}{j!} (\mathscr{D}^j f)(x) \tag{26.72}$$

($\alpha = 2, 4, 6, \ldots$ для гиперсингулярного интеграла нейтрального и четного типа и $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ для гиперсингулярного интеграла нечетного типа).

Доказательство. Формула (26.72) следует из (26.60) (но может быть установлена и непосредственно, без обращения к образам Фурье). Приведем доказательство, например, формулы (26.69). Имеем

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} \Big\{ f(x) + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \binom{l}{\nu} [f(x - \nu y) -$$

$$- R^{l-1}_{\nu y}(x)\, \chi(\nu y)] + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \binom{l}{\nu} R^{l-1}_{\nu y}(x)\, \chi(\nu y) \Big\}\, dy.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = -\frac{A_l'(\alpha)}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \Omega(y') \frac{f(x-y) - \chi(y) R^{l-1}_{y}(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy +$$

$$+ \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{|j| \leqslant l-1} \frac{(-1)^{|j|} I_j}{j!} (\mathscr{D}^j f)(x), \tag{26.73}$$

где

$$I_j = \int_{R^n} \frac{\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{\nu} \binom{l}{\nu} (\nu y)^j \chi(\nu y)\, dy.$$

Непосредственными преобразованиями можно найти, что $I_j = \dfrac{A_l'(\alpha)}{\alpha - |j|}\, \Omega_j$, где в случае $|j| = \alpha$ следует заменить $A_l'(\alpha)/(\alpha - |j|)$ на $dA_l'(\alpha)/d\alpha$. Поэтому (26.73) превращается в (26.69). Аналогично доказываются формулы (26.70), (26.71).

6°. Представление дифференциальных операторов в частных производных гиперсингулярными операторами. Выше мы убедились в том, что класс гиперсингулярных операторов (26.47) с однородной характеристикой содержит в себе некоторые однородные дифференциальные операторы, см. (26.72). В этом пункте докажем более сильное обратное утверждение о том, что все однородные дифференциальные операторы в частных производных порядка α с постоянными коэффициентами можно записать в виде гиперсингулярного интеграла $\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega}f$ с однородной характеристикой. Вначале поставим более общий вопрос, навеянный равенствами (26.52) в образах Фурье. Пусть $a(x/|x|)$ — заданная однородная функция. Существует ли характеристика $\Omega(x/|x|)$ такая, что

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega}f = \mathcal{F}^{-1}a\,(x/|x|)\,|x|^{\alpha}\mathcal{F}f, \tag{26.74}$$

и как построить ее по заданной функции $a(x/|x|)$?

Заметим, что выражение, стоящее в правой части равенства (26.74), само по себе можно рассматривать как обобщение операции лиувиллевского дифференцирования. Оно содержит в себе, в частности, лиувиллевские дробные производные, частные и смешанные, см. (24.14)—(24.15′), при выборе $a(x)=|x|^{-|\alpha|}\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Такое обобщение дробного дифференцирования (свертка с однородной обобщенной функцией порядка $-\alpha-n$) рассматривалось и использовалось в работе С. Л. Соболева и С. М. Никольского [1]. Мы, таким образом, хотим показать, что это обобщенное дробное дифференцирование совпадает с гиперсингулярным интегралом с некоторой характеристикой.

Пусть для определенности рассматривается гиперсингулярный интеграл нейтрального типа. В силу формулы (26.55) равенство (26.74) сводится к равенству

$$\frac{\omega_n(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)}\int\limits_{S_{n-1}}\Omega(\sigma)(-ix\cdot\sigma)^{\alpha}d\sigma=a(x),\quad |x|=1,\ \alpha\neq 1,\ 3,\ 5,\ \ldots, \tag{26.75}$$

представляющему собой интегральное уравнение первого рода относительно искомой характеристики $\Omega(\sigma)$. Это уравнение можно решить средствами гармонического анализа на сфере. Воспользуемся аппаратом сферических гармоник, изложение которого можно найти в книгах И. Стейна [1], И. Стейна, Г. Вейса [1], С. Г. Самко [31] и др. Функции $f(x)$, $x\in S_{n-1}$, ставится в соответствие ее ряд Фурье—Лапласа

$$f(x)\sim\sum_{m=0}Y_m(f,\,x), \tag{26.76}$$

где $Y_m(f,\,x)$ — сужение гармонического многочлена порядка m на единичную сферу. Гармоническая составляющая $Y_m(f,\,x)$ порядка m вычисляется по формуле

$$Y_m(f,\,x)=\frac{d_n(m)}{|S_{n-1}|}\int\limits_{S_{n-1}}f(\sigma)\,P_m(x\cdot\sigma)\,d\sigma, \tag{26.77}$$

где $d_n(m)=\dfrac{n+2m-2}{n+m-2}\binom{m+n-2}{m}$—число линейно независимых гармоник порядка m, а $P_m(t)$ — обобщенный многочлен Лежандра:

$$P_m(t)=\begin{cases}\dbinom{m+n-3}{m}^{-1}C_m^{\frac{n-2}{2}}(t), \text{ где } C_m^{\lambda}(t) \text{ — многочлен Гегенбауэра,}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при } n\geqslant 3,\\ \cos(m\arccos t)\text{—многочлен Чебышева при } n=2.\end{cases}$$

Ряд в (26.76) сходится к функции $f(x)$, если она достаточно гладкая.

Разлагая в уравнении (26.75) правую часть и решение в ряд Фурье—Лапласа, приходим к соотношению

$$\frac{\omega_n(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{S_{n-1}}(-ix\cdot\sigma)^{\alpha}Y_m(\Omega,\sigma)\,d\sigma=\sum_{m=0}^{\infty}Y_m(a,x). \quad (26.78)$$

Для любой сферической гармоники $Y_m(\sigma)$ справедлива формула

$$\int_{S_{n-1}}(-ix\cdot\sigma)^{\alpha}Y_m(\sigma)\,d\sigma=-\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\alpha}}\Gamma(1+\alpha)\sin\alpha\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)}\,i^mY_m(x), \quad (26.79)$$

где $|x|=1$; случаю целого α отвечает равенство

$$\int_{S_{n-1}}(x\cdot\sigma)^{\alpha}Y_m(\sigma)\,d\sigma=\begin{cases}c_mY_m(x), & \alpha-m=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\\ 0, & \alpha-m=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\\ & \alpha-m=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\end{cases} \quad (26.80)$$

где $|x|=1$ и $c_m=2^{1-\alpha}\pi^{n/2}\,\Gamma(1+\alpha)\left[\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-m}{2}\right)\right]^{-1}$ (см., например, С. Г. Самко [28, с. 163; 31, с. 91]). Поэтому из (26.78), считая α нецелым, получаем

$$\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,Y_m(\Omega,x)=-\frac{\pi}{i^m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}\,Y_m(a,x)$$

в силу линейной независимости сферических гармоник разных порядков. Следовательно, искомое решение $\Omega(x)$ можно записать в виде ряда

$$\Omega(x)=-\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)}{i^m\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}\,Y_m(a,x), \quad (26.81)$$

$$\alpha\neq 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Можно показать, что этот ряд сходится и действительно дает решение уравнения (26.75), если потребовать, чтобы функция $a(x)$, $|x|=1$, была достаточно гладкой на сфере. Останавливаться на этом не станем. Заметим еще, что «плохо» сходящийся ряд (26.81) можно просуммировать в терминах расходящегося интеграла:

$$\Omega(x)=-\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)}{2\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma(1+\alpha/2)}\,p.\,f.\int_{S_{n-1}}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{(ix\cdot\sigma)^{n+\alpha}},\quad |x|=1,\ \alpha\neq 1,2,3,\ldots \quad (26.82)$$

(см. С. Г. Самко [30, с. 37]; интегралу в правой части придается смысл методом регуляризации или аналитическим продолжением по α).

Случай целых α требует отдельного рассмотрения. Относящийся сюда результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 26.6. *Пусть* $\alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ *и*

$$a_{\alpha}(\mathscr{D})=\sum_{|j|=\alpha}a_j\mathscr{D}^j$$

— однородный дифференциальный оператор порядка α с постоянными коэффициентами a_j. Существует однородный многочлен $\Omega_\alpha(y)$ порядка α, такой, что

$$a_\alpha(\mathscr{D})f_*^l = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\,\Omega_\alpha\left(\frac{y}{|y|}\right)dy, \tag{26.83}$$

где справа — гиперсингулярный интеграл нейтрального или четного типа при $\alpha=2, 4, 6, \ldots$ и нечетного типа при $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ Характеристика $\Omega_\alpha(y')$ гиперсингулярного интеграла вычисляется по заданному многочлену $a_\alpha(x)$ по формуле

$$\Omega_\alpha(y) = \int\limits_{S_{n-1}} a_\alpha(\sigma)\,\mathscr{K}(y\cdot\sigma)\,d\sigma,\ |y|=1, \tag{26.84}$$

где

$$\mathscr{K}(t) = \frac{(-1)^{[\alpha/2]}\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{[\alpha/2]}(-1)^k\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha-k\right)k!\times$$

$$\times d_n(\alpha-2k)\,P_{\alpha-2k}(t),$$

$-1<t<1$, $d_n(\alpha-2k)$ и $P_{\alpha-2k}(t)$ — то же, что и в (26.77).

Доказательство. Остановимся для определенности на случае четных $\alpha=2, 4, 6, \ldots$ В силу формулы (26.56) для преобразования Фурье гиперсингулярного интеграла искомая характеристика для равенства (26.83) должна определяться из уравнения

$$\int\limits_{S_{n-1}}\Omega_\alpha(\sigma)\,(x\cdot\sigma)^\alpha\,d\sigma = \frac{(-1)^{\alpha/2}}{\omega_n(\alpha)}\,a_\alpha(x),\ |x|=1. \tag{26.85}$$

Действуя, как и выше, разлагаем $a_\alpha(x)$ и $\Omega_\alpha(x)$ по сферическим гармоникам, как в (26.76), только теперь эти разложения будут конечными суммами. Подставляя эти разложения в (26.85), приходим к равенствам

$$\sum_{m=0}^{\alpha}\int\limits_{S_{n-1}}(x\cdot\sigma)^\alpha Y_m(\Omega_\alpha,\ \sigma)\,d\sigma = \frac{(-1)^{\alpha/2}}{\omega_n(\alpha)}\sum_{m=0}^{\alpha}Y_m(a_\alpha,\ x).$$

Отсюда в силу (26.80)

$$\sum_{m=0}^{\alpha}c_m Y_m(\Omega_\alpha,\ x) = \frac{(-1)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega_n(\alpha)}\sum_{m=0}^{\alpha}Y_m(a_\alpha,\ x)$$

(в силу (26.80) суммирование в левой части осуществляется только по $m=0, 2, 4, \ldots, \alpha$, что согласуется с тем что многочлен $a_\alpha(x)$ содержит гармонические составляющие $Y_m(a_\alpha,\ x)$ только четного порядка). Ввиду линейной независимости сферических гармоник получаем, что

$$Y_m(\Omega_\alpha,\ x) = (-1)^{\alpha/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\,Y_m(a_\alpha,\ x).$$

Следовательно,

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{(-1)^{\alpha/2}}{\Gamma(1+\alpha/2)}\sum_{m=0}^{\alpha}\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-m}{2}\right)Y_m(a_\alpha,\ x),$$

что с помощью формулы (26.77) приводится к виду (26.84).

Случай $\alpha=1, 3, 5, \ldots$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Можно показать с помощью непосредственных вычислений, что в случае $\alpha=2$, когда $a_2(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, формула (26.84) имеет простой вид:

$$\Omega_2(y)=-\frac{n+2}{2}a_2(y)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}a_2,$$

где $\operatorname{tr}a_2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\frac{n}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}}a_2(\sigma)\,d\sigma$. В частности, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=-\frac{n+2}{2d_{n,l}(2)}\int_{R^n}\frac{(\Delta_i^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,\frac{t_it_j}{|t|^2}\,dt,\quad i\neq j. \tag{26.86}$$

7°. Пространство $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов и его описание в терминах гиперсингулярных интегралов. Пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$. Через

$$I^\alpha(L_p)=\{f: f=I^\alpha\varphi,\ \varphi\in L_p(R^n)\} \tag{26.87}$$

обозначаем пространство риссовых потенциалов от функций из $L_p(R^n)$. Оно определено при $0<\alpha<n$, $1\leqslant p<n/\alpha$. Ввиду теоремы 25.2 и неравенства (25.42)

$$I^\alpha(L_p)\subset L_q(R^n),\ I^\alpha(L_p)\subset L_p(R^n;\ |x|^{-\alpha p}),\quad 1<p<n/\alpha,\ q=np(n-\alpha p)^{-1},$$

и повторяя рассуждения из § 6, п. 1°, легко установить, что $I^\alpha(L_p)\neq L_q(R^n)$, $I^\alpha(L_p)\neq L_p(R^n;\ |x|^{-\alpha p})$. Можно показать, что $I^\alpha(L_p)$ не совпадает ни с каким пространством $L_r(R^n;\ \rho)$, $1\leqslant r\leqslant\infty$, и потому нуждается в описании.

Пространство $I^\alpha(L_p)$ можно ввести и при $p\geqslant n/\alpha$ (в частности, при $\alpha\geqslant n$), понимая его в смысле обобщенных функций над классом Лизоркина (25.16):

$$(I^\alpha\varphi,\ \omega)=(\varphi,\ I^\alpha\omega),\quad \omega\in\Phi,$$

что корректно ввиду инвариантности Φ относительно I^α (теорема 25.1). Разумеется, теперь это будет класс обобщенных функций. Однако этот класс устроен любопытно в том отношении, что конечные разности (достаточно большого порядка $l>\alpha$) этих обобщенных функций являются обычными функциями. Конечные разности обобщенных функций понимаются стандартным способом: $(\Delta_h^l f,\ \omega)=(f,\ \Delta_{-h}^l\omega)$. С подобной ситуацией мы уже столкнулись в одномерном случае (см. замечание 8.2). Сформулируем более точно возникающую здесь картину в виде следующей леммы.

Лемма 26.5. *Пусть $f=I^\alpha\varphi$, $\varphi\in L_p$, $\alpha>0$, $1\leqslant p<\infty$, $l>\alpha$. Тогда $(\Delta_h^l f)(x)\in L_p(R^n)$ при любом $h\in R^n$, если $p<n/\alpha$. Если $p\geqslant n/\alpha$, это утверждение заменяется следующим: функционал $\Delta_h^l f\in\Phi'$ является регулярным и допускает доопределение с класса Лизоркина Φ на класс Шварца S:*

$$(\Delta_h^l f,\ \omega)=(g,\ \omega),\quad \omega\in S, \tag{26.88}$$

где $g=g(x)=\Delta_{l,\alpha}(\cdot,\ h)*\varphi\in L_p(R^n)$.

Доказательство. Из оценки (26.33) следует в силу связи (26.32), что

$$|\Delta_{l,\alpha}(x,\ h)|\leqslant c\,|h|^l(|h|+|x|)^{\alpha-n-l} \tag{26.89}$$

при $|x|\geqslant(l+1)|h|$, где c не зависит от x (и h). Поэтому $\Delta_{l,\alpha}(x,\ h)\in L_1(R^n)$ при любом h и тогда из (26.41) вытекает, что $\Delta_h^l f\in L_p(R^n)$. Пусть $p\geqslant n/\alpha$.

Тогда равенство (26.41) справедливо в смысле пространства Φ': $(\Delta_h^l f, \omega) = (\Delta_{l,\alpha}(\cdot, h) * \varphi, \omega)$, $\omega \in \Phi$, $\varphi \in L_p$, что проверяется непосредственно. Правая часть этого равенства допускает доопределение для всех $\omega \in S$, а $g = \Delta_{l,\alpha}(\cdot, h) * \varphi \in L_p(R^n)$, поскольку $\Delta_{l,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$, что и требовалось.

Норму в пространстве (26.87) введем равенством

$$\|f\|_{I^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{26.90}$$

Перейдем к описанию пространства $I^\alpha(L_p)$. Это описание докажем одновременно с рассмотрением пространств

$$L_{p,r}^\alpha(R^n) = \{f : f \in L_r(R^n),\ \mathbf{D}^\alpha f \in L_p(R^n)\},$$
$$\|f\|_{L_{p,r}^\alpha} = \|f\|_r + \|\mathbf{D}^\alpha f\|_p,\ \alpha > 0,\ 1 \leqslant p < \infty,\ 1 \leqslant r < \infty, \tag{26.91}$$

естественно возникающих как некоторое обобщение пространства $I^\alpha(L_p)$. Подчеркнем, что $\mathbf{D}^\alpha f$ в (26.91) понимается в смысле сходимости в L_p, см. (26.26). Начнем со следующей вспомогательной теоремы.

Теорема 26.7. *Пусть* $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$, $\alpha > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$. *Тогда для разности* $(\Delta_h^m f)(x)$ *справедливо при* $m > \alpha$ *представление*

$$(\Delta_h^m f)(x) = \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - \xi, h)(\mathbf{D}^\alpha f)(\xi)\, d\xi, \tag{26.92}$$

где $\Delta_{m,\alpha}(x, h)$ *— функция (26.27).*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{D}^\alpha f$ определяется нецентрированной разностью, разность Δ_h^m центрированная, и допустим для простоты, что $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \ldots$ (остальные варианты рассматриваются совершенно аналогично). Обозначим $\varphi_\varepsilon = \mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f$ и $B\varphi = \Delta_{m,\alpha}(\cdot, h) * \varphi$. Имеем

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \left\{ \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - y, h) f(y)\, dy \int_{|y-z|>\varepsilon} \frac{dz}{|y-z|^{n+\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} \nu^\alpha \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - y, h)\, dy \int_{|y-z|>\varepsilon\nu} \frac{f(z)\, dz}{|y-z|^{n+\alpha}} \right.\cdot$$

Так как в силу (26.89) $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$ при $m > \alpha$, то допустима перестановка порядка интегрирования. Поэтому

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} \int_{R^n} f(z)\, dz \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Delta_{m,\alpha}(x - z - \nu y, h)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy =$$
$$= \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\, d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f\left[x - z + \left(\frac{m}{2} - k\right) h\right] dz \times$$
$$\times \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{|z - \nu y|^{\alpha-n}}{|y|^{n+\alpha}}\, dy.$$

Отсюда после замены $z = \varepsilon\tau$, $y = \varepsilon \dfrac{|\tau|}{|\xi|^2}\, \omega_x(\xi)$, где $\omega_x(\xi)$ — вращение (25.68), получаем

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\, d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{(\Delta_h^m f)(x-\varepsilon\tau)}{|\tau|^n}\, d\tau \int\limits_{|\xi|<|\tau|} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} \times$$

$$\times \left| |\xi| e_1 - \nu \frac{\xi}{|\xi|} \right|^{\alpha-n} d\xi,$$

что ввиду формулы $\left| |\xi| e_1 - \nu\xi/|\xi| \right| = |\xi - \nu e_1|$ дает равенство

$$\int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-\tau,\ h)\,\varphi_\varepsilon(\tau)\, d\tau = \int\limits_{R^n} (\Delta_h^m f)(x-\varepsilon\tau)\, \mathcal{K}_{l,\alpha}(|\tau|)\, d\tau. \qquad (26.93)$$

Отсюда (26.92) получится при $\varepsilon \to 0$. Обоснуем предельный переход в (26.93). Так как $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ в L_p, а $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$, то левая часть сходится по норме L_p. С другой стороны, так как $f(x) \in L_r$, а $\mathcal{K}_{l,\alpha}(|\tau|) \in L_1$, то правая часть сходится к $(\Delta_h^m f)(x)$ по норме L_r. В силу совпадения левой и правой частей в (26.93) их пределы обязаны совпадать почти всюду. Это и дает (26.92). Теорема доказана.

Замечание 26.5. Представление (26.92) является распространением представления (26.41) на тот случай, когда информация о том, что $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, заменена условием $f(x) \in L^\alpha_{p,r}(R^n)$.

Замечание 26.6. Так как представление (26.92) получено предельным переходом из (26.93), оно, очевидно, справедливо не только в предположении, что $f(x) \in L^\alpha_{p,r}(R^n)$, но и в предположении, что $(\mathbf{D}^\alpha f)(x) \in L_p(R^n)$, $(\Delta_h^m f)(x) \in L_p(R^n)$, $m > \alpha$, $1 \leqslant p < \infty$.

Описание пространства $I^\alpha(L_p)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 26.8. *Пусть $f(x)$ локально суммируема и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $f(x) \in L_q(R^n)$, $q = np/(n-\alpha p)$, $\mathbf{D}^\alpha f \in L_p(R^n)$ при $1 < p < n/\alpha$,

2) $(\Delta_h^l f)(x) \in L_p(R^n)$ и существовал $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ (L_p)}} \int\limits_{|h|>\varepsilon} |h|^{-n-\alpha} (\Delta_h^l f)(x)\, dh$ при $p \geqslant n/\alpha$, где $l > 2[\alpha/2]$ выбирается как в п. 2°. (В случае $p = 1$ условие $\mathbf{D}^\alpha f \in L_1$ необходимо.) Кроме того,

$$I^\alpha(L_p) \cap L_r = L^\alpha_{p,r},\ \alpha > 0,\ 1 \leqslant p < \infty,\ 1 \leqslant r < \infty. \qquad (26.94)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x) \in I^\alpha(L_p)$. Если $1 < p < n/\alpha$, то $f \in L_q$ в силу теоремы Соболева 25.2, а если $1 \leqslant p < n/\alpha$, то $\mathbf{D}^\alpha f \in L_p$ в силу теоремы 26.3. Пусть $p \geqslant n/\alpha$. Тогда $(\Delta_h^l f)(x) \in L_p$ в силу (26.41) и анализ доказательства теоремы 26.2 показывает, что для $\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f$ справедливо представление (26.40), и потому существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f$. Одновременно показано, что $I^\alpha(L_p) \cap L_r \subseteq L^\alpha_{p,r}(R^n)$.

Достаточность. Пусть $f(x) \in L^\alpha_{p,r}(R^n)$. Применимо представление (26.92). Замечаем, что правая часть в (26.92) есть $\Delta_h^m I^\alpha \mathbf{D}^\alpha \varphi$, при этом $I^\alpha \mathbf{D}^\alpha \varphi$, где $\mathbf{D}^\alpha \varphi \in L_p$, понимается в обычном смысле при $1 \leqslant p < n/\alpha$ и в смысле Φ' при $p \geqslant n/\alpha$. Следовательно, (26.92) означает, что

$$\Delta_h^m f \equiv \Delta_h^m I^\alpha \mathbf{D}^\alpha f \quad (\text{в смысле } \Phi').$$

Нетрудно видеть, что функционалы f и g, имеющие тождественно совпадающие конечные разности, могут отличаться разве лишь многочленом. Для этого достаточно перейти в рамках S' к образам Фурье: $(1 - e^{ix\cdot h})^m \times$

$\times(\hat{f}-\hat{g})=0$, $x,\ h\in R^n$, и воспользоваться теоремой об общем виде функционала, сосредоточенного в точке. Следовательно,

$$f(x)=I^{\alpha}\mathbf{D}^{\alpha}f+P(x), \tag{26.95}$$

где $P(x)$ — многочлен. Здесь $f\in L_r$ «не содержит» многочлена. Если $1<p<n/\alpha$, то $I^{\alpha}\mathbf{D}^{\alpha}f\in L_q$ также не содержит многочлена. Поэтому $p(x)\equiv 0$, и тогда из (26.95) $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$. Если же $p\geqslant n/\alpha$, то (26.95) означает то же самое, так как присутствие многочлена согласуется с определением пространства $I^{\alpha}(L_p)$ при $p\geqslant n/\alpha$. Тем самым доказано вложение $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)\subseteq I^{\alpha}(L_p)\cap L_r$, что вместе с доказанным в необходимой части обратным вложением дает равенство (26.94).

Из (26.95) вытекает достаточность условий 1) (берем $r=np/(n-\alpha p)$). Чтобы получить достаточность условий 2), нужно повторить рассуждения, приведенные выше в достаточной части с учетом замечания 26.5. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $1<p<n/\alpha$. *Тогда*

$$L^{\alpha}_{p,q}(R^n)=I^{\alpha}(L_p),\quad q=np/(n-\alpha p).$$

Следствие 2. *Пространства* $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ *не зависят от типа конечной разности, определяющей* $\mathbf{D}^{\alpha}f$, *и от порядка* l *этой разности (при указанном в конце п. 2° правиле выбора* l).

Следствие 3. *Пространства* $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ *полны.*

Из теоремы 26.8 получается с учетом (26.19) простое достаточное условие принадлежности классу $I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<n/\alpha$: $|f(x)|\leqslant c/(1+|x|)^{\lambda}$, $|(\mathscr{D}^j f)(x)|\leqslant c/(1+|x|)^{\mu}$, $|j|=m>\alpha$; $\lambda>n/q$, $\mu>n/p$.

Приведем еще один полезный вариант описания пространства $I^{\alpha}(L_p)$, в котором условие сходимости усеченных рисс овых производных $\mathbf{D}^{\alpha}_{\varepsilon}f$ по норме L_p заменяется требованием их равномерной ограниченности.

Теорема 26.9. *Для того чтобы* $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<n/\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x)\in L_q(R^n),\quad q=np/(n-\alpha p),\quad \text{или}\quad (1+|x|^{\alpha})f(x)\in L_p(R^n) \tag{26.96}$$

и чтобы существовала последовательность $\varepsilon_k\to 0$ *такая, что*

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{\varepsilon_k}f\|_p\leqslant c<\infty, \tag{26.97}$$

где c *не зависит от* ε_k.

Доказательство основано на слабой компактности пространства $L_p(R^n)$. Оно аналогично доказательству подобной одномерной теоремы 6.2 и потому опускается (см. доказательство теоремы 6.2, приведенное полностью; нужно заменить в нем оператор (6.22) на оператор $\Delta_{m,\alpha}(\cdot,h)*\varphi$, где $\Delta_{m,\alpha}(x,h)$ — функция (26.27), вместо представления (6.23) получим представление (26.95), после чего рассуждения повторяют действия в (6.24)).

Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ можно описать также в терминах сходимости по L_p-норме гиперсингулярных интегралов (25.69), (25.70), связанных с полугруппами Пуассона и Гаусса—Вейерштрасса. Именно справедлива

Теорема 26.10. *Для того чтобы* $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$, $0<\alpha<n$, $1<p<n/\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f\in L_q$, $q=np/(n-\alpha p)$, *и*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\int_{\varepsilon}^{\infty}t^{-1-\alpha}(E-P_t)^l f\,dt\in L_p\quad\text{или}\quad\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\int_{\varepsilon}^{\infty}t^{-1-\alpha/2}(E-W_t)^l f\,dt\in L_p.$$

Отметим еще формулу

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\(L_p)}} \mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f = \lim_{\substack{t\to+0\\(L_p)}} t^{-\alpha}(E-P_t)^\alpha f, \quad f\in L_q(R^n), \quad 1<p<\infty, \quad 1<q<\infty,$$

справедливую в предположении, что существует один из этих пределов. При $q=p$ эта формула вытекает из утверждения теоремы 23.4, но можно показать ее справедливость и при $q\neq p$.

Завершим этот параграф некоторыми простыми оценками для интегральных модулей непрерывности риссова потенциала. Пусть $f=I^\alpha\varphi$, $\varphi\in L_p$, $1<p<n/\alpha$, $l>\alpha$. Тогда

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leqslant c\,|h|^\alpha \|\varphi\|_p, \tag{26.98}$$

$$\|\Delta_h^l f\|_p = o(|h|^\alpha) \tag{26.98'}$$

при $|h|\to 0$. Здесь $c=\|\mathrm{k}_{l,\alpha}\|_1$, где $\mathrm{k}_{l,\alpha}(x)$ — ядро (26.28). Оценка (26.98) вытекает из тождества

$$(\Delta_h^l f)(x) = |h|^\alpha \int_{R^n} \mathrm{k}_{l,\alpha}(y)\,\varphi(x-|h|\,\omega_h(y))\,dy, \tag{26.99}$$

где $\omega_h(y)$ — вращение (25.68), которое получается несложными преобразованиями:

$$(\Delta_h^l f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int_{R^n} \frac{\varphi(x-y)\,dy}{|y-kh|^{n-\alpha}} =$$

$$= \frac{|h|^\alpha}{\gamma_n(\alpha)} \int_{R^n} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} |\xi - ke_1|^{\alpha-n} \varphi(x-|h|\,\omega_h(\xi))\,d\xi,$$

что совпадает с (26.99). Из (26.99) и вытекает (26.98) с учетом того, что $\mathrm{k}_{l,\alpha}(x)\in L_1(R^n)$ в силу леммы 26.3, и получается (26.98') с учетом (26.35).

§ 27. БЕССЕЛЕВО ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Рассмотрим в этом параграфе дробное интегродифференцирование, являющееся дробной степенью $(E-\Delta)^{-\alpha/2}$, где E — единичный оператор, Δ — оператор Лапласа. Теперь (ср. с § 26, где рассматривались степени $(-\Delta)^{-\alpha/2}$) действие такого интегродифференцирования в образах Фурье будет сводиться к умножению на степень $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$. Оно будет реализовано как свертка с функцией $G_\alpha(x)$, являющейся прообразом Фурье функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$. Этот прообраз будет неэлементарной функцией, и в этом отличие рассматриваемого случая от риссова интегродифференцирования. Функция $G_\alpha(x)$ выражается через бесселевы функции (функцию Макдональда, см. ниже), и потому рассматриваемая в этом параграфе форма дробного интегродифференцирования получила такое название. Существенное достоинство бесселева дробного интегрирования состоит в том, что оно лучше ведет себя на бесконечности, нежели риссов потенциал. По этой причине бесселево интегрирование определено, например, на функциях из $L_p(R^n)$ при всех p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и является ограниченным оператором в $L_p(R^n)$, чего нельзя сказать о риссовом дробном интегрировании.

1°. Бесселево ядро и его свойства. Прообраз Фурье функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ вычислим по формуле Бохнера (25.11). Имеем

$$\mathcal{F}^{-1}[(1+|x|^2)^{-\alpha/2}] = (2\pi)^{-n/2}\,|x|^{1-n/2} \int_0^\infty \frac{\rho^{n/2} J_{n/2-1}(\rho|x|)}{(1+\rho^2)^{\alpha/2}}\,d\rho.$$

Здесь интеграл сходится при $\alpha > (n+1)/2$. Будем считать пока это условие выполненным. В силу формулы (1.86) получаем

$$\mathcal{F}^{-1}[(1+|x|^2)^{-\alpha/2}] = \frac{2^{(2-n-\alpha)/2}}{\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(|x|)}{|x|^{(n-\alpha)/2}} \stackrel{\text{def}}{=} G_\alpha(x), \qquad (27.1)$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (1.85). Полученное выражение имеет смысл при любых $\alpha > 0$. Функция $G_\alpha(x)$ называется *бесселевым ядром*. Отметим некоторые его свойства. Прежде всего установим в следующей лемме его поведение в начале координат и на бесконечности.

Л е м м а 27.1. *Функция $G_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат, допуская оценку*

$$G_\alpha(x) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)} |x|^{\alpha-n}, & \text{если } 0 < \alpha < n, \\ \dfrac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)} \ln \dfrac{1}{|x|}, & \text{если } \alpha = n, \\ \dfrac{\Gamma((\alpha-n)/2)}{2^n \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}, & \text{если } \alpha > n \end{cases}$$

при $|x| \to 0$ и оценку

$$G_\alpha(x) \sim \frac{|x|^{(\alpha-n-1)/2} e^{-|x|}}{2^{(n+\alpha-1)/2}\pi^{(n-1)/2}\Gamma(\alpha/2)}$$

при $|x| \to \infty$.

Утверждение леммы немедленно вытекает из известных свойств функции Макдональда: $K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) z^{-\nu}$, $\nu \neq 0$, $K_0(z) \sim \ln(1/z)$ при $z \to 0$ и $K_\nu(z) \sim (\pi/2z)^{1/2} e^{-z}$ при $z \to \infty$ (см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 32]). Отметим по этому поводу формулу

$$K_\nu(z) = \frac{(\pi/2)^{1/2} z^\nu e^{-z}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1/2} (1+t/2)^{\nu-1/2} dt. \qquad (27.2)$$

С л е д с т в и е. $G_\alpha(x) \in L_1(R^n)$, $\alpha > 0$.

Теперь, используя свойства функции $G_\alpha(x)$ и прежде всего ее быстрое убывание на бесконечности, легко показать с помощью той же формулы Бохнера (25.11), что

$$\hat{G}_\alpha(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2} \qquad (27.3)$$

при всех $\alpha > 0$ (можно брать $\operatorname{Re}\alpha > 0$).

Из (27.3) следует

$$G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \qquad (27.4)$$

$$(E - \Delta) G_\alpha = G_{\alpha-2}, \quad \alpha > 2, \qquad (27.5)$$

$$\int_{R^n} G_\alpha(x)\, dx = 1, \quad \alpha > 0. \qquad (27.6)$$

Отметим еще формулу

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \xi^{(\alpha-n)/2-1} e^{-\xi - |x|^2/(4\xi)} d\xi \qquad (27.7)$$

(см. доказательство в книге И. Стейна [1, с. 155]).

Определим теперь *бесселев потенциал* равенством

$$G^\alpha \varphi = \int_{R^n} G_\alpha(x-y)\varphi(y)\, dy, \quad \alpha > 0. \qquad (27.8)$$

В силу леммы 27.1 он определен, например, на функциях $\varphi(y)\in L_p(R^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и порождает ограниченный в $L_p(R^n)$ оператор:

$$\|G^\alpha\varphi\|_p\leqslant\|\varphi\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\quad \alpha>0 \tag{27.9}$$

(неравенство (27.9) получается с учетом (27.6) и положительности ядра $G_\alpha(x)$). Непосредственно из (27.3), (27.4) вытекают следующие простые свойства оператора бесселева дробного интегрирования:

$$G^\alpha G^\beta\varphi=G^{\alpha+\beta}\varphi,\quad \alpha>0,\quad \beta>0 \tag{27.10}$$

(полугрупповое свойство),

$$(E-\Delta)\,G^\alpha\varphi=G^{\alpha-2}\varphi,\quad \alpha>2 \tag{27.11}$$

(в отличие от случая риссова потенциала (27.10) выполняется на функциях из L_p при всех $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha>0$, $\beta>0$). Ниже при необходимости допущения $\alpha=0$ будем полагать $G^0=E$.

Оператор G^α является конструктивной реализацией отрицательной дробной степени оператора $E-\Delta$. Интересен вопрос об эффективной реализации положительной степени этого оператора, подобно тому как это было сделано в § 25 и 26 для $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Такая реализация будет дана в п. 4° этого параграфа.

2°. **Связь с полугруппами Пуассона, Гаусса—Вейерштрасса и метагармонического продолжения.** Риссов потенциал был связан с интегралом Пуассона простым равенством (25.52). Аналогичная связь бесселева потенциала с этим интегралом сложнее и выражается в терминах специальных функций. Именно справедлива следующая

Теорема 27.1. *Пусть* $\varphi(x)\in L_p(R^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. *Тогда*

$$(G^\alpha\varphi)(x)=\frac{2^{(1-\alpha)/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty t^{(\alpha-1)/2}J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t)\,(P_t\varphi)(x)\,dt, \tag{27.12}$$

где $P_t\varphi$ — *интеграл Пуассона* (25.47).

Доказательство теоремы получается после перестановки порядка интегрирования в правой части в (27.12), возможной в силу теоремы Фубини, с помощью формулы

$$\frac{2^{(1-\alpha)/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty t^{(\alpha-1)/2}J_{(\alpha-1)/2}(t)\,P(x,\,t)\,dt=G_\alpha(x), \tag{27.13}$$

где $P(x,\,t)$ — ядро Пуассона (25.49). Формула же (27.13) содержится в (1.86) согласно (27.1).

Существует между тем *модификация бесселева потенциала* (предложенная Т. Флеттом), которая связана с интегралом Пуассона более простым образом. Эта модификация основана на рассмотрении в образах Фурье функции $(1+|x|)^\alpha$ вместо $(1+|x|^2)^{\alpha/2}$. Именно положим

$$\mathfrak{G}^\alpha\varphi=\int_{R^n}\mathfrak{G}_\alpha(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{27.14}$$

где ядро свертки $\mathfrak{G}_\alpha(x)$ есть прообраз Фурье функции $(1+|x|)^{-\alpha}$. Этот прообраз связан с ядром Пуассона $P(x,\,t)$ равенством

$$\mathfrak{G}_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}P(x,\,t)\,dt, \tag{27.15}$$

что можно проверить, переходя в этом равенстве к образам Фурье:

$$(1+|x|)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\hat{P}(\cdot,\,t)\,dt, \tag{27.16}$$

где точка означает, что по этой переменной применено преобразование Фурье. Справедливость же равенства (27.16) вытекает из (25.54).

Ядро $\mathfrak{G}_\alpha(x)$ можно записать в виде

$$\mathfrak{G}_\alpha(x) = \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} |x|^{\alpha-n} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-n} e^{-s|x|}}{(1+s^2)^{(n+1)/2}} ds, \tag{27.17}$$

где c_n — постоянная из (25.49), что является перефразировкой равенства (27.15). Из равенств (27.15), (27.17) легко выводятся следующие простые свойства ядра $\mathfrak{G}_\alpha$;

1) $\mathfrak{G}_\alpha$ — бесконечно дифференцируемая вне начала координат функция, $\mathfrak{G}_\alpha(x) > 0$, $x \neq 0$;

2) $\mathfrak{G}_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma((\alpha+1)/2)\,\Gamma((n-\alpha)/2)}{2\Gamma(\alpha)\,\pi^{(n+1)/2}} |x|^{\alpha-n}$ при $x \to 0$, если $0 < \alpha < n$, $\mathfrak{G}_n(x) \sim \dfrac{c_n}{\Gamma(n)} \ln \dfrac{1}{|x|}$ при $x \to 0$ и $\mathfrak{G}_\alpha(x)$ непрерывна в точке $x=0$, если $\alpha > n$;

3) $\mathfrak{G}_\alpha(x) \sim \alpha c_n |x|^{-n-1}$ при $x \to \infty$, так что $\mathfrak{G}_\alpha(x) \in L_1(R^n)$ и $\int_{R^n} \mathfrak{G}_\alpha(x)\,dx = 1$.

Из отмеченных свойств следует, что потенциал $\mathfrak{G}^\alpha\varphi$ определен на функциях $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и является ограниченным оператором:

$$\|\mathfrak{G}^\alpha\varphi\|_p \leqslant \|\varphi\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{27.18}$$

Непосредственно из (27.15) вытекает, что справедлива следующая теорема о связи модифицированного бесселева потенциала $\mathfrak{G}^\alpha\varphi$ с интегралом Пуассона (ср. с (25.51)).

Теорема 27.2. *Пусть* $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\mathfrak{G}^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} P_t\varphi\,dt. \tag{27.19}$$

Приведем еще два интегральных представления типа (27.12), (27.15) для бесселева потенциала $G^\alpha\varphi$. Первое связывает $G^\alpha\varphi$ с интегралом Гаусса—Вейерштрасса:

$$G^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\alpha/2-1} e^{-t} (W_t\varphi)(x)\,dt. \tag{27.20}$$

Второе выражает $G^\alpha\varphi$ через метагармоническое продолжение

$$M_t\varphi = \frac{2t}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{R^n} \frac{K_{(n+1)/2}(\sqrt{|y|^2+t^2})}{(\sqrt{|y|^2+t^2})^{(n+1)/2}} \varphi(x-y)\,dy \tag{27.21}$$

функции φ по формуле

$$G^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (M_t\varphi)(x)\,dt, \tag{27.22}$$

(ср. с представлением (25.51) для потенциалов Рисса). К соотношениям (27.20), (27.22) примыкают равенства

$$e^{-t}(W_t G^\alpha\varphi)(x) = (I_-^{\alpha/2}(e^{-\tau} W_\tau\varphi)(x))(t), \tag{27.23}$$

$$(M_t G^\alpha\varphi)(x) = (I_-^\alpha (M_\tau\varphi)(x))(t), \tag{27.24}$$

родственные (25.52), (25.53). Равенства (27.20)—(27.24) прозрачны в образах Фурье, если учесть, что

$$\mathcal{F}(e^{-t}W_t\varphi) = e^{-t(1+|x|^2)}\hat{\varphi}(x), \tag{27.25}$$

$$\mathcal{F}(M_t\varphi) = e^{-t\sqrt{1+|x|^2}}\hat{\varphi}(x), \tag{27.26}$$

и отражают полугрупповую природу операторов G^α.

3°. Пространство бесселевых потенциалов. Пространством бесселевых потенциалов называется образ

$$G^\alpha(L_p) = \{f: f(x) = G^\alpha\varphi,\ \varphi \in L_p(R^n)\},\quad \alpha>0,\ 1\leqslant p\leqslant\infty, \tag{27.27}$$

оператора G^α (иногда это пространство называют *лиувиллевским классом дробной гладкости* α). Это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{G^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p.$$

Как будет видно из дальнейшего, оно является обобщением на дробный порядок соболевских классов $L_p^m(R^n)$. Поэтому пространства (27.27) называют также *пространствами Соболева дробного порядка*.

Замечание 27.1. Пространства $G^\alpha(L_p)$ и $\mathfrak{G}^\alpha(L_p)$, где $\mathfrak{G}^\alpha\varphi$ — модифицированный бесселев потенциал (27.14), совпадают:

$$G^\alpha(L_p) = \mathfrak{G}^\alpha(L_p),\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

В этом можно убедиться с помощью того факта, что функции $\dfrac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}-1$ и $\dfrac{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}{(1+|x|)^\alpha}-1$ являются преобразованиями Фурье суммируемых по R^n функций (ср. последнее со следствием из леммы 5.2 в книге С. Г. Самко [31, с. 52]).

Описание пространства $G^\alpha(L_p)$, излагаемое в этом пункте, перекликается с описанием риссовых потенциалов (теорема 26.8) и дается в терминах риссовой производной. Выделим среди пространств $L^\alpha_{p,r}(R^n)$, рассмотренных в § 26, п. 7°, важный сейчас для нас случай $r=p$. Удобно ввести специальное обозначение

$$L_p^\alpha(R^n) = L^\alpha_{p,p}(R^n) = \{f: f\in L_p,\ \mathbf{D}^\alpha f\in L_p\},\quad \alpha>0,\quad 1\leqslant p<\infty. \tag{27.28}$$

Теорема 27.3. *Пространство бесселевых потенциалов состоит из тех и только тех функций $f(x)\in L_p(R^n)$, которые имеют в $L_p(R^n)$ риссову производную порядка α, т. е.*

$$G^\alpha(L_p) = L_p^\alpha(R^n),\quad 1\leqslant p<\infty,\quad \alpha>0,$$
$$c_1\|f\|_{L_p^\alpha}\leqslant\|f\|_{G^\alpha(L_p)}\leqslant c_2\|f\|_{L_p^\alpha}.$$

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 27.2. *Класс C_0^∞ плотен в $L_p^\alpha(R^n)$, $1\leqslant p<\infty$.*

Доказательство леммы. 1. Сначала показываем, что бесконечно дифференцируемые функции из $L_p(R^n)$ плотны в $L_p^\alpha(R^n)$. Это достигается обычными средствами, применяемыми при доказательстве плотности «хороших» функций в различных функциональных пространствах,— с помощью соболевского усреднения (аппроксимации единицы):

$$f_m(x) = \int_{R^n} a(y) f\left(x-\frac{y}{m}\right)dy,\quad f\in L_p^\alpha,$$

где $a(y)\in C_0^\infty$, $\int\limits_{R^n} a(y)\,dy=1$. Тогда $\|f-f_m\|_p\to 0$, $m\to\infty$, и нетрудно видеть, что $\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f_m=(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f)_m$. Поэтому существует $\mathbf{D}^\alpha f_m=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f_m$ и $\mathbf{D}^\alpha f_m=$ $=(\mathbf{D}^\alpha f)_m$. Но в таком случае $\|\mathbf{D}^\alpha(f_m-f)\|_p=\|(\mathbf{D}^\alpha f)_m-\mathbf{D}^\alpha f\|_p\to 0$ при $m\to 0$.

Заметим, что так как $a(x)\in C_0^\infty$, то $\mathscr{D}^j f_m\in L_p(R^n)$ для всех $|j|=$ $=0, 1, 2, \ldots$

2. Остается приблизить C_0^∞-функциями функцию $f(x)$ в $L_p^\alpha(R^n)$, считая, что $f(x)\in C^\infty(R^n)$ и что $(\mathscr{D}^j f)(x)\in L_p(R^n)$, $|j|=0, 1, 2, \ldots$ Пусть $\mu(x)$ — какая-нибудь функция из C_0^∞ с носителем в шаре $|x|<2$, тождественно равная единице при $|x|\leqslant 1$ и такая, что $|\mu(x)|\leqslant 1$. Нужно показать, что «урезание»

$$\mu_N(x)f(x)\overset{\text{def}}{=}\mu(x/N)f(x)\in C_0^\infty$$

аппроксимирует при $N\to\infty$ функцию $f(x)$ по норме $\|f\|_p+\|\mathbf{D}^\alpha f\|_p$. Обозначим $\nu(x)=1-\mu(x)$, $\nu_N(x)=\nu(x/N)$. Достаточно проверить, что $\|\mathbf{D}^\alpha(\nu_N f)\|_p\to 0$. Имеем $\mathbf{D}^\alpha(\nu_N f)=\nu_N\mathbf{D}^\alpha f+d_{n,l}^{-1}(\alpha)\sum\limits_{k=1}^{l}\binom{l}{k}B_{N,k}f$, где обозначено

$$B_{N,k}f=\int\limits_{R^n}|y|^{-n-\alpha}(\Delta_y^k\nu_N)(x)(\Delta_y^{l-k}f)(x-ky)\,dy, \tag{27.29}$$

$k=1, 2, \ldots, l$, так что в доказательстве нуждается переход $\|B_{N,k}f\|_p\to 0$, $N\to\infty$. Так как $\Delta_y^k\nu_N\equiv\Delta_y^k\mu_N$, $k>0$, и $|(\Delta_y^k\mu)(x)|\leqslant c|y|^k/(1+|y|)^k$ согласно (26.20), то после применения неравенства Минковского получаем

$$\|B_{N,k}f\|_p\leqslant cN^{-k}\int\limits_{R^n}|y|^{k-n-\alpha}\left(1+\frac{|y|}{N}\right)^{-k}\|\Delta_y^{l-k}f\|_p\,dy. \tag{27.30}$$

Из формулы (26.19) вытекает, что $\|\Delta_y^{l-k}f\|_p\leqslant c|y|^{l-k}\sum\limits_{|j|=l-k}\|\mathscr{D}^j f\|_p=c|y|^{l-k}$, так как $\mathscr{D}^j f\in L_p(R^n)$ для всех $|j|=0, 1, 2, \ldots$ Поэтому из (27.30)

$$\|B_{N,k}f\|_p\leqslant\frac{c_1}{N^k}\int\limits_{|y|<1}\frac{dy}{|y|^{n+\alpha-l}}+\frac{c_2}{N^k}\int\limits_{|y|>1}\frac{dy}{|y|^{n+\alpha-k}\left(1+\frac{|y|}{N}\right)^k}.$$

Отсюда несложными преобразованиями получаем, что $\|B_{N,k}f\|_p\leqslant c_3N^{-k}+$ $+c_4N^{-\alpha}$ (при $k\neq\alpha$; если α целое и $k=\alpha$, то $\|B_{N,k}f\|_p\leqslant cN^{-\alpha}\ln N$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 27.3. Доказываем вложение

$$G^\alpha(L_p)\subseteq L_p^\alpha(R^n). \tag{27.31}$$

Так как $G_\alpha(x)\in L_1(R^n)$ согласно лемме 27.1, то $G^\alpha(L_p)\subset L_p$. Далее, имеем

$$\frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}=\frac{1}{|x|^\alpha}\,\frac{|x|^\alpha}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}. \tag{27.32}$$

Известно (И. Стейн [1, с. 157], см. также С. Г. Самко [31, с. 51]), что функция $|x|^\alpha(1+|x|^2)^{-\alpha/2}-1$ является преобразованием Фурье функции из $L_1(R^n)$. Поэтому равенство (27.32) в прообразах Фурье означает, что

$$G^\alpha\varphi=I^\alpha(E+A)\varphi, \tag{27.33}$$

где A — оператор свертки с суммируемым ядром. В силу ограниченности соответствующих операторов равенство (27.33) распространяется с функций $\varphi \in C_0^\infty$ на $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 \leqslant p < n/\alpha$. Справедливость (27.33) для $\varphi \in L_p(R^n)$ при $p \geqslant n/\alpha$ есть следствие определения $I^\alpha \varphi$ для таких φ (см. § 26, п. 7°). Но тогда из (27.33) следует, что $G^\alpha(L_p) \subseteq L_p \cap I^\alpha(L_p)$. Поэтому в силу (26.94) вложение (27.31) доказано, при этом, согласно (27.33), для $f = G^\alpha \varphi$ имеем $\|f\|_{L_p^\alpha} = \|f\|_p + \|\mathbf{D}^\alpha f\|_p \leqslant \|\varphi\|_p + \|(E+A)\varphi\|_p \leqslant c\|\varphi\|_p = c\|f\|_{G^\alpha(L_p)}$.

Докажем обратное вложение. Пусть $f \in L_p^\alpha(R^n)$. Пользуясь плотностью C_0^∞ в $L_p^\alpha(R^n)$, доказанной в лемме 27.2, аппроксимируем f функциями $f_m \in C_0^\infty$ по норме $\|f\|_p + \|\mathbf{D}^\alpha f\|_p$. Имеем $1 = \dfrac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} \dfrac{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}{1+|x|^\alpha}(1+|x|^\alpha)$. Здесь $\dfrac{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}{1+|x|^\alpha} - 1$ является преобразованием Фурье суммируемой функции (см. И. Стейн [1, с. 157—158], см. также С. Г. Самко [31, с. 52]). Тогда этому равенству отвечает равенство в прообразах Фурье:

$$f_m = G^\alpha (E + U)(f_m + \mathbf{D}^\alpha f_m), \tag{27.34}$$

где U — оператор свертки с суммируемым ядром. Так как операторы G^α и U ограничены в $L_p(R^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, то из (27.34) после предельного перехода при $m \to \infty$ получаем, что $f \in G^\alpha(L_p)$, т. е. $L_p^\alpha(R^n) \subseteq G^\alpha(L_p)$, причем $\|f\|_{G^\alpha(L_p)} = \|(E+U)(f + \mathbf{D}^\alpha f)\|_p \leqslant c(\|f\|_p + \|\mathbf{D}^\alpha f\|_p) = c\|f\|_{L_p^\alpha}$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Оператор G^α осуществляет изоморфизм между пространствами $L_p^\beta(R^n)$ и $L_p^{\alpha+\beta}(R^n)$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.*

4°. Реализация $(E-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, с помощью гиперсингулярного интеграла. Так как $(E-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{\alpha/2}\mathcal{F}f$, то речь пойдет по существу об обращении бесселевых потенциалов $f = G^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$. Плотность φ берется вначале из шварцева класса S, инвариантного для оператора G^α, затем рассматривается вопрос об обращении на функциях $\varphi \in L_p$. Обратный к G^α оператор будет построен с помощью гиперсингулярного интеграла $T^\alpha f$, содержащего остаток ряда Тейлора функции $f(x)$, см. конструкции (26.68).

Для $f \in S$ и $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \ldots$, положим

$$T^\alpha f = \sum_{j \in \Lambda_\alpha} c_{\alpha,j} (\mathscr{D}^j f)(x) + d_\alpha \int_{R^n} |f(x-y) - (R_y^{[\alpha]} f)(x)| |y|^{-n-\alpha} \lambda_\alpha(|y|)\, dy, \tag{27.35}$$

где $(R_y^{[\alpha]} f)(x)$ — то же, что в (26.66), Λ_α — множество мультииндексов длины $\leqslant [\alpha]$ с четными компонентами;

$$d_\alpha = \frac{2^\alpha}{\pi^{n/2}\Gamma(-\alpha/2)}, \quad c_{\alpha,j} = \frac{d_\alpha \Gamma\left(\dfrac{|j|-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+|j|}{2}\right)}{j!\, 2^{1+\alpha-|j|}}\omega_j,$$

$$\omega_j = \int_{S_{n-1}} \sigma^j d\sigma, \quad \lambda_\alpha(|y|) = 2^{1-(n+\alpha)/2} |y|^{(n+\alpha)/2} K_{(n+\alpha)/2}(|y|) =$$

$$= \int_0^\infty \xi^{-1+(n+\alpha)/2} e^{-\xi - |y|^2/4\xi} d\xi. \tag{27.36}$$

Заметим, что $\Gamma\left(\dfrac{n+|j|}{2}\right)\omega_j = 2\Gamma\left(\dfrac{j_1+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\dfrac{j_n+1}{2}\right)$ в случае четных $j_1, \ldots, j_n$.

Отметим, что в случае $0<\alpha<1$

$$T^{\alpha}f = f(x) - d_{\alpha}\int_{R^n}\frac{f(x)-f(y)}{|y|^{n+\alpha}}\lambda_{\alpha}(|y|)\,dy. \tag{27.37}$$

Легко проверить, что характеристика $\lambda_{\alpha}(|y|)$ гиперсингулярного интеграла в (27.35), (27.37) стабилизируется в начале координат и на бесконечности как гельдеровская функция; гиперсингулярные интегралы с такими характеристиками изучались в работе С. Г. Самко [20], результатами которой мы ниже воспользуемся.

Теорема 27.4. *Пусть* $\alpha>0$, $\alpha\neq 2, 4, 6, \ldots$; $\varphi\in S$. *Тогда* $T^{\alpha}G_{\alpha}\varphi=\varphi$, *где* T^{α} — *оператор (27.35).*

Доказательство. Заметим, что обратный к G^{α} оператор в рамках S может быть записан в виде

$$(G^{\alpha})^{-1}f = (\mathcal{F}^{-1}(1+|y|^2)^{\alpha/2},\ f(y+x)), \tag{27.38}$$

где преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}(1+|y|^2)^{\alpha/2}$ понимается в смысле S' (обосновывается с помощью теоремы Гельфанда—Шилова, см. книгу И. М Гельфанда, Г. Е. Шилова [1, с. 179]). Нужно показать, что

$$(\mathcal{F}^{-1}(1+|y|^2)^{\alpha/2},\ f(y+x)) = (T^{\alpha}f)(x),\quad \alpha\neq 2, 4, \ldots \tag{27.39}$$

При $\operatorname{Re}\alpha<0$ имеем с учетом (27.36)

$$(\mathcal{F}^{-1}(1+|y|^2)^{\alpha/2},\ f(y+x)) = d_{\alpha}\int_{R^n}\frac{\lambda_{\alpha}(|y|)}{|y|^{n+\alpha}}f(y+x)\,dy. \tag{27.40}$$

Так как левая часть аналитична по α во всей комплексной плоскости, то (27.40) будет справедливо и при $\operatorname{Re}\alpha>0$, если интеграл в правой части понимать как аналитическое продолжение. Такое продолжение и осуществляется вычитанием отрезка ряда Тейлора функции $f(x)$ под знаком интеграла. Произведя непосредственные вычисления, придем к (27.39). Теорема доказана.

Замечание 27.2. Так как $(1+|x|^2)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}|x|^{2i}$, то при $\alpha=2, 4, 6, \ldots$ обратный к G^{α} оператор имеет вид

$$(G^{\alpha})^{-1}f = \sum_{i=0}^{\alpha/2}\binom{\alpha/2}{i}(-\Delta)^i f. \tag{27.41}$$

Покажем теперь, что оператор T^{α} обращает потенциал $f=G^{\alpha}\varphi$ и для $\varphi\in L_p$, если его понимать следующим образом:

$$T^{\alpha}f \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}} T^{\alpha}_{\varepsilon}f, \tag{27.42}$$

где $T^{\alpha}_{\varepsilon}f$ — конструкция вида (27.35), в которой интегрирование по R^n заменено интегрированием по $|y|>\varepsilon$. Производные $\mathcal{D}^j f$ функции $f(x)\in G^{\alpha}(L_p)$ будем понимать как обобщенные производные над классом бесконечно дифференцируемых функций (существование производных $\mathcal{D}^j f$ для $f=G^{\alpha}\varphi$ вытекает из того, что $G^{\alpha}(L_p)\subset L_p^m$, $m=0, 1, \ldots, [\alpha]$).

Теорема 27.5. *Пусть* $\alpha>0$, $\alpha\neq 2, 4, 6, \ldots$, $\varphi\in L_p$, $1<p<\infty$. *Тогда* $T^{\alpha}G^{\alpha}\varphi=\varphi$, *где* T^{α} — *оператор (27.42).*

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}} T_\varepsilon^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi. \tag{27.43}$$

Докажем вначале равномерную оценку

$$\|T_\varepsilon^\alpha G^\alpha \varphi\|_p \leqslant c\,\|\varphi\|_p, \tag{27.44}$$

где c не зависит от ε. Ее получение использует понятие о фурье-мультипликаторах в L_p (см. И. Стейн [1, с. 113]). Так как $\|\mathscr{D}^j G^\alpha \varphi\|_p \leqslant c\|\varphi\|_p$ (что легко проверяется с помощью теоремы 3 из книги И. Стейна [1, с. 114]), то (27.44) будет следовать из оценки

$$\|\mathbf{D}^\alpha_{\lambda_\alpha}{}_\varepsilon\, G^\alpha \varphi\|_p \leqslant c\,\|\varphi\|_p, \tag{27.45}$$

где c не зависит от ε, а

$$\mathbf{D}^\alpha_{\lambda_\alpha;\varepsilon} f = \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y) - (R_y^{[\alpha]} f)(x)}{|y|^{n+\alpha}}\, \lambda_\alpha(|y|)\, dy. \tag{27.46}$$

Положим

$$\sigma_\varepsilon(x) = \int\limits_{|y|>\varepsilon} \left(e^{ix\cdot y} - \sum_{|j|\leqslant[\alpha]} \frac{i^{|j|} x^j y^j}{j!} \right) \frac{\lambda_\alpha(|y|)}{|y|^{n+\alpha}} dy,$$

так что $\mathscr{F}(\mathbf{D}^\alpha_{\lambda_\alpha;\varepsilon} f) = \sigma_\varepsilon(x)\hat{f}(x)$, $f \in S$. Неравенство (27.45) вытекает из следующей леммы.

Лемма 27.3. *Функция* $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\sigma_\varepsilon(x)$, $\alpha>0$, *принадлежит классу* M_p *фурье-мультипликаторов в* L_p, $1<p<\infty$ ($1\leqslant p<\infty$ *при* $0<\alpha<1$), *при этом*

$$\|(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\sigma_\varepsilon(x)\|_{M_p} \leqslant c, \tag{27.47}$$

где c *не зависит от* ε.

При $0<\alpha<1$ (27.47) получено в работе С. Г. Самко [20] для произвольных стабилизирующихся характеристик (и в более сильном виде — в терминах абсолютной интегрируемости интеграла Фурье функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\sigma_\varepsilon(x)$ равномерно по ε), см. оценку (4.11′) и лемму 1.4 в указанной работе. Докажем лемму при $\alpha \geqslant 1$. Воспользуемся теоремой 3 из книги И. Стейна [1, с. 114], согласно которой нужно проверить, что

$$|x|^{|\nu|}|\mathscr{D}^\nu (1+|x|^2)^{-\alpha/2}\sigma_\varepsilon(x)| \leqslant c, \quad |\nu| \leqslant [n/2]+1, \tag{27.48}$$

где c не зависит от ε. С учетом формулы Лейбница (27.48) будет следовать из оценки

$$|\mathscr{D}^\nu \sigma_\varepsilon(x)| \leqslant c\,|x|^{\alpha-|\nu|}, \quad \nu \leqslant [n/2]+1, \tag{27.49}$$

c не зависит от ε. Установим (27.49). Если $[\alpha]+1 \leqslant \nu \leqslant [n/2]+1$, то

$$\mathscr{D}^\nu \sigma_\varepsilon(x) = \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{(iy)^\nu}{|y|^{n+\alpha}} \lambda_\alpha(|y|)\, e^{ix\cdot y}\, dy \tag{27.50}$$

(дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу быстрого убывания $\lambda_\alpha(|y|)$ при $|y| \to \infty$, усматриваемого из (27.36)). Запишем моном $(iy)^\nu$ в виде $(iy)^\nu = \sum\limits_{m=0}^{[|\nu|/2]} |y|^{2m} P_{|\nu|-2m}(y)$, где $P_{|\nu|-2m}(y)$ — однородные гармонические многочлены степени $|\nu|-2m$ (см. книгу И. Стейна, Г. Вейса [1, с. 159]). После перехода к сферическим координатам и применения формулы Функа—Гекке (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 240], С. Г.

Самко [31, с. 43]) и формулы 2.12.2.2 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2] имеем

$$\mathcal{D}^{\nu}\sigma_{\varepsilon}(x)=\sum_{m=0}^{[|\nu|/2]} i^{|\nu|-2m}P_{|\nu|-2m}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\alpha-|\nu|}\times$$

$$\times\int_{\varepsilon|x|}^{\infty}\frac{\lambda_{\alpha}\left(\frac{\xi}{|x|}\right)J_{|\nu|-2m-1+n/2}(\xi)\,d\xi}{\xi^{\alpha-|\nu|+n/2}}. \tag{27.51}$$

Если $\alpha-|\nu|+(n+1)/2>1$, то с учетом поведения функции Бесселя при $\xi\to 0$ и $\xi\to\infty$ получаем

$$|\mathcal{D}^{\nu}\sigma_{\varepsilon}(x)|\leqslant c\,|x|^{\alpha-\nu}\sum\int_{0}^{\infty}\xi^{|\nu|-\alpha-n/2}|J_{|\nu|-2m-1+n/2}(\xi)|\,d\xi=c\,|x|^{\alpha-\nu}.$$

Если же $\alpha-|\nu|+(n+1)/2\leqslant 1$, то (27.49) следует из (27.51) в силу равномерной сходимости интегралов

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda_{\alpha}(\xi/|x|)\,J_{|\nu|-2m-1+n/2}(\xi)}{\xi^{\alpha-|\nu|+n/2}}d\xi,\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\left[\frac{|\nu|}{2}\right],$$

получаемой с учетом монотонности функции $\lambda_{\alpha}(\xi)$. Пусть теперь $|\nu|<[\alpha]+1$. При $\alpha\neq 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ имеем

$$|\mathcal{D}^{\nu}\sigma_{\varepsilon}(x)|\leqslant c\int\limits_{|y|<|x|^{-1}}|y|^{|\nu|-\alpha-n}|(x\cdot y)|^{[\alpha]+1-|\nu|}dy+$$

$$+c\sum_{|j|\leqslant[\alpha]-|\nu|}|x|^{|j|}\int\limits_{|y|>|x|^{-1}}|y|^{|\nu|+|j|-n-\alpha}dy\leqslant c\,|x|^{\alpha-|\nu|}.$$

Если же $\alpha=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$, то в силу формулы Тейлора с остатком в интегральной форме будем иметь

$$\mathcal{D}^{\nu}\sigma_{\varepsilon}(x)=i^{|\nu|}\sum_{|j|=\alpha+1-|\nu|}\frac{(\alpha+1-|\nu|)!}{j!}x^{j}\int_{0}^{1}(1-\xi)^{\alpha-|\nu|}d\xi\times$$

$$\times\int\limits_{|y|>\varepsilon}y^{\nu+j}|y|^{-n-\alpha}\lambda_{\alpha}(|y|)\,e^{i\xi x\cdot y}dy.$$

Преобразуя интеграл по $|y|>\varepsilon$ так же, как интеграл в (27.50), получим (27.49). Лемма доказана.

В силу равномерной оценки (27.44) остается, согласно теореме Банаха—Штейнгауза, проверить (27.43) на плотном в L_p множестве S. Для $\varphi\in S$ с учетом того, что $T^{\alpha}G^{\alpha}\varphi=\varphi$, получаем, применяя равенство Парсеваля: $\|T_{\varepsilon}^{\alpha}G^{\alpha}\varphi-\varphi\|_{2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$. Выберем $r>1$ так, чтобы p было заключено между 2 и r, и положим $\theta=2(r-p)/p(r-2)$. Тогда в силу интерполяционного неравенства $\|f\|_{p}\leqslant\|f\|_{r}^{1-\theta}\|f\|_{2}^{\theta}$ и равномерной оценки (27.44) заключаем, что (27.43) выполняется для $\varphi\in S$. Теорема доказана.

Замечание 27.3. Легко проверить, что при $\alpha=2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ оператор (27.41) будет обратным к потенциалу $G^{\alpha}\varphi$ в рамках L_p в слабом смысле:

$$\left(G^{\alpha}\varphi,\ \sum_{i=0}^{\alpha/2}\binom{\alpha/2}{i}(-\Delta)^{i}\omega\right)=(\varphi,\ \omega),\quad \varphi\in L_p,\quad \omega\in S.$$

В заключение укажем еще три способа конструктивной реализации оператора $(E-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha>0$, в L_p. Ограничимся самыми краткими указа-

ниями. Соответствующие литературные ссылки по поводу приводимых ниже утверждений см. в § 29. Первый способ состоит в преобразовании оператора (27.35) к виду

$$T^\alpha f = h_\alpha * f + \mathbf{D}^\alpha_\Omega f, \tag{27.52}$$

где $h_\alpha(y) \in L_1(R^n)$, а $\mathbf{D}^\alpha_\Omega f$ — гиперсингулярный интеграл:

$$\mathbf{D}^\alpha_\Omega f = \int_{R^n} \frac{(\Delta^l_y f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y)\, dy, \tag{27.53}$$

характеристика $\Omega(y)$ которого является многочленом степени меньше α (явный вид $h_\alpha(y)$ и $\Omega(y)$ см. в статье В. А. Ногина [6]).

Теорема 27.6. *Пусть* $\alpha>0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \ldots$, $1<p<\infty$, $\varphi \in L_p(R^n)$. *Тогда* $T^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi$, *где*

$$T^\alpha f = h_\alpha * f + \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f,$$

$\mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f$ — *«усеченный»* ($|y|>\varepsilon$) *интеграл, соответствующий (27.53).*

Заметим, что преимущество конструкции (27.52) перед (27.35) состоит в том, что она содержит гиперсингулярный интеграл более простого вида (построенный в терминах сдвигов функции $f(x)$).

Второй способ связан с формулой (27.20) и аналогичен утверждениям, полученным для риссовых потенциалов в формуле (25.70) и теоремах 26.3′ и 26.10. Обозначим

$$\mathfrak{D}^\alpha_\varepsilon f = \frac{1}{\varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\alpha/2} (E - e^{-t} W_t)^l f\, dt, \quad 0<\alpha<2l, \tag{27.54}$$

где $\varkappa(\alpha/2,\ l)$ — постоянная (5.81).

Теорема 27.7. *Пусть* $\varphi \in L_p(R^n)$. *Тогда* $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (p.p.)}} \mathfrak{D}^\alpha_\varepsilon G^\alpha \varphi = \varphi$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathfrak{D}^\alpha_\varepsilon G^\alpha \varphi = \varphi$ *при* $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 27.7 остается справедливой, если положить

$$\mathfrak{D}^\alpha_\varepsilon f = \frac{1}{\varkappa(\alpha,\ l)} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\alpha} (E - M_t)^\alpha f\, dt, \quad 0<\alpha<l, \tag{27.55}$$

где M_t — полугруппа (27.21).

Наконец, третий способ основан на введении гиперсингулярных интегралов со «взвешенными» разностями:

$$T^\alpha_l f = \int_{R^n} \frac{(\Delta^l_y f)(x,\ \rho)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \quad (\Delta^l_y f)(x,\ \rho) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k \rho(k,\ y) f(x - ky) \tag{27.56}$$

(для простоты ограничиваемся случаем нецентрированных разностей). Отметим, что «взвешенная» разность с весом $\rho(k,\ y) = e^{-ky}$ уже встречалась при рассмотрении одномерных бесселевых потенциалов в § 18, п. 4°, см. равенство (18.77). Определим вес $\rho(k,\ y)$ в (27.56) равенством

$$\rho(k,\ y) = 2^{1-(n+\alpha)/2} \left(\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2} \right) \right)^{-1} (k|y|)^{(n+\alpha)/2} K_{(n+\alpha)/2}(k|y|).$$

Для $f \in S$ интегралы (27.56) с таким весом обладают свойствами: а) при $l > \alpha$ интеграл (27.56) сходится абсолютно, а при $2[\alpha/2] < l \leqslant \alpha$ — условно; б) если $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ и $l > \alpha$, то $T_l^\alpha f \equiv 0$; в) $\mathcal{F}(T_l^\alpha f) = d_{n,l}(\alpha)(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \hat{f}(x)$, где постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ та же, что в § 26.

Утверждение теоремы 27.7 остается в силе, если под $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f$ подразумевать усеченный интеграл (27.56) (с интегрированием по $|y| > \varepsilon$), см. Б. С. Рубин [24, 25].

§ 28. ДРУГИЕ ФОРМЫ МНОГОМЕРНОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассмотренное в § 25—27 дробное интегродифференцирование функций многих переменных, заданных во всем пространстве R^n, являлось реализацией дробной степени $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ или $(E-\Delta)^{-\alpha/2}$, где Δ — лапласиан. Прямое обобщение этого подхода состоит в том, чтобы рассматривать дробные степени произвольного дифференциального оператора в частных производных. Не касаясь этого вопроса в такой общности, остановимся на дробных степенях простейших дифференциальных операторов:

$$\Box_p = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad 1 \leqslant p < n \tag{28.1}$$

(ультрагиперболический случай),

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{28.2}$$

(параболический случай).

Приведенное в § 25—27 дробное интегродифференцирование относится, таким образом, к эллиптическому случаю.

Реализация отрицательной дробной степени первого оператора приводит (при $p = 1$) к риссовым гиперболическим потенциалам с лоренцевым расстоянием, а второго — к параболическим потенциалам. Они и рассмотрены вначале. Затем дана реализация положительной дробной степени оператора теплопроводности (28.2).

В заключение этого параграфа изучается дробное интегрирование, примыкающее к построениям § 24 и отличающееся от них тем, что в соответствующем дробном интеграле интегрирование производится не по октанту или по прямоугольному параллелепипеду с противоположными вершинами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, как в § 24, а по пирамиде с вершиной в точке x и основанием — постоянной (не зависящей от x) гиперплоскостью. Такое дробное интегрирование названо пирамидальным.

1°. Потенциалы Рисса с лоренцевым расстоянием (гиперболические риссовы потенциалы). Как и при введении дробного риссова интегродифференцирования в эллиптическом случае в § 25, идея введения дробной степени прозрачна, по крайней мере формально, в образах Фурье. Именно учитывая, что действие оператора (28.1) сводится в образах Фурье к умножению на квадратичную форму:

$$\mathcal{F}(-\Box_p \varphi) = P(x)\mathcal{F}\varphi,$$
$$P(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2, \tag{28.3}$$

естественно ввести дробные степени $(-\Box_p)^\lambda$ как операторы, определяемые в образах Фурье умножением на дробную степень квадратичной формы $P(x)$. Однако в отличие от эллиптического случая квадратичная форма $P(x)$ не является знакоопределенной. Можно было бы, чтобы избежать возведения в дробную степень отрицательных значений, рас-

смотреть $|P(x)|^\lambda$ или $|P(x)|^\lambda \operatorname{sign} P(x)$. Однако полученные на этом пути дробные степени не будут содержать обычные целые степени оператора $-\Box_p$ (первая при нечетных λ, вторая при четных). Поэтому будем использовать обычное возведение в дробную степень с выбором «главного» значения.

Введем стандартные обозначения:

$$P_+^\lambda = \begin{cases} [P(x)]^\lambda, & \text{если } P(x) > 0, \\ 0, & \text{если } P(x) \leqslant 0, \end{cases} \quad P_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x) \geqslant 0, \\ |P(x)|^\lambda, & \text{если } P(x) < 0, \end{cases}$$

и

$$(P \pm i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} (P \pm i\varepsilon)^\lambda = \begin{cases} [P(x)]^\lambda, & P(x) > 0, \\ e^{\pm \lambda \pi i} |P(x)|^\lambda, & P(x) < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$(P \pm i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\lambda\pi} P_-^\lambda. \tag{28.4}$$

Отправляясь от (28.3), введем две формы дробной степени *даламбертиана*:

$$(-\Box_p)_\pm^\lambda \varphi = \mathcal{F}^{-1} (P \mp i0)^\lambda \mathcal{F} \varphi \tag{28.5}$$

(ср. с формулой (7.4) в одномерном случае). В теории обобщенных функций известна формула преобразования Фурье дробных степеней квадратичных форм. Приведем ее в удобном для нас виде:

$$\mathcal{F}\left[(P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}}\right] = e^{\mp \frac{n-p}{2} \pi i} \gamma_n(\alpha) (P \mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}}, \tag{28.6}$$

где $\gamma_n(\alpha)$ — известный нам нормирующий множитель (25.26) для эллиптического риссова потенциала (доказательство формулы (28.6) можно найти в книге И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, с. 349]).

В силу формулы (28.6) операция (28.5) с $\lambda = -\alpha/2$ должна реализовываться как свертка с функцией

$$\frac{e^{\pm \frac{n-p}{2} \pi i}}{\gamma_n(\alpha)} (P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}} = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \left(e^{\pm \frac{n-p}{2} \pi i} P_+^{\frac{\alpha-n}{2}} + e^{\pm \frac{\alpha-p}{2} \pi i} P_-^{\frac{\alpha-n}{2}}\right). \tag{28.7}$$

Оператор этой свертки обозначим через

$$I_{P \pm i0}^\alpha \varphi = \frac{e^{\pm i \frac{n-p}{2} \pi}}{\gamma_n(\alpha)} (P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}} * \varphi,$$

так что $(-\Box_p)_\pm^{-\alpha/2} = I_{P \pm i0}^\alpha$. В силу формулы (28.7) этот оператор имеет вид

$$I_{P \pm i0}^\alpha \varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \left[e^{\pm \frac{n-p}{2} \pi i} \int_{K_+} \frac{\varphi(x-y)\,dy}{r^{n-\alpha}(y)} + e^{\pm \frac{\alpha-p}{2} \pi i} \int_{K_-} \frac{\varphi(x-y)\,dy}{|r^{n-\alpha}(y)|} \right], \tag{28.8}$$

где обозначено

$$r(y) = \sqrt{P(y)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2}$$

и $K_\pm$ — конусы:

$$K_+ = \{x : x \in R^n,\ P(x) \geqslant 0\}, \quad K_- = \{x : x \in R^n,\ P(x) \leqslant 0\}.$$

Заметим, что $r(y)$ называется *лоренцевым расстоянием*, а конус K_+ известен под названием *светового* или *характеристического конуса*.

Интегралы в (28.8) сходятся на достаточно хороших функциях, если $\alpha > n-2$. В этом можно убедиться, записав $r^{n-\alpha}(y)$ в виде $r^{n-\alpha}(y) = \|y'|^2 - |y''|^2|^{(n-\alpha)/2}$, где $y' = (y_1, \ldots, y_p) \in R^p$, $y'' = (y_{p+1}, \ldots, y_n) \in R^{n-p}$, перейдя к повторному интегрированию по R^p и R^{n-p} и вводя полярные координаты в интеграле по R^{n-p}, что даст условие $(n-\alpha)/2 < 1$.

При $\alpha \leqslant n-2$ конструкция (28.8) не определена, но для нее можно получить аналитическое продолжение по α, пригодное при $\alpha \leqslant n-2$. Останавливаться на этом не станем.

Непосредственно из определения (28.5) следует, что

$$I^{\alpha}_{P\pm i0}\, I^{\beta}_{P\pm i0} = I^{\alpha+\beta}_{P\pm i0}. \tag{28.9}$$

Зададимся вопросом, можно ли ввести оператор гиперболического дробного интегрирования типа (28.8) с интегрированием только по одному из конусов K_+, K_- и так, чтобы сохранялось полугрупповое свойство (28.9). Очевидно, для этого нужно отправляться не от функции $(P \pm i0)^{\lambda}$, а от P^{λ}_{+} или P^{λ}_{-}. В силу связи (28.4) из формулы (28.6) простыми преобразованиями получаются равенства

$$\mathcal{F}\,(P_+^{(\alpha-n)/2}) = \frac{\gamma_n(\alpha)}{\sin(n-\alpha)\,\pi/2}\left(\sin\frac{p-\alpha}{2}\pi P_+^{-\alpha/2} + \sin\frac{p\pi}{2}P_-^{-\alpha/2}\right), \tag{28.10}$$

$$\mathcal{F}\,(P_-^{(\alpha-n)/2}) = \frac{\gamma_n(\alpha)}{\sin(n-\alpha)\,\pi/2}\left(\sin\frac{n-p}{2}\pi P_+^{-\alpha/2} + \sin\frac{n-p-\alpha}{2}\pi P_-^{-\alpha/2}\right).$$

Отсюда

$$\mathcal{F}\,(P_+^{(\alpha-n)/2}) = (-1)^{p/2-1}\gamma_n(\alpha)\frac{\sin\alpha\pi/2}{\sin(n-\alpha)\,\pi/2}P_+^{-\alpha/2}, \tag{28.11}$$

если $p = 2, 4, 6, \ldots,$

$$\mathcal{F}\,(P_-^{\frac{\alpha-n}{2}}) = (-1)^{\frac{n-p}{2}-1}\gamma_n(\alpha)\frac{\sin\alpha\pi/2}{\sin(n-\alpha)\,\pi/2}P_-^{-\frac{\alpha}{2}}, \tag{28.12}$$

если $n-p = 2, 4, 6, \ldots$

Следовательно, потенциалы

$$I^{\alpha}_{P_+}\varphi = \frac{(-1)^{p/2-1}}{H_n'(\alpha)}\int\limits_{K_+}\frac{\varphi(x-y)\,dy}{r^{n-\alpha}(y)}, \quad p = 2, 4, 6, \ldots, \tag{28.13}$$

$$I^{\alpha}_{P_-}\varphi = \frac{(-1)^{\frac{n-p}{2}-1}}{H_n'(\alpha)}\int\limits_{K_-}\frac{\varphi(x-y)\,dy}{|r^{n-\alpha}(y)|}, \quad n-p = 2, 4, 6, \ldots, \tag{28.14}$$

где $\alpha > n-2$ и

$$H_n'(\alpha) = \gamma_n(\alpha)\frac{\sin\alpha\pi/2}{\sin(n-\alpha)\,\pi/2}, \tag{28.15}$$

обладают в силу (28.11), (28.12) полугрупповым свойством

$$I^{\alpha}_{P_\pm}\, I^{\beta}_{P_\pm} = I^{\alpha+\beta}_{P_\pm} \tag{28.16}$$

при выборе $p = 2, 4, 6, \ldots$ в случае знака $+$ и $p = n-2, n-4, n-6, \ldots$ в случае знака $-$.

Выделим особо случай $p = 1$. Форма (28.13) в этом случае неприемлема, а форму (28.14) можно использовать при нечетных n:

$$I^{\alpha}_{P_-}\varphi = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{H_n'(\alpha)}\int\limits_{K_-}\frac{\varphi(x-y)}{|r^{n-\alpha}(y)|}\,dy, \quad p = 1, \quad n = 3, 5, 7, \ldots \tag{28.17}$$

Однако в случае $p=1$ имеется и другой вариант, именно тот, который был введен М. Риссом. Выделим в световом конусе K_+ положительный полуконус

$$K_+^+ = \{x : x_1^2 \geqslant x_2^2 + \cdots + x_n^2, \quad x_1 \geqslant 0\}, \tag{28.18}$$

называемый также *световым конусом будущего*, и обозначим

$$I_\square^\alpha \varphi = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int\limits_{K_+^+} \frac{\varphi(x-y)}{r^{n-\alpha}(y)}\, dy, \quad \alpha > n-2, \tag{28.19}$$

подчеркивая связь оператора (28.19) с даламбертианом (волновым оператором) $\square = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Здесь нормировочная постоянная $H_n(\alpha)$ будет выбрана в виде

$$H_n(\alpha) = \frac{\gamma_n(\alpha)}{2\sin(n-\alpha)\pi/2} = 2^{\alpha-1}\pi^{-1+n/2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}\right). \tag{28.20}$$

Потенциал (28.19) и называется *гиперболическим риссовым потенциалом*. Его можно записать также в виде

$$I_\square^\alpha \varphi = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int\limits_{K_+^-(x)} \frac{\varphi(y)\,dy}{r^{n-\alpha}(x-y)}, \tag{28.21}$$

где

$$K_+^-(x) = \{y : (x_1-y_1)^2 \geqslant (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2,\ x_1-y_1 \geqslant 0\}$$

есть отрицательный световой конус, смещенный вершиной в точку x.

Покажем, что оператор $I_\square^\alpha$ обладает полугрупповым свойством:

$$I_\square^\alpha I_\square^\beta \varphi = I_\square^{\alpha+\beta}\varphi, \quad \square I_\square^{\alpha+2}\varphi = I_\square^\alpha \varphi \tag{28.22}$$

при выборе нормировочной постоянной по правилу (28.20). Вычислим предварительно потенциал Рисса от экспоненты e^{x_1}. Имеем при $\alpha > n-2$

$$I_\square^\alpha (e^{x_1}) = \frac{e^{x_1}}{H_n(\alpha)} \int\limits_{K_+^+} e^{-y_1} r^{\alpha-n}(y)\, dy$$

и при выборе

$$H_n(\alpha) = \int\limits_{K_+^+} e^{-y_1} r^{\alpha-n}(y)\, dy \tag{28.23}$$

получим

$$I_\square^\alpha (e^{x_1}) = e^{x_1}. \tag{28.24}$$

Вычисляя интеграл (28.23), имеем

$$H_n(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-y_1} dy_1 \int\limits_{|\xi|<y_1} (y_1^2 - |\xi|^2)^{(\alpha-n)/2} d\xi, \quad \xi = (y_2, \ldots, y_n) \in R^{n-1}.$$

Отсюда

$$H_n(\alpha) = \int\limits_0^\infty y_1^{\alpha-1} e^{-y_1} dy_1 \int\limits_{|\eta|<1} (1-|\eta|^2)^{(\alpha-n)/2} d\eta =$$

$$= \Gamma(\alpha)|S_{n-2}| \int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{(\alpha-n)/2}\, \rho^{n-2} d\rho,$$

что после простых преобразований совпадает с (28.20).

Заметим, что из формулы (28.24) можно вывести более общее равенство

$$I_{\square}^{\alpha}(e^{a\cdot x}) = \frac{e^{a\cdot x}}{(a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2)^{\alpha/2}}, \tag{28.25}$$

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in K_+^+, \quad a\cdot x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

(ср. с равенством (25.39)).

Равенство (28.24) и позволяет дать прямой вывод полугруппового свойства (28.22). Считая, что $\alpha > n-2$, $\beta > n-2$, имеем

$$I_{\square}^{\alpha} I_{\square}^{\beta}\varphi = \frac{1}{H_n(\alpha) H_n(\beta)} \int\limits_{K_+^-(x)} r^{\alpha-n}(x-y)\,dy \int\limits_{K_+^-(y)} r^{\beta-n}(y-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, $K_+^-(y) \subset K_+^-(x)$ для $y \in K_+^-(x)$. Поэтому после перестановки порядка интегрирования получаем

$$I_{\square}^{\alpha} I_{\square}^{\beta}\varphi = \frac{1}{H_n(\alpha) H_n(\beta)} \int\limits_{K_+^-(x)} \varphi(\xi)\,d\xi \int\limits_{D(x,\xi)} r^{\alpha-n}(x-y)\, r^{\beta-n}(y-\xi)\,dy, \tag{28.26}$$

где $D(x, \xi) = K_+^-(x) \cap K_+^+(\xi)$ (ввести характеристическую функцию конуса $K_+^-(y)$ при перестановке порядка интегрирования). С помощью сдвига по поверхности конуса и преобразования подобия получаем, что внутренний интеграл равен

$$r^{\alpha+\beta-n}(x-\xi)\, B_n(\alpha, \beta), \quad B_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{D(0,e_1)} r^{\alpha-n}(y)\, r^{\beta-n}(e_1 - y)\,dy,$$

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

где интеграл $B_n(\alpha, \beta)$ есть константа. Поэтому из (28.26) заключаем, что

$$I_{\square}^{\alpha} I_{\square}^{\beta}\varphi = \frac{B_n(\alpha, \beta)}{H_n(\alpha) H_n(\beta)} H_n(\alpha+\beta) I_{\square}^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{28.27}$$

Выбрав здесь $\varphi = e^{x_1}$, видим, что в силу формулы (28.24) необходимо должно выполняться равенство

$$B_n(\alpha, \beta) = H_n(\alpha) H_n(\beta)/H_n(\alpha+\beta)$$

(ср. с равенством (25.38)), что превращает (28.27) в первое из равенств (28.22). Второе получается непосредственной проверкой после дифференцирования под знаком интеграла.

Замечание 28.1. Преобразование Фурье гиперболического риссова потенциала $I_{\square}^{\alpha}\varphi$ вычисляется по формуле

$$\mathscr{F}(I_{\square}^{\alpha}\varphi) = \frac{q}{|r(x)|^{\alpha}} \hat{\varphi}(x), \quad x \in R^n, \tag{28.28}$$

где $q = e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sign} x_1}$ при $r^2(x) > 0$ и $q = 1$ при $r^2(x) < 0$, $r^2(x) = x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$.

Завершим этот пункт рассмотрением риссова гиперболического потенциала (28.21) в двумерном случае:

$$I_{\square}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{H_2(\alpha)} \int\limits_{|x_2-y_2|<x_1-y_1} \frac{\varphi(y)\,dy_1dy_2}{[(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2]^{1-\alpha/2}}$$

или

$$I^{\alpha}_{\square}\varphi = \frac{1}{H_2(\alpha)} \int\limits_{|y_2|<y_1} \frac{\varphi(x-y)\,dy_1dy_2}{(y_1^2-y_2^2)^{1-\alpha/2}}, \quad x=(x_1,\ x_2),\ y=(y_1,y_2). \tag{28.29}$$

Замена переменных $y_1+y_2=2\xi_1$, $y_1-y_2=2\xi_2$ приводит этот потенциал к лиувиллевскому дробному интегрированию по каждой переменной, рассмотренному в § 24:

$$I^{\alpha}_{\square}\varphi = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha/2)} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(z_1+z_2-\xi_1-\xi_2,\ z_1-z_2-\xi_1+\xi_2)}{\xi_1^{1-\alpha/2}\xi_2^{1-\alpha/2}}\,d\xi_1d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha/2)} \int\limits_{-\infty}^{z_1}\int\limits_{-\infty}^{z_2} \frac{\varphi(s_1+s_2,\ s_1-s_2)\,ds_1ds_2}{(z_1-s_1)^{1-\alpha/2}\,(z_2-s_2)^{1-\alpha/2}}, \tag{28.30}$$

где $z_1=(x_1+x_2)/2$, $z_2=(x_1-x_2)/2$.

В операторной форме равенство (28.30) имеет вид

$$I^{\alpha}_{\square}\varphi = A^{-1}I^{\alpha/2,\alpha/2}_{++}A\varphi, \tag{28.31}$$

где A — оператор линейной замены независимых переменных, $(A\varphi)(x) = \varphi(x_1+x_2,\ x_1-x_2)$, а $I^{\alpha/2,\alpha/2}_{++}$ — оператор лиувиллевского дробного интегрирования (24.20).

Непосредственно из связи (28.31) и теоремы 24.1 о лиувиллевском интегрировании $I^{\alpha,\beta}_{++}$ вытекает следующая

Теорема 28.1. *Пусть* $n=2$, $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant r<\infty$. *Оператор* $I^{\alpha}_{\square}$ *ограничен из* $L_p(R^2)$ *в* $L_r(R^2)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0<\alpha<2, \quad 1<p<2/\alpha, \quad r=2p/(2-\alpha p).$$

2°. **Параболические потенциалы.** Рассмотрим в этом пункте отрицательные дробные степени оператора теплопроводности (28.2). Нам будет удобно выделить последнюю (временную) переменную, обозначив ее через t, а пространственные переменные через x_1, ..., x_n, т. е. вести рассмотрение в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве R^{n+1} точек $(x,\ t)$, где $x\in R^n$, $t\in R^1$. Речь пойдет об отрицательной дробной степени оператора

$$T = -\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{28.32}$$

где Δ_x — лапласиан, применяемый по переменным x_1, ..., x_n. Действие оператора (28.32) в образах Фурье имеет вид

$$\widehat{T\varphi} = (|x|^2 - it)\widehat{\varphi}(x,\ t), \tag{28.33}$$

где преобразование Фурье применяется по R^{n+1}:

$$(\mathcal{F}\varphi)(x,\ t) = \hat{\varphi}(x,\ t) = \int\limits_{R^{n+1}} e^{ix\cdot\xi+it\tau}\varphi(\xi,\ \tau)\,d\xi d\tau. \tag{28.34}$$

Поэтому отрицательную дробную степень $T^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$, естественно ввести в образах Фурье с помощью функции $(|x|^2-it)^{-\alpha/2}$ (с выбором главного значения: $\arg(|x|^2-it)\in(-\pi/2,\ \pi/2)$). Прообраз Фурье такой функции будет записываться в терминах ядра Гаусса — Вейерштрасса:

$$W(x,\ t) = (4\pi t)^{-n/2}\,e^{-|x|^2/(4t)}, \quad t>0. \tag{28.35}$$

Введем функцию

$$h_\alpha(x,\ t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\begin{cases} t^{-1+\alpha/2}W(x,\ t), & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases} \tag{28.36}$$

Лемма 28.1. *Преобразование Фурье (28.34) функции $h_\alpha(x, t)$ равно:*

$$\hat{h}_\alpha(x,\ t) = (|x|^2 - it)^{-\alpha/2},\quad \alpha>0. \tag{28.37}$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой:

$$\int\limits_{R^{n+1}} h_\alpha(\xi,\ \tau)\, e^{ix\cdot\xi+it\tau}d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}\int\limits_0^\infty \tau^{\frac{\alpha-n}{2}-1}e^{it\tau}\,d\tau\int\limits_{R^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\tau}+ix\cdot\xi}\,d\xi.$$

Внутренний интеграл есть произведение легко вычисляемых одномерных интегралов, так что довести до конца проверку формулы (28.37) не составляет затруднений при малых $\alpha>0$, после чего нужно воспользоваться аналитическим продолжением по α.

Лемма 28.1 позволяет ввести отрицательную дробную степень оператора теплопроводности T в виде следующей свертки:

$$T^{-\alpha/2}\varphi = H^\alpha\varphi \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{R^{n+1}} h_\alpha(\xi,\ \tau)\varphi(x-\xi,\ t-\tau)\,d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int\limits_{R_+^{n+1}} \tau^{-1+\alpha/2}W(\xi,\ \tau)\,\varphi(x-\xi,\ t-\tau)\,d\xi d\tau \tag{28.38}$$

или в явной записи

$$H^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)(4\pi)^{n/2}}\int\limits_{R_+^{n+1}} \tau^{-1+(\alpha-n)/2}\, e^{-|\xi|^2/4\tau}\,\varphi(x-\xi,\ t-\tau)\,d\xi d\tau, \tag{28.39}$$

где R_+^{n+1} — полупространство $\{(x,\ t): x\in R^n,\ t>0\}$.

Оператор (28.39) и называется *параболическим потенциалом.*

Если ввести еще обозначение

$$(W_\tau\varphi)(x,\ t) = (4\pi\tau)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-|\xi|^2/4\tau}\varphi(x-\xi,\ t)\,d\xi \tag{28.40}$$

для оператора Гаусса — Вейерштрасса, то оператор H^α можно переписать, как это следует из (28.38), в виде

$$(H^\alpha\varphi)(x,\ t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int\limits_0^\infty \tau^{\alpha/2-1}(W_\tau\varphi)(x,\ t-\tau)d\tau \tag{28.41}$$

(ср. с формулой (25.51) для риссова потенциала).

Оператор H^α определен при любом $\alpha>0$ на достаточно широком классе функций, например на функциях $\varphi(x, t)$, ограниченных и убывающих по t при $t\to\infty$ так, что $|\varphi(x, t)|\leqslant c(1+|t|)^a$, $a>\alpha/2$. В этом можно убедиться непосредственно. Существование параболических потенциалов от функций из $L_p(R^{n+1})$ отражено в следующей теореме.

Теорема 28.2. *Интеграл $H^\alpha\varphi$, $\alpha>0$, где $\varphi\in L_p(R^{n+1})$, абсолютно сходится при $0<\alpha<n+2$ и $1\leqslant p<(n+2)/\alpha$, при этом оператор H^α ограничен из $L_p(R^{n+1})$ в $L_q(R^{n+1})$, где $1<p<(n+2)/\alpha$, $q=(n+2)p/(n+2-\alpha p)$.*

Мы не приводим доказательства этой теоремы, см. литературные ссылки в § 29.

Подобно пространствам $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов и пространствам $G^\alpha(L_p)$ бесселевых потенциалов вводятся пространства

$$H^\alpha(L_p) = \{f : f = H^\alpha\varphi,\ \varphi \in L_p(R^{n+1})\} \tag{28.42}$$

параболических потенциалов. Эти пространства определены, согласно теореме 28.2, при $1 \leqslant p < (n+2)/\alpha$. В следующем пункте укажем описание пространств $H^\alpha(L_p)$ в терминах сходимости некоторых интегралов типа гиперсингулярных.

Пространства (28.42) можно изучать и в случае функций $f(x)$, рассматриваемых в полупространстве R^{n+1}_+.

Отметим, наконец, что можно аналогично изложенному рассмотреть отрицательную дробную степень дифференциального оператора $E - \Delta_x + \partial/\partial t$, где E — единичный оператор. В образах Фурье будем иметь тогда дело с функцией

$$(1 + |x|^2 - it)^{-\alpha/2}, \tag{28.43}$$

так что вводимая на этом пути дробная степень

$$\left(E - \Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-\alpha/2}, \tag{28.44}$$

т. е. соответствующий потенциал, будет соотноситься с уже рассмотренным параболическим потенциалом $H^\alpha\varphi$ так же, как бесселев потенциал $G^\alpha\varphi$ соотносится с риссовым потенциалом $I^\alpha\varphi$. Дробная степень (28.44) реализуется как свертка с прообразом Фурье функции (28.43) и имеет вид

$$\mathcal{H}^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)(4\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^{n+1}_+} \tau^{\frac{\alpha-n}{2}-1} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\tau}-\tau} \varphi(x-\xi,\ t-\tau)\, d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{-1-\alpha/2} e^{-\tau} (W_\tau\varphi)(x,\ t-\tau)\, d\tau \tag{28.45}$$

(ср. с представлением (27.20) для бесселева потенциала).

Оператор (28.45) также называют *параболическим потенциалом*. За счет дополнительного множителя $e^{-\tau}$ по сравнению с (28.39) он имеет существенно более широкую область определения, нежели потенциал (28.39), и, в частности, ограничен во всех пространствах $L_p(R^{n+1})$, $1 \leqslant p < \infty$. Об операторе (28.45) см. также в § 29, п. 2°.

3°. Реализация дробных степеней $\left(-\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha/2}$ и $\left(E - \Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, в виде гиперсингулярного интеграла. В этом пункте строятся гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$ и $\mathfrak{T}^\alpha f$, $\alpha > 0$, обратные к параболическим потенциалам $f = H^\alpha\varphi$ и $f = \mathcal{H}^\alpha\varphi$, определенным равенствами (28.39), (28.45). Поэтому эти гиперсингулярные интегралы естественно назвать параболическими гиперсингулярными интегралами. Они будут содержать конечные разности нестандартного вида, учитывающие разное поведение потенциалов по пространственной переменной x и временной переменной t.

Изложим вначале схему формального построения операторов T^α, $\mathfrak{T}^\alpha$, $\alpha > 0$, обратных к потенциалам H^α, $\mathcal{H}^\alpha$, а затем покажем, что построенные операторы действительно обращают соответствующие потенциалы. Ниже

будем широко использовать ядро Гаусса — Вейерштрасса (28.35), обладающее следующими свойствами (см. И. Стейн, Г. Вейс [1, с. 16, 24]):

$$\int_{R^n} W(x,\ t)\,dx = 1, \tag{28.46}$$

$$\int_{R^n} W(y,\ t)\,W(x-y,\ \tau)\,dy = W(x,\ t+\tau), \tag{28.47}$$

$$(\mathcal{F}_x W)(\xi,\ t) = e^{-t|\xi|^2}, \tag{28.48}$$

где

$$(\mathcal{F}_x \varphi)(\xi,\ t) = \int_{R^n} \varphi(x,\ t)\,e^{i\xi\cdot x}dx \tag{28.49}$$

означает преобразование Фурье по пространственной переменной x.

Пусть $f(x,\ t) = (H^\alpha \varphi)(x,\ t)$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{F}_x$ с учетом (28.48), получаем

$$I_+^{\alpha/2}\, e^{\eta|\xi|^2}(\mathcal{F}_x\varphi)(\xi,\ \eta)(t) = (\mathcal{F}_x f)(\xi,\ t)\,e^{t|\xi|^2}, \tag{28.50}$$

где $I_+^{\alpha/2}$ — оператор одномерного дробного интегрирования (5.4), примененный по переменной η. Обращая в (28.50) оператор $I_+^{\alpha/2}$ с помощью дробной производной Маршо (5.80), приходим к соотношению

$$e^{t|\xi|^2}(\mathcal{F}_x\varphi)(\xi,\ t) =$$

$$= \frac{1}{\varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_0^\infty \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (\mathcal{F}_x f)(\xi,\ t-k\eta)\, e^{(t-k\eta)|\xi|^2} \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}}, \tag{28.51}$$

из которого после умножения на $e^{-t|\xi|^2}$ и применения оператора $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ получаем

$$\varphi(x,\ t) = \frac{1}{\varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_0^\infty \Big[f(x,\ t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int_{R^n} f(x-y,\ t-k\eta)\,W(y,\ k\eta)\,dy \Big] \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}}.$$

Отсюда после замены $y \to \sqrt{k}\,y$ и несложных преобразований имеем

$$\varphi(x,\ t) = \frac{1}{\varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_{R_+^{n+1}} \frac{(\Delta_{y,\eta}^l f)(x,\ t)}{\eta^{1+\alpha/2}}\, W(y,\ \eta)\,dyd\eta \overset{\text{def}}{=} T^\alpha f, \tag{28.52}$$

где

$$(\Delta_{y,\eta}^l f)(x,\ t) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f(x - \sqrt{k}\,y,\ t-k\eta). \tag{28.53}$$

Таким образом, мы построили обратный оператор $T^\alpha = (H^\alpha)^{-1}$ в виде гиперсингулярного интеграла (28.52).

Аналогичные рассуждения применительно к уравнению $\mathcal{H}^\alpha \varphi = f(x,\ t)$ приводят к следующему выражению для $\varphi(x,\ t)$ в виде гиперсингулярного интеграла:

$$\varphi(x,\ t) = \frac{1}{\varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_{R_+^{n+1}} \frac{(\Delta_{y,\eta}^l f)(x,\ t;\ e^{-\eta})}{\eta^{1+\alpha/2}}\, W(y,\ \eta)\,dyd\eta =$$

$$\overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{T}^\alpha f)(x,\ t), \tag{28.54}$$

где использована взвешенная разность типа (28.53):

$$(\Delta^l_{y,\eta} f)(x,\ t;\ e^{-\eta}) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k e^{-k\eta} f(x - \sqrt{k}y,\ t - k\eta) \qquad (28.55)$$

(взвешенные разности уже встречались у нас в эллиптическом случае, см. (27.56)).

Нетрудно показать, что интегралы в (28.52), (28.54) сходятся условно для $f \in S(R^{n+1})$ в каждой точке $(x,\ t)$, если их понимать следующим образом:

$$T^\alpha f = \lim_{\varepsilon \to 0} (T^\alpha_\varepsilon f)(x,\ t),\quad \mathfrak{T}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathfrak{T}^\alpha_\varepsilon f)(x,\ t), \qquad (28.56)$$

где $T^\alpha_\varepsilon f$, $\mathfrak{T}^\alpha_\varepsilon f$ — усеченные интегралы (28.52), (28.54) с интегрированием по сдвинутому полупространству $R^{n+1}_{+,\varepsilon} = \{(y,\ \eta) : y \in R^n,\ \eta > \varepsilon\}$.

Покажем, что гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$, $\mathfrak{T}^\alpha f$ при указанном в (28.56) их понимании обращают соответствующие потенциалы $f = H^\alpha \varphi$, $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$ в рамках пространств $\Phi = \Phi(R^{n+1})$ и $S = S(R^{n+1})$, инвариантных для операторов H^α и $\mathcal{H}^\alpha$ соответственно.

Теорема 28.3. *Пусть* $f = H^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in \Phi$. *Тогда* $T^\alpha f \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} T^\alpha_\varepsilon f = \varphi$.

Доказательство. Будем основываться на представлении

$$T^\alpha_\varepsilon f = \int_{R^{n+1}_+} W(y,\ \eta)\, \mathcal{K}_{l,\alpha}(\eta)\, \varphi(x - \sqrt{\varepsilon}y,\ t - \varepsilon\eta)\, dy d\eta, \qquad (28.57)$$

где $\mathcal{K}_{l,\alpha}(\eta)$ — ядро (6.7′). В силу (6.8′) и (28.46)

$$W(y,\ \eta)\, \mathcal{K}_{l,\alpha}(\eta) \in L_1(R^{n+1}),\quad \int_{R^{n+1}} W(y,\ \eta)\, \mathcal{K}_{l,\alpha}(\eta)\, d\eta = 1. \qquad (28.58)$$

Докажем (28.57). Подставляя выражение для разности

$$(\Delta^l_{y,\eta} f)(x,\ t) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int_{R^{n+1}_+} h_\alpha(z - \sqrt{k}y,\ \zeta - k\eta)\, \varphi(x - z,\ t - \zeta)\, dz d\zeta,$$

где $h_\alpha(x,\ t)$ — ядро (28.36), в интеграл $T^\alpha_\varepsilon f$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$T^\alpha_\varepsilon f = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)\, \varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_{R^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int_\varepsilon^\infty \frac{(\zeta - k\eta)_+^{\alpha/2-1}}{\eta^{1+\alpha/2}} d\eta \times \right.$$

$$\left. \times \int_{R^n} W(y,\ \eta)\, W(z - \sqrt{k}y,\ \zeta - k\eta) \right] \varphi(x - z,\ t - \zeta)\, dz d\zeta.$$

Производя замену $y \to y/\sqrt{k}$, $k \neq 0$, и замечая, что $W(y/\sqrt{k},\ \eta) = k^{n/2} \times W(y, k\eta)$, в силу полугруппового свойства (28.47) ядра Гаусса — Вейерштрасса получим

$$T^\alpha_\varepsilon f = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)\, \varkappa(\alpha/2,\ l)} \int_{R^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \int_\varepsilon^\infty \frac{(\zeta - k\eta)_+^{\alpha/2-1}}{\eta^{1+\alpha/2}} d\eta \right] \times$$

$$\times W(z,\ \zeta)\, \varphi(x - z,\ t - \zeta)\, dz d\zeta.$$

Отсюда, делая замены $\zeta \to \varepsilon/\zeta$, $\eta \to \varepsilon\eta$, приходим после простых вычислений к (28.57).

Свойства (28.58) дают возможность перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла в (28.57). В результате получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon^\alpha f = \varphi$, что и требовалось.

Теорема 28.4. *Пусть* $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in S$. *Тогда* $\mathfrak{T}^\alpha f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathfrak{T}_\varepsilon^\alpha f = \varphi$.

Утверждение теоремы получается предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ в соотношении

$$\mathfrak{T}_\varepsilon^\alpha f = \int\limits_{R_+^{n+1}} W(y,\ \eta)\, \mathcal{K}_{l,\alpha}(\eta) e^{-\varepsilon\eta} \varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y,\ t - \varepsilon\eta)\, dy d\eta,$$

которое доказывается аналогично (28.57).

Гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$, $\mathfrak{T}^\alpha f$ являются обратными к потенциалам $f = H^\alpha \varphi$, $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$ и для $\varphi \in L_p$, если их понимать как пределы по L_p-норме соответствующих усеченных интегралов.

Теорема 28.5. *Пусть* $0 < \alpha < (n+2)/p$, $1 < p < \infty$, $f = H^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$. *Тогда*

$$T^\alpha f \underset{(L_p)}{\equiv} \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon^\alpha f = \varphi. \tag{28.59}$$

Доказательство. Равенство (28.57), справедливое для $\varphi \in \Phi$, распространяется и на функции $\varphi \in L_p$ с учетом ограниченности оператора $T_\varepsilon^\alpha H^\alpha$ и оператора, стоящего в правой части равенства (28.57), из L_p в L_q, $q = (n+2)p/(n+2-\alpha p)$ (этот факт вытекает из теоремы 28.2 в силу того, что $|\mathcal{K}_{l,\alpha}(y,\ \eta)| \leqslant c\eta^{-1+\alpha/2}$). Переходя в (28.57) к пределу по L_p-норме , получаем (28.59).

Аналогично доказывается

Теорема 28.6. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 0$ и $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$. *Тогда*

$$\mathfrak{T}^\alpha f \underset{(L_p)}{\equiv} \lim_{\varepsilon\to 0} \mathfrak{T}_\varepsilon^\alpha f = \varphi.$$

4°. Пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных. Ранее в § 24 были введены смешанные интегралы и производные дробного порядка. Областью интегрирования таких операторов является прямоугольный параллелепипед с противоположными вершинами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$, в частности, это может быть октант с вершиной x. Ядра этих операторов допускают особенности на тех гранях параллелепипеда, которые проходят через точку x. Теперь в качестве области интегрирования возьмем некоторую пирамиду с вершиной в точке x и основанием, лежащим на фиксированной (не зависящей от x) гиперплоскости, а в ядре будем допускать особенности на боковых гранях этой пирамиды, которые лежат на гиперплоскостях, проходящих через точку x. В результате возникнут так называемые пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных, которые, как показывается ниже, имеют существенные отличия и не сводятся к рассмотренным в § 24 смешанным дробным интегралам и производным. Для сравнения проиллюстрируем указанные области интегрирования смешанных дробных интегралов и производных и их пирамидальных аналогов в двумерном случае $n = 2$ (см. рис. 4 и 5).

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные термины и обозначения. Пусть $A = \|a_{jk}\|$ $(a_{jk} \in R^1)$ — матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A \neq 0$, вектор-строки которой обозначим через $a_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения

общности положим $|A|=1$. Пусть еще $A\cdot x=(a_1\cdot x, \ldots, a_n\cdot x)$, $(A\cdot x)^\alpha = (a_1\cdot x)^{\alpha_1}\cdots(a_n\cdot x)^{\alpha_n}$, где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, и $b=(b_1, \ldots, b_n)\in R^n$, $c=(c_1, \ldots, c_n)\in R^n$, $-\infty<b_j,\ c_j<\infty$. Обозначим через

$$A_c(b)=\{t\in R^n:\ A\cdot(b-t)\geqslant 0,\quad c\cdot t\geqslant 0\} \tag{28.60}$$

n-мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке b, с основанием на гиперплоскости $c\cdot t=0$ и с боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $a_j\cdot(b-t)=0$, $j=1, \ldots, n$. В частности, когда $A=E=\|\delta_{jk}\|$ —

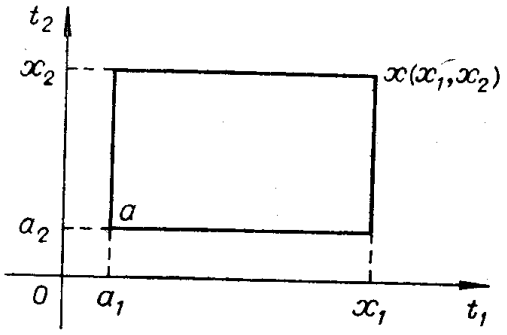


Рис. 4. Область интегрирования интеграла $I^\alpha_{a+}\varphi$

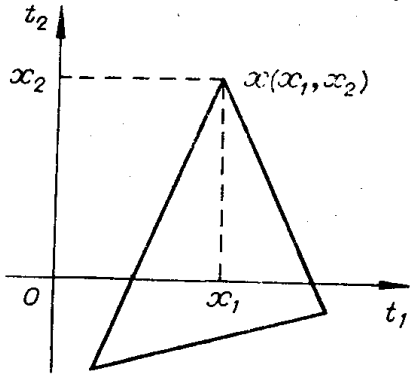


Рис. 5. Область интегрирования интеграла $I^\alpha_{A_c}\varphi$

единичная матрица, а $c=1=(1, \ldots, 1)$, то (28.60) является простейшей модельной пирамидой вида

$$E_1(b)=\{t\in R^n:\ b\geqslant t,\quad t\cdot 1\geqslant 0\}. \tag{28.61}$$

При $n=2$ она совпадает с треугольником, ограниченным прямыми $t_1=b_1$, $t_2=b_2$ и $t_1+t_2=0$ (рис. 6).

Соответствующее уравнение типа Абеля, которое будет отвечать указанным выше пирамидальным аналогам смешанных дробных интегралов (см. (28.65)), является обобщением уравнения, рассмотренного С. Г. Михлиным [1, с. 48].

Следующие ниже утверждения содержат условия непустоты и ограниченности пирамиды (28.60), а также формулу перестановки порядка интегрирования, аналогичную формуле Дирихле (1.32).

Лемма 28.2. *Пусть $A_c(b)$ — пирамида (28.60). Для того чтобы пирамида $A_c(b)$ была непустой (ограниченной) в R^n, необходимо и достаточно, чтобы $A^{-1}c\cdot b>0$ (соответственно $A^{-1}c>0$).*

Доказательство вытекает из того факта, что при линейном преобразовании $t\to A^{-1}t$, $b\to A^{-1}b$ пирамида $A_c(b)$ переходит в пирамиду

$$A_d(b)=\{t\in R^n:\ b\geqslant t,\ d\cdot t\geqslant 0\},\quad d=A^{-1}c. \tag{28.62}$$

Лемма 28.3. *Если функция $f(t, r)$, определенная на $A_c(b)\times A_c(b)$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int\limits_{A_c(b)} dt \int\limits_{A_c(t)} f(t,\ \tau)\,d\tau = \int\limits_{A_c(b)} d\tau \int\limits_{\sigma(b,\tau)} f(t,\tau)\,dt, \tag{28.63}$$

где

$$\sigma(b,\ \tau)=\{t\in R^n:\ A\cdot\tau\leqslant A\cdot t\leqslant A\cdot b\}, \tag{28.64}$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (28.63) сходится абсолютно.

Доказательство получается непосредственно из теоремы Фубини 1.1.

В пирамиде $A_c(b)$ рассмотрим теперь интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_c(x)}\frac{\varphi(t)\,dt}{(A\cdot(x-t))^{1-\alpha}}=f(x),\qquad x\in A_c(b), \tag{28.65}$$

где $0<\alpha<1$ (что означает $0<\alpha_1<1, \ldots, 0<\alpha_n<1$), $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)$ и $x<b$ (т. е. $x_1<b_1, \ldots, x_n<b_n$).

В частности, при $A_c(b)=E_1(b)$ уравнение (28.65) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f_*(x), \quad x\in E_1(b), \tag{28.66}$$

который не совпадает с многомерным уравнением Абеля (24.1). Таким образом, уравнение (24.1) не является частным случаем (28.65). Тем не менее для обращения уравнения (28.65) применим метод, использованный в § 2, п. 1°. Следуя ему, заменим в (28.65) t на τ, x на t, умножим обе части полученного равенства на $(A\cdot(x-t))^{-\alpha}$ и проинтегрируем по пирамиде $A_c(x)$, применив лемму 28.3:

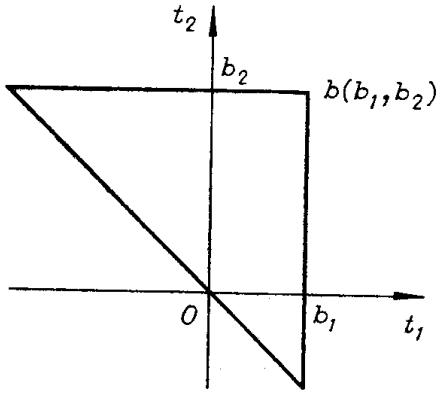


Рис. 6. Область интегрирования интеграла $I^{\alpha}_{E_1}\varphi$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_c(x)}\varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_{\sigma(x,\tau)}(A\cdot(x-t))^{-\alpha}\times$$
$$\times(A\cdot(t-\tau))^{\alpha-1}dt=\int\limits_{A_c(x)}(A\cdot(x-t))^{-\alpha}f(t)\,dt \tag{28.67}$$

область $\sigma(x,\tau)$ см. в (28.64)). Для вычисления внутреннего интеграла в (28.67) введем новые переменные $s_j=[a_j\cdot(x-t)]/[a_j\cdot(x-\tau)]$ и примем во внимание равенства $1-s_j=[a_j\cdot(t-\tau)]/[a_j\cdot(x-\tau)]$, а также формулы (1.68), (1.69). Тогда получим

$$\int\limits_{\sigma(x,\tau)}(A\cdot(x-t))^{-\alpha}(A\cdot(t-\tau))^{\alpha-1}d\tau=\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^1 s_j^{-\alpha_j}(1-s_j)^{\alpha_j-1}ds_j=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha). \tag{28.68}$$

Следовательно, равенство (28.67) перепишется в виде

$$\int\limits_{A_c(x)}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{A_c(x)}(A\cdot(x-t))^{-\alpha}f(t)\,dt\overset{\text{def}}{\equiv}f_{1-\alpha}(x). \tag{28.69}$$

Совершим еще замену переменных

$$t=A^{-1}\cdot\frac{\tau}{d}, \quad x=A^{-1}\cdot\frac{y}{d}, \quad \frac{x}{d}=\left(\frac{x_1}{d_1}, \ldots, \frac{x_n}{d_n}\right), \tag{28.70}$$

где $d=(d_1, \ldots, d_n)$ выражается формулой (28.62). Тогда в силу леммы 28.2

$$\int\limits_{E_1(y)}\psi(\tau)\,d\tau=g(y), \tag{28.71}$$

где $E_1(y)$ — пирамида (28.61), а

$$\psi(\tau)=\varphi\left(A^{-1}\cdot\frac{\tau}{d}\right), \quad g(y)=f_{1-\alpha}\left(A^{-1}\cdot\frac{y}{d}\right)\prod_{k=1}^{n}d_k. \tag{28.72}$$

Для обращения уравнения (28.71) перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+\cdots+y_{n-1})}^{y_n}d\tau_n\int\limits_{-(y_1+\cdots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}}d\tau_{n-1}\cdots\int\limits_{-(\tau_2+\cdots+\tau_n)}^{y_1}\psi(\tau)\,d\tau=g(y). \tag{28.73}$$

Продифференцировав это равенство последовательно по y_n, y_{n-1}, ..., y_1, придем к соотношению

$$\psi(y) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} g(y).$$

В последнем осуществим аналогичную (28.70) замену $x = A^{-1} \cdot \frac{y}{d}$, согласно которой

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{jk}^{-1}}{d_k} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{28.74}$$

Тогда окончательно получим следующую формулу обращения уравнения (28.65):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} f(t) dt. \tag{28.75}$$

В частности, при $A_c(b) = E_1(b)$ решение (28.75) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \tag{28.76}$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Осуществим теперь обоснование решения уравнения (28.65) в классе $L_1(A_c(b))$. Для этого введем обозначение

$$I_{A_c}(L_1) = \{g : g(x) = \int_{A_c(x)} h(t) dt, \quad h(t) \in L_1(A_c(b))\} \tag{28.77}$$

и заметим, что если $g \in I_{A_c}(L_1)$, то почти всюду на $A_c(b)$ существуют частные производные функции g до порядка n, причем

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g(x) = h(x). \tag{28.78}$$

Аналогом теоремы 2.1 здесь является следующая

Теорема 28.7. *Для того чтобы уравнение типа Абеля (28.65) было разрешимым в $L_1(A_c(b))$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{1-\alpha}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} f(t) dt \in I_{A_c}(L_1), \tag{28.79}$$

$$f_{1-\alpha}(x)|_{c \cdot x = 0} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jn} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{1-\alpha}(x)|_{c \cdot x = 0} = \cdots =$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{1-\alpha}(x)|_{c \cdot x = 0} = 0. \tag{28.80}$$

При выполнении этих условий уравнение (28.65) имеет единственное решение, определяемое формулой (28.75).

Доказательство. В модельном случае $A_c(b) = E_1(b)$ утверждение теоремы вытекает из (28.71), (28.73). В случае произвольной пирамиды $A_c(b)$ оно получается из (28.71), (28.73) после замены переменных (28.70) с учетом (28.74).

Следствие. *Для того чтобы уравнение (28.66) было разрешимо в $L_1(E_1(b))$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{1-\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}(x-t)^{-\alpha}f(t)\,dt\in I_{E_1}(L_1), \tag{28.81}$$

$$f_{1-\alpha}(x)\Big|_{1\cdot x=0}=\frac{\partial}{\partial x_n}f_{1-\alpha}(x)\Big|_{1\cdot x=0}=\cdots=\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}f_{1-\alpha}(x)\Big|_{1\cdot x=0}=0. \tag{28.82}$$

При выполнении этих условий уравнение (28.66) имеет единственное решение, выражаемое формулой (28.76).

Теорема 28.7 дает необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (28.65) в терминах вспомогательной функции $f_{1-\alpha}(x)$. Простые достаточные условия в терминах самой функции $f(x)$ устанавливает следующая

Теорема 28.8. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, причем*

$$\mathcal{D}^{\beta}f(x)|_{c\cdot x=0}=0,\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant n-1. \tag{28.83}$$

Тогда уравнение (28.65) разрешимо и его единственное решение представимо в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{A_c(x)}(A\cdot(x-t))^{-\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial t_j}\right)f(t)\,dt. \tag{28.84}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай модельного уравнения (28.66). Представим $f_{1-\alpha}(x)$ так же, как в (28.73), в виде

$$f_{1-\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}(x-t)^{-\alpha}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-(x_1+\cdots+x_{n-1})}^{x_n}(x_n-t_n)^{-\alpha_n}dt_n\int\limits_{-(x_1+\cdots+x_{n-2}+t_n)}^{x_{n-1}}(x_{n-1}-$$

$$-t_{n-1})^{-\alpha_{n-1}}dt_{n-1}\cdots\int\limits_{-(t_2+\cdots+t_n)}^{x_1}(x_1-t_1)^{-\alpha_1}f(t)\,dt.$$

Осуществляя последовательно интегрирование по частям и учитывая условия (28.83) теоремы, имеем

$$f_{1-\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\frac{\partial f(t)}{\partial t}dt. \tag{28.85}$$

Для функции (28.85) выполняются условия (28.81), (28.82). Первое условие очевидно, а второе проверяется последовательным дифференцированием (28.85) по x_n, x_{n-1}, ..., x_2. Отсюда в силу следствия из теоремы 28.7 получаем утверждение теоремы для модельного уравнения (28.66). Случай общего уравнения (28.65) сводится к модельному с помощью замены (28.70). Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, причем*

$$\mathcal{D}^{\beta}f(x)|_{1\cdot x=0}=0,\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant n-1, \tag{28.86}$$

то уравнение (28.66) имеет единственное решение, представимое формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}(x-t)^{-\alpha}\frac{\partial^n f(t)}{\partial t_1\cdots\partial t_n}\,dt. \tag{28.87}$$

Замечание 28.2. Уравнение (28.71) является примером интегральных уравнений первого рода, возникающих в задачах интегральной геометрии, когда по заданным интегралам функции по некоторым множествам требуется восстановить саму функцию (см., например, монографию И. М. Гельфанда, М. И. Граева, Н. Я. Виленкина [1, с. 111]).

Исходя из соотношений (28.65) и (28.75), введем операторы

$$(I^{\alpha}_{A_c}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_c(x)}\frac{\varphi(t)\,dt}{(A\cdot(x-t))^{1-\alpha}},\quad \alpha>0, \tag{28.88}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{A_c}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\int\limits_{A_c(x)}\frac{f(t)\,dt}{(A\cdot(x-t))^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1, \tag{28.89}$$

которые будем называть *пирамидальными аналогами смешанных дробных интегралов и производных Римана — Лиувилля порядка* $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ (ср. с (24.5) и (24.9)). Выражения (28.88) и (28.89) определены на функциях, заданных на $A_c(b)$.

Теоремы 28.7 и 28.8 содержат условия существования смешанной дробной производной (28.89). В частности, если функция f имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, удовлетворяющие условию (28.83), то дробная производная (28.89) представима в виде

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{A_c}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{A_c(x)}(A\cdot(x-t))^{-\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial t_j}\right)f(t)\,dt. \tag{28.90}$$

С помощью формулы (28.67) можно проверить выполнение полугруппового свойства

$$I^{\alpha}_{A_c}I^{\beta}_{A_c}\varphi=I^{\alpha+\beta}_{A_c}\varphi,\quad \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0, \tag{28.91}$$

для любой функции $\varphi\in L_1(A_c(b))$ (здесь $I^{0}_{A_c}\varphi=\varphi$, $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)$).

Простейшими операторами вида (28.88), (28.89) являются следующие:

$$(I^{\alpha}_{E_1}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(x)}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad \alpha>0, \tag{28.92}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{E_1}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{E_1(x)}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1. \tag{28.93}$$

Будем их называть *модельными пирамидальными аналогами смешанных дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля порядка* α. Если $\alpha_k>1$, то подобно (24.10) модельные пирамидальные аналоги смешанных дробных производных введем равенствами

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{E_1}f)(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{[\alpha]+1}(I^{\alpha-[\alpha]-1}_{E_1}f)(x),\quad \alpha>0, \tag{28.94}$$

где $[\alpha]=([\alpha_1],\ldots,[\alpha_n])$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{[\alpha]}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{[\alpha_1]}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{[\alpha_n]}$.

В дальнейшем будем рассматривать операторы (28.92)—(28.94).

Пример 28.1. Пусть $\varphi(t)=(t_1+\ldots+t_n)^{\beta-1}$, $\alpha>0$. Тогда

$$(I^{\alpha}_{E_1}\varphi)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(|\alpha|+\beta)}(x_1+\ldots+x_n)^{|\alpha|+\beta-1},\quad \beta>0, \tag{28.95}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{E_1}\varphi)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-|\alpha|)}(x_1+\ldots+x_n)^{\beta-|\alpha|-1},\quad \beta>|\alpha|, \tag{28.96}$$

где $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$.

Этот пример показывает, что модельные пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных (28.92) и (28.94) сохраняют степенное поведение на гиперплоскости $x_1+\ldots+x_n=0$, являющейся основанием пирамиды $E_1(x)$. В отличие от этого смешанные дробные интегралы и производные (24.5) и (24.9) сохраняют степенное поведение на гиперплоскостях $x_k=a_k$, $k=1, \ldots, n$, поскольку

$$(I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1},\ \alpha>0,\ \beta>0, \tag{28.97}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1},\ \alpha>0,\ \beta>\alpha. \tag{28.98}$$

Подобно (24.6) и (24.9), можно ввести *модельные пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных* по части переменных. Пусть

$$x=(x', x''),\quad x'=(x_1, \ldots, x_m),\quad x''=(x_{m+1}, \ldots, x_n),$$
$$\alpha'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots, 0), \tag{28.99}$$
$$E_1'(x)=\{t\in R^n: t'\leqslant x',\ t''=x'',\ t'\cdot 1+x''\cdot 1\geqslant 0\}.$$

Тогда положим

$$(I^{\alpha'}_{E_1'}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha')}\int\limits_{E_1'(x)}(x'-t')^{\alpha'-1}\varphi(t', x'')\,dt',\ \alpha'>0, \tag{28.100}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha'}_{E_1'}f)(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{[\alpha']+1}(I^{\alpha'-[\alpha']-1}_{E_1'}f)(x),\quad \alpha'>0, \tag{28.101}$$

где $[\alpha']=([\alpha_1], \ldots, [\alpha_m], 0, \ldots, 0)$. В частности, если $x''=(x_2, \ldots, x_n)$, то (28.100), (28.101) при фиксированном x'' совпадают с одномерными дробными интегралами (2.17) и производными (2.29):

$$(I^{\alpha'}_{E_1'}\varphi)(x)=(I^{\alpha_1}_{-(x_2+\ldots+x_n)}\varphi(t', x''))(x'), \tag{28.102}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha'}_{E_1'}f)(x)=(\mathcal{D}^{\alpha'}_{-(x_2+\ldots+x_n)}f(t', x''))(x'). \tag{28.103}$$

Проведенные рассуждения показывают, что пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных являются специфическими объектами, отличными от смешанных дробных интегралов и производных. В частности, их нельзя представить в виде тензорного произведения одномерных дробных интегралов. Тем не менее некоторые свойства одномерных дробных интегралов и производных переносятся и на такие операторы. Так, справедлив индексный закон (28.91). Имеет место и аналог теоремы Харди—Литтлвуда 5.3. Для его формулировки ограничимся так же, как и в § 24, п. 4°, случаем двух переменных.

Введем пространство $L_{p_1,p_2}(E_1(b))$ функций $f(x_1, x_2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_{\bar p}(E_1)}=\left\{\int\limits_{-b_1}^{b_2}\left[\int\limits_{-x_2}^{b_1}|f(x_1, x_2)|^{p_1}\,dx_1\right]^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{1/p_2}<+\infty,\ \bar p=(p_1, p_2). \tag{28.104}$$

Следствием теоремы 24.1 является следующая

Теорема 28.9. *Если* $1<p_j<1/\alpha_j$, $1/q_j=1/p_j-\alpha_j$, $j=1, 2$, *то оператор пирамидального аналога (28.92) смешанного дробного интеграла ограничен из* $L_{p_1,p_2}(E_1(b))$ *в* $L_{q_1,q_2}(E_1(b))$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)\in L_{p_1,p_2}(E_1(b))$. Доопределим нулем функцию $\varphi(t_1, t_2)$ с треугольника $E_1(b)$ (см. рис. 3) на прямоугольник $\Pi(b)=\{(t_1, t_2)\in R^2: -b_2<t_1<b_1,\ -b_1<t_2<b_2\}$. Пусть $\chi_{E_1(b)}\varphi=$

$= \{\varphi,\ x \in E_1(b);\ 0,\ x \in \Pi(b) \setminus E_1(b)\}$—характеристическая функция треугольника $E_1(b)$. Применяя теперь теорему 24.1, получаем $\|I^{\alpha}_{E_1}\varphi\|_{L_q^-(E_1)} = \|I^{\alpha_1,\alpha_2}_{-b_1,-b_2}\chi_{E_1(b)}\varphi\|_{L_q^-(E_1)} \leqslant \|I^{\alpha_1,\alpha_2}_{-b_1,-b_2}\chi_{E_1(b)}\varphi\|_{L_q^-(\Pi)} \leqslant c\,\|\chi_{E_1(b)}\varphi\|_{L_p^-(\Pi)} = c\,\|\varphi\|_{L_p^-(E_1)}$. Теорема доказана.

§ 29. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 5

1°. Исторические сведения. К § 24, п. 1°. Решение многомерного уравнения Абеля (24.1) следует считать давно известным (естественно предположить, что оно было известно еще Х. Хольмгрену (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 гг.), см. ниже примечания к п. 2°), хотя в ранних публикациях оно не давалось. Укажем, что уравнение (24.1) решалось с помощью преобразования Лапласа в работе S. Vasilache [1], 1953 г., при $n=2$ и в работе P. Delerue [1], 1953 г., при произвольном n.

К § 24, п. 2°. Имеется немало работ, в которых «вводилось» дробное интегродифференцирование функций многих переменных по каждой переменной или по части из них. Следует подчеркнуть, что эти понятия возникли с самого зарождения теории дробного интегродифференцирования, и первым, кто ввел дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля для функций двух переменных, был еще Х. Хольмгрен (Hj. Holmgren [1, с. 14], 1865—1866 гг.). Этими понятиями существенно пользовался в теории функций уже П. Монтель (P. Montel [1, с. 172], 1918 г.).

К § 24, п. 4°. Подробности относительно пространств L_p^- со смешанной нормой см. в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1, гл. 1], 1975 г., и в статье А. Бенедека, Р. Панцоне (A. Benedek, R. Panzone [1], 1961 г.). Идея рассмотрения операторов дробного интегрирования в пространствах L_p^- содержится в последней работе, где она реализована для операторов типа потенциала (Рисса). Непосредственно для операторов $I_+^{\alpha_1} \otimes I_+^{\alpha_2}$ смешанного дробного интегрирования ограниченность из L_p^- в L_q^-, $q_i = p_i(1-\alpha_i p_i)^{-1}$, и аналогично для частного дробного интегрирования отмечалась А. В. Скориковым [3], 1977 г., а для произвольного числа переменных—Г. Г. Магарил-Ильяевым [1], 1979 г., хотя, по-видимому, была известна раньше.

К § 24, п. 5°. Существование связей операторов дробного интегрирования с бисингулярным оператором впервые отмечено в работе В. С. Пилиди [1], 1968 г., в частности, там дано тождество (24.30) для $\varphi \in L_p$, $1 < p < \min(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1})$. Тождества (24.30)—(24.32) для $\varphi \in L_p^-$ были даны А. В. Скориковым [3], 1977 г.

К § 24, п. 6°. Частные и смешанные дробные производные Маршо (24.33)—(24.35) в случае двух переменных содержатся уже в работе A. Marchaud [1], 1927 г. Дробное интегродифференцирование по направлению функций многих переменных в форме, отличной от (24.38), (24.39), впервые вводилось И. А. Киприяновым [1—6], 1959—1967 гг., см. об этом также в п. 2° этого параграфа.

К § 24, п. 7°. Теорема 24.4 в несколько менее сильной форме установлена А. В. Скориковым [3], 1977 г.

К § 24, п. 8°. Формулы п. 8° общеизвестны и легко вытекают из соответствующих одномерных формул. Имеется ряд работ, где давался их вывод, в основном в случае функций двух переменных, см., например, работу N. C. Jain [1], 1970 г., где содержится формула (24.56). Формулы (24.52), (24.53) при $n=2$ доказывались в работе R. K. Raina, V. S. Kiryakova [1], 1983 г.

К § 24, п. 9°. Пространство Ф, рассмотренное в этом пункте, вводилось и исследовалось П. И. Лизоркиным [1], 1963 г. Оно изучалось также К. Есинагой (K. Yoshinaga [1], 1964 г.).

К § 24, п. 10°. Частные и смешанные дробные производные по Вейлю периодических функций многих переменных впервые появляются в работе Ю. Л. Бессонова [1], 1964 г., где для функций f из L_p был выяснен вопрос о существовании (в L_p) одних частных или смешанных дробных производных, если существуют (в L_p) другие частные или смешанные производные (см. п. 2°, 24.5). Обстоятельное и полное исследование дробной дифференцируемости периодических функций многих переменных на основе пространств L_p было проведено П. И. Лизоркиным, С. М. Никольским [1], 1965 г., см. также работу Н. С. Никольской [1], 1974 г., где вопрос о существовании смешанных дробных производных Вейля увязан со скоростью сходимости частных сумм кратного ряда Фурье. Теорема 24.7 представляет собой модификацию теоремы 4 из работы П. И. Лизоркина, С. М. Никольского [1].

К § 24, п. 11°. Определения (24.65), (24.66) ранее, по-видимому, не вводились. Теорема 24.8 публикуется впервые.

К § 24, п. 12°. Полипотенциалы типа $\mathcal{H}^\alpha$ вводились (в более общем виде со степенными весами) в работе Ж. Окикиолу (G. O. Okikiolu [5], 1969 г.). Связь полипотенциалов $\mathcal{H}^\alpha$, $\mathcal{H}^\alpha$ друг с другом в виде (24.69) ранее не отмечалась.

К § 25, пп. 1, 2°. Формулу (25.11) обычно связывают с С. Бохнером [1, с. 263 и 315]. Формулы (25.14), (25.14′) для преобразования Фурье радиальной функции в терминах дробного интегрирования даны Ж. Лере (J. Leray [1], 1953 г.), см. также Ж. Лере [1, с. 24].

Пространство Φ вида (25.16) впервые появляется в работе В. И. Семянистого [1], 1960 г. Затем в работах П. И. Лизоркина [1], 1963 г., см. также [5], 1969 г., и [8], 1972 г., дано обстоятельное исследование пространств такого типа вместе с приложениями в теории функциональных пространств дробной гладкости, после чего пространства Φ прочно вошли в математический обиход. Заметим, что это пространство появляется также в работе С. Хелгасона (S. Helgason [1, с. 162], 1965 г.). В книге С. Хелгасона [1, с. 20, 59, 62], 1983 г., по-видимому, не знавшего работ П. И. Лизоркина, показывается инвариантность пространства Φ для потенциалов Рисса в связи с использованием этих потенциалов в теории преобразования Радона.

Формула (25.25) формально известна давно, обоснование ее в смысле обобщенных функций над $S(R^n)$ дано в книге Л. Шварца (L. Schwartz [1, т. 2, с. 114], 1951 г.), полученное там выражение отличается от выражения (25.25) полиномиальным слагаемым во второй строке, ортогональным к Φ, см. замечание 25.2. Толкование преобразования Фурье функции $|x|^{-\alpha}$ в смысле обобщенных функций над Φ предложено В. И. Семянистым [1], 1960 г., см. также работу П. И. Лизоркина [8, с. 242], 1972 г.

Впервые потенциал с ядром $|x|^{\alpha-n}$ появляется в диссертации О. Фростмана (O. Frostman [1], 1935 г.), посвященной задаче существования единственного так называемого равновесного потенциала компактного множества в R^n. Этот потенциал введен М. Риссом, учителем О. Фростмана (M. Riesz [2], 1936 г., и [4], 1938 г., см. также [5], 1939 г., и [6], 1949 г.). Мы не касаемся здесь связи потенциалов Рисса с супергармоническими функциями и вообще его роли в теории потенциала, см. об этом в книге Н. С. Ландкофа [1].

Инвариантность пространства Φ вида (25.16) относительно риссова потенциала указана В. И. Семянистым [1], 1960 г., и П. И. Лизоркиным [2], 1963 г.

К § 25, п. 3°. Теорема 25.2 принадлежит С. Л. Соболеву [1], 1938 г. (доказательство необходимости теоремы см. в книге И. Стейна [1, с. 140]). Доказательство теоремы 25.2, основанное на теоремах о выпуклости, было дано Г. О. Ториным (G. O. Thorin [1], 1948 г.), см. также Г. О. Торин [1], 1957 г. В работе Н. Дю-Плесси (N. du Plessis [2], 1955 г.) указан совершенно элементарный прием (прием Дю-Плесси, см. об этом п. 2°, 25.2) сведения теоремы Соболева к случаю $n=1$. Б. Макенхоупт, И. Стейн (B. Muckenhoupt, E. M. Stein [1], 1965 г.) дали доказательство теоремы Соболева, основанное на интерполяции линейных операторов. Это доказательство приведено в книге И. Стейна [1]. Наиболее простое доказательство, пригодное при всех $n\geqslant 1$, предложено Л. Хедбергом (L. I. Hedberg [1], 1972 г.).

Теорема 25.3 доказана И. Стейном, Г. Вейсом (E. M. Stein, G. Weiss [1], 1958 г.). Подобные теоремы с весом $\prod_{i=1}^{n} |x_i|^{\gamma_i}$ или $(|x'|^2+|x''|^2)^{\gamma/2}$, где $x'=(x_1, \ldots, x_m)$, $x''=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, доказаны В. П. Николаевым [1, 2], 1973 г. Теорема 25.4 получена Б. Макенхоуптом, Р. Виденом (B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden [1], 1974 г.). Более простое доказательство теоремы 25.4 дано в работе G. V. Welland [3]. Простое доказательство (и в более общем случае так называемых неизотропных риссовых потенциалов) дано В. М. Кокилашвили, М. А. Габидзашвили [1], 1985 г., см. его также в книге В. М. Кокилашвили [2, с. 36—54], 1985 г. Имеются другие обобщения теорем 25.3 и 25.4 — так называемые двухвесовые теоремы и др. (см. об этом в п. 2° настоящего параграфа).

Оценка (25.46) слабого типа для потенциалов Рисса обнаружена А. Зигмундом (A. Zygmund [4], 1956 г.). Теорема 25.5 получена Б. Г. Вакуловым [1], 1986 г., теорема 25.6 установлена И. Стейном, Г. Вейсом (E. M. Stein, G. Weiss [2, с. 57], 1960 г.) в случае интегралов Пуассона и Р. Джонсоном (R. Johnson [1], 1973 г.) в случае интегралов Гаусса—Вейерштрасса.

К § 25, п. 4°. Реализация риссова дифференцирования $\mathcal{F}^{-1}|\xi|^\alpha\mathcal{F}\varphi$ в виде гиперсингулярного интеграла (25.62) впервые появляется в работе И. Стейна (E. M. Stein [1], 1961 г.) в случае $0<\alpha<2$. Общий случай $\alpha>0$ рассмотрен П. И. Лизоркиным [6], 1970 г., который ввел гиперсингулярные интегралы (25.61) с центрированной разностью. Отметим, что П. И. Лизоркиным в работе [6] введен более общий, чем в (25.61), объект, отвечающий так называемому анизотропному случаю; в терминах этих анизотропных гиперсингулярных интегралов дано описание пространства анизотропных бесселевых потенциалов. Преобразование Фурье гиперсингулярного интеграла (формула (25.63)) рассматривалось П. И. Лизоркиным [6, с. 82] в случае центрированных разностей и С. Г. Самко [17, с. 1170], 1976 г., в случае нецентрированных разностей. Формулы (25.69), (25.70) обращения риссовых потенциалов $f=I^\alpha\varphi$, $\varphi\in L_p$, рассматривались Б. С. Рубиным [26].

К § 25, п. 5°. Интегралы (25.71) впервые встречаются, по-видимому, в работе Г. И. Эскина [1], 1973 г. Термин «односторонние потенциалы» введен Б. С. Рубиным [19—21], 1984—1985 гг., исследовавшим и другие потенциалы такого типа. Представление обратных к (25.71) операторов в виде гиперсингулярных интегралов (25.77) и обоснование обращения $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi \equiv \varphi$ для односторонних потенциалов на функциях $\varphi \in L_p(R^n)$ дано Б. С. Рубиным [16, 18, 20].

К § 26, п. 1°. Приведенные здесь исследования нормировочных постоянных даны по работам С. Г. Самко [17], 1976 г., и [26], 1978 г., см. также [28], 1980 г.

К § 26, п. 2°. Возможность снижения порядка l до $l>2|\alpha/2|$ в случае нецентрированной разности указана С. Г. Самко [17], 1976 г. Случай $0<\alpha<2$, когда можно брать $l=1$, был известен ранее (E. M. Stein [1], 1961 г., и П. И. Лизоркин [6, с. 85], 1970 г.). Способ избежать явления аннигиляции (26.18) за счет выбора $l=\alpha$ в случае нецентрированной разности предложен С. Г. Самко [17], 1976 г.

К § 26, п. 3°. Результаты этого пункта получены С. Г. Самко [17], 1976 г.

К § 26, п. 4°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой появились в работах Р. Видена (R. L. Wheeden [1—4], 1967—1969 гг.), с характеристикой $\Omega(x, y)$ — в работе М. Фишера (M. J. Fisher [7], 1973 г.), однако в этих работах гиперсингулярные интегралы вводились при $\alpha\geqslant 2$ не с помощью конечных разностей, как в (26.47), а с помощью регуляризации (вычитанием отрезка ряда Тейлора), как в (26.68). В работах M. J. Fisher [1, 7] можно найти изложение теории гиперсингулярных интегралов с точки зрения дробных степеней операторов. В форме (26.47) гиперсингулярные интегралы рассматривались С. Г. Самко в работах [21], 1977 г., [26], 1978 г., и [28], 1980 г., в случае однородной характеристики и в работах [18], 1976 г., и [20], 1977 г., в случае неоднородной характеристики. Следует подчеркнуть, что в работах Р. Видена, М. Фишера исследование гиперсингулярных интегралов велось в контексте теории бесселевых потенциалов, т. е. гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}^{\alpha}f$ рассматривался принадлежащим L_p вместе с f. Подход в работах С. Г. Самко и в настоящей книге позволяет брать $f\in L_r$, $\mathbf{D}^{\alpha}f\in L_p$ с разными r и p, что допускает и «бесселеву» и «риссову» ситуацию.

Классификация гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой по типу и порядку используемой конечной разности предложена С. Г. Самко [26, с. 235], 1978 г., [28. с. 198], 1980 г. Формулы (26.55)—(26.57) получены С. Г. Самко (там же), формула (26.55) при $0<\alpha<1$ была доказана Э. Л. Раджабовым [1], 1974 г.

Вопрос о сходимости гиперсингулярных интегралов с разными однородными характеристиками рассматривался В. А. Ногиным, С. Г. Самко [1], 1981 г., [3], 1982 г. Этот же вопрос в случае неоднородных характеристик исследован В. А. Ногиным [1], 1980 г.

К § 26, пп. 5, 6°. Теорема 26.5 доказана С. Г. Самко [26], 1978 г. Решение вопроса (26.74) в виде (26.81), (26.82) получено С. Г. Самко ([28, с. 205—207], 1980 г.). Там же доказана теорема 26.6.

К § 26, п. 7°. Приведенное здесь исследование пространства $I^{\alpha}(L_p)$ дано по работам С. Г. Самко [17, 18], 1976 г., [20, 23], 1977 г., и [31], 1984 г., в том числе и в смысле обобщенных функций при $p\geqslant n/\alpha$. Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ возникало и раньше, но без конструктивного описания его в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов. Следует упомянуть работу В. Г. Мазьи, В. П. Хавина [1], 1972 г., где показано, что замыкание класса $C_0^{\infty}(R^n)$ по норме $\|\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}\varphi\|_p$ совпадает с $I^{\alpha}(L_p)$ при $1<p<n/\alpha$ (более точно это утверждение нужно понимать в том смысле, что замыкание совпадает с $I^{\alpha}(L_p)$ после «отсеивания» приобретаемых при этом замыкании многочленов порядка меньше α). В работах С. Г. Самко получены, в частности, лемма 26.5 ([31, с. 78]), описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$, приведенное в теореме 26.8 ([17, 18], 1976 г., и [31, § 13], 1984 г.), теорема 26.9 ([23], 1977 г.), оценки (26.98), (26.99) ([17], 1976 г.). Освещаемые здесь пространства $L^{\alpha}_{p,r}$ (R^n) возникли как естественное обобщение пространств риссовых и бесселевых потенциалов, совпадая с первыми при $r=np/(n-\alpha p)$ и со вторыми при $r=p$. Они исследовались С. Г. Самко в работах [17], 1976 г., и [20], 1977 г.

Теорема 26.10 установлена Б. С. Рубиным [23, 26], утверждения (26.98), (26.98′) см. в работе С. Г. Самко [17], 1976 г.

К § 27, п. 1°. Дробные степени $(E-\Delta)^{-\alpha/2}$ получили название бесселевых потенциалов после работ N. Aronszajn, K. T. Smith [1], 1961 г., A. P. Calderon [1], 1961 г., N. Aronszajn, F. Mulla, P. Szeptycki [1], 1963 г., N. Aronszajn [1], 1965 г., R. Adams, N. Aronszajn, K. T. Smith [1], 1967 г. Бесселево ядро как прообраз Фурье в смысле обобщенных функций для $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ рассматривалось у Л. Шварца (L. Schwartz [1, т. 2, с. 116], 1951 г.)

К § 27, п. 2°. Теорема 27.1 и модификация $\mathcal{G}^{\alpha}\varphi$ бесселева потенциала даны Т. Флеттом (T. M. Flett [6, с. 445—448], 1971 г.), формулы (27.20) и (27.23) получены Р. Джонсоном (R. Johnson [1], 1973 г.), формулы (27.22), (27.24), (27.26) — П. И. Лизоркиным [2], 1964 г.

К § 27, п. 3°. Теорема 27.3 принадлежит И. Стейну (E. M. Stein [1], 1961 г.) при $0<\alpha<2$ и П. И. Лизоркину [6], 1970 г., в общем случае.

В связи с изоморфизмом между пространствами $L_p^{\alpha}(R^n)$, осуществляемым оператором бесселева дробного интегрирования, отметим, что ряд исследований посвящен изоморфизму между функциональными пространствами с помощью дробных степеней дифференциальных операторов. Мы ограничимся ссылками на работы С. М. Никольского, Ж. Лионса, П. И. Лизоркина [1], 1965 г., и Ш. А. Алимова [1], 1972 г. (см. также п. 2°, 25.13).

К § 27, п. 4°. Изложенные здесь результаты получены В. А. Ногиным [3, 4], 1982 г., и [6], 1985 г., за исключением теоремы 27.7 и группирующихся вокруг нее утверждений, которые принадлежат Б. С. Рубину [23—26]. Им же предложен подход к обращению бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями (Б. С. Рубин [24, 25]).

К § 28, п. 1°. Использованные здесь формулы преобразования Фурье дробных степеней квадратичных форм см. в книге И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, гл. III, § 3]. Потенциал (28.21) введен М. Риссом (M. Riesz [3], 1936 г., и [8], 1967 (1939) г., см. также [6], 1949 г.). В этих работах, в частности, получены свойства (28.22), (28.24), (28.25) потенциала с лоренцевым расстоянием. Потенциалы с лоренцевым расстоянием рассматривались у Рисса не только по всему конусу K_+^+, но и по области D, ограниченной конической поверхностью $\rho=0$ и некоторой достаточно гладкой поверхностью. Мы ограничились для простоты тем случаем, когда область D есть весь конус K_+^+. Потенциалы с лоренцевым расстоянием оказались эффективным средством решения задачи Коши для гиперболических уравнений, что было продемонстрировано М. Риссом (M. Riesz [6], 1949 г., и [8], 1967 (1939) г.), см. об этом также, например, в книге B. B. Baker, E. T. Copson [1, с. 57—67], 1950 г. Различным приложениям потенциала Рисса с лоренцевым расстоянием посвящены работы E. T. Copson [1], 1943 г., [2], 1947 г., и [4], 1956 г., и N. E. Fremberg [2, 3], 1946 г.

Потенциал Рисса $I_{\square}^{\alpha}\varphi$, определенный при $\operatorname{Re}\alpha>n-2$, допускает, как показано М. Риссом, аналитическое продолжение по α во всю комплексную плоскость (за исключением конечного числа полюсов). Другое доказательство аналитической продолжимости дал Н. Фремберг (N. E. Fremberg [1], 1945 г., см. также [2], 1946 г.). Отметим еще способ аналитического продолжения, указанный при $n=3$ в книге B. B. Baker, E. T. Copson [1, с. 60], 1950 г.

Формула (28.28) установлена Л. Шварцем (L. Schwartz [1, т. 2, с. 120], 1961 г.). В связи с вычислением преобразования Фурье (Лапласа) от степени лоренцева расстояния упомянем § 30 книги В. С. Владимирова [1], 1964 г., и книгу С. Трионе (S. E. Trione [1], 1980 г.), специально посвященную вычислению преобразования Фурье—Лапласа от функций, зависящих от лоренцева расстояния.

Утверждение теоремы 28.1 следует считать известным, однако авторы затрудняются дать соответствующую ссылку.

С построением дробных степеней дифференциальных операторов тесно связано исследование обобщенных функций $[P(x)]^{\lambda}$, где $P(x)$ — многочлен. В связи с этим следует упомянуть работы И. М. Гельфанда, М. И. Граева [1], 1955 г., М. В. Федорюка [1], 1959 г., Д. Брестерса (D. W. Bresters [1], 1968 г.), И. Н. Бернштейна, С. И. Гельфанда [1], 1969 г., М. Атьи (M. F. Atiyah [1], 1970 г.), В. П. Паламодова [1], 1980 г., см. также книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, гл. III, § 4], где имеются некоторые результаты для произвольных функций в степени λ.

К § 28, п. 2°. Параболические потенциалы $H^{\alpha}\varphi$ и $\mathcal{H}^{\alpha}\varphi$ (см. (28.39), (28.45)) были введены Б. Джонсом (B. F. Jones [1], 1968 г.) в связи с исследованием уравнений типа теплопроводности. Дальнейшее изучение этих потенциалов и порождаемых ими пространств $H^{\alpha}(L_p)$, $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ проводилось К. Сэмпсоном (C. H. Sampson [1], 1968 г.), Р. Бэгби (R. J. Bagby [1], 1971 г., и [2], 1974 г.), В. Гопала Рао (V. R. Gopala Rao [1], 1977 г., и [2], 1978 г.), С. Чанилло (S. Chanillo [1], 1981 г.), В. А. Ногиным [2], 1981 г., и [5], 1982 г., В. А. Ногиным, Б. С. Рубиным [1, 2], 1985 г., и [4, 5], 1986 г.

Доказательство теоремы 28.2 можно найти в работе В. Гопала Рао (V. R. Gopala Rao [1], 1977 г.).

К § 28, п. 3°. Этот пункт написан по работам В. А. Ногина [2], 1981 г., В. А. Ногина, Б. С. Рубина [1], 1985 г., и [4], 1986 г.

К § 28, п. 4°. Впервые интегральное уравнение типа Абеля (28.65) в частном случае $n=2$, $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\alpha_1=\alpha_2=1/2$ было решено С. Г. Михлиным в 1940 г. в связи с задачами, встретившимися при исследовании отражения волн от прямолинейной границы (см. монографию С. Г. Михлина [1, с. 48], а также ссылки в работе Н. Г. Преображенского [1, с. 9]; в работе В. П. Федосова [1] см. приложения уравнений такого типа в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов).

Решение уравнения (28.65) в случае произвольного натурального n и $c=(\overbrace{0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ получено в работе А. А. Килбаса, Ву Ким Туана [1]. Остальные материалы

этого пункта, в частности, определение и свойства пирамидных аналогов смешанных дробных интегралов и производных публикуются впервые.

2°. Обзор других результатов. 24.1. В работе R. K. Raina [3] вычислены смешанные дробные интегралы $I^{\alpha}_{-\ldots-}\varphi$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, от функций вида $\varphi(t)=$ $=\exp(-\Sigma p_i t_i) P(\Sigma t_i)$, где P — многочлен, в терминах некоторых специальных функций (обобщение аналогичного результата работы H. M. Srivastava [4], см. по этому поводу § 9, п. 2°, 5.5).

В работах L. Koschmieder [1, 2] смешанные дробные интегралы (24.6) использовались для получения некоторых свойств гипергеометрической функции Лауричелла n переменных $F_A^{(n)}$ (см. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев [2, с. 745]).

24.2. Модификации дробного интегрирования в духе Эрдейи—Кобера для двух переменных вводились в работах R. U. Verma [1] и D. P. Mourya [1]. Именно вводились операторы типа $I^{\alpha}_{0+;1,\xi}\otimes I^{\beta}_{0+;1,\eta}$, $I^{\alpha}_{-;1,\xi}\otimes I^{\beta}_{-;1,\eta}$ (в обозначениях § 18, п. 1° и § 24, п. 3°) и т. п. В работе D. P. Mourya [1] установлены простейшие свойства таких операторов и дано приложение к некоторым специальным функциям (отметим, что в этой работе содержатся опечатки на с. 173 и неточности на с. 175). В работе R. U. Verma [1] рассмотрено двумерное преобразование Меллина смешанных дробных интегралов Эрдейи—Кобера. Различные композиции двух операторов такого типа изучены в работе R. K. Raina [2]. С помощью смешанных дробных интегралов Эрдейи—Кобера в работах R. U. Verma [2, 3] рассмотрены свойства двумерных интегральных преобразований, обобщающих двумерное преобразование Ханкеля.

В работе C. L. Kaul [1] введены модификации обобщенного дробного интегрирования в стиле Саксена (23.5), (23.6) для двух переменных, найдены их двумерное преобразование Меллина и аналог формулы дробного интегрирования по частям. Эти результаты распространены на более общие многомерные операторы в работах R. K. Saxena, G. C. Modi [1] и B. L. Mathur, S. Krishna [1].

24.3. В ряде работ И. А. Киприянова [1—5] рассматривалась дробная производная $f_a^{(\alpha)}(x)$, $0<\alpha<1$, функции $f(x)$ в точке $x\in R^n$ по направлению из точки $a\in R^n$. Исходное определение этой производной по И. А. Киприянову состоит в том, что $f_a^{(\alpha)}(x)$ есть функция, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^{|x-a|} f_a^{(\alpha)}(a+\xi\mathbf{e})\,\xi^{n-1}d\xi=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{|x-a|}\frac{f(a+\xi\mathbf{e})-f(a)}{(|x-a|-\xi)^{\alpha}}\,\xi^{n-1}d\xi, \qquad (29.1)$$

где $\mathbf{e}$—единичный вектор в направлении от a к x, т. е. $\mathbf{e}=(x-a)/|x-a|$ (мы несколько изменили обозначения по сравнению с обозначениями И. А. Киприянова). Как показано И. А. Киприяновым [2, 3], из этого определения выводится, что $f_a^{(\alpha)}(x)$ вычисляется по формуле

$$f_a^{(\alpha)}(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{|x-a|}\frac{f(x)-f(x-\xi\mathbf{e})}{\xi^{1+\alpha}}\left(1-\frac{\xi}{|x-a|}\right)^{n-1}d\xi+$$
$$+\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}\,\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^{1+\alpha-n}} \qquad (29.2)$$

(ср. с равенством (24.38″)).

В отмеченном цикле работ И. А. Киприянова изучены различные свойства дробных производных по направлению, исследованы пространства функций (в области $\Omega\subset R^n$), имеющих дробные производные по всем направлениям, выяснены некоторые взаимоотношения этих пространств с пространствами Соболева $W_p^l(\Omega)$. Упомянем некоторые из этих результатов (см., например, работу [3]).

1. Если $f_a^{(\alpha)}(x)$ существует, непрерывна и ограничена для $(x, a)\in\Omega\times\Omega$, то $f(x)\in$ $\in H^{\alpha}(\Omega)$; если $\int\limits_{\Omega}\sup\limits_{a\in\Omega}|f_a^{(\alpha)}(x)|\,dx<\infty$ и $\alpha>1/p$, то $f(x)\in H_p^{\alpha-1/p}$, $p>1$.

2. Если $0<\alpha<\lambda\leqslant 1$ и $f(x)\in H^{\lambda}(\overline{\Omega})$, то $f_a^{(\alpha)}(x)$ существует для всех $(x, a)\in\Omega\times\Omega$ и непрерывна по (x, a).

3. Пусть $C^{(\alpha)}(\Omega)$—пространство непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций, для которых $f_a^{(\alpha)}(x)$ непрерывна по $(x, a)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, $\|f\|_{C^{(\alpha)}(\Omega)}=\|f\|_C+\max\limits_{(x,a)\in\Omega\times\Omega}|f_a^{(\alpha)}(x)|$. Тогда $\|f\|_{C^{(\alpha)}(\Omega)}\leqslant$ $\leqslant A\|f\|_{W_p^l(\Omega)}$, если $l>n/p$, $0<\alpha<\min(1, l-n/p)$. Здесь W_p^l — пространство Соболева целого порядка l.

4. Такой же результат, как и выше, имеет место для пространств $L_q^{(\alpha)}(\Omega)$ с нормой $\|f\|_{L_q(\Omega)}+\|f_a^{(\alpha)}\|_{L_q(\Omega\times\Omega)}$.

Отметим еще, что в работе И. А. Киприянова [7] исследован оператор дробного дифференцирования по направлению вида

$$\mathfrak{D}_\rho^\alpha f(x) = \frac{1}{\rho^{n-1-\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho (\rho^2 - \tau^2)^{-\alpha} f(a+\tau\omega)\, \tau^{n-1} d\tau, \qquad (29.3)$$

где $\rho = |x-a|$, a — фиксированная точка, ω — заданное направление, $|\omega| = 1$. В работе [7] показано, что оператор (29.3) можно преобразовать к виду

$$\mathfrak{D}_\rho^\alpha f(x) = \frac{2\rho^{1+\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\rho \frac{f(x) - f(a+\tau\omega)}{(\rho^2-\tau^2)^{1+\alpha}} \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{n-1} d\tau +$$

$$+ \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{f(x)}{\rho^\alpha}, \quad \rho = |x-a|$$

(ср. с (29.2) и (24.38″)). В работе [7] построен также обратный к (29.3) оператор в форме

$$\frac{2\rho^{2-n}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\rho t^{n-1-\alpha} (\rho^2 - t^2)^{\alpha-1} (\mathfrak{D}_t^\alpha f)(x)\, dt.$$

Кроме того, в той же работе с помощью операторов $\mathfrak{D}_\rho^\alpha$ построены пространства $L_q^{(\alpha)}(\Omega)$ дробно дифференцируемых функций и показано, что они (компактно) вложены в пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ при надлежащих предположениях о p, l, q, α.

24.4. Лиувиллевские частные и смешанные дробные производные (24.15) в обобщенном смысле $(\mathfrak{D}_{+\ldots+}^\alpha f, \varphi) = (f, \mathfrak{D}_{-\ldots-}^\alpha \varphi)$, $\varphi \in \Phi$, Φ—класс (24.56′), вводились П. И. Лизоркиным [1]. В работе П. И. Лизоркина, С. М. Никольского [1] были введены пространства $S_p^\alpha L(R^n) = S_p^\alpha(R^n)$ с доминирующей смешанной производной. Пространства $S_p^\alpha(R^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, состоят из функций $f \in L_p(R^n)$, имеющих обобщенную смешанную производную $\mathfrak{D}_{+\ldots+}^\alpha f \in L_p(R^n)$, а также все опорные производные, принадлежащие $L_p(R^n)$. (*Опорными производными* для $\mathfrak{D}_{+\ldots+}^\alpha f$ называются производные $\mathfrak{D}_{+\ldots+}^{\tilde\alpha} f$, где $\tilde\alpha$ получается из $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ заменой некоторых α_k на 0.) В указанной работе показано, что

$$S_p^\alpha = G^\alpha(L_p), \quad \alpha > 0, \quad 1 < p < \infty, \qquad (29.4)$$

где $G^\alpha(L_p)$—пространство (24.74) полипотенциалов (24.72). В работе Н. С. Никольской [1] выяснен характер приближения функции $f \in S_p^\alpha(R^n)$ частичными суммами ее ряда Фурье.

В работе Ю. А. Брычкова [1] рассмотрены пространства S_p^α обобщенных функций при любых $\alpha \in R^n$ и доказано утверждение (29.4) при соответствующем толковании левой и правой частей. В этой работе введено также понятие порядка гладкости обобщенных функций из S_p^α по части переменных и выяснена связь между этим порядком и существованием следа обобщенной функции на гиперплоскостях.

24.5. Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция многих переменных и $\mathscr{D}^{(\alpha)} f$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, означает дробную производную Вейля (24.60), (24.62). Справедливо (Ю. Л. Бессонов [1]) следующее утверждение.

Пусть $f \in L_p(\Delta)$, $\Delta = \{x : 0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi\}$, $1 < p < \infty$. Если существуют $\mathscr{D}^{(\alpha)} f \in L_p(\Delta)$, $\mathscr{D}^{(\beta)} f \in L_p(\Delta)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, то $\mathscr{D}^{(\gamma)} f \in L_p(\Delta)$ для $\gamma = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

24.6. В общем виде аналогичный вопрос о существовании одних дробных производных $\mathscr{D}_{-\ldots-}^\beta f$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, при существовании других таких производных некоторых порядков $\alpha^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ исследован Г. Г. Магарил-Ильяевым [1] в непериодическом случае в общем контексте пространств $L_p(R^n)$ со смешанной нормой (так называемая задача о промежуточной производной). Этот вопрос тесно связан с мультипликативными неравенствами для дробных производных, выполнимость которых полностью исследована в указанной работе. Развитие результатов для задачи о промежуточной производной см. в работе того же автора [2], где оно дано в некоторых общих терминах, связанных с так называемыми обобщенными соболевскими пространствами.

24.7. В работе Г. Г. Магарил-Ильяева и В. М. Тихомирова [2] при изложении ряда вопросов гармонического анализа на многообразиях вида $M=T^{n'}\times R^{n''}$ (т. е. на произведении некоторого числа окружностей и прямых) рассмотрено дробное дифференцирование на таких многообразиях. Оно определяется с помощью аналога пространства Ф типа Лизоркина («приспособленного» к прямым и окружностям, образующим M). В терминах пространств $L_p^{-}(M)$ со смешанной нормой рассмотрены задача о промежуточной производной, неравенства типа Бернштейна—Никольского, Фавара для дробных производных и др.

24.8. Теорема типа Бернштейна для смешанных дробных производных функции $f(x, y)$ двух переменных рассматривалась еще P. Montel [1, с. 187] и была получена им в виде: если $|f(x, y)-P_{n,m}(x, y)|\leqslant Am^{-\gamma}+Bn^{-\delta}$, $|x|<1$, $|y|<1$, $\gamma>0$, $\delta>0$, где $P_{n,m}(x, y)$ — алгебраический многочлен, то $f(x, y)$ имеет все смешанные дробные производные порядков (α, β) таких, что $\alpha/\gamma+\beta/\delta<1$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

24.9. Связь между существованием в L_p смешанной дробной производной Вейля $\mathscr{D}_{++}^{(\alpha_1,\alpha_2)}f$ функции $f(x_1, x_2)$ двух переменных и поведением ее наилучших приближений, а также поведением частичных сумм ее ряда Фурье и смешанного модуля непрерывности исследована в работе М. Г. Есманбетова [2].

24.10. Пусть функция $f(x)$, рассматриваемая в области $\Omega\subset R^n$, является сужением на Ω функции $g(x)$, принадлежащей во всем пространстве R^n классу бесселевых потенциалов $L_p^{\alpha}(R^n)$ (о котором см. в § 27). Характеризация таких функций в терминах дробных частных производных Римана—Лиувилля по каждой переменной и более общо в терминах дробной производной Чженя отмечалась А. В. Скориковым [2] (см. § 23, п. 2°, 18.14 в случае $n=1$). Некоторые соображения в аналогичных ситуациях были развиты при $n=2$ в работах L. Biacino, D. Miserendino [1—3], L. Biacino, M. Di Giorgio, D. Miserendino [1], L. Biacino [1]. Упомянем в связи с этим также работы D. Miserendino [1, 2], в которых для функций из $L_2^{\alpha}(\Omega)$, где α—целое, Ω—параллелепипед в R^n, исследовано существование смешанных дробных производных в точках границы $\partial\Omega$ параллелепипеда и их принадлежность пространству $L_2(\partial\Omega)$.

24.11. Определение дифференцирования Грюнвальда—Летникова, рассмотренное в § 24, п. 11°, для функций, заданных во всем пространстве R^n, можно приспособить для функций, заданных в области. Это делается подобно § 20, п. 4°, где вводилось дробное дифференцирование Грюнвальда—Летникова на конечном отрезке. В случае, например, двух переменных соответствующее (20.42) определение имеет вид

$$f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\left(\frac{N_1}{x_1-a_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{N_2}{x_2-a_2}\right)^{\alpha_2}\sum_{i=0}^{N_1}\sum_{j=0}^{N_2}(-1)^{i+j}\binom{\alpha_1}{i}\binom{\alpha_2}{j}\times$$

$$\times f\left(x_1-i\frac{x_1-a_1}{N_1},\ x_2-j\frac{x_2-a_2}{N_2}\right),\qquad(29.5)$$

где $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$, $a=(a_1, a_2)$, $x_1\geqslant a_1$, $x_2\geqslant a_2$. Подобное определение использовалось В. А. Красновым [1], рассматривавшим некоторые свойства дробных производных (29.5).

Развитие такого определения для аналитических функций, заданных в области $G\subset R^n$, содержится в работе В. А. Краснова, А. С. Фохта [1]. В ней подобный подход к дробным производным функций многих переменных рассматривался в связи с получением некоторых интегральных оценок для решений эллиптических дифференциальных уравнений. Этот вопрос изучался ранее в работе А. С. Фохта, В. А. Краснова [1] в случае уравнения Лапласа. В указанной работе использовалось определение дробного дифференцирования $\partial^{\alpha}f/\partial x^{\alpha}$ аналитических функций, сводящееся к дробному дифференцированию мономов x^j, $j=(j_1, \ldots, j_n)$, но при этом отбрасывались мономы, у которых $j_k<\alpha$ хотя бы для одного $k=1, \ldots, n$.

25.1. Пространство Лизоркина (25.16) состоит из шварцевых функций $f\in S$, преобразование Фурье которых исчезает в начале координат. Аналогичное пространство Ф, приспособленное для частных дробных производных и интегралов (см. § 24, п. 9°), связано с исчезновением образов Фурье на координатных гиперплоскостях. Для различных других задач возникает необходимость в построении класса Φ_V типа Лизоркина, для функций которого $(\widehat{\mathscr{D}^k\varphi})(x)=0$, $|k|=0, 1, 2, \ldots$, $x\in V$, где V—заданное множество в R^n. Такие пространства исследованы С. Г. Самко [25, 29], давшим описание пространств Φ_V в случае, когда V—конус в R^n, и доказавшим плотность Φ_V в $L_p(R^n)$ при $p\geqslant 2$ в случае произвольного множества V меры нуль, а при $1<p<2$ для некоторого класса множеств V меры нуль, названных в работе [29] квазиломаными (плотность Φ_V в $L_p(R^n)$, $1<p<\infty$, в случае, когда V—начало координат или совокупность координатных гиперплоскостей, установлена ранее П. И. Лизоркиным [5, 8]).

25.2. Прием N. du Plessis [2] сведения теоремы Соболева к случаю $n=1$ состоит в наблюдении, что $|x|^n \geqslant \prod_{j=1}^{n} |x_j|$ (или, более точно, $|x|^n \geqslant n^{n/2} \prod_{j=1}^{n} |x_j|$, что вытекает из того факта, что среднее арифметическое не меньше, чем среднее геометрическое). Поэтому

$$\int_{R^n} \frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \leqslant \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|\,dy}{\prod_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{1-\alpha/n}},$$

и при оценке $\|I^\alpha \varphi\|_q$ достаточно располагать одномерной теоремой Харди—Литтлвуда 5.3, применяя ее по каждой переменной.

25.3. В предельном случае $p=n/\alpha$ оператор I^α не определен своим непосредственным видом на всем пространстве $L_p(R^n)$, однако $\|I^\alpha \varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c\,\|\varphi\|_p$ на плотном в L_p множестве функций φ, где BMO — пространство функций ограниченной в среднем осцилляции, см. об этом в одномерном случае в § 4, п. 2°, 3.3 (и в § 17, п. 2°, 13.1), где даны ссылки и для многомерного случая. Здесь добавим, что в работе E. Harboure, R. A. Macias, C. Segovia [2] получены весовые оценки риссова потенциала в предельном случае $p=n/\alpha$. Упомянем также, что в работе R. S. Strichartz [2] рассмотрены риссовы (и бесселевы) потенциалы от функций из BMO, а в работе S. Chanillo [2] — коммутаторы $b(x)\,(I^\alpha f)(x) - I^\alpha(bf)(x)$, $f \in L_p$, с $b \in \mathrm{BMO}$.

25.4. Аналог теоремы Соболева 25.2 для пространств $L_{\bar p}(R^n)$ со смешанной нормой (см. определение в § 24, пп. 4, 12°) установлен в работе A. Benedek, R. Panzone [1]: *I^α ограничен из $L_{\bar p}(R^n)$ в $L_{\bar q}(R^n)$, $\bar p = (p_1, \ldots, p_n)$, $\bar q = (q_1, \ldots, q_n)$, если $1 < p_i < n/\alpha$ и $1/q_i = 1/p_i - \alpha/n$.* Более общее утверждение в этом направлении получено П. И. Лизоркиным [7], рассмотревшим широкий класс операторов свертки, включающий, в частности, так называемые *анизотропные риссовы потенциалы*

$$\int_{R^n} [\rho(x-y)]^{\alpha-n} \varphi(y)\,dy, \tag{29.6}$$

где $\rho(x)$ — неотрицательная a-однородная первой степени функция (т. е. $\rho(t^{a_1}x_1, \ldots, t^{a_n}x_n) = t\rho(x)$ при $t>0$, $a_j>0$, $\sum a_j = n$), ограниченная снизу при $|x|=1$. Для таких потенциалов П. И. Лизоркиным [7] доказана теорема об ограниченности из $L_{\bar p}(R^n)$ в $L_{\bar q}(R^n)$ при $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i (1/p_i - 1/q_i)$, $p_n \neq q_n$ (см. доказательство этой теоремы также в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1, с. 32]). Подобная теорема о действии риссова анизотропного потенциала с ядром $\rho(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2\alpha_j}\right)^{1/2}$ в более общей ситуации весовых пространств со смешанной нормой и на подпространствах разных измерений доказана В. М. Кокилашвили [1]. В связи с этим укажем, что теоремы типа Соболева для потенциала Рисса, где $y \in R^m$, $x \in R^n$, были получены В. П. Ильиным [2], см. об этом в более общем анизотропном случае в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1, с. 34].

Отметим еще работу D. R. Adams, R. J. Bagby [1], содержащую уточнения некоторых случаев оценок обычного (изотропного) риссова потенциала из $L_{\bar p}$ в $L_{\bar q}$.

25.5. Непрерывность интегралов типа потенциала

$$I^\alpha_\Omega \varphi = \int_\Omega |x-t|^{\alpha-n} \varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in L_p(\Omega),$$

в случае ограниченной области $\Omega \subset R^n$ при $p > n/\alpha$ впервые указана С. Л. Соболевым [2, с. 48]. Более того (С. Л. Соболев [3, с. 256]),

$$I^\alpha_\Omega \varphi \in \begin{cases} H^{\alpha-n/p}(\Omega), & \text{если } 0 < \alpha - n/p < 1, \\ H^{1,1/p'}(\Omega), & \text{если } \alpha - n/p = 1, \\ H^1(\Omega), & \text{если } \alpha - n/p > 1,\ 1/p + 1/p' = 1, \end{cases} \tag{29.7}$$

см. определение класса $H^{\lambda,h}(\Omega)$ в одномерном случае в § 1 (определение 1.6). К утверждению (29.7) примыкает аналогичный результат для $\Omega = R^n$: риссов потенциал $I^\alpha \varphi$, где $\varphi \in L_1(R^n) \cap L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$, является при $n/p < \alpha < 1 + n/p$ гельдеровской функцией: $I^\alpha \varphi \in h^{\alpha-n/p}_{\mathrm{loc}}(R^n) = \{g : g(x+h) - g(x) = o(|h|^{\alpha-n/p})$ равномерно по x при $h| \to 0\}$ (N. du Plessis [1]). Этот результат обобщен на операторы свертки (1.39) в ра-

боте M. Cotlar, R. Panzone [1] и на более общие операторы (1.101) в работе А. А. Килбаса [9].

Оценка (29.7) для интегралов $I^{\alpha}_{\Omega}\varphi$ при $\alpha - n/p > 1$ уточняется следующим образом: $I^{\alpha}_{\Omega}\varphi \in H^{\alpha-n/p}(\Omega)$ при $\alpha - n/p \neq 1, 2, \ldots$ и $I^{\alpha}_{\Omega}\varphi \in H^{\alpha-n/p,\,1/p'}(\Omega)$ при $\alpha - n/p = 1, 2, \ldots$ Это утверждение есть следствие обобщенной гельдеровости более общих, чем $I^{\alpha}_{\Omega}\varphi$, интегралов типа потенциала (А. А. Килбас [12]).

25.6. В случае радиальных функций справедливо (см. Б. С. Рубин [17]) тождество

$$(I^{\alpha}_{a}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{|y|<a} \frac{\varphi(|y|)\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{0}^{a} \rho^{\alpha-1} U\left(\frac{|x|}{\rho}\right)\varphi(\rho)\,d\rho, \quad 0 < a \leqslant \infty,$$

где ядро $U(\lambda)$ представляется через гипергеометрическую функцию: $U(\lambda) = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \times$ $\times\, {}_2F_1\left(\dfrac{n-\alpha}{2}, 1-\dfrac{\alpha}{2}; \dfrac{n}{2}; \lambda^2\right)$. Имеется уточнение теоремы 25.3 в случае, когда плотность потенциала является радиальной функцией. Пусть B_a—шар в R^n с центром в начале координат радиуса a, $0 < a \leqslant \infty$. Справедлива (Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [1], случай $n = 2$, и Б. С. Рубин [17], общий случай) следующая

Теорема 29.1. *Пусть* $\varphi(|x|) \in L_p(B_a;\ |x|^{\nu})$, $1 < p < \infty$, $\nu < n(p-1)$, $n \geqslant 1$, $0 < \alpha < n$, $0 \leqslant m \leqslant \alpha$, $m < 1/p$, $q = p(1-mp)$. *Тогда* $\|I^{\alpha}_{a}\varphi\|_{L_q(B_a;\ |x|^{\nu_0})} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_q(B_a;|x|^{\nu})}$, *где* $\nu_0 = q(mn - \alpha + \nu/p)$ *при* $\nu > \alpha p - n$ *и* $\nu_0 = q(mn + \varepsilon - np)$ *при* $\nu \leqslant \alpha p - n$, $\varepsilon > 0$ (*при* $a = \infty$ *случай* $\nu \leqslant \alpha p - n$ *исключается*).

Доказательство теоремы основано на имеющем самостоятельный интерес представлении риссова потенциала с радиальной плотностью в терминах одномерного дробного интегрирования по радиальной переменной:

$$(I^{\alpha}_{a}\varphi)(\sqrt{r}) = 2^{-\alpha}\, r^{1-n/2}\, (I^{\alpha/2}_{0+}\, s^{(n-\alpha)/2-1}\, I^{\alpha/2}_{a^2-}\varphi(\sqrt{\tau}))(r), \quad 0 < r \leqslant a,$$

где $I^{\alpha/2}_{0+}$, $I^{\alpha/2}_{a^2-}$ — дробное интегрирование Римана—Лиувилля (2.17), (2.18), см. также работы Б. С. Рубина [17, 22], где дано обращение потенциалов с радиальной плотностью и описание образа.

25.7. В работе В. М. Кокилашвили, М. А. Габидзашвили [1] (см. также монографию В. М. Кокилашвили [2, с. 36 — 45]) теорема 25.4 о весовых оценках потенциала Рисса I^{α} перенесена на анизотропные риссовы потенциалы (29.6), где $\rho(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{2/\alpha_j}\right)^{1/2}$ $(\alpha_j > 0,\ j = 1, \ldots, n)$, и даны приложения к теоремам вложения общих весовых лиувиллевских классов. В работах М. А. Габидзашвили [1 — 3] теорема 25.4 распространена на операторы типа потенциала T^{α} (обобщающие (29.6)), действующие в пространствах однородного типа X; для T^{α} установлена теорема о двухвесовой оценке и доказаны теоремы типа Кусиса, позволяющие по данному весу ρ найти вес r такой, что оператор T^{α} ограничен из $L_p(X;\ \rho)$ в $L_q(X;\ r)$ и обратно.

25.8. Имеются обобщения весовых теорем 25.3 и 25.4 на более общие ситуации, в том числе и на случай двухвесовых оценок из $L_p(R^n;\ \rho_1)$ в $L_q(R^n;\ \rho_2)$. В настоящее время эти вопросы интенсивно развиваются и существенно продвинуты. Мы ограничимся указанием на обзор Е. М. Дынькина, Б. П. Осиленкера [1], книгу В. М. Кокилашвили [2] и работы E. Harboure, R. A. Macias, C. Segovia [1, 2], E. Sawyer [1], J.-O. Strömberg, R. L. Wheeden [1], H. P. Heinig [1, 2], A. E. Gatto, C. E. Gutierrez, R. L. Wheeden [1], K. F. Andersen [2], где можно найти и другие ссылки.

25.9. Действие оператора I^{α} из пространств Харди $H^p(R^n)$, $0 < p < +\infty$, которые при $1 < p < \infty$ совпадают с пространствами $L_p(R^n)$ с точностью до эквивалентности норм, исследовано E. M. Stein, G. Weiss [2]. Их результаты дополнены S. G. Krantz [1], рассмотревшим также более общие, чем I^{α}, операторы. Двухвесовые оценки потенциала Рисса в пространствах Харди с весом $H^p(R^n;\ \rho)$ рассматривались в работах J.-O. Strömberg, R. L. Wheeden [1], A. E. Gatto, C. E. Gutierrez, R. L. Wheeden [2].

25.10. Теорема Соболева 25.2 распространена на обобщенные потенциалы Рисса

$$I^{\alpha}_{\Omega}\varphi = \int\limits_{R^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\alpha}}\,\varphi(x-y)\,dy,$$

где $\Omega(y) = \Omega(y/|y|) \in L_{n/(n-\alpha)}(S_{n-1})$, см. B. Muckenhoupt [1]. В этой работе для таких же потенциалов рассмотрены предельные случаи $p = n/\alpha$ и $p = 1$. В частности, для $p = 1$

дано обобщение на n-мерный случай одномерного результата А. Зигмунда—Т. Флетта (см. § 4, п. 2°, 3.2):

$$\left\{\int_B |(I^\alpha_\Omega \varphi)(x)|^q\,dx\right\}^{1/q} \leqslant c\int_B [1+|\varphi(x)|]\,[\log(1+|\varphi(x)|)]^{1-\alpha/n}dx,$$

где B—шар в R^n конечного радиуса. Другое доказательство в случаях $p=n/\alpha$ и $p=1$ при $\Omega\equiv 1$ см. в работе L. I. Hedberg [1], где получено также мультипликативное неравенство

$$\|I^{\theta\alpha}\varphi\|_r \leqslant c\,\|\varphi\|_p^{1-\theta}\,\|I^\alpha\varphi\|_q^\theta,\quad \varphi(x)\geqslant 0,$$

где $0<\alpha<n$, $0<\theta<1$, $1\leqslant p<\infty$, $p<q\leqslant\infty$, $1/r=(1-\theta)/p+\theta/q$.

Вопросам обращения операторов I^α_Ω посвящены работы С. Г. Самко [21, 28] в эллиптическом случае и [19] в одном специальном неэллиптическом случае.

25.11. Действие оператора I^α в пространствах Орлича $L^*_M(R^n)$ исследовал R. O'Neil [2]. Сформулированная в § 9, п. 2°, 5.9 теорема О'Нейла для одномерного случая верна для $n\geqslant 1$ при замене α на α/n в условиях на $M(u)$. В работах В. М. Кокилашвили, М. Крбеца [1—3] (см. также монографию В. М. Кокилашвили [2, с. 78—82]) теорема 25.4 о весовых оценках для потенциала Рисса I^α перенесена с пространств L_p на пространства Орлича; при этом в работе В. М. Кокилашвили, М. Крбеца [3] даны приложения к теоремам вложения для весовых пространств Соболева—Орлича. В работе В. М. Кокилашвили [4] теорема 25.4 перенесена на кратные дробные интегралы, действующие в весовых пространствах Орлича.

R. O'Neil [1] установил аналог теоремы Соболева для пространств Лоренца $L_{p,q}$. Случай пространств Лоренца с весом см. в работах В. М. Кокилашвили [2, с. 64—71; 3]. В пространствах Морри действие потенциала Рисса рассматривал D. R. Adams [1].

25.12. Пространства Соболева—Орлича $L^{(\alpha)}_M(R^n)$ и $E^{(\alpha)}_M(R^n)$ дробного порядка $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$, обобщающие лиувиллевские пространства $L^{(\alpha)}_p(R^n)$ и состоящие из функций $f\in L_M(E_M)$, частные лиувиллевские производные которых по каждой переменной порядка α_j принадлежат $L_M(E_M$ соответственно), исследованы А. Ф. Чувенковым [1].

25.13. Связь пространств Бесова (о которых см. в книгах С. М. Никольского [4], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1]) с дробным дифференцированием была вскрыта П. И. Лизоркиным [4] (см. также работу [9]), показавшим, что бесселево дробное интегродифференцирование G^α (см. (27.8)) осуществляет изоморфизм между пространствами Бесова: $G^\alpha(B^r_{p,\theta})=B^{\alpha+r}_{p,\theta}$, $1<p<\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$, $1\leqslant r<\infty$. C. S. Herz [1, с. 315] показал, что при надлежащей модификации пространства Бесова аналогичное утверждение справедливо по отношению к риссову дробному интегрированию: $I^\alpha(\Lambda^r_{p,\theta})=\Lambda^r_{p,\theta}$, где $\Lambda^r_{p,\theta}$ понимается как замыкание по норме пространства Бесова бесконечно дифференцируемых функций, преобразования Фурье которых имеют компактный носитель вне начала координат (явная связь с пространством Ф П. И. Лизоркина).

25.14. Потенциал Рисса естественным образом возникает в теории преобразования Радона, см. об этом в книге С. Хелгасона [1, с. 20, 29 и др.].

Отметим также работу A. Brédimas [6], в которой одномерное дробное дифференцирование используется при обращении сферического преобразования Радона.

25.15. В работе Б. С. Рубина [20] рассмотрена модификация односторонних потенциалов Рисса (25.71), приспособленная к случаю полупространства:

$$I^\alpha_{0+}\varphi=\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_n}\int_{R^{n-1}}\frac{(x_n-y_n)^\alpha}{|x-y|^n}\varphi(y)\,dy,\quad x\in R^n_+,$$

и совпадающая при $n=1$ с интегралом Римана—Лиувилля (5.1). Для них выяснено, в частности, когда риссов потенциал $I^\alpha\varphi$, $\varphi\in L_p(R^n)$, в полупространстве $x_n>0$ совпадает с односторонним потенциалом $I^\alpha_{0+}\psi$, где также $\psi\in L_p$. При $\alpha<1/p$ это всегда так, причем можно указать в явном виде ограниченный в $L_p(R^n_+)$ оператор A такой, что $(I^\alpha\varphi)(x)=(I^\alpha_{0+}A\varphi)(x)$, $x_n>0$. При $\alpha>1/p$ для выполнимости подобного равенства необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial^j f(x',\,0)}{\partial x_n^j}=0$, $x'=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $j=0,\ 1,\ \ldots,$ $[\alpha-1/p]$ (при корректном понимании следа).

В работах Б. С. Рубина [19, 22] введены также аналогичные модификации односторонних потенциалов Рисса, связанные с шаром в R^n:

$$B_+^\alpha \varphi = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|<|x|} \frac{(|x|^2-|y|^2)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y)\, dy,$$

$$B_-^\alpha \varphi = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|>|x|} \frac{(|y|^2-|x|^2)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y)\, dy,$$

и получены следующие результаты: 1) полугрупповое свойство; 2) формулы обращения (для простоты считаем, что $0<\alpha<1$):

$$(B_+^\alpha)^{-1} f = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2-\alpha)} \frac{f(x)}{|x|^{2\alpha}} + \frac{\alpha c_{n-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{|y|<|x|} \frac{f(x)-f(y)}{(|x|^2-|y|^2)^\alpha |x-y|^n}\, dy,$$

$$(B_-^\alpha)^{-1} f = \frac{\alpha c_{n-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{|y|>|x|} \frac{f(x)-f(y)}{(|y|^2-|x|^2)^\alpha |x-y|^n}\, dy;$$

3) разложение риссова потенциала $I^\alpha \varphi$ в композицию

$$I^\alpha \varphi = 2^{-\alpha} B_\pm^{\alpha/2} |y|^{-\alpha} B_\mp^{\alpha/2} \varphi$$

(ср. с (25.76)).

26.1. В связи с теоремой 26.3 отметим, что усеченная риссова производная $\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f$ сходится при $\varepsilon \to 0$ на функциях $f \in I^\alpha(L_p)$, $1<p<n/\alpha$, не только по норме $L_p(R^n)$, но и почти всюду. Это можно вывести из (26.40) с помощью известного приема сравнения аппроксимации единицы с максимальной функцией (И. Стейн [1, с. 77—78]). Можно, однако, получить непосредственными преобразованиями из (26.40) следующую оценку (см. С. Г. Самко [20] или [31, с. 78]):

$$|(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) - \varphi(x)| \leqslant c_1 \sup_{0<t<\varepsilon} \Phi_t(x) + c_2 \Psi_\varepsilon(x) + \varepsilon^{l^*-\alpha}(c_3 |\varphi(x)| + c_4 \|\varphi\|_p), \quad f = I^\alpha \varphi,$$

из которой следует сходимость почти всюду. Здесь l^* — то же, что в (26.39), $\Phi_t(x) = t^{-n} \int\limits_{|y|<t} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|\, dy$, $\Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{l^*-\alpha} \int\limits_\varepsilon^1 t^{\alpha-l^*-1} \Phi_t(x)\, dt$, c_i $(i=1, 2, 3, 4)$ — явно подсчитываемые абсолютные постоянные. О сходимости почти всюду более общих гиперсингулярных интегралов $\mathbf{D}_\Omega^\alpha f$ с характеристикой $\Omega(y)$ (не обязательно однородной) см. в работе В. А. Ногина [7].

26.2. Гиперсингулярный интеграл $(\mathbf{D}_\Omega^\alpha f)(x)$ с однородной характеристикой $\Omega(y/|y|)$ от достаточно гладких и убывающих функций f допускает при $|x| \to \infty$ следующие оценки. Пусть $f(x) \in C^l(R^n)$, $l > \alpha$, и $|f(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-N_1}$, $|(\mathscr{D}^j f)(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-N_2}$ для $|j| = l$, где $N_1 > \alpha$, $N_2 > n$. Тогда

$$|(\mathbf{D}_\Omega^\alpha f)(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-\min(\alpha+N_1, N_2, 1+\alpha)},$$

если $\Omega(\sigma) \in L_1(S_{n-1})$, и

$$|(\mathbf{D}_\Omega^\alpha f)(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-\min(\alpha+N_1, N_2, n+\alpha)},$$

если $\Omega(\sigma)$ ограничена (С. Г. Самко [26; 31, с. 89]).

26.3. Модуль непрерывности (вообще говоря, дробного порядка) $\omega_\gamma(f, \delta) = \sup\limits_{|h|<\delta} \|\Delta^\gamma f\|_X$, $X = L_p(R^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $X = BC(R^n)$, гиперсингулярного интеграла $\mathbf{D}_\Omega^\alpha f$ оценивается следующим образом:

$$\omega_\gamma(\mathbf{D}_\Omega^\alpha f, \delta) \leqslant c b(\delta) \frac{\omega_\gamma(f, \delta)}{\delta^\alpha} + c \int\limits_0^\delta \frac{\omega_\lambda(f, t)}{t^{1+\alpha}} a(t)\, dt,$$

где $a(t) = \int\limits_{S^{n-1}} \Omega(t\sigma)\, d\sigma$, $t > 0$, $b(\delta) = \int\limits_1^\infty t^{-1-\alpha} a(\delta t)\, dt$, $\gamma > 0$, $0 < \alpha < \lambda \leqslant l$ (где l — порядок разности, определяющей $\mathbf{D}_\Omega^\alpha f$). В случае $\Omega \equiv \text{const}$ можно взять $a(t)$, $b(\delta) = \text{const}$, а λ — любым таким, что $\lambda > \alpha$ (С. Г. Самко, А. Я. Якубов [4]; случай целых γ, λ и $X = C$ см. в работе тех же авторов [2]).

26.4. В случае, когда характеристика $\Omega(y')$ есть сферическая гармоника $Y_m(y')$, гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}^{\alpha}_{\Omega} f$ просто выражается через $\mathbf{D}^{\alpha-m} f$:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{Y_m} f = \lambda Y_m(\mathscr{D})\, \mathbf{D}^{\alpha-m} f \text{ при } \alpha \geqslant m,$$

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{Y_m} f = \lambda Y_m(\mathscr{D})\, I^{m-\alpha} f \text{ при } \alpha \leqslant m,$$

где λ постоянная, зависящая от α, n, m и от типа гиперсингулярного интеграла (см. С. Г. Самко [26; 31, с. 90]), ср. эти формулы в случае $\alpha = m$ с представлением (26.83).

26.5. Имеется R. J. Bagby [3] описание пространств $I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < n/\alpha$, не в терминах $\mathbf{D}^{\alpha} f$, как в теоремах 26.8 и 26.9, а в терминах так называемых конструкций Стрихарца $\int\limits_0^{\infty} t^{-2\alpha-1} \left(\int\limits_{|y|<1} |(\Delta^k_{ty} f)(x)|\, dy \right)^2 dt$. Это описание дано в более общем контексте пространств Лоренца $L_{p,q}$.

26.6. Если в описании пространства $I^{\alpha}(L_p)$ (см. теоремы 26.8 или 26.9) отказаться от условия $f \in L_q(R^n)$, то $f(x)$ может «содержать» многочлен, поскольку мы оказываемся в ситуации, когда $f(x)$ определяется только заданием полунормы $\|\mathbf{D}^{\alpha} f\|_p$. Обстоятельное исследование о характере выхода функции $f(x)$ на бесконечности на полином в зависимости от определяющей ее полунормы проведено П. И. Лизоркиным [10, 11]. В связи с этим отметим, что пространство $I^{\alpha}(L_p)$ при $1<p<\infty$, $p \geqslant n/\alpha$, можно трактовать как подпространство фактор-пространства $S'/P_{\alpha - n/p}$, где S' — пространство Шварца обобщенных функций медленного роста, а $P_{\alpha - n/p}$ — подпространство в S', состоящее из полиномов степени не выше $\alpha - n/p$, см. работу A. J. Pryde [1] в случае $p=2$ и работы А. А. Давтяна [1, 2] в случае $1<p<\infty$ (А. А. Давтяном рассмотрен более общий случай неизотропных риссовых потенциалов). Это утверждение было известно для изотропных риссовых потенциалов и раньше, однако авторы затрудняются дать более ранние ссылки.

26.7. В работе С. Г. Самко [20] рассмотрены гиперсингулярные интегралы не с однородной, как в (26.47), а со стабилизирующейся при $y \to 0$ и $y \to \infty$ характеристикой $\Omega(y)$. Выяснено влияние такой характеристики на сходимость гиперсингулярного интеграла (вопрос б) из § 26, п. 4°). Как и в § 26, это сделано в $L^{\alpha}_{p,r}$-постановке, т. е. $f \in L_r$, а сходимость $\mathbf{D}^{\alpha} f$ рассматривается в L_p. Тот же вопрос б) с более общими характеристиками, охватывающими и однородные, и стабилизирующиеся характеристики, рассмотрен В. А. Ногиным [1]. Последнее исследование обобщает результаты Р. Видена (R. L. Wheeden [5]), относящиеся к случаю $r=p$, однако у Р. Видена предполагаются более слабые условия на характеристику.

26.8. Функции $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < n/\alpha$, имеют все слабые (обобщенные) производные целых порядков $|\beta| \leqslant \alpha$, причем $\|\mathscr{D}^{\beta} f\|_r \leqslant c_1 \|\mathbf{D}^{|\beta|} f\|_r \leqslant c_2 \|\mathbf{D}^{\alpha} f\|_p$, где $1/r = 1/p - (\alpha - |\beta|)/n$ (С. Г. Самко [17; 31, с. 109]).

26.9. В случае целых α пространство $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$, рассмотренное в § 26, п. 7°, совпадает с пространством $W^{\alpha}_{p,r}$ соболевского типа, состоящим из функций $f \in L_r$ таких, что $\mathscr{D}^j f \in L_p(R^n)$, $|j| = \alpha$ (С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев [1, 2], С. Г. Самко [31, с. 112]). Отсюда в качестве следствия можно отметить, что

$$I^{\alpha}(L_p) = \{f : f \in L_q,\ \mathscr{D}^j f \in L_p,\ |j| = \alpha\},$$

$$1 < p < n/\alpha,\ q = np/(n - \alpha p),\ \alpha = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В этих же работах дано описание $I^{\alpha}(L_p)$, $0 < \alpha < n/p$, в терминах старших производных: для того чтобы $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f \in L_q,\ \mathscr{D}^j f \in L_r,\ |j| = \alpha,\ \mathbf{D}^{\alpha - [\alpha]}\, \mathscr{D}^j f \in L_p,$$

где $1/q = 1/p - \alpha/n$, $1/r = 1/p - (\alpha - [\alpha])/n$.

26.10. Известно следующее покоординатное описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$, содержащее информацию о поведении функций $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$ по каждой переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (В. А. Ногин, Б. С. Рубин [3]). Пусть

$$(I^{\alpha}_i \varphi)(x) = \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}}\, dt,\ e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0),$$

— частные риссовы потенциалы по переменной x_i и

$$I_i^\alpha(L_p) = \{f : f = I_i^\alpha \varphi,\ \varphi \in L_p(R^n)\},\ \|f\|_{I_i^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 29.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p$. *Тогда* $I^\alpha(L_p) = \bigcap_{i=1}^n I_i^\alpha(L_p)$, *причем нормы* $\|f\|_{I^\alpha(L_p)}$ *и* $\sum_{i=1}^n \|f\|_{I_i^\alpha(L_p)}$ *эквивалентны.*

26.11. Описание весового пространства $I^\alpha[L_p(R^n; \rho)]$ дробных интегралов с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим условию Макенхоупта — Видена (25.43), дано в работе В. А. Ногина, С. Г. Самко [4] и имеет вид $f(x) \in I^\alpha[L_p(R^n; \rho)]$, $1 < p < n/\alpha$, тогда и только тогда, когда $f(x) \in L_q(\rho^{q/p})$, $1/q = 1/p - \alpha/n$, и либо существует $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f$ по норме $L_p(R^n; \rho)$, либо $\|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f\|_{L_p(R^n;\rho)} \leqslant c$. В случае $n = 1$ это утверждение было получено ранее в работе K. F. Andersen [1].

26.12. Справедлива следующая теорема об одновременной аппроксимации функций и их риссовых производных: *всякая функция* $f(x)$ *с конечной нормой*

$$\|f\|_r + \|\mathbf{D}^\alpha f\|_p \tag{29.8}$$

может быть при $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $\alpha > 0$ *аппроксимирована по этой норме функциями класса* $C_0^\infty(R^n)$ (С. Г. Самко [17, § 5] при $1 < p < n/\alpha$, В. А. Ногин, С. Г. Самко [2] при $1/p - \alpha/n \leqslant 1/r \leqslant 1/p$ и В. А. Ногин [5, с. 28] в указанном случае).

26.13. Функция $\mu(x)$ называется *мультипликатором* в пространстве X, если $\mu f \in X$ и $\|\mu f\|_X \leqslant c\|f\|_X$ для всех $f \in X$. Для того чтобы ограниченная функция $\mu(x)$ была мультипликатором в пространстве $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов, $1 < p < n/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы порожденный ею интегральный оператор

$$N_\varepsilon \varphi = \int_{R^n} N_\varepsilon(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

$$N_\varepsilon(x, y) = \sum_{\nu=1}^{l} \binom{l}{\nu} \int_{|t|>\varepsilon} |t|^{-n-\alpha} (\Delta_t^\nu \mu)(x)\, \Delta_{l-\nu,\alpha}(x - y - \nu t, t)\, dt,\ l > \alpha,$$

$\Delta_{m,\alpha}(x, h)$ — ядро (26.32), был равномерно по ε ограничен в $L_p(R^n)$. Достаточное условие для этого состоит в том, чтобы 1) $\int_{R^n} |t|^{-n-\alpha} \|\Delta_t^l \mu\|_{n/\alpha} dt < \infty$, 2) для каждого $i = 1, \ldots, l-1$ существуют числа α_i, $0 < \alpha_i < \min(\alpha, l - i)$, такие, что $\int_{R^n} |t|^{-n-\alpha+\alpha_i} \|\Delta_t^i \mu\|_{n/(n-\alpha_i)} dt < \infty$. В частности, функции $\mu(x) \in C^\lambda(\dot{R}^n)$, $\lambda > \alpha$, являются мультипликаторами в $I^\alpha(L_p)$ (С. Г. Самко [24]).

Разрывная функция $\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$ будет мультипликатором в $I^\alpha(L_p)$, когда Ω — полупространство или шар, при $1 < p < 1/\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Случай, когда Ω — область, удовлетворяющая так называемому условию Стрихарца, см. в работе R. S. Strichartz [1] применительно к потенциалам Бесселя и в работе В. А. Ногина, Б. С. Рубина [3] применительно к потенциалам Рисса.

26.14. Оператор умножения на функции вида $c(x)(1 + |x|^2)^{-\nu/2}$, $\nu > 0$, является вполне непрерывным оператором из пространства $I^\alpha(L_p)$ в пространство $I^{\alpha-\varepsilon}(L_p)$ при любом $0 < \varepsilon < \alpha$, если $\nu > \varepsilon$, $c(x) \in C^\lambda(\dot{R}^n)$, $\lambda > \alpha - \varepsilon$ (С. М. Умархаджиев [1]).

27.1. Справедливо следующее неравенство типа Бернштейна для бесселева дифференцирования $(E - \Delta)^{\alpha/2} g = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} \mathcal{F} g$:

$$\|(E - \Delta)^{\alpha/2} g\|_p \leqslant c(1 + \sigma^2)^{\alpha/2} \|g\|_p$$

для функций $g \in L_p(R^n)$, преобразования Фурье которых сосредоточены в кубе $|\xi_j| \leqslant \sigma$, $j = 1, \ldots, n$, и верно неравенство типа Бора — Фавара для бесселева интегрирования $G^\alpha = (E - \Delta)^{\alpha/2}$:

$$\|(E - \Delta)^{-\alpha/2} g\|_p \leqslant c(1 + \sigma^2)^{-\alpha/2} \|g\|_p$$

для функций $g \in L_p(R^n)$, преобразования Фурье которых обращаются в нуль в таком же кубе. Здесь постоянная c не зависит от $g(x)$ (П. И. Лизоркин [5]).

27.2. *Анизотропным бесселевым потенциалом* называется интеграл

$$G^\alpha \varphi = \int_{R^n} G_\alpha(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где $G_\alpha(x)$ — ядро, имеющее своим образом Фурье функцию

$$\widehat{G}_\alpha(x) = [1 + \rho^2(x)]^{-\alpha_*/2}, \quad \frac{1}{\alpha_*} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j},$$

$\rho(x)$ — положительное решение уравнения $\sum_{j=1}^n x_j^2\, \rho^{-2a_j}(x) = 1$, $a_j = \alpha_*/\alpha_j$. Пространство $G^\alpha(L_p)$ функций, представимых анизотропными бесселевыми потенциалами $G^\alpha\varphi$, $\varphi \in L_p(R^n)$, совпадает с соболевским пространством $L_p^{(\alpha)}(R^n)$, состоящим из функций $f \in L_p(R^n)$, частные лиувиллевские дробные производные $\partial^{\alpha_j} f/\partial x_j^{\alpha_j}$ которых также принадлежат $L_p(R^n)$, и, кроме того, $G^\alpha(L_p)$ описывается с помощью соответствующих анизотропных гиперсингулярных интегралов (П. И. Лизоркин [6]). Случай $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$ отражен в § 27, п. 3°.

27.3. Укажем на интегральные операторы, близкие по природе к бесселевым потенциалам и имеющие односторонний характер подобно потенциалам (25.71). Обозначим

$$G_\pm^\alpha \varphi = g_\alpha^\pm * \varphi, \quad g_\alpha^\pm(x) = \frac{d_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x_n)_\pm^\alpha K_{n/2}(|x|)}{|x|^{n/2}} \in L_1(R^n),$$

где $d_{n-1} = 2^{1-n/2}\pi^{-n/2}$, $\alpha > 0$ (односторонние бесселевы потенциалы), $\widehat{g_\alpha^\pm}(\xi) = (\sqrt{1 + |\xi|^2 - \xi_n^2} \mp i\xi_n)^{-\alpha}$. Подобно (27.22) справедливо равенство

$$G_\pm^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y_n^{\alpha-1} (M_{y_n}\varphi(\cdot, x_n \mp y_n))(x')\,dy_n,$$

а подобно (25.76) — представление $G^\alpha = G_\pm^{\alpha/2} G_\mp^{\alpha/2}$. Здесь

$$(M_{y_n}\varphi(\cdot, x_n - y_n))(x') = d_n y_n \int_{R^{n-1}} \frac{K_{n/2}(\sqrt{|y'|^2 + y_n^2})}{(|y'|^2 + y_n^2)^{n/4}} \varphi(x' - y', x_n - y_n)\,dy.$$

Обратные к $G_\pm^\alpha$ операторы реализуются в виде гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями (см. § 27, конец п. 4°):

$$(G_\pm^\alpha)^{-1} f = \frac{d_n}{\varkappa(\alpha, l)} \int_{R_+^n} \frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n} (\tilde{\Delta}_{\pm y}^l f)(x)\,dy, \quad l > \alpha,$$

где

$$(\tilde{\Delta}_y^l f)(x) = f(x) e^{y_n} |y|^{n/2} K_{n/2}(|y|) + \sum_{k=1}^l \binom{l}{k} (-1)^k (k|y|)^{n/2} K_{n/2}(k|y|) f(x - ky).$$

Теорема 29.3. *Если* $\alpha > 0$ *и* $1 < p < \infty$, *то* $G_\pm^\alpha(L_p) = L_p^\alpha$, *причем нормы* $\|G_\pm^\alpha \varphi\|_{L_p^\alpha}$ *и* $\|\varphi\|_p$ *эквивалентны. Пусть*

$$\varphi_\varepsilon^\pm = \int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} |y|^{-n} y_n^{-\alpha} (\tilde{\Delta}_{\pm y}^l f)(x)\,dy, \quad l > \alpha.$$

Для того чтобы $f \in G_\pm^\alpha(L_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \varphi_\varepsilon^\pm \in L_p(R^n)$. *Если* $f \in G_\pm^\alpha(L_p)$, $1 < p \leqslant \infty$, *то* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon^\pm$ *существует и почти всюду.*

Наряду с операторами $G_\pm^\alpha$ можно рассматривать односторонние потенциалы вида

$$\frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{(y_n)_\pm^\alpha\, e^{-|y_n|}}{|y|^n}\,\varphi(x-y)\,dy,\quad c_{n-1}=\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}, \tag{29.9}$$

действие которых в образах Фурье сводится к умножению на $(1+|\xi'|\mp i\xi_n)^{-\alpha}$ (ср. с (25.75), где следует взять $\varepsilon=1$). При $n=1$ эти потенциалы совпадают с $G_\pm^\alpha\varphi$ и тем самым с рассмотренными в § 18, п. 4° операторами $(E\pm\mathscr{D})^{-\alpha}$.

Операторы $G_\pm^\alpha$ в образах Фурье встречались в монографии Х. Трибеля [1, с. 282], где для них доказано, что $G_\pm^\beta: L_p^\alpha\to L_p^{\alpha+\beta}$. В явном виде потенциалы $G_\pm^\alpha\varphi$ приведены в работах Б. С. Рубина [20, 24], где, в частности, получено обращение операторов $G_\pm^\alpha$ и доказана теорема 29.3. Потенциалы (29.9) приведены в монографии Г. И. Эскина [1].

27.4. Отметим описания пространства $G^\alpha(L_p)$ бесселевых потенциалов в терминах «усеченных» интегралов (27.46), (27.54), (27.55).

Теорема 29.4. *Пусть* $1<p<\infty$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 2, 4, 6, \ldots$ *Тогда* $f(x)\in G^\alpha(L_p)$, *если и только если* $\mathscr{D}^j f\in L_p$, $|j|\leqslant[\alpha]$, *и выполнено одно из следующих условий:*

1) *последовательность* $\mathbf{D}^\alpha_{\lambda_\alpha,\varepsilon}f$ *интегралов (27.46) сходится по* L_p*-норме;*

2) $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|\mathbf{D}^\alpha_{\lambda_\alpha,\varepsilon}f\|_p<\infty$.

Заметим, что некоторое достоинство гиперсингулярных интегралов $\mathbf{D}^\alpha_{\lambda_\alpha}f$ по сравнению с используемыми в теореме 27.3 риссовыми производными $\mathbf{D}^\alpha f$ состоит в том, что они содержат характеристику $\lambda_\alpha(|y|)$, экспоненциально убывающую на бесконечности.

Теорема 29.5. *Пространство* $G^\alpha(L_p)$, $\alpha>0$, $1\leqslant p<\infty$, *состоит из тех и только тех функций* $f(x)\in L_p$, *для которых сходится по* L_p*-норме последовательность* $\mathfrak{D}^\alpha_\varepsilon f$, *где* $\mathfrak{D}^\alpha_\varepsilon f$ *— один из интегралов (27.54), (27.55) (или усеченный интеграл (27.56)).*

Первая из этих теорем установлена В. А. Ногиным [8], вторая — Б. С. Рубиным [23, 25].

27.5. Изложение теории бесселевых потенциалов с точки зрения дробных степеней операторов можно найти в работах M. J. Fisher [3—6].

28.1. Для функций φ, зависящих только от лоренцева расстояния $\rho(\xi)=\sqrt{\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2}$ (называемых лоренц-инвариантными функциями), имеется формула преобразования Фурье — Лапласа, подобная формуле Бохнера (25.11):

$$\int\limits_{R^n}e^{i\xi\cdot z}\varphi[\rho(\xi)]\,d\xi=\frac{(2\pi)^{(n-2)/2}}{[\rho(z)]^{(n-2)/2}}\int\limits_0^\infty\varphi(t)\,t^{(n-2)/4}\,K_{(n-2)/2}\left(\sqrt{t\rho(z)}\right)dt,$$

где функция $\varphi[\rho(\xi)]$ сосредоточена в световом конусе будущего $K_+^+=\{\xi:\rho^2(\xi)>0,\ \xi_1>0\}$, $z=x+iy$, $x\in R^n$, $y\in K_+^-=\{y:\rho^2(y)>0,\ y_1<0\}$, $K_\nu(z)$ — функция Макдональда и предполагается, что интеграл слева сходится абсолютно (A. G. Domingues, S. E. Trione [1]), см. по этому поводу также книгу Ж. Лере [1], где имеется формула для преобразования Фурье — Лапласа лоренц-инвариантных функций в виде композиции одномерного преобразования Фурье — Лапласа с дробным интегрированием (подобная формуле (25.14)).

28.2. В. А. Ногиным и Б. С. Рубиным [1, 5] были введены и исследованы пространства

$$\mathscr{L}^\alpha_{p,r}=\mathscr{L}^\alpha_{p,r}(R^{n+1})=\{f:\|f\|_r+\|\mathscr{F}^{-1}(|\xi|^2+i\tau)^{\alpha/2}\mathscr{F}f\|_p<\infty\},$$

$$\alpha>0,\ 1\leqslant p<\infty,\ 1\leqslant r<\infty,$$

(ср. с классами $L^\alpha_{p,r}=\{f:\|f\|_r+\|\mathscr{F}^{-1}|\xi|^\alpha\mathscr{F}f\|_p<\infty\}$, см. (26.91)), являющиеся обобщением пространств $H^\alpha(L_p)$ и $\mathscr{H}^\alpha(L_p)$ и совпадающие с первыми при $1<p<\infty$, $0<\alpha<1+n/2$, $r=(n+2)p/(n+2-\alpha p)$ и со вторыми при $\alpha>0$, $1<p=r<\infty$. Классы $\mathscr{L}^\alpha_{p,r}$ состоят из функций $f_i\in L_r(R^{n+1})$, представимых потенциалом $H^\alpha\varphi$, $\varphi\in L_p(R^{n+1})$:

$$\mathscr{L}^\alpha_{p,r}=L_r\cap H^\alpha(L_p),\ 1\leqslant p,\ r<\infty,\ \alpha>0;$$

они описываются в следующих терминах:

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}=\{f: f\in L_r,\ T^{\alpha}f\in L_p\},\quad 1\leqslant p,\ r<\infty,\quad \alpha>0,$$

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}=\{f: f\in L_r,\ \sup_{\varepsilon>0}\|T^{\alpha}_{\varepsilon}f\|_p<\infty\},\quad 1<p<\infty,\quad 1\leqslant r<\infty,\quad \alpha>0,$$

где T^{α} — оператор (28.52), а $T^{\alpha}_{\varepsilon}f$ — усеченный интеграл в (28.52). Для пространств $\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,p}=\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ справедливо аналогичное описание в терминах гиперсингулярного интеграла (28.54).

При $0<\alpha<2$ описание пространств $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ в терминах гиперсингулярных интегралов (с разностями первого порядка) получено также В. А. Ногиным [5], S. Chanillo [1]. R. J. Bagby [1] при $0<\alpha<1$ использовал для тех же целей иные средства — конструкции типа Стрихарца. Имеется также описание пространства $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ при $\alpha\geqslant 1$ в неконструктивных терминах — с помощью редукции, см. работу V. R. Gopala Rao [1, 2].

В. А. Ногин, Б. С. Рубин [1, 5] получили «покомпонентное» описание пространств $\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}$, характеризующее разное поведение функций $f(x,\,t)\in\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}$ по пространственной компоненте x и по временной переменной t:

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}=\{f: f\in L_r,\ \mathbf{D}^{\alpha}_x f\in L_p,\ \mathbf{D}^{\alpha/2}_t f\in L_p\},$$

где $1<p<\infty$, $1\leqslant r<\infty$, $\alpha>0$ и

$$\mathbf{D}^{\alpha}_x f=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\(L_p(R^{n+1}))}}\frac{1}{d_{n,\,l(\alpha)}}\int\limits_{|y|>\varepsilon}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}f(x-ky,\,t)\,|y|^{-n-\alpha}dy$$

есть частная риссова производная по переменной x, $\mathbf{D}^{\alpha/2}_t f$ — частная риссова производная по переменной t, определяемая аналогично. Вместо «сцепленной» производной $\mathbf{D}^{\alpha}_x f$ можно рассматривать покоординатные производные $\mathbf{D}^{\alpha}_{x_i}f$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$, и дать соответствующее покоординатное описание пространств $\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}$. С помощью такого покомпонентного и покоординатного описания В. А. Ногин, Б. С. Рубин [1, 5] исследовали мультипликаторы в $\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}$ и установили связь пространства $\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}$ с соболевскими классами при целых α. В этих работах указаны достаточные признаки для мультипликаторов в терминах классов $C^{\lambda}(\dot{R}^n)$. Указан также широкий класс областей в R^{n+1}, содержащий, в частности, так называемые области Стрихарца, характеристические функции которых являются мультипликаторами в $\mathcal{L}^{\alpha}_{p,\,r}$. Мультипликаторы в $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ изучались R. J. Bagby [1]. S. Chanillo [1] установил, что функции из $C^{\infty}_0(R^{n+1})$ являются мультипликаторами в $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$.

Наконец, В. А. Ногин, Б. С. Рубин [1, 5] показали, что при четных $\alpha=2m$, $m=1,\,2,\,\ldots$, пространство $\mathcal{L}^{2m}_{p,\,r}$ состоит из функций $f(x,\,t)\in L_p$, имеющих в $L_p(R^{n+1})$ покоординатные производные $\partial^{2m}f/\partial x_j^{2m}$, $j=1,\,\ldots,\,n$, и $\partial^m f/\partial t^m$. В случае нечетных $\alpha=2m-1$, $m=1,\,2,\,\ldots$, получено аналогичное утверждение с той разницей, что порядок гладкости по t, равный $m-1/2$, является дробным. В качестве дробной производной при этом берется частная риссова производная $\mathbf{D}^{m-1/2}_t$. В случае $r=p$ близкие утверждения были получены V. R. Gopala Rao [1], однако приведенные им утверждения содержат в достаточной части избыточную информацию о смешанных производных, от которой в указанных работах В. А. Ногина, Б. С. Рубина [1, 5] удалось избавиться.

Отметим также, что в работе R. J. Bagby [1] получены интерполяционные теоремы для пространств $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$.

Относительно пространств $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ заметим, что они совпадают с точностью до эквивалентности норм с анизотропными классами функций из L_p, имеющих в L_p обобщенные лиувиллевские производные порядка α по переменным x_j, $j=1,\ldots,\,n$, и порядка $\alpha/2$ по t, что легко проверяется с помощью L_p-мультипликаторов. Эти анизотропные классы являются частными случаями анизотропных пространств, исследованных в общем виде П. И. Лизоркиным [5, 6, 8].

28.3. Как показано В. А. Ногиным, Б. С. Рубиным [2], гиперсингулярные интегралы $T^{\alpha}f$, $\mathfrak{T}^{\alpha}f$, см. (28.52), (28.54), обращающие потенциалы $f=H^{\alpha}\varphi$, $f=\mathcal{H}^{\alpha}\varphi$, $\varphi\in L_p$, можно понимать как пределы почти всюду соответствующих «усеченных» интегралов.

28.4. Дробные степени гиперболического оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{\nu}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}$ исследовались в работах I. G. Sprinkhuizen-Kuyper [1, 2].

28.5. Еще один из возможных вариантов дробного интегрирования вводится равенством

$$\mathcal{F}(T_t^\alpha f) = e^{-\frac{t}{2}|x|^\alpha} \hat{f}(x), \quad \alpha > 0, \quad t > 0,$$

в образах Фурье. Такой вариант исследовал K. Takano [2], показавший, что операторы T_t^α при любом $\alpha > 0$ образуют полугруппу класса (C_0) в пространстве $L_p(R^n; \rho)$ с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим условию Макенхоупта. Производящий оператор этой полугруппы есть гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}^\alpha f$ (понимаемый у К. Такано как замыкание в $L_p(R^n; \rho)$ оператора $\mathcal{F}^{-1}|x|^\alpha\mathcal{F}$). Случай $\rho(x) = (1+|x|^2)^{-m/2}$, $m > n$, см. в работе K. Takano [1].

28.6. В связи с различными формами дробного интегродифференцирования функций многих переменных упомянем случай функций, заданных на единичной сфере в R^n. Имеется большое число работ, посвященных дробным степеням оператора Бельтрами—Лапласа на сфере, их обобщениям и аналогам. Ограничимся ссылкой на обзор С. Г. Самко [30], где можно найти литературные указания, и на работы С. Г. Самко [22], П. М. Павлова, С. Г. Самко [1], в которых введены сферические аналоги риссова дробного интегродифференцирования, в том числе и сферические гиперсингулярные интегралы. О дробном интегрировании функций на сфере см. также в работе L. Colzani [1].

28.7. Обобщение операции дробного интегродифференцирования на случай нескольких переменных, при котором интегрирование по полуоси $(-\infty, x)$ (в одномерном случае) заменяется интегрированием по конусу с вершиной в точке $x \in R^n$, дано в монографии В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова, Б. И. Завьялова [1]. Приведем определение этого обобщения. Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый телесный конус в R^n; $\Gamma^* = \{\xi \in R^n : \xi \cdot x \leqslant 0, \ \forall x \in \Gamma\}$ — конус, сопряженный к Γ; $C = \operatorname{int}\Gamma^*$—множество внутренних точек Γ^*; S'_Γ —сверточная алгебра обобщенных функций медленного роста с носителем в Γ; $H(C)$ — алгебра функций, голоморфных в трубчатой области $T^C = \{z = x + iy : x \in R^n, \ y \in C\}$, являющихся преобразованиями Лапласа $L[g] = (g(\xi), e^{iz\cdot\xi})$ обобщенных функций $g \in S'_\Gamma$. Функция $\mathcal{K}_C(z) = \int_\Gamma e^{iz\cdot\xi} d\xi$ называется *ядром Коши трубчатой области* T^C. Открытый выпуклый острый конус C называется регулярным, если $[\mathcal{K}_C(z)]^{-1} \in H(C)$.

Операция дробного интегродифференцирования вводится следующим образом. Пусть $C = \operatorname{int}\Gamma^*$ — регулярный конус. Тогда $\mathcal{K}_C^\alpha(z) = [\mathcal{K}_C(z)]^\alpha \in H(C)$ для любого $\alpha \in R^1$. Обозначим через $\theta_\Gamma^\alpha(\xi) = L^{-1}[\mathcal{K}_C^\alpha(z)](\xi)$ прообраз Лапласа степени $\mathcal{K}_C^\alpha(z)$ (при $\alpha = 0$ это есть характеристическая функция конуса Γ). Оператор дробного интегродифференцирования определяется как свертка с обобщенной функцией $\theta_\Gamma^\alpha(\xi)$. Введенные операторы, очевидно, образуют абелеву группу по α.

Нетрудно убедиться в том, что тензорное произведение одномерных лиувиллевских дробных интегралов (одинакового порядка) и потенциалы Рисса с лоренцевой метрикой являются частными случаями введенных таким образом операторов.

28.8. Другой подход к построению дробного интегродифференцирования, связанного с конусами в R^n, был ранее развит С. Г. Гиндикиным [1, 2] (см. также Б. Р. Вайнберг, С. Г. Гиндикин [1]). В отличие от п. 28.7 порядок дробного интеграла здесь является «многомерным». Пусть V—выпуклый конус в R^n, не содержащий прямых, для которого существует группа $G(V)$ линейных преобразований, сохраняющих V, обладающих свойством: для любых точек $x, y \in V$ существует единственное преобразование $\psi \in G(V)$, такое, что $\psi(x) = y$. Если зафиксировать некоторую точку $e \in V$, то на V можно перенести мультипликативную структуру группы $G(V): xy = g(x)y$, где $g(x)e = x$, $g(x) \in G(V)$. Сложными степенными функциями называются функции, удовлетворяющие условию $f(xy) = f(x)f(y)$. Всякая сложная степенная функция f, нормированная условием $f(e) = 1$, имеет вид $f(x) = \prod_{k=1}^{l} [\chi_k(x)]^{\rho_k} \overset{\text{def}}{=} x^\rho$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$. Число l называется рангом конуса V; $\chi_k(x)$ — некоторые дробно-рациональные функции от координат точки x. Конус V задается неравенствами $\chi_k(x) > 0$, $k = 1, \ldots, l$. Пусть $d\mu$ — мера, инвариантная относительно группы $G(V)$ (она связана с евклидовой соотношением $d\mu = x^d dx$, где $d = (d_1, \ldots, d_l) \in R^l$); $\Gamma_V(\rho)$ — интеграл Зигеля второго рода (или Г-функция конуса V, ее можно записать в виде произведения обычных Г-функций). *Оператор Римана — Лиувилля порядка* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$ определяется в виде интеграла

$$(\mathcal{P}_V^\rho \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_V(\rho)} \int_x^\infty \varphi(y)(y-x)^{\rho+d} dy,$$

где интегрирование производится по конусу (x, ∞), состоящему из точек y, для которых $y - x \in V$.

В указанной работе С. Г. Гиндикина [1] проведено детальное исследование операторов $\mathcal{P}_v$, даны их приложения к построению фундаментальных решений некоторых дифференциальных уравнений, а также к решению ряда задач интегральной геометрии. Рассмотрено уравнение Абеля $\mathcal{P}_v\varphi = f$.

Близкие в идейном плане построения были проведены ранее L. Garding [1] для случая конусов симметричных и эрмитовых матриц.

Операторам Римана—Лиувилля, связанным с однородными конусами, посвящена также работа T. Watanabe [1].

Отметим, что операторы Римана—Лиувилля $\mathcal{P}_v$ были использованы В. С. Рабиновичем [1] при исследовании многомерных интегральных уравнений типа свертки, символ которых имеет особенности на бесконечности (типа сложной степенной функции некоторого конуса). В терминах операторов $\mathcal{P}_v$ в указанной работе построены аналоги функциональных пространств Соболева—Слободецкого и в терминах последних исследована нетеровость уравнений типа свертки.

28.9. Пусть $A_c(b)$ — пирамида (28.60), $x \in R^n$, $\mathrm{k} = (\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_n)$ — вектор-функция. Введем обозначение $\mathrm{k}(x) = \mathrm{k}_1(x_1) \ldots \mathrm{k}_n(x_n)$. Рассмотрим более общее, чем уравнение типа Абеля (28.65), уравнение

$$\int\limits_{A_c(x)} \mathrm{k}(A\cdot(x-t))\,\varphi(t)\,dt = f(x),\ x \in A_c(b). \tag{29.10}$$

Пусть для ядра $\mathrm{k}(x)$ существует вектор-функция $l(x)$ такая, что

$$\int\limits_{\sigma(x,\tau)} l(A\cdot(x-t))\,\mathrm{k}(A\cdot(t-\tau))\,dt = 1, \tag{29.11}$$

где $\sigma(x, \tau)$ — область (28.64). Тогда для уравнения (29.10) проходит тот же метод, которым решалось уравнение (28.65). При этом единственное решение уравнения (29.10) имеет вид

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int\limits_{A_c(x)} l(A\cdot(x-t))\,f(t)\,dt.$$

Уравнение (29.10) является пирамидальным аналогом уравнения (4.1), а условие (29.11) — пирамидальным аналогом условия Сонина (4.2″).

ГЛАВА 6

Приложения к интегральным уравнениям первого рода со степенными и степенно-логарифмическими ядрами

В этой главе дадим приложения дробных интегралов и производных к интегральным уравнениям первого рода

$$M\varphi \equiv \int_\Omega k(x, t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x \in \Omega,$$

ядра $k(x, t)$ которых имеют особенность типа $|x-t|^{\alpha-1}$, $0<\alpha<1$, или, более общо, $|x-t|^{\alpha-1}\ln^m \frac{\gamma}{|x-t|}$. В первом случае естественным образом возникают дробные интегралы Римана—Лиувилля, во втором случае—их обобщения, рассмотренные в §21. Ядра $k(x, t)$ предполагаются для простоты вещественнозначными.

В случае $k(x, t) = c(x, t)|x-t|^{\alpha-1}$ исследование и решение рассматриваемого уравнения первого рода основано на выделении в явном виде оператора дробного интегрирования. Именно уравнение $M\varphi = f$ можно, вообще говоря, представить в виде $I^\alpha N\varphi = f$, $N = \mathcal{D}^\alpha M$, где I^α, $\mathcal{D}^\alpha$—те или иные формы дробного интегродифференцирования. Уравнение $N\varphi = g$, $g = \mathcal{D}^\alpha f$, получаемое после обращения уравнения Абеля, оказывается при широких предположениях относительно функции $c(x, t)$ уравнением второго рода. В случае, когда $c(x, t)$ непрерывна при $t=x$, это будет уравнение Фредгольма второго рода. Если же $c(x, t)$ может претерпевать разрыв первого рода при $t=x$ (а именно этот случай особенно интересен и часто встречается в приложениях), ситуация оказывается сложнее и содержательнее: возникающее уравнение второго рода будет сингулярным. Теория таких уравнений хорошо известна, мы будем предполагать знакомство читателя с основами этой теории, прекрасное изложение которой можно найти в известных книгах Ф. Д. Гахова [1], Н. И. Мусхелишвили [1]. Основные результаты этой теории, нужные для данной главы, мы предварительно приводим в п. 1° § 1. В простейших случаях (см., например, § 30, п. 3°) обойдемся минимальными сведениями о сингулярных интегралах, приведенными в § 11.

Некоторые типы сингулярных уравнений (в частности, характеристические) решаются в замкнутой форме. Это обстоятельство для одного класса рассматриваемых уравнений первого рода позволит получить решение в явном виде — в замкнутой форме, т. е. в квадратурах. В самом же общем случае будут получены качественные результаты, характеризующие разрешимость уравнения:

нормальная разрешимость, формула для индекса (см. об этих понятиях в § 31, п. 1°).

Обратим внимание на одну деликатность, связанную с представлением оператора M в виде $M=I^{\alpha}N$, за которой будем следить при исследовании уравнений. Это представление, очевидно, предполагает выполнение тождества $M=I^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}M$, но, вообще говоря, $I^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}f\neq f$, см., например, (2.60). Обеспечить равенство $I^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}f=f$ можно, см. (2.59), взяв функции f, представимые дробным интегралом порядка α. Следовательно, нам нужно будет следить за тем, чтобы образ оператора M был вложен в образ оператора I^{α} дробного интегрирования.

Что же касается уравнений первого рода с ядром, имеющим степенно-логарифмическую особенность, то для них схема исследования та же, но вместо операторов дробного интегрирования будем использовать операторы $I^{\alpha,\,m}$, рассмотренные в § 21, а вместо дробного дифференцирования — обратные к $I^{\alpha,\,m}$ операторы, записываемые с помощью свертки с функцией Вольтерра.

§ 30. ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ

Начнем с рассмотрения уравнения, получившего название обобщенного интегрального уравнения Абеля. Более простым будет случай уравнения по всей прямой. На конечном отрезке существенно влияние границы (концов отрезка). Предварительно в п. 1° приведем для удобства читателей необходимые сведения о решении сингулярных интегральных уравнений.

1°. О характеристическом сингулярном уравнении. *Характеристическое сингулярное интегральное уравнение по всей прямой* имеет вид

$$a_1(x)\,\varphi(x)+\frac{a_2(x)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}=f(x). \tag{30.1}$$

Коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$ у нас будут вещественнозначными. Пусть

$$a_1(x),\ a_2(x)\in H^{\lambda}(\dot{R}^1),\ 0<\lambda\leqslant 1;\ a_1^2(x)+a_2^2(x)\neq 0,\ x\in\dot{R}^1. \tag{30.2}$$

Обозначим

$$G(x)=\frac{a_1(x)-ia_2(x)}{a_1(x)+ia_2(x)}=e^{i\theta(x)},\quad \theta(x)=\arg G(x). \tag{30.3}$$

Величина

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\arg G(x) \tag{30.4}$$

называется *индексом уравнения* (30.1). Уравнение (30.1) решается в квадратурах и его разрешимость характеризуется следующей теоремой.

Теорема 30.1. *Пусть выполнено (30.2). Если $\varkappa\geqslant 0$, то уравнение (30.1) безусловно разрешимо в $L_p(R^1)$ при любой правой части $f(x)\in L_p(R^1)$, $1<p<\infty$, и его общее решение дается формулой*

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\varkappa}c_k\frac{a_2(x)\,Z(x)}{(x+i)^k}+\frac{a_1(x)}{A(x)}f(x)-\frac{a_2(x)\,Z(x)}{A(x)\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t-x)}, \tag{30.5}$$

где c_k — *произвольные постоянные (сумма опускается в случае* $\varkappa = 0$), $A(x) = a_1^2(x) + a_2^2(x)$, *а*

$$Z(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa/2} \sqrt{A(x)}\, e^{\gamma(x)}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\varkappa} G(t)\right]}{t-x}\, dt.$$

Если $\varkappa < 0$, *для разрешимости уравнения (30.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, dx}{Z(x)(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|. \tag{30.6}$$

Отметим, что

$$Z(x), \quad \frac{1}{Z(x)} \in H^{\lambda}(\dot{R}^1), \tag{30.7}$$

если $a_1(x)$, $a_2(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1)$, $0 < \lambda < 1$.

Сингулярное уравнение вида

$$a_1(x)\psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(t)\psi(t)}{t-x}\, dt = g(x) \tag{30.8}$$

также решается в квадратурах, при $\varkappa \geqslant 0$ разрешимо безусловно, имея общее решение

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} \frac{c_k Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{a_1(x)}{A(x)}\, g(x) - \frac{Z(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(t)\, g(t)\, dt}{Z(t) A(t)(t-x)}, \tag{30.9}$$

где $A(x)$, $Z(x)$ — то же, что в (30.5). Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (30.8) при $\varkappa < 0$ состоит в том, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(x)\, g(x)}{Z(x)(x+i)^k}\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|.$$

Характеристическое сингулярное уравнение на конечном отрезке

$$a_1(x)\varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)\, dt}{t-x} = f(x), \quad a < x < b, \tag{30.10}$$

имеет более сложную природу. Пусть по-прежнему

$$a_1(x),\ a_2(x) \in H^{\lambda}([a, b]); \quad a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0, \quad x \in [a, b]. \tag{30.11}$$

Решения уравнения (30.10) можно разыскивать в классе $H^* = H^*(a, b)$ гельдеровских функций с интегрируемыми особенностями на концах отрезка (см. определение 13.1). Это связано с тем, что решения уравнения (30.10) имеют, вообще говоря, особенности в точках a, b. Иногда нужно найти решения, ограниченные на одном или обоих концах отрезка. Обозначим

$$H = H([a, b]) = \bigcup_{\mu > 0} H^{\mu}([a, b]) = H^* \cap C([a, b]), \tag{30.12}$$

$$H_a^* = H^* \cap C([a, b)), \quad H_b^* = H^* \cap C((a, b]) \tag{30.13}$$

и в качестве класса решений для уравнения (30.10) будем брать один из классов H^*, H_a^*, H_b^*, H.

Индекс уравнения (30.10) в отличие от случая всей прямой зависит от того, в каком классе разыскиваются решения. Пусть $G(x)=e^{i\theta(x)}$—функция (30.3). Выберем значение $\arg G(x)$ так, чтобы

$$0\leqslant\theta(a)<2\pi. \tag{30.14}$$

Пусть

$$n_a=\begin{cases}0, & \text{если ищется решение, ограниченное при } x\to a,\\ 1, & \text{если ищется решение, неограниченное при } x\to a,\end{cases}$$

и аналогично вводится n_b. Через X обозначаем одно из пространств H^*, H_a^*, H_b^*, H. Положим

$$\varkappa=\varkappa_X=\left[\frac{\theta(b)}{2\pi}\right]+n_a+n_b-1=$$

$$=\left[\frac{\theta(b)}{2\pi}\right]+\begin{cases}1 \text{ в случае класса } H^*,\\ 0 \text{ в случае класса } H_a^* \text{ или } H_b^*,\\ -1 \text{ в случае класса } H\end{cases} \tag{30.15}$$

и

$$\mu_a=1-n_a-\frac{\theta(a)}{2\pi},\quad \mu_b=\frac{\theta(b)}{2\pi}-\left[\frac{\theta(b)}{2\pi}\right]-n_b.$$

Здесь $[\theta(b)/2\pi]$ означает целую часть числа. Подчеркнем, что $\mu_a=\mu_a(X)$, $\mu_b=\mu_b(X)$ и что $-1<\mu_a<1$, $-1<\mu_b<1$.

Теорема 30.2. *Пусть выполнены условия (30.11), (30.14) и*

$$f(x)=\frac{f_*(x)}{(x-a)^{1-\nu_a}(b-x)^{1-\nu_b}},\quad f_*(x)\in H.$$

Уравнение (30.10) безусловно разрешимо в классе X, если $\nu_a>\mu_a$, $\nu_b>\mu_b$ и $\varkappa\geqslant 0$, и его общее решение дается формулой

$$\varphi(x)=\frac{a_2(x)Z_0(x)}{A(x)}(x-a)^{\mu_a}(b-x)^{\mu_b}P_{\varkappa-1}(x)+\frac{a_1(x)f(x)}{A(x)}-$$

$$-\frac{a_2(x)Z_0(x)}{\pi A(x)}\int_a^b\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\varkappa_a}\left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{\mu_b}\frac{f(t)\,dt}{Z_0(t)(t-x)}, \tag{30.16}$$

где $A(x)$—то же, что в (30.5), $P_{\varkappa-1}(x)$—многочлен степени $\varkappa-1$ с произвольными коэффициентами ($P_{\varkappa-1}(x)\equiv 0$ при $\varkappa=0$),

$$Z_0(x)=\exp\frac{1}{2\pi}\left[\int_a^b\frac{\theta(t)\,dt}{t-x}+\theta(a)\ln(x-a)-\theta(b)\ln(b-x)\right]\in H. \tag{30.16'}$$

Если $\varkappa<0$, то для разрешимости уравнения (30.10) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b\frac{f(x)(x-a)^{k-1}\,dx}{Z_0(x)(x-a)^{\mu_a}(b-x)^{\mu_b}}=0,\quad k=1,\ \ldots,\ |\varkappa|.$$

При выполнении этого условия единственное решение уравнения (30.10) дается формулой (30.16) с $P_{\varkappa-1}\equiv 0$.

2°. Обобщенное интегральное уравнение Абеля на оси. В этом пункте, используя лиувиллевское дробное интегродифференцирование $I^{\alpha}_{\pm}$, дадим эффективное (в замкнутой форме) решение уравнений первого рода

$$M^{\alpha}\varphi \equiv u(x)\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x)\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad (30.17)$$

$$\overline{M}^{\alpha}\psi \equiv \int_{-\infty}^{x}\frac{u(t)\,\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_{x}^{\infty}\frac{v(t)\,\psi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = g(x). \qquad (30.18)$$

Уравнение (30.17) будем называть *обобщенным уравнением Абеля с внешними коэффициентами*, а (30.18) — *обобщенным уравнением Абеля с внутренними коэффициентами*. Эти уравнения можно записать также в виде

$$M^{\alpha}\varphi \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1(x) + c_2(x)\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad (30.17')$$

$$\overline{M}^{\alpha}\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1(t) + c_2(t)\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\psi(t)\,dt = g(x), \qquad (30.18')$$

где

$$c_1(x) = \frac{u(x)+v(x)}{2}, \quad c_2(x) = \frac{u(x)-v(x)}{2}. \qquad (30.19)$$

Уравнения (30.17), (30.18) переписываются также очевидным образом в терминах операторов дробного интегрирования

$$M^{\alpha}\varphi \equiv u(x)\,\Gamma(\alpha)\,I^{\alpha}_{+}\varphi + v(x)\,\Gamma(\alpha)\,I^{\alpha}_{-}\varphi = f(x), \qquad (30.20)$$

$$\overline{M}^{\alpha}\psi \equiv \Gamma(\alpha)\,I^{\alpha}_{+}(u\psi) + \Gamma(\alpha)\,I^{\alpha}_{-}(v\psi) = g(x), \qquad (30.21)$$

где $I^{\alpha}_{\pm}$—операторы дробного интегрирования (5.2), (5.3).

Решение уравнений (30.17), (30.18) будем разыскивать в пространстве $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$. Принципиальный вопрос, как и для всякого интегрального уравнения первого рода, состоит в том, как описать допустимые правые части $f(x)$, $g(x)$ уравнений (30.17), (30.18) при заданном классе решений, в данном случае $L_p(R^1)$. Увидим, что области значений $M^{\alpha}(L_p)$, $\overline{M}^{\alpha}(L_p)$ совпадают с пространством $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов, подробно изученным нами в § 6 (или, может быть, отличаются от $I^{\alpha}(L_p)$ на конечномерное подпространство).

Относительно коэффициентов $u(x)$, $v(x)$ будем предполагать, что

$$u(x),\ v(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1), \quad \lambda > \alpha, \qquad (30.22)$$

в случае уравнения (30.17) и

$$u(x),\ v(x) \in \overset{0}{H}{}^{\lambda}_{(\infty)}(\dot{R}^1), \quad \lambda > 0, \qquad (30.23)$$

в случае уравнения (30.18). Здесь $\dot{R}^1$ — прямая, пополненная одной бесконечно удаленной точкой, $H^{\lambda}(\dot{R}^1)$ — гельдеровский класс функций, определяемый условием (1.6). Поясняя условие (30.22), отметим, что оно продиктовано требованием, чтобы умножение на $u(x)$, $v(x)$ не выводило из класса функций, представимых интегралом дробного порядка α (см. теорему 6.7).

Будем считать, что коэффициенты $u(x)$, $v(x)$ не обращаются в нуль одновременно:

$$u^2(x)+v^2(x)\neq 0, \quad x\in \dot{R}^1. \tag{30.24}$$

Ключевым моментом при решении уравнений (30.17), (30.18) является установленная в § 11 связь между операторами $I_{\pm}^{\alpha}$ дробного интегрирования и сингулярным оператором S.

А. Решение обобщенного уравнения Абеля с внешними коэффициентами. Применяя в уравнении (30.20) тождество (11.10), имеем

$$M^{\alpha}\varphi \equiv \Gamma(\alpha)\left[(u+v\cos\alpha\pi)\, I_{+}^{\alpha}\varphi + v\sin\alpha\pi S I_{+}^{\alpha}\varphi\right] = f,$$

т. е. получаем представление оператора M^{α} в виде композиции:

$$M^{\alpha}\varphi \equiv N_0 I_{+}^{\alpha}\varphi = f, \tag{30.25}$$

где

$$N_0\Phi = a_1\Phi + a_2 S\Phi = a_1(x)\Phi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(t)\,dt}{t-x}, \tag{30.26}$$

$$a_1(x) = \Gamma(\alpha)\left[u(x)+v(x)\cos\alpha\pi\right], \quad a_2(x) = \Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi\, v(x). \tag{30.27}$$

Из (30.25) уже ясно, что решения уравнения (30.15) находятся в замкнутой форме: нужно последовательно решить по известным формулам сингулярное уравнение

$$N_0\Phi = f \tag{30.28}$$

вида (30.1), а затем обратить уравнение Абеля. При решении этих уравнений в такой последовательности нам нужно обеспечить разрешимость уравнения Абеля $I_{+}^{\alpha}\varphi = \Phi$. Именно мы ищем решения $\varphi\in L_p$ и предполагаем, что $f\in I^{\alpha}(L_p)$, но при обращении уравнения Абеля $I_{+}^{\alpha}\varphi=\Phi$ мы не знаем, вообще говоря, что $\Phi\in I^{\alpha}(L_p)$. Поэтому нам нужно будет убедиться в том, что решения $\Phi(x)$ характеристического сингулярного уравнения (30.28) представимы дробным интегралом порядка α, если правая часть $f(x)$ обладает этим свойством. Это будет установлено в следующей ниже лемме 30.1.

Решим уравнение (30.28) по формуле (30.5) решения характеристического сингулярного уравнения. Фактически нужно в свете сказанного выше исследовать это уравнение в специальном пространстве $I^{\alpha}(L_p)$. Найдем все решения этого уравнения в пространстве L_q, $q=p/(1-\alpha p)$, с учетом того, что $I^{\alpha}(L_p)\subset L_q$ по теореме 5.3, и затем покажем, что такие решения принадлежат $I^{\alpha}(L_p)$, если $f\in I^{\alpha}(L_p)$. Из условий (30.24), (30.22) вытекает, что условия (30.2) выполнены. Индекс $\varkappa$ уравнения (30.28) (см. (30.4)) в обозначениях (30.19) имеет вид

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\arg\left[c_1(x)+ic_2(x)\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]. \tag{30.29}$$

Число $\varkappa$ принимает целые значения: $\varkappa=0, \pm1, \pm2, \ldots$

При $\varkappa\geqslant 0$ общее решение сингулярного уравнения (30.28) дается, согласно (30.5), формулой

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k\frac{v(x)Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{u(x)+v(x)\cos\alpha\pi}{\Gamma(\alpha)A(x)}f(x) - \frac{v(x)Z(x)}{A(x)}\,\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-x)}, \tag{30.30}$$

где c_k — произвольные (комплексные) постоянные,

$$A(x) = u^2(x) + 2u(x)v(x)\cos\alpha\pi + v^2(x), \tag{30.31}$$

а функция $Z(x)$ вычисляется по формуле

$$Z(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa/2} \sqrt{A(x)}\, e^{\gamma(x)},$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\varkappa} \frac{u(\tau)+e^{-i\alpha\pi}v(\tau)}{u(\tau)+e^{i\alpha\pi}v(\tau)}\right]}{\tau-x}\, d\tau. \tag{30.32}$$

В случае $\varkappa<0$ возникают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (30.26), состоящие, согласно (30.6), в том, что правая часть ортогональна конечному числу линейно независимых функций.

Лемма 30.1. *Пусть* $a_1(x)$, $a_2(x) \in H^\lambda(\dot{R}^1)$, $\lambda > \alpha$. *Если* $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, *то и все решения* $\Phi \in L_q$, $q = p/(1-\alpha p)$, *уравнения* $a_1\psi + a_2 S\psi = f$ *также принадлежат* $I^\alpha(L_p)$.

Доказательство. Так как $f \in L_q(R^1)$, то все решения из $L_q(R^1)$ даются формулой (30.5). Тогда с учетом (30.7) и в силу теоремы 6.7 и следствия 1 из теоремы 11.4 второе и третье слагаемые в (30.5) принадлежат $I^\alpha(L_p)$. Далее, в силу формулы (5.28) имеем $(x+i)^{-k} = I_+^\alpha \varphi_k$, где $\varphi_k(x) = \text{const}\,(x+i)^{-k-\alpha} \in L_p(R^1)$ при любом $p \geqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому $(x+i)^{-k} \in I^\alpha(L_p)$, а тогда и $Z(x)v(x)(x+i)^{-k} \in I^\alpha(L_p)$ в силу теоремы 6.7. Лемма доказана.

В силу леммы 30.1 решения $\varphi(x)$ исходного уравнения (30.17), (30.25) находятся по формуле

$$\varphi(x) = \mathbf{D}_+^\alpha \Phi, \quad \mathbf{D}_+^\alpha \Phi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\Phi(x) - \Phi(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \tag{30.33}$$

где $\Phi(x)$—функции (30.30). (Решение $\varphi \in L_p(R^1)$ уравнения Абеля находим в соответствии с теоремой 6.1.)

Итак, с учетом леммы 30.1 исходное уравнение (30.25) разрешимо при $\varkappa \geqslant 0$ для любой правой части $f \in I^\alpha(L_p)$. Это означает, что $I^\alpha(L_p) \subseteq M^\alpha(L_p)$ при $\varkappa \geqslant 0$. С другой стороны, непосредственно из (30.17) вытекает, что $M^\alpha(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$ (с учетом равенства (6.1) и теоремы 6.7). Поэтому

$$M^\alpha(L_p) = I^\alpha(L_p) \quad \text{при} \quad \varkappa \geqslant 0. \tag{30.34}$$

В случае же $\varkappa<0$ равенство (30.34) выполняется «с точностью до конечномерного подпространства», что обусловлено наличием конечного числа линейно независимых условий разрешимости (30.6).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 30.3. *Пусть выполнены условия (30.22), (30.24) и пусть* $\varkappa$ — *индекс (30.29). Уравнение (30.17) безусловно разрешимо в* $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, *при любой правой части* $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, *если* $\varkappa \geqslant 0$, *и его общее решение дается формулами (30.33), (30.30). Если же* $\varkappa<0$, *то уравнение (30.17) разрешимо для правых частей* $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, *удовлетворяющих условиям ортогональности*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{Z(x)(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|, \tag{30.35}$$

и только для них и при выполнении этих условий решение единственно и дается формулами (30.33), (30.30) при выборе $c_k = 0$.

Б. Решение обобщенного уравнения Абеля с внутренними коэффициентами. Применяя в уравнении (30.21) тождество (11.10), получаем с учетом коммутации (11.12):

$$\overline{M}^{\alpha}\varphi \equiv \Gamma(\alpha)\, I_{+}^{\alpha}\left[(u + v\cos\alpha\pi)\,\varphi + \sin\alpha\pi S(v\varphi)\right] = g,$$

т. е. получаем представление оператора $\overline{M}^{\alpha}$ в виде композиции

$$\overline{M}^{\alpha}\varphi \equiv I_{+}^{\alpha}\overline{N}_0\varphi = g, \tag{30.36}$$

где

$$\overline{N}_0\varphi = a_1\varphi + S(a_2\varphi) = a_1(x)\,\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_2(t)\,\varphi(t)\,dt}{t-x}, \tag{30.37}$$

$a_1(x)$, $a_2(x)$ — коэффициенты (30.27). Теперь нужно последовательно решить интегральное уравнение Абеля и сингулярное интегральное уравнение

$$\overline{N}_0\varphi = \mathbf{D}_{+}^{\alpha}g \tag{30.38}$$

вида (30.8). Здесь

$$\mathbf{D}_{+}^{\alpha}g = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t\infty}\frac{g(x)-g(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \in L_p$$

для $g \in I^{\alpha}(L_p)$ (воспользовались теоремой 6.1). Остается решить в пространстве L_p уравнение (30.38). В отличие от предыдущего случая внешних коэффициентов, когда вначале нужно решать сингулярное уравнение, а затем уравнение Абеля, здесь это делается в обратном порядке, и поэтому при решении сингулярного уравнения не возникает необходимости в том, чтобы решения были представимы дробным интегралом.

Решая уравнение (30.38) по формуле (30.9), получаем при $\varkappa \geqslant 0$ (где $\varkappa$—то же, что в (30.29)):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa}\frac{c_k Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{u(x) + iv(x)\cos\alpha\pi}{\Gamma(\alpha)\,A(x)}\,(\mathbf{D}_{+}^{\alpha}g)(x) -$$

$$-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)}\,Z(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)\,(\mathbf{D}_{+}^{\alpha}g)(t)}{Z(t)\,A(t)\,(t-x)}\,dt, \tag{30.39}$$

где $A(x)$, $Z(x)$ — те же, что в (30.31), (30.32).

В случае $\varkappa < 0$ возникают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (30.38):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(x)}{Z(x)}\,\frac{(\mathbf{D}_{+}^{\alpha}g)(x)}{(x+i)^k}\,dx = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|.$$

В силу формул дробного интегрирования по частям (5.16), (5.17) этим условиям ортогональности можно придать вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\psi_k(x)\,dx = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|, \tag{30.40}$$

где

$$\psi_k(x) = \int_{x}^{\infty}\frac{(t+i)^{-k}\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}\,Z(t)}.$$

Для обоснования применимости формулы (5.17) нужно показать, что $v(t)(t+i)^{-k}/Z(t) \in I^{\alpha}(L_p)$; это установлено при доказательстве леммы 30.1.

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 30.4. *Пусть выполнены условия (30.23), (30.24). Уравнение (30.18) безусловно разрешимо в* $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, *при любой правой части* $g(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, *если* $\varkappa \geqslant 0$, *и его общее решение дается формулой (30.39). Если же* $\varkappa<0$, *то уравнение (30.18) разрешимо для тех и только тех правых частей* $g(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, *которые удовлетворяют условиям ортогональности (30.40), и в этом случае единственное решение дается формулой (30.39) при выборе* $c_k=0$.

3°. **Обобщенное интегральное уравнение Абеля на отрезке.** Уравнения, исследованные в п. 2° на всей прямой, рассмотрим теперь в случае отрезка:

$$u(x)\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x)\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x),\quad a<x<b, \tag{30.41}$$

$$\int_a^x \frac{u(t)\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^b \frac{v(t)\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = g(x),\quad a<x<b, \tag{30.42}$$

где $0<\alpha<1$. Этот случай представляет особый интерес в связи с разнообразными приложениями, в которых возникают такие уравнения (см. об этом в литературных ссылках в § 34). В отличие от п. 1° здесь большое влияние на существование решений, их число и характер особенностей оказывает поведение коэффициентов на концах отрезка.

Дадим полное решение уравнений (30.41), (30.42) в замкнутой форме и выясним картину влияния концов отрезка на решения уравнений.

Решения уравнений (30.41), (30.42) будем разыскивать в классе H^* гельдеровских функций с интегрируемыми особенностями на концах (см. определение 13.1). Напомним, что он состоит из функций вида

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\varepsilon_2}}, \tag{30.43}$$

где $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $f^*(x)$ гельдерова на $[a, b]$. Относительно правых частей $f(x)$ и $g(x)$ предполагаем, что

$$f(x),\ g(x) \in H^*_{\alpha}, \tag{30.44}$$

где H^*_{α} — класс (13.53), (13.59). Основанием для этого служит теорема 13.14 о том, что дробное интегрирование порядка α устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами H^* и H^*_{α}.

Сравнивая постановку вопроса со случаем всей оси в п. 1°, отметим, что различие в классах решений связано с существом дела. Именно гельдеровские классы не совсем удобны на прямой из-за специфики, связанной с бесконечно удаленной точкой (хотя и могут быть использованы), а пространства L_p на отрезке $[a, b]$ оказываются менее удобными, чем H^*, из-за непростого характера особенностей у решений на концах отрезка.

Относительно коэффициентов $u(x)$, $v(x)$ предполагаем, что

$$u(x),\ v(x) \in H^{\lambda}([a, b]),\ \lambda>\alpha;\ u^2(x)+v^2(x) \neq 0,\ x \in [a, b]. \tag{30.45}$$

Как и в п. 1°, решение уравнений будет основано на связи дробного интегрирования с сингулярным интегралом. В данном случае будем использовать связи (11.16)—(11.19).

А. Решение обобщенного уравнения Абеля с внешними коэффициентами. Запишем уравнение (30.41) в терминах дробного интегрирования (2.17), (2.18):

$$u(x)\,I_{a+}^{\alpha}\varphi + v(x)\,I_{b-}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}f(x). \tag{30.46}$$

Можно «исключить» отсюда $I_{b-}^{\alpha}\varphi$ или $I_{a+}^{\alpha}\varphi$ с помощью связи (11.18) или (11.19). Оба способа равносильны и дают решения, отличающиеся по форме. Подставляя в (30.46) дробный интеграл $I_{b-}^{\alpha}\varphi$ из связи (11.18), получаем сингулярное уравнение

$$a_1(x)\,\Phi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi}\int_a^b \frac{\Phi(t)}{t-x}\,dt = \frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}}, \tag{30.47}$$

где обозначено

$$a_1(x) = u(x) + v(x)\cos\alpha\pi, \quad a_2(x) = v(x)\sin\alpha\pi \tag{30.48}$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{30.49}$$

Нужно, таким образом, решить характеристическое сингулярное уравнение (30.47) и затем обратить уравнение Абеля (30.49). При этом мы должны найти такие решения Φ уравнения (30.47), при которых уравнение (30.49) будет разрешимо.

Используем известные (Ф. Д. Гахов [1], Н. И. Мусхелишвили [1]) сведения из теории сингулярных уравнений на конечном отрезке. Пусть в соответствии с п. 1°

$$G(x) = \frac{a_1(x) - ia_2(x)}{a_1(x) + ia_2(x)} = \frac{u(x) + e^{-\alpha\pi i}v(x)}{u(x) + e^{\alpha\pi i}v(x)} = e^{i\theta(x)}, \tag{30.50}$$

где выбрано главное значение $\theta(x)$ условием

$$0 \leqslant \theta(a) < 2\pi, \tag{30.51}$$

и пусть $\varkappa$ — целое число (30.15).

Решаем уравнение (30.47) на основании теоремы 30.2 с учетом того, что правая часть в (30.47) принадлежит H^*, если $f \in H_{\alpha}^{*}$. Получим при $\varkappa \geqslant 0$:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{a_2(x)\,Z_0(x)}{A(x)}(x-a)^{\mu_a}(b-x)^{\alpha+\mu_b}P_{\varkappa-1}(x) +$$

$$+ \frac{a_1(x)}{A(x)}f(x) - \frac{a_2(x)\,Z_0(x)}{\pi A(x)}\int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\mu_a}\left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{\alpha+\mu_b}\frac{f(t)\,dt}{Z_0(t)(t-x)}, \tag{30.52}$$

где $A(x)$—функция (30.31), $Z_0(x)$—функция (30.16′),

$$\mu_a = 1 - n_a - \frac{\theta(a)}{2\pi}, \quad \mu_b = \frac{\theta(b)}{2\pi} - \left[\frac{\theta(b)}{2\pi}\right] - n_b \tag{30.53}$$

и $P_{\varkappa-1}(x)$ — многочлен степени $\varkappa-1$ с произвольными коэффициентами ($P_{\varkappa-1}(x) \equiv 0$ в случае $\varkappa = 0$).

Остается обратить (30.52) как уравнение Абеля относительно $\varphi(t)$.

Основной момент, подлежащий исследованию, состоит в том, чтобы выяснить, является ли правая часть в (30.52) такой, что это уравнение разрешимо. Ищем любые решения $\varphi \in H^*$, так что, согласно теореме 13.14, нужно выяснить, принадлежит ли правая часть классу H^*_α, если $f(x) \in H^*_\alpha$. Начнем со следующей леммы.

Лемма 30.2. *Весовой сингулярный оператор*

$$S_{\mu_a, \mu_b} f = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\mu_a} \left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{\mu_b} \frac{f(t)}{t-x}\, dt$$

сохраняет при $\alpha - 1 < \mu_a \leqslant \alpha$, $\alpha - 1 < \mu_b \leqslant \alpha$ *класс* H^*_α.

Доказательство. Пусть $H^\lambda_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — класс (13.51). В силу теоремы 11.1 оператор S_{μ_a, μ_b} оставляет инвариантным $H^\lambda_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, если

$$\mu_a < \lambda + \varepsilon_1 < 1 + \mu_a, \quad \mu_b < \lambda + \varepsilon_2 < 1 + \mu_b.$$

Так как H^*_α есть объединение (13.53) классов $H^\lambda_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то оператор S_{μ_a, μ_b} оставит инвариантным это объединение, если $\mu_a \leqslant \alpha < 1 + \mu_a$, $\mu_b \leqslant \alpha < 1 + \mu_b$, что совпадает с условиями леммы 30.2. Лемма доказана.

Обратимся к правой части в (30.52). В ней $f(t) \in H^*_\alpha$. В силу теоремы 11.1 $Z_0(x) \in H^\lambda_0([a, b])$. Так как умножение на функции из $H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, не выводит из H^*_α, то правая часть в (30.52) будет, согласно лемме 30.2, принадлежать H^*_α, если

$$\alpha - 1 < \mu_a \leqslant \alpha, \quad \alpha - 1 < \mu_b \leqslant \alpha. \tag{30.54}$$

Согласно (30.53), для выполнения второго из этих условий нужно взять

$$n_b = 1. \tag{30.55}$$

Удовлетворяя же первому условию в (30.54), получаем

$$\begin{aligned} n_a &= 1, \quad \text{если} \quad \theta(a)/2\pi < 1 - \alpha, \\ n_a &= 0, \quad \text{если} \quad \theta(a)/2\pi \geqslant 1 - \alpha, \end{aligned} \tag{30.56}$$

и тогда индекс (30.15) принимает вид

$$\varkappa = \left[\frac{\theta(b)}{2\pi}\right] + \begin{cases} 1, & \text{если } \theta(a) < (1-\alpha)\,2\pi, \\ 0, & \text{если } \theta(a) \geqslant (1-\alpha)\,2\pi \end{cases} \tag{30.57}$$

(напомним, что $0 \leqslant \theta(a) < 2\pi$).

Замечание 30.1. Равенство $\theta(a) = (1-\alpha)\,2\pi$ отвечает равенству $u(a) = 0$.

Итак, при выборе чисел n_a, n_b по правилу (30.55), (30.56) правая часть в (30.52) принадлежит H^*_α, и, следовательно, уравнение (30.52) разрешимо относительно φ согласно теореме 13.14. Решая это уравнение Абеля, получаем при $\varkappa \geqslant 0$ общее решение обобщенного уравнения (30.41) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k \varphi_k(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{u(t) + v(t) \cos \alpha\pi}{A(t)} \times \\ \times \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^\alpha} - \left(\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\right)^2 \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{v(t)\, Z_0(t)}{A(t)\,(x-t)^\alpha}\, dt \times \\ \times \int_a^b \left(\frac{t-a}{s-a}\right)^{\mu_a} \left(\frac{b-t}{b-s}\right)^{\mu_b + \alpha} \frac{f(s)\, ds}{Z_0(s)\,(s-t)}, \end{aligned} \tag{30.58}$$

где c_k — произвольные постоянные, $\varphi_k(x)$ — решения соответствующего однородного уравнения (отсутствующие при $\varkappa = 0$):

$$\varphi_k(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{v(t)\,Z_0(t)\,(t-a)^{\mu_a+k-1}\,(b-t)^{\mu_b+\alpha}}{(x-t)^{\alpha}}\,dt, \tag{30.59}$$

$Z_0(t)$, $A(t)$ — функции (30.16′), (30.31), а

$$\mu_a = \begin{cases} -\theta(a)/2\pi, & \text{если } 0 \leqslant \theta(a)/2\pi < 1-\alpha, \\ 1-\theta(a)/2\pi, & \text{если } 1-\alpha \leqslant \theta(a)/2\pi < 1, \end{cases} \qquad \mu_b = \theta(b)/2\pi - [\theta(b)/2\pi] - 1. \tag{30.60}$$

Формуле (30.58) после перестановки порядка интегрирования можно придать вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k\varphi_k(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^b \mathcal{K}(x,\,t)\,f(t)\,dt, \tag{30.61}$$

где

$$\mathcal{K}(x,\,t) = \frac{u(t)+v(t)\cos\alpha\pi}{A(t)}\,(x-t)_+^{-\alpha} + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi Z_0(t)} \times$$

$$\times \int_a^x \left(\frac{\xi-a}{t-a}\right)^{\mu_a}\left(\frac{b-\xi}{b-t}\right)^{\alpha+\mu_b}\frac{Z_0(\xi)\,v(\xi)\,d\xi}{A(\xi)\,(\xi-t)\,(x-\xi)^{\alpha}}.$$

Формуле (30.58) можно придать и другой вид, в котором не используются интегралы в смысле главного значения. В силу тождества (11.16) имеем

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^b \left(\frac{s-a}{t-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(s)\,ds}{s-t} = -\cos\alpha\pi\varphi(x) + \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha}\varphi.$$

Поменяв здесь α на $1-\alpha$, получаем представление сингулярного интеграла в виде

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(s)\,ds}{s-t} = \cos\alpha\pi\varphi(t) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \times$$

$$\times \frac{d}{dt}\int_a^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha}}\int_\xi^b \left(\frac{t-a}{\tau-a}\right)^{1-\alpha}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-\xi)^{\alpha}}. \tag{30.62}$$

Применяя это представление к сингулярному интегралу в последнем слагаемом формулы (30.58), приводим ее к виду

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k\varphi_k(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{u(t)\,f(t)}{A(t)\,(x-t)^{\alpha}}\,dt -$$

$$-\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\right)^2 \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{v(t)\,Z(t)\,dt}{A(t)\,(x-t)^{\alpha}}\,\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_\tau^b \frac{\varphi(s)\,ds}{Z(s)\,(s-\tau)^{\alpha}}, \tag{30.63}$$

где

$$Z(t) = (t-a)^{1-\alpha+\mu_a}(b-t)^{\alpha+\mu_b} Z_0(t).$$

Если же $\varkappa<0$, то, согласно теореме 30.2, для разрешимости сингулярного уравнения (30.47) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b \frac{f(x)(x-a)^{k-1}\,dx}{Z_0(x)(x-a)^{\mu_a}(b-x)^{\alpha+\mu_b}} = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|. \qquad (30.64)$$

При выполнении этих условий единственное решение уравнения (30.47) получается по той же формуле (30.52), если опустить в ней слагаемое с $P_{\varkappa-1}(x)$.

Сформулируем окончательный результат исследования в виде следующей теоремы.

Теорема 30.5. *Пусть выполнены условия (30.45), пусть*

$$\theta(x) = \arg \frac{u(x) + e^{-\alpha\pi i} v(x)}{u(x) + e^{\alpha\pi i} v(x)}, \quad 0 \leqslant \theta(a) < 2\pi,$$

и $\varkappa$ — число (30.57). Обобщенное уравнение Абеля (30.41) безусловно разрешимо в классе H^* для любой правой части $f(x) \in H^*_\alpha$, если $\varkappa \geqslant 0$ (в частности, если $\theta(b) \geqslant 0$). Его общее решение дается формулами (30.58), (30.63). Если $\varkappa<0$, для разрешимости уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (30.64), и тогда оно имеет единственное решение, предоставляемое формулами (30.58), (30.63) при выборе $c_k = 0$.

Б. Решение обобщенного уравнения Абеля с внутренними коэффициентами. Так же как и в случае всей прямой, уравнение с внутренними коэффициентами проще из-за того, что здесь сначала нужно решать уравнение Абеля, а затем сингулярное уравнение.

Уравнение (30.42), т. е. уравнение

$$I^\alpha_{a+}(u\varphi) + I^\alpha_{b-}(v\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g(x),$$

с помощью связи (11.16) приводится к виду

$$I^\alpha_{a+}[(u + v\cos\alpha\pi)\varphi + \sin\alpha\pi r_a^{-\alpha} S(r_a^\alpha v\varphi)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g(x).$$

Обращая уравнение Абеля относительно квадратной скобки, получаем сингулярное уравнение

$$a_1(x)\psi(x) + \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{a_2(t)\psi(t)}{t-x}\,dt = g_1(x), \qquad (30.65)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — то же, что в (30.48),

$$\psi(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x), \qquad (30.66)$$

$$g_1(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\mathscr{D}^\alpha_{a+}g)(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(x-a)^\alpha \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Остается решить подобно предыдущему сингулярное уравнение (30.65). Его разрешимость определяется тем же числом $\varkappa$, что и выше, формулы

решения известны, см. Ф. Д. Гахов [1], Н. И. Мусхелишвили [1]. Получение окончательного результата предоставляется читателю.

4°. **Случай постоянных коэффициентов.** Рассмотрим особо обобщенные уравнения Абеля (30.17), (30.18) и (30.41), (30.42) в случае, когда коэффициенты u и v постоянны.

А. Уравнения на всей прямой. Для уравнения (30.17) с постоянными коэффициентами u, v решение получается без привлечения общей теории сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами (но на том же пути, используя связь с сингулярным интегралом). Рассмотрим эти уравнения в форме (30.17′):

$$M^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt = f(x), \quad x \in R^1, \tag{30.67}$$

где $0 < \alpha < 1$, c_1 и c_2 постоянные, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (множитель $1/\Gamma(\alpha)$ взят для достижения симметрии с обратным оператором).

Заметим, что интеграл $M^{\alpha}\varphi$ есть феллеровский потенциал, рассмотренный в § 12. Следующая теорема дает явное выражение для обратного оператора $(M^{\alpha})^{-1}$. Подчеркнем, что интегралы в (30.68) понимаются как условно сходящиеся по норме пространства $L_p(R^1)$; они также сходятся условно почти всюду.

Теорема 30.6. *Уравнение (30.67) разрешимо в $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, для любой правой части $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$ и имеет единственное решение*

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{A\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\alpha}} [f(x) - f(t)]\, dt =$$

$$= \frac{\alpha}{A\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{2c_1 f(x) - (c_1 + c_2) f(x-t) - (c_1 - c_2) f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \tag{30.68}$$

где $A = 4[c_1^2 \cos^2(\alpha\pi/2) + c_2^2 \sin^2(\alpha\pi/2)]$.

Доказательство. Имеем

$$M^{\alpha}\varphi = uI_{+}^{\alpha}\varphi + vI_{-}^{\alpha}\varphi, \quad u = c_1 + c_2, \; v = c_1 - c_2$$

(см. (12.10)). Поэтому связь (11.10) дробного интегрирования $I_{\pm}^{\alpha}$ с сингулярным оператором дает

$$M^{\alpha}\varphi \equiv I_{+}^{\alpha} N\varphi = f, \quad N\varphi = a_1\varphi + a_2 S\varphi, \tag{30.69}$$

где $a_1 = u + v\cos\alpha\pi$, $a_2 = v\sin\alpha\pi$. В силу свойства $S^2\varphi \equiv -\varphi$, см. (11.2), сингулярный оператор N с постоянными коэффициентами обратим и

$$N^{-1}\varphi = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}\varphi - \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} S\varphi.$$

Обращая в (30.69) уравнение Абеля $I_{+}^{\alpha}\psi = f$ согласно теореме 6.1, а затем сингулярный оператор, получаем

$$\varphi = N^{-1}\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2}(a_1 \mathbf{D}_{+}^{\alpha} f - a_2 S\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f), \tag{30.70}$$

где $\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f$ — дробная производная Маршо (5.57), (5.60). Подставляя $S\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f$ из (11.11′) в (30.70), получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{A}[(c_1 + c_2)\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f + (c_1 - c_2)\mathbf{D}_{-}^{\alpha} f], \tag{30.71}$$

что и дает (30.68). Теорема доказана.

Отметим важные частные случаи уравнения (30.67):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,\psi(t)\,dt = g(x), \tag{30.72}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t) \in L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$; $f(x)$, $g(x) \in I^\alpha(L_p)$. Эти уравнения обращаются, согласно (30.68), по формулам

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{|x-t|^{1+\alpha}}\,dt, \tag{30.73}$$

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)-g(t)}{|x-t|^{1+\alpha}} \operatorname{sign}(x-t)\,dt. \tag{30.74}$$

Тем самым получено обращение потенциалов I^α, H^α, см. (12.1), (12.2), (12.1′), (12.2′). На достаточно хороших функциях $f(x)$, $g(x)$ (например, дифференцируемых и таких, что $|f(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-\nu}$, $\nu > 1-\alpha$) эти формулы могут быть записаны также в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{\alpha}} f(t)\,dt, \tag{30.75}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha}}. \tag{30.76}$$

Заметим еще, что простое достаточное условие на правую часть $f(x)$, обеспечивающее разрешимость уравнения (30.67), состоит в том, что

$$f(x) = \frac{f_*(x)}{(1+|x|)^{\nu}}, \quad f_*(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1), \ \lambda > \alpha, \ \nu > \alpha. \tag{30.77}$$

Согласно теореме 6.6, тогда $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$, и потому уравнение (30.67) разрешимо (в L_p). Для функций $f(x)$ вида (30.77) формулу обращения (30.68) можно записать также в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{A\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_2 + c_1 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{\alpha}} f(t)\,dt. \tag{30.78}$$

Б. Уравнение на отрезке. Для уравнения

$$u \int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v \int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad a < x < b, \tag{30.79}$$

где $0 < \alpha < 1$, u и v — постоянные, решение получим из общей формулы (30.58). Функция $\theta(x)$ (из (30.50)) теперь постоянна:

$$0(x) \equiv \theta = \arg \frac{u + e^{-\alpha\pi i} v}{u + e^{\alpha\pi i} v}, \quad 0 < \theta < 2\pi \tag{30.80}$$

(очевидно, $\theta = 0$ только тогда, когда $v = 0$).

Лемма 30.3. *Неравенства* $0 < \theta < (1-\alpha)2\pi$, $(1-\alpha)2\pi < \theta < 2\pi$ *равносильны неравенствам* $uv < 0$, $uv > 0$ *соответственно.*

Доказательство. Из (30.80) имеем $\frac{u}{v} = \frac{1-e^{(\theta+2\pi\alpha)i}}{e^{i\theta}-1} e^{-\alpha\pi i}$. Так как $1-e^{iz} = -2ie^{iz/2}\sin(z/2)$, то

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin([\theta-(1-\alpha)2\pi]/2)}{\sin(\theta/2)},$$

откуда и следует, что u, v — одного знака при $\theta > (1-\alpha)2\pi$ и разного при $\theta < (1-\alpha)2\pi$.

Из леммы 30.3 получаем, что индекс $\varkappa$ (см. (30.57)) уравнения (30.79) равен 1, если коэффициенты u, v разных знаков, и равен 0, если они одного знака.

Из формулы (30.58) следует, что обобщенное уравнение Абеля (30.79) с коэффициентами u, v разных знаков имеет в случае $f(x) \equiv 0$ нетривиальное решение:

$$\varphi_0(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{-\theta/2\pi}(b-t)^{\alpha-1+\theta/2\pi}dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\theta/2\pi}\left(s+\frac{b-x}{x-a}\right)^{\alpha-1+\theta/2\pi}ds =$$

$$= \frac{(b-a)(1-\alpha-\theta/2\pi)}{(x-a)^2}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\theta/2\pi}\left(s+\frac{b-x}{x-a}\right)^{\alpha-2+\theta/2\pi}ds.$$

Применяя формулу (13.18), получаем

$$\varphi_0(x) = \frac{\text{const}}{(x-a)^{\alpha+\theta/2\pi}(b-x)^{1-\theta/2\pi}}, \quad 0 < \theta < (1-\alpha)2\pi. \tag{30.81}$$

Учитывая формулы (30.63), (30.81), из теоремы 30.5 делаем окончательный вывод в виде следующей теоремы.

Теорема 30.7. *Уравнение (30.79) разрешимо в классе H^* при любой правой части $f(x) \in H^*_\alpha$. В случае $uv > 0$ решение единственно, а в случае $uv < 0$ общее решение содержит одну произвольную постоянную. Все решения даются формулой*

$$\varphi(x) = \frac{c}{(x-a)^{\alpha+\theta/2\pi}(b-x)^{1-\theta/2\pi}} + \frac{u}{A}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} -$$

$$- \frac{v}{A}\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\right)^2 \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{Z(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_\tau^b \frac{f(s)\,ds}{Z(s)(s-\tau)^\alpha}, \tag{30.82}$$

где $c = 0$ в случае $uv > 0$ и c произвольна в случае $uv < 0$, $A = u^2 + 2uv\cos\alpha\pi + v^2$; $Z(t) = (t-a)^{2-\alpha-\theta/2\pi}(b-t)^{\alpha-1+\theta/2\pi}$, если $uv > 0$, и $Z(t) = [(t-a)/(b-t)]^{1-\alpha-\theta/2\pi}$, если $uv < 0$.

Рассмотрим важные частные случаи. *Уравнение Карлемана*

$$\int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x), \tag{30.83}$$

привлекавшее внимание многих авторов (см. литературные ссылки в § 34, п. 1°), содержится в (30.79) при $u=v=1$. Формула (30.82) дает его единственное решение при выборе $c=0$ и

$$A = 4\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}, \quad Z(t) = \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\alpha/2}.$$

Нетрудно вычислить, что уравнение (30.83) с правыми частями

$$f(x) = (x-a)^n, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ и } f(x) = [(x-a)(b-x)]^{(\alpha-1)/2}$$

имеет соответственно решения:

$$\varphi(x) = \frac{n!}{\pi}(b-a)^n \sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)}\,\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n-\alpha/2}{n-k}\left(\frac{b-x}{a-b}\right)^k}{[(x-a)(b-x)]^{\alpha/2}},$$

$$\varphi(x) = \frac{(b-a)^\alpha}{2B\left(\alpha, \frac{1-\alpha}{2}\right)}[(x-a)(b-x)]^{-(1+\alpha)/2}.$$

Для уравнения Карлемана (30.83) можно получить и другую формулу обращения:

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha\pi/2)}{2\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^b \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\alpha} f(t)\,dt +$$

$$+ \frac{\sin^2(\alpha\pi/2)}{2\pi^2}\,\frac{d}{dx}\int_a^b M(x, t)[(t-a)(b-t)]^{-\alpha/2} f(t)\,dt, \qquad (30.84)$$

где

$$M(x, t) = \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} - \sqrt{(y-a)(b-y)}}{t-y} \times$$

$$\times \frac{dy}{|x-y|^\alpha [(y-a)(b-y)]^{(1-\alpha)/2}}$$

(ср. с формулой обращения (30.75)). Докажем эту формулу. Равенство (30.52) применительно к рассматриваемому частному случаю (30.83) имеет вид

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2} \times$$

$$\times \int_a^b \left[\frac{(x-a)(b-x)}{(t-a)(b-t)}\right]^{\alpha/2} \frac{f(t)\,dt}{t-x}. \qquad (30.85)$$

С другой стороны, так как $\varphi(t)$ — решение уравнения (30.83), то в силу (30.85)

$$\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2} \times$$

$$\times \int_a^b \left[\frac{(x-a)(b-x)}{(t-a)(b-t)}\right]^{\alpha/2} \frac{f(t)\,dt}{t-x}. \qquad (30.86)$$

Обращая равенства (30.85), (30.86) как уравнение Абеля относительно $\varphi(t)$ и складывая, получаем

$$2\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\frac{d}{dx}\left(\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}B^{1-\alpha}f-\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}A^{1-\alpha}S_{-\alpha/2}f\right),$$

где для краткости использованы обозначения (12.44), (12.45), (12.48). Второе слагаемое приводится к виду

$$A^{1-\alpha}S_{-\alpha/2}f=A^{1-\alpha}S_{(1-\alpha)/2}f+\frac{1}{2\pi\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\times$$

$$\times\int_a^b\frac{dt}{|t-x|^\alpha}\int_a^b\left(\left[\frac{r(t)}{r(\tau)}\right]^{\alpha/2}-\left[\frac{r(\tau)}{r(t)}\right]^{(1-\alpha)/2}\right)\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-t},$$

где $r(t)=(t-a)(b-t)$. Здесь к первому слагаемому применяем связь (12.47), после чего (30.84) получается простыми преобразованиями.

Для другого частного случая

$$\int_a^b\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\psi(t)\,dt=g(x),\tag{30.87}$$

в отличие от (30.83) однородное уравнение имеет нетривиальное решение, и из формулы (30.82) получаем общее решение уравнения (30.87):

$$\psi(x)=\frac{c}{(x-a)^{(1+\alpha)/2}(b-x)^{(1+\alpha)/2}}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}+\frac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_a^x\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{(1-\alpha)/2}\frac{dt}{(x-t)^\alpha}\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\int_a^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_\tau^b\left(\frac{b-s}{s-a}\right)^{(1-\alpha)/2}\frac{g(s)\,ds}{(s-\tau)^\alpha}.\tag{30.88}$$

Справедлива также формула

$$\psi(x)=\frac{c}{(x-a)^{(1+\alpha)/2}(b-x)^{(1+\alpha)/2}}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\frac{d}{dx}\int_a^b\frac{g(t)\,dt}{|x-t|^\alpha}-$$

$$-\frac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int_a^b N(x,\,t)(t-a)^{(1-\alpha)/2}(b-t)^{(1-\alpha)/2}g(t)\,dt,\tag{30.89}$$

где

$$N(x,\,t)=\int_a^b\frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}-\sqrt{(y-a)(b-y)}}{t-y}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{sign}(x-y)\,dy}{|x-y|^\alpha[(y-a)\,(b-y)]^{1-\alpha/2}}.$$

Она получается подобно (30.84).

§ 31. НЕТЕРОВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА СО СТЕПЕННЫМИ ЯДРАМИ

В этом параграфе для уравнений первого рода

$$M\varphi \equiv \int_{\Omega} \frac{c(x,\ t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt = f(x),\ x\in\Omega,\ \Omega=[a,\ b],\ -\infty\leqslant a<b\leqslant\infty, \tag{31.1}$$

частными случаями которых являются обобщенные уравнения Абеля, рассмотренные в § 30, будет исследован вопрос о нормальной разрешимости (нетеровости) в соответствующей корректной постановке. При этом уравнение (31.1) будет сведено к эквивалентному интегральному уравнению второго рода, являющемуся, вообще говоря, сингулярным. Предварительно приведем необходимые сведения из теории нормально разрешимых (нетеровых) операторов и из теории сингулярных интегральных уравнений. Затем будет рассмотрен случай всей прямой: $\Omega=R^1$, а в заключение — случай конечного отрезка $\Omega=[a,\ b]$, $-\infty<a<b<\infty$.

1°. Сведения о нетеровых операторах. Приведем здесь минимальные сведения о нетеровых операторах, необходимые для изложения вопросов разрешимости уравнений (31.1) в пп. 2 и 3°. Формулируемые ниже теоремы о нетеровости операторов в абстрактных банаховых пространствах известны как теоремы С. М. Никольского — Ф. В. Аткинсона — И. Ц. Гохберга. Более подробно ознакомиться с теорией нетеровых операторов можно по книгам И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4], С. Г. Крейна [1], см. также литературные ссылки в § 34, п. 1°.

Пусть X, Y — банаховы пространства. Кольцо всех линейных ограниченных операторов из X в Y будем обозначать через $[X\to Y]$.

Определение 31.1. *Ядром оператора $A\in[X\to Y]$ называется множество всех нулей оператора A в пространстве X:*

$$Z_X(A)=\{\varphi: A\varphi=0,\ \varphi\in X\}.$$

Для сопряженного оператора $A^*\in[Y^*\to X^*]$ обозначим аналогично

$$Z_{Y^*}(A^*)=\{\psi: A^*\psi=0,\ \psi\in Y^*\}.$$

Это подпространство в Y^* называется *коядром оператора A.*

Определение 31.2. *Оператор $A\in[X\to Y]$ называется нормально разрешимым в X, если его область значений $A(X)$ состоит из элементов, ортогональных коядру:* $f=A\varphi$, $\varphi\in X$, $\Longleftrightarrow(f,\ \psi)=0$, $\psi\in Z_{Y^*}(A^*)$.

Теорема 31.1. *Нормальная разрешимость оператора $A\in[X\to Y]$ равносильна условию замкнутости образа $A(X)$ в пространстве Y.*

Введем еще обозначение для размерностей ядра и коядра:

$$n=n_A=\dim Z_X(A),\quad m=m_A=\dim Z_{Y^*}(A^*).$$

Число m_A называют *дефектным числом оператора A.* Иногда оба числа m_A, n_A называют его *дефектными числами.*

Определение 31.3. *Оператор $A\in[X\to Y]$ называется оператором Нетера или нетеровым оператором, если он нормально разрешим в X и его ядро и коядро конечномерны:* $n<\infty$, $m<\infty$.

Упорядоченная пара чисел $(n,\ m)$ называется *d-характеристикой оператора A.* Разность $\varkappa=n-m$ называется *индексом оператора.* Будем использовать обозначение $\varkappa=\varkappa_{X\to Y}(A)$ и писать $\varkappa_X(A)$ в случае $X=Y$. Известно, что индекс оператора устойчив по отношению к малым возмущениям.

Для операторов Нетера справедливы следующие утверждения.

Теорема 31.2. *Если* $A \in [X \to Y]$ *и* $B \in [Y \to Z]$*—операторы Нетера, то и оператор* $BA \in [X \to Z]$ *нетеров, причем*

$$\varkappa_{X \to Z}(BA) = \varkappa_{X \to Y}(A) + \varkappa_{Y \to Z}(B).$$

Теорема 31.3. *Если оператор* $A \in [X \to Y]$ *нетеров и* T *— вполне непрерывный оператор из* X *в* Y*, то и оператор* $A + T$ *также нетеров и* $\varkappa_{X \to Y}(A + T) = \varkappa_{X \to Y}(A)$.

Теорема 31.4. *Для того чтобы оператор* $A \in [X \to Y]$ *был оператором Нетера, необходимо и достаточно, чтобы он имел левый и правый регуляризаторы* $R_л \in [Y \to X]$ *и* $R_п \in [Y \to X]$: $R_л A = E + T_1$, $AR_п = E + T_2$, *где* T_1 *и* T_2 *— операторы, вполне непрерывные в* X *и* Y *соответственно.*

Классическими примерами нетеровых операторов служат сингулярные интегральные операторы (30.1), (30.8), (30.10). Приведем нужные нам сведения о нетеровости этих операторов.

Теорема 31.5. *Сингулярный интегральный оператор*

$$N_0\varphi \equiv a_1(x)\varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - x} = f(x), \tag{31.2}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x) \in C(\dot{R}^1)$ *и вещественнозначны, нетеров в пространстве* $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда* $a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0$, $x \in \dot{R}^1$. *Оператор* N_0 *имеет d-характеристику* $(\varkappa, 0)$ *при* $\varkappa \geqslant 0$ *и* $(0, |\varkappa|)$ *при* $\varkappa \leqslant 0$, *где* $\varkappa$ *— число (30.4).*

Аналогичный оператор на конечном отрезке запишем с «регулярной» частью:

$$N\varphi \equiv a_1(x)\varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{t - x} + \int_a^b \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)\,dt. \tag{31.3}$$

В случае отрезка условия нормальной разрешимости и формула для вычисления индекса $\varkappa$ уже зависят от класса решений. Приведем два известных утверждения. Первое будет относиться к «классической» постановке вопроса о нормальной разрешимости, когда рассматривается ортогональность решениям однородного *транспонированного уравнения*

$$a_1(x)\psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{a_2(t)\psi(t)}{t - x}\,dt + \int_a^b \mathcal{K}(t, x)\psi(t)\,dt = 0 \tag{31.4}$$

(вместо сопряженного уравнения $N^*\psi = 0$) и решения уравнений (31.3), (31.4) разыскиваются в классах гельдеровских в (a, b) функций с нефиксированными порядками интегрируемых особенностей на концах отрезка. Второе утверждение будет относиться к случаю, когда нетеровость понимается в смысле определения 31.3 и оператор (31.3) рассматривается в пространстве $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$.

Предполагаем, что коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$ в (31.3), (31.4) вещественнозначны и непрерывны на $[a, b]$. Относительно ядра $\mathcal{K}(x, t)$ предполагаем, что

$$\mathcal{K}(x, t) = \frac{A(x, t) + B(x, t)\operatorname{sign}(x - t)}{|x - t|^{1-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

где $A(x, t)$, $B(x, t)$ — функции, гельдеровские по обеим переменным.

Пусть H^*, H_a^*, H_b^*, H — классы функций, рассматривавшиеся раньше (см. §30, п. 1°). Ниже $G(x)$ означает, как и в §30, п. 1°, функцию

$$G(x) = \frac{a_1(x) - ia_2(x)}{a_1(x) + ia_2(x)}.$$

Так как функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ вещественнозначны, то $G(x)=e^{i\theta(x)}$. Будем считать значение $\theta(x)=\arg G(x)$ выбранным так, что $0\leqslant\theta(a)<2\pi$, а в остальных точках $x\in(a, b)$ значение $\theta(x)$ продолжено по непрерывности.

Теорема 31.6. *Пусть* $a_1(x)$, $a_2(x)\in H$, $a_1^2(x)+a_2^2(x)\neq 0$, $x\in[a, b]$ *и* $\theta(a)\neq 0$, $\theta(b)\neq 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *Для того чтобы уравнение (31.3) с правой частью* $f(x)$, *удовлетворяющей условиям теоремы 30.2, было разрешимо в классах* H^*, H_a^*, H_b^*, H, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_a^b f(x)\,\psi_j(x)\,dx=0, \tag{31.5}$$

где $\{\psi_j\}$ — *полная система решений однородного уравнения (31.4) из класса* H, H_b^*, H_a^*, H^* *соответственно. Разность чисел линейно независимых решений однородного уравнения (31.3) и условий разрешимости (31.5) равна числу* $\varkappa$, *вычисляемому по формуле (30.15).*

Теорема 31.7. *Пусть* $a_1(x)$, $a_2(x)\in C([a, b])$. *Оператор (31.3) нетеров в пространстве* $L_p(\rho)$, $1<p<\infty$, $\rho(x)=(x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$, $-1<\mu<p-1$, $-1<\nu<p-1$, *тогда и только тогда, когда*

1) $a_1^2(x)+a_2^2(x)\neq 0$, $a\leqslant x\leqslant b$;

2) $\theta(a)\neq 2\pi\dfrac{1+\mu}{p}$, $\theta(b)\neq -2\pi\dfrac{1+\nu}{p}\pmod{2\pi}$.

При выполнении этих условий индекс оператора (31.3) вычисляется по формуле

$$\varkappa=\left[\frac{\theta(b)}{2\pi}+\frac{1+\nu}{p}\right]+\left[\frac{1+\mu}{p}-\frac{\theta(a)}{2\pi}\right]$$

(ср. с (30.15)). *В случае* $\mathcal{K}(x, t)\equiv 0$ *оператор (31.3) имеет d-характеристику* $(\varkappa, 0)$ *при* $\varkappa\geqslant 0$ *и* $(0, |\varkappa|)$ *при* $\varkappa\leqslant 0$.

В следующих пунктах рассмотрим вопрос о нетеровости оператора (31.1). Уравнение (31.1) как уравнение первого рода не является, вообще говоря, нормально разрешимым, так что его нетеровость требует соответствующей постановки. Оператор M не будет, вообще говоря, оператором Нетера, действующим из какого-нибудь пространства X в то же пространство X. В случае $X=L_p(R^1)$ он не является даже ограниченным из X в X (см. теорему Харди—Литтлвуда 5.3). Если же $\operatorname{mes}\Omega<\infty$, то оператор M ограничен из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, однако M не может быть нетеровым оператором, действующим из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Действительно, если $M\in[L_p(\Omega)\to L_p(\Omega)]$ нетеров, то в силу теоремы 31.4 существует ограниченный оператор R, такой, что $RM=E+T$, где T вполне непрерывен. Так как M является вполне непрерывным в $X=L_p(\Omega)$, $\operatorname{mes}\Omega<\infty$, при достаточно широких предположениях о $c(x, t)$, то отсюда следует, что единичный оператор $E=RM-T$ вполне непрерывен в X, что невозможно.

Возникает естественный вопрос: можно ли для оператора M, не являющегося нетеровым из X в X, построить такое пространство Y, чтобы оператор M был оператором Нетера, если его рассматривать действующим из X в Y? (Построение такого пространства в целях «нетеризации» оператора называют иногда *нормализацией оператора.*)

В силу теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 оператор M с ограниченной функцией $c(x, t)$ действует ограниченно из $L_p(\Omega)$, $1<p<1/\alpha$, в $L_q(\Omega)$, $q=p/(1-\alpha p)$. Однако он не является оператором Нетера из L_p в L_q. Докажем это, например, для $c(x, t)\equiv 1$. В соответствии с теоремой 31.1 покажем, что образ $M(L_p)$ не замкнут в L_q. При $c(x, t)\equiv 1$, согласно (30.34), имеем $M(L_p)=I^{\alpha}(L_p)\subset L_q$, где $I^{\alpha}(L_p)$ — пространство дробных интегралов. Напомним, что $I^{\alpha}(L_p)\neq L_q$ (см. (6.5)). Так как бесконечно

дифференцируемые финитные функции принадлежат $I^\alpha(L_p)$ (например, согласно теореме 6.5), то $I^\alpha(L_p)$ плотно в L_q и, следовательно, не замкнуто в L_q.

В общем случае при весьма широких предположениях относительно $c(x, t)$ будет показано, что $M(L_p)\subseteq I^\alpha(L_p)$, и окажется, что образ $M(L_p)$ будет замкнут в $I^\alpha(L_p)$. Другими словами, будем говорить в дальнейшем о нетеровости M как оператора из L_p в $I^\alpha(L_p)$ (естественно, $I^\alpha(L_p)$ рассматривается как банахово пространство относительно нормы (6.17)).

2°. Уравнения на прямой. Рассматриваемые уравнения имеют вид

$$(M\varphi)(x)\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt = f(x),\ 0<\alpha<1. \tag{31.6}$$

Допускается ситуация, когда $c(x, t)$ может быть разрывной на диагонали $t=x$:

$$c(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t<x, \\ v(x, t), & t>x, \end{cases} \tag{31.7}$$

так что

$$(M\varphi)(x)\equiv \int_{-\infty}^{x} \frac{u(x, t)\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_{x}^{\infty} \frac{v(x, t)\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x). \tag{31.6'}$$

В случае «склеивания» на диагонали ($u(x, x-0)=v(x, x+0)$) оператор M будет всегда фредгольмова типа (т. е. будет иметь нулевой индекс) в допускаемой для него корректной постановке нетеровости. Он будет также фредгольмова типа, если, например, $v(x, t)\equiv 0$.

Определим класс допускаемых функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ в (31.6). Пусть R^2_+ — полуплоскость $\{(t, x): t<x\}$, а $R^2_- = \{(t, x): t>x\}$.

Определение 31.4. *Заданная в полуплоскости $\overline{R}^2_+$ функция $u(x, t)$ принадлежит классу $H^\lambda_x(\overline{R}^2_+)$, если 1) $u(x, x)\in C(\dot{R}^1)$; 2) $u(x, t)$ гельдерова по x порядка λ (равномерно по t):*

$$|u(x_1, t)-u(x_2, t)|\leqslant A\frac{|x_1-x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda},\ (x_1, t),\ (x_2, t)\in\overline{R}^2_+. \tag{31.8}$$

Аналогично определяется класс $H^\lambda_x(\overline{R}^2_-)$. Запись $c(x, t)\in H^\lambda_x(\overline{R}^2_\pm)$ будет означать, что $u(x, t)\in H^\lambda_x(\overline{R}^2_+)$, $v(x, t)\in H^\lambda_x(\overline{R}^2_-)$.

Заметим, что функции классов $H^\lambda_x(\overline{R}^2_\pm)$ ограничены, но не обязательно непрерывны по t. Так, например, $u(x, t)=x(1+x^2)^{-1}\operatorname{sign} t\in H^\lambda_x(\overline{R}^2_+)$, $\lambda=1$.

А. Вложение $M(L_p)\subset I^\alpha(L_p)$, $1<p<1/\alpha$. Оператор M представляем в виде

$$M\varphi = \int_{-\infty}^{x} \frac{u(t, t)\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt + \int_{x}^{\infty} \frac{v(t, t)\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt + \mathrm{K}_u^+\varphi + \mathrm{K}_v^-\varphi, \tag{31.9}$$

где

$$\mathrm{K}_u^+\varphi = \int_{-\infty}^{x} \frac{u(x, t)-u(t, t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt,\quad \mathrm{K}_v^-\varphi = \int_{x}^{\infty} \frac{v(x, t)-v(t, t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt. \tag{31.10}$$

С помощью связи (11.10) получаем

$$M\varphi = \Gamma(\alpha)I^\alpha_+ N_0\varphi + \mathrm{K}_u^+\varphi + \mathrm{K}_v^-\varphi, \tag{31.11}$$

где

$$N_0\varphi=[u(x,\ x)+v(x,\ x)\cos\alpha\pi]\,\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-x}. \quad (31.12)$$

Теорема 31.8. *Если* $c(x,\ t)\in H_x^{\lambda}(\overline{R}^2_{\pm})$, *где* $\lambda>\alpha$, *то* $M(L_p)\subseteq l^{\alpha}(L_p)$, *причем*

$$\|M^{\alpha}\varphi\|_{l^{\alpha}(L_p)}\leqslant c\,\|\varphi\|_p,\quad 1<p<1/\alpha. \quad (31.13)$$

Доказательство. В силу (31.11) и ограниченности в $L_p(R^1)$ сингулярного оператора (см. теорему 11.2) достаточно доказать утверждение теоремы для $\mathrm{K}_u^{+}\varphi$ и $\mathrm{K}_v^{-}\varphi$. Применим теорему 6.2. Так как $u(x,\ t)$ ограничена, то $\mathrm{K}_u^{+}\varphi\in L_q$ в силу теоремы Харди—Литтлвуда. Для проверки условия (6.19) воспользуемся равенством

$$(\mathrm{K}_u^{+}\varphi)(x)-(\mathrm{K}_u^{+}\varphi)(x-t)=\int\limits_0^{\infty}\frac{u(x,\ x-t-s)-u(x-t,\ x-t-s)}{s^{1-\alpha}}\,\varphi(x-$$

$$-t-s)\,ds+t^{\alpha}\int\limits_0^{\infty}[u(x,\ x-ts)-u(x-ts,\ x-ts)]\,\mathrm{k}(s)\,\varphi(x-ts)\,ds, \quad (31.14)$$

где $\mathrm{k}(s)$ — функция (6.10). Докажем (31.14). Для $f(x)=\mathrm{K}_u^{+}\varphi$ имеем $f(x)-$

$$-f(x-t)=\int\limits_0^{\infty}[u(x,\ x-s)-u(x-s,\ x-s)]\,s^{\alpha-1}\varphi(x-s)\,ds$$ и тогда

$$f(x)-f(x-t)=t^{\alpha}\int\limits_{-1}^{\infty}[u(x,\ x-t-st)-u(x-t-st,\ x-t-st)]\times$$

$$\times(s+1)^{\alpha-1}\varphi(x-t-st)\,ds-t^{\alpha}\int\limits_0^{\infty}[u(x-t,\ x-t-st)-$$

$$-u(x-t-st,\ x-t-st)]\,s^{\alpha-1}\varphi(x-t-st)\,ds=\int\limits_0^{\infty}[u(x,\ x-t-s)-$$

$$-u(x-t,\ x-t-s)]\,s^{\alpha-1}\varphi(x-t-s)\,ds+t^{\alpha}\int\limits_{-1}^{\infty}\mathrm{k}(s+1)\times$$

$$\times[u(x,\ x-t-ts)-u(x-t-ts,\ x-t-ts)]\,\varphi(x-t-ts)\,ds,$$

что и дает равенство (31.14). В силу этого равенства

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}\mathrm{K}_u^{+}\varphi=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int\limits_0^{\infty}\frac{u(x,\ x-t-s)-u(x-t,\ x-t-s)}{s^{1-\alpha}}\times$$

$$\times\,\varphi(x-t-s)\,ds+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dt}{t}\int\limits_0^{\infty}[u(x,\ x-ts)-$$

$$-u(x-ts,\ x-ts)]\,\mathrm{k}(s)\,\varphi(x-ts)\,ds=A_{\varepsilon}(x)+B_{\varepsilon}(x). \quad (31.15)$$

Согласно (31.8),

$$|A_{\varepsilon}(x)|\leqslant\frac{c}{(1+|x|)^{\lambda}}\int\limits_0^{\infty}\frac{g(x-t)\,dt}{t^{1+\alpha-\lambda}(1+|x-t|)^{\lambda}}, \quad (31.16)$$

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{|\varphi(x-s)|\,ds}{s^{1-\alpha}}. \tag{31.16}$$

В силу теоремы 5.3 $g(x)\in L_q(R^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$, так что

$$\|A_\varepsilon\|_p \leqslant c\int_0^\infty t^{\lambda-\alpha-1}dt\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{-\lambda p}(1+|x-t|)^{-\lambda p}|g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|g\|_q\int_0^\infty t^{\lambda-\alpha-1}dt\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{-\lambda/\alpha}(1+|x-t|)^{-\lambda/\alpha}\,dx\Big)^{\alpha}. \tag{31.17}$$

Согласно (6.32), внутренний интеграл оценивается величиной $c(1+t)^{-\lambda/\alpha}$, так что $\|A_\varepsilon\|_p\leqslant c\,\|\varphi\|_p\int_0^\infty (1+t)^{-\lambda}\,t^{\lambda-\alpha-1}\,dt=c_1\,\|\varphi\|_p$.

Для $B_\varepsilon(x)$ имеем

$$B_\varepsilon(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \mathrm{k}(s)\,ds\int_{\varepsilon s}^{\infty}\frac{u(x,\ x-t)-u(x-t,\ x-t)}{t}\varphi(x-t)\,dt$$

или в силу (6.11)

$$B_\varepsilon(x)=-\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \mathrm{k}(s)\,ds\int_0^{\varepsilon s}\frac{u(x,\ x-t)-u(x-t,\ x-t)}{t}\varphi(x-t)dt=$$

$$=-\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\varepsilon\frac{dt}{t}\int_0^\infty \mathrm{k}(s)\,[u(x,\ x-ts)-u(x-ts,\ x-ts)]\,\varphi(x-ts)\,ds.$$

Отсюда

$$|B_\varepsilon(x)|\leqslant c\int_0^\varepsilon\frac{dt}{t^{1-\lambda}}\int_0^\infty\frac{s^\lambda|\mathrm{k}(s)\,\varphi(x-ts)|\,ds}{(1+|x|)^\lambda(1+|x-ts|)^\lambda},$$

и тогда (применяя неравенство Минковского) получаем

$$\|B_\varepsilon\|_p\leqslant c\int_0^\varepsilon\frac{dt}{t^{1-\lambda}}\int_0^\infty s^\lambda|\mathrm{k}(s)|\,ds\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(x)|^p\,dx}{(1+|x|)^{\lambda p}(1+|x+ts|)^{\lambda p}}\right\}^{1/p}. \tag{31.18}$$

Справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi_h(x)|\,dx}{(1+|x|)^a(1+|x-h|)^a}\leqslant\frac{1+2^a}{(1+|h|)^a}\,\|\psi\|_1,\quad a>0. \tag{31.19}$$

Действительно, пусть $h>0$ (случай $h<0$ сводится к предыдущему заменой $x=-y$), тогда, обозначив левую часть в (31.19) через $J(h)$, имеем

$$J(h)\leqslant\int_0^\infty\frac{|\psi(-x)|\,dx}{(1+x)^a(1+x+h)^a}+\left(\int_0^{h/2}+\int_{h/2}^{\infty}\right)\frac{|\psi(x)|\,dx}{(1+x)^a(1+|x-h|)^a}\leqslant$$

$$\leqslant(1+h)^{-a}\,\|\psi\|_1+\int_0^{h/2}(1+h-x)^{-a}\,|\psi(x)|\,dx+$$

$$+\int_{h/2}^{\infty}(1+x)^{-a}\,|\psi(x)|\,dx\leqslant(1+h)^{-a}\,\|\psi\|_1+\left(1+\frac{h}{2}\right)^{-a}\|\psi\|_1,$$

что и дает (31.19). В силу неравенства (31.19) из (31.18) получаем

$$\|B_\varepsilon\|_p \leqslant c\,\|\varphi\|_p \int_0^\varepsilon t^{\lambda-1}\,dt \int_0^\infty s^\lambda\,|k(s)|\,(1+ts)^{-\lambda}\,ds.$$

Внутренний интеграл оценивается следующим образом:

$$\tilde{J}(t) = \int_0^\infty s^\lambda\,|k(s)|\,(1+ts)^{-\lambda}\,ds \leqslant ct^{-\alpha} \quad \text{при } t\to 0. \tag{31.20}$$

В самом деле, так как $|k(s)| \leqslant cs^{\alpha-2}$ при $s \geqslant 1$, то $\tilde{J}(t) \leqslant c + c\int_1^\infty s^{\lambda+\alpha-2} \times$

$$\times (1+ts)^{-\lambda}\,ds = c + c\int_0^1 \xi^{-\alpha}(\xi+t)^{-\lambda}\,d\xi = c + ct^{1-\lambda-\alpha}\int_0^{1/t} \xi^{-\alpha}(1+\xi)^{-\lambda}\,d\xi \leqslant$$

$\leqslant ct^{-\alpha}$.

В силу оценки (31.20)

$$\|B_\varepsilon\|_p \leqslant c\varepsilon^{\lambda-\alpha}\,\|\varphi\|_p, \tag{31.21}$$

и тогда, согласно (31.15), и $\|\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}\mathrm{K}^+_u\varphi\|_p \leqslant c\,\|\varphi\|_p$.

Так как $(\mathrm{K}^-_v\varphi)(x) = (\mathrm{K}^+_{v^*}\varphi^*)(-x)$, где $v^*(x,t) = v(-x,-t)$, $\varphi^*(t) = \varphi(-t)$, то такая же оценка справедлива и для $\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}\mathrm{K}^-_v$. В соответствии с теоремой 6.2 утверждение теоремы доказано.

Б. Представление оператора типа потенциала M в виде композиции $M = I^\alpha_+ N$. Теорема 6.1 представляет возможность обращать дробное интегрирование справа дробным дифференцированием на образе $I^\alpha(L_p)$: $I^\alpha_+\mathbf{D}^\alpha_+ f \equiv f$, $f \in I^\alpha(L_p)$. Поэтому доказанное в теореме 31.8 вложение $M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$ позволяет записать

$$M\varphi \equiv I^\alpha_+ N\varphi, \quad N = \mathbf{D}^\alpha_+ M, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{31.22}$$

В следующей лемме получено явное выражение для оператора N.

Лемма 31.1. *Оператор $N = \mathbf{D}^\alpha_+ M$, где M — оператор (31.6), имеет в предположениях теоремы 31.5 вид*

$$N = \Gamma(\alpha)\,N_0 + T, \tag{31.23}$$

где N_0 — сингулярный оператор (31.12), а

$$T\varphi = T^+_u\varphi + \cos\alpha\pi T^-_v\varphi + \sin\alpha\pi S T^-_v\varphi, \tag{31.24}$$

где

$$T^+_u\varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_0^\infty \frac{u(x,\ x-t-s) - u(x-t,\ x-t-s)}{s^{1-\alpha}} \times$$

$$\times\,\varphi(x-t-s)\,ds, \tag{31.25}$$

$$T^-_v\varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_0^\infty \frac{v(x,\ x+t+s) - v(x+t,\ x+t+s)}{s^{1-\alpha}} \times$$

$$\times\,\varphi(x+t+s)\,ds. \tag{31.26}$$

Операторы T^+_u, T^-_v можно представить также в виде

$$T_u^+\varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} T_u^+(x,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$T_v^-\varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{\infty} T_v^-(x,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{31.27}$$

где

$$T_u^+(x,\ \tau) = \int_{\tau}^{x} \frac{u(x,\ \tau) - u(t,\ \tau)}{(x-t)^{1+\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{x-\tau}\int_0^1 \frac{u(x,\ \tau) - u[\tau + s(x-\tau),\ \tau]}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\alpha}}\,ds,$$

(31.28)

$$T_v^-(x,\ \tau) = \int_{x}^{\tau} \frac{v(x,\ \tau) - v(x,\ t)}{(t-x)^{1+\alpha}(\tau-t)^{1-\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\tau-x}\int_0^1 \frac{v(x,\ \tau) - v[x,\ x + s(\tau-x)]}{s^{1+\alpha}(1-s)^{1-\alpha}}\,ds.$$

Доказательство. Из (31.11) имеем $\mathbf{D}_+^\alpha M\varphi = \Gamma(\alpha) N_0\varphi + \mathbf{D}_+^\alpha \mathbf{K}_u^+\varphi + \mathbf{D}_+^\alpha \mathbf{K}_v^-\varphi$, так что $T = \mathbf{D}_+^\alpha \mathbf{K}_u^+ + \mathbf{D}_+^\alpha \mathbf{K}_v^-$. Из (11.10) заключаем, что

$$\mathbf{D}_+^\alpha f = \cos\alpha\pi\,\mathbf{D}_-^\alpha f + \sin\alpha\pi\,S\mathbf{D}_-^\alpha f \tag{31.29}$$

для $f \in I^\alpha(L_p)$. Так как $\mathbf{K}_v^-\varphi \in I^\alpha(L_p)$ в силу теоремы 31.8, то на основании (31.29) и получается (31.24).

Далее, из представления (31.15) после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ получаем с учетом (31.21):

$$\mathbf{D}_+^\alpha \mathbf{K}_u^+\varphi =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_0^\infty \frac{u(x,\ x-t-s) - u(x-t,\ x-t-s)}{s^{1-\alpha}}\,\varphi(x-t-s)\,ds +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \mathrm{k}(s)\,ds \int_0^\infty \frac{u(x,\ x-t) - u(x-t,\ x-t)}{t}\,\varphi(x-t)\,dt. \tag{31.30}$$

Здесь предельный переход был обоснован, если его понимать по норме L_p. Нетрудно показать, что интегралы в (31.23) существуют не только в смысле сходимости по норме L_p, но и в обычном смысле (почти при всех x).

В (31.30) второе слагаемое исчезает ввиду (6.11), и мы получаем (31.25). Равенство (31.26) можно вывести из очевидных соображений симметрии. Представления (31.27), (31.28) получаются из (31.25), (31.26) простыми преобразованиями. Лемма доказана.

Замечание 31.1. Из теоремы 31.8 следует, что оператор T в (31.23) ограничен в $L_p(R^1)$ (по крайней мере, при $1 < p < 1/\alpha$). Ниже будет показано, что он вполне непрерывен в $L_p(R^1)$. Заметим, что ядра (31.28) допускают оценки:

$$|T_u^+(x,\ \tau)| \leqslant \frac{c(x-\tau)^{\lambda-1}}{(1+|x|)^\lambda}, \quad |T_v^-(x,\ \tau)| \leqslant \frac{c(\tau-x)^{\lambda-1}}{(1+|\tau|)^\lambda},$$

что вытекает из (31.28) в силу (31.8).

В. Нетеровость оператора M. Предыдущие построения подготовили результат о нетеровости уравнения (31.6). Пусть $c(x, t)$ имеет вид (31.7). Справедлива

Теорема 31.9. *Пусть* $c(x, t) \in H_x^{\lambda}(\overline{R}_{\pm}^2)$, *где* $\lambda > \alpha$. *Для того чтобы оператор* M *был нетеровым оператором из пространства* $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, *в пространство* $I^{\alpha}(L_p)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$u^2(x, x) + v^2(x, x) \neq 0, \quad x \in \dot{R}^1. \tag{31.31}$$

При выполнении этого условия индекс оператора M *равен*

$$\varkappa_{L_p \to I^{\alpha}(L_p)}(M) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \left\{ c_1(x) + i c_2(x) \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} \right\}, \tag{31.32}$$

где $c_1(x) = u(x, x) + v(x, x)$, $c_2(x) = u(x, x) - v(x, x)$.

Доказательство. При $\lambda > \alpha$ справедливо вложение $M(L_p) \subseteq I^{\alpha}(L_p)$, и потому имеет место представление (31.22). Элементарными рассуждениями устанавливается, что нетеровость оператора M из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$ равносильна нетеровости оператора N из L_p в L_p. Условие (31.31) в силу теоремы 31.5 необходимо и достаточно для нетеровости оператора N_0, и при выполнении этого условия индекс оператора N_0 равен числу (31.25). Поэтому в соответствии с теоремой 31.3 достаточно показать, что оператор T вполне непрерывен в $L_p(R^1)$. Так как композиция ограниченного оператора и вполне непрерывного является вполне непрерывным оператором, то ввиду (31.24), а также ввиду равноправия операторов T_u^+ и T_v^- остается доказать полную непрерывность только оператора T_u^+. Выделим это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма 31.2. *Если* $u(x, t) \in H_x^{\lambda}(\overline{R}_+^2)$, $\lambda > \alpha$, *то оператор* T_u^+ *вполне непрерывен в* $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$.

Доказательство. Проверяем выполнение критерия Рисса

$$\|(T_u^+ \varphi)(x + \delta) - (T_u^+ \varphi)(x)\|_p \leqslant \xi(\delta) \|\varphi\|_p, \ \xi(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0, \tag{31.33}$$

$$\left(\int_{|x| > N} |(T_u^+ \varphi)(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \eta(N) \|\varphi\|_p, \ \eta(N) \underset{N \to \infty}{\to} 0, \tag{31.34}$$

обеспечивающего (см. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1, с. 324]) полную непрерывность оператора T_u^+. При проверке условия (31.33) оказывается «работающим» представление (31.27), (31.28) оператора T_u^+, а при проверке условия (31.34) — представление (31.25).

Обозначим $F(x) = (T_u^+ \varphi)(x)$. Имеем, согласно (31.27),

$$F(x + \delta) - F(x) = \int_x^{x+\delta} T_u^+(x + \delta, \tau) \varphi(\tau) \, d\tau + \int_{-\infty}^{x} [T_u^+(x + \delta, \tau) -$$

$$- T_u^+(x, \tau)] \varphi(\tau) \, d\tau = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Оценка для Δ_1 проста в силу (31.8):

$$\|\Delta_1\|_p \leqslant \int_0^{\delta} d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |T_u^+(x - \tau + \delta, x) \varphi(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^{\delta} (\delta - \tau)^{\lambda - 1} \, d\tau \, \|\varphi\|_p = \frac{c}{\lambda} \delta^{\lambda} \|\varphi\|_p. \tag{31.35}$$

Далее,

$$\|\Delta_2\|_p \leqslant \int_0^\infty d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |T_u^+(x+\tau+\delta,\ x) - T_u^+(x+\tau,\ x)|^p\, |\varphi(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}.$$

Представим $T_u^+(x+\tau+\delta,\ x) - T_u^+(x+\tau,\ x)$ в виде $A_1 + A_2 + A_3$, где

$$A_1 = \int_x^{x+\tau} \frac{u(x+\tau+\delta,\ x) - u(x+\tau,\ x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}(t-x)^{1-\alpha}}\, dt,$$

$$A_2 = \int_{x+\tau}^{x+\tau+\delta} \frac{u(x+\tau+\delta,\ x) - u(t,\ x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}(t-x)^{1-\alpha}}\, dt,$$

$$A_3 = \int_x^{x+\tau} [(x+\tau+\delta-t)^{-1-\alpha} - (x+\tau-t)^{-1-\alpha}]\, \frac{u(x+\tau,\ x) - u(t,\ x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dt.$$

Оценим A_1:

$$|A_1| \leqslant \frac{c\delta^\lambda \tau^\lambda}{(1+|x+\tau|)^\lambda} \int_0^1 \frac{ds}{s^{1-\alpha}[\delta+\tau(1-s)]^{1+\alpha}} = c_1 \frac{\delta^{\lambda-\alpha}\tau^\alpha}{(1+|x+\tau|)^\lambda(\delta+\tau)}$$

(в последнем равенстве использована формула (13.18)), так что

$$|A_1| \leqslant c_1 \frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{1-\alpha}}. \tag{31.36}$$

Оценка для A_2 получается аналогично и совпадает с (31.36). Далее, применяя в A_3 теорему о среднем, получаем

$$|A_3| \leqslant \frac{c\delta}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{2-\lambda}} \int_0^1 \frac{(1-s-\xi)^\alpha\, ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\alpha-\lambda}(1-s+\delta/\tau)^{1+\alpha}},$$

где $0 < \xi < \delta/\tau$, так что

$$|A_3| \leqslant \frac{c\delta}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{2-\lambda}} \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{\lambda-1-\alpha}\, ds}{(1-s+\delta/\tau)^{1-\varepsilon}(1-s+\delta/\tau)^\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1\delta^\varepsilon}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{1-\lambda+\varepsilon}},$$

где $c_1 = c_1(\varepsilon)$ и $0 < \varepsilon < \lambda - \alpha$. В силу оценок для A_1, A_2, A_3 имеем

$$\|\Delta_2\|_p \leqslant c\delta^\varepsilon \int_0^\infty \frac{a(\tau)\, d\tau}{\tau^{1-\lambda+\varepsilon}} + c\delta^{\lambda-\alpha} \int_0^\infty \frac{a(\tau)\, d\tau}{\tau^{1-\alpha}}, \tag{31.37}$$

где обозначено $a(\tau) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x+\tau|)^{-\lambda p} |\varphi(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}$. Очевидно, $0 \leqslant a(\tau) \leqslant \|\varphi\|_p$, и легко получается, что $\|a\|_q \leqslant \kappa \|\varphi\|_p$ при $q > \max(p, 1/\lambda)$, где $\kappa = \kappa(q)$. Применение неравенства Гельдера при $\tau > 1$ показывает, что интегралы в (31.37) конечны и допускают оценку $\int_0^\infty \tau^{-\nu} a(\tau)\, d\tau \leqslant c \|\varphi\|_p$ при $\nu = 1-\lambda+\varepsilon$ или $\nu = 1-\alpha$, $c = c(\lambda, \varepsilon, \alpha, q)$, если порядок суммируемости q для функции $a(\tau)$ выбрать в пределах $\max(p, 1/\lambda) < q < 1/(\lambda-\varepsilon)$, что приводит к следующему (всегда возможному) выбору ε:

$\max(0, \lambda - 1/p) < \varepsilon < \lambda - \alpha$. Таким образом, в силу оценок (31.35) и (31.37) $\|F(x+\delta) - F(x)\|_p \leqslant c\delta^{\varepsilon} \|\varphi\|_p$, так что условие (31.33) выполнено.

Переходим к проверке условия (31.34). Воспользовавшись представлением (31.25), получаем

$$|(T_u^+ \varphi)(x)| \leqslant \frac{c}{(1+|x|)^{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}(1+|x-t|)^{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(x-t-s)|}{s^{1-\alpha}}\, ds.$$

Пусть $g(x)$ — то же, что в (31.16). Поступая точно так же, как при оценках в (31.16), (31.17), получаем

$$\left(\int_{|x|>N} |T_u^+ \varphi|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant c\, \|g\|_q \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left(\int_{|x|>N} \frac{dx}{[(1+|x|)(1+|x-t|)]^{\lambda/\alpha}}\right)^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|\varphi\|_p \frac{1}{(N+1)^{\varepsilon}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left(\int_{|x|>N} \frac{dx}{(1+|x|)^{(\lambda-\varepsilon)/\alpha}(1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}}\right)^{\alpha}.$$

Здесь $\varepsilon>0$; выберем $\varepsilon<\alpha$ и $\varepsilon<\lambda-\alpha$; тогда внутренний интеграл оценивается согласно (6.32), так что

$$\left(\int_{|x|>N} |T_u^+ \varphi|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{c_1 \|\varphi\|_p}{(N+1)^{\varepsilon}} \int_0^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1}\, dt}{(1+t)^{\lambda-\varepsilon}} = \frac{c_2}{(N+1)^{\varepsilon}} \|\varphi\|_p,$$

что и завершает доказательство леммы и вместе с этим теоремы 31.9.

Итак, в силу представления (31.22) уравнение (31.6) сведено к уравнению второго рода

$$N\varphi \equiv \Gamma(\alpha)[u(x, x) + v(x, x)\cos\alpha\pi]\varphi(x) + \\ + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t, t)}{t-x} \varphi(t)\, dt + T\varphi = \mathbf{D}_+^{\alpha} f, \tag{31.38}$$

где T — вполне непрерывный оператор. Из теоремы 31.6 вытекает

Следствие. *Пусть $u^2(x, x)+v^2(x, x)\neq 0$, $x\in\dot{R}^1$. Для того чтобы уравнение (31.6) с правой частью $f(x)$ из $I^{\alpha}(L_p)$ было разрешимо в L_p, $1<p<1/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(x)(\mathbf{D}_+^{\alpha} f)(x)\, dx = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $\psi_j(x)$ — полная система линейно независимых решений однородного сингулярного уравнения $N^*\psi=0$, сопряженного с (31.38).

Г. Регуляризация оператора типа потенциала. Рассмотрим в заключение этого пункта вопрос о регуляризации уравнения (31.6), т. е. о сведении его не к сингулярному интегральному уравнению, а к уравнению Фредгольма. Наша цель будет состоять в построении в явном виде регуляризатора оператора M (в соответствии с теоремой 31.4). Таким регуляризатором оказывается оператор

$$Rf = \frac{\alpha \sin\alpha\pi}{\pi A(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0(x, t)}{|x-t|^{1+\alpha}} [f(x) - f(t)]\, dt, \tag{31.39}$$

где

$$A(x) = u^2(x,\ x) + 2u(x,\ x)\,v(x,\ x)\cos\alpha\pi + v^2(x,\ x),$$

$$c_0(x,\ t) = \begin{cases} u(x,\ x), & t < x, \\ v(x,\ x), & t > x. \end{cases}$$

Теорема 31.10. *Пусть* $c(x,\ t) \in H_x^{\lambda}(\overline{R}_{\pm}^2)$ *и пусть* $u(x,\ x)$, $v(x,\ x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1)$, $\lambda > \alpha$. *Если* $u^2(x,\ x) + v^2(x,\ x) \neq 0$, $x \in \dot{R}^1$, *то оператор (31.39) является регуляризатором оператора (31.6):*

$$RM\varphi = \varphi + T'\varphi, \quad MRf = f + T''f, \tag{31.40}$$

где T', T'' *— операторы, вполне непрерывные в* L_p *и в* $I^{\alpha}(L_p)$ *соответственно.*

Доказательство. Прежде всего замечаем, что оператор R ограничен из $I^{\alpha}(L_p)$ в L_p. Для этого запишем оператор R в терминах дробного дифференцирования:

$$Rf = \frac{u(x,\ x)}{\Gamma(\alpha)\,A(x)}\,(\mathbf{D}_{+}^{\alpha}f)(x) + \frac{v(x,\ x)}{\Gamma(\alpha)\,A(x)}\,(\mathbf{D}_{-}^{\alpha}f)(x),$$

после чего оценка $\|Rf\|_p \leqslant c\,\|f\|_{I^{\alpha}(L_p)}$ вытекает из теоремы 6.1 и неравенства (11.11′).

Из леммы 31.2 вытекает, что оператор

$$(uI_{+}^{\alpha} - I_{+}^{\alpha}u)\,\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} \frac{u(x,\ x) - u(t,\ t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt$$

вполне непрерывен из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$, если $u(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1)$, $\lambda > \alpha$. Поэтому ниже при составлении композиций RM, MR можно переставлять операцию умножения на гельдеровскую функцию с операторами I_{+}^{α}, I_{-}^{α}. Согласно (31.9), имеем $M = M_0 + T_1$, где $M_0\varphi = \Gamma(\alpha)\,I_{+}^{\alpha}(u\varphi) + \Gamma(\alpha)\,I_{-}^{\alpha}(v\varphi)$, а T_1 — оператор, вполне непрерывный из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$ (см. лемму 31.2). Поэтому

$$RM\varphi = \frac{1}{A}\,(u\mathbf{D}_{+}^{\alpha} + v\mathbf{D}_{-}^{\alpha})\,(uI_{+}^{\alpha} + vI_{-}^{\alpha})\,\varphi + T_2\varphi =$$

$$= \frac{1}{A}\,[(u^2 + v^2)\,\varphi + u\mathbf{D}_{+}^{\alpha}I_{-}^{\alpha}v\varphi + v\,\mathbf{D}_{-}^{\alpha}I_{+}^{\alpha}u\varphi] + T_3\varphi,$$

где T_2, T_3 — вполне непрерывные в $L_p(R^1)$ операторы. Так как $\mathbf{D}_{+}^{\alpha}I_{-}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi\varphi + \sin\alpha\pi\,S\varphi$, $\mathbf{D}_{-}^{\alpha}I_{+}^{\alpha}\varphi = \cos\alpha\pi\,\varphi - \sin\alpha\pi S\varphi$ согласно (11.10), (11.11), то

$$RM\varphi = \frac{1}{A}\,[(u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha\pi)\,\varphi + \sin\alpha\pi\,(uSv - vSu)\,\varphi] + T_3\varphi.$$

Оператор $uSv - vSu$ вполне непрерывен в $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$, в силу полной непрерывности в $L_p(R^1)$ оператора $Su - uS$ (см., например, монографию И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4, с. 33]). Поэтому $RM\varphi = \varphi + T'\varphi$, где T' вполне непрерывен в L_p.

Аналогично проверяется справедливость второго из равенств (31.40). Теорема доказана.

3°. **Уравнения на конечном отрезке.** Рассмотрим операторы типа потенциала в виде

$$M\varphi \equiv u(x)\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x)\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} + \int_a^b T(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{31.41}$$

и исследуем их с точки зрения корректной постановки нормальной разрешимости. В конце этого пункта получим утверждение о нетеровости оператора M из L_p в $I^\alpha(L_p) = I^\alpha[L_p(a, b)]$. При такой постановке сопряженный оператор M^* понимается как действующий из $I^\alpha(L_p)^* = \mathbf{D}^\alpha_{a+}(L_{p'})$ в $L_{p'}$. Нас будет интересовать ввиду обширных приложений уравнений на конечном отрезке и «классическая» постановка вопроса, когда вместо M^* берется транспонированный оператор

$$M^\tau\psi = \int_a^x \frac{v(t)\,\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^b \frac{u(t)\,\psi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} + \int_a^b T(t, x)\,\psi(t)\,dt = g(x), \tag{31.42}$$

а классы, в которых ищутся решения φ, ψ, описываются в простых терминах (но образуют не банаховы пространства, а, вообще говоря, топологические).

А. Приведение к уравнениям с ядром Коши. Применяя тождества (11.18) и (11.16) соответственно к (31.41) и (31.42), после простых преобразований приводим их к уравнениям с ядром Коши:

$$a_1(x)\,\Phi(x) + \frac{a_2(x)\,(b-x)^\alpha}{\pi}\int_a^b \frac{\Phi(t)\,dt}{(b-t)^\alpha\,(t-x)} + \mathrm{K}\Phi = f(x), \tag{31.43}$$

$$a_1(x)\,\psi(x) - \frac{1}{\pi\,(b-x)^\alpha}\int_a^b \frac{a_2(t)\,(b-t)^\alpha\,\psi(t)\,dt}{t-x} + \mathrm{K}^*\psi = g(x), \tag{31.44}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — функции (30.48), а

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt, \quad g_1(x) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\,\frac{d}{dx}\int_x^b g(t)\,(t-x)^{\alpha-1}\,dt, \tag{31.45}$$

$$\mathrm{K}\Phi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,T\mathbf{D}^\alpha_{a+}f, \quad \mathrm{K}^*\psi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\mathbf{D}^\alpha_{b-}T^\tau\psi, \tag{31.46}$$

где T — интегральный оператор с ядром $T(x, t)$, T^τ — транспонированный с ним оператор. Здесь важно отметить, что использованное при переходе к (31.44) «правое» представление $T^\tau = I^\alpha_{b-}\mathbf{D}^\alpha_{b-}T^\tau$ справедливо на рассматриваемых ниже функциях ψ, так как для них функция $T^\tau\psi$ будет представима дробным интегралом порядка α.

Б. Класс допустимых возмущений T. Естественно считать, что возмущающий оператор T имеет ядро $T(x, t)$ с особенностью более слабого порядка, чем $1-\alpha$, чтобы получаемый в (31.43) оператор K имел слабую особенность. С помощью формулы дробного интегрирования по частям находим, что для этого достаточно, чтобы дробная производная от $T(x, t)$ по t порядка α

$$T_t^{(\alpha)}(x, t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dt}\int_t^b T(x, s)\,(s-t)^{-\alpha}\,ds \tag{31.47}$$

имела слабую особенность. Следующая лемма дает простое достаточное условие для допустимых ядер $T(x, t)$.

Лемма 31.3. *Пусть*

$$T(x, t) = \begin{cases} c_1(x, t)\,(x-t)^{\beta_1-1}, & t<x, \\ c_2(x, t)\,(t-x)^{\beta_2-1}, & t>x, \end{cases} \tag{31.48}$$

где $\alpha < \beta_i \leqslant 1$, *а* $c_i(x, t)$ — *ограниченные в основном квадрате* $[a, b] \times [a, b]$ *функции, дифференцируемые по* t *при* $t \neq x$ *и такие, что* $|\partial c_i/\partial t| \leqslant A_i |x-t|^{-1}$, $i = 1, 2$. *Тогда ядро* $T_i^{(\alpha)}(x, t)$ *представимо в виде суммы вольтерровского вырожденного ядра и ядра со слабой особенностью:*

$$T_i^{(\alpha)}(x, t) = T_0(x, t) + \begin{cases} \dfrac{c_2(x, b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{\beta_2-1} (b-t)^{-\alpha}, & t > x, \\ 0, & t < x, \end{cases} \tag{31.49}$$

$$|T_0(x, t)| \leqslant c |x-t|^{\min(\beta_1, \beta_2)-\alpha-1}. \tag{31.50}$$

Доказательство. Пусть вначале $t < x$. Имеем

$$T_i^{(\alpha)}(x, t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^x \frac{c_1(x, s)\, ds}{(s-t)^{\alpha} (x-s)^{1-\beta_1}} + \right.$$

$$\left. + \int_x^b \frac{c_2(x, s)\, ds}{(s-t)^{\alpha} (s-x)^{1-\beta_2}} \right\}.$$

В первом интеграле сделаем замену $s = t + \omega(x-t)$, после чего продифференцируем под знаком интеграла, а во втором сначала продифференцируем, а затем сделаем замену $s = x + \omega(x-t)$:

$$-\Gamma(1-\alpha)\, T_i^{(\alpha)}(x, t) = \frac{\beta_1 - \alpha}{(x-t)^{1+\alpha-\beta_1}} \int_0^1 \frac{c_1(x, t+\omega(x-t))}{\omega^{\alpha} (1-\omega)^{1-\beta_1}} d\omega +$$

$$+ (x-t)^{\beta_1-\alpha} \int_0^1 \frac{\partial c_1(x, s)}{\partial s} \frac{(1-\omega)^{\beta_1} d\omega}{\omega^{\alpha}} + \frac{\alpha}{(x-t)^{1+\alpha-\beta_2}} \times$$

$$\times \int_0^{(b-t)/(x-a)} \frac{c_2(x, x+\omega(x-t))\, d\omega}{\omega^{1-\beta_2} (1+\omega)^{1+\alpha}}.$$

Интегралы в первом и третьем слагаемых ограничены в силу ограниченности функций $c_i(x, t)$, а для второго имеем

$$\left| \int_0^1 \frac{\partial c_1(x, s)}{\partial s} \frac{(1-\omega)^{\beta_1}}{\omega^{\alpha}} d\omega \right| \leqslant A_1 \int_0^1 \frac{d\omega}{(x-t)\, \omega^{\alpha} (1-\omega)^{1-\beta_1}} =$$

$$= (x-t)^{-1} A_1 B(1-\alpha, \beta_1).$$

Пусть $t > x$. Интегрируя в (31.47) по частям, а затем дифференцируя по t под знаком интеграла, имеем

$$\Gamma(1-\alpha)\, T_i^{(\alpha)}(x, t) = \frac{c_2(x, b)}{(b-x)^{1-\beta_2} (b-t)^{\alpha}} -$$

$$- \int_t^b \frac{\partial c_2(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(s-x)^{1-\beta_2} (s-t)^{\alpha}} + (1-\beta_2) \int_t^b \frac{c_2(x, s)\, ds}{(s-x)^{2-\beta_2} (s-t)^{\alpha}}.$$

Первое слагаемое—вырожденное ядро, а для остальных справедливы оценки

$$\left|\int_t^b \frac{\partial c_2(x,\ s)}{\partial s}\ \frac{ds}{(s-x)^{1-\beta_2}(s-t)^{\alpha}}\right| \leqslant A_2 \int_t^b \frac{ds}{(s-x)^{2-\beta_2}(s-t)^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(t-x)^{1+\alpha-\beta_2}};\ \left|\int_t^b \frac{c_2(x,\ s)\,ds}{(s-x)^{2-\beta_2}(s-t)^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{c}{(t-x)^{1+\alpha-\beta_2}}.$$

Собирая все оценки, получаем (31.49), (31.50).

В. Теоремы Нетера в «классическом» варианте. Так как уравнения (31.41), (31.42) сведены к полным сингулярным уравнениям (31.43), (31.44), мы можем воспользоваться теорией Нетера для последних. Основным моментом здесь является правильный выбор классов для решений φ и ψ в том случае, когда мы говорим о «классическом» подходе, основанном на теореме 31.6. При рассмотрении же нетеровости оператора (31.41) из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ в смысле определения 31.3 этот вопрос не возникает.

В следующих ниже теоремах значение

$$\theta(a) = \arg \frac{u(a) + v(a)\, e^{-\alpha\pi i}}{u(a) + v(a)\, e^{\alpha\pi i}} \tag{31.51}$$

выбрано в пределах $0 \leqslant \theta(a) < 2\pi$.

Теорема 31.11. *Пусть $u(x)$, $v(x) \in H^{\lambda}([a, b])$, $\lambda > \alpha$, $f(x) \in H^*_{\alpha}$, ядро $T(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 31.3 и пусть $u^2(x) + v^2(x) \neq 0$, $\theta(a) \neq 0$, $\theta(a) \neq (1-\alpha)\,2\pi$, $\theta(b) = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Уравнение (31.41) разрешимо в классе H^* тогда и только тогда, когда $\int_a^b f(x)\,\psi_j(x)\,dx = 0$, где $\{\psi_j\}$ — полная система решений соответствующего (31.42) однородного уравнения из класса функций вида $\psi(x) = (x-a)^{-\alpha}(b-x)^{-\alpha}\,\psi_*(x)$, где $\psi_*(x)$ гельдерова на $[a, b]$. Разность чисел решений однородных уравнений (31.41), (31.42) вычисляется по формуле (30.57).*

Доказательство этой теоремы фактически подготовлено сведением к сингулярным уравнениям (31.43), (31.44) и будет вытекать из известных фактов теории таких уравнений. Запишем уравнение (31.43) и однородное уравнение (31.44) в виде

$$a_1(x)\,\Phi_b(x) + \frac{a_2(x)}{\pi}\int_a^b \frac{\Phi_b(t)}{t-x}\,dt + \mathrm{K}_b\Phi_b = f_b(x), \tag{31.52}$$

$$a_1(x)\,\psi_b(x) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{a_2(t)\,\psi_b(t)}{t-x}\,dt + \mathrm{K}_b^*\,\psi_b = 0. \tag{31.53}$$

Здесь $\Phi_b(x) = (b-x)^{-\alpha}\Phi(x)$, $f_b(x) = (b-x)^{-\alpha} f(x)$, $\psi_b(x) = (b-x)^{\alpha}\psi(x)$, $\mathrm{K}_b = (b-x)^{-\alpha}\,\mathrm{K}\,(b-t)^{\alpha}$, $\mathrm{K}_b^* = (\mathrm{K}_b)^*$. Уравнения (31.52), (31.53) являются сингулярными интегральными уравнениями, нетеровская теория которых приведена в теоремах 31.6 и 31.7.

Вопрос состоит в том, что если решения $\varphi(x)$ разыскиваются в классе H^*, то какой класс решений $\psi(x)$ следует выбрать для того, чтобы были согласованы классы решений сингулярных уравнений (31.52), (31.53) так, как это диктуется теоремой 31.6. Так как решения уравнений (31.41), (31.42) связаны с решениями уравнений (31.52), (31.53) тождествами

$$\Phi_b(x) = (b-x)^{-\alpha}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt, \quad \psi_b(x) = (b-x)^{\alpha}\,\psi(x),$$

то требуемый выбор определяется теоремами 31.6 и 13.14. В силу теоремы 13.14 $\Phi(x)\in H^*_\alpha$, так что $\Phi_b(x)\in H^*$. В соответствии с теоремами 30.2 и 31.6 случаи $0<\theta(a)<2\pi(1-\alpha)$, $2\pi(1-\alpha)<\theta(a)<2\pi$ отвечают тому, что решения $\Phi_b(x)$ ограничены, соответственно не ограничены, в точке $x=a$. Пусть для определенности $\theta(a)>2\pi(1-\alpha)$. Тогда решения $\psi_b(x)$ уравнения (31.52) разыскиваются, согласно теореме 31.6, в классе функций, ограниченных на обоих концах, т. е. в классе H. Но тогда $\psi(x)$ следует брать из класса функций вида

$$\psi(x)=\psi_b(x)/(b-x)^\alpha,\quad \psi_b(x)\in H. \tag{31.54}$$

Это будет равносильно тому, чтобы брать $\psi(x)$ из класса функций вида (13.51). Проще всего это объяснить следующим образом. Уравнения (31.41), (31.42) можно привести к сингулярным уравнениям вида (31.43), (31.44) или (31.52), (31.53), связанным с весом $(x-a)^\alpha$ вместо $(b-x)^\alpha$. Для этого нужно вместо тождеств (11.18), (11.16) применить тождества (11.17), (11.19). При этом придем к уравнению типа (31.52) с правой частью $(x-a)^{-\alpha}f(x)$ и к уравнению типа (31.53) с решением $\psi_a(x)=(x-a)^\alpha\psi(x)$. Рассуждая, как и выше, установим, что выбор того же класса для решений $\psi(x)$ должен быть такой: $\psi(x)=\psi_a(x)/(x-a)^\alpha$, $\psi_a(x)\in H$, что в сопоставлении с (31.54) приводит к (13.51).

Применяя теорему 31.6 к уравнению (31.52), видим, что уравнение (31.43) разрешимо в H^* тогда и только тогда, когда $\int_a^b f(x)\,\psi_j(x)\,dx=0$, где $\{\psi_j\}$ — полная система решений однородного уравнения (31.44) в классе (13.51). Из разрешимости уравнения (31.43) в классе H^* вытекает в случае $f(x)\in H^*_\alpha$ $(\subset H^*)$, что и все его решения $\Phi(x)$ также принадлежат подклассу H^*_α. Опустим доказательство этого утверждения, лишь пояснив его. Для сингулярного уравнения (31.52) известно в случае ядра $\mathcal{K}(x,t)$, гельдеровского по обеим переменным, что если правая часть имеет на концах интегрируемые особенности (допустимые согласно теореме 31.2; подчеркнем, что в нашем случае $\mu_b<0$) порядка не выше заданного, а гельдеровость имеет порядок не ниже заданного, то таково же и решение уравнения (априорно разыскиваемое в H^*). Это достигается с помощью регуляризации по Карлеману — Векуа (см. Ф. Д. Гахов [1]), состоящей в обращении характеристической части сингулярного уравнения. После этого нужная информация о решениях извлекается из теории уравнений Фредгольма. В нашем случае, т. е. при наших предположениях о ядре $T(x,t)$, показывается, что на этом пути получается уравнение Фредгольма с интегральным оператором, ядро которого имеет слабую особенность (см. ниже замечание 31.3). Это требует тщательных оценок, которые приводить не станем.

Коль скоро уравнение (31.43) разрешимо и его решения принадлежат классу H^*_α, то и уравнение (31.41) разрешимо в H^*. Наконец, последнее утверждение теоремы вытекает из его справедливости для сингулярных уравнений (31.52), (31.53). Теорема доказана.

Замечание 31.2. Выбор (13.51) есть выбор класса, «союзного» по отношению к классу H^* для решений уравнений (31.41), (31.42) (следуем терминологии в книге Ф. Д. Гахова [1]). При таком выборе союзных классов гельдеровских функций для уравнения первого рода (31.41) справедливы утверждения типа теорем Нетера—теорема 31.11. Подчеркнем, что основная мысль, лежащая в выборе союзных классов весовых гельдеровских функций, здесь состоит в том, чтобы $\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\alpha|\varphi(x)\,\psi(x)|\,dx<\infty$ (в теории же сингулярных интегральных уравнений правило выбора союз-

ных классов диктуется условием $\int_a^b |\varphi(x)\,\psi(x)|\,dx<\infty$).

Замечание 31.3. Можно изучить вид регуляризаторов (в смысле теоремы 31.4), явно их построить и показать, что ядро регуляризованного уравнения—уравнения Фредгольма—при $u(x)$, $v(x)\in H^\lambda$, $\lambda>\alpha$, и ядре $T(x, t)$, удовлетворяющем условиям леммы 31.3, мажорируется слабой особенностью $|x-t|^{\mu-1}$, $\mu=\min(\lambda, \beta_1, \beta_2)-\alpha$.

Г. Нетеровость операторов типа потенциала из L_p в $I^\alpha(L_p)$. Рассмотрим уравнение типа (31.41) в виде

$$M\varphi\equiv\int_a^x\frac{u(x, t)\,\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\int_x^b\frac{v(x, t)\,\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=f(x). \tag{31.55}$$

Относительно функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ будем предполагать, что они

1) гельдеровы по x порядка $\lambda>\alpha$ равномерно по t:

$$\begin{gathered}|u(x_1, t)-u(x_2, t)|\leqslant A|x_1-x_2|^\lambda, \quad \lambda>\alpha,\\ |v(x_1, t)-v(x_2, t)|\leqslant \tilde{A}|x_1-x_2|^\lambda, \quad \lambda>\alpha,\end{gathered} \tag{31.56}$$

где $x_1\geqslant t$, $x_2\geqslant t$ и $x_1\leqslant t$, $x_2\leqslant t$ соответственно и A, $\tilde{A}$ не зависят от t;

2) $u(x, x)=u(x, x-0)\in C([a, b])$, $v(x, x)=v(x, x+0)\in C([a, b])$.

Действуя подобно п. 1° (см. (31.9)—(31.12)), приводим уравнение (31.55) с помощью тождества (11.16) к виду

$$M\varphi=\Gamma(\alpha)\,I_{a+}^\alpha N_\alpha\varphi+T_1\varphi+T_2\varphi=f(x), \tag{31.57}$$

где

$$N_\alpha\varphi=a_1(x)\,\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_a^b\left(\frac{y-a}{x-a}\right)^\alpha\frac{a_2(y)}{y-x}\,\varphi(y)\,dy, \tag{31.58}$$

а $a_1(x)=u(x, x)+v(x, x)\cos\alpha\pi$, $a_2(x)=v(x, x)\sin\alpha\pi$,

$$T_1\varphi=\int_a^x\frac{u(x, y)-u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,\varphi(y)\,dy, \tag{31.59}$$

$$T_2\varphi=\int_x^b\frac{v(x, y)-v(y, y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\,\varphi(y)\,dy. \tag{31.60}$$

Докажем, что операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из L_p в $I^\alpha(L_p)$, $1<p<1/\alpha$, но предварительно установим, что операторы вида (31.55) действуют ограниченно из L_p в $I^\alpha(L_p)$. Обозначим

$$M_1\varphi=\int_a^x\frac{u(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt, \quad M_2\varphi=\int_x^b\frac{v(x, t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt.$$

Лемма 31.4. *Пусть* $-\infty<a<b<\infty$, $0<\alpha<1$, $1\leqslant p<\infty$. *Оператор* M_1 *с функцией* $u(x, t)$, *удовлетворяющей условиям 1) и 2), действует ограниченно из* $L_p(a, b)$ *в* $I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]$. *Если* $u(x, x)\neq 0$, $a\leqslant x\leqslant b$, *то* $M_1[L_p(a, b)]=I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]$.

Доказательство. Пусть $p>1$. Имеем

$$M_1\varphi=\int_a^x\frac{u(t, t)\,\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt+T_1\varphi,$$

где T_1 — оператор (31.59). Покажем, что T_1 ограничен из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha}_{a+}[L_p(a, b)]$. Убедимся в том, что $T_1(L_p) \subset I^{\alpha}_{a+}[L_p(a, b)]$, с помощью теоремы 13.3. Пусть в соответствии с этой теоремой

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \quad a<x<b,$$

где $f(t) = (T_1\varphi)(t)$, $-\infty < t < b$, и предполагается, что $\varphi(s) \equiv 0$ при $s < a$. Простыми преобразованиями получаем

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(x) = \int_a^{x-\varepsilon} \varphi(s)\, ds \int_s^{x-\varepsilon} \frac{u(x, s)-u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt + \Gamma(\alpha) \int_0^{\infty} \mathrm{k}(s)\, ds \times$$

$$\times \int_a^{x-\varepsilon s} \frac{u(x, t)-u(t, t)}{x-t}\, \varphi(t)\, dt, \tag{31.61}$$

где $\mathrm{k}(s)$ — функция (6.10). Отсюда несложными преобразованиями, предоставляемыми читателю, получается, что $\|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_p \leqslant c$, где c не зависит от ε, и потому $T_1\varphi \in I^{\alpha}(L_p)$ для $\varphi \in L_p$. Следовательно, в силу теоремы 13.3

$$T_1\varphi = I^{\alpha}_{a+} V_1\varphi, \quad V_1\varphi = \mathbf{D}^{\alpha}_{a+} T_1\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\alpha\psi_\varepsilon(x)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

В силу (31.61) и равенства (6.11) имеем

$$V_1\varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x \frac{u(x, s)-u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt. \tag{31.62}$$

Ядро этого интегрального оператора мажорируется с учетом (31.56) функцией $\mathrm{const}\,(x-s)_+^{\lambda-1}$, и потому оператор V_1 ограничен в L_p как оператор со слабой особенностью. Это равносильно ограниченности оператора T_1 из L_p в $I^{\alpha}_{a+}[L_p(a, b)]$.

Далее, имеем $M_1\varphi = I^{\alpha}_{a+}[\Gamma(\alpha)\, u(t, t)\, \varphi(t) + V_1\varphi]$. Остается заметить, что V_1 — вольтерров оператор со слабой особенностью, и поэтому при $u(t, t) \neq 0$ оператор в квадратных скобках отображает L_p на себя взаимно однозначно.

Остался случай $p=1$. Так как предыдущее равенство выполняется для $\varphi \in L_p$, $p>1$, то, следовательно, оно выполняется на плотном в L_1 множестве. Поскольку операторы M_1, I^{α}_{a+}, V_1 ограничены в L_1, то это равенство по непрерывности распространяется на все пространство L_1. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2). Операторы M_1, M_2 ограничены из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$, $-\infty < a < b < \infty$, $0<\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$.*

Действительно, в силу симметрии справедливо утверждение леммы 31.4 для оператора M_2 о действии из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha}_{b-}[L_p(a, b)]$, после чего остается сослаться на совпадение образов: $I^{\alpha}_{a+}[L_p(a, b)] = I^{\alpha}_{b-}[L_p(a, b)]$ при $1<p<1/\alpha$.

Следствие 2. *Пусть $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условию 1). Операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$, $-\infty < a < b < \infty$, $0<\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$.*

Действительно, подобно следствию 1 достаточно рассмотреть оператор T_1. Его полная непрерывность из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$ равносильна полной

непрерывности оператора (31.62) в $L_p(a, b)$. Так как, согласно сказанному выше при доказательстве леммы 31.4, ядро оператора V_1 мажорируется ядром $(x-s)_+^{\lambda-1}$ со слабой особенностью, то оператор V_1 вполне непрерывен в L_p (см., например, книгу М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника, П. Е. Соболевского [1, с. 97]).

Результат о нетеровости оператора (31.55) дается тогда следующей теоремой, в которой

$$G(x) = \frac{u(x, x) + v(x, x)\, e^{-i\alpha\pi}}{u(x, x) + v(x, x)\, e^{i\alpha\pi}} = e^{i\theta(x)}.$$

Теорема 31.12. *Пусть функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2). Для того чтобы оператор (31.55) был нетеров из L_p, $1<p<1/\alpha$, в $I^\alpha(L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\ u^2(x, x) + v^2(x, x) \neq 0,\ a \leqslant x \leqslant b; \tag{31.63}$$

$$2)\ \theta(a) \neq 2\pi \frac{1-\alpha p}{p} \pmod{2\pi},\ \theta(b) \neq \frac{2\pi}{p'} \pmod{2\pi}. \tag{31.64}$$

При выполнении этих условий индекс оператора M равен

$$\varkappa = \varkappa_{L_p \to I^\alpha(L_p)} = \left[\frac{1}{p} - \alpha - \frac{\theta(a)}{2\pi}\right] + \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} + \frac{1}{p}\right]. \tag{31.65}$$

Доказательство. В силу представления (31.57) и теорем 31.2 и 31.3 нетеровость оператора M из L_p в $I^\alpha(L_p)$ равносильна нетеровости оператора N_α из L_p в L_p. Нетеровость же сингулярного оператора N_α в L_p равносильна нетеровости сингулярного оператора

$$a_1(x)\,\psi(x) + \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{a_2(y)}{y-x}\,\psi(y)\,dy \tag{31.66}$$

в пространстве $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x) = (x-a)^{-\alpha p}$. Так как сингулярный оператор и оператор умножения на непрерывную функцию коммутируют с точностью до слагаемого, вполне непрерывного в $L_p(\rho)$ (см., например, И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [3, 4]), то критерий нетеровости оператора (31.66) дан в теореме 31.7. Применяя последнюю, мы и получаем утверждение теоремы 31.12.

Замечание 31.4. Теорема 31.12 распространяется на случай пространства $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, $-1 < \mu < p-1$, $-1 < \nu < p-1$. При этом в соответствии с теоремой 31.7 нужно заменить условия (31.64) на условия $\theta(a) \neq 2\pi\left(\frac{1+\mu}{p} - \alpha\right)$, $\theta(b) \neq -2\pi\frac{1+\nu}{p} \times$ $\times \pmod{2\pi}$ и аналогично изменить (31.65), см. по этому поводу литературные указания в § 34.

Замечание 31.5. Подобно теореме 31.12 имеет место теорема о нетеровости (в смысле определения 31.3) оператора M в рамках весовых гельдеровских пространств $H_0^\lambda(\rho)$, см. литературные указания в § 34.

Замечание 31. 6. При $1/p<\alpha<1$ имеет место подобное теореме 31.12 утверждение о нетеровости оператора M из L_p в специальное пространство; см. об этом далее в § 33.

Остановимся на частном случае уравнения (31.55):

$$\int_0^x \frac{u(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt = f(x),\quad 0<\alpha<1. \tag{1.67}$$

В случае $u(x, x) \neq 0$ оно приводится к уравнению Вольтерра второго рода. Действительно, в этом случае уравнение (31.57) принимает вид $\Gamma(\alpha) \times$ $\times I_{a+}^{\alpha}[u(t, t)\varphi(t)] + T_1\varphi = f$. Обращая здесь оператор дробного интегрирования I_{a+}^{α}, получаем, согласно (31.62), уравнение

$$u(x, x)\varphi(x) + \frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\int_a^x \mathscr{K}(x, s)\varphi(s)\,ds = \mathbf{D}_{a+}^{\alpha} f, \tag{31.68}$$

где

$$\mathscr{K}(x, s) = \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{x-s}\int_0^1 \frac{u(x, s) - u(s+\xi(x-s), s)}{\xi^{1-\alpha}(1-\xi)^{1+\alpha}}\,ds.$$

Здесь $|\mathscr{K}(x, s)| \leqslant c(x-s)^{\lambda-1}$ при $\lambda > \alpha$, если $u(x, s)$ удовлетворяет условию (31.56), и тем самым с учетом леммы 31.4 получена следующая

Теорема 31.13. *Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет условию (31.56), $u(x, x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $u(x, x) \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. Для $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$, $p \geqslant 1$, уравнение (31.67) равносильно уравнению Вольтерра второго рода*

$$\varphi(x) + \int_a^x A(x, s)\varphi(s)\,ds = g(x), \tag{31.69}$$

где $g(x) = \dfrac{1}{u(x, x)}(\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)$, а ядро $A(x, s) = \dfrac{\alpha\pi\mathscr{K}(x, s)}{\sin\alpha\pi\, u(x, x)}$ имеет слабую особенность. Поэтому уравнение (31.67) однозначно и безусловно разрешимо в $L_p(a, b)$ для любых $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$.

Аналогично можно рассмотреть и случай $\alpha \geqslant 1$, если предположить, что $u(x, t)$ дифференцируема по x до порядка $[\alpha]$ и что $(\partial^{[\alpha]} u(x, t))/\partial x^{[\alpha]}$ удовлетворяет условию (31.56).

4°. Об устойчивости решений. Решения интегральных уравнений первого рода, вообще говоря, неустойчивы, и задача обращения таких уравнений относится к некорректным задачам. Простейшее уравнение первого рода — уравнение Абеля

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a, \tag{31.70}$$

не обладает свойством устойчивости, например, в $C([a, b])$. В самом деле, выберем $f_n(x) = n^{-\alpha}[(x-a)/(b-a)]^n$, так что $\|f_n\|_C = n^{-\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. Решение $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} f_n$ уравнения (31.70), согласно (2.26), равно

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-\alpha} \frac{(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)}{n^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1-\alpha)},$$

так что

$$\|\varphi_n\|_C = \frac{(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)}{n^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1-\alpha)} \to \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

в силу (1.66). Устойчивость не имеет места и в $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в чем можно убедиться с помощью того же контрпримера, подправив его сле-

дующим образом:

$$f_n(x) = n^{-\alpha+1/p}\,[(x-a)/(b-a)]^n\,, \tag{31.71}$$

так что

$$\|f_n\|_p = \frac{(b-a)^{1/p}}{n^{\alpha-1/p}\,(np+1)^{1/p}} \to 0, \quad \text{а } \|\varphi_n\|_p \to \frac{(b-a)^{1/p-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\,p^{1/p}} \neq 0 \tag{31.72}$$

при $n \to \infty$.

Неустойчивость решений уравнений первого рода отражает тот простой факт, что оператор, порожденный левой частью уравнения, отображает рассматриваемое пространство решений не на все это пространство, а на его существенно более узкую часть. Поэтому обратный оператор не ограничен. Сказанное означает, что для уравнений первого рода естественно оценивать близость решений и близость правых частей в разных терминах, именно близость правых частей должна оцениваться в более сильной метрике, т. е. нужно рассматривать решения, например, уравнения (31.70) в одном пространстве X, а правые части брать из другого пространства Y так, чтобы обратный оператор был ограничен из Y в X. Такой подход и обеспечит устойчивость уравнения. Пространства $X=L_p$, $Y=L_q$ не подходят для этой цели ни при каких $p\in[1, \infty]$, $q\in[1,\infty]$, так как обратный оператор не будет ограничен из L_q в L_p. Устойчивости можно добиться, взяв $Y=I^{\alpha}_{a+}(X)$, т. е. требуя, чтобы класс правых частей состоял из функций, представимых в виде дробного интеграла от функций из заданного пространства. (См. также аналогичные рассуждения в связи с нетеровостью интегральных уравнений первого рода в конце п. 1° этого параграфа.) Другими словами, устойчивость для уравнения, например, (31.67) естественно ставить так, чтобы не $\|f\|_X \to 0$ влекло $\|\varphi\|_X \to 0$, а условие $\|\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f\|_X \to 0$ влекло $\|\varphi\|_X \to 0$. Это означает, что при такой постановке вопроса об устойчивости мы заинтересованы в априорной оценке

$$\|\varphi\|_X \leqslant c\,\|\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f\|_X\,. \tag{31.73}$$

Разумеется, сформулированная мысль тривиальна для простейшего уравнения (31.70), но она оказывается содержательной и полезной для более общих уравнений (31.67), а тем более (31.55) или (31.41). Она эффективна и при выборе, например, $X = L_p$ или $X = H^{\lambda}$, $X = H^{\lambda}(\rho)$ ввиду того, что пространства $I^{\alpha}_{a+}(X)$ хорошо изучены и охарактеризованы при таких X, см. § 13 (напомним, что в § 18, п. 4° показано совпадение пространства $I^{\alpha}_{a+}(L_p)$ с дробным соболевским пространством $H^{\alpha,p}$).

Ограничимся иллюстрацией сказанного на примере уравнения (31.67), сформулировав следующую теорему.

Теорема 31.14. *Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 31.13. Решение уравнения (31.67) в любом из пространств $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$, существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$\|\varphi\|_p \leqslant c\,\|\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f\|_p, \tag{31.74}$$

где c не зависит от $f\in I^{\alpha}_{a+}(L_p)$.

Доказательство. В силу теоремы 31.13 достаточно доказать оценку (31.74). Она вытекает из справедливости оценки $\|\varphi\|_p \leqslant c\|g\|_p$ для уравнения Вольтерра (31.69) второго рода с ядром, имеющим слабую особенность. Последнее вытекает из ограниченности в L_p оператора, обращающего такие уравнения (см., например, в книге С. Г. Михлина [1] оценку (6) на с. 44 и следствие на с. 94).

Из теоремы 31.14 с учетом теоремы 13.5 вытекает

Следствие. *Если $u(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 31.12, то решение $\varphi(x)$ уравнения (31.67) удовлетворяет оценке*

$$\|\varphi\|_p \leqslant c\left(\|f\|_p + \int_0^{b-a} t^{-1-\alpha}\,\omega_p(f, t)\,dt\right), \quad 1 < p < 1/\alpha,$$

где $\omega_p(f, t) = \|f(x+t) - f(x)\|_p$. *Отсюда, очевидно, вытекает простая оценка* $\|\varphi\|_p \leqslant c\,\|f\|_{H^\lambda}$, $1 < p < 1/\alpha$, $0 < \alpha < \lambda \leqslant 1$.

Можно получить аналогичные априорные оценки для более общих уравнений (31.55), (31.44). Для этого нужно воспользоваться осуществленным в п. 3° сведением этих уравнений к сингулярным интегральным уравнениям и устойчивостью последних. Останавливаться на этом не станем.

Мы не касаемся здесь вопросов, связанных с регуляризацией (по А. Н. Тихонову) некорректной задачи, какой является задача решения интегрального уравнения первого рода. Этим вопросам посвящена обширная литература. Можно упомянуть, например, относящуюся непосредственно к уравнениям типа Абеля работу В. А. Желудева [1], см. также [2], где приведены основанные на регуляризации по А. Н. Тихонову численные методы решения. Отметим также относящуюся к вопросам устойчивости дробного дифференцирования функций (в том числе и многих переменных) работу Т. И. Савеловой [1].

§ 32. УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данном параграфе излагается решение интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмическими ядрами и переменным верхним пределом интегрирования

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)\,(x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, \varphi(t)\,dt = f(x), \quad a < x < b, \tag{32.1}$$

где $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной оси, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < \infty$, $\gamma > b-a$. В частности, приводится формула обращения операторов свертки вида

$$(I_{a+}^{\alpha;\beta}\varphi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, \varphi(t)\,dt = f(x), \quad a < x < b. \tag{32.2}$$

Решение последнего уравнения в отличие от рассмотренного в § 2 случая $\beta = 0$ требует привлечения специальных функций типа функций Вольтерра. Это обусловлено по существу следующим. В случае натуральной степени логарифма (при $\beta = m = 1, 2, \ldots$) функция $x^{\alpha-1}\ln^m x$ (которую естественнее рассматривать вместо функции $x^{\alpha-1}\ln^m(\gamma/x)$) получается обычным m-кратным дифференцированием степенной функции $x^{\alpha-1}$ по α: $x^{\alpha-1}\ln^m x = d^m x^{\alpha-1}/d\alpha^m$. Поэтому естественно ожидать, что и степенно-логарифмическую функцию $x^{\alpha-1}\ln^\beta(\gamma/x)$ с произвольной действительной степенью логарифма β можно получить из функции $(\gamma/x)^{\alpha-1}$ с помощью дробного интегродифференцирования по α. Если мы проделаем это, то получим, однако, не саму функцию $x^{\alpha-1}\ln^\beta(\gamma/x)$, а некоторую специальную функцию (функцию Вольтерра), главный член асимптотики которой равен $x^{\alpha-1}\ln^\beta(\gamma/x)$ (см. (32.11) и (32.37) ниже).

В связи с этим сначала приводятся свойства таких специальных функций Вольтерра и устанавливаются некоторые интегральные тождества для них. Затем решаются в замкнутой форме интегральные уравнения вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^m A_{mk} \ln^k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad a < x < b, \ \alpha > 0, \tag{32.3}$$

с постоянными коэффициентами A_{mk} и целыми неотрицательными степенями логарифмов. В заключение приводится критерий разрешимости уравнений (32.1) и, в частности, уравнений (32.2). Отметим, что здесь в отличие от уравнений (32.3) $\varphi(t)$ выражается через решения некоторых интегральных уравнений Вольтерра. Заметим также, что все полученные ниже результаты переносятся и на соответствующие (32.1)—(32.3) интегральные уравнения с переменным нижним пределом.

1°. Специальные функции Вольтерра и некоторые их свойства. Рассмотрим функцию

$$\mu(x, \sigma, \alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+\tau}\,\tau^\sigma\,d\tau}{\Gamma(\alpha+\tau+1)\,\Gamma(\sigma+1)}, \tag{32.4}$$

называемую функцией Вольтерра (см. монографии Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3, § 18.3, с. 229] и М. М. Джрбашяна [2, гл. V, § 1.1, с. 261]). Приведем некоторые ее свойства. Функция $\mu(x, \sigma, \alpha)$ определена при $\operatorname{Re}\sigma > -1$, является аналитической функцией от x с точками ветвления $x=0$ и $x=\infty$ и не имеет других особенностей. Она является целой функцией от α. Ее можно доопределить до целой функции от σ с помощью равенств

$$\mu(x, \sigma, \alpha) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\sigma+n-1)} \int_0^\infty \tau^{\sigma+n} \frac{d^n}{d\tau^n}\left[\frac{x^{\alpha+\tau}}{\Gamma(\alpha+\tau+1)}\right] d\tau, \tag{32.5}$$

$$\operatorname{Re}\sigma > -n-1,$$

откуда, в частности,

$$\mu(x, -n, \alpha) = (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{32.6}$$

Из (32.4) вытекает формула дифференцирования

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\mu(x, \sigma, \alpha) = \mu(x, \sigma, \alpha-n). \tag{32.7}$$

Асимптотическое разложение функции Вольтерра в нуле выражается формулой

$$\mu(x, \sigma, \alpha) = x^\alpha \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\sigma-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n(\sigma+1)_n}{n!}\,\mu(1, -n-1, \alpha)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-n} + O\left(\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-N}\right)\right], \quad \operatorname{Re}\sigma > -1, \quad \left|\arg\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \pi,$$

$$x \to 0, \tag{32.8}$$

где $(\sigma+1)_n$ — символ Похгаммера (1.45).

В приведенной ниже лемме установим два используемых в дальнейшем интегральных тождества, содержащих некоторые специальные функции. Обозначим для краткости

$$(I_-^\beta g)(\alpha) = \begin{cases} (I_-^\beta g)_{\mathbb{R}}(\alpha), & \text{если } \beta > 0, \\ (\mathcal{D}_-^{-\beta} g)(\alpha), & \text{если } \beta < 0, \end{cases} \tag{32.9}$$

где I_-^β и $\mathcal{D}_-^{-\beta}$ — левосторонние дробный интеграл (5.3) и дробная производная (5.8), рассматриваемые на полуоси $(0, +\infty)$. Символом $I_\tau^\beta[g(\tau, x)](t)$ будем обозначать применение оператора I_-^β к функции $g(\tau, x)$ по переменной τ в точке t. Введем функции

$$\nu(x) = \mu(x,\ 0,\ 0), \quad \nu_h(x) = (d/dx)\,\nu(xe^h), \tag{32.10}$$

$$\mu_{t,\beta}(x) = I_\tau^\beta \left[\frac{1}{\Gamma(\tau)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\tau-1}\right](t), \quad -\infty<\beta<\infty, \tag{32.11}$$

которые также будем называть функциями Вольтерра. Справедлива

Лемма 32.1. *Для функций Вольтерра (32.10), (32.11) имеют место следующие интегральные тождества:*

$$\int_0^x t^{\alpha-1}\,[\ln t + h - \psi(\alpha)]\,\nu_h(x-t)\,dt = -x^{\alpha-1},\ \alpha>0, \tag{32.12}$$

$$\int_0^x \mu_{\alpha,\beta}(t)\,\mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,dt = \gamma,\quad 0<\alpha<1,\ -\infty<\beta<\infty. \tag{32.13}$$

Доказательство. Пусть $h\in R^1$. Рассмотрим непосредственно проверяемое с помощью (1.68), (1.69) равенство

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}(x-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\sigma)}\,e^{h(\alpha+\sigma-1)}\,dt = \frac{x^{\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\,e^{h(\alpha+\sigma-1)},\quad \alpha>0,\ \sigma>0. \tag{32.14}$$

Применим к нему сначала оператор интегрирования I_σ^1 по переменной σ, а затем оператор дифференцирования I_α^{-1} по переменной α. Тогда, учитывая формулу Стирлинга (1.63), получим равенство

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,e^{h\alpha}\left[\ln t + h - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right]dt \int_\sigma^\infty \frac{(x-t)^{\tau-1}\,e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)}\,d\tau =$$

$$= -\frac{x^{\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma)}\,e^{h(\alpha+\sigma-1)}.$$

Полагая здесь в обеих частях $\sigma=1$ и учитывая (1.67), (32.4) и (32.6), приходим к соотношению

$$\int_0^x t^{\alpha-1}\,[\ln t + h - \psi(\alpha)]\,\nu((x-t)\,e^h)\,dt = x^\alpha/\alpha,\quad \alpha>0. \tag{32.15}$$

Продифференцировав его по x и приняв во внимание (32.7), а также оценку $\nu(x)=O((\ln(1/x))^{-1})$ при $x\to+0$, вытекающую из (32.8), в результате в силу (32.10) выводим первое доказываемое тождество (32.12).

Пусть теперь $-\infty<\beta<\infty$. По аналогии с предыдущим случаем $\beta=1$, где применялись обычные операторы целого интегрирования и дифференцирования, преобразуем равенство (32.14), применив к нему сначала оператор I_α^β (по переменной α), а затем оператор $I_\sigma^{-\beta}$ (по переменной σ) (см. (32.9)). Положив в полученном соотношении $\sigma=1-\alpha\,(0<\alpha<1)$ и $h=-\ln\gamma$, $\gamma>b-a$, и учтя (32.11), в результате придем ко второму тождеству (32.13). Лемма доказана.

Замечание 32.1. Согласно (32.8), функция $\mu_{\alpha,\beta}(x)$, определяемая формулой (32.11), в нуле имеет асимптотическое поведение вида

$$\mu_{\alpha,\beta}(x) = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{\gamma}{x}\right)^{-\beta}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \beta\,\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)\ln^{-1}\frac{\gamma}{x} + \right.$$

$$\left. + O\left(\ln^{-2}\frac{\gamma}{x}\right)\right],\quad x\to+0. \tag{32.16}$$

Поэтому тождество (32.13) можно непрерывно распространить на случаи $\alpha=0$, $\beta>0$ и $\alpha=1$, $\beta<0$. Если в (32.16) положить $\alpha=1$, $\beta=1$, то в силу (32.7) для функции $v_h(x)$, определяемой равенством (32.10), несложно получить в нуле следующую асимптотику:

$$v_h(x) = O(x^{-1}\ln^{-2}(1/x)) \quad \text{при } x \to +0. \tag{32.17}$$

2°. Решение уравнений с целыми неотрицательными степенями логарифмов. Рассмотрим вначале простейшее уравнение вида (32.3) для случая $m=1$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,[\ln(x-t)+A]\,\varphi(t)\,dt = f(x),\ \alpha>0 \tag{32.18}$$

(без ограничения общности полагаем $A_{11}=1$ и $A_{10}=A$). К обеим частям этого уравнения применим оператор

$$(J_{a+}^h g)(x) = \int_a^x v_h(x-t)\,g(t)\,dt, \tag{32.19}$$

где v_h имеет вид (32.10), и положим h—$\psi(\alpha)=A$. Тогда из тождества (32.12) следует, что уравнение (32.18) разрешимо вместе с уравнением

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt = -\int_a^x v_h(x-t)\,f(t)\,dt. \tag{32.20}$$

Согласно результатам § 2 единственное решение последнего уравнения, а следовательно, и уравнения (32.18) выражается формулой

$$\varphi(x) = -(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha} J_{a+}^h f)(x), \tag{32.21}$$

где $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}$ — дробная производная Римана—Лиувилля (2.30).

Рассмотрим теперь уравнение (32.3) при $m=2$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,[\ln^2(x-t)+A_{21}\ln(x-t)+A_{20}]\,\varphi(t)\,dt = f(x),\ \alpha>0 \tag{32.22}$$

(без ограничения общности полагаем $A_{22}=1$). Взяв в формуле (32.12) $h=h_2$, продифференцировав ее по α и прибавив к полученному соотношению равенство (32.12), умноженное на h_1—$\psi(\alpha)$, получим

$$\int_0^x t^{\alpha-1}\{\ln^2 t + [h_2+h_1-2\psi(\alpha)]\ln t + [h_2-\psi(\alpha)][h_1-\psi(\alpha)] - \\ -\psi'(\alpha)\}\,v_{h_2}(x-t)\,dt = -x^{\alpha-1}[\ln x + h_1 - \psi(\alpha)],\quad \alpha>0. \tag{32.23}$$

Допустим теперь, что постоянные h_1, h_2 связаны с постоянными A_{21}, A_{20} равенствами

$$h_1+h_2-2\psi(\alpha) = A_{21},\quad [h_1-\psi(\alpha)][h_2-\psi(\alpha)] - \psi'(\alpha) = A_{20}, \tag{32.24}$$

а $J_{a+}^{h_1}$, $J_{a+}^{h_2}$ — операторы (32.19) с $h=h_1$ и $h=h_2$ соответственно. Применив к обеим частям уравнения (32.22) сначала оператор $J_{a+}^{h_2}$, а затем оператор $J_{a+}^{h_1}$, найдем согласно (32.23), (32.24), что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt = (-1)^2\,(J_{a+}^{h_1} J_{a+}^{h_2} f(t))(x). \tag{32.25}$$

Отсюда вытекает, что уравнение (32.22) разрешимо вместе с последним уравнением и его единственное решение имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{i}(-1)^2 (\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} J^{h_1}_{a+} J^{h_2}_{a+} f)(x). \tag{32.26}$$

Анализируя решение уравнений (32.18) и (32.22), видим, что основную роль в построении их решений (32.21) и (32.26) играли соотношения (32.12) и (32.23) соответственно. Аналогично этому для решения уравнения (32.3) с произвольным m решающую роль играет обобщающее (32.12) и (32.23) тождество, содержащееся в следующем утверждении.

Лемма 32.2. *Пусть $m=1, 2, \ldots$, а постоянные $A_{mj}=A_{mj}(m, \alpha)$ определяются рекуррентными формулами*

$$A_{mm}(m, \alpha) = 1, \ m \geqslant 1; \quad A_{10}(1, \alpha) = h_1 - \psi(\alpha), \ \ldots, \ A_{10}(m, \alpha) = h_m - \psi(\alpha);$$

$$A_{m,m-1}(m, \alpha) = A_{m-1,m-2}(m, \alpha) + A_{1,0}(1, \alpha), \quad m \geqslant 2;$$

$$A_{mj}(m, \alpha) = A_{m-1,j}(m, \alpha) A_{10}(1, \alpha) + \frac{d}{d\alpha} A_{m-1,j}(m, \alpha) + A_{m-1,j-1}(m, \alpha), \ j = 1, \ldots, m-2, \ \text{если } m \geqslant 3; \tag{32.27}$$

$$A_{m0}(m, \alpha) = A_{m-1,0}(m, \alpha) A_{10}(1, \alpha) + \frac{d}{d\alpha} A_{m-1,0}(m, \alpha), \ m \geqslant 2.$$

Тогда имеет место тождество

$$\int_0^x t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{m} A_{mj}(m, \alpha) \ln^j t \ \nu_{h_m}(x-t)\, dt = -x^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-1,j}(m-1, \alpha) \ln^j x. \tag{32.28}$$

Доказательство. При $m = 1$ в силу обозначений (32.27) имеем $A_{11}(1, \alpha) = 1$, $A_{10}(1, \alpha) = h_1 - \psi(\alpha)$, а при $m = 2$ имеем, что $A_{22}(2, \alpha) = 1$, а $A_{21}(2, \alpha)$ и $A_{20}(2, \alpha)$ выражаются формулами (32.24). Поэтому равенство (32.28) при $m = 1$ совпадает с (32.12), а при $m = 2$ — с (32.23). Заменяя в (32.23) h_1 на h_2, h_2 на h_3, дифференцируя эту формулу по α и прибавляя к полученному соотношению само равенство (32.23) (при $h_1 = h_2$, $h_2 = h_3$), умноженное на $A_{10}(1, \alpha) = h_1 - \psi(\alpha)$, придем к тождеству (32.28) при $m = 3$. Продолжив этот процесс и пользуясь методом индукции, установим, что тождество (32.28) имеет место при любом натуральном m. Лемма доказана.

Пусть теперь постоянные $h_1, \ldots, h_m$ связаны с постоянными $A_{m,m-1}, \ldots, A_{m0}$ ($A_{mm} = 1$) соотношениями (32.27), а $J^{h_1}_{a+}, \ldots, J^{h_m}_{a+}$ — операторы (32.19) с $h = h_1, \ldots, h_m$ соответственно. Применяя к обеим частям уравнения (32.3) последовательно операторы $J^{h_m}_{a+}, \ldots, J^{h_1}_{a+}$, используя лемму 32.2 и результаты § 2, приходим к следующей теореме.

Теорема 32.1. *Пусть постоянные $h_1, \ldots, h_m$ связаны с постоянными $A_{mm} = 1$, $A_{m,m-1}, \ldots, A_{m0}$ соотношениями (32.27), а $J^{h_1}_{a+}, \ldots, J^{h_m}_{a+}$ — операторы (32.19). Тогда уравнение (32.3) разрешимо вместе с уравнением*

$$I^{\alpha}_{a+} \varphi = (-1)^m J^{h_1}_{a+} \ldots J^{h_m}_{a+} f \tag{32.29}$$

и его единственное решение имеет вид

$$\varphi = (-1)^m \mathcal{D}^{\alpha}_{a+} J^{h_1}_{a+} \ldots J^{h_m}_{a+} f, \tag{32.30}$$

где I^{α}_{a+} — дробный интеграл (2.17), а $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$ — дробная производная (2.30).

В частности, при $\alpha = 1$ единственное решение уравнения (32.3) с чисто логарифмическим ядром имеет вид

$$\varphi(x) = (-1)^m \frac{d}{dx} J^{h_1}_{a+} \ldots J^{h_m}_{a+} f. \tag{32.31}$$

Исследуем теперь соотношения (32.27), отражающие связь между постоянными M_{mm}, $M_{m,m-1}$, ..., M_{m0}, входящими в уравнение (32.3), и постоянными h_1, ..., h_m, содержащимися в его решении (32.30). При $m=2$ формулы (32.27) совпадают с равенствами (32.24), которые равносильны по теореме Виета тому, что числа $h_1-\psi(\alpha)$ и $h_2-\psi(\alpha)$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - A_{21}z + A_{20} + \psi'(\alpha) = 0. \tag{32.32}$$

При $m = 3$ равенства (32.27) принимают вид

$$A_{33}(3, \alpha) = 1, \quad A_{32}(3, \alpha) = h_1 + h_2 + h_3 - 3\psi(\alpha),$$

$$A_{31}(3, \alpha) = [h_1 - \psi(\alpha)][h_2 - \psi(\alpha)] + [h_1 - \psi(\alpha)][h_3 - \psi(\alpha)] + [h_2 - \psi(\alpha)][h_3 - \psi(\alpha)] - 3\psi'(\alpha),$$

$$A_{30}(3, \alpha) = [h_1 - \psi(\alpha)][h_2 - \psi(\alpha)][h_3 - \psi(\alpha)] - A_{32}(3, \alpha)\psi'(\alpha) - \psi''(\alpha).$$

По теореме Виета это равносильно тому, что числа $h_1 - \psi(\alpha)$, $h_2 - \psi(\alpha)$ и $h_3 - \psi(\alpha)$ являются корнями кубического уравнения

$$z^3 - A_{32}z^2 + [A_{31} + 3\psi'(\alpha)]z - [A_{30} + A_{32}\psi'(\alpha) + \psi''(\alpha)] = 0. \tag{32.33}$$

Аналогично этому и в общем случае произвольного натурального m числа $h_1 - \psi(\alpha)$, ..., $h_m - \psi(\alpha)$ являются корнями некоторого алгебраического уравнения m-й степени

$$z^m - a_{m-1}z^{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1}a_1 z + (-1)^m a_0 = 0, \tag{32.34}$$

у которого коэффициенты a_{m-1}, ..., a_1, a_0 выражаются определенным образом через постоянные $A_{m,m-1}$, ..., A_{m0} ($A_{mm} = 1$), входящие в уравнение (32.3). Например, можно установить, что $a_{m-1} = A_{m,m-1}$.

3°. Решение уравнений с действительными степенями логарифмов. Перейдем к решению уравнения (32.1). Сразу же отметим, что из равенства (32.13) вытекает

Лемма 32.3. *Разрешимость в $L(a, b)$ уравнения*

$$\int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{32.35}$$

равносильна разрешимости в $L(a, b)$ уравнения

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,f(t)\,dt, \tag{32.36}$$

где $\mu_{\alpha,\beta}(x)$ и $\mu_{1-\alpha,-\beta}(x)$ — функции (32.11).

Введем обозначение

$$u_{\alpha,\beta} \equiv u_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1}\ln^{-\beta}\dfrac{\gamma}{x}, & \alpha > 0, \ -\infty < \beta < \infty, \\ \beta\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{-1}\ln^{-\beta-1}\dfrac{\gamma}{x}, & \alpha = 0, \ 0 < \beta < \infty, \end{cases} \tag{32.37}$$

и отметим, что $u_{\alpha,\beta}(x)$ является главным членом асимптотики функции Вольтерра (32.11): $\mu_{\alpha,\beta}(x) = u_{\alpha,\beta}(x)\,[1 + O(1)]$ при $x \to +0$.

В дальнейшем основную роль играет следующая

Лемма 32.4. *Пусть функция $c(x)$ абсолютно непрерывна на $(0, b-a]$ и выполняются соотношения*

$$c_0 = \lim_{x\to 0} c(x), \quad r(x) = \frac{c(x)\,u_{\alpha,\beta}(x)}{\mu_{\alpha,\beta}(x)} - c_0. \tag{32.38}$$

Тогда для любой функции $\varphi(x)\in L(a, b)$ *имеет место равенство*

$$\int_0^x c(x-t)\,u_{\alpha,\beta}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = c_0\int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\,dt\int_a^t \psi(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{32.39}$$

где

$$\psi(x) = -\frac{1}{\gamma}\int_0^x r'(y)\,dy\int_0^y \mu_{\alpha,\beta}(t)\,\frac{d}{dx}\,\mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,dt \in L(0,\ b-a). \tag{32.40}$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\psi(x)\in L(0,\ b-a)$. Пусть $\alpha>0$, $\beta>0$, а $[\beta]$ — целая часть β. В силу (32.16) имеем

$$\int_0^{b-a}|\psi(x)|\,dx \leqslant c\int_0^{b-a}|r'(y)|\,dy\int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}}\int_y^{b-a}\frac{\ln^{-\beta}\frac{\gamma}{t}\,\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dx =$$

$$= c\int_0^{b-a}|r'(y)|\,dy\int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}}\int_y^{b-a}\left[\ln\frac{t}{x-t}+\ln\frac{\gamma}{t}\right]^{[\beta]}\left[\left(\ln^{\beta-[\beta]}\frac{\gamma}{x-t} - \ln^{\beta-[\beta]}\frac{\gamma}{t}\right)+\ln^{\beta-[\beta]}\frac{\gamma}{t}\right]\ln^{-\beta}\frac{\gamma}{t}\,(x-t)^{-1-\alpha}\,dx.$$

Применяя формулу бинома Ньютона и осуществляя замену $x = t\tau$, получаем

$$\int_0^{b-a}|\psi(x)|\,dx \leqslant c\sum_{i=0}^{[\beta]}\binom{[\beta]}{i}\int_0^{b-a}|r'(y)|\,dy\int_0^y\frac{dt}{t^{1-\alpha}}\int_y^{b-a}\frac{\left|\ln\frac{t}{x-t}\right|^i}{\ln^{\beta-[\beta]+i}\frac{\gamma}{t}}\times$$

$$\times\frac{\left(\left|\ln\frac{t}{x-t}\right|^{\beta-[\beta]}+\ln^{\beta-[\beta]}\frac{\gamma}{t}\right)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dx \leqslant c\sum_{i=0}^{[\beta]}\binom{[\beta]}{i}\int_0^{b-a}|r'(y)|\,dy\times$$

$$\times\int_0^y\frac{dt}{t}\int_{y/t}^{(b-a)/t}\frac{\left|\ln\frac{1}{\tau-1}\right|^{\beta-[\beta]+i}+\left|\ln\frac{1}{\tau-1}\right|^i}{(\tau-1)^{1+\alpha}}\,d\tau \leqslant c\sum_{i=0}^{[\beta]}\binom{[\beta]}{i}\times$$

$$\times\int_0^{b-a}|r'(y)|\,dy\left(\int_1^{(b-a)/y}\ln\tau+\int_{(b-a)/y}^{\infty}\ln\frac{b-a}{y}\right)\times$$

$$\times\frac{\left|\ln\frac{1}{\tau-1}\right|^{\beta-[\beta]+i}+\left|\ln\frac{1}{\tau-1}\right|^i}{(\tau-1)^{1+\alpha}}\,d\tau \leqslant c\sum_{i=0}^{[\beta]}\binom{[\beta]}{i}\int_0^{b-a}|r'(y)|\,dy\times$$

$$\times\int_1^{\infty}\frac{\left(\left|\ln\frac{1}{\tau-1}\right|^{\beta-[\beta]+i}+\left|\ln\frac{1}{\tau-1}\right|^i\right)\ln\tau}{(\tau-1)^{1+\alpha}}\,d\tau<+\infty.$$

Случаи $\alpha = 0$, $\beta > 0$ и $\alpha > 0$, $\beta < 0$ рассматриваются аналогично.

Воспользуемся леммой 32.3. Полагая $f(x) = \int_a^x c(x-t)\, u_{\alpha,\beta}(x-t) \times$ $\times \varphi(t)\, dt$ и учитывая (32.38), имеем

$$\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\, f(t)\, dt = \frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\, dt \int_a^t [c_0 \mu_{\alpha,\beta}(t-\tau) +$$

$$+ r(t-\tau)\, \mu_{\alpha,\beta}(t-\tau)]\, \varphi(\tau)\, d\tau = c_0 \int_a^x \varphi(t)\, dt + \frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\, dt \times$$

$$\times \int_a^t r(t-\tau)\, \mu_{\alpha,\beta}(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau. \qquad (32.41)$$

Непосредственно можно проверить, что

$$\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\, dt \int_a^t r(t-\tau)\, \mu_{\alpha,\beta}(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = \int_a^x \psi(t)\, dt.$$

Тогда из (32.41) вытекает, что

$$\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\, f(t)\, dt = c_0 \int_a^x \varphi(t)\, dt + \int_a^x dt \int_a^t \psi(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Но в силу леммы 32.3 справедливо равенство

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t) \left[c_0 \varphi(t) + \int_a^t \psi(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right] dt,$$

откуда следует (32.39). Лемма доказана.

Рассмотрим далее оператор

$$(T_\psi \varphi)(x) = \int_a^x \psi(x-t)\, \varphi(t)\, dt. \qquad (32.42)$$

Он вполне непрерывен в $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и имеет нулевой спектральный радиус (см. статью П. П. Забрейко [1]). Поэтому оператор $c_0 E + T_\psi$ обратим в $L_p(a, b)$ и из леммы 32.4 вытекает следующее утверждение, содержащее критерий разрешимости в $L_p(a, b)$ уравнения (32.1).

Теорема 32.2. *Пусть функция $c(x)$, $c(0) \neq 0$, удовлетворяет условиям леммы 32.4, а $u_{\alpha,\beta}(x)$ имеет вид (32.37). Для того чтобы уравнение*

$$\int_a^x c(x-t)\, u_{\alpha,\beta}(x-t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \qquad (32.43)$$

было разрешимо в $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x)$ был представим в виде

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha,\beta}(x-t)\, \chi(t)\, dt, \quad \chi(t) \in L_p(a, b). \qquad (32.44)$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и находится по формуле

$$\varphi = (c_0 E + T_\psi)^{-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\, f(t)\, dt\right), \qquad (32.45)$$

где $(c_0E + T_\psi)^{-1}$ *— оператор, обратный к оператору*

$$(c_0E + T_\psi)\,\varphi(x) = c_0\varphi(x) + \int_a^x \psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{32.46}$$

а функция $\psi(x)$ *определяется равенствами (32.40), (32.11) и (32.38).*

Следствие. *Для разрешимости в* $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *уравнения (32.2) необходимо и достаточно, чтобы свободный член* f *был представим в виде (32.44). При выполнении этого условия решение* φ *единственно и выражается по формуле*

$$\varphi = (E + T_\psi)^{-1}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\gamma}\int_a^x \mu_{1-\alpha,-\beta}(x-t)\,f(t)\,dt\right). \tag{32.47}$$

Описание класса правых частей f уравнения (32.43) в терминах свертки с функцией Вольтерра $\dfrac{1}{\gamma}\,\mu_{1-\alpha,-\beta}$ содержится в лемме 32.3, которая является обобщением теоремы 2.1 для уравнений вида (32.44).

Замечание 32.2. Нетрудно показать, что равенство $I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi = c$, $\varphi \in L_p$, в случае $p \geqslant 1/\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, вообще говоря, невозможно при $c \neq 0$. Именно если $p > 1/\alpha$, $\beta \in R^1$, или $p = 1/\alpha$, $\beta \geqslant -1 + \alpha$, то $\varphi \equiv c \equiv 0$.

§ 33. НЕТЕРОВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

В настоящем параграфе исследуются на нетеровость уравнения первого рода со степенно-логарифмическими ядрами

$$K\varphi \equiv \int_a^b \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,\ln^\beta\frac{\gamma}{|x-t|}\,\varphi(t)\,dt = f(x),\quad a < x < b, \tag{33.1}$$

где $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной оси, $-\infty < \beta < \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1$ (предполагаем $\beta < -1$ при $\alpha = 0$), $\gamma > b - a$, функция $c(x, t)$ имеет разрыв первого рода на диагонали $x = t$:

$$c(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t < x, \\ v(x, t), & t > x. \end{cases} \tag{33.2}$$

Рассмотренное в § 31 уравнение (31.1) является частным случаем уравнения (33.1) при $0 < \alpha < 1$, $\beta = 0$. Мы изучим нетеровость оператора K в соответствующей корректной постановке: из пространства $L_p \equiv L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, в специальное банахово пространство X. Покажем, что введение в ядро оператора типа потенциала (31.1) множителя $\ln^\beta \dfrac{\gamma}{|x-t|}$, ослабляющего или усиливающего (в зависимости от знака β) особенность ядра на диагонали $x = t$, изменяет только образ оператора K. Нетеровость же оператора (33.1) остается той же в том смысле, что нетеровость K из L_p в X равносильна нетеровости в L_p некоторого сингулярного интегрального оператора, не зависящего от β.

Схема исследования на нетеровость уравнения (33.1) такая же, какая применялась в § 31 для уравнения (31.1) со степенным ядром. Отметим только, что добавление к степени логарифмического множителя значительно усложняет доказательство играющих важную роль теорем вложения для образов операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $I_{b-}^{\alpha,\beta}$ со степенно-логарифмическими

ядрами (см. (21.1)) и тождеств, дающих связь таких операторов с сингулярным интегральным оператором. Для вывода первых используются полученные в § 32 свойства функции Вольтерра (32.11), а для вывода вторых — метод дифференцирования произвольного порядка по параметру в формулах, выражающих связь дробных интегралов с сингулярным. С помощью полученных результатов исследуется нетеровость операторов (33.1).

1°. Теоремы вложения для образов операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $I_{b-}^{\alpha,\beta}$. Пусть $0 \leqslant \alpha < 1$, $-\infty < \beta < \infty$. Напомним, что

$$I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \quad I_{b-}^{\alpha,\beta}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t-x}}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt. \tag{33.3}$$

При $\beta = 0$, $0 < \alpha < 1$, будем использовать запись $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $I_{b-}^{\alpha}\varphi$, так как интегралы (33.3) в этом случае совпадают с дробными интегралами (2.17), (2.18). В случае $\alpha = 0$ множитель $1/\Gamma(\alpha)$ в (33.3) будем опускать и полагать $\beta < -1$.

Введем банаховы пространства функций, представимых операторами со степенно-логарифмическими ядрами (33.3) с плотностью $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$:

$$I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p) = \{f : f = I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi,\ \varphi \in L_p(a, b);\ \|f\|_{I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p)} = \|\varphi\|_{L_p}\}, \tag{33.4}$$

$$I_{b-}^{\alpha,\beta}(L_p) = \{f : f = I_{b-}^{\alpha,\beta}\varphi,\ \varphi \in L_p(a, b);\ \|f\|_{I_{b-}^{\alpha,\beta}(L_p)} = \|\varphi\|_{L_p}\}. \tag{33.5}$$

Теоремы вложения для таких пространств получим как следствие более общего утверждения. Введем более общее, чем (33.4) и (33.5), банахово пространство

$$I_{a+}^{g}(L_p) = \{f : f(x) = \int_a^x g(x-t)\,\varphi(t)\, dt,\quad \varphi \in L_p(a, b);$$

$$\|f\|_{I_{a+}^{g}(L_p)} = \|\varphi\|_{L_p}\},\quad g(x) \in L(0,\ b-a),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{33.6}$$

Из результатов предыдущего параграфа вытекает следующая

Теорема 33.1. *Пусть $\mu_{\alpha,\beta}(x)$ — функция Вольтерра (32.11), $u_{\alpha,\beta}(x)$ — ее главная часть (32.37) вблизи нуля, а $c(x)$ — функция, абсолютно непрерывная на $(0,\ b-a]$, причем $c_0 = \lim\limits_{x\to 0} c(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Если $c_0 \neq 0$, то*

$$I_{a+}^{cu_{\alpha,\beta}}(L_p) = I_{a+}^{\mu_{\alpha,\beta}}(L_p). \tag{33.7}$$

2) *Если $c_0 = 0$, то имеет место вложение*

$$I_{a+}^{cu_{\alpha,\beta}}(L_p) \to I_{a+}^{\mu_{\alpha,\beta}}(L_p) = I_{a+}^{u_{\alpha,\beta}}(L_p), \tag{33.8}$$

причем оператор вложения вполне непрерывен.

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают из леммы 32.4 предыдущего параграфа: первое в силу ограниченности в $L_p(a, b)$ оператора (32.46), второе в силу полной непрерывности в $L_p(a, b)$ оператора Вольтерра (32.42).

Следствие. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \delta < \alpha$ при $\alpha > 0$, $-\infty < \beta_1 < \beta_2 < \infty$. Тогда имеют место вложения*

$$I_{a+}^{\alpha,\beta_1}(L_p) \to I_{a+}^{\alpha,\beta_2}(L_p), \quad \text{если } \alpha \geqslant 0 \ (\beta_2 < -1 \ \text{при } \alpha = 0), \tag{33.9}$$

$$I_{a+}^{\alpha,\beta_1}(L_p) \to I_{a+}^{\alpha,\beta_2}(L_p) \to I_{a+}^{\alpha-\delta}(L_p), \quad \text{если } \alpha > 0, \ \beta_1 > 0, \tag{33.10}$$

причем операторы этих вложений вполне непрерывны.

2°. Связь операторов со степенно-логарифмическими ядрами с сингулярным оператором. Ранее в § 11 были найдены соотношения (11.16), (11.17), связывающие операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля I_{a+}^{α}, I_{b-}^{α} с сингулярным оператором S, которые играли важную роль при исследовании на нетеровость операторов типа потенциала (31.55) со степенным ядром на конечном отрезке $[a, b]$. Естественно ожидать, что для операторов типа потенциала (33.1) со степенно-логарифмическим ядром аналогичную роль должны выполнять соотношения между операторами со степенно-логарифмическими ядрами $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $I_{b-}^{\alpha,\beta}$ и сингулярным оператором S. Мы их найдем, исходя из равенств (11.16), (11.17) и применяя к ним метод дифференцирования произвольного порядка по параметру α. Это позволит нам при дифференцировании целого порядка выделить натуральную степень логарифма, а при некотором видоизмененном дифференцировании произвольного порядка — любую степень логарифма.

Введем сингулярные интегралы со степенно-логарифмическими ядрами

$$(S_{a,\alpha,m}\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha} \frac{\ln^m \dfrac{t-a}{x-a}}{t-x}\,\varphi(t)\,dt,$$

$$(S_{b,\alpha,m}\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{b-t}{b-x}\right)^{\alpha} \frac{\ln^m \dfrac{b-t}{b-x}}{t-x}\,\varphi(t)\,dt, \tag{33.11}$$

$$S_{a,\alpha} \overset{\text{def}}{=} S_{a,\alpha,0}, \quad S_{b,\alpha} \overset{\text{def}}{=} S_{b,\alpha,0}.$$

Лемма 33.1. *Если* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *и*

$$1 < p < \infty, \quad -1 + 1/p < \alpha < 1/p, \tag{33.12}$$

то операторы $S_{a,\alpha,m}$ *и* $S_{b,\alpha,m}$ *ограничены в пространстве* $L_p(a, b)$.

Доказательство. При $m=0$ утверждение леммы вытекает из теоремы 11.3, а при $m=1, 2, \ldots$ — из теоремы 1.5.

Замечание 33.1. В работе И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [5] показано, что условия (33.12) являются не только достаточными, но и необходимыми для ограниченности операторов $S_{a,\alpha}$ и $S_{b,\alpha}$ в пространстве $L_p(a, b)$.

Замечание 33.2. Пусть $\|S_{a,\alpha,m}\| = \max\limits_{\|\varphi\|_{L_p}=1} \|S_{a,\alpha,m}\|_{L_p}$ — норма оператора $S_{a,\alpha,m}$. Тогда из теоремы 1.5 вытекает оценка

$$\|S_{a,\alpha,m}\| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1/p}\,\frac{|\ln^m t|}{|t-1|}\,dt, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{33.13}$$

Аналогичная оценка имеет место и для оператора $S_{b,\alpha,m}$.

Перепишем теперь равенства (11.16), (11.17) в виде

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha}[\cos(\alpha\pi)\,\varphi + \sin(\alpha\pi)\,S_{a,\alpha}\varphi], \quad \varphi \in L_p(a, b), \quad 0 \leqslant \alpha < 1/p, \tag{33.14}$$

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = I_{b-}^{\alpha}[\cos(\alpha\pi)\,\varphi - \sin(\alpha\pi)\,S_{b,\alpha}\varphi], \quad \varphi \in L_p(a, b), \quad 0 \leqslant \alpha < 1/p, \tag{33.15}$$

понимая их при $\alpha = 0$ в предельном случае: $\varphi = \varphi$. Аналогичные тождества будут справедливы и для операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $I_{b-}^{\alpha,\beta}$ со степенно-логарифмическими ядрами. Именно верна следующая

Теорема 33.2. *Пусть* $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1/p$, $-\infty < \beta < \infty$. *Тогда справедливы равенства*

$$I_{b-}^{\alpha,\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha,\beta}[\cos(\alpha\pi)\,\varphi + \sin(\alpha\pi)\,S_{a,\alpha}\varphi + T_1\varphi], \tag{33.16}$$

$$I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi = I_{b-}^{\alpha,\beta}[\cos(\alpha\pi)\,\varphi - \sin(\alpha\pi)\,S_{b,\alpha}\varphi + T_2\varphi], \tag{33.17}$$

где T_1, T_2 — *вполне непрерывные в* $L_p(a, b)$ *операторы.*

Доказательство. Установим формулу (33.16). При $\beta = 0$ она совпадает с (33.14). Если $\beta \neq 0$, для ее получения, как уже указывалось выше, будем применять дифференцирование порядка β по параметру α к равенству (33.14). Начнем со случая натурального $\beta = 1, 2, \ldots$ Умножая (33.14) на $\Gamma(\alpha)$, дифференцируя полученное соотношение β раз по α и деля на $\Gamma(\alpha)$, будем иметь

$$I_{b-}^{\alpha,\beta}\varphi = \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\beta}{j} I_{a+}^{\alpha,\beta-j} N_j^{\alpha} \quad (\beta = 1, 2, \ldots), \tag{33.18}$$

где

$$N_j^{\alpha} = \frac{d^j(\cos\alpha\pi)}{d\alpha^j} E + \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^{j-i}\sin(\alpha\pi)}{\partial\alpha^{j-i}} S_{a,\alpha,i}.$$

Отсюда, согласно следствию из теоремы 33.1 и лемме 33.1, получаем формулу (33.16) для натуральных β.

Пусть теперь β — произвольное действительное число. Естественно предположить, что к тождеству (33.14) нужно применить операцию дифференцирования (или интегрирования) произвольного порядка β. Однако использовать операторы лиувиллевского дробного интегродифференцирования мы не можем, так как при $1/p < \alpha < 1$ оператор $S_{\alpha,\alpha}$ вида (33.11) выводит из $L_p(a, b)$, а при $\alpha \geqslant 1$ формула (33.14) неверна. Оказывается, в такой ситуации удобен урезанный оператор

$$(\tilde{I}_+^{\beta} f)(\alpha) = c_\alpha \gamma^{\alpha} I_-^{\beta}\left(\frac{\Gamma(t)}{\gamma^t}(P_{\alpha,\varepsilon}^{+} f)(t)\right)(\alpha), \quad c_\alpha = \begin{cases} 1/\Gamma(\alpha), & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \end{cases} \tag{33.19}$$

где $P_{\alpha,\varepsilon}^{+}$ — проектор:

$$(P_{\alpha,\varepsilon}^{+} f)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [\alpha, \alpha+\varepsilon], \\ 0, & t \notin [\alpha, \alpha+\varepsilon], \end{cases} \quad 0 \leqslant \alpha < \alpha + \varepsilon < 1/p. \tag{33.20}$$

Заменим в соотношении (33.14) α на t и применим к нему оператор (33.19) по t.

А. Вначале преобразуем левую часть полученного равенства. Для $\beta > 0$ (при $\alpha = 0$ берем $\beta > 1$), согласно (33.19), имеем

$$(\tilde{I}_+^{\beta} I_{b-}^{t}\varphi)(x) = c_\alpha \gamma^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{\Gamma(t)\,dt}{\gamma^t (t-\alpha)^{1-\beta}} \frac{1}{\Gamma(t)} \int_{x}^{b} \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{1-t}} =$$

$$= c_\alpha \int_{x}^{b} \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \int_{0}^{\varepsilon} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{y-x}{\gamma}\right)^{\tau} d\tau.$$

Используя формулу

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\tau} d\tau = \left(\ln\frac{\gamma}{x}\right)^{-\beta} \left[1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\varepsilon\ln\frac{\gamma}{x}}^{\infty} \tau^{\beta-1} e^{-\tau} d\tau\right] \quad (\beta > 0), \tag{33.21}$$

находим

$$(\tilde{I}_+^{\beta}\, I_{b-}^{t}\varphi)(x) = (I_{b-}^{\alpha,\,-\beta}\varphi)(x) - c_\alpha \int_x^b \frac{\lambda_\beta(t-x)}{(t-x)^{1-\alpha-\varepsilon}}\,\varphi(t)\,dt. \qquad (33.22)$$

Здесь

$$\lambda_\beta(x) = \frac{x^{-\varepsilon}}{\Gamma(\beta)} \ln^{-\beta}\frac{\gamma}{x} \int_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\beta-1}d\tau = O\left(\ln^{-1}\frac{\gamma}{x}\right) \text{ при } x \to 0 \qquad (33.23)$$

согласно формуле

$$\int_u^\infty e^{-t}\,t^{\alpha-1}dt = u^{\alpha-1}\,e^{-u}\left[1 + O\left(\frac{1}{|u|}\right)\right] \text{ при } |u|\to\infty \qquad (33.24)$$

(см., например, справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 6.9.2(21), 6.13.1(1)]).

В силу теоремы 33.1

$$c_\alpha \int_x^b \frac{\lambda_\beta(t-x)}{(t-x)^{1-\alpha-\varepsilon}}\,\varphi(t)\,dt = I_{b-}^{\alpha+\varepsilon} V_1\varphi,$$

где V_1 — вполне непрерывный оператор Вольтерра в $L_p(a, b)$, всюду в дальнейшем будем обозначать через V_2, V_3, ... вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ вольтерровские операторы. Отсюда, согласно (33.14) и следствию из теоремы 33.1, имеем

$$c_\alpha \int_x^b \frac{\lambda_\beta(t-x)}{(t-x)^{1-\alpha-\varepsilon}}\,\varphi(t)\,dt = I_{a+}^{\alpha+\varepsilon} N_{\alpha+\varepsilon} V_1\varphi = I_{a+}^{\alpha,\,-\beta} V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1\varphi,$$

где $N_t\varphi = \cos(t\pi)\,\varphi + \sin(t\pi)\,S_{a,t}\varphi$. Подставляя это выражение в (33.22), получаем равенство

$$\tilde{I}_+^{\beta}\, I_{b-}^{t}\varphi = I_{b-}^{\alpha,\,-\beta}\varphi - I_{a+}^{\alpha,\,-\beta} V_3\varphi, \qquad (33.25)$$

где $V_3 = V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1$.

Пусть теперь $\beta<0$, $\alpha>0$. Тогда, используя обозначения (33.18) — (33.20), (33.23) и формулы (33.21), (33.23), имеем

$$\tilde{I}_+^{\beta}\, I_{b-}^{t}\varphi = c_\alpha\gamma^\alpha(-1)^{[-\beta]+1}\frac{d^{[-\beta]+1}}{d\alpha^{[-\beta]+1}}\, I_t^{1+\beta+[-\beta]}\frac{\Gamma(t)}{\gamma^t}\, P_{\alpha,\varepsilon}^{+}\, I_{b-}^{t}\varphi =$$

$$= c_\alpha\gamma^\alpha(-1)^{[-\beta]+1}\frac{d^{[-\beta]+1}}{d\alpha^{[-\beta]+1}}\int_x^b\left(\frac{\tau-x}{\gamma}\right)^\alpha\left[\frac{\ln^{-1-\beta-[-\beta]}\frac{\gamma}{\tau-x}}{\tau-x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_{1+\beta+[-\beta]}(\tau-x)}{(\tau-x)^{1-\varepsilon}}\right]\varphi(\tau)\,d\tau = I_{b-}^{\alpha,\,-\beta}\varphi - c_\alpha\int_x^b\left(\frac{\tau-x}{\gamma}\right)^\alpha \times$$

$$\times \frac{\ln^{[-\beta]+1}\frac{\gamma}{\tau-x}}{(\tau-x)^{1-\varepsilon}}\lambda_{1+\beta+[-\beta]}(\tau-x)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (33.26)$$

Учитывая асимптотику (33.23), в силу теоремы 33.1 и равенства (33.14) находим

$$c_\alpha \int_x^b \left(\frac{\tau - x}{\gamma}\right)^\alpha \frac{\ln^{[-\beta]+1}\frac{\gamma}{\tau - x}}{(\tau - x)^{1-\varepsilon}} \lambda_{1+\beta+[-\beta]}(\tau - x)\,\varphi(\tau)\,d\tau =$$

$$= I_{b-}^{\alpha} V_4 \varphi = I_{a+}^{\alpha} N_\alpha V_4 \varphi = I_{a+}^{\alpha,\,-\beta} V_5 N_\alpha V_4 \varphi.$$

Тогда из (33.26) получаем формулу (33.25), где $V_3 = V_5 N_\alpha V_4$.

Б. Преобразуем теперь выражение $\tilde{I}_+^\beta \cos(t\pi)\, I_{a+}^t \varphi$. При $\beta > 0$ в силу (33.18)—(33.20) имеем

$$\tilde{I}_+^\beta \cos(t\pi)\, I_{a+}^t \varphi = c_\alpha \gamma^\alpha \int_a^x \frac{\varphi(y)\,dy}{x - y} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{\cos(t\pi)}{(t-\alpha)^{1-\beta}} \left(\frac{x-y}{\gamma}\right)^t dt. \quad (33.27)$$

Интегрируя по частям внутренний интеграл и учитывая равенство (33.21), получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{\cos(t\pi)}{(t-\alpha)^{1-\beta}} \left(\frac{x-y}{\gamma}\right)^t dt = \left(\frac{x-y}{\gamma}\right)^\alpha \ln^{-\beta}\frac{\gamma}{x-y} [\cos(\alpha\pi) - \tilde{\lambda}(x-y)],$$

где

$$\tilde{\lambda}(u) = \int_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{u}}^{\infty} e^{-\tau} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,d\tau + \int_0^\varepsilon \sin(s+\alpha)\,\pi ds \int_{s \ln \frac{\gamma}{u}}^{\infty} e^{-\tau} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,d\tau \to 0 \text{ при } u \to 0.$$

Отсюда в силу теоремы 33.1 формула (33.27) принимает вид

$$\tilde{I}_+^\beta \cos(t\pi)\, I_{a+}^t \varphi = I_{a+}^{\alpha,\,-\beta} [\cos(\alpha\pi)\,\varphi + V_6 \varphi]. \quad (33.28)$$

Для $\beta < 0$ аналогичное равенство находится так же, как и в случае А.

В. Рассмотрим, наконец, выражение $\tilde{I}_+^\beta I_{a+}^t \sin(t\pi)\, S_{a,t}\varphi$. Пусть $\beta > 0$. Производя, как и в случае Б, интегрирование по частям, согласно (33.11), имеем

$$\tilde{I}_+^\beta I_{a+}^t \sin(t\pi)\, S_{a,t}\varphi = c_\alpha \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \left(\int_0^\varepsilon \sin(\alpha + s)\,\pi \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{x-y}{\gamma}\right)^s \frac{s^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,ds \right) (S_{a,\alpha}\varphi)(y)\,dy +$$

$$+ \int_0^\varepsilon \left[\int_a^x \frac{\ln^{-\beta}\frac{\gamma}{x-y}}{(x-y)^{1-\alpha}} \lambda(x-y, \tau)(S_{\tau+\alpha,1}\varphi)\,dy \right] d\tau, \quad (33.29)$$

где

$$\lambda(u, \tau) = \frac{c_\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_{\tau \ln \frac{\gamma}{u}}^{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{u}} e^{-s} s^{\beta-1} \sin\left(\alpha + s \ln^{-1}\frac{\gamma}{u}\right) \pi ds \to 0 \quad \text{при} \quad u \to 0.$$

Выражение, аналогичное первому члену в правой части (33.29) (с заменой синуса на косинус), рассматривалось в пункте Б. Поэтому, исполь-

зуя теорему 33.1, формулу (33.29) приводим к виду

$$\tilde{I}_+^{\beta} I_{a+}^{t} \sin(t\pi) S_{a,\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha,-\beta}\Big[\sin(\alpha\pi) S_{a,\alpha}\varphi + V_\tau + \int_0^{\varepsilon} V_\tau (S_{\tau+\alpha,1}\varphi)\, d\tau\Big]. \quad (33.30)$$

Здесь оператор-функция V_t вполне непрерывна в $L_p(a, b)$ при $\tau>0$, если же $\tau=0$, на основании первого утверждения теоремы 33.1 полная непрерывность не имеет места.

Если вернуться к доказательству леммы 32.4 предыдущего параграфа, можно убедиться, что оператор-функция V_τ непрерывна по τ в операторной топологии на $(0, \varepsilon]$ и ограничена равномерно по τ на $[0, \varepsilon]$. Кроме того, в силу неравенства (33.13) имеем

$$\|S_{\tau+\alpha,1}\| \leqslant c = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha+\tau-1/p}|t-1|^{-1}|\ln t|\, dt.$$

Поэтому оператор $\int_0^{\varepsilon} V_\tau S_{\tau+\alpha,1} d\tau$ вполне непрерывен в $L_p(a, b)$, и тогда из (33.30) получаем равенство

$$\tilde{I}_+^{\beta} I_{a+}^{t} \sin(t\pi) S_{a,\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha,-\beta}[\sin(\alpha\pi) S_{a,\alpha}\varphi + V_\varepsilon\varphi]. \quad (33.31)$$

В случае $\beta<0$ аналогичное равенство находится выкладками, подобными проведенным выше.

Объединяя результаты (33.25), (33.28) и (33.31), полученные в пунктах А—В, приходим к соотношению (33.16). Формула (33.17) выводится из (33.16), если к последнему применить слева и справа оператор $A: f(x)\to f(a+b-x)$. Теорема доказана.

Из соотношений (33.16), (33.17) вытекает совпадение пространств (33.4), (33.5). Именно верно следующее

Следствие. *При* $0\leqslant\alpha<1/p$ *банаховы пространства* $I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p)$ *и* $I_{b-}^{\alpha,\beta}(L_p)$ *совпадают с точностью до эквивалентности норм:*

$$I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p) = I_{b-}^{\alpha,\beta}(L_p) \overset{\text{def}}{=} I^{\alpha,\beta}(L_p). \quad (33.32)$$

3°. **Нетеровость уравнений.** Рассмотрим уравнение (33.1), принимающее, согласно предположению (33.2), вид

$$K\varphi \equiv \int_a^x \frac{u(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\, \varphi(t)\, dt + \int_x^b \frac{v(x, t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \ln^{\beta}\frac{\gamma}{t-x}\, \varphi(t)\, dt, \quad (33.33)$$

где $-\infty<\beta<\infty$, $0\leqslant\alpha<1$ ($\beta<-1$ при $\alpha=0$).

Будем предполагать, что функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют следующим условиям (аналогичным при $0<\alpha<1$ условиям 1) и 2) для уравнения (31.55)):

1) $u(x, x) = u(x, x-0)\in C([a, b])$, $v(x, x) = v(x, x+0)\in C([a, b])$;

2) при $\alpha<1$ функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ гельдеровы по x порядка $\lambda>\alpha$ равномерно по t;

3) при $\alpha=1$ функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ дифференцируемы по x, причем справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{c_1}{(x-t)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant \frac{c_2}{(t-x)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1>0,$$

$$|u(x, t)-u(t, t)| \leqslant c_3(x-t)^{\varepsilon_2}, \quad |v(x, t)-v(t, t)| < c_4(t-x)^{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2>0,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим случай $0 \leqslant \alpha < 1/p$ ($\beta < -1$ при $\alpha = 0$). В силу следствия из теоремы 33.2 действие оператора K будем изучать из пространства $L_p(a, b) \equiv L_p$, $1 < p < \infty$, в пространство $I^{\alpha,\beta}(L_p)$, определяемое (33.32).

Представим оператор (33.33) в виде

$$K = K^{\alpha,\beta} + T_1^{\alpha,\beta} + T_2^{\alpha,\beta}, \tag{33.34}$$

где

$$K^{\alpha,\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha,\beta} u\varphi + I_{b-}^{\alpha,\beta} v\varphi, \tag{33.35}$$

$$\begin{aligned}(T_1^{\alpha,\beta}\varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(x,t) - u(t,t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, \varphi(t)\, dt, \\ (T_2^{\alpha,\beta}\varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{v(x,t) - v(t,t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{t-x}\, \varphi(t)\, dt.\end{aligned} \tag{33.36}$$

Лемма 33.2. *Если* $1 < p < \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1/p$ *и функции* $u(x, t)$, $v(x, t)$ *гельдеровы по* x *порядка* $\lambda > \alpha$ *равномерно по* t, *то операторы* $T_1^{\alpha,\beta}$ *и* $T_2^{\alpha,\beta}$ *вполне непрерывны из* $L_p(a, b)$ *в* $I^{\alpha,\beta}(L_p)$, *при этом*

$$T_1^{\alpha,\beta} = I_{a+}^{\alpha,\beta}\tilde{V}_1, \quad T_2^{\alpha,\beta} = I_{b-}^{\alpha,\beta}\tilde{V}_2, \tag{33.37}$$

где операторы $\tilde{V}_1$ *и* $\tilde{V}_2$ *вполне непрерывны в* $L_p(a, b)$.

Доказательство. При $0 < \alpha < 1$, $\beta = 0$ утверждение леммы совпадает с утверждением леммы 31.4, причем

$$T_1^{\alpha,0} = I_{a+}^{\alpha} V_1, \quad T_2^{\alpha,0} = I_{b-}^{\alpha} V_2, \tag{33.38}$$

где

$$V_1\varphi = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x \frac{u(x,s) - u(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \tag{33.39}$$

$$V_2\varphi = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_x^b \varphi(s)\, ds \int_x^s \frac{v(x,s) - v(t,s)}{(s-t)^{1-\alpha}(t-x)^{1+\alpha}}\, dt \tag{33.40}$$

— вполне непрерывные операторы в $L_p(a, b)$.

Преобразуем равенства (33.38) с помощью оператора (33.19) аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 33.2 с равенствами (33.14), (33.15). После некоторых вычислений, аналогичных проведенным выше, с учетом теорем 33.1 и 33.2 приходим к значениям

$$T_1^{\alpha,\beta} = I_{a+}^{\alpha,\beta}[\sin(\alpha\pi) V_1 + T_3], \quad T_2^{\alpha,\beta} = I_{b-}^{\alpha,\beta}[\sin(\alpha\pi) V_2 + T_4] \quad (0 \leqslant \alpha < 1/p),$$

где операторы T_3 и T_4 вполне непрерывны в $L_p(a, b)$. Отсюда в силу полной непрерывности в $L_p(a, b)$ операторов V_1 и V_2 вытекает утверждение леммы. ■

Из (33.37) следует, что нетеровость оператора (33.33) равносильна нетеровости модельного оператора (33.35). Последний, согласно теореме 33.2, представим в виде

$$K^{\alpha,\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha,\beta}[N_\alpha\varphi + T_5\varphi], \tag{33.41}$$

где N_α — сингулярный интегральный оператор (31.58), а T_5 — вполне непрерывный оператор в $L_p(a, b)$.

Из (33.41) вытекает, что нетеровость оператора K из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha, \beta}(L_p)$ равносильна нетеровости сингулярного интегрального оператора

$$N_\alpha \varphi = [u(x, x) + v(x, x)\cos(\alpha\pi)]\varphi(x) + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\alpha \frac{v(t, t)\varphi(t)\,dt}{t-x} \tag{33.42}$$

в $L_p(a, b)$. Применяя здесь теорему 31.7 о нетеровости оператора N_α, приходим к следующему утверждению, аналогичному утверждению теоремы 31.12.

Теорема 33.3. *Пусть* $1<p<\infty$, $0\leqslant\alpha<1/p$, $-\infty<\beta<\infty$ *при* $\alpha>0$ *и* $\beta<-1$ *при* $\alpha=0$, *а функции* $u(x, t)$, $v(x, t)$ *удовлетворяют условиям 1) и 2), указанным выше. Для того чтобы оператор (33.33) был нетеров из* $L_p(a, b)$ *в* $I^{\alpha, \beta}(L_p)$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $u^2(x, x) + 2u(x, x)v(x, x)\cos\alpha\pi + v^2(x, x) \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$; (33.43)

2) $\theta(a) \neq 2\pi(-\alpha + 1/p)$, $\theta(b) \neq 2\pi/p' \pmod{2\pi}$, (33.44)

где

$$e^{i\theta(x)} = \frac{u(x, x) + v(x, x)\,e^{-i\alpha\pi}}{u(x, x) + v(x, x)\,e^{i\alpha\pi}}, \quad 0<\theta(a)<2\pi. \tag{33.45}$$

При выполнении этих условий индекс оператора K *равен*

$$\varkappa = \varkappa_{L_p \to I^{\alpha, \beta}(L_p)} = \begin{cases} k, & \text{если } 0 \leqslant \theta(a) < 2\pi(-\alpha + 1/p), \\ k-1, & \text{если } 2\pi(-\alpha + 1/p) < \theta(a) < 2\pi, \end{cases} \tag{33.46}$$

где k — *целое число, определяемое условием*

$$\theta(b) - 2\pi k \in (-2\pi/p, \quad 2\pi/p'). \tag{33.47}$$

В частности, при $\alpha = 0$, $\beta < -1$ *необходимые и достаточные условия нетеровости имеют вид*

$$u(x, x) + v(x, x) \neq 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{33.48}$$

а индекс принимает значение $\varkappa = \varkappa_{L_p \to I^{0, \beta}(L_p)} = 0$.

Сравнивая утверждение теоремы 31.12 с утверждением теоремы 33.3, приходим к интересному факту.

Теорема 33.4. *Введение в ядро оператора типа потенциала*

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt$$

множителя $\ln^\beta \dfrac{\gamma}{|x-t|}$, *ослабляющего или усиливающего (в зависимости от знака* β*) особенность ядра на диагонали* $x = t$, *изменяя образ оператора, не влияет на его нетеровость в том смысле, что при* $0<\alpha<1/p$ *нетеровость оператора* K *из* $L_p(a, b)$ *в* $I^{\alpha, \beta}(L_p)$ *равносильна нетеровости в* L_p *сингулярного интегрального оператора (33.42).*

Замечание 33.3. Теорема 33.3 распространяется на случай пространства $L_p([a, b]; \rho)$ с общим степенным весом $\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\mu_k}$. Имеет место также теорема о нетеровости оператора K из весового гельдеровского пространства $H_0^\lambda(\rho)$ в обобщенное весовое гельдеровское пространство $H_0^{\lambda+\alpha, \beta}(\rho)$ (см. литературные указания в § 34, п. 2°, 33.1 и 33.2).

Замечание 33.4. Теорема 33.3 устанавливает нетеровость оператора (33.33) в случае $0 \leqslant \alpha < 1/p$. Имеет место подобное утверждение и для случая $1/p < \alpha \leqslant 1$ (см. литературные указания в § 34, п. 2°, 33.3). В частности, при $\alpha = 1$, $\beta > 0$ имеет место нетеровость операторов (33.1) с чисто логарифмическими ядрами. Имеются более общие исследования нетеровости операторов с такими ядрами (см. по этому поводу литературные указания в § 34, п. 2°, 33.4).

§ 34. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 6

1°. Исторические сведения. К § 30, п. 1°. Здесь мы ограничились случаем уравнений по прямой и по отрезку прямой. Более подробно с теорией сингулярных интегральных уравнений можно познакомиться по книгам Ф. Д. Гахова [1] и Н. И. Мусхелишвили [1] (см. также И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [4]), где эти уравнения рассматриваются на кривых в комплексной плоскости.

К § 30, пп. 2, 3°. Впервые обобщенное уравнение Абеля (и в случае внешних, и в случае внутренних коэффициентов) на конечном отрезке, а также на полуоси появляется в работе N. Zeilon [1], 1924 г. По поводу этой работы, неизвестной исследователям, имевшим дело с обобщенными интегральными уравнениями Абеля в 1960—1970-е гг., см. также в § 17 (к §11). В ней указан формализм сведения обобщенного уравнения Абеля к характеристическому сингулярному уравнению или к связанной с ним краевой задаче Гильберта для аналитических функций. Эта работа содержит также первую попытку рассмотрения систем обобщенных интегральных уравнений Абеля (с постоянными коэффициентами). N. Zeilon предложил удивительно оригинальный для 1924 г. прием сведения к сингулярному уравнению и констатировал факт, что решение обобщенного уравнения Абеля сводится к последовательному решению сингулярного уравнения и обычного уравнения Абеля, не дав ни правильного решения сингулярного уравнения, ни вообще исследования его разрешимости (такое решение было получено, как известно, значительно позже в работах Н. И. Мусхелишвили [1] и Ф. Д. Гахова [1]). Впервые решение обобщенного уравнения Абеля на этом пути вместе с достаточно полным исследованием разрешимости было дано в случае конечного отрезка К. Д. Сакалюком [1], 1960 г., и [4], 1965 г., не знавшим работы N. Zeilon [1]. К. Д. Сакалюк использовал метод Карлемана аналитического продолжения. Ограничительные предположения, сделанные в этих работах, были сняты Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [2], 1965 г.) и С. Г. Самко [1], 1967 г., и [5], 1968 г. В работах С. Г. Самко решение было основано на другом способе, изложенном в § 30. Он основан на связи с сингулярным оператором. Это позволило не только сделать более ясным вопрос о допустимых решениях и правых частях для обобщенного уравнения Абеля, но и в общем случае исследовать уравнения 1-го рода со степенным ядром.

В случае всей прямой обобщенные уравнения Абеля (30.17), (30.18) были решены С. Г. Самко [4], 1968 г., [7], 1969 г., и [9], 1970 г. Изложение в пп. 2, 3° следует работе С. Г. Самко [27, § 3 и 9], 1978 г., см. также обзор С. Г. Самко [32].

К § 30, п. 4°. Решение уравнения (30.67) в явном виде (30.68) дано С. Г. Самко [10], 1970 г., и [14], 1973 г. (см. также [13], 1971 г., где решение этого уравнения дано в форме (30.63)); случаи (30.72) отмечены в работе С. Г. Самко [5], 1968 г. Эти случаи были известны, вообще говоря, раньше, см. формулу (30.73) в работе E. M. Stein, A. Zygmund [2], 1965 г., для функций $\varphi \in L_2(R^1)$, имеющих компактный носитель, и формулу (30.74) в работе P. Heywood [1], 1967 г. В работе P. Heywood [2], 1971 г., показывалось, что интегралы (30.73), (30.74) являются условно сходящимися почти для всех x, если $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$. Решение уравнения (30.72) в некоторых классах обобщенных функций исследовалось в работе D. S. Jones [2], 1970 г.

Обобщенное уравнение Абеля (30.79) с постоянными коэффициентами на конечном отрезке особо рассматривалось Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [3], 1969 г.), давшим его решение в терминах интегралов с гипергеометрическим ядром. В форме (30.82) решение дано С. Г. Самко [27, § 9], 1978 г. (см. также книгу Ф. Д. Гахова [1], 1977 г., где приведено это решение). Утверждение леммы 30.3 отмечено Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [3], 1969 г.) и повторено Р. М. Ганеевым [1], 1979 г., и [2], 1982 г. В последней работе также дано решение обобщенного уравнения Абеля с постоянными коэффициентами на конечном отрезке с использованием гипергеометрической функции в форме, отличной от L. von Wolfersdorf [3].

Решение уравнения (30.83) впервые было дано Т. Карлеманом (T. Carleman [1], 1922 г.), см. о его решении ниже в п. 2°. Другую форму этого решения получили Н. И. Ахиезер, В. А. Щербина [1], 1957 г., также см. п. 2°. К той же формуле пришел У. Уильямс (W.E. Williams [1], 1963 г.), рассмотревший уравнение (30.67) в связи с задачами электростатики. М. Г. Крейн [1], 1955 г., в исследованиях, связанных

с обратной задачей Штурма—Лиувилля, пришел к некоторому методу решения интегральных уравнений, откуда, в частности, получил решение уравнения Карлемана (30.83) (см. в связи с этим также работу С. М. Мхитаряна [1], 1968 г.).

Форма (30.81) решения уравнения Карлемана указана С. Г. Самко в работе [3], 1968 г., там же получена формула (30.89).

К § 31, п. 1°. Теоремы 31.1—31.4 — известные теоремы теории нетеровых операторов. В абстрактных банаховых пространствах они впервые были получены в работе С. М. Никольского [2], 1943 г., в фредгольмовом случае, когда индекс равен нулю, а на случай ненулевого индекса они были распространены в работах Ф. В. Аткинсона [1] и И. Ц. Гохберга [1], 1951 г. Для более подробного ознакомления с теорией нетеровых операторов в банаховых пространствах кроме книг, указанных в начале § 31, п. 1°, можно иметь в виду также работы И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна [1], 1957 г., и Т. Като (T. Kato [1], 1958 г.).

Теоремы типа 31.5—31.7 хорошо известны в более общей ситуации произвольных гладких кривых в комплексной плоскости. Мы ограничились формулировкой для нужного нам случая прямой или ее отрезка. Этот случай особо рассматривался в работе Г. Уайдома (H. Widom [1], 1960 г.). Теорема 31.5 общеизвестна (см., например, И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [4]). Теорема 31.6 представляет собой классический вариант утверждения о справедливости теорем Нетера для сингулярных интегральных уравнений на разомкнутом контуре (Ф. Д. Гахов [1], Н. И. Мусхелишвили [1]; в этих монографиях сделаны менее общие предположения о ядре $\mathscr{K}(x, t)$). Теорема 31.7 в более общем виде получена в работах И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [1—3], 1968—1971 гг. (при записи формулы для индекса в явном виде мы воспользовались формулой пересчета индекса из работы Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко [2], 1975 г.).

К § 31, п. 2°. Развитая здесь корректная постановка нетеровости для уравнений 1-го рода со степенным ядром предложена С. Г. Самко [6], 1968 г.; уравнения (31.6) исследованы им на нетеровость в такой постановке в работах [12], 1971 г., и [14], 1973 г. Изложение в п. 2° следует в основном последней работе. Теорема 31.10 установлена Б. С. Рубиным [2], 1972 г.

К § 31, п. 3°. Приведенные в этом пункте результаты получены в работах С. Г. Самко [1], 1967 г., [6], 1968 г., и [27], 1978 г., за исключением теоремы 31.12, относящейся к нетеровости в L_p на конечном отрезке, которая была получена Б. С. Рубиным [3], 1973 г. Результат для $L_p(\rho)$, отмеченный в замечании 31.4, получен Б. С. Рубиным [1], 1972 г. (включая и случай $a=-\infty$ или $b=\infty$). Нетеровость в $L_p(\rho)$ в более общей весовой ситуации исследована Б. С. Рубиным в [2], 1972 г., [8], 1975 г.

Критерий нетеровости оператора (31.55) из $H_0^{\lambda}(\rho)$ в $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, упомянутый в замечании 31.5, получен Б. С. Рубиным [7], 1974 г. Отметим, что решающую роль здесь играет теорема 13.13 о гомеоморфизме пространств $H_0^{\lambda}(\rho)$ и $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ относительно операторов дробного интегрирования Римана—Лиувилля (2.17), (2.18), позволяющая описать класс правых частей f уравнения (31.55) в таких же простых терминах, что и само решение φ уравнения.

Случай $v(x, t)\equiv 0$ в (31.55), т. е. случай уравнения (31.67), был известен давно и исследован еще в работах В. Вольтерра (V. Volterra [1], 1896 г., см. также книгу В. Вольтерра [1], с. 100—101) при более жестком, чем в § 31, предположении о функции $u(x, t)$ (в § 31 удалось ослабить предположения об $u(x, t)$ за счет использования конструкции Маршо дробного дифференцирования).

К § 31, п. 4°. Изложенные в п. 4° соображения об устойчивости следует считать давно известными. Использование пространства $I^{\alpha}(L_p)$ $(\equiv H^{\alpha, p})$ в качестве класса правых частей для интегральных уравнений 1-го рода со слабой особенностью было предложено в работах С. Г. Самко [5], 1968 г., и [9], 1970 г. Теорему 31.13 следует считать вытекающей из рассмотрений В. Вольтерра (V. Volterra [1], 1896 г.) с учетом полученного позже результата об ограниченности в L_p резольвентного оператора интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со слабой особенностью.

К § 32, п. 1°. Идея применения интегрирования и дифференцирования равенства (32.14) по параметру α, приводящая к соотношению (32.12), была предложена В. Вольтерра (V. Volterra [2], 1916 г.), идея применения лиувиллевского дробного интегродифференцирования по параметру α, приводящая к тождеству (32.13), предложена Б. С. Рубиным [4], 1973 г., [9], 1976 г., и [10], 1977 г.

К § 32, п. 2°. Впервые вопросы разрешимости в замкнутой форме интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами (32.3) с переменным верхним пределом рассматривались В. Вольтерра (V. Volterra [2], 1916 г.), изложение этих результатов содержится также в работах V. Volterra, J. Peres [1], 1924 г., и [2, гл. 7, с. 166—181], 1936 г. В. Вольтерра дано решение простейшего уравнения (32.18) и указан метод решения общего уравнения (32.3), основанный на обобщающем равенство (32.15) тождестве:

$$\int_0^x t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{m} B_{mk} \ln^k t \; v\left[(x-t)\, e^h\right] dt = -\frac{x^{\alpha}}{\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-1,k} \ln^k x, \quad \alpha > 0, \qquad (34.1)$$

где $\nu(x)$ имеет вид (32.10) (ср. с соотношением (32.28)). Заметим также, что решение простейшего уравнения (32.18) содержится в монографиях М. М. Джрбашяна [2, гл. V, § 1.1, с. 264] и В. Вольтерра [1, с. 102].

Лемма 32.2 и теорема 32.1, полученные А. А. Килбасом, ранее, по-видимому, не отмечались, так же как и равносильность условий (32.27) в лемме 32.2 тому, что числа $h_1, h_2, \ldots, h_m$, через которые выражается решение (32.30) уравнения (32.3), связаны с корнями алгебраического уравнения (32.34).

К § 32, п. 3°. Изложенные в этом пункте результаты получены в работе Б. С. Рубина [10], 1977 г.

К § 33, п. 1°. Теорема 33.1 доказана Б. С. Рубиным [10], 1977 г. Ранее им получены вложения (33.10) для натуральных и неотрицательных действительных показателей степеней логарифма [4], 1973 г., и [9], 1976 г., в пространствах $L_p(a, b)$.

К § 33, п. 2°. Приведенные в этом пункте результаты установлены Б. С. Рубиным в работах [4], 1973 г., и [10], 1977 г.

К § 33, п. 3°. Нетеровость операторов типа потенциала (33.1) со степенно-логарифмическими ядрами из пространства $L_p(a, b)$, $1<p<\infty$, исследована Б. С. Рубиным для натуральных и неотрицательных действительных показателей логарифма ([4], 1973 г., и [9], 1976 г.) и для произвольных показателей логарифма ([10], 1977 г.).

2°. Обзор других результатов. 30.1. T. Carleman [1] получил решение уравнения

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x),\ 0<x<1, \tag{34.2}$$

в терминах контурного интегрирования:

$$\varphi(x) = \frac{i\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\,\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x}\frac{dt}{(t-x)^{\alpha}}\int_0^1\left[\frac{t(t-1)}{s(s-1)}\right]^{\alpha/2}\frac{f(s)\,ds}{s-t}, \tag{34.3}$$

где Γ_x — произвольный замкнутый контур, пересекающий положительную полуось R_+^1 только в точке x.

30.2. Решение уравнения типа Карлемана

$$\int_0^a \frac{\varphi(y)\,dy}{|x^2-y^2|^{1-\alpha}} = f(x),\ 0<x<a,$$

сводящегося к (34.2) заменами переменных, известно в форме, отличной от той, что получается из (30.82) или (30.84):

$$\varphi(x) = -\frac{2\Gamma(1-\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\pi\left[\Gamma\left(\dfrac{2-\alpha}{2}\right)\right]^2}\,\frac{1}{x^{\alpha}}\,\frac{d}{dx}\int_x^a\frac{t^{2\alpha}dt}{(t^2-x^2)^{\alpha/2}}\,\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(s)\,s^{1-\alpha}ds}{(t^2-s^2)^{\alpha/2}}$$

(Н. И. Ахиезер, В. А. Щербина [1]). Позже к подобной формуле для уравнения (34.2) пришел W. E. Williams [1].

30.3. Интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt = f(x),\ -\infty<x<\infty, \tag{34.4}$$

с разностным ядром, где $c(x)=\begin{cases}u(x), & x>0,\\ v(x), & x<0,\end{cases}$ $u(x),\ v(-x)\in H^{\lambda}(\dot{R}_+^1)$, $\lambda>\alpha$, приводится к интегральному уравнению второго рода с разностным сингулярным ядром:

$$N\varphi \equiv a_1\varphi(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(-|t-x|)}{t-x}\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}T(x-t)\,\varphi(t)\,dt = g(x),$$

где $a_1 = u(0)+v(0)\cos\alpha\pi$, $g(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{D}_+^{\alpha}f$, ядро $T(x)$ явно вычисляется по $u(x)$,

$v(x)$, является непрерывной функцией всюду, кроме начала координат, и допускает оценки $|T(x)| \leqslant c|x|^{\alpha-1}$ при $x \to 0$, $|T(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-\alpha-1}$ при $x \to \infty$. Оператор N имеет структуру $N\varphi = \lambda\varphi + \mu S\varphi + h_1 * \varphi + S(h_2 * \varphi)$, где λ, μ постоянные, $h_1(x)$, $h_2(x) \in \in L_1(R^1)$. В случае обратимости оператора N оператор N^{-1} имеет такую же структуру (С. Г. Самко [16; 27, § 5]).

30.4. Обобщенное уравнение Абеля (30.79) с постоянными коэффициентами на конечном отрезке решено в статье L. von Wolfersdorf [3] в виде ($a = 0$, $b = 1$):

$$\varphi(x) = \frac{c}{(x-a)^{\alpha+\theta/(2\pi)}(1-x)^{1-\theta/(2\pi)}} +$$

$$+ \frac{\sin\alpha\pi}{A\pi}\frac{d}{dx}\left\{u\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} - v\int_x^1 \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right\} - \lambda\int_0^1 P(x,\ t)\,f(t)\,dt,$$

где $c = 0$ при $uv > 0$, c произвольна при $uv < 0$, $A = u^2 + 2uv\cos\alpha\pi + v^2$, $\lambda = -\frac{v\sin^2\alpha\pi}{A\pi^2}\frac{\Gamma(2-\theta/(2\pi))\,\Gamma(1-\alpha)}{(\alpha+1)\,\Gamma(1-\alpha-\theta/(2\pi))}$ при $uv > 0$, $\lambda = \frac{v\sin^2\alpha\pi}{A\pi^2} \times$ $\times \frac{\Gamma(1-\theta/(2\pi))\,\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-\theta/(2\pi))}$ при $uv < 0$, $P(x,\ t) = [x(1-x)]^{-1-\alpha}\,{}_2F_1\left(2-\frac{\theta}{2\pi},\ 1+\alpha;\right.$ $\left.2+\alpha;\ \frac{x-t}{x(1-t)}\right)$ при $uv > 0$, $P(x,\ t) = \frac{d}{dx}\left\{[x(1-x)]^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(1-\frac{\theta}{2\pi},\ \alpha;\ 1+\alpha;\right.\right.$ $\left.\left.\frac{x-t}{x(1-t)}\right)\right\}$ при $uv < 0$, где θ см. в (30.80) (ср. с формулами (30.84), (30.89) в случаях $u = v$, $u = -v$). Другая форма решения, также в терминах гипергеометрических функций, дана Р. М. Ганеевым [2].

30.5. Обобщенное уравнение Абеля (30.41) решается в замкнутой форме и в том случае, когда оно рассматривается на гладкой дуге в комплексной плоскости. Эта ситуация была исследована К. Д. Сакалюком [3] и A. S. Peters [2]. В последней работе решено также и обобщенное уравнение Абеля (30.42) на гладкой дуге и уравнение

$$\int_{C_{az}} \frac{\varphi(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}} + k\int_{C_{za}} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^{1-\alpha}} = f(z),\ z \in C, \tag{34.5}$$

в случае замкнутого контура C, где C_{az}, C_{za}—две его составляющие дуги. Здесь $k \neq 1$ и $k \neq e^{2\pi i\alpha}$. Случаи $k = 1$, $k = e^{2\pi i\alpha}$, отвечающие вырожденным случаям соответствующей краевой задачи Римана, рассмотрены Ф. В. Чумаковым, И. Л. Васильевым [1]. Отметим, что сведением к уравнению (34.5) на замкнутом контуре A. S. Peters [2] решено, например, уравнение

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|\sin(x-t)|^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt = f(x),\ 0 < x < \pi.$$

Модификация уравнения (30.41), отвечающая случаю системы отрезков, рассмотрена Ф. В. Чумаковым [2].

30.6. Исключительные случаи для обобщенного уравнения Абеля (30.41), когда $u(x)$, $v(x)$ одновременно обращаются в нуль в конечном числе точек отрезка $[a, b]$, исследовал И. Л. Васильев [2, 5].

Решение уравнения (30.41) в случае, когда $u(x)$, $v(x)$ могут обращаться в бесконечность в точках a и b, дано в работе M. Orton [1] в некоторых классах обобщенных функций.

30.7. Алгоритм решения уравнения более общего, чем (30.41):

$$u(x)\int_a^x \frac{P(x-t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt + v(x)\int_x^b \frac{P(x-t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt = f(x),$$

где $P(x)$ — многочлен, указал К. Д. Сакалюк [2]. A. S. Peters [2] рассмотрел такое уравнение в случае разомкнутой гладкой дуги. Случай $v(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ см. также в работе H. Neunzert, J. Wick [1].

Заметим также, что некоторые обобщения уравнения (30.41) с гипергеометрической функцией Гаусса (1.72) в ядре на конечном отрезке и замкнутом контуре рассмотрены в работах Ф. В. Чумакова [1] и А. И. Песчанского [1] соответственно.

30.8. Обобщенное уравнение Абеля (30.41) на конечном отрезке имеет большой круг приложений. Отметим некоторые из них. Прежде всего это краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа, см., например, работу L. von Wolfersdorf [2]. Отметим также работу Х. Г. Бжихатлова [1], в которой уравнение, близкое к обобщенному уравнению Абеля (30.41), получено при решении краевой задачи для уравнений вырождающегося типа. L. von Wolfersdorf [4] дал приложения обобщенных уравнений Абеля к задачам теории игр. Приложение частных случаев (когда $u \equiv v \equiv 1$ или $u \equiv -v \equiv 1$) к задачам магнитогидродинамики указано в работе T. Lundgren, D. Chiang [1]. Приложения уравнения (30.41) с постоянными коэффициентами к контактным задачам теории ползучести и пластичности содержатся в работах Н. Х. Арутюняна [1, 2] и Н. Х. Арутюняна, М. М. Манукяна [1]. Аналогичные приложения в более общем случае переменного коэффициента трения даны Б. С. Рубиным [15].

30.9. Хотя первая попытка решения систем обобщенных интегральных уравнений Абеля содержится еще в работе N. Zeilon [1], настоящее их исследование началось сравнительно недавно. Более серьезные шаги были предприняты в работах M. Lowengrub, J. Walton [1] и J. R. Walton [3]. В первой из них система двух уравнений вида (30.41) (взятая не в общем виде) приводится методом аналитического продолжения к задаче Римана для двух пар функций. Однако содержащееся в этой работе решение задачи Римана ошибочно. Во второй работе дано сведение к полному сингулярному уравнению системы двух несколько более общих уравнений вида (30.41). Исследования в указанных работах велись в связи с приложениями к смешанным задачам теории упругости, см. по этому поводу также работу M. Lowengrub [1].

Интересные результаты для систем обобщенных уравнений Абеля получены И. Л. Васильевым [1, 3, 4], который, построив по системе некоторые эрмитовы формы, получил критерий единственности решения и безусловной разрешимости системы в терминах знакоопределенности данных форм. В ряде случаев через ранг и сигнатуру этих форм выражены числа решений и условий разрешимости системы.

В частности, И. Л. Васильев [4] свел системы обобщенных уравнений Абеля $UI^{\alpha}_{a+}\varphi + VI^{\alpha}_{b-}\varphi = f$, где φ, f — вектор-функции, а U, V — матрицы-функции, к системе сингулярных интегральных уравнений; аналогичное исследование проведено им для систем вида $I^{\alpha}_{a+}(U\varphi) + I^{\alpha}_{b-}(V\varphi) = f$. В случае постоянных коэффициентов, когда U, V — числовые матрицы, даны окончательные утверждения о разрешимости систем в терминах метода эрмитовых форм. В случае систем вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1 + C_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\,dt = f(x), \quad x \in R^1,$$

где C_1, C_2 — числовые матрицы, И. Л. Васильевым [1, 3] получена явная формула обращения типа (30.68).

В работе И. Л. Васильева [6] рассмотрены системы обобщенных уравнений Абеля по всей прямой, содержащие вместе с вектор-функцией $\varphi(x)$ и вектор-функцию $\varphi(-x)$.

Отметим также работу F. Penzel [1], в которой системы обобщенных уравнений Абеля изучались на полуоси R^1_+ в пространствах $L_p(R^1_+;\ \rho)$ с весом $\rho = x^{\gamma}$.

30.10. В задачах приближения функций (при применении вариационного метода к аппроксимации функций линейными положительными полиномиальными операторами) встретилось (Х. М. Коган [1, 2]) интегродифференциальное уравнение

$$\lambda\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{\alpha}} \varphi'(t)\,dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обращением правой части это уравнение приведено в указанных работах к однородному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с положительно определенным оператором.

30.11. Некоторые результаты о разрешимости нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\int_0^x F(x, t, \varphi(t), \varphi'(t))(x-t)^{\alpha-1}\,dt = f(x), \quad x > 0, \ 0 < \alpha < 1,$$

содержатся в работе D. Sadowska [1].

31.1. Обобщенное уравнение Абеля (30.41), т. е. уравнение $M\varphi = u(x) I^{\alpha}_{a+}\varphi + v(x) I^{\alpha}_{b-}\varphi = f$, решено в § 30 при $0 < \alpha < 1$. Его можно рассматривать и в случае $\alpha \notin (0, 1)$. При $\alpha < 0$ это соотношение можно трактовать как дифференциальное уравнение дробного порядка. Обстоятельное исследование $M\varphi = f$ при произвольных $\alpha \in R^1$

проведено Б. С. Рубиным в работе [11], где, в частности, на основе пространств $L_p(a, b)$ построены пары банаховых пространств X и Y (для каждого α) так, что оператор M нетеров из X в Y.

31.2. Нетеровость интегральных уравнений первого рода $M\varphi \equiv \int\limits_{\Omega} c(x, y)|x-y|^{\alpha-1}\varphi(y)\,dy = f(x)$, $x \in \Omega$, где функция $c(x, y)$ разрывна при $x = y$, исследована и в случае, когда Ω — совокупность отрезков вещественной оси, а оператор M рассматривается действующим из $L_p(\Omega; \rho)$ в $I^{\alpha}[L_p(\Omega; \rho)]$ (Б. С. Рубин [2, 5]). В другой работе Б. С. Рубина [6] исследована нетеровость оператора M в случае, когда Ω — замкнутая достаточно гладкая кривая в комплексной плоскости.

31.3. Б. С. Рубиным [8, 13] исследована нетеровость оператора M типа потенциала (31.1) в более общей ситуации, когда $c(x, t)$ может иметь разрывы не только при $t=x$, но и при $t=a_k$, $k=1, \ldots, m$, $x=b_j$, $j=1, \ldots, n$ (особенно содержателен случай, когда допускается $a_k=b_j$). Это обобщение интересно, в частности, тем, что позволяет рассмотреть уравнения «с конечным числом ядер типа потенциала»:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_k+1} c_k(x, t)|x-t|^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt = f(x).$$

31.4. Нетеровость оператора типа потенциала, указанная в теореме 31.9, может быть получена при более слабых требованиях о поведении $u(x, t)$, $v(x, t)$ на бесконечности, если ограничиться вырожденными функциями $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)$, $v(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k(x)\,d_k(t)$ и нетеровость рассматривать не из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$, а из L_2^s в $L_2^{s+\alpha}$, где $L_2^s = L_2^s(R^1)$ — пространство Соболева дробной гладкости, оператор типа потенциала рассматривается при этом как замкнутый (А. В. Скориков [1]).

31.5. Нетеровость более общего, чем (34.4), уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(x, x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt = f(x)$$

с «почти-разностным» ядром рассмотрена А. В. Скориковым [4], получившим критерий нетеровости и формулу для индекса, когда $m(x, y)$ терпит разрыв первого рода по y при $y=0$. Исследование основано на сведении к некоторому сингулярному уравнению в свертках.

31.6. В работе С. Г. Самко, И. Л. Васильева [1] выделены классы уравнений (31.1) более общих, чем обобщенное уравнение Абеля, которые приводятся к полным сингулярным уравнениям с мероморфным ядром и тем самым решаются в замкнутой форме.

31.7. Вопросам подобия в $L_p(0, a)$ оператора $I_{0+}^{\alpha}\varphi + \int\limits_0^x k(x, t)\varphi(t)\,dt$ оператору дробного интегрирования I_{0+}^{α} посвящены работы Г. Калиша (G. K. Kalisch [2]), М. М. Маламуда [1] (операторы A и B называются подобными в пространстве X, если существует линейный оператор C в X, обратимый в X, такой, что $AC = CB$).

31.8. В работе K. E. Atkinson [1] рассмотрено уравнение

$$\int_0^x \frac{u(x, t)}{(x^p - t^p)^{\alpha}}\varphi(t)\,dt = f(x), \quad 0 < x < b, \quad 0 < \alpha < 1,$$

совпадающее при $p = 1$ с уравнением (31.67). Показано, что при дополнительных условиях гладкости на ядро и свободный член $u(x, t) \in C^{n+2}\{(x, t) \in R^2: 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant b\}$, $f(x) = x^{\beta} g(x)$, $g(x) \in C^{n+1}[0, b]$ и выполнении неравенства $p\alpha + \beta > 0$ единственное решение φ уравнения имеет гладкость вида $\varphi(x) = x^{p\alpha-1+\beta}\psi(x)$, $\psi(x) \in C^n[0, b]$. Метод исследования, как и для уравнения (31.67), основан на сведении к уравнению Вольтерра 2-го рода и применении к последнему метода последовательных приближений в специальном пространстве функций.

32.1. В работах Б. С. Рубина, Г. Ф. Володарской [1] и Б. С. Рубина [13, 14] исследовались более общие, чем (32.1), уравнения вида

$$\int_0^x c(x-t)\,\mathrm{k}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x \in (a, b). \tag{34.6}$$

Здесь функция $c(x)$ удовлетворяет условиям типа абсолютной непрерывности на $[0, b-a]$, а ядро $\mathrm{k}(x)$ имеет вид

$$\mathrm{k}(x) = x^{\alpha-1} g\left(\ln \frac{\gamma}{x}\right), \quad \alpha \geqslant 0, \quad \gamma > b-a, \tag{34.7}$$

где множитель $g\left(\ln \frac{\gamma}{x}\right)$ вносит в ядро особенность (или нуль) более слабую, чем степенная функция. Например, $g(x)$ может иметь вид $g(x) = \prod_{k=1}^{n} \ln_k^{\beta_k} \frac{\gamma}{x}$, $\ln_k = \underbrace{\ln \ldots \ln}_{k \text{ раз}}$, $-\infty < \beta_k < \infty$.

В указанных работах ослабление или усиление особенности ядра достигается применением по α операции свертки с некоторой, вообще говоря, обобщенной функцией.

32.2. В работе Б. С. Рубина [12] получено описание и обращение сверток $I_{a+}^{\alpha, 1}\varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$ (см. § 32, п. 2°) в терминах разностных конструкций типа производной Маршо. Обозначим

$$\mu(x) = -\int_0^{\infty} \frac{x^{t-\alpha}}{\Gamma(t-\alpha+1)} \exp\left(t \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) dt.$$

Тогда справедлива

Теорема 34.1. *Для того чтобы функция $f \in L_p(a, b)$ была представима в виде $f = I_{a+}^{\alpha, 1}\varphi$, где $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, необходимо, а при $1 \leqslant p < \infty$ и достаточно, чтобы в $L_p(a, b)$ существовал предел*

$$(Bf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{x-\varepsilon} [f(x) - f(y)]\,\mu'(x-y)\,dy$$

(вне отрезка $[a, b]$ полагаем $f(x) \equiv 0$). При этом

$$\varphi(x) = f(x)\,\mu(x-a) - (Bf)(x)$$

(ср. с аналогичной теоремой 13.2 для дробных интегралов в § 13).

32.3. В работе А. И. Линкер, Б. С. Рубина [1] исследованы вопросы о сужении, продолжении и «склеивании» классов функций, представимых свертками (32.2) с плотностью $\varphi \in L_p(a, b)$. Аналогичные результаты для дробных интегралов приведены в § 13, п. 3°.

32.4. Знание асимптотических разложений интегралов со степенно-логарифмическими ядрами позволяет находить асимптотическое решение (см. § 16, п. 5°) соответствующих уравнений (см. работу А. А. Килбаса [8] и литературные указания к § 21 в § 23).

32.5. В работе V. Volterra, J. Peres [1] рассмотрено более общее, чем (32.3), уравнение

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^{m} A_{mk} \ln^k (x-t) + (x-t)^{\alpha} a(x, t)\right] \varphi(t)\,dt = f(x), \quad \alpha > 0, \tag{34.8}$$

где $a(x, t)$ — некоторая известная функция. Это уравнение с помощью соотношения (34.1) приведено к более простому уравнению Вольтерра 1-го рода, в котором отсутствуют логарифмические сомножители. В частности, при $\alpha = 1$, $m = 1$ уравнение (34.8) сведено к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода при некоторых предположениях о гладкости $a(x, t)$ по x.

32.6. Формула обращения простейшего интегрального уравнения вида (32.2) на оси

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

в некотором пространстве обобщенных функций, инвариантных относительно дробного лиувиллевского интегродифференцирования, дана в работе В. К. Вебера [4]. Интересно, что здесь в отличие от случая конечного отрезка однородное уравнение ($f\equiv 0$) имеет нетривиальное решение $\varphi(t)=c\exp(e^{\psi(\alpha)}t)$ (в рассматриваемом пространстве обобщенных функций).

32.7. Поведение оператора типа свертки (32.19) со специальной функцией Вольтерра (32.10) при $h=\psi(\alpha)$ в обычных $H_0^\lambda(\rho)$ и обобщенных $H_0^{\lambda,k}(\rho)$ весовых гельдеровских пространствах исследовано в работе А. А. Килбаса [4]. Установлены ограниченность указанного оператора в $H_0^{\lambda,k}(\rho)$ ($k=1, 2, \ldots$) и его полная непрерывность в $H_0^\lambda(\rho)$.

33.1. Теорема 33.3 в случае натуральных показателей степени логарифма перенесена в работе Б. С. Рубина [4] на весовые пространства $L_p([a, b]; \rho)$, где

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k},\quad a=x_1<\ldots<x_n=b. \tag{34.9}$$

В работе Б. С. Рубина [9] указано на справедливость этого результата и для действительных неотрицательных степеней логарифма.

33.2. В работе А. А. Килбаса [6] операторы (33.1) со степенно-логарифмическими ядрами с натуральными степенями логарифма исследованы на нетеровость из весового гельдеровского пространства $H_0^\lambda(\rho)$ в обобщенное весовое гельдеровское пространство $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$, где $0<\lambda<1$, $0<\lambda+\alpha<1$, $\beta=1, 2, \ldots$, ρ — вес (34.9). Отметим, что основную роль здесь играет теорема о гомеоморфизме пространств $H_0^\lambda(\rho)$ и $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$ относительно операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $I_{b-}^{\alpha,\beta}$ со степенно-логарифмическими ядрами (при натуральных β). При ее доказательстве наряду с результатами § 21 использованы свойства оператора свертки (32.19) со специальной функцией Вольтерра (см. п. 32.7).

33.3. В случае $\varphi\in L_p\equiv L_p(a, b)$, $1/p<\alpha<1$, имеют место подобные (33.16), (33.17) соотношения

$$I_{b-}^{\alpha,\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha,\beta}[\cos(\alpha\pi)\,\varphi+\sin(\alpha\pi)\,S_{a,\alpha-1}\varphi+T_3\varphi]+c_1(\varphi), \tag{34.10}$$

$$I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi=I_{b-}^{\alpha,\beta}[\cos(\alpha\pi)\,\varphi-\sin(\alpha\pi)\,S_{b,\alpha-1}\varphi+T_4\varphi]+c_2(\varphi), \tag{34.11}$$

где T_3, T_4 — вполне непрерывные в L_p операторы, $c_1(\varphi)$ и $c_2(\varphi)$ — некоторые функционалы. Эти равенства были установлены Б. С. Рубиным [10] и использованы им для исследования нетеровости операторов (33.1) из L_p в $I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p)\oplus R$ при $1/p<\alpha<1$ (см. замечание 32.2 в § 32), при этом были доказаны аналогичные теоремам 33.3 — 33.4 утверждения.

В исключительном случае $\alpha=1/p$ такой метод исследования не применим, так как входящие в соотношения (32.16), (32.17) операторы $S_{a,\alpha}$ и $S_{b,\alpha}$ ограничены при $1/p-1<\alpha<1/p$, а входящие в (34.10), (34.11) операторы $S_{a,\alpha-1}$ и $S_{b,\alpha-1}$ — при $1/p<\alpha<1+1/p$. Поэтому вопрос исследования нетеровости оператора (33.1) при $\alpha=1/p$ остается открытым.

33.4. Нетеровость операторов типа потенциала (33.1) с чисто логарифмическими ядрами ($\alpha=1$, $\beta>0$) из пространства L_p исследована для логарифма первой степени Б. С. Рубиным [4], для натуральных и действительных положительных показателей степени логарифма — А. А. Килбасом [2, 5].

В работах А. А. Килбаса [3, 5, 7] исследована нетеровость из $L_p([a, b]; \rho)$, $1<p<\infty$, где ρ — вес (34.9), более общих, чем операторы (33.1) с чисто логарифмическими ядрами ($\alpha=1$, $\beta>0$), операторов вида

$$K\varphi\equiv\sum_{j=1}^{m}\int_a^b K_j(x, t)\ln^{\beta_j}\frac{\gamma}{|x-t|}\varphi(t)\,dt=f(x),\quad -\infty<a<b<\infty.$$

Здесь $\beta_j\geqslant 0$ ($j=1, 2, \ldots, m$), $\gamma>b-a$, а среди функций $K_j(x, t)$ могут быть как непрерывные, так и кусочно-непрерывные с разрывом первого рода на диагонали $x=t$. Другие результаты, связанные с такими уравнениями, см. в работах А. А. Килбаса [10, 11].

33.5. Б. С. Рубин, Г. Ф. Володарская [1] и Б. С. Рубин [13] исследовали вложение образов операторов свертки из (34.6) более общих, чем в (33.10). В основе этих работ лежит введение так называемых обобщенных функций Вольтерра и изучение их асимптотики с помощью свойств преобразования Лапласа.

33.6. Нетеровость операторов типа потенциала с более общим характером особенности (34.7) рассматривалась Б. С. Рубиным, Г. Ф. Володарской [1] и Б. С. Рубиным [14].

ГЛАВА 7

Интегральные уравнения первого рода со специальными функциями в ядрах

Настоящая глава посвящена приложению методов дробного интегродифференцирования к исследованию одномерных интегральных уравнений первого рода

$$\int_a^b K(x, t) f(t)\, dt = g(x),$$

$$-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty, \qquad (1)$$

ядра $K(x, t)$ которых содержат специальные функции. Такие уравнения тесно связаны с интегральными преобразованиями (см. § 1, п. 4°). К ним приводятся решения многих задач как из других разделов математики, в частности дифференциальных уравнений (см. главу 8), теории функций и др., так и из физики, механики и иных естественных наук. В форме (1) могут быть также записаны и так называемые парные и тройные интегральные уравнения, характерные примеры которых рассматриваются в последнем параграфе главы.

Уравнения вида (1) являются уравнениями первого рода, и поэтому проблема их обращения относится к некорректным задачам. Для таких уравнений характерно наличие большого числа различных методов решения, применяемых к специальным подклассам этого множества уравнений. Наиболее изученным подклассом являются уравнения с разностными ядрами, когда $K(x, t) = k(x-t)$, см., например, монографии Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского [1], Е. Титчмарша [1], И. И. Хиршмана, Д. В. Уиддера [1], Р. Бушмана, Х. Сриваставы (R. G. Buschman, H. M. Srivastava [1]). Заметим, что в последней книге содержится большое число уравнений со специальными функциями в ядрах и их решений, а также приведена обширная библиография работ, посвященных решению в замкнутой форме уравнений с разностными ядрами и переменным верхним или нижним пределами интегрирования.

В данной главе строятся решения уравнений вида (1), являющихся обобщениями или модификациями интегрального уравнения Абеля (2.1), а также уравнений композиционного типа, связанных с уравнением Абеля. При этом наиболее эффективным оказывается метод факторизации (композиционных разложений), который заключается в представлении некоторых классов операторов (1) в виде композиций операторов дробного интегродифференцирования с дру-

гими операторами, имеющими известные формулы обращения. Значительный вклад в разработку этого метода, начавшуюся для рассматриваемых здесь уравнений в начале 60-х годов, внесли зарубежные математики (см. § 39, п. 1°). Отметим, однако, что задолго до этого идея метода факторизации в неявном виде использовалась в конце XIX века русским математиком Н. Я. Сониным в работах [4, 5], а сам этот метод по существу был применен впервые в 1948 г. советским математиком Н. Н. Лебедевым в работе [1] (см. § 39, п. 1° и п. 2°, 37.3 и 35.7).

§ 35. НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ФУНКЦИИ ГАУССА И ЛЕЖАНДРА

Рассмотрим здесь ряд важных для приложений интегральных уравнений типа свертки Меллина с гипергеометрической функцией Гаусса или с функцией Лежандра в ядрах. Покажем, что эти уравнения могут быть обращены через композиции двух операторов дробного интегродифференцирования со степенными весами или же почти симметричным образом через операторы, включающие функцию Гаусса или Лежандра и обычное дифференцирование. При исследованиях будем опираться на результаты § 10, п. 1°.

1°. Уравнения с функцией Гаусса. Пусть заданы следующие четыре интегральных уравнения с гипергеометрической функцией в ядре:

$$\int_e^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.1}$$

$$\int_e^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.2}$$

$$\int_x^d \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.3}$$

$$\int_x^d \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.4}$$

рассматриваемых на промежутке $0 \leqslant e < x < d \leqslant \infty$. В соответствии с замечанием 10.3 операторы в левых частях (35.1)—(35.4) будем обозначать символами ${}_1I^c_{e+}(a, b)\varphi$, ${}_2I^c_{e+}(a, b)\varphi$ и ${}_3I^c_{d-}(a, b)\varphi$, ${}_4I^c_{d-}(a, b)\varphi$ при $d < \infty$ или ${}_3I^c_{-}(a, b)\varphi$, ${}_4I^c_{-}(a, b)\varphi$ при $d = \infty$.

Как показывают формулы (10.22)—(10.29), операторы ${}_jI^c(a, b)$ представляют собой композиции двух односторонних дробных интегралов или производных со степенными весами. Условия такой представимости отражают теорема 10.4 и замечание 10.3, из которых следует, что если $\varphi(x)$ принадлежит пространству L_p (или некоторому его подпространству), то при соответствующих условиях операторы ${}_jI^c(a, b)\varphi$ действуют на определенное подпространство из L_p и справедливы те или иные из формул (10.22)—(10.29). Это означает, что если правая часть — функция $g(x)$ — берется из указанной области, на которую действует оператор ${}_jI^c(a, b)$, то соответствующее уравнение ${}_jI^c(a, b)\varphi = g$ однозначно разрешимо путем последовательного обращения двух интегродифференциальных операторов, композиция которых составляет ${}_jI^c(a, b)$. Осуществив такие обращения, из формул (10.22)—(10.29) получим следующие представления решений уравнений (35.1)—(35.4):

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{e+}^{-b} x^a I_{e+}^{b-c} g(x), \tag{35.5}$$

$$\varphi(x) = x^{-b} I_{e+}^{b-c} x^{c-a} I_{e+}^{-b} x^{a+b-c} g(x), \tag{35.6}$$

$$\varphi(x) = I_{e+}^{b-c} x^a I_{e+}^{-b} x^{-a} g(x), \tag{35.7}$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c} I_{e+}^{-b} x^{c-a} I_{e+}^{b-c} x^{-b} g(x), \tag{35.8}$$

$$\varphi(x) = x^{-b} I_{d-}^{b-c} x^{c-a} I_{d-}^{-b} x^{a+b-c} g(x), \tag{35.9}$$

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{d-}^{-b} x^a I_{d-}^{b-c} g(x), \tag{35.10}$$

$$\varphi(x) = I_{d-}^{b-c} x^a I_{d-}^{-b} x^{-a} g(x), \tag{35.11}$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c} I_{d-}^{-b} x^{c-a} I_{d-}^{b-c} x^{-b} g(x) \tag{35.12}$$

и соответствующую теорему. Для ее формулировки обозначим через E_j^* столбец номеров, получаемый из столбца E_j табл. 10.2 заменой соответственно (10.22)—(10.29) на (35.5)—(35.12). Тогда будет справедлива

Теорема 35.1. *Пусть на интервале $(0, d)$ заданы уравнения (35.1), (35.2) с $e=0$, а на интервале (e, ∞) — уравнения (35.3), (35.4) с $d=\infty$, где $\mathrm{Re}c>0$, для соответствующих операторов B_j выполняются условия A_j (см. табл. 10.2), а заданная функция $g(x)\in D_j$, $1\leqslant p<\infty$. Тогда соответствующее уравнение $B_j\varphi=g$ вида (35.1)—(35.4) имеет единственное решение, выражаемое формулой E_j^*, где $e=0$, $d=\infty$. Последнее утверждение сохраняет силу и в случае $e>0$ и соответственно $d<\infty$. Тогда в условиях A_j ограничения, включающие p, опускаются.*

Доказательство. Все утверждения теоремы фактически установлены при доказательстве теорем 10.2 и 10.4 и замечания 10.3. Отметим дополнительно, что, например, при $e>0$ особая точка $\tau=0$ ядра уравнения (35.1) лежит вне промежутка интегрирования, и это обстоятельство позволяет устранить из ограничений A_1 и A_2 условия, содержащие p, так как особенности функции $\varphi(\tau)$ и ядра в точке $\tau=0$ не налагаются. Аналогичное справедливо и для остальных операторов из уравнений (35.2)—(35.4).

Из соотношений (10.30)—(10.32) следует, что уравнения (35.1)—(35.4) можно рассматривать как четыре различные формы записи одного, например первого, уравнения. Остальные отличаются от него лишь заменой переменных, функций и параметров.

Следует отметить, что кроме (35.5)—(35.12) можно использовать и другие формы представлений решений уравнений (35.1)—(35.4), в частности через интегральные операторы, содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию. Такие представления можно получать из формул (35.5)—(35.12), используя соотношения (10.4), (10.5) или им подобные. На примере формулы (35.5) построим два таких решения уравнения (35.1). Очевидно, что решение (35.5) можно записать в виде

$$\varphi(x) = x^{-a}\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^a x^{-a} I_{e+}^{m-b} x^a I_{e+}^{(m-c)-(m-b)} g(x)$$

или

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{e+}^{-b} x^a I_{e+}^{b-c+m}\left(\frac{d}{dx}\right)^m g(x), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

причем последняя формула, и это надо подчеркнуть, неэквивалентна (35.5), так как в ней функция $g(x)$ предполагается уже принадлежащей подклассу из $L_p(e, d)$ функций, представимых в виде $g = I_{e+}^m \chi$, $\chi \in L_p(e, d)$, т. е. имеющих производную $g^{(m)}(x)$, причем $g(e) = g'(e) = \ldots = g^{(m-1)}(e) = 0$.

Сопоставив эти записи с равенством (10.24) и учтя (10.19), придем к следующим представлениям решения уравнения (35.1):

$$\varphi(x)=x^{-a}\frac{d^m}{dx^m}\left\{x^a\int_e^x\frac{(x-\tau)^{m-c-1}}{\Gamma(m-c)}\,{}_2F_1\left(-a,\ m-b;\ m-c;\ 1-\frac{\tau}{x}\right)g(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{35.13}$$

$$0<\operatorname{Re}c<m,\quad g\in I^c_{e+}(L_{p,*}(e,\ d));$$

$$\varphi(x)=\int_e^x\frac{(x-\tau)^{m-c-1}}{\Gamma(m-c)}\,{}_2F_1\left(-a,\ -b;\ m-c;\ 1-\frac{\tau}{x}\right)g^{(m)}(\tau)\,d\tau, \tag{35.14}$$

$$0<\operatorname{Re}c<m,\ g\in C^m([e,\ d]),\ g(e)=g'(e)=\ldots=g^{(m-1)}(e)$$

(очевидно, что $L_{p,*}(e,\ d)=L_p(e,\ d)$ при $e>0$, см. (10.2)). Аналогичным способом можно преобразовать и остальные формулы (35.6)—(35.12).

2°. Уравнения с функцией Лежандра. В приложениях к дифференциальным уравнениям (см., например, § 40, п. 2°) встречаются различные частные случаи уравнений (35.1)—(35.4) с ядрами, содержащими функцию Лежандра, многочлены Чебышева, Лежандра, Гегенбауэра, Якоби и др. Рассмотрим здесь наиболее полезные в дальнейшем уравнения с функцией Лежандра (1.79), (1.80) в ядре:

$$\int_e^x(x^2-t^2)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt=g(x), \tag{35.15}$$

$$\int_e^x(x^2-t^2)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt=g(x), \tag{35.16}$$

$$\int_x^d(t^2-x^2)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt=g(x), \tag{35.17}$$

$$\int_x^d(t^2-x^2)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt=g(x), \tag{35.18}$$

полагая во всех случаях $0\leqslant e<x<d\leqslant\infty$ и $\operatorname{Re}\mu<1$, чтобы указанные интегралы сходились на переменном конце. Решения этих уравнений получим с помощью преобразования Меллина. Наиболее подробно рассмотрим первое из них.

Совершим в (35.15) замены переменных и функций по формулам

$$t^{1-\mu}f_1(t)\,H(t-e)=2\varphi(t^2),\ t^2=\tau,\ x^2=y,\ y/\tau=\eta,$$
$$(\eta-1)^{-\mu/2}H(\eta-1)\,P_\nu^\mu(\sqrt{\eta})=h(\eta),\ g(\sqrt{y})=g_1(y), \tag{35.19}$$

где $H(\xi)$ — единичная функция: $H(\xi)=1$, $\xi>0$; $H(\xi)=0$, $\xi<0$. Тогда это уравнение примет вид $\int_0^\infty h(y/\tau)\,\varphi(\tau)\,\tau^{-1}d\tau=g_1(y)$. Применив к последнему преобразование Меллина (1.112) и формулу 11.14 (1) из книги

О. И. Маричева [10], в силу теоремы о свертке (1.115) получим соотношение

$$\varphi^*(s) = 2^{-\mu}\frac{\Gamma(1^*-,s)\,\Gamma(1/2-s)}{\Gamma((1+\mu+\nu)/2-s)\,\Gamma((\mu-\nu)/2-s)}\,g_1^*(s), \tag{35.20}$$

$$\operatorname{Re}\mu<1, \quad \operatorname{Re}(2s-\mu-\nu)<1, \quad \operatorname{Re}(2s+\nu-\mu)<0.$$

Обратный переход от (35.20) к оригиналам можно осуществлять разными приемами. Укажем три из них, которые приводят к различным формам решений.

А. Воспользовавшись представлением (10.35) и сгруппировав различными способами гамма-функции (вертикально и крест-накрест), получим следующие два представления функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = 2^{-\mu}\,(y^{(1-\mu-\nu)/2}\,I_{0+}^{(\mu+\nu-1)/2})(y^{1+(\nu-\mu)/2}\,I_{0+}^{(\mu-\nu-1)/2}\,y^{-1/2})\,g_1(y), \tag{35.21}$$

$$\varphi(y) = 2^{-\mu}\,(y^{(1-\mu-\nu)/2}\,I_{0+}^{(\mu+\nu)/2}\,y^{-1/2})(y^{1+(\nu-\mu)/2}\,I_{0+}^{(\mu-\nu)/2-1})\,g_1(y). \tag{35.22}$$

На достаточно хороших функциях $g_1(y)$ (на которых [операторы в скобках коммутативны) эти представления совпадают, так как они отличаются друг от друга заменой ν на $-\nu-1$, что несущественно ввиду свойства $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$. Совершив в (35.21) обратную замену по формулам (35.19), придем к следующему представлению решения уравнения (35.15):

$$f(x) = 2^{1-\mu}\,x^{-\nu}\,I_{e+;\,x^2}^{(\mu+\nu-1)/2}\,x^{2+\nu-\mu}\,I_{e+;\,x^2}^{(\mu-\nu-1)/2}x^{-1}g(x), \tag{35.23}$$

где $I_{e+;\,x^2}^{\alpha}$ — оператор, определяемый в § 18, п. 2°, см. (18.41).

Б. Несколько иное представление решения можно получить, если числитель и знаменатель (35.20) умножить на $\Gamma(1+(\mu+\nu)/2-s)$, а затем применить формулу удвоения для гамма-функции (1.61) и наряду с (10.35) ее аналог вида

$$x^{\beta/2}\,I_{0+;\,\sqrt{x}}^{\alpha-\beta}\,x^{-\alpha/2}f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(1-\alpha-2s)}{\Gamma(1-\beta-2s)}f^*(s)\,x^{-s}ds, \quad 2\gamma<1-\operatorname{Re}\alpha. \tag{35.24}$$

Тогда

$$\varphi^*(s) = 2^{\nu}\frac{\Gamma(1-2s)\,\Gamma(1+(\mu+\nu)/2-s)}{\Gamma(1+\mu+\nu-2s)\,\Gamma((\mu-\nu)/2-s)}\,g_1^*(s),$$

$$\varphi(y) = 2^{\nu}\,(y^{-(\mu+\nu)/2}\,I_{0+;\,\sqrt{y}}^{\mu+\nu})(y^{1+(\nu-\mu)/2}\,I_{0+}^{-\nu-1}\,y^{(\mu+\nu)/2})\,g_1(y),$$

и, наконец, искомое решение уравнения (35.15) записывается в форме

$$f(x) = (2x)^{\nu+1}\,I_{e+;\,x^2}^{-\nu-1}\,I_{e+}^{\mu+\nu}\,g(x). \tag{35.25}$$

В. Во многих случаях используется и третья форма представления решения уравнения (35.15) через почти симметричное с (35.16) выражение. Для ее получения вначале отметим, что разность параметров гамма-функций в числителе и знаменателе (10.35) равна $\beta-\alpha$, и если $\operatorname{Re}(\beta-\alpha)<0$, то интеграл из правой части (10.35) соответствует дробному интегралу $x^\beta I_{0+}^{\alpha-\beta}x^{-\alpha}$, а в случае $\operatorname{Re}(\beta-\alpha)>0$ — такой же дробной производной. Аналогичная разность параметров из формулы (35.20) равна $1-\mu$, причем $\operatorname{Re}(1-\mu)>0$, т. е. правая часть (35.20) соответствует дробной производной от функции $g_1(y)$. Поэтому на языке оригиналов эту дробную производную удобно записывать через композицию операторов, включающую операторы обычного дифференцирования.

Для перехода к оригиналам воспользуемся тем, что, как следует из (10.35) при $\alpha-\beta=-n$, оператору $x^{\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}x^{n-\beta}$ соответствует (по Мелину) умножение на $(1-\beta-s)_n$, а из (35.24) вытекает соответствие $x^{\beta/2}\left(\frac{d}{d\sqrt{x}}\right)^{n}x^{(n-\beta)/2}\longleftrightarrow(1-\beta-2s)_n$. Умножив и поделив правую часть (35.20) на $(1-\beta-s)_n$ или $(1-\beta-2s)_n$ с соответствующе подобранными $\beta=1+(\nu-\mu)/2$ или $\beta=n$, запишем правую часть (35.20) в виде

$$\frac{2^{-\mu}\Gamma(1-s)\,\Gamma(1/2-s)}{\Gamma((1+\mu+\nu)/2-s)\,\Gamma((\mu-\nu)/2+n-s)}\left(\frac{\mu-\nu}{2}-s\right)_n g_1^*(s),$$

$$\frac{2^{-\mu-n}\Gamma((1-n)/2-s)\,\Gamma(1-n/2-s)}{\Gamma((1+\mu+\nu)/2-s)\,\Gamma((\mu-\nu)/2-s)}(1-n-2s)_n g_1^*(s).$$

Первые гамма-множители в случае $1-\mathrm{Re}\mu-n<0$ соответствуют ядру «дробного интеграла», имеющему вид $(\eta-1)^{-\mu_1/2}H(\eta-1)P_{\nu_1}^{\mu_1}(\eta^{-1/2})$ со специально подобранными параметрами μ_1 и ν_1 (см. книгу О. И. Маричева [10, 11.13(4)]). Вторые множители соответствуют указанным выше операторам обычного дифференцирования со степенными множителями, которые могут находиться как вне интеграла, так и внутри (в последнем случае от функции $g_1(y)$ требуются дополнительные ограничения). Совершив переход к оригиналам, из приведенных формул окончательно получим после замен (35.19) следующие четыре представления решения уравнения (35.15):

$$f(x)=x^{-\nu}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{n}x^{n+\nu}\int_e^x(x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{n+\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)g(\tau)\,d\tau, \tag{35.26}$$

$$f(x)=x^{-n}\int_e^x(x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{n+\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)\tau^{1-\mu-\nu}\times$$

$$\times\left(\frac{d}{\tau d\tau}\right)^{n}(\tau^{2n+\mu+\nu-1}g(\tau))\,d\tau, \tag{35.27}$$

$$f(x)=x^{\mu+n-1}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{1-\mu}\int_e^x(x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}\tau^{-n}P_{\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)g(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{35.28}$$

$$f(x)=\int_e^x(x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)g^{(n)}(\tau)\,d\tau. \tag{35.29}$$

Последняя из этих формул содержит оператор вида (35.16). Поэтому, поменяв в ней $g^{(n)}(\tau)$ на $f(\tau)$, $f(x)$ на $g(x)$ и μ на $2-n-\mu$ и учтя взаимную обратимость соотношений (35.15) и (35.29), без труда получим представления решения уравнения (35.16) вида

$$f(x)=I_{e+}^{\mu-\nu-2}I_{e+;x^2}^{\nu+1}(2x)^{-\nu-1}g(x), \tag{35.30}$$

$$f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_e^x(x^2-t^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{x}{t}\right)g(t)\,dt, \tag{35.31}$$

$$f(x) = x^{-n} \int_e^x (x^2 - t^2)^{(n+\mu)/2-1} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{x}{t}\right) t^{\mu+n-1} \times$$

$$\times \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{1-\mu} g(t))\, dt \qquad (35.32)$$

(ср. (35.25) с (35.30) и (35.28) с (35.32)).

Совершив в (35.15), (35.16) замены $t^{2-\mu} f(t)$ на $f(t^{-1})$, $x^\mu g(x)$ на $g(x^{-1})$, x на x^{-1} и e на d^{-1}, придем к формулам (35.18), (35.17). Это свойство дает возможность из найденных решений получить соответствующие решения для уравнений (35.17), (35.18), в частности из (35.30), (35.25) решения

$$f(x) = (x/2)^{\nu+1}\, I_{d-}^{\mu-\nu-2}\, x^{1-\mu-\nu}\, I_{d-;\,x^2}^{\nu+1}\, x^{\mu-\nu-3} g(x), \qquad (35.33)$$

$$f(x) = 2^{\nu+1}\, x^{\mu+\nu+1}\, I_{d-;\,x^2}^{-\nu-1}\, x^{1+\nu-\mu}\, I_{d-}^{\mu+\nu}\, x^{-\nu-1} g(x). \qquad (35.34)$$

Аналоги формул (35.26)—(35.29) при указанном переходе выписывать не будем, но следует отметить, что решения уравнений (35.17) и (35.18) представимы по формулам, отличающимся от (35.28), (35.29) и соответственно (35.31), (35.32) лишь заменами промежутка интегрирования (e, x) на (x, d) и $(x^2-t^2)^{(n+\mu)/2-1}$ на $(-1)^n (t^2-x^2)^{(n+\mu)/2-1}$.

Непосредственным вычислением способом, приведшим к решению (35.25), можно убедиться, что кроме представлений (35.33), (35.34) для решений уравнений (35.17), (35.18) допустимы и другие формы записи соответственно

$$f(x) = (2x)^{\nu+1}\, I_{d-;\,x^2}^{-\nu-1}\, I_{d-}^{\mu+\nu} g(x), \qquad (35.35)$$

$$f(x) = I_{d-}^{\mu-\nu-2}\, I_{d-;\,x^2}^{\nu+1}\, (2x)^{-\nu-1} g(x). \qquad (35.36)$$

Основываясь на результатах § 10, п. 1°, приняв во внимание теорему 18.1, лемму 31.4 и замечание 10.3, а также свойство симметрии функции Лежандра $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$, из которого, не теряя общности, можно полагать $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2$, полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 35.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\mu < 1$, $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2$, $0 < e < d < \infty$. *Тогда для того, чтобы уравнения* (*35.15*), (*35.16*) *и* (*35.17*), (*35.18*) *имели решения* $f \in L_p(e, d)$, $1 \leqslant p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $g \in I_{e+}^{1-\mu}(L_p(e, d))$ *и соответственно* $g \in I_{d-}^{1-\mu}(L_p(e, d))$. *При указанных условиях эти решения единственны и представимы по формулам* (*35.25*), (*35.30*) *и* (*35.35*), (*35.36*).

Случаи $e=0$ для (35.15), (35.16) и $d=0$ для (35.17), (35.18) являются более сложными и требуют специального исследования.

§ 36. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ КАК ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В процессе введения операторов дробного интегродифференцирования I_{a+}^α и I_{b-}^α в § 2 отдельно рассматривались три случая — интегрирование (при $\operatorname{Re}\alpha > 0$), дифференцирование (при $\operatorname{Re}\alpha < 0$) и интегродифференцирование мнимого порядка (при $\operatorname{Re}\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$). Естественно изучить вопрос о возможности такого определения этих операторов, которое не зависело бы от величины α. Указанное определение для I_{0+}^α и I_{-}^α проще всего осуществить на основе равенств

$$I_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)} f^*(s+\alpha) x^{-s} ds, \quad \operatorname{Re}(s+\alpha) < 1, \tag{36.1}$$

$$I_{-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)} f^*(s+\alpha) x^{-s} ds, \quad \gamma = \operatorname{Re} s > 0, \tag{36.2}$$

см. (10.35), (10.36), которые следуют из формул (7.17), (7.18) после применения к ним обратного преобразования Меллина (1.113). Здесь $f^*(s)$ означает преобразование Меллина (1.112) функции $f(x)$.

Правые части (36.1), (36.2) под интегралами содержат отношения двух гамма-функций. Поэтому естественно рассмотреть аналогичные более сложные конструкции, включающие отношения произвольных произведений гамма-функций, например конструкции типа стоящих под интегралом (1.95), который определяет G-функцию Мейера. Такой подход на языке оригиналов приведет к интегральному преобразованию с G-функцией Мейера в ядре вида (1.44), где $\mathrm{k}(x, t) = G_{pq}^{mn}\left(\frac{x}{t}\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$. Его частные случаи указывались в § 1, п. 4°. Однако язык оригиналов при построении теории интегральных преобразований типа свертки оказывается недостаточно удобным по двум причинам: как в случае I_{0+}^{α}, I_{-}^{α}, определение преобразования может оказаться существенно зависящим от величин параметров G-функции, хотя сама G-функция от своих параметров зависит аналитически; не при всех значениях m, n, p, q G-функция существует (например, при $p=q=0$ или $m=n=0$, $p, q \geqslant 0$ она не существует). Поэтому для определения интегральных преобразований более удобно использовать язык образов (преобразований Меллина) и интегральные преобразования типа свертки вводить лишь через правую часть равенства Парсеваля (1.116).

1°. Определение G-преобразования. Классы $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ и их описание. Положив в правой части формулы (1.116) в качестве $\mathrm{h}^*(s)$ отношение произведений гамма-функций из интеграла (1.95), определяющего G-функцию Мейера, придем к следующему понятию.

Определение 36.1. *G-преобразованием функции $f(x)$ назовем значение интеграла*

$$(Gf)(x) \equiv \left(G_{pq}^{mn}\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\middle| f(t)\right)(x) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\begin{bmatrix}(b_m)+s, & 1-(a_n)-s\\(a_p^{n+1})+s, & 1-(b_q^{m+1})-s\end{bmatrix} f^*(s) x^{-s} ds, \tag{36.3}$$

где

$$\Gamma\begin{bmatrix}(b_m)+s, & 1-(a_n)-s\\(a_p^{n+1})+s, & 1-(b_q^{m+1})-s\end{bmatrix} =$$

$$= \Gamma\begin{bmatrix}b_1+s, \ldots, b_m+s, & 1-a_1-s, \ldots, 1-a_n-s\\a_{n+1}+s, \ldots, a_p+s, & 1-b_{m+1}-s, \ldots, 1-b_q-s\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}, \tag{36.4}$$

$f^*(s)$ — преобразование Меллина функции $f(x)$ (1.112) по прямой $\sigma = \{s,\ \mathrm{Re}\, s = 1/2\} = \{1/2 - i\infty,\ 1/2 + i\infty\}$; $(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n$; $(a_p^{n+1}) = a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_p$; $(b_m) = b_1, \ldots, b_m$; $(b_q^{m+1}) = b_{m+1}, \ldots, b_q$, причем компоненты p- и q-мерных векторов (a_p) и (b_q)—комплексные числа, для которых выполняются условия

$$\mathrm{Re}\, a_j \neq 1/2 + l, \quad j = 1, \ldots, n; \quad \mathrm{Re}\, b_j \neq -1/2 - l, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{36.5}$$

Очевидно, что при $m = n = p = q = 0$ имеем

$$(G_{00}^{00}\,|:|f(t))(x) = f(x). \tag{36.6}$$

Естественным для G-преобразования будет класс функций $f(x)$, для которых интеграл (36.3) сходится. Поскольку гамма-функции при $|\mathrm{Im}\, s| \to \infty$ в соответствии с (1.65) имеют степенно-показательную асимптотику, то и класс функций должен описываться через $f^*(s)$ со степенно-показательным весом на бесконечности. Сказанное обосновывает необходимость введения следующих трех определений.

Определение 36.2. *Упорядоченную пару (c^*, γ^*), где*

$$c^* = m + n - \frac{p+q}{2}, \quad \gamma^* = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{j=1}^{q} b_j\right), \tag{36.7}$$

назовем характеристикой G-преобразования (36.3), величину

$$\eta = 2\,\mathrm{sign}\, c^* + \mathrm{sign}\, \gamma^* \tag{36.8}$$

—его индексом, функцию

$$H(s) = \Gamma\begin{bmatrix} (b_m) + s, & 1 - (a_n) - s \\ (a_p^{n+1}) + s, & 1 - (b_q^{m+1}) - s \end{bmatrix} \tag{36.9}$$

— образом ядра, а число $p + q$—индексом сложности G-преобразования.

Определение 36.3. *Пусть c, $\gamma \in R^1$, причем $2\,\mathrm{sign}\, c + \mathrm{sign}\, \gamma \geqslant 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ пространство функций $f(x)$, $0 < x < \infty$, представимых в виде*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} f^*(s)\, x^{-s} ds, \tag{36.10}$$

$$f^*(s) = s^{-\gamma} e^{-\pi c |\mathrm{Im}\, s|} F(s), \tag{36.11}$$

где $F(s) \in L(\sigma)$. Для краткости обозначим $\mathfrak{M}_{0,0}^{-1}(L)$ через $\mathfrak{M}^{-1}(L)$.

Определение 36.4. *Пространством $L_2^{(c,\gamma)}$ назовем множество функций $f(x)$, $0 < x < \infty$, удовлетворяющих условиям (36.10), (36.11), где $F(s) \in L_2(\sigma)$, $2\,\mathrm{sign}\, c + \mathrm{sign}\, \gamma \geqslant 0$, а интеграл по σ понимается сходящимся в смысле среднего квадратичного.*

Пару (c, γ) назовем характеристикой пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$.

Как следует из формулы (1.65), справедливо асимптотическое соотношение

$$H(s) \sim |s|^{-\gamma^*} e^{-c^*\pi|\mathrm{Im}\, s|}, \quad |\mathrm{Im}\, s| \to \infty, \tag{36.12}$$

откуда следует, что интеграл

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} H(s)\, x^{-s} ds \tag{36.13}$$

при $\eta > 0$ сходится всюду, за исключением точки $x = 1$ в случае $c^* = 0$, $0 < \gamma^* \leqslant 1$, $p = q$, а при $\eta = 0$ он всюду расходится. Однако при $\eta = 0$, $p \neq q$ функция $h(x)$ может быть определена через сходящийся интеграл

вида (36.13), в котором контур σ совпадает с прямой $\operatorname{Re} s = 1/2 + \varepsilon \operatorname{sign}(q-p)$, $\varepsilon > 0$. Поэтому случай $\eta > 0$ связан с обычным прямым G-преобразованием, осуществляемым через G-функцию Мейера, случаи $\eta < 0$ являются особыми, соответствуя, в частности, обратным преобразованиям типа обратных преобразований Лапласа, Стилтьеса и Мейера (при $c^* < 0$) или типа дробных производных (при $c^* = 0$, $\gamma^* < 0$), а случаи $\eta = 0$ соответствуют преобразованиям типа Ватсона, т. е., в частности, преобразованию Нараина (см. с. 116 из книги О. И. Маричева [10]), Ханкеля, а также Y- и **H**-преобразованиям, рассматриваемым ниже в п. 7° (при $p \neq q$), или преобразованиям типа интегралов мнимого порядка (при $p = q$). Приведенные определения пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ учитывают поведение функции $H(s)$ на бесконечности. А именно если $c + c^* > 0$ или $c + c^* = 0$ и $\gamma + \gamma^* \geqslant 0$, что можно кратко записать в виде неравенства $2\operatorname{sign}(c + c^*) + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^*) \geqslant 0$, то интеграл (36.3) сходится соответственно абсолютно (для $\mathfrak{W}_{c,\gamma}^{-1}(L)$) или в среднем квадратичном (для $L_2^{(c,\gamma)}$).

Приведем некоторые *свойства этих пространств.*

1) Справедливо соотношение $L_2^{(0,0)} = L_2(0, \infty)$.

2) Функция $x^{-1} f(x^{-1}) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c,\gamma)}$) тогда и только тогда, когда $f(x) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c,\gamma)}$).

3) Множества пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ вполне упорядочены:

$$\mathfrak{M}_{c',\gamma'}^{-1}(L) \subset \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L), \quad L_2^{(c',\gamma')} \subset L_2^{(c,\gamma)}, \tag{36.14}$$

если $2\operatorname{sign}(c' - c) + \operatorname{sign}(\gamma' - \gamma) > 0$.

4) Пространства $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ с нормами

$$\|f\|_{\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}} = \int_\sigma |F(s)\, ds|, \quad \|f\|_{L_2^{(c,\gamma)}} = \|F\|_{L_2(\sigma)} \tag{36.15}$$

и обычными операциями сложения и умножения на скаляр являются банаховыми, изометричными $L(-\infty, \infty)$ и $L_2(-\infty, \infty)$ соответственно.

5) Следующая теорема дает описание пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ на основе пространств $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ и $L_2(0, \infty)$ соответственно.

Теорема 36.1. *а) Пространство* $\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(0,\gamma)}$*) состоит из функций* $f(x)$*, представимых в виде* $f(x) = x^{-\gamma} I_{0+}^{\gamma} \varphi(x)$*, где* $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{-1}(L)$ *(соответственно* $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$*).*

б) Пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$*) при* $c > 0$ *состоит из функций* $f(x)$*, для которых существуют такие зависящие лишь от* $f(x)$ *постоянные* M_f*, что*

$$\left\| \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^m \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2c}{k + m - c - \gamma - 1/2} x \frac{d}{dx} \right) \right] f(n^{2c} x) \right\| < M_f,$$

$$m > c + \gamma, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{36.16}$$

причем норму в (36.16) следует вычислять в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ *(соответственно в* $L_2(0, \infty)$*).*

Доказательство осуществим лишь в пространстве $L_2^{(c,\gamma)}$ (для $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ оно проводится аналогично).

а) Пусть $c = 0$. Тогда по определению $f(x) \in L_2^{(0,\gamma)}$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma s^{-\gamma} F(s)\, x^{-s} ds, \quad F(s) \in L_2(\sigma), \tag{36.17}$$

где интеграл сходится в среднем квадратичном. Преобразуем (36.17) к виду

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1+\gamma-s)}F_1(s)\,x^{-s}ds,\ F_1(s)=s^{-\gamma}\frac{\Gamma(1+\gamma-s)}{\Gamma(1-s)}F(s). \quad (36.18)$$

В силу формулы (1.66) $F_1(s)$ принадлежит $L_2(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $F(s)\in L_2(\sigma)$. Поскольку $\gamma\geqslant 0$, то $\Gamma(1-s)/\Gamma(2+\gamma-s)\in L_2(\sigma)$, и в силу равенства Парсеваля (1.116) в классе L_2 (см., например, книгу Е. Титчмарша [1, с. 127, теорема 73 и с. 71, формула 2.1.17]) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(2+\gamma-s)}F_1(s)\,x^{-s}ds=\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}\varphi(xt)\,dt,$$

где $\varphi(x)$ — обратное преобразование Меллина от функции $F_1(s)$. Тогда из (36.18) получаем равенство

$$x^{\gamma}f(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int\limits_{\sigma}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(2+\gamma-s)}F_1(s)\,x^{1+\gamma-s}ds=\frac{d}{dx}I_{0+}^{\gamma+1}\varphi(x).$$

Поскольку $F_1(s)\in L_2(\sigma)$, то $\varphi(x)\in L_2(0,\infty)$ (см., например, книги Е. Титчмарша [1, с. 126, теорема 71] и М. М. Джрбашяна [2, с. 53, теорема 1.16]), и поэтому $\varphi(x)\in L(0,E)$ при любых $E>0$. Отсюда следует $\frac{d}{dx}I_{0+}^{\gamma+1}\varphi(x)=I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$ и, значит, $f(x)=x^{-\gamma}I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$.

б) Пусть $c>0$. Функция $f(x)$ принадлежит $L_2^{(c,\gamma)}$ тогда и только тогда, когда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}s^{-\gamma}e^{-\pi c|\mathrm{Im}\,s|}F(s)\,x^{-s}ds,\quad F(s)\in L_2(\sigma).$$

Из формулы (1.65) следует, что функции $F(s)$ и $F_1(s)=s^{m-\gamma}e^{-\pi c|\mathrm{Im}\,s|}\times$ $\times F(s)\,\Gamma^{-1}(1/2-c-\gamma+m+2cs)$, $m>\gamma+c$, одновременно принадлежат или не принадлежат классу $L_2(\sigma)$. Функция $s^m\Gamma^{-1}(1/2-c-\gamma+m+2cs)$ удовлетворяет условиям теоремы из книги М. М. Джрбашяна [2, п.2.3.2]. Поэтому $L_2^{(c,\gamma)}$ совпадает с пространством L_2^{Φ} М. М. Джрбашяна [2, с. 90], где $\Phi(s)=s^m/\Gamma(1/2-c-\gamma+m+2cs)$, $m>\gamma+c$. Поэтому произведение

$$s^m e^{-2cs\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2cs}{k+m-c-\gamma-1/2}\right),\ s\in\sigma,$$

ограниченно сходится к указанной функции $\Phi(s)$ при $n\to\infty$, т. е. $s^m e^{-2cs\ln n}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2cs}{k+m-c-\gamma-1/2}\right)/\Phi(s)$ равномерно ограничено по s и n, и в силу утверждения (М. М. Джрбашян [2, с. 90]) $f(x)$ принадлежит $L_2^{\Phi}=L_2^{(c,\gamma)}$ тогда и только тогда, когда имеет место оценка (36.16). Теорема доказана. Отметим лишь, что в случае $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ вместо последнего цитируемого утверждения следует использовать соответствующий результат из работы Ву Ким Туана [4] для пространства $\mathfrak{M}_{\Phi}^{-1}(L)$.

2°. Существование, действие и представления G-преобразования. Рассмотрим вопросы существования и действия оператора G-преобразования в пространствах $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$, а также получим его представления в обычных формах через интегралы по лучу $(0,\infty)$, содержащие в ядрах G-функции Мейера. Первые вопросы решает следующая

Теорема 36.2. *G-преобразование (36.3) с характеристикой* (c^*, γ^*) *существует в пространстве* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (*соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$) *тогда и только тогда, когда*

$$2\operatorname{sign}(c+c^*)+\operatorname{sign}(\gamma+\gamma^*)\geqslant 0. \tag{36.19}$$

При этом G-преобразование изоморфно отображает пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (*соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$) на *пространство* $\mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (*соответственно* $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$).

Доказательство. Пусть $f(x)\in\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$. Тогда из (36.10), (36.11) следует $f^*(s)=s^{-\gamma}e^{-\pi c|\operatorname{Im} s|}F(s)$, $F(s)\in L(\sigma)$ (соответственно $F(s)\in L_2(\sigma)$). Поскольку (c^*, γ^*) является характеристикой G-преобразования, то справедливо асимптотическое соотношение (36.12) со значениями (36.7). Отсюда, приняв во внимание $s\in\sigma$, получим представление

$$H(s)f^*(s)=s^{-\gamma-\gamma^*}e^{-\pi(c+c^*)|\operatorname{Im} s|}F_1(s), \tag{36.20}$$

где $F_1(s)\in L(\sigma)$ (или $F_1(s)\in L_2(\sigma)$). Значит, интеграл (36.3) в G-преобразовании при условии его существования является функцией из класса $\mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$). Найдем условия существования этого интеграла. Поскольку $|x^{-s}|=x^{-1/2}$ при $s\in\sigma$ и $F_1(s)\in L(\sigma)$ (или $L_2(\sigma)$), на существование интеграла оказывает влияние лишь степенно-экспоненциальный вес $s^{-\gamma-\gamma^*}e^{-\pi(c+c^*)|\operatorname{Im} s|}$. Если $c+c^*>0$, то при любом значении $\gamma+\gamma^*$ этот вес экспоненциально убывает при $|\operatorname{Im} s|\to\infty$, если $c+c^*=0$, то вес убывает лишь при $\gamma+\gamma^*>0$ или ограничен при $\gamma+\gamma^*=0$. Эти условия можно объединить в одно ограничение вида (36.19). Когда эти условия не выполняются, вес на бесконечности растет и интеграл (36.3) расходится. Изоморфность отображения очевидна. Теорема доказана.

Теорема 36.3. *Пусть выполняются неравенство*

$$4\operatorname{sign} c^*+2\operatorname{sign}\gamma^*+\operatorname{sign}|p-q|>0 \tag{36.21}$$

и условия

$$\operatorname{Re} b_j>-1/2,\ j=1,2,\ldots,m;\ \operatorname{Re} a_j<1/2,\ \ j=1,2,\ldots,n. \tag{36.22}$$

Тогда G-преобразование (36.3) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ *существует и может быть представлено через следующий интеграл типа свертки Меллина, содержащий G-функцию Мейера:*

$$(Gf)(x)=\int_0^\infty G_{pq}^{mn}\left(\frac{x}{y}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)f(y)\,\frac{dy}{y}. \tag{36.23}$$

Доказательство. При выполнении условия (36.21) G-функция $G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$ существует и интегрируема по любому отрезку $[\varepsilon, E]$, $0<\varepsilon<E<\infty$, всюду, в том числе и при $c^*=0$, $p=q$ в особой точке $x=1$, где, согласно формуле 8.2.1.48 справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3], эта функция при $0<\gamma^*<1$ имеет особенность порядка $0((1-x)^{\gamma^*-1})$. Пусть вначале $p\leqslant q$. Тогда вблизи особых точек $x=0$ и $x=\infty$ эта G-функция имеет асимптотику, которую можно кратко записать в виде (см. с. 117 книги О. И. Маричева [10] или работу [12]):

$$G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)=\begin{cases}O(|x|^b),\ x\to 0,\ b\leqslant\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\operatorname{Re} b_k,\\ O(|x|^{a-1})+\varepsilon|x|^\rho\cos[(q-p)x^{1/(q-p)}+\delta],\ x\to\infty,\end{cases} \tag{36.24}$$

$a \geqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{Re} a_k$ и $\varepsilon = 0$, $\delta = \text{const}$ (или $\varepsilon \neq 0$, $q \geqslant p+2$, $c^* = 0$),

$$(q-p)\rho = (1+p-q)/2 - \gamma^*.$$

Отсюда при $c^* > 0$ или $c^* = 0$ и $\gamma^* > 0$, $q = p$ следует

$$\int_0^\infty G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right) x^{s-1}\,dx = \int_0^1 O(x^b)\,x^{s-1}\,dx + \int_1^\infty O(x^{a-1})\,x^{s-1}dx. \quad (36.25)$$

Поэтому в силу (36.22) интеграл слева сходится ограниченно, когда $s \in \sigma$ (Ву Ким Туан [4]). Учтем далее, что при $c^* = 0$ из $q > p$ следует неравенство $q \geqslant p+2$. Тогда из (36.21) вытекает, что в оставшемся случае $c^* = \gamma^* = 0$, $q \geqslant p+2$, согласно (36.24), в правой части (36.25) дополнительно возникает слагаемое вида

$$\varepsilon \int_1^\infty x^{s-1}\, x^{[2(q-p)]^{-1}-1/2} \cos\left[(q-p)\,x^{1/(q-p)} + \delta\right] dx =$$

$$= \varepsilon\,(q-p) \int_1^\infty t^{(q-p)\theta i - 1/2} \cos\left[(q-p)\,t + \delta\right] dt, \quad \theta = \operatorname{Im} s, \quad s \in \sigma. \quad (36.26)$$

Последний интеграл также сходится ограниченно. Таким образом, условия (36.21), (36.22) обеспечивают ограниченную сходимость интеграла (36.25) при $s \in \sigma$. Значит, в силу равенства Парсеваля (1.116) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ (см. работу Ву Ким Туана [1]) интеграл (36.23) сходится и равен значению (36.3).

Пусть теперь $p \geqslant q$. Применим к правой части (36.23) формулы отражения и сдвига (1.96) и (1.97) для G-функции и сделаем замену переменных $x = 1/x'$, $y = 1/y'$:

$$\frac{1}{x'}\,(Gf)\left(\frac{1}{x'}\right) = \int_0^\infty G_{qp}^{nm}\left(\frac{x'}{y'}\left|\begin{matrix}-(b_q)\\-(a_p)\end{matrix}\right.\right) \frac{1}{y'}\, f\left(\frac{1}{y'}\right) \frac{dy'}{y'}. \quad (36.27)$$

Пользуясь теперь свойством 2) пространства $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ из п. 1°, легко придем к случаю $p \leqslant q$. Теорема доказана.

Замечание 36.1. Если $c^* = \gamma^* = 0$ и $p = q$, то G-функция $G_{pp}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_p)\end{matrix}\right.\right)$ в точке $x = 1$ имеет неинтегрируемую особенность порядка $O((1-x)^{i\psi-1})$, $\operatorname{Im}\psi = 0$, поэтому интеграл (36.23) в таком случае сходится лишь при $f(x) = 0$. Условие (36.21) этот случай исключает.

Теорема 36.4. *Пусть* $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* \geqslant 0$ *и выполняются условия (36.22). Тогда G-преобразование (36.3) в классе* $L_2(0, \infty)$ *существует и представимо в виде*

$$(Gf)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(\frac{x}{y}\left|\begin{matrix}1, (a_p)+1\\(b_q)+1,\ 0\end{matrix}\right.\right) f(y)\,dy, \quad (36.28)$$

где $(a_p)+1 = a_1+1, a_2+1, \ldots, a_p+1$. *Если еще* $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}(\gamma^* - -1/2) > 0$, *то G-преобразование (36.3) в пространстве* $L_2(0, \infty)$ *существует и представимо в виде (36.23).*

Доказательство. Если $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* \geqslant 0$, то функция (36.9) в силу асимптотики (36.12) на прямой σ ограничена. Поэтому $H(s)/(1-s) \in L_2(\sigma)$ и формула (36.3) может быть записана в виде

$$(Gf)(x) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{dx} \int_\sigma \frac{H(s)}{1-s}\, f^*(s)\, x^{1-s}\,ds. \quad (36.29)$$

Применив теперь к правой части (36.29) равенство Парсеваля (1.116) в классе $L_2(0, \infty)$ и формулу сдвига G-функции (1.97), приводящую, в частности, к соотношению

$$xG^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x\left|\begin{matrix}0, & (a_p)\\ (b_q), & -1\end{matrix}\right.\right) = G^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x\left|\begin{matrix}1, & (a_p)+1\\ (b_q)+1, & 0\end{matrix}\right.\right), \qquad (36.30)$$

без труда придем к доказываемому представлению (36.28).

Если же $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}(\gamma^* - 1/2) > 0$, то не только $H(s)/(1-s) \in L_2(\sigma)$, но и $H(s) \in L_2(\sigma)$, поскольку $H(s) = O(|s|^{-\gamma^*})$. Поэтому к (36.3) можно сразу применить равенство Парсеваля (1.116), которое и приведет к представлению (36.23). Теорема доказана.

Замечание 36.2. Поскольку, например, $\left(G^{10}_{01}\left|\begin{matrix}-\\ 0\end{matrix}\right| f(t)\right)(x) = L\left\{\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right); x\right\}$ и $\left(G^{00}_{01}\left|\begin{matrix}-\\ 0\end{matrix}\right| f(t)\right)(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right); x\right\}$ (см. (1.119)—(1.121)), а для случая $m = n = 0$ G-преобразования не существует G-функции Мейера вида (36.23) или (36.30), то не каждое G-преобразование представимо по формуле (36.23) или (36.28). Случаям $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* > 0$ (и <0) G-преобразования соответствуют прямые (и обратные) классические интегральные преобразования типа свертки, а случаям, когда $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* = 0$, т. е. $c^* = \gamma^* = 0$, — преобразования Ватсона (при $q \neq p$) (см. книги Е. Титчмарша [1, гл. 8] или М. М. Джрбашяна [2, § 1, гл. 2]) или типа дробных интегралов мнимого порядка $I^{i\theta}_{0+}$, $I^{i\theta}_{-}$ (при $q=p$), подробнее об этом см. в п. 1° этого параграфа. Таким образом, через представление в виде (36.3) реализуется общий подход к теории интегральных преобразований типа свертки (с однородными ядрами).

3°. **Факторизация G-преобразования.** Введем следующее

Определение 36.5. *Факторизацией G-преобразования (36.3) будем называть всякое разложение оператора (36.3) через композицию других G-преобразований с меньшими индексами сложности (см. определение 36.2).*

Очевидно, что кроме тривиального (36.6) самыми простыми G-преобразованиями являются преобразования с индексами сложности, равными единице. Они связаны с преобразованиями Лапласа (1.119)—(1.121) и определяются следующим образом.

Определение 36.6. *Прямым и обратным видоизмененными преобразованиями Лапласа со степенными мультипликаторами назовем следующие преобразования над функцией $f(x)$:*

$$x^{\alpha}\Lambda_{\pm}x^{-\alpha}f(x) = x^{\alpha}L\{t^{\pm\alpha-1}f(t^{\mp 1}); x^{\pm 1}\} = \int_0^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha} e^{-(x/t)^{\pm 1}} f(t)\frac{dt}{t}, \qquad (36.31)$$

$$x^{\alpha}\Lambda_{\pm}^{-1}x^{-\alpha}f(x) = x^{\alpha\mp 1}L^{-1}\{t^{\mp\alpha}f(t^{\pm 1}); x^{\mp 1}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{f^*(s)\,x^{-s}}{\Gamma(\pm\alpha\pm s)}\,ds, \quad \operatorname{Re}(s+\alpha) \gtrless 0, \qquad (36.32)$$

где $L\{\varphi(t); p\}$ и $L^{-1}\{g(p); x\}$ имеют вид (1.119) и (1.120) или (1.121).

К простым целесообразно отнести также и G-преобразования с индексами сложности, равными двум,— это дробные интегралы и производные I^{α}_{0+}, I^{α}_{-}, преобразования Стилтьеса, Ханкеля, Мейера, косинус- и синус-преобразования Фурье и им обратные преобразования. Так как композиции нескольких G-преобразований в соответствии с теоремой о

свертке (1.115) или равенством Парсеваля (1.116) соответствует умножение образов их ядер вида (36.9), т. е. увеличение числа гамма-функций в образе ядра, что приводит опять-таки к G-преобразованию с бо́льшим индексом сложности, то естественно предположить, что любое G-преобразование при некоторых условиях может факторизоваться через композицию других, в частности, перечисленных выше простых G-преобразований. Действительно, справедлива

Теорема 36.5. *Пусть $G_1, \ldots, G_l$ — такие G-преобразования, что образы их ядер $H_1(s), \ldots, H_l(s)$ удовлетворяют условию*

$$H_1(s)\,H_2(s)\ldots H_l(s) = H(s), \tag{36.33}$$

где $H(s)$ имеет вид (36.9). Пусть еще преобразования $G_1, \ldots, G_l$ имеют более низкие индексы сложности, чем G, и соответственно характеристики $(c_1^*, \gamma_1^*), \ldots, (c_l^*, \gamma_l^*)$. Тогда, если выполняется условие (36.19), G-преобразование (36.3) в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно в $L_2^{(c,\gamma)}$) можно факторизовать через преобразования $G_1, \ldots, G_l$, расположенные в некотором порядке

$$(Gf)(x) = (G_{i_l}\ldots G_{i_2}G_{i_1}f)(x), \tag{36.34}$$

тогда и только тогда, когда $(i_1, \ldots, i_l)$ — такая подстановка чисел $(1, 2, \ldots, l)$, что выполняются неравенства

$$2\operatorname{sign}\Big(c + \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}^*\Big) + \operatorname{sign}\Big(\gamma + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j}^*\Big) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots, l. \tag{36.35}$$

Для всякой группы преобразований $G_1, \ldots, G_l$ указанного вида всегда существует, по крайней мере, одна подстановка, удовлетворяющая условиям (36.35).

Доказательство. Существование G-преобразований, удовлетворяющих условию (36.33), очевидно. Например, это условие выполнится, если положить $l = p + q$ и взять соответственно образы ядер $H_1(s), \ldots, H_{p+q}(s)$ равными $\Gamma(b_i + s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\Gamma(1 - a_i - s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Gamma^{-1}(a_i + s)$, $i = n+1, \ldots, p$, $\Gamma^{-1}(1 - b_i - s)$, $i = m+1, \ldots, q$, что приведет к факторизации через прямые и обратные видоизмененные преобразования Лапласа (36.31), (36.32) (см. замечание 36.2). Из (36.33) очевидно, что справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{l} c_i^* = c^*, \quad \sum_{i=1}^{l} \gamma_i^* = \gamma^*. \tag{36.36}$$

Применив последовательно l раз теорему 36.2, несложно прийти к необходимому и достаточному условию (36.35), обеспечивающему существование всех композиций $(G_{i_k}\ldots G_{i_2}G_{i_1}f)(x)$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Эти композиции будут принадлежать пространствам $\mathfrak{M}_{c',\gamma'}^{-1}$ (и $L_2^{(c',\gamma')}$), где $c' = c + \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}^*$, $\gamma' = \gamma + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j}^*$. Отсюда при $k=l$ в силу (36.36) имеем $(Gf)(x) \in \mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (или соответственно $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$).

Покажем, что подстановка $(i_1, \ldots, i_l)$, для которой выполняются условия (36.35), существует. Для этого индексы $i_1, \ldots, i_l$ выберем следующим образом. Пусть i_1 — индекс наибольшего из чисел c_i^*. Если таких c_i^* несколько, то возьмем i_1 равным индексу наибольшего из чисел γ_i^* в парах (c_i^*, γ_i^*), где c_i^* — наибольшие, а если таких чисел γ_i^* несколько, то i_1 возьмем равным произвольному i из такой группы. Изъяв пару $(c_{i_1}^*, \gamma_{i_1}^*)$ с

таким индексом, рассмотрим оставшиеся и среди них аналогичной процедурой определим следующий индекс i_2 и соответствующую пару. При таком выборе в итоге будут иметь место неравенства

$$2\operatorname{sign}(c^*_{i_j} - c^*_{i_{j+1}}) + \operatorname{sign}(\gamma^*_{i_j} - \gamma^*_{i_{j+1}}) \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l-1. \tag{36.37}$$

Покажем, что из (36.37) следует (36.35). Допустим противное, что (36.35) нарушается, например, при $k = l-1$:

$$2\operatorname{sign}\Big(c + \sum_{j=1}^{l-1} c^*_{i_j}\Big) + \operatorname{sign}\Big(\gamma + \sum_{j=1}^{l-1} \gamma^*_{i_j}\Big) < 0, \tag{36.38}$$

т. е. справедливо либо

$$c + c^*_{i_1} + \ldots + c^*_{i_{l-1}} < 0, \tag{36.39}$$

либо

$$c + c^*_{i_1} + \ldots + c^*_{i_{l-1}} = 0, \ \gamma + \gamma^*_{i_1} + \ldots + \gamma^*_{i_{l-1}} < 0. \tag{36.40}$$

Из условия (36.19) ввиду (36.36) имеем $2\operatorname{sign}(c + c^*_{i_1} + \ldots + c^*_{i_l}) + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^*_{i_1} + \ldots + \gamma^*_{i_l}) \geqslant 0$, т. е. либо

$$c + c^*_{i_1} + \ldots + c^*_{i_{l-1}} + c^*_{i_l} > 0, \tag{36.41}$$

либо

$$c + c^*_{i_1} + \ldots + c^*_{i_{l-1}} + c^*_{i_l} = 0, \quad \gamma + \gamma^*_{i_1} + \ldots + \gamma^*_{i_{l-1}} + \gamma^*_{i_l} \geqslant 0. \tag{36.42}$$

Если (36.39), (36.41) или (36.39), (36.42) или же (36.40), (36.41) одновременно имеют место, то $c^*_{i_l} > 0$, а поскольку по построению $c^*_{i_1} \geqslant c^*_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c^*_{i_l}$, то $c + c^*_{i_1} + \ldots + c^*_{i_{l-1}} > 0$, что противоречит (36.39). Допустим теперь, что имеет место система (36.40), (36.42), откуда $c^*_{i_l} = 0$ и $\gamma^*_{i_l} > 0$. Тогда из (36.19), (36.40) и неравенств $c^*_{i_1} \geqslant c^*_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c^*_{i_l} = 0$ следует, что $c^*_{i_1} = c^*_{i_2} = \ldots = c^*_{i_l} = 0$, $c = 0$; из (36.37) вытекает, что $\gamma^*_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant \gamma^*_{i_l} > 0$, а из условия $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}\gamma \geqslant 0$ следует $\gamma \geqslant 0$. Последнее противоречит неравенству (36.40), поэтому (36.38) не может иметь места. Аналогичным образом доказывается, что неравенства (36.35) имеют место для значений $k = l-2, \ldots, 1$. Теорема доказана.

4°. Обращение G-преобразования. Справедлива следующая

Теорема 36.6. *Пусть функция* $g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{c+c^*, \gamma+\gamma^*}(L)$ (*соответственно* $L_2^{(c+c^*, \gamma+\gamma^*)}$). *Тогда G-преобразование*

$$(G^{-1}g)(x) = \left(G^{p-n, q-m}_{q, p}\left|\begin{matrix}(b_q^{m+1}), (b_m) \\ (a_p^{n+1}), (a_n)\end{matrix}\right| g(y)\right)(x) = f(x) \tag{36.43}$$

является обратным к G-преобразованию (36.3) при обозначении $(Gf)(x) = g(x)$. Если еще выполняются условия теоремы 36.5, то обратный оператор (36.43) факторизуется по формуле

$$f(x) = (G^{-1}g)(x) = (G^{-1}_{i_1} G^{-1}_{i_2} \ldots G^{-1}_{i_l} g)(x). \tag{36.44}$$

Доказательство. Поскольку $g \in \mathfrak{M}^{-1}_{c+c^*, \gamma+\gamma^*}(L_2^{(c+c^*, \gamma+\gamma^*)})$, то по теореме 36.2 G-преобразование (36.43) существует и переводит функцию g в функцию f из класса $\mathfrak{M}^{-1}_{c, \gamma}(L_2^{(c, \gamma)})$. Применив теперь к равенству (36.43) G-преобразование (36.3), после прямого вычисления композиции слева, сокращения всех гамма-функций и применения формулы (36.6) получим слева функцию $g(x)$.

Обратные G-преобразования $G^{-1}_{i_j}$, входящие в (36.44), имеют характеристики $(-c^*_{i_j}, -\gamma^*_{i_j})$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Поэтому условия (36.35) по отноше-

нию к (36.44) принимают вид

$$2\operatorname{sign}\Big(c+c^*-\sum_{j=k}^{l} c_{i_j}^*\Big)+\operatorname{sign}\Big(\gamma+\gamma^*-\sum_{j=k}^{l}\gamma_{i_j}^*\Big)\geqslant 0,\quad k=1,2,\ \ldots,\ l. \tag{36.45}$$

Очевидно, что (36.45) и (36.35) совпадают, и поэтому из теоремы 36.5 следует возможность факторизации обратного оператора (36.43) по формуле (36.44) для указанной подстановки $(i_1, \ldots, i_l)$. Теорема доказана.

Замечание 36.3. Если характеристика (c, γ) пространства $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ удовлетворяет условию

$$2\operatorname{sign}\Big(c-\sum_{i=1}^{l}|c_i^*|\Big)+\operatorname{sign}\Big(\gamma-\sum_{i=1}^{l}|\gamma_i^*|\Big)\geqslant 0, \tag{36.46}$$

то ограничение (36.35) имеет место для всех подстановок, и поэтому порядок действия составляющих операторов G_{i_j} в (36.34) и $G_{i_j}^{-1}$ в (36.44) может быть произвольным, т. е. эти G-преобразования в таком случае коммутативны.

Рассмотрим важный случай, когда все G_i, $i=1, 2, \ldots, l$, являются видоизмененными преобразованиями Лапласа (36.31), (36.32). Применив к этим формулам преобразование Меллина (1.112), видим, что таким операторам соответствуют образы ядер (36.9), содержащие только одну гамма-функцию в числителе или знаменателе:

$$\Gamma(\pm\alpha\pm s)\longleftrightarrow x^{\alpha}\Lambda_{\pm}x^{-\alpha},\quad \operatorname{Re}(\alpha+s)\gtrless 0, \tag{36.47}$$

$$\Gamma^{-1}(\pm\alpha\pm s)\longleftrightarrow x^{\alpha}\Lambda_{\pm}^{-1}x^{-\alpha},\quad \operatorname{Re}(\alpha+s)\gtrless 0. \tag{36.48}$$

Значит, каждой из гамма-функций G-преобразования (36.3) соответствует одно из преобразований Лапласа указанного вида, т. е. это общее G-преобразование при некоторых условиях может быть факторизовано через композицию операторов

$$\begin{gathered} x^{b_j}\Lambda_+x^{-b_j},\ j=1,2,\ldots,m;\ x^{a_j-1}\Lambda_-x^{1-a_j},\ j=1,2,\ldots,n;\\ x^{a_j}\Lambda_+^{-1}x^{-a_j},\ j=n+1,\ldots,p;\ x^{b_j-1}\Lambda_-^{-1}x^{1-b_j},\ j=m+1,\ \ldots,q. \end{gathered} \tag{36.49}$$

В указанном порядке эти операторы обозначим соответственно символами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m, \Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_{m+n}, \Lambda_{m+n+1}, \ldots, \Lambda_{m+p}, \Lambda_{m+p+1}, \ldots, \Lambda_{p+q}$. Их характеристики, вычисляемые по формулам (36.7), соответственно равны $(1/2, -\operatorname{Re} b_j)$, $j=1, 2, \ldots, m$, $(1/2, \operatorname{Re} a_j)$, $j=1, 2, \ldots, n$, $(-1/2, \operatorname{Re} a_j)$, $j=n+1, \ldots, p$, $(-1/2, -\operatorname{Re} b_j)$, $j=m+1, \ldots, q$. Обозначим их в указанном порядке через $(\theta_1, \xi_1), \ldots, (\theta_{p+q}, \xi_{p+q})$. По отношению к такой факторизации теоремы 36.5 и 36.6 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 36.7. *Пусть выполняются условия (36.19), (36.22) и неравенства*

$$\operatorname{Re} a_j > -1/2,\ j=n+1,\ \ldots,\ p;\ \operatorname{Re} b_j < 1/2,\ j=m+1,\ \ldots,\ q. \tag{36.50}$$

Тогда G-преобразование (36.3) в классе $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$*) можно факторизовать через композицию видоизмененных преобразований Лапласа со степенными мультипликаторами (36.49), примененных в некотором порядке:*

$$(Gf)(x)=(\Lambda_{i_{p+q}}\ldots\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_1}f)(x), \tag{36.51}$$

тогда и только тогда, когда $(i_1, \ldots, i_{p+q})$ *такая подстановка чисел* $(1, 2, \ldots, p+q)$, *что выполняются неравенства*

$$2\operatorname{sign}\left(c + \sum_{j=1}^{k} \theta_{i_j}\right) + \operatorname{sign}\left(\gamma + \sum_{j=1}^{k} \xi_{i_j}\right) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p+q. \tag{36.52}$$

Теорема 36.8. *Пусть* $g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{c+c^*, \gamma+\gamma^*}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(c+c^*, \gamma+\gamma^*)}$*) и выполняются условия (36.19), (36.22), (36.50) и (36.52) для некоторой подстановки* $(i_1, \ldots, i_{p+q})$ *чисел* $(1, 2, \ldots, p+q)$. *Тогда G-преобразование (36.43), являющееся обратным к (36.3), может быть факторизовано через операторы* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p+q}$ *с характеристиками* $(\theta_1, \xi_1), \ldots, (\theta_{p+q}, \xi_{p+q})$ *по формуле*

$$f(x) = (G^{-1}g)(x) = (\Lambda_{i_1}^{-1}\Lambda_{i_2}^{-1} \ldots \Lambda_{i_{p+q}}^{-1} g)(x). \tag{36.53}$$

Замечание 36.4. Для операторов (36.49) образами ядер $H_1(s), \ldots, H_{p+q}(s)$ является только одна гамма-функция соответственно вида $\Gamma(b_j+s)$, $\Gamma(1-a_j-s)$, $\Gamma^{-1}(a_j+s)$, $\Gamma^{-1}(1-b_j-s)$. Объединяя эти гамма-функции различными способами в те или иные группы, например попарно, можно получить большое число вариантов композиционных разложений G-преобразования по формуле (36.34) других видов, например через дробные интегралы и производные, преобразования Ханкеля, Стилтьеса, Мейера и им обратные.

Замечание 36.5. Если условия (36.22) или (36.50) для некоторых индексов j нарушаются при выполнении (36.5), то вместо соответствующих операторов (36.49) появляются операторы, у которых в ядрах прямых преобразований Лапласа функция e^{-z} будет заменяться на $e^{-z} - \sum_{k=0}^{r} \frac{(-z)^k}{k!}$, которая отличается на некоторый отрезок ряда Тейлора. Для таких индексов j соответствующую образу ядра гамма-функцию можно заменить на три по формуле

$$\Gamma(a+s) = (-1)^k \frac{\Gamma(a+k+s)\,\Gamma(1-a-k-s)}{\Gamma(1-a-s)}, \quad -k < \operatorname{Re}(a+s) < 1-k. \tag{36.54}$$

При надлежащем выборе k для последних нарушенное условие уже будет выполняться. Но такая операция ведет к увеличению индекса сложности G-преобразования.

Сказанное выше приводит к следующему важному для теории интегральных преобразований результату.

Теорема 36.9. *G-преобразование и, в частности, все классические прямые и обратные интегральные преобразования типа свертки представляют собой композиции некоторого числа прямых и обратных преобразований Лапласа типа (36.31), (36.32), допустимый порядок применения которых зависит от класса функций* f *и величин параметров преобразований. На достаточно хороших классах функций типа* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ *или* $L_2^{(c,\gamma)}$ *с условием, например,* $2c-p-q>0$ *операторы* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p+q}$ *коммутативны и их композиция образует G-преобразование (36.3).*

5°. Действие, факторизация и обращение дробных интегралов в пространствах $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ **и** $L_2^{(c,\gamma)}$.

Теорема 36.10. *Оба оператора дробного интегродифференцирования* $x^{-\alpha}(I^{\alpha}_{0+}f)(x)$, $x^{-\alpha}(I^{\alpha}_{-}f)(x)$ *произвольного комплексного порядка* α *определены в пространствах* $\mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma'}(L)$ *и* $L_2^{(0,\gamma')}$, *где* $\gamma' = \max(0, -\operatorname{Re}\alpha)$, *пространства* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ *и* $L_2^{(c,\gamma)}$, *у которых* $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma-\gamma') \geqslant 0$, *изоморфно отображают соответственно в пространства* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma'+\operatorname{Re}\alpha}(L)$ *и* $L_2^{(c,\gamma'+\operatorname{Re}\alpha)}$ *и факторизуются через композицию операторов (36.31), (36.32) при*

соответствующих указанных ниже условиях по формулам

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = x^{-1}\Lambda_{-}^{-1}\, x^{\alpha}\Lambda_{-}xf\,(x), \tag{36.55}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\gamma)}$, *а* $\operatorname{Re}\alpha>-1/2$;

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = x^{\alpha-1}\Lambda_{-}x^{-\alpha}\Lambda_{-}^{-1}\, x^{\alpha+1}f\,(x), \tag{36.56}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{1/2,\,-\operatorname{Re}\alpha}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(1/2,\,-\operatorname{Re}\alpha)}$, *а* $\operatorname{Re}\alpha>-1/2$;

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k} x^{-1}\Lambda_{-}^{-1}\, x^{\alpha+k}\Lambda_{-}xf\,(x) \tag{36.57}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\gamma)}$, *а* $k>-\operatorname{Re}\alpha-1/2$;

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = x^{\alpha}\Lambda_{+}^{-1}\, x^{-\alpha}\Lambda_{+}x^{\alpha}f\,(x), \tag{36.58}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\gamma)}$, *а* $\operatorname{Re}\alpha<1/2$;

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = \Lambda_{+}x^{\alpha}\Lambda_{+}^{-1}f\,(x), \tag{36.59}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{1/2,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(1/2,\gamma)}$, *а* $\operatorname{Re}\alpha<1/2$;

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = x^{\alpha}\Lambda_{+}^{-1}\, x^{-\alpha}\, I_{0+}^{k}\Lambda_{+}x^{\alpha-k}f\,(x), \tag{36.60}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\gamma)}$, *а* $k-1/2<\operatorname{Re}\alpha<k+1/2$.

Доказательство. Пусть n—такое целое число, что $\operatorname{Re}\alpha+n>0$. Тогда имеем

$$x^{-\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left(I_{0+}^{\alpha+n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}f^{*}(s)\,x^{-s}ds\right) =$$

$$= x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}f^{*}(s)\,I_{0+}^{\alpha+n}x^{-s}ds = x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\sigma}\Gamma\left[\begin{matrix}1-s\\ 1+\alpha+n-s\end{matrix}\right]f^{*}(s)\,x^{\alpha+n-s}ds = x^{-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\sigma}\Gamma\left[\begin{matrix}1-s\\ 1+\alpha+n-s\end{matrix}\right]f^{*}(s)\frac{d^n}{dx^n}x^{\alpha+n-s}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\Gamma\left[\begin{matrix}1-s\\ 1+\alpha-s\end{matrix}\right]f^{*}(s)\,x^{-s}ds. \tag{36.61}$$

Все произведенные в (36.61) перестановки порядка интегрирования и дифференцирования законны в силу абсолютной сходимости приведенных интегралов, имеющей место ввиду $|s|^{-\gamma}F(s)\in L(\sigma)$, см. (36.11) (или равенства Парсеваля в пространстве $L_2(\sigma)$ и $|s|^{-\gamma}F(s)\in L_2(\sigma)$). Если теперь образ ядра записать через произведение $\Gamma^{-1}(1+\alpha-s)\Gamma(1-s)$, то факторизации (36.55), (36.56) с соответствующими условиями на пространства и $\operatorname{Re}\alpha$ легко получаются как частные случаи теоремы 36.7.

Пусть теперь α — произвольное комплексное число, а k — такое положительное целое, что $\operatorname{Re}\alpha+k+1/2>0$. Тогда последнее произведение с помощью формулы (1.47) можно записать также в виде

$$\Gamma\left[\begin{matrix}1-s\\ 1+\alpha-s\end{matrix}\right] = (1+\alpha-s)_k\,\Gamma^{-1}(1+\alpha+k-s)\,\Gamma(1-s).$$

В силу сказанного после замечания 36.3 и формул 8, 14, 12 работы Ю. А. Брычкова, Х.-Ю. Глеске, О. И. Маричева [1, с. 24] по выбору k последние образы отвечают операторам $x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^{\alpha+k}$, $x^{-1-\alpha-k}\times$ $\times\Lambda_-^{-1}x^{1+\alpha+k}$, $x^{-1}\Lambda_- x^1$, имеющим характеристики $(0, -k)$, $(-1/2, \operatorname{Re}\alpha + k)$ и $(1/2, 0)$ соответственно. Отсюда следует факторизация вида (36.57). Остальные формулы доказываются аналогично. Первые утверждения теоремы являются прямыми следствиями теоремы 36.2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая функция $f(x)$ из пространства $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c,\gamma)}$) представима в виде $f(x) = x^{-\gamma}I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in\mathfrak{M}_{c,0}^{-1}(L)$ (соответственно $\varphi(x)\in L_2^{(c,0)}$).*

Доказательство следует из того, что $x^{-\gamma}I_{0+}^{\gamma}$ является G-преобразованием с характеристикой $(0, \gamma)$, и поэтому пространство $\mathfrak{M}_{c,0}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,0)}$) изоморфно отображается в пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ ($L_2^{(c,\gamma)}$), когда $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}\gamma \geqslant 0$.

Следствие 2. *Если $\alpha = i\theta$ — чисто мнимое, то оператор $I_{0+}^{i\theta}$ является автоморфизмом в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$).*

Доказательство прямо следует из того, что оператор $x^{-i\theta}I_{0+}^{i\theta}$ является G-преобразованием с характеристикой $(0, 0)$.

Замечание 36.6. Как следует из замечаний после леммы 2.3, оператор $I_{0+}^{i\theta}$ в том подклассе из $L_1(0, \infty)$, где он определен, не является автоморфизмом.

6°. Другие примеры факторизаций. В этом пункте рассмотрим примеры факторизаций с помощью дробных интегралов преобразований Ханкеля, Бесселя, обобщенного преобразования Лапласа и интеграла типа потенциала. При этом для удобства через $\{h(x)\}\varphi$ будем обозначать свертку Мелина (1.114), полагая при этом $\{h(1/x)\}\varphi = \int_0^\infty h(t/x)\varphi(t)t^{-1}dt$, а записью в виде $\{h(x)\}(P)(Q)\varphi$ — перестановочность операторов $\{h(x)\}$, P и Q в произвольном порядке в соответствующем классе функций.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 36.11. *Преобразование Ханкеля видоизмененной формы*

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}f = \int_0^\infty J_\nu\left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right)f(t)\frac{dt}{t}, \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \tag{36.62}$$

изоморфно отображает пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) в себя и факторизуется через композицию

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}f = x^{-1-\nu/2}\Lambda_-^{-1}x^{1+\nu}\Lambda_+x^{-\nu/2}f(x). \tag{36.63}$$

Если еще, кроме того, $f(x)\in\mathfrak{M}_{1/2,\operatorname{Re}\nu/2}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(1/2,\operatorname{Re}\nu/2)}$), то допустима композиция в другом порядке

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}f = x^{\nu/2}\Lambda_+x^{-1-\nu}\Lambda_-^{-1}x^{1+\nu/2}f(x). \tag{36.64}$$

Доказательство следует из того, что при $\operatorname{Re}\nu > -1$ оператор (36.62) в силу шестой из формул (1.118) и равенства Парсеваля (1.116) допускает представление

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}f = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma(s+\nu/2)\Gamma^{-1}(1+\nu/2-s)f^*(s)x^{-s}ds. \tag{36.65}$$

Поэтому он факторизуется через два оператора $x^{\nu/2}\Lambda_+x^{-\nu/2}$ и $x^{-1-\nu/2}\Lambda_-^{-1}x^{1+\nu/2}$ (см. сказанное после замечания 36.3). Их характеристи-

ки равны соответственно (1/2, Re ν/2) и (—1/2, —Re ν/2). Отсюда, применив теорему 36.5, получаем условия, обеспечивающие существование того или иного порядка композиций этих операторов, и сами формулы (36.63), (36.64). Теорема доказана.

Теорема 36.12. *Y-преобразование Бесселя видоизмененной формы*

$$\{Y_\nu(2\sqrt{x})\}f = \int_0^\infty Y_\nu\left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right) f(y)\frac{dy}{y}, \quad |\operatorname{Re}\nu| < 1, \tag{36.66}$$

где $Y_\nu(z)$ *— функция Бесселя второго рода (см. книгу Г. Бейтмена, А. Эрдейи [2]), изоморфно отображает пространство* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$*) в себя и может быть факторизовано через композицию операторов Ханкеля* $J_\nu = \{J_\nu(2\sqrt{x})\}$ *и дробных интегралов или производных вида* $K = x^{-\nu/2} I_-^{-1/2} x^{(\nu+1)/2}$ *и* $I = x^{-(\nu+1)/2} I_{0+}^{1/2} x^{\nu/2}$*. Если* $c = 0$ *и* $\gamma < 1/2$*, то оператор* J_ν *может стоять в любом месте, а* K *должен действовать после* I*:*

$$Y_\nu = KIJ_\nu = KJ_\nu I = J_\nu KI. \tag{36.67}$$

Если же $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma - 1/2) \geqslant 0$*, то порядок действий операторов произволен.*

Доказательство. В соответствии с (1.116) и формулой 9.4(1) книги О. И. Маричева [10] составим G-преобразование вида

$$(G_\gamma f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2,\ s-\nu/2 \\ s-(\nu+1)/2,\ (3+\nu)/2-s \end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s}\, ds. \tag{36.68}$$

Его характеристика равна (0, 0), и поэтому в силу теоремы 36.2 оно существует в любом пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$, изоморфно отображая его в себя. Если еще выполняются условия (36.22), принимающие вид $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$, то по теореме 36.3 интеграл (36.68) преобразуется в интеграл из (36.66). Запишем теперь образ ядра в форме $\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2 \\ \nu/2+1-s \end{bmatrix} \times \Gamma\begin{bmatrix} s-\nu/2 \\ s-(\nu+1)/2 \end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix} \nu/2+1-s \\ (3+\nu)/2-s \end{bmatrix}$. Из соотношений (36.1), (36.2), (36.65), пользуясь второй формулой из (1.117), несложно установить следующие меллиновские соответствия:

$$\Gamma\begin{bmatrix} a+s \\ c+s \end{bmatrix} \longleftrightarrow x^a I_-^{c-a} x^{-c}, \quad \operatorname{Re}(a+s) > 0, \tag{36.69}$$

$$\Gamma\begin{bmatrix} b-s \\ d-s \end{bmatrix} \longleftrightarrow x^{1-d} I_{0+}^{d-b} x^{b-1}, \quad \operatorname{Re}(b-s) > 0, \tag{36.70}$$

$$\Gamma\begin{bmatrix} a+s \\ d-s \end{bmatrix} \longleftrightarrow x^{(a-d+1)/2}\{J_{a+d-1}(2\sqrt{x})\}\, x^{(d-a-1)/2}, \quad \operatorname{Re}(a+d),\ \operatorname{Re}(a+s) > 0. \tag{36.71}$$

Применив их к указанному образу ядра, легко получить все факторизации, указанные в теореме 36.12. Условия на характеристики пространств выводятся из теоремы 36.5.

Теорема 36.13. **H**-*преобразование Бесселя видоизмененной формы*

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = \int_0^\infty \mathbf{H}_\nu\left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right) f(y)\frac{dy}{y}, \quad -2 < \operatorname{Re}\nu < 0, \tag{36.72}$$

где $\mathbf{H}_\nu(z)$ *— функция Струве (см. книгу Г. Бейтмена, А. Эрдейи* [2]*), изоморфно отображает пространство* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$*) в себя и факторизуется в следующие комбинации:*

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = (J_\nu)(x^{(\nu+1)/2} I_-^{-1/2} I_{0+}^{1/2} x^{-(\nu+1)/2}) f(x), \tag{36.73}$$

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = x^{(\nu+1)/2} I_-^{-1/2} x^{-\nu/2} (J_\nu) x^{\nu/2} I_+^{1/2} x^{-(\nu+1)/2} f(x), \tag{36.74}$$

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = (x^{(\nu+1)/2} I_-^{-1/2} x^{-\nu/2})(x^{\nu/2} I_{0+}^{1/2} x^{-(\nu+1)/2})(J_\nu) f(x), \tag{36.75}$$

где в первых двух случаях $f(x) \in \mathfrak{M}^{-1}(L)$ $(f(x) \in L_2(0, \infty))$*, а в третьем* $f(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,1/2}(L)$ $(f(x) \in L_2^{(0,1/2)})$.

Доказательство аналогично и основано на том, что при $-2 < \mathrm{Re}\,\nu < 0$, как следует из соотношения 9.5(1) книги О. И. Маричева [10], преобразование $\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f$ можно записать в виде

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2 \\ 1+\nu/2-s\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix} s+(\nu+1)/2 \\ s+\nu/2\end{bmatrix}\times$$

$$\times\,\Gamma\begin{bmatrix}(1-\nu)/2-s \\ 1-\nu/2-s\end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s} ds. \tag{36.76}$$

Теорема 36.14. *Обобщенное преобразование Лапласа*

$$D_\nu\{f(y);\ x\} = 2^{-\nu/2}\int_0^\infty e^{-x(2y)^{-1}} D_\nu\left(\sqrt{\frac{2x}{y}}\right) f(y)\,\frac{dy}{y}, \quad \mathrm{Re}\,\nu < 1, \tag{36.77}$$

где $D_\nu(z)$ *— функция параболического цилиндра (см. книгу Г. Бейтмена, А. Эрдейи* [2]*), изоморфно отображает пространство* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ *в* $\mathfrak{M}^{-1}_{c+1/2,\gamma-\mathrm{Re}\nu/2}(L)$ $(L_2^{(c+1/2,\gamma-\mathrm{Re}\nu/2)})$ *и допускает следующие разложения на композиции:*

$$D_\nu\{f(y);\ x\} = x^{1/2} I_-^{-\nu/2} x^{(\nu-1)/2} \Lambda_+ f(x), \tag{36.78}$$

$$D_\nu\{f(y);\ x\} = \Lambda_+ x^{1/2} I_-^{-\nu/2} x^{(\nu-1)/2} f(x), \tag{36.79}$$

где в последнем случае $\mathrm{Re}\,\nu < 0$ *и* $2\,\mathrm{sign}\,c + \mathrm{sign}\,(\gamma + (1-\mathrm{Re}\,\nu)/2) \geqslant 0$.

Доказательство. В соответствии с формулой 8.30(1) из книги О. И. Маричева [10] рассмотрим G-преобразование

$$(G_D f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} s,\ s+1/2 \\ s+(1-\nu)/2\end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s} ds. \tag{36.80}$$

Оно имеет характеристику $(1/2, -\mathrm{Re}\,\nu/2)$ и поэтому существует в любом пространстве $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ и переводит его в $\mathfrak{M}^{-1}_{c+1/2,\gamma-\mathrm{Re}\nu/2}(L)$ $(L_2^{(c+1/2,\ \gamma-\mathrm{Re}\nu/2)})$ по теореме 36.2. Из теорем 36.3, 36.4 следует сводимость (36.80) к (36.77), а из теоремы 36.4 вытекают при соответствующих условиях формулы факторизации (36.78), (36.79), которые легко формально записать на основе соответствия

$$D_\nu \longleftrightarrow \Gamma\begin{bmatrix} s,\ s+1/2 \\ s+(1-\nu)/2\end{bmatrix} = \Gamma[s]\,\Gamma\begin{bmatrix} s+1/2 \\ s+(1-\nu)/2\end{bmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow (\Lambda_+)(x^{1/2} I_-^{-\nu/2} x^{(\nu-1)/2}). \tag{36.81}$$

В заключение пункта рассмотрим следующий интеграл типа потенциала:

$$(K^\alpha f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,dt. \tag{36.82}$$

Для любой функции $f \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ имеем представление

$$x^{-\alpha}(K^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)} \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{\sigma} \Gamma\begin{bmatrix} s-\alpha, & 1-s \\ s-\alpha/2, & 1+\alpha/2-s \end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s}\, ds \qquad (36.83)$$

(см. формулу 2.5(1) из книги О. И. Маричева [10]). Воспользовавшись теперь формулами (36.69), (36.70), легко получить следующую факторизацию:

$$x^{-\alpha}(K^{\alpha}f)(x) = (x^{-\alpha} I_{-}^{\alpha/2} x^{\alpha/2} \, x^{-\alpha/2} I_{0+}^{\alpha/2}) f(x), \qquad (36.84)$$

где допустим произвольный порядок. Образ ядра можно разложить на две дроби и иным способом, который приведет к факторизации через преобразования Ханкеля.

7°. **Действие G-преобразования на дробные интегралы и производные.**

Теорема 36.15. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} 2\operatorname{sign}(c+c^*) + \operatorname{sign}(\gamma+\gamma^*+\operatorname{Re}\alpha) \geqslant 0, \\ 2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma+\operatorname{Re}\alpha) \geqslant 0. \end{gathered} \qquad (36.85)$$

Тогда в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) существует G-преобразование (36.3) оператора $x^{-\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f)(x)$, и оно вычисляется по формуле

$$(Gx^{-\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f))(x) = \left(G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left|\begin{matrix} 0, & (a_p) \\ (b_q), & -\alpha \end{matrix}\right| f(t)\right)(x). \qquad (36.86)$$

Доказательство следует из теоремы 36.5, где нужно положить $l=2$, $G_{i_1}f = x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha} f$, $G_{i_2}f = Gf$ из (36.3), а вместо преобразования (36.3) взять G-преобразование $\left(G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left|\begin{matrix} 0, & (a_p) \\ (b_q), & -\alpha \end{matrix}\right| f(t)\right)(x)$.

Теорема 36.16. *Пусть выполняются условия теоремы 36.15. Тогда в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ существует G-преобразование (36.3) оператора $x^{-\alpha}(I_{-}^{\alpha}f)(x)$, и оно вычисляется по формуле*

$$(Gx^{-\alpha}(I_{-}^{\alpha}f))(x) = \left(G_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left|\begin{matrix} (a_p), & 0 \\ -\alpha, & (b_q) \end{matrix}\right| f(t)\right)(x). \qquad (36.87)$$

Доказательство аналогично предыдущему.

8°. **Индексные законы для дробных интегралов и производных.** Для дробных интегралов и производных известны так называемые индексные законы, отражаемые формулами (10.4), (10.5), (10.42), (10.43), см. также теорему 10.7. В настоящем пункте установим теорему об условиях выполнения индексных законов и аналога теоремы 10.7 для операторов I_{0+}^{α} и I_{-}^{α} в классах $\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$, $L_2^{(0,\gamma)}$.

Теорема 36.17. *Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — два набора произвольных комплексных чисел. Тогда в пространстве $\{f(x)\colon f(x) = x^{\delta}g(x),\ g(x) \in \mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $g(x) \in L_2^{(0,\gamma)})\}$, где*

$$\gamma = \max\left\{0,\ \max \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{k} (\beta_{i_j} - \alpha_{i_j}),\quad \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}\right\}, \qquad (36.88)$$

$$\delta > \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re}\alpha_i - 1/2, \qquad (36.89)$$

операторы $x^{\beta_i} I_{0+}^{\alpha_i-\beta_i} x^{-\alpha_i}$ *коммутативны. Если, кроме того,* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *является некоторой перестановкой набора* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *то композиция всех этих операторов представляет собой единичный оператор*

$$(x^{\beta_{i_n}} I_{0+}^{\alpha_{i_n}-\beta_{i_n}} x^{-\alpha_{i_n}}) \ldots (x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}}) f(x) = f(x). \tag{36.90}$$

Если условия (36.88) или (36.89) не выполняются, то указанные операторы не всегда коммутативны.

Доказательство. Пусть справедливо представление $f(x) = x^{\delta} g(x)$, где $g(x) \in \mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ $(g(x) \in L_2^{(0,\gamma)})$. Тогда в силу (36.10) имеем

$$x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}} f(x) =$$

$$= x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} g^*(s)\, x^{\delta-\alpha_{i_1}-s}\, ds.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\delta - \alpha_{i_1} - s) > -1$ (в силу (36.89)), то для $m > \operatorname{Re}(\beta_{i_1} - \alpha_{i_1})$ находим далее

$$x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}} f(x) = x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{-m} I_{0+}^{\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}+m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} g^*(s)\, x^{\delta-\alpha_{i_1}-s}\, ds =$$

$$= x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{-m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha_{i_1}-s+\delta \\ 1-\beta_{i_1}-s+\delta+m \end{matrix}\right] g^*(s)\, x^{\delta-\beta_{i_1}+m-s}\, ds =$$

$$= x^{\beta_{i_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha_{i_1}-s+\delta \\ 1-\beta_{i_1}-s+\delta+m \end{matrix}\right] g^*(s) \frac{d^m}{dx^m} x^{\delta-\beta_{i_1}+m-s}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha_{i_1}-s+\delta \\ 1-\beta_{i_1}-s+\delta \end{matrix}\right] g^*(s)\, x^{\delta-s}\, ds = \varphi(x).$$

Все проведенные перестановки операций законны, так как все используемые интегралы сходятся абсолютно (или в силу равенства Парсеваля в L_2) ввиду условия $g^*(s)\, s^{\gamma} \in L(\sigma)$ $(g^*(s)\, s^{\gamma} \in L_2(\sigma))$. Построенная функция $\varphi(x)$ принадлежит уже пространству $\{f(x)\colon f(x) = x^{\delta} g(x),\ g(x) \in \mathfrak{M}_{0,\gamma'}^{-1}(L)$ (соответственно $g(x) \in L_2^{(0,\gamma')}$), где $\gamma' = \gamma + \operatorname{Re}(\alpha_{i_1} - \beta_{i_1})\}$. По отношению к параметру γ' условия (36.88), (36.89), переписанные в виде

$$\gamma^* = \max\Big\{0,\ \max \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{k} (\beta_{i_j} - \alpha_{i_j}),$$

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\} \setminus i_1\Big\},$$

$$\delta > \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_1}} \operatorname{Re} \alpha_i - 1/2,$$

также будут выполняться. Поэтому к $\varphi(x)$ можно опять применить некоторый оператор $x^{\beta_{i_2}} I_{0+}^{\alpha_{i_2}-\beta_{i_2}} x^{-\alpha_{i_2}}$, где $i_2 \in \{1, \ldots, n\} \setminus i_1$. Продолжив этот процесс, получим, что в силу теоремы 36.5 композиция $(x^{\beta_{i_n}} I_{0+}^{\alpha_{i_n}-\beta_{i_n}} x^{-\alpha_{i_n}}) \ldots$ $\ldots (x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}}) f(x)$ существует для любой подстановки $(i_1, \ldots, i_n)$ и, более того, она представима в виде G-преобразования

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha_{i_n}+\delta-s, \ldots, 1-\alpha_{i_1}+\delta-s \\ 1-\beta_{i_n}+\delta-s, \ldots, 1-\beta_{i_1}+\delta-s \end{matrix}\right] g^*(s)\, x^{\delta-s}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha_1+\delta-s, \ldots, 1-\alpha_n+\delta-s \\ 1-\beta_1+\delta-s, \ldots, 1-\beta_n+\delta-s \end{matrix}\right] g^*(s)\, x^{\delta-s}\, ds, \tag{36.91}$$

см. (10.48), и поэтому не зависит от порядка действия составляющих операторов (изменение этого порядка приводит к изменению порядка гамма-множителей в (36.91)). Если еще $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, то все гамма-функции в (36.91) сокращаются, и правая часть принимает значение $x^\delta g(x)$, что приводит к формуле (36.90).

Допустим теперь, что условия (36.89) нарушаются, т. е. существует номер j, для которого $\delta \leqslant \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2$. Пусть вначале $\delta < \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2$. Тогда для функции $f(x) = x^{-1/2+\varepsilon} e^{-x} \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)$ $(L_2^{(0,\gamma)})$ оператор $x^{\beta_j} I_{0+}^{\alpha_j-\beta_j} x^{-\alpha_j} f(x)$ не существует при $\varepsilon < \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2 - \delta$. Аналогично и в случае $\delta = \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2$ можно найти такую функцию $f(x)$ из указанных в условии теоремы классов, для которой приведенный оператор не существует.

Допустим, наконец, что условия (36.88) не выполняются для некоторого набора $(i_1, \ldots, i_k)$. Тогда в силу теоремы 36.5 композиция $\prod_{j=1}^{k} (x^{\beta_{i_j}} I_{0+}^{\alpha_{i_j}} {}^{-\beta_{i_j}} x^{-\alpha_{i_j}}) f(x)$ в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)$ $(L_2^{(0,\gamma)})$ не существует.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 36.18. *Пусть выполняются условия теоремы 36.17, но с заменой (36.89) на противоположное неравенство*

$$\delta < \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re}\alpha_i - 1/2. \tag{36.92}$$

Тогда имеют место утверждения теоремы 36.17, но с заменой I_{0+} на I_{-}.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\gamma = \max(0, -\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Re}\beta, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta))$ *и* $\delta > \max(-\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Re}\beta) - 1/2$ (*или* $\gamma = \max(0, -\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta))$ *и* $\delta > -\operatorname{Re}\alpha - 1/2$). *Тогда в пространствах* $\{f(x): f(x) = x^\delta g(x), g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)\}$ *и* $\{f(x): f(x) = x^\delta g(x), g(x) \in L_2^{(0,\gamma)}\}$ *имеет место первая* (*соответственно вторая*) *из формул* (*10.4*).

Д о к а з а т е л ь с т в о получается на основе представления

$$x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} \beta+1-s \\ \alpha+\beta+1-s \end{bmatrix} \times \Gamma\begin{bmatrix} 1-s \\ \beta+1-s \end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s} ds.$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $\gamma = \max(0, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}(\alpha+\beta))$ *и* $\delta > \max(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) - 1/2$. *Тогда в пространствах* $\{f(x): f(x) = x^\delta g(x), g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)\}$ *и* $\{f(x): f(x) = x^\delta g(x), g(x) \in L_2^{(0,\gamma)}\}$ *имеет место равенство*

$$I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} I_{0+}^{\beta} x^{-\beta} f(x) = I_{0+}^{\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} f(x). \tag{36.93}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 36.17 и следствия 1.

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $\gamma = \max\{0, -\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(\alpha+\beta)\}$ *и* $\delta > \max(0, -\operatorname{Re}\beta, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta)) - 1/2$. *Тогда в пространствах* $\{f(x): f(x) = x^\delta g(x), g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)\}$ *и* $\{f(x): f(x) = x^\delta g(x), g(x) \in L_2^{(0,\gamma)}\}$ *имеет место равенство* (*10.42*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исключив γ, левую часть (10.42) запишем в виде $I_{0+}^{-\alpha-\beta} x^{\alpha+\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{\beta} x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} f(x)$. При выполнении условий следствия эта композиция существует и принимает значение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} 1+\alpha+\beta-s \\ 1-s \end{bmatrix} \Gamma\begin{bmatrix} 1-s \\ 1+\beta-s \end{bmatrix} \times \Gamma\begin{bmatrix} 1+\beta-s \\ 1+\alpha+\beta-s \end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s} ds = f(x).$$

Что и требовалось установить (ср. с доказательством теоремы 10.6).

§ 37. УРАВНЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые классы интегральных уравнений первого рода, разрешимых в замкнутом виде и имеющих ядра, прямо не представимые в форме $K(x/t)$. К таким классам относятся уравнения с разностными ядрами $K(x-t)$ (для которых лишь после замен $x=\ln y$, $t=\ln\tau$ ядро принимает вид $K(\ln\theta)$, $\theta=y/\tau$), некоторые несверточные уравнения с функциями Бесселя, уравнения композиционного типа, распадающиеся на более простые, обращаемые уравнения, а также уравнения, связанные с интегрированием по параметрам специальных функций (типа преобразований Конторовича—Лебедева и Мелера—Фока).

1°. Уравнения с разностными ядрами. Проведем исследование следующих семи левосторонних *интегральных операторов типа Абеля:*

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_1F_1(\beta;\ \alpha;\ \lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.1}$$

$$(A_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\overline{J}_{(\alpha-1)/2}(\lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.2}$$

$$(B_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\overline{J}_{\alpha/2-1}(\lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.3}$$

$$(C_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\overline{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x-t})\,f(t)\,dt, \tag{37.4}$$

$$(D_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\overline{J}_{\alpha}(\lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.5}$$

$$(E_{a+}^{\alpha,\lambda,\gamma}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\overline{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)})\,f(t)\,dt,\quad |\arg\gamma|<\pi, \tag{37.6}$$

$$(S_{a+}^{\alpha}f)(x)=\int_a^x \left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x-t}{2}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)}\,dt \tag{37.7}$$

и соответствующих им правосторонних операторов $I_{b-}^{\alpha,\beta,-\lambda}$, $A_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $B_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $C_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $D_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $E_{b-}^{\alpha,\lambda,\gamma}$, S_{b-}^{α}, получающихся из (37.1) — (37.7) заменой $x-t$ на $t-x$ и $[a, x]$ на $[x, b]$, $b\leqslant\infty$. В случае $b=+\infty$ вместо символа $\infty-$ в указанных операторах будем использовать индекс —, см., например, (10.56). В приведенных формулах α ($\mathrm{Re}\,\alpha>0$), β, λ, γ — некоторые комплексные параметры, ${}_1F_1(a;\ c;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (1.81), а $\overline{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда:

$$\overline{J}_\nu(z)=\overline{I}_\nu(iz)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k\,k!} \tag{37.8}$$

(ниже встречается и функция $\overline{I}_\nu(z)$).

В силу очевидного равенства $\overline{J}_\nu(0) = \overline{I}_\nu(0) = 1$ получаем

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,0} = A_{a+}^{\alpha,0} = B_{a+}^{\alpha,0} = C_{a+}^{\alpha,0} = D_{a+}^{\alpha,0} = E_{a+}^{\alpha,0,\nu} = I_{a+}^{\alpha}. \tag{37.9}$$

Это позволяет нам операторы (37.1) — (37.6), а также (37.7) (с учетом, что $2\operatorname{sh}(\tau/2) \sim \tau$ при $\tau \to 0$) считать некоторыми обобщениями интегралов дробного порядка I_{a+}^{α}.

Исходя из представлений ядер указанных операторов через ряды и воспользовавшись формулой удвоения (1.61), несложно выписать следующие формулы, отражающие структуру операторов (37.1)—(37.4):

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} \lambda^k I_{a+}^{\alpha+k} = I_{a+}^{\alpha}(E - \lambda I_{a+}^{1})^{-\beta}, \tag{37.10}$$

$$A_{a+}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)_k}{k!} (-\lambda^2)^k I_{a+}^{\alpha+2k} = I_{a+}^{\alpha}(E + \lambda^2 I_{a+}^{2})^{-\alpha/2}, \tag{37.11}$$

$$B_{a+}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_k \frac{(-\lambda^2)^k}{k!} I_{a+}^{\alpha+2k} = I_{a+}^{\alpha}(E + \lambda^2 I_{a+}^{2})^{-(\alpha+1)/2}, \tag{37.12}$$

$$C_{a+}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)^k I_{a+}^{\alpha+k} = I_{a+}^{\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4} I_{a+}^{1}\right), \tag{37.13}$$

где E — единичный оператор. Суммы, стоящие в средней части этих формул, называются обобщенными рядами Неймана. Так как операторы I_{a+}^{k} ограничены в $L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$, $b < \infty$ (см. доказательство теоремы 2.6), то эти ряды можно просуммировать при $|\lambda| < \|I_{a+}^{1}\|_{L_p(a,b)}^{-1}$. После вычисления сумм указанное ограничение на λ и суммы в средней части можно опустить, так как операторы (37.1)—(37.4) по λ аналитичны. Аналогичный подход допустим и к операторам (37.5)—(37.7), а также к соответствующим правосторонним операторам, но в случае $b = +\infty$ при использовании обобщенных рядов Неймана нужно проявлять осторожность и учитывать асимптотику специальных функций из ядер на бесконечности.

Отметим также, что из формул (37.10), (10.58) вытекает интересное операторное соотношение

$$I_{a+}^{\alpha-\beta} e^{\lambda x} I_{a+}^{\beta} e^{-\lambda x} = I_{a+}^{\alpha}(E - \lambda I_{a+}^{1})^{-\beta}, \tag{37.14}$$

где $e^{\pm\lambda x}$ означает оператор умножения на функцию $e^{\pm\lambda x}$ (см. формулу после (18.77)).

На основе равенств (37.10) — (37.13) и полугруппового свойства (2.65) легко выписываются соотношения

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda} I_{a+}^{\gamma,\delta,\lambda} = I_{a+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\lambda}, \tag{37.15}$$

$$A_{a+}^{\alpha,\lambda} = I_{a+}^{\alpha/2,\alpha/2,i\lambda} I_{a+}^{\alpha/2,\alpha/2,-i\lambda}, \quad A_{a+}^{\alpha,\lambda} A_{a+}^{\gamma,\lambda} = A_{a+}^{\alpha+\gamma,\lambda}, \tag{37.16}$$

$$B_{a+}^{\alpha,\lambda} = I_{a+}^{\alpha/2,(\alpha+1)/2,i\lambda} I_{a+}^{\alpha/2,(\alpha+1)/2,-i\lambda}, \quad A_{a+}^{\alpha,\lambda} B_{a+}^{\gamma,\lambda} = B_{a+}^{\alpha+\gamma,\lambda}, \tag{37.17}$$

$$I_{a+}^{1} B_{a+}^{\alpha,\lambda} = A_{a+}^{(\alpha+1)/2,\lambda}, \quad C_{a+}^{\alpha,\lambda} C_{a+}^{\gamma,\delta} = C_{a+}^{\alpha+\gamma,\sqrt{\lambda^2+\delta^2}}, \tag{37.18}$$

$$C_{a+}^{\alpha,\lambda} C_{a+}^{\gamma,i\lambda} = I_{a+}^{\alpha+\gamma}, \quad C_{a+}^{\alpha,\lambda} I_{a+}^{\beta} = C_{a+}^{\alpha+\beta,\lambda}$$

и аналогичные формулы для правосторонних операторов.

Отмеченная в (37.9) связь с дробными интегралами дает возможность заключить, что операторы (37.1)—(37.7) обладают в $L_p(a, b)$ таким же действием, как и I_{a+}^{α}, т. е. справедлива

Теорема 37.1. *Операторы (37.1)—(37.7) ограниченно действуют из* $L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$, *на* $I_{a+}^{\alpha}[L_p(a, b)] \subset L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Доказательство непосредственно следует из свойств ${}_1F_1(\beta; \alpha; 0) = \overline{J}_{\nu}(0) = 1$, $2\operatorname{sh}(\tau/2) \sim \tau$ при $\tau \to 0$ и леммы 31.4.

Сопоставив формулы (37.1)—(37.7) с (1.122), легко заметить, что если $a=0$ или $a>0$, но функция $f(t)$ доопределена нулем на интервал $0<t<a$, то операторы (37.1)—(37.7) можно записать как свертки Лапласа (1.122). Тогда по теореме о свертке (1.123), вычислив преобразования Лапласа ядер по соответствующим формулам из справочников Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, формула 6.10(5)] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.12.8, случаи $I_{\nu}^{\nu+1}$, $I_{\nu}^{\nu+2}$, I_{ν}^{0}, 2.12.9.3 при $n=0$, 2.12.11.5], а также [1, 2.4.10.4], легко получить следующие значения преобразования Лапласа равенств (37.1)—(37.7):

$$(LI_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda}f)(p) = p^{-\alpha}(1-\lambda p^{-1})^{-\beta}(Lf)(p), \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \operatorname{Re} p > 0; \tag{37.19}$$

$$(LA_{0+}^{\alpha,\lambda}f)(p) = (p^2+\lambda^2)^{-\alpha/2}(Lf)(p), \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.20}$$

$$(LB_{0+}^{\alpha,\lambda}f)(p) = p(p^2+\lambda^2)^{-(\alpha+1)/2}(Lf)(p), \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.21}$$

$$(LC_{0+}^{\alpha,\lambda}f)(p) = p^{-\alpha}\exp[-\lambda^2/(4p)](Lf)(p), \quad \operatorname{Re} p > 0; \tag{37.22}$$

$$(LD_{0+}^{\alpha,\lambda}f)(p) = \left(\frac{2}{p+\sqrt{p^2+\lambda^2}}\right)^{\alpha}(Lf)(p), \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.23}$$

$$(LE_{0+}^{\alpha,\lambda,\gamma}f)(p) = \left(\frac{2}{p+\sqrt{p^2+\lambda^2}}\right)^{\alpha-1}\frac{\exp[(p-\sqrt{p^2+\lambda^2})\gamma/2]}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} \times$$
$$\times (Lf)(p), \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.24}$$

$$(LS_{0+}^{\alpha}f)(p) = \frac{\Gamma(p+(1-\alpha)/2)}{\Gamma(p+(1+\alpha)/2)}(Lf)(p), \quad 2\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha - 1. \tag{37.25}$$

Сравнивая их правые части с правыми частями формул (37.10)—(37.13), можно заметить, что первые четыре формулы получаются из (37.10)—(37.13) заменой I_{a+}^{1} на p^{-1} (см. (7.14)).

Из равенств (37.19)—(37.25), как и ранее, несложно в дополнение к (37.15)—(37.18) получить операторные соотношения вида

$$E_{a+}^{\alpha,\lambda,0} = D_{a+}^{\alpha-1,\lambda}A_{a+}^{1,\lambda}, \quad D_{a+}^{\alpha,\lambda}D_{a+}^{\beta,\lambda} = D_{a+}^{\alpha+\beta,\lambda}, \tag{37.26}$$

$$E_{a+}^{\alpha,\lambda,\gamma}E_{a+}^{\beta,\lambda,\delta} = A_{a+}^{1,\lambda}E_{a+}^{\alpha+\beta-1,\lambda,\gamma+\delta}, \tag{37.27}$$

$$I_{a+}^{\alpha+\beta}S_{a+}^{\gamma+1} = I_{a+}^{\alpha+1,1,-\gamma/2}S_{a+}^{\gamma-1}I_{a+}^{\beta+1,1,\gamma/2}, \tag{37.28}$$

$$E_{a+}^{\alpha,\lambda,\gamma}D_{a+}^{\beta,\lambda} = E_{a+}^{\alpha+\beta,\lambda,\gamma}. \tag{37.29}$$

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов (37.1)—(37.7). Как показывают формулы (37.19)—(37.25), преобразования Лапласа $(Lh)(p)$ ядер $h(x)$ (см. (1.119)) всех этих операторов и соответствующие им обратные величины $[(Lh)(p)]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования I_{0+}^{α}, которому соответствует $(Lh)(p) = p^{-\alpha}$ с условием $\operatorname{Re}\alpha > 0$, для преобразования Лапласа p^{α} ядра обратного оператора D_{0+}^{α} условие $\operatorname{Re}\alpha > 0$ вынуждает нас представлять p^{α} в виде $p^{\alpha} = p^{n}p^{-(n-\alpha)}$, где $\operatorname{Re}(n-\alpha) > 0$, причем значению p^{n} соответствует оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} = D_{0+}^{n}$ (см. (1.124)). Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении операторов (37.1)—(37.7).

Учтя сказанное, построим решение уравнения

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda}f)(x)=g(x),\quad a<x<b\leqslant\infty. \tag{37.30}$$

Пользуясь формулами (37.10), (10.58), (10.59), а также равенством из справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 6.3(7)], без затруднений формально приходим к следующим представлениям решения уравнения (37.30):

$$f(x)=\{(I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda})^{-1}g\}(x)=I_{a+}^{-\alpha}(E-\lambda I_{a+}^{1})^{\beta}g(x)=$$

$$=I_{a+}^{-l}I_{a+}^{l+m-\alpha}(E-\lambda I_{a+}^{1})^{\beta}I_{a+}^{-m}g(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}I_{a+}^{l+m-\alpha,-\beta,\lambda}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}g(x)=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\int_{a}^{x}\frac{(x-t)^{l+m-\alpha-1}}{\Gamma(l+m-\alpha)}\,{}_1F_1(-\beta;\ l+m-\alpha;\ \lambda(x-t))\times$$

$$\times g^{(m)}(t)\,dt=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}R(x), \tag{37.31}$$

$$f(x)=e^{\lambda x}I_{a+}^{-\beta}e^{-\lambda x}I_{a+}^{\beta-\alpha}g(x), \tag{37.32}$$

$$f(x)=I_{a+}^{\beta-\alpha}e^{\lambda x}I_{a+}^{-\beta}e^{-\lambda x}g(x), \tag{37.33}$$

$$f(x)=e^{\lambda x}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}I_{a+}^{l+m-\alpha,\beta-\alpha,-\lambda}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}(e^{-\lambda x}g(x)). \tag{37.34}$$

Аналогичным образом, исходя из (37.20)—(37.25), формально выписываются следующие представления для обратных к (37.2)—(37.7) операторов:

$$f(x)=\{(A_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=(A_{a+}^{-\alpha,\lambda}g)(x)=$$

$$=(I_{a+}^{-2}+\lambda^2)^{l}A_{a+}^{2l+2m-\alpha,\lambda}(I_{a+}^{-2}+\lambda^2)^{m}g(x)=$$

$$=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^{l}\int_{a}^{x}\frac{(x-t)^{2l+2m-\alpha-1}}{\Gamma(2l+2m-\alpha)}\times$$

$$\times\overline{J}_{l+m-(\alpha+1)/2}(\lambda(x-t))\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2\right)^{m}g(t)\,dt, \tag{37.35}$$

$$\{(B_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=I_{a+}^{1}(A_{a+}^{-\alpha-1,\lambda}g)(x), \tag{37.36}$$

$$\{(C_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\int_{a}^{x}\frac{(x-t)^{l+m-\alpha-1}}{\Gamma(l+m-\alpha)}\times$$

$$\times\overline{I}_{l+m-\alpha-1}(\lambda\sqrt{x-t})\,g^{(m)}(t)\,dt, \tag{37.37}$$

$$\{(D_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=(D_{a+}^{-\alpha,\lambda}g)(x)=$$

$$=2^{k}\left[D_{a+}^{k-\alpha,\lambda}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{a+}^{-j,\lambda}I_{a+}^{j-k}g\right](x),$$

$$k-1\leqslant\operatorname{Re}\alpha<k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{37.38}$$

$$\{(E_{a+}^{\alpha,\lambda,\nu})^{-1}g\}(x)=(E_{a+}^{2-\alpha,\lambda,-\nu}A_{a+}^{-2,\lambda}g)(x)=(E_{a+}^{k-\alpha+1,\lambda,-\nu}D_{a+}^{-k,\lambda}\times$$

$$\times A_{a+}^{-2,\lambda} g)(x), \quad k-1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < k+1, \ k=1, 2, \ldots, \tag{37.39}$$

$$\{(S_{a+}^{\alpha})^{-1} g\}(x) = (S_{a+}^{-\alpha} g)(x) = \left[S_{a+}^{2k-\alpha} \left(I_{a+}^{-1} + \frac{\alpha+1}{2} - k \right)_k \times \right.$$

$$\left. \times \left(I_{a+}^{-1} + \frac{1-\alpha}{2} \right)_k g \right](x), \quad 2k-2 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 2k, \ k=1, 2, \ldots \tag{37.40}$$

Для обоснования этих формул обращения обозначим через $R(x)$ интегральные операторы, стоящие под знаками $\left(\frac{d}{dx}\right)^l$ в формулах (37.31), (37.34), (37.37) и под знаками $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^l$ в формулах (37.35), (37.36). Тогда условия обратимости операторов (37.1) — (37.7) можно свести в одну общую теорему.

Теорема 37.2. *Пусть задано уравнение* $[h*f](x) = g(x)$, $0 \leqslant a < x < b < \infty$, *см.* (*1.122*), *где* h — *один из операторов* (*37.1*) — (*37.7*), $\operatorname{Re}\alpha > 0$, g — *заданная на* $[a, b]$, *а* f — *искомая функции* (*в случае* $a > 0$ *полагается, что* $f(x) = g(x) = 0$ *при* $0 < x < a$). *Тогда его решение* $f = h^{-1}g$ *в классе* $f \in L_p(a, b)$, $b < \infty$, *существует и единственно, если* $g(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$, $p \geqslant 1$. *В случае* $p = 1$ *оно может быть представлено соответствующими формулами* (*37.31*) — (*37.40*), *если еще выполняются дополнительные условия:*

1) *для формулы* (*37.31*) *при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < l+m$, $l, m = 1, 2, \ldots$, $g \in AC^m([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(m-1)}(a) = 0$, $R \in AC^l([a, b])$, $R(a) = R'(a) = \ldots = R^{(l-1)}(a) = 0$; *если лишь* $g \in AC^m$ (*или* $R \in AC^l$), *то* $l = 0$ ($m = 0$);

2) *для* (*37.32*): $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\operatorname{Re}\beta > 0$ *или* $\operatorname{Re}\beta < 0$, *но* $g(x)$ *представима в виде* $g(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta}\psi)(x)$, $\psi(x) \in L_p(a, b)$;

3) *для* (*37.33*): $1 \leqslant p < \infty$ и $\operatorname{Re}(\alpha-\beta) > 0$ *или* $\operatorname{Re}(\alpha-\beta) < 0$, *но* $g(x) = (I_{a+}^{\beta}\psi)(x)$, $\psi(x) \in L_p(a, b)$;

4) *для формул* (*37.34*) — (*37.37*) *условия аналогичны указанным в 1*);

5) *для* (*37.38*): $0 < \operatorname{Re}\alpha < k$, $g \in AC^{k+2}([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(k+1)}(a) = 0$;

6) *для* (*37.39*): $0 < \operatorname{Re}\alpha < k+1$, $g \in AC^{k+5}([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(k+4)}(a) = 0$;

7) *для* (*37.40*): $0 < \operatorname{Re}\alpha < 2k$, $g \in AC^{2k}([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(2k-1)}(a) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций g и f. Условие $g \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$ получается на основе теоремы 31.13, а условия 2) и 3) — из теоремы 10.9 с учетом того, что для существования соответствующих дробных производных условие $g \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$ в последних подслучаях из 2) и 3) должно быть заменено на более жесткое требование $g \in I_{a+}^{\alpha-\beta}[L_p(a, b)]$ или $g \in I_{a+}^{\beta}[L_p(a, b)]$. Ограничения типа $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(m-1)}(a) = 0$ обеспечивают исчезновение внеинтегральных слагаемых при использовании формулы (1.124). Теорема доказана.

Замечание 37.1. Замена λ на $i\lambda$ во всех формулах этого пункта, относящихся к операторам (37.2) — (37.6), в силу равенства (37.8) эквивалентна перемене функций $\overline{I}_\nu$ и $\overline{J}_\nu$ местами.

Замечание 37.2. Совершив во всех формулах этого пункта операцию отражения, т. е. замены типа x на $a+b-x$ и соответствующие за-

мены в функциях f и g, несложно выписать соответствующие формулы и результаты, относящиеся к правосторонним операторам $I_{b-}^{\alpha,\beta,-\lambda}$, $A_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $B_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $C_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $D_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $E_{b-}^{\alpha,\lambda,\nu}$, S_{b-}^{α} в случае $b<\infty$. Если же $b=\infty$, то такие результаты будут, вообще говоря, сохранять силу при более жестких ограничениях.

2°. Обобщенные операторы преобразований Ханкеля и Эрдейи—Кобера. При исследовании некоторых типов парных интегральных уравнений в § 38 используются рассматриваемые здесь обобщенные операторы преобразований Ханкеля и Эрдейи—Кобера. Обобщенные операторы Эрдейи—Кобера лишь весовыми множителями отличаются от операторов

$$\int_0^x (x^2-t^2)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\,\varphi(t)\,dt=\psi(x),\quad \operatorname{Re}\nu>-1, \tag{37.41}$$

$$\int_x^\infty (t^2-x^2)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\,\varphi(t)\,dt=\psi(x),\quad \operatorname{Re}\nu>-1, \tag{37.42}$$

которые в свою очередь получаются из операторов $C_{0+}^{\alpha,\lambda}$, $C_{-}^{\alpha,\lambda}$ (см. (37.4) и текст далее) заменами $\alpha=\nu+1$, $2^{\nu+1}tf(t^2)=\lambda^\nu\varphi(t)$ и x на x^2. С помощью этих замен из теоремы 37.2, формулы (37.37) и замечания 37.2 при условиях $\lambda>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<0$, $\psi\in AC([0,\,b])$ (и $\psi(x)=O(e^{-\lambda x}x^{\nu-1/2-\varepsilon})$ при $x\to\infty$, $\varepsilon>0$ для (37.42)) следует, что уравнения (37.41) и (37.42) обращаются по формулам

$$\varphi(x)=\lambda\frac{d}{dx}\int_0^x t(x^2-t^2)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\,\psi(t)\,dt, \tag{37.43}$$

$$\varphi(x)=-\lambda\frac{d}{dx}\int_x^\infty t(t^2-x^2)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\,\psi(t)\,dt \tag{37.44}$$

соответственно. Если в соотношениях (37.41)—(37.44) поменять местами символы I_ν и J_ν (что эквивалентно изменению λ на $i\lambda$), то (37.41), (37.43) останутся в силе при прежних условиях, а условия на (37.42), (37.44) изменятся, поскольку интеграл (37.42) должен быть сходящимся, а функция $I_\nu(z)$ в ядре на бесконечности имеет экспоненциальный рост.

На основе формул (37.41), (37.42) введем следующие *обобщенные операторы Эрдейи—Кобера:*

$$J_\lambda(\eta,\,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{-2\alpha-2\eta}\int_0^x t^{2\eta+1}(x^2-t^2)^{(\alpha-1)/2}\times$$
$$\times J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\,f(t)\,dt, \tag{37.45}$$

$$R_\lambda(\eta,\,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{2\eta}\int_x^\infty t^{1-2\alpha-2\eta}(t^2-x^2)^{(\alpha-1)/2}\times$$
$$\times J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\,f(t)\,dt, \tag{37.46}$$

где $\alpha>0$, $\eta>-1/2$. Операторы $J_{i\lambda}(\eta,\,\alpha)$ и $R_{i\lambda}(\eta,\,\alpha)$ определим через правые части (37.45), (37.46), в которых заменим $J_{\alpha-1}$ на $I_{\alpha-1}$.

Обобщенный оператор преобразования Ханкеля зададим формулой

$$S\begin{pmatrix}a, & b, & y\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix}f(x)=2^\alpha x^{2\sigma-\alpha}(x^2-a^2)^{-\sigma}\times$$
$$\times\int_y^\infty \tau^{1-\alpha-2\sigma}(\tau^2-y^2)^\sigma J_{2\eta+\alpha}(\sqrt{(x^2-a^2)(\tau^2-b^2)})\,f(\tau)\,d\tau. \tag{37.47}$$

Очевидно, что он связан с оператором $S_{\eta,\alpha,2}$ (18.19) соотношением

$$S\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ \eta, & \alpha, & 0\end{pmatrix} = S_{\eta,\alpha,2}. \tag{37.48}$$

Приведем формально (без указаний классов функций) некоторые *свойства введенных операторов*. Эти свойства, как обычно, можно проверить на достаточно хороших функциях прямыми вычислениями, а затем они распространяются на функции из L_p.

1. Очевидно, что в пределе при $\lambda\to 0$ операторы (37.45), (37.46) совпадают с операторами Эрдейи—Кобера (18.8):

$$J_0(\eta, \alpha) = I_{\eta,\alpha}, \quad R_0(\eta, \alpha) = K_{\eta,\alpha}. \tag{37.49}$$

2. На основе (18.11) имеем

$$J_0(\eta, 0) = E, \quad R_0(\eta, 0) = E. \tag{37.50}$$

3. Из определений (37.45), (37.46) следуют формулы сдвига

$$J_\lambda(\eta, \alpha)\, x^{2\beta} f(x) = x^{2\beta} J_\lambda(\eta+\beta, \alpha) f(x), \tag{37.51}$$

$$R_\lambda(\eta, \alpha)\, x^{2\beta} f(x) = x^{2\beta} R_\lambda(\eta-\beta, \alpha) f(x), \tag{37.52}$$

4. Путем вычисления соответствующих повторных интегралов с помощью формулы 2.15.35.2 (при $b^2+c^2=1$) из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2] несложно при $\alpha>0$, $\beta>0$ установить справедливость равенств

$$J_{i\lambda}(\eta+\alpha, \beta) J_\lambda(\eta, \alpha) = J_\lambda(\eta+\alpha, \beta) J_{i\lambda}(\eta, \alpha) = I_{\eta,\alpha+\beta}. \tag{37.53}$$

$$R_{i\lambda}(\eta, \alpha) R_\lambda(\eta+\alpha, \beta) = R_\lambda(\eta, \alpha) R_{i\lambda}(\eta+\alpha, \beta) = K_{\eta,\alpha+\beta}, \tag{37.54}$$

см. (37.18).

5. Из последних равенств, воспользовавшись свойством (37.50), можно определить операторы $J_\lambda(\eta, \alpha)$ и $R_\lambda(\eta, \alpha)$ при $\alpha<0$ как решения соответствующих интегральных уравнений, см. § 18, п. 1°, а именно

$$J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = x^{-2\alpha-2\eta}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n x^{2n+2\alpha-2\eta} J_\lambda(\eta, \alpha+n) f(x), \tag{37.55}$$

$$R_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = x^{2\eta}\left(-\frac{d}{2xdx}\right)^n x^{2n-2\eta} R_\lambda(\eta-n, \alpha+n) f(x), \tag{37.56}$$

где $-n<\alpha<0$, $n=1, 2, \ldots$ Отсюда следуют соотношения

$$J_{i\lambda}^{-1}(\eta, \alpha) = J_\lambda(\eta+\alpha, -\alpha), \quad J_\lambda^{-1}(\eta, \alpha) = J_{i\lambda}(\eta+\alpha, -\alpha), \tag{37.57}$$

$$R_{i\lambda}^{-1}(\eta, \alpha) = R_\lambda(\eta+\alpha, -\alpha), \quad R_\lambda^{-1}(\eta, \alpha) = R_{i\lambda}(\eta+\alpha, -\alpha). \tag{37.58}$$

6. Для операторов (37.45), (37.46) имеет место следующий аналог формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^\infty x f(x) J_\lambda(\eta, \alpha) g(x)\, dx = \int_0^\infty x g(x) R_\lambda(\eta, \alpha) f(x)\, dx. \tag{37.59}$$

7. Путем вычисления композиций операторов с помощью равенств 2.12.35.2,6 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2] устанавливаются следующие операторные соотношения, связывающие операторы (37.45)—(37.47):

$$J_{i\lambda}(\eta+\alpha, \beta) S\begin{pmatrix}0, & 0, & \lambda\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}0, & \lambda, & \lambda\\ \eta, & \alpha+\beta, & \sigma-\eta-(\alpha+\beta)/2\end{pmatrix}, \tag{37.60}$$

$$R_\lambda(\eta,\ \alpha)S\begin{pmatrix}0, & 0, & \lambda\\ \eta+\alpha, & \beta, & \sigma\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}0, & \lambda, & \lambda\\ \eta, & \alpha+\beta, & \sigma+\eta+(\alpha+\beta)/2\end{pmatrix}, \tag{37.61}$$

$$S\begin{pmatrix}0, & \lambda, & \lambda\\ \eta+\alpha, & \beta, & \sigma\end{pmatrix}S\begin{pmatrix}\lambda, & 0, & 0\\ \eta, & \alpha, & \sigma-\eta-\alpha/2\end{pmatrix}=J_\lambda(\eta,\ \alpha+\beta), \tag{37.62}$$

$$S\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ \eta, & \alpha, & 0\end{pmatrix}S\begin{pmatrix}\lambda, & 0, & 0\\ \eta+\alpha, & \beta, & \eta+\alpha+\beta/2\end{pmatrix}=R_{i\lambda}(\eta,\ \alpha+\beta). \tag{37.63}$$

8. Используя формулу (37.62) при $\alpha+\beta=0$, можно получить, что уравнение

$$S\begin{pmatrix}0, & y, & y\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix}f(x)=g(x) \tag{37.64}$$

имеет решение

$$f(x)=S\begin{pmatrix}y, & 0, & 0\\ \eta+\alpha, & -\alpha, & \sigma\end{pmatrix}g(x), \tag{37.65}$$

откуда следует операторное соотношение

$$S^{-1}\begin{pmatrix}0, & y, & y\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}y, & 0, & 0\\ \eta+\alpha, & -\alpha, & \sigma\end{pmatrix}. \tag{37.66}$$

3°. **Несверточные операторы с функциями Бесселя в ядрах.** В этом пункте рассмотрим следующие два несверточных оператора с функциями Бесселя в ядрах:

$$(\bar{J}^+_{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t(x-t)})f(t)\,dt, \tag{37.67}$$

$$(\bar{I}^-_{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_0^x\frac{\overline{(x-t)^{\alpha-1}}}{\Gamma(\alpha)}\bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)})f(t)\,dt, \tag{37.68}$$

где $\bar{J}_\nu(z)$, $\bar{I}_\nu(z)$ — функции Бесселя — Клиффорда (37.8). Кроме этих, в дальнейшем будут встречаться операторы, отличающиеся от (37.67), (37.68) заменой соответственно символов $\bar{J}$ на $\bar{I}$ и $\bar{I}$ на $\bar{J}$. Эти операторы будем обозначать через $\bar{I}^+_{\alpha,\lambda}$ и $\bar{J}^-_{\alpha,\lambda}$. Очевидно,

$$\bar{I}^+_{\alpha,\lambda}=\bar{J}^+_{\alpha,i\lambda},\quad \bar{J}^-_{\alpha,\lambda}=\bar{I}^-_{\alpha,i\lambda}. \tag{37.69}$$

Все указанные операторы при $\lambda=0$ совпадают с дробным интегралом:

$$\bar{J}^+_{\alpha,0}=\bar{I}^+_{\alpha,0}=\bar{J}^-_{\alpha,0}=\bar{I}^-_{\alpha,0}=I^\alpha_{0+}, \tag{37.70}$$

а при остальных значениях λ также тесно с ним связаны, представляя собой композиции операторов $\bar{J}^\pm_{1,\lambda}$ (или $\bar{I}^\pm_{1,\lambda}$) с $I^{\alpha-1}_{0+}$, вычисленные в том или ином порядке. Эти свойства вытекают из следующей теоремы.

Теорема 37.3. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$ *и* $f\in L_p(0,\ b)$, $b<\infty$, $p\geqslant 1$. *Тогда операторы* (37.67), (37.68) *определены и действуют ограниченно на пространство* $I^\alpha_{0+}[L_p(0,\ b)]$. *Если еще* $\operatorname{Re}\beta>0$, *то имеют место следующие композиционные соотношения:*

$$I^\beta_{0+}(\bar{J}^+_{\alpha,\lambda}f)(x)=(\bar{J}^+_{\alpha+\beta,\lambda}f)(x), \tag{37.71}$$

$$(\bar{I}^-_{\alpha,\lambda}I^\beta_{0+}f)(x)=(\bar{I}^-_{\alpha+\beta,\lambda}f)(x). \tag{37.72}$$

Доказательство. Первое утверждение является прямым следствием леммы 31.4. Доказательство формул (37.71), (37.72) осуществля-

ется непосредственным вычислением. Проверим, например, справедливость равенства (37.72):

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)})\,dt \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)})\,dt.$$

Совершив теперь замену $t=x+(\tau-x)\theta^2$, приняв во внимание (37.8) и формулу 2.15.2.6 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2], легко получим значение внутреннего интеграла и далее правую часть формулы (37.72).

Важно отметить, что формулы (37.71), (37.72) дают возможность доопределить операторы $\bar{J}^+_{\alpha,\lambda}$, $\bar{I}^-_{\alpha,\lambda}$ на случай отрицательных значений α способом, который использовался в § 18, п. 1° и при определении (37.55), (37.56). А именно положим

$$(\bar{J}^+_{\alpha,\lambda}f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (\bar{J}^+_{\alpha+n,\lambda}f)(x), \tag{37.73}$$

$$(\bar{I}^-_{\alpha,\lambda}f)(x) = (\bar{I}^-_{\alpha+n,\lambda}f^{(n)})(x), \quad -n<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1-n,\ n=1,\ 2,\ \ldots \tag{37.74}$$

Заметим также, что из (37.71), (37.72) следуют представления

$$(\bar{J}^+_{\alpha,\lambda}f)(x) = I^{\alpha-1}_{0+}(\bar{J}^+_{1,\lambda}f)(x), \tag{37.75}$$

$$(\bar{I}^-_{\alpha,\lambda}f)(x) = (\bar{I}^-_{1,\lambda}I^{\alpha-1}_{0+}f)(x), \tag{37.76}$$

которые отражают важную роль операторов $\bar{J}^+_{1,\lambda}$ и $\bar{I}^-_{1,\lambda}$ при изучении операторов (37.67), (37.68) с произвольным α. Условия справедливости формул (37.73) — (37.76) содержат следующие теоремы.

Теорема 37.4. *Пусть* $f\in AC^{(n-1)}([0,\ b])$, $n=1+[-\operatorname{Re}\alpha]$, $\operatorname{Re}\alpha<0$. *Тогда операторы* (*37.73*), (*37.74*) *определены.*

Теорема 37.5. *Пусть* $f\in L_p(0,\ b)$, $b<\infty$, $p\geqslant 1$. *Тогда формула* (*37.75*) *справедлива при* $\operatorname{Re}\alpha>0$, *а формула* (*37.76*) *при* $\operatorname{Re}\alpha>1$ *или при* $0<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1$, *если еще* $f\in I^{1-\alpha}_{0+}[L_p(0,\ b)]$.

Доказательства обеих теорем очевидны и следуют из отмеченной связи поведения операторов (37.67), (37.68) с дробным интегралом.

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов (37.67), (37.68). Как следует из (37.75), (37.76), дело сводится к проблеме обращения операторов $\bar{J}^+_{1,\lambda}$ и $\bar{I}^-_{1,\lambda}$. Для решения этой задачи докажем вспомогательную лемму.

Лемма 37.1. *Имеет место следующее тождество:*

$$\int_t^x \tau\frac{\partial}{\partial\tau}J_0(\lambda\sqrt{t(\tau-t)})\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}J_0(\lambda\sqrt{t(x-t)}) - t\frac{\partial}{\partial t}I_0(\lambda\sqrt{x(x-t)}). \tag{37.77}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (37.77) через A и разложим подынтегральные функции Бесселя в ряды с суммированием по k и l соответственно. Продифференцировав эти ряды по τ, а затем заменив l на $k-m$, $0\leqslant m\leqslant k$, получим

$$A = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{(-1)^m m(\lambda^2 t/4)^m (k-m)(\lambda^2 x/4)^{k-m}}{(m!)^2((k-m)!)^2}\times$$

$$\times\int_t^x \tau(\tau-t)^{m-1}(x-\tau)^{k-m-1}d\tau.$$

Внутренний интеграл вычислим по формуле 2.2.6.11 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1], что приведет к значению

$$A = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k-1}\binom{k}{m}(-1)^m t^m x^{k-m}(tk+(x-t)m).$$

Конечная сумма, как следует из равенств 4.2.3.1 и 4.2.3.18 указанного справочника, равна $-tkx^k - kx(-t)^k$, что легко приводит к правой части формулы (37.77). Лемма доказана.

Теорема 37.6. *Пусть* $F(x)\in AC([0, b])$. *Тогда уравнение*

$$\frac{d}{dx}(\bar{J}_{1,\lambda}^{+}f)(x) = f(x) +$$

$$+\int_0^x f(t)\frac{\partial}{\partial x}J_0(\lambda\sqrt{t(x-t)})\,dt = F(x) \qquad (37.78)$$

имеет единственное решение вида

$$f(x) = x^{-1}\bar{I}_{1,\lambda}^{-}(xF(x))' =$$

$$= F(x) - x^{-1}\int_0^x F(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau. \qquad (37.79)$$

Доказательство. Заменив в (37.78) x на τ, умножим обе части этого уравнения на $\tau\dfrac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})$, а затем проинтегрируем по τ в пределах от 0 до x:

$$\int_0^x f(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau + \int_0^x \tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau\times$$

$$\times\int_0^\tau f(t)\frac{\partial}{\partial\tau}J_0(\lambda\sqrt{t(\tau-t)})\,dt = \int_0^x F(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau.$$

Во втором слагаемом поменяем порядок интегрирования и применим лемму 37.1 для вычисления внутреннего интеграла, что после сокращения приведет к равенству

$$x\int_0^x f(t)\frac{\partial}{\partial x}J_0(\lambda\sqrt{t(x-t)})\,dt = \int_0^x F(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau. \qquad (37.80)$$

Вычтем теперь из уравнения (37.78) равенство (37.80) и легко получим формулу (37.79). При указанных условиях на функцию $F(x)$ проведенные операции законны. Теорема доказана.

Теорема 37.7. *Пусть* $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, $g\in I_{0+}^{\alpha}[L_1(0, b)]$ *и* $g(0)=0$. *Тогда оператор, обратный к (37.67), существует и представим в любой из следующих форм:*

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda})^{-1} g(x) = x^{-1} \int_0^x I_0(\lambda \sqrt{x(x-t)})\, d\,[t\,(I^{-\alpha}_{0+}g)(t)], \tag{37.81}$$

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda})^{-1} g(x) = x^{-1}(\bar{I}^{-}_{1-\alpha,\lambda}\varphi)(x), \quad \varphi(x) = xg'(x) + (1-\alpha)\, g(x). \tag{37.82}$$

Доказательство. Формула (37.81) прямо следует из равенств (37.75), (37.78), (37.79), примененных к уравнению $(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda} f)(x) = g(x)$. Для вывода представления (37.82) введем обозначение

$$\frac{d}{dt}[t\,(I^{-\alpha}_{0+}g)(t)] = (I^{-\alpha}_{0+}\varphi)(x) \tag{37.83}$$

и применим к равенству (37.81) формулу (37.76). Тогда правая часть его примет вид $x^{-1}(\bar{I}^{-}_{1-\alpha,\lambda}\varphi)(x)$. Докажем, что $\varphi(x) = xg'(x) + (1-\alpha)\, g(x)$, откуда будет следовать представление (37.82). Для этого перепишем (37.83) в форме $\varphi(x) = I^{\alpha-1}_{0+} x^{1-\alpha} x^{\alpha} I^{-\alpha}_{0+} g(x)$ и применим равенство (10.12), предполагая $g(x)$ достаточно гладкой:

$$\varphi(x) = x^{\alpha} I^{-\alpha}_{0+} I^{\alpha-1}_{0+} x^{1-\alpha} g(x) =$$

$$= x^{\alpha} \frac{d}{dx}(x^{1-\alpha} g(x)) = (1-\alpha)\, g(x) + xg'(x). \tag{37.84}$$

Последнее равенство, очевидно, можно распространить и на функцию $g(x) \in AC([0, b])$. Все проведенные операции законны, если еще $g(0) = 0$ и $g(x) \in I^{\alpha}_{0+}(L_1(0, b))$. Теорема доказана.

Теорема 37.8. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $x^{-1}h(x) \in L_1(0, b)$ *и* $h(x) \in I^{\alpha}_{0+}(L_1(0, b))$. *Тогда оператор, обратный к* (37.68), *существует и представим в виде*

$$f(x) = x^{1-\alpha} \frac{d}{dx}[x^{\alpha} \bar{J}^{+}_{1-\alpha,\lambda} x^{-1} h(x)]. \tag{37.85}$$

Доказательство немедленно следует из формул (37.67), (37.68), (37.81) и теоремы 37.7 после замен $x^{\alpha}(x^{1-\alpha}g(x))'$ на $f(x)$, $xf(x)$ на $h(x)$ и α на $1-\alpha$. Условия на $h(x)$ обеспечивают существование оператора (37.85) и его представимость в виде (37.68).

4°. Уравнения композиционного типа. При решении задач математической физики иногда встречаются интегральные операторы 1-го рода с вольтерровскими ядрами, представляющие собой композиции более простых, обратимых в явном виде операторов. Характерные примеры таких уравнений композиционного типа рассматриваются в настоящем пункте.

А. Если в решении (40.28) гиперболического уравнения (40.19) положить $x=y$, обозначить $u(y, y)=\varphi(2y)$ и совершить замены

$$(1+\theta)\, y = t, \quad 2y = x, \quad \tau(t)\, t^{\mu+p-1} = f(t), \tag{37.86}$$

$$\frac{1}{l_3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1-\mu-2p} \varphi(x) = g(x)\,\Gamma(p),$$

придем к интегральному соотношению

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)}\, \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{x-t}{2x},\ \frac{\lambda^2 t(x-t)}{4}\right) f(t)\, dt = g(x), \tag{37.87}$$

содержащему в ядре функцию Гумберта (40.25).

К формуле обращения этого соотношения можно прийти двумя способами: рассмотрев решение другой краевой задачи для соответствую-

щего гиперболического уравнения (40.19) или же изучив структуру оператора (37.87). Продемонстрируем оба способа. При использовании первого рассмотрим 2-ю краевую задачу Коши—Гурса с условиями

$$u(x,\ x) = \varphi(2x), \quad u_y'(x,\ 0) = 0 \tag{37.88}$$

для уравнения (40.19). (Напомним, что при значении постоянной (40.31) функция (40.28) удовлетворяет условию задачи Коши $u_y'(x,\ 0)=0$ для этого уравнения.) В соответствии с работами М. Б. Капилевича [1, (5.1), (5.3)] и А. М. Гордеева [1] решение 2-й задачи Коши—Гурса принимает вид

$$u(x,\ y) = \int_0^{x-y} [\varphi'(t) + (\mu + p)\, t^{-1}\varphi(t)]\, \overline{H}(x,\ y;\ t/2,\ t/2)\, dt + \\ + \int_{x-y}^{x+y} [\varphi'(t) + 2^{-1}(\mu + p)\, \varphi(t)]\, R(x,\ y;\ t/2,\ t/2)\, dt, \tag{37.89}$$

где $\overline{H}$ и R — соответственно функции Грина—Адамара и Римана для уравнения (40.19). Их явные выражения через тройные ряды указаны в статье М. Б. Капилевича [3, с. 1481]. Положим в (37.89) $y=0$ и учтем условие $u(x,\ 0)=\tau(x)$, что приведет к равенству

$$\tau(x) = \int_0^x [\varphi'(t) + (\mu + p)\, t^{-1}\varphi(t)]\, \overline{H}(x,\ 0;\ t/2,\ t/2)\, dt. \tag{37.90}$$

Значение ядра этого равенства легко получить из формулы (5.31а) статьи М. Б. Капилевича [1]:

$$\overline{H}(x,\ 0,\ \eta,\ \eta) = \overline{\varkappa} 2^{2p} x^{-\mu} \eta^{\mu+2p} R_1^{-2p} \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ 1-p;\ -\frac{R_1^2}{2x\eta},\ -\frac{\lambda^2 R_1^2}{4}\right), \quad \overline{\varkappa} = \frac{2^{1-2p}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-p)\,\Gamma(p+1/2)}, \quad R_1^2 = x(x-2\eta), \quad p<1. \tag{37.91}$$

Подставив (37.91) в (37.90) и совершив замены (37.86), придем к равенству

$$f(x) = 2^{2p-1} l_3 \overline{\varkappa}\, \Gamma(p)\, x^{-1} \int_0^x [(g(t)\, t^{1-2p-\mu})_t' + (\mu + p)\, t^{-1} g(t)\, t^{1-\mu-2p}] \times \\ \times (x-t)^{-p} t^{\mu+2p} \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ 1-p;\ \frac{t-x}{2t},\ \frac{\lambda^2 x}{4}(t-x)\right) dt.$$

Отсюда, учтя величины $\overline{\varkappa}$, l_3 (из (40.31)) и продифференцировав по t, окончательно найдем формулу обращения уравнения (37.87) вида

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^p \frac{(x-t)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ 1-p;\ \frac{t-x}{2t},\ \frac{\lambda^2 x}{4}(t-x)\right) d(t^{1-p} g(t)), \quad 0<p<1. \tag{37.92}$$

Функции g и f в этих формулах естественно полагать такими, чтобы интегралы в них существовали, для чего достаточно условий $t^{\mu+1} g(t) \to 0$, $t^{2-\mu} g(t) \to 0$, $tf(t) \to 0$ при $t \to 0$ и условия $g \in AC^1([0,\ b])$.

Тот факт, что (37.92) действительно обращает уравнение (37.87), следует из теорем единственности решений исходных задач Коши и 2-й задачи Коши—Гурса для уравнения (40.19) при $\lambda = ib$, $b>0$.

Полученный результат в частных случаях совпадает с известными формулами обращения.

1. Если $\lambda=0$, то выражения (37.87), (37.92) в соответствии с (40.25), (1.80) перепишутся в виде

$$\int_0^x (x^2-t^2)^{(p-1)/2} P_{-\mu}^{1-p}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt = g(x), \tag{37.93}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^p (x^2-t^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{x}{t}\right) d\left(t^{1-p} g(t)\right). \tag{37.94}$$

Последнее можно также записать, вынеся производную за знак интеграла:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \eta^p (1-\eta^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{1}{\eta}\right)\frac{x}{\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x\eta)\,x^{1-p}\right)\eta^{1-p}d\eta =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^1 g(x\eta)\,x^{1-p}(1-\eta^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{1}{\eta}\right)d\eta =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x (x^2-t^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{x}{t}\right) g(t)\,dt. \tag{37.95}$$

Соотношения (37.93), (37.95) являются частными случаями (при $e=0$ и $n=1$) равенств (35.16), (35.31).

2. Если $\lambda=\mu=0$, то (37.87), (37.92) переходят во взаимно обратные формулы $(I_{0+}^{p} f)(x) = g(x)$ и $f(x) = \dfrac{d}{dx} I_{0+}^{1-p} g(x)$.

3. Если $\mu=0$, то (37.87), (37.92), согласно (40.25), (37.8), переписываются в форме соотношений $(\bar{I}_{p,\lambda}^{+} f)(x) = g(x)$ и $f(x) = x^{-1}(\bar{J}_{1-p,\lambda}^{-}\varphi_1)(x)$, где $\varphi_1(x) = xg'(x) + (1-p)\,g(x)$, ср. с (37.67), (37.82), (37.69).

Рассмотрим структуру оператора (37.87). Для этого вычислим композицию, предполагая $\operatorname{Re} p>0$ и учитывая обозначение (18.41):

$$I_{0+;x^2}^{p} x^{-1}(\bar{I}_{\alpha,\lambda}^{+} f)(x) = \int_0^x \frac{(x^2-y^2)^{p-1}}{\Gamma(p)}\frac{2y}{y}\,dy \int_0^y \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\, \bar{I}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t(y-t)}\right) f(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^k \frac{2}{(\alpha)_k\, k!}\times\right.$$

$$\left.\times \int_0^x \frac{f(t)\,t^k dt}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha)}\right]\int_t^x (x^2-y^2)^{p-1}(y-t)^{k+\alpha-1}\,dy =$$

$$= [\Sigma\ldots](x-t)^{p+k+\alpha-1}(x+t)^{p-1}\int_0^1 (1-\tau)^{p-1}\tau^{k+\alpha-1}\left(1-\frac{t-x}{t+x}\tau\right)^{p-1}d\tau =$$

$$= [\Sigma\ldots](x-t)^{p+k+\alpha-1}(x+t)^{p-1}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(p+\alpha+k)}\times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(1-p,\ \alpha+k;\ p+\alpha+k;\ \frac{t-x}{t+x}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^k \frac{2(2x)^{p-1}}{k!\,\Gamma(p+\alpha+k)} \int_0^x f(t)\, t^k (x-t)^{p+k+\alpha-1} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(1-p,\ p;\ p+\alpha+k;\ \frac{x-t}{2x}\right) dt = 2(2x)^{p-1} \int_0^x \frac{(x-t)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} \times$$

$$\times \Xi_2\left(p,\ 1-p;\ p+\alpha;\ \frac{x-t}{2x},\ \frac{\lambda^2}{4}\, t(x-t)\right) f(t)\, dt. \qquad (37.96)$$

Таким образом, мы пришли к оператору, отличающемуся от (37.87) лишь заменой параметров. Отсюда следует представление (37.87) в виде

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)} \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{x-t}{2x},\ \frac{\lambda^2 t}{4}(x-t)\right) f(t)\, dt =$$

$$= (2x)^{1-\mu} I^{\mu}_{0+;x^2} (2x)^{-1} (\bar{I}^{+}_{p-\mu,\lambda} f)(x), \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\mu > 0. \qquad (37.97)$$

В частности, из (37.97) при $\lambda=0$ получаем следующее разложение оператора (37.93) через композицию:

$$\int_0^x (x^2-t^2)^{(p-1)/2} P^{1-p}_{-\mu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = (2x)^{1-\mu} I^{\mu}_{0+;x^2} (2x)^{-1} I^{p-\mu}_{0+} f(x). \qquad (37.98)$$

Эта формула согласуется с (35.16), (35.30), если учесть операторное равенство $I^{-1}_{0+;x^2} I^{1}_{0+} = (2x)^{-1}$.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать теорему.

Теорема 37.9. *Пусть* $\operatorname{Re} p > 0$, $g(x) \in AC^1([0, b))$, $b < \infty$, *и* $t^{\mu+1} g(t) \to 0$, $t^{2-\mu} g(t) \to 0$ *при* $t \to 0$. *Тогда уравнение (37.87) в классе функций* $f(x) \in AC((0, b))$, $b < \infty$, *для которых* $tf(t) \to 0$ *при* $t \to 0$, *обратимо по формуле (37.92).*

Отметим еще, что с помощью формулы (37.82) решение уравнения (37.87) при соответствующих условиях представимо в виде композиции

$$f(x) = x^{-1} (\bar{J}^{-}_{1+\mu-p,\lambda} \varphi)(x), \quad \varphi(x) = 2^{\mu} x^{p-\mu} \frac{d}{dx} [x^{2+\mu-p} I^{-\mu}_{0+;x^2} x^{\mu-1} g(x)]. \qquad (37.99)$$

Б. Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \Xi_1\left(\alpha,\ \alpha',\ \beta;\ \gamma;\ 1-\frac{t}{x},\ \lambda(x-t)\right) f(t)\, dt = g(x), \quad \operatorname{Re}\gamma > 0, \qquad (37.100)$$

где

$$\Xi_1(\alpha,\ \alpha',\ \beta;\ \gamma;\ x,\ y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (\alpha')_k (\beta)_j}{(\gamma)_{j+k}\, j!\, k!} x^j y^k, \quad |x| < 1, \qquad (37.101)$$

— еще одна из функций Гумберта (см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 5.7(25)]). Это уравнение изучим в классе функций $Q_q = \{f : f(x) x^q \in L_1(0, b),\ b < \infty\}$. Справедлива следующая

Теорема 37.10. *Интегральное уравнение (37.100) имеет решение* $f \in Q_q$, $q < \min(0, \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta))$ (*причем* $q \leqslant 0$ *при* $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$) *тогда и только тогда, когда* $g(x) \in I^{\gamma}_{0+}(Q_q)$. *При этом решение единствен-*

но. Если еще $\min(\operatorname{Re}\alpha', \operatorname{Re}(\gamma-\alpha), \operatorname{Re}(\gamma-\beta))>0$, *то решение уравнения (37.100) может быть представлено в виде*

$$f(x)=e^{\lambda x} I_{0+}^{-\alpha'} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\alpha+\alpha'-\gamma} x^{\beta} I_{0+}^{-\alpha} x^{-\beta} g(x). \tag{37.102}$$

Доказательство. Как следует из определения (37.101) и формул 2.10(1), 2.10(12) справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1], при $x\to 1$ функция (37.101) имеет следующие асимптотические представления:

$$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; x, y)=$$

$$=\begin{cases} O((1-x)^{(\gamma-\alpha-\beta)}), & \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<0, \\ O(\ln(1-x)), & \gamma-\alpha-\beta=0, \\ O(1), & \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0. \end{cases} \tag{37.103}$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция из интеграла (37.100) при $t\to 0$ может быть записана в виде $t^q f(t)[O(t^{-q})+O(t^{\gamma-\alpha-\beta-q})]$, что обеспечивает существование этого интеграла. Применив теперь лемму 31.4 в случае $p=1$ и по отношению к классу Q_q, получим, что $g\in I_{0+}^{\gamma}(Q_q)$, если $f\in Q_q$. Обратное утверждение также следует из леммы 31.4.

Пусть теперь $g(x)\in I_{0+}^{\gamma}(Q_q)$ и выполняются условия второй части теоремы. Тогда по теореме 10.9 оператор $I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}$, см. (10.55), преобразует функцию $f\in Q_q$ в функцию $(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in I_{0+}^{\gamma-\alpha}(Q_q)$. Это означает, что $x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in L_1(0, b)$ и к последней функции можно применить оператор $I_{0+}^{\alpha+n}$, $\operatorname{Re}\alpha+n>0$. Рассмотрев $I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)$ как повторный интеграл, поменяв в нем порядок интегрирования и воспользовавшись интегральным представлением функции Ξ_1:

$$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; x, y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}\times$$

$$\times {}_1F_1(\alpha'; \gamma-\alpha; y(1-u))\,du, \quad \operatorname{Re}\alpha>0, \operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0, x\in[1, \infty),$$

получим соотношение

$$I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)=x^{-\beta}\int_0^x \frac{(x-t)^{\gamma+n-1}}{\Gamma(\gamma+n)}\Xi_1(\alpha+n, \alpha', \beta; \gamma+n;$$

$$1-t/x, \lambda(x-t))f(t)\,dt. \tag{37.104}$$

На основе (37.103), (37.104) можно заключить, что $x^{\beta}I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in I_{0+}^{\gamma+n}(Q_q)$, откуда $I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in I_{0+}^{\gamma+n-\beta}(L_1)$. Поэтому обе части (37.104) можно продифференцировать n раз, что приведет к равенству

$$I_{0+}^{\alpha}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)=x^{-\beta}\int_0^x \frac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\times$$

$$\times\Xi_1\left(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; 1-\frac{t}{x}, \lambda(x-t)\right)f(t)\,dt. \tag{37.105}$$

Приняв во внимание разложение (10.58), окончательно приходим к следующему композиционному представлению уравнения (37.100):

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\Xi_1\left(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; 1-\frac{t}{x}, \lambda(x-t)\right)f(t)\,dt=$$

$$=x^{\beta}I_{0+}^{\alpha}x^{-\beta}I_{0+}^{\gamma-\alpha-\alpha'}e^{\lambda x}I_{0+}^{\alpha'}e^{-\lambda x}f(x)=g(x). \tag{37.106}$$

Обратив теперь каждый из операторов этой композиции, получим искомую формулу (37.102). Теорема доказана.

5°. W-преобразование и его обращение. В этом пункте рассмотрим некоторые свойства так называемого W-преобразования, которое вводится по аналогии с G-преобразованием из § 36 и является обобщением так называемых интегральных преобразований по индексу, примерами которых являются известные преобразования Конторовича—Лебедева и Мелера—Фока (см. § 1, п. 4° и формулы (37.109), (37.110), (37.141) ниже).

Определение 37.1. *W-преобразованием функции $f(x)$ назовем значение следующего интеграла:*

$$(Wf)(x) \equiv \left(W_{pq}^{mn} \left| \begin{matrix} \nu, & (\alpha_p) \\ & (\beta_q) \end{matrix} \right| f(t) \right)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Gamma[\nu - ix - s,\ \nu + ix - s] \times$$

$$\times \Gamma \left[\begin{matrix} (\beta_m) + s, & 1 - (\alpha_n) - s \\ (\alpha_p^{n+1}) + s, & 1 - (\beta_q^{m+1}) - s \end{matrix} \right] f^*(1 - s)\, ds, \qquad (37.107)$$

где ν ($\operatorname{Re}\nu > 1/2$), а также компоненты векторов (α_p), (β_q) (см. пояснения к (36.3)) — некоторые комплексные параметры, удовлетворяющие условиям (36.5), $f^*(s)$ — преобразование Меллина (1.112) функции $f(x)$, контур $\sigma = \{s, \operatorname{Re} s = 1/2\}$.

Очевидно, имеет место следующая формула, связывающая G- и W-преобразования:

$$(Wf)(x) = \left(G_{p+2,q}^{m,n+2} \left| \begin{matrix} 1 - \nu + ix, & 1 - \nu - ix, & (\alpha_p) \\ & & (\beta_q) \end{matrix} \right| f_1(y) \right)(1), \qquad (37.108)$$

где $f_1(y) = y^{-1} f(y^{-1})$, см. (36.3).

Определение 37.2. *Прямым и обратным преобразованиями Конторовича—Лебедева назовем соответственно преобразования*

$$K_{ix}\{f(t)\} = \int_0^\infty K_{ix}(t) f(t)\, dt, \qquad (37.109)$$

$$K_{ix}^{-1}\{g(t)\} = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty t \operatorname{sh} \pi t K_{it}(x)\, g(t)\, dt, \qquad (37.110)$$

где $K_{ix}(t)$ — функция Макдональда (1.85) с мнимым индексом ($\nu = ix$).

Справедливы следующие теоремы, в формулировках и доказательствах которых широко используется терминология из § 36.

Теорема 37.11. *W-преобразование (37.107) с характеристикой $(c^* + 1, \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2)$, где $\operatorname{Re}\nu > 1/2$, существует в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\nu}^{-1}(L)$ тогда и только тогда, когда*

$$2 \operatorname{sign}(c^* + c + 1) + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2) \geqslant 0. \qquad (37.111)$$

Доказательство следует из теоремы 36.2, поскольку в силу (37.108) W-преобразование можно рассматривать как G-преобразование, вычисленное в точке 1 и имеющее характеристику $(c^* + 1, \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2)$.

Теорема 37.12. *Пусть выполняются условия (36.22) и неравенство*

$$4 \operatorname{sign}(c^* + 1) + 2 \operatorname{sign}(\gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2) + \operatorname{sign}|2 + p - q| > 0. \qquad (37.112)$$

Тогда W-преобразование (37.107) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ существует и может быть представлено по формуле

$$(Wf)(x) = \int_0^\infty G_{p+2,q}^{m,n+2} \left(t \left| \begin{matrix} 1 - \nu + ix, & 1 - \nu - ix, & (\alpha_p) \\ & & (\beta_q) \end{matrix} \right. \right) f(t)\, dt. \qquad (37.113)$$

Доказательство следует из теоремы 36.3 с учетом сказанного в доказательстве теоремы 37.11.

Теорема 37.13. *Пусть выполняется условие (36.19), а также (37.111). Тогда в пространстве* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *W-преобразование может быть представлено через композицию G-преобразования (36.3) и прямого преобразования Конторовича—Лебедева (37.109) по формуле*

$$(Wf)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix}\left\{t^{2\nu-1}\left(G_{pq}^{mn}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\(\beta_q)\end{matrix}\right. f_1(y)\right)\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \qquad (37.114)$$

$f_1(y)$ *см. в (37.108).*

Доказательство. Из теоремы 37.11 следует, что W-преобразование в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ при условиях данной теоремы существует. Приняв во внимание формулу 9.3(1) из книги О. И. Маричева [10], которую можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\Gamma[\nu - ix - s,\ \ \nu + ix - s] = \int_0^\infty K_{2ix}(2\sqrt{y})\, y^{\nu-s-1}dy, \qquad (37.115)$$

соотношение (37.107) преобразуем к следующему:

$$(Wf)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\left|\begin{matrix}(\beta_m) + s,\ 1 - (\alpha_n) - s\\(\alpha_p^{n+1}) + s,\ 1 - (\beta_q^{m+1}) - s\end{matrix}\right| f^*(1-s)\,ds \times$$

$$\times\, 2\int_0^\infty K_{2ix}(2\sqrt{y})\, y^{\nu-s-1}dy. \qquad (37.116)$$

Условие (36.19) обеспечивает возможность изменения порядка интегрирования в (37.116) на основе теоремы Фубини 1.1, что после замены переменной $2\sqrt{y}=t$ и использования определения (36.3) легко приводит к представлению (37.114). Теорема доказана.

Теорема 37.14. *Пусть* $f(x)\in\mathfrak{M}^{-1}(L)$. *Тогда преобразование Конторовича—Лебедева (37.109) имеет следующее композиционное представление через два прямых и одно обратное преобразования Лапласа (36.31), (36.32), (1.119):*

$$K_{i\sqrt{x}}\{f(t)\} = \sqrt{\pi}x^{-1/2}\Lambda_-^{-1}x^{1/2}\Lambda_+x^{-1/2}L\{f(t);\ \mathrm{ch}(2/\sqrt{x})\}. \qquad (37.117)$$

Доказательство. Из интегрального представления функции Макдональда

$$K_{ix}(t) = \int_0^\infty e^{-t\mathrm{ch}u}\cos uxdu \qquad (37.118)$$

(см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.4.18.4]) следует возможность представления (37.109) в виде

$$K_{ix}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty e^{-t\mathrm{ch}u}\cos uxdu. \qquad (37.119)$$

Поскольку $f(t)\in\mathfrak{M}^{-1}(L)$, то из (37.119) вытекает оценка

$$|K_{ix}\{f(t)\}| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\infty dt\int_\sigma F(s)\,t^{-s}ds\int_0^\infty e^{-t\mathrm{ch}u}\cos uxdu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\sigma |F(s)|\,ds\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t\mathrm{ch}u}t^{-1/2}dtdu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma |F(s)|\,ds\int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi}du}{\sqrt{\mathrm{ch}\,u}} < +\infty,$$

которая позволяет поменять порядок интегрирования в (37.119):

$$K_{ix}\{f(t)\} = \int_0^\infty \cos uxdu \int_0^\infty e^{-t\operatorname{ch} u} f(t)\,dt.$$

Совершив теперь замену переменной $u = 2/\sqrt{u'}$, поменяв x на $\sqrt{x}$ и применив факторизацию косинус-преобразования Фурье, получающуюся из формул (36.62), (36.63) при $\nu = -1/2$ с учетом равенства $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\cos z$, придем к соотношению (37.117). Теорема доказана.

Теорема 37.15. *Пусть* $f \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, $1/2 < \operatorname{Re}\nu < 3/4$ *и выполняется неравенство*

$$2\operatorname{sign}(c + c^*) + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^* - 1/4) \geqslant 0. \tag{37.120}$$

Тогда обратный оператор W-преобразования (37.107) ($(Wf)(x) = g(x)$) *имеет вид*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(G_{p,q}^{q-m,\,p-n}\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}), & -(\alpha_n)\\ -(\beta_q^{m+1}), & -(\beta_m)\end{matrix}\right| y^{1/2-\nu} K_{2i\sqrt{y}}^{-1}\left\{g\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\}\right)(x). \tag{37.121}$$

Если, кроме того, $q - m - n > m + n - p$, $\operatorname{Re}\beta_j < 1/4$, $j = m+1, \ldots, q$, $xe^{2\pi x} g(x) \in L_1(0, \infty)$ *и выполняются условия* (36.22), *то равенство* (37.121) *может быть представлено в форме*

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2 x}\int_0^\infty t\operatorname{sh} 2\pi t\, G_{p+2,q}^{q-m,\,p-n+2}\left(x\left|\begin{matrix}1+\nu+it,\\ 1-(\beta_q^{m+1}),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}1+\nu-it, & 1-(\alpha_p^{n+1}), & 1-(\alpha_n)\\ & 1-(\beta_m)\end{matrix}\right) g(t)\,dt. \tag{37.122}$$

Доказательство. Применив оператор $K_{2i\sqrt{x}}^{-1}\{g(\tau/2)\}$ к W-преобразованию $(Wf)(x/2) = g(x/2)$, получим соотношения

$$K_{2i\sqrt{x}}^{-1}\left\{g\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{x})(Wf)\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{x})\,d\tau\,\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\left(\nu - s - \frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\nu - s + \frac{i\tau}{2}\right)\times$$

$$\times\,\Gamma\left[\begin{matrix}(\beta_m) + s, & 1-(\alpha_n) - s\\ (\alpha_p^{n+1}) + s, & 1-(\beta_q^{m+1}) - s\end{matrix}\right] f^*(1-s)\,ds. \tag{37.123}$$

Условие (37.120) дает возможность воспользоваться результатами работы Ву Ким Туана, С. Б. Якубовича [1], обеспечивающими возможность изменения порядка интегрирования в (37.123) при условии $1/2 < \operatorname{Re}\nu < 3/4$. Вычислив теперь внутренний интеграл по формуле (19) из указанной работы:

$$\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{x})\,\Gamma(\nu - s - i\tau/2)\,\Gamma(\nu - s + i\tau/2)\,d\tau = 2\pi^2 x^{\nu-s}, \tag{37.124}$$

равенство (37.123) перепишем в виде

$$K_{2i\sqrt{x}}^{-1}\left\{g\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\} = 2x^{\nu-1/2}\left(G_{pq}^{mn}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\ (\beta_q)\end{matrix}\right|\frac{1}{y} f\left(\frac{1}{y}\right)\right)(x). \tag{37.125}$$

Теперь для получения представления (37.121) достаточно воспользоваться теоремой 36.6 по отношению к G-преобразованию (37.125) и формулами отражения и сдвига (1.96), (1.97) для G-функции.

Докажем теперь возможность представления решения в виде (37.122). Поскольку $q-m-n>m+n-p$ и выполняются условия (36.22), по теореме 36.3 формулу (37.121) можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty G_{p,q}^{q-m,p-n}\left(xy\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}),&-(\alpha_n)\\-(\beta_q^{m+1}),&-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)y^{-\nu}dy\times$$

$$\times\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{y})\,(Wf)\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau. \qquad (37.126)$$

Теперь для получения представления (37.122) достаточно применить формулу

$$\int_0^\infty y^{-\nu}K_{i\tau}(2\sqrt{y})\,G_{p,q}^{q-m,p-n}\left(xy\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}),&-(\alpha_n)\\-(\beta_q^{m+1}),&-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}G_{p+2,q}^{q-m,p-n+2}\left(x\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}),&-(\alpha_n)\\-(\beta_q^{m+1}),&-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)$$

и свойство (1.97) G-функции после изменения порядка интегрирования в (37.126). Такое изменение законно в силу условий $\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau g(\tau/2)\in L_1(0,\infty)$, $\mathrm{Re}\,\beta_j<1/4$, $j=m+1,\ldots,q$, и оценки

$$\left|\int_0^\infty G_{p,q}^{q-m,p-n}\left(xy\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}),&-(\alpha_n)\\-(\beta_q^{m+1}),&-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)y^{-\nu}K_{i\tau}(2\sqrt{y})\,dy\right|<$$

$$<\mathrm{const}\int_0^\infty y^{-\mathrm{Re}\,\nu}(xy)^{-1/4}K_0(2\sqrt{y})\,dy<+\infty.$$

Теорема доказана.

6°. Использование дробных интегралов при обращении W-преобразования. Пример. Как было показано в теореме 37.13, W-преобразование представимо через композицию, включающую G-преобразование (36.3). Последнее же может быть факторизовано через операторы (36.31), (36.32), которые в силу теоремы 36.10 после попарного объединения могут приводить к операторам дробного интегродифференцирования. Для более подробного изучения таких преобразований остановимся на исследовании важного частного случая W-преобразования (37.107), который обобщает известное преобразование Мелера—Фока, а именно на преобразовании, задаваемом равенством

$$(F_3f)(x)=\left(W_{13}^{01}\left|\begin{matrix}\nu,&(\alpha_1)\\&(\beta_3)\end{matrix}\right|f(t)\right)(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{\Gamma(\nu-ix-s)\,\Gamma(\nu+ix-s)\,\Gamma(1-\alpha_1-s)}{\Gamma(1-\beta_1-s)\,\Gamma(1-\beta_2-s)\,\Gamma(1-\beta_3-s)}f^*(1-s)\,ds, \qquad (37.127)$$

где $\mathrm{Re}\,\nu>1/2$, а параметры α_1, β_1, β_2, β_3 удовлетворяют условиям (36.5). Будем называть его F_3-преобразованием, поскольку ядро интеграла (37.127) имеет вид (10.47) и связано с функцией Горна F_3 (10.45).

Выделив из ядра функции $\Gamma(\nu-ix-s)$, $\Gamma(\nu+ix-s)$, для оставшихся четырех гамма-функций посчитаем характеристику (36.7):

$$c^*=-1,\quad \gamma^*=\mathrm{Re}\,(\alpha_1-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)). \qquad (37.128)$$

Теперь несложно сформулировать следующие 4 теоремы, являющиеся частными случаями теорем 37.11—37.15.

Теорема 37.16. *F_3-преобразование (37.127) с характеристикой* $(0, \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2)$, *где* $\operatorname{Re}\nu > 1/2$, *существует в пространстве* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *тогда и только тогда, когда*

$$2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2) \geqslant 0. \tag{37.129}$$

Теорема 37.17. *Пусть выполняются условия (36.22) по отношению к параметрам* α_1, β_1, β_2, β_3 *и*

$$\gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2 > 0. \tag{37.130}$$

Тогда F_3-преобразование (37.127) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ *существует и представимо в виде*

$$(F_3 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-2\nu-\beta)} \int_1^\infty (t-1)^{1-2\nu-\beta} F_3\left(1-\nu-\beta-ix,\ a',\right.$$

$$\left. 1-\nu-\beta+ix,\ b';\ 2-2\nu-\beta;\ 1-t,\ 1-\frac{1}{t}\right) f(t)\,dt, \tag{37.131}$$

где

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2,\quad \beta_1 = a',\quad \beta_2 = b',\quad \beta_3 = \beta. \tag{37.132}$$

Теорема 37.18. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, $1/2 < \operatorname{Re}\nu < 3/4$ *и*

$$2\operatorname{sign}(c-1) + \operatorname{sign}(\gamma - \operatorname{Re}\beta - 1/4) \geqslant 0. \tag{37.133}$$

Тогда при условиях

$$\operatorname{Re}\beta < 1/4,\quad \operatorname{Re}a' < 1/4,\quad \operatorname{Re}b' < 1/4 \tag{37.134}$$

и функции $xe^{2\pi x} g(x) \in L(0, \infty)$ *имеет место следующая формула обращения F_3-преобразования* ($g(-x) \overset{\det}{=} g(x)$):

$$(F_3^{-1} g)(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\nu-a'+it)\Gamma(1-\nu-b'+it)\Gamma(1-\nu-\beta+it)}{\Gamma(1-\nu-a'-b'+it)\,\Gamma(2it)} \times$$

$$\times\ {}_3F_2(1-\nu-a'+it,\quad 1-\nu-b'+it,\quad 1-\nu-\beta+it;$$

$$1-\nu-a'-b'+it,\quad 2it+1;\quad 1/x)\, x^{it} g(t)\,dt. \tag{37.135}$$

Теорема 37.19. *Пусть* $\operatorname{Re}\nu > 1/2$, *а параметры* $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$, β_1, β_2, $\beta_3 = \beta$ *удовлетворяют условиям (36.22) при* $m = 0$, $n = p = 1$, $q = 3$ *и выполняется неравенство*

$$2\operatorname{sign}(c-1) + \operatorname{sign}(\gamma - \operatorname{Re}\beta) \geqslant 0. \tag{37.136}$$

Тогда в классе $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *справедливы следующие типы факторизаций F_3-преобразования через преобразование Конторовича—Лебедева (37.109), видоизмененные преобразования Лапласа (36.31), (36.32) и операторы дробного интегродифференцирования:*

$$(F_3 f)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix}\left\{\left[t^{2\nu-1}\, t^b \Lambda_-^{-1}\, t^e \Lambda_-^{-1}\, t^d\, I_{0+}^{\delta}\, t^{\nu_1} \left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \tag{37.137}$$

$$(F_3 f)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix}\left\{\left[t^{2\nu-1} t^b\, \Lambda_-^{-1}\, t^e\, I_{0+}^{\delta}\, t^d \Lambda_-^{-1}\, x^{\nu_1}\left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \tag{37.138}$$

$$(F_3 f)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix}\left\{\left[t^{2\nu-1} t^b I_{0+}^{\delta} t^{\varepsilon} \Lambda_-^{-1} t^d \Lambda_-^{-1} t^{\gamma_1}\left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}. \tag{37.139}$$

Значения параметров b, ε, d, δ, γ_1 *с условием* $\operatorname{Re}\delta>0$ *для каждой из этих трех формул приводятся соответственно в табл. 37.1—37.3.*

Доказательство следует из теоремы 36.5 с учетом сказанного в доказательстве теоремы 37.11.

В частных случаях, как уже отмечалось, F_3-преобразование включает преобразования Олевского и Мелера—Фока, которые получаются из (37.107) соответственно при $a'=0$ и $a'=0$, $\beta=1/2-\nu$ (с учетом (1.79)):

$$({}_2F_1 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-2\nu-\beta)} \int_1^{\infty} (t-1)^{1-2\nu-\beta} {}_2F_1(1-\nu-\beta-ix,\ 1-\nu-\beta+ix;$$

$$2-2\nu-\beta;\ 1-t) f(t)\, dt, \tag{37.140}$$

$$g(x) = \int_1^{\infty} t^{1/4-\nu/2} (t-1)^{1/4-\nu/2} P^{\nu-1/2}_{-1/2+ix}(2t-1) f(t)\, dt \tag{37.141}$$

(эти формулы отличаются от представлений (8.55) и (8.42) из книги О. И. Маричева [10] некоторыми заменами переменных и функций). Условие (37.130) для формул (37.140) и (37.141) соответственно приобретает вид $2-2\operatorname{Re}\nu-\operatorname{Re}\beta>0$ и $3/2-\operatorname{Re}\nu>0$, и в силу ограничения $1/2<\operatorname{Re}\nu<3/4$ из теоремы 37.15 оно выполняется.

По отношению к преобразованию Мелера—Фока вида (37.141) из теоремы 37.19 следует

Теорема 37.20. *Пусть* $1/2<\operatorname{Re}\nu<3/4$ *и справедливо неравенство*

$$2\operatorname{sign}(c-1)+\operatorname{sign}(\gamma-\operatorname{Re}\nu-1/2)\geqslant 0. \tag{37.142}$$

ТАБЛИЦА 37.1

b	ε	d	δ	γ_1
$a'-1$	$b'-a'$	$1-b'+\beta$	$a'+b'-\beta$	$-a'-b'$
$a'-1$	$\beta-a'$	$1+b'-\beta$	a'	$-a'-b'$
$\beta-1$	$b'-a'$	$1+a'-b'$	b'	$-a'-b'$

ТАБЛИЦА 37.2

b	ε	d	δ	γ_1
$a'-1$	$1+b'-a'$	$\beta-a'-b'-1$	a'	$1-\beta$
$\beta-1$	$1+b'-\beta$	$b'-1$	a'	$1-a'$
$a'-1$	$1+\beta-a'$	$a'-1$	$a'+b'-\beta$	$1-b'$

ТАБЛИЦА 37.3

b	ε	d	δ	γ_1
b'	$\beta-a'-b'-1$	$a'-\beta$	a'	$1-a'$
b'	$\beta-a'-b'-1$	$\beta-a'$	a'	$1-b'$
β	$-a'-1$	$a'-b'$	$a'+b'-\beta$	$1-a'$

Тогда преобразование (37.141) можно факторизовать в классе $\mathfrak{M}_{c,\nu}^{-1}(L)$ *по формуле*

$$g(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix}\left\{\left(t^{2\nu-1}t^{b}\,\Lambda_{-}^{-1}\,t^{\varepsilon}\Lambda_{-}^{-1}\,t^{d}\left(\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \quad (37.143)$$

где параметры принимают значения $b = -1$, $\varepsilon = 1/2 - \nu$, $d = 1/2 + \nu$ *или* $b = -1/2 - \nu$, $\varepsilon = \nu - 1/2$, $d = 1$.

§ 38. ПРИЛОЖЕНИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решения многих прикладных задач механики со смешанными условиями сводятся к так называемым парным и тройным интегральным уравнениям, которые характерны тем, что искомая функция на разных отрезках задается различными интегральными соотношениями. Достаточно подробное изложение элементов теории таких уравнений, в том числе обзоры различных методов их решения, можно найти, например, в монографиях И. Снеддона (I. N. Sneddon [3, 7 или 6]), Я. С. Уфлянда [1] и обзорной статье Г. Я. Попова [1]. Остановимся на рассмотрении нескольких характерных примеров применения метода дробного интегродифференцирования для сведения парных и тройных уравнений к одному уравнению Фредгольма 2-го рода, теория которого хорошо известна.

1°. Парные уравнения.

Пример 38.1. При исследовании смешанных краевых задач математической физики с помощью преобразования Ханкеля часто встречаются парные интегральные уравнения с функциями Бесселя (1.83) в ядрах вида

$$\begin{gathered}\int_0^\infty t^{-2\alpha}[1 + R(t)]\,\Psi(t)\,J_\mu(xt)\,dt = F(x), \quad 0 < x < 1,\\ \int_0^\infty t^{-2\beta}\Psi(t)\,J_\nu(xt)\,dt = G(x), \quad 1 < x < \infty,\end{gathered} \quad (38.1)$$

где $R(t)$, $F(x)$ и $G(x)$ — известные, а $\Psi(t)$ — неизвестная функции. Для преобразования (38.1) к форме, удобной для использования операторов Кобера (18.5), (18.6), осуществим следующие замены:

$$\begin{gathered}\psi(y) = y^{-1/2}\,\Psi(2\sqrt{y}), \quad f(x) = 2^{2\alpha}x^{-\alpha}F(\sqrt{x}),\\ g(x) = 2^{2\beta}x^{-\beta}G(\sqrt{x}), \quad \mathrm{k}(y) = R(2\sqrt{y}).\end{gathered} \quad (38.2)$$

Тогда с помощью оператора (18.19) эти уравнения перепишутся в виде

$$S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1}(1 + \mathrm{k})\,\psi = f, \quad S_{\nu/2-\beta,2\beta,1}\psi = g, \quad (38.3)$$

где функция f задана на интервале $I_1 = (0, 1)$, а g — на $I_2 = (1, \infty)$.

Рассмотрим вначале случай $\mathrm{k}(y) \equiv 0$. Введем обозначение

$$\lambda = (\mu + \nu)/2 + \beta - \alpha. \quad (38.4)$$

Применив к равенствам (38.3) соответственно операторы (18.5) и (18.6) и воспользовавшись формулами (18.21), придем к равенствам

$$\begin{gathered}I_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}^{+}f = I_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}^{+}S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1}\psi = S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\psi,\\ K_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}^{-}g = K_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}^{-}S_{\nu/2-\beta,2\beta,1}\psi = S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\psi.\end{gathered} \quad (38.5)$$

Пусть функция h задается по формуле

$$h = \begin{cases} I_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}^{+}f, & x \in I_1,\\ K_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}^{-}g, & x \in I_2.\end{cases} \quad (38.6)$$

Тогда соотношения (38.5) можно записать в виде одного уравнения

$$S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\psi = h, \tag{38.7}$$

формула обращения которого в силу (18.20) имеет вид

$$\psi = S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}\, h. \tag{38.8}$$

Подставив сюда значение (38.6) и совершив обратные замены (38.2), придем к решению $\Psi(t)$ исходных парных уравнений (38.1) при $R(t)\equiv 0$ в явном виде. Все проведенные операции законны при соответствующих условиях на параметры и функции.

Решение уравнений (38.1) можно получить и иным способом. Для этого функцию f представим в виде $f=f_1+f_2$, где

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{на } I_1, \\ 0 & \text{на } I_2, \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} 0 & \text{на } I_1, \\ f & \text{на } I_2, \end{cases} \tag{38.9}$$

и аналогично запишем $g = g_1 + g_2$. Тогда в силу (38.5) имеем

$$I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda} g. \tag{38.10}$$

Поскольку функции f_1 и g_2 заданы, то (38.10) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных f_2 и g_1 вида

$$I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f_2 - K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}\, g_1 = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda} g_2 - I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f_1. \tag{38.11}$$

На интервале I_1 первый член слева исчезает и получается соотношение, из которого функцию g_1 можно найти по второй формуле (18.17). Значит, функция $g=g_1+g_2$ будет найдена. Выразив теперь функцию ψ из второй формулы (38.3) через g с помощью формулы обращения (18.20), окончательно придем к представлению решения в виде

$$\psi = S_{\nu/2+\beta,-2\beta,1} g. \tag{38.12}$$

Соотношение (38.11) можно рассмотреть на интервале I_2. Тогда его второй член слева обратится в нуль, и после аналогичных рассуждений можно прийти к представлению решения в другом виде:

$$\psi = S_{\mu/2+\alpha,-2\alpha,1} f. \tag{38.13}$$

Можно показать, что построенные решения (38.8), (38.12), (38.13) эквивалентны между собой.

Остановимся теперь на случае (38.1) с произвольной функцией $R(t)$. Полученное выше решение (38.8) частного случая $R(t)\equiv 0$ будем использовать как «пробное» решение, содержащее некоторую неизвестную функцию $h=h_1+h_2$ вида (38.9). Подставив его в (38.3), придем к системе:

$$f = S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}\, h + S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1}\, \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h,$$

$$g = S_{\nu/2-\beta,2\beta,1} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h = K^{-}_{\nu/2-\beta,\lambda-\nu} h. \tag{38.14}$$

Обратив второе из этих уравнений по формуле из (18.17), найдем функцию h на интервале I_2: $h_2 = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda} g_2$. А первое из этих уравнений на интервале I_1, приняв во внимание равенство $h = h_1 + h_2$ и первую из формул (18.22), можно записать в виде

$$I^{+}_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda} h_1 + S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1} \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h_1 =$$

$$= f - S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1} \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h_2. \tag{38.15}$$

Обратив теперь первый оператор по формуле из (18.17) и воспользовавшись первой из формул (18.21), окончательно придем к соотношению

$$h_1 + S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\, \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}\ h_1 = H,$$

$$H = I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f - S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1} \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h_2$$

на интервале I_1. При соответствующих условиях на заданные функции оно представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода относительно функции h_1. Его ядро содержит функцию k, а правая часть является известной функцией, так как входящая в нее функция h_2 была найдена ранее. Исследовав и построив решение этого уравнения, можно найти функцию h, а затем по формулам (38.8), (38.2) и решение исходной системы (38.1).

Пример 38.2. Рассмотрим здесь парные уравнения вида

$$\int_k^\infty t^{-\mu-\nu}(t^2-k^2)^\beta J_\mu(xt)\,\Psi(t)\,dt = F(x),\ 0<x<1, \tag{38.16}$$

$$\int_k^\infty J_\nu(xt)\,\Psi(t)\,dt = G(x),\ 1<x<\infty,$$

где $k \geqslant 0$. Как и в предыдущем примере, обозначим $I_1 = (0,\ 1)$, $I_2 = (1,\ \infty)$. После замены

$$\Psi(t) = t^{\nu+1}\psi(t),\ F(x) = (x/2)^{\mu-2\beta} f(x),\ G(x) = (2/x)^\nu g(x) \tag{38.17}$$

и использования обозначения (37.47) уравнения (38.16) принимают вид

$$S\begin{pmatrix}0, & 0, & k\\ \beta, & \mu-2\beta, & \beta\end{pmatrix}\psi(x) = f(x),\ x\in I_1;\ S\begin{pmatrix}0, & 0, & k\\ \nu, & -\nu, & 0\end{pmatrix}\psi(x) = g(x),\ x\in I_2. \tag{38.18}$$

Применив к (38.18) соответственно операторы (37.45) и (37.46) и воспользовавшись свойствами (37.60), (37.61), придем к одному уравнению

$$S\begin{pmatrix}0, & k, & k\\ \beta, & -\beta, & \beta/2\end{pmatrix}\psi(x) = h(x),\ x\in I_1\cup I_2, \tag{38.19}$$

где $h = h_1 + h_2$ (см. (38.9)) и

$$h_1(x) = J_{ik}(\mu-\beta,\ \beta-\mu) f(x),\ h_2(x) = R_k(\beta,\ \nu-\beta) g(x). \tag{38.20}$$

Воспользовавшись теперь формулой обращения (37.65), найдем

$$\psi(x) = S\begin{pmatrix}k, & 0, & 0\\ 0, & \beta, & \beta/2\end{pmatrix} h(x), \tag{38.21}$$

откуда после обратной замены (38.17) несложно выразить решение исходной системы (38.16) в явном виде.

Пример 38.3. Исследуем теперь парные уравнения иного типа:

$$P^\mu\{H(\tau)\psi(\tau);\ x\} = f(x),\ 0\leqslant x\leqslant a;$$
$$P^\mu\{\psi(\tau);\ x\} = g(x),\ a<x<\infty,\ |\mu|<1/2, \tag{38.22}$$

где

$$P^\mu\{\psi(\tau);\ x\} = \int_0^\infty P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\, x)\,\psi(\tau)\,d\tau,\ 0\leqslant x<\infty, \tag{38.23}$$

— обратное обобщенное интегральное преобразование Мелера—Фока с присоединенной функцией Лежандра $P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(z)$ (1.79) в ядре. (Здесь отметим, что если во второй из формул (38.22) заменить $\psi(\tau)$ на $\pi^{-1}\tau\mathrm{sh}\,\tau\pi\times$ $\times\Gamma(1-\nu+i\tau)\Gamma(1-\nu-i\tau)g(\tau)$, $g(x)$ на $2^{\nu-3/2}\,\mathrm{sh}^{1/2-\nu}x\, f(\mathrm{ch}^2(x/2))$ и положить

$\mu = 1/2 - \nu$, то в силу формул (8.42), (8.43) из книги О. И. Маричева [10] получится обращение прямого видоизмененного преобразования Мелера — Фока (37.141). Функция $H(\tau)$ в (38.22) предполагается известной.

Введем аналоги операторов Эрдейи — Кобера, определяемые через следующие дробные интегралы от функции по другой функции $\operatorname{ch} x$ (§ 18, п. 2°):

$$I_{\pm\mu}\{\varphi(t);\ x\} = (\pi/2)^{\pm 1/2}\Gamma^{-1}(1/2 \mp \mu)(\operatorname{sh} x)^{-(\mu\mp\mu)/2} \times$$

$$\times \int_0^x (\operatorname{sh} t)^{(1+\mu\pm 1\pm\mu)/2} (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{-1/2\mp\mu} \varphi(t)\, dt,\ |\mu| < 1/2, \qquad (38.24)$$

$$K_{\pm\mu}\{\varphi(t);\ x\} = (\pi/2)^{\mp 1/2}\Gamma^{-1}(1/2 \mp \mu)(\operatorname{sh} x)^{(\mu\pm\mu)/2} \times$$

$$\times \int_x^\infty (\operatorname{sh} t)^{(1-\mu\mp 1\pm\mu)/2} (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x)^{-1/2\mp\mu} \varphi(t)\, dt,\ |\mu| < 1/2. \qquad (38.25)$$

Обратные к ним операторы, которые здесь не выписываются, обозначим соответственно через $I_{\pm\mu}^{-1}$ и $K_{\pm\mu}^{-1}$. Тогда прямым вычислением можно установить следующие две формулы композиции:

$$I_{-\mu}^{-1}\{P^\mu\{\chi(\tau);\ t\};\ x\} = (\mathcal{F}_c\chi)(x),\ \chi \in L_1(0,\ \infty), \qquad (38.26)$$

$$K_\mu^{-1}\{P^\mu\{\chi(\tau);\ t\};\ x\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\chi(t)}{\omega(t)\operatorname{th}\pi t};\ x\right\},\ \frac{\chi}{\omega} \in L_1(0,\ \infty), \qquad (38.27)$$

где $|\mu| < 1/2$, $\omega(t) = \Gamma(1/2 + \mu + it)\,\Gamma(1/2 + \mu - it)\,[\Gamma(1/2+it)\,\Gamma(1/2-it)]^{-1}$, а $\mathcal{F}_c$ и $\mathcal{F}_s$ — косинус- и синус-преобразования Фурье (1.108), (1.109).

Введем обозначение

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ G_2(x), & a < x < \infty, \end{cases} \qquad (38.28)$$

где $G_2(x) = \sqrt{2/\pi}K_\mu^{-1}\{g(t);\ x\}$, $a < x < \infty$, а $G_1(x)$ — некоторая неизвестная пока функция. Тогда, применив к уравнениям (38.22) соответственно операторы $I_{-\mu}^{-1}$ и K_μ^{-1} и учтя (38.26), (38.27), придем к соотношениям

$$\mathcal{F}_c\{H(\tau)\psi(\tau);\ x\} = F(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a;\ \mathcal{F}_s\left\{\frac{\psi(\tau)}{\omega(\tau)\operatorname{th}\tau\pi};\ x\right\} = G(x),\ a < x < \infty, \qquad (38.29)$$

где $F(x) = \sqrt{2/\pi}\, I_{-\mu}^{-1}\{f(t);\ x\}$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Обратив второе из них, с помощью формулы (1.111) найдем значение

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\pi}\omega(\tau)\operatorname{th}\pi\tau\left[\binom{a}{0}(\mathcal{F}_sG_1)(\tau) + \binom{\infty}{a}(\mathcal{F}_sG_2)(\tau)\right], \qquad (38.30)$$

где символ $\binom{b}{a}(\mathcal{F}_sG)(\tau)$ здесь и ниже означает, что в соответствующем интеграле (1.109) интегрирование ведется лишь по интервалу $(a,\ b)$ (вместо $(0,\ \infty)$). Для нахождения неизвестной функции G_1 подставим (38.30) в первое из уравнений (38.29), в результате чего получится интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. После его решения и нахождения функции G (38.28) искомую функцию $\psi(\tau)$ можно найти по формуле (38.30).

2°. Тройные уравнения.

Пример 38.4. Рассмотрим тройные интегральные уравнения вида

$$\int_0^\infty t^{-2\beta} J_\nu(xt)\,\Psi(t)\, dt = F_1(x),\ 0 < x < a,$$

$$\int_0^\infty t^{-2\alpha} J_\mu(xt)\,\Psi(t)\,dt = G_2(x),\ a<x<b, \tag{38.31}$$

$$\int_0^\infty t^{-2\beta} J_\nu(xt)\,\Psi(t)\,dt = F_3(x),\ b<x<\infty,$$

где F_1, G_2 и F_3 — известные, а Ψ — искомая функции. Совершим здесь замены

$$\psi(t) = t^{-1}\Psi(t),\ f(x) = (2/x)^{2\beta}F(x),\quad g(x) = (2/x)^{2\alpha}G(x), \tag{38.32}$$

положив

$$F(x) = \sum_{j=1}^{3} F_j(x);\ F_j(x) = \begin{cases} F(x), & x\in I_j, \\ 0 & x\overline{\in} I_j, \end{cases}$$
$$I_1=(0,\ a),\ I_2=(a,\ b),\ I_3=(b,\ \infty) \tag{38.33}$$

и аналогично доопределив функцию $G(x)$. Очевидно, что функции G_1, G_3 и F_2 пока неизвестны. Тогда система (38.31) в силу (18.19) примет вид

$$S_{\nu/2-\beta,2\beta,2}\psi(x) = f(x),\ S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,2}\,\psi(x) = g(x). \tag{38.34}$$

Из последнего уравнения с помощью формулы (18.20) получаем

$$\psi(x) = S_{\mu/2+\alpha,-2\alpha,2}\,g(x), \tag{38.35}$$

где $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$, т. е. g содержит неизвестные функции g_1 и g_3. Для их нахождения введем обозначения

$$K = K_{\nu/2-\beta,(\mu-\nu)/2-\alpha+\beta},\ I = I_{\mu/2+\alpha,(\nu-\mu)/2+\beta-\alpha} \tag{38.36}$$

и к первой из формул (38.34) применим оператор I^{-1}, обратный к I, а ко второй из этих формул — оператор K и воспользуемся соотношениями (18.17), (18.21), которые приведут к равенству $I^{-1}f = Kg$:

$$I^{-1}f = I^{-1}S\psi = I_{\nu/2+\beta,(\mu-\nu)/2+\alpha-\beta}\,S_{\nu/2-\beta,2\beta,2}\psi(x) =$$
$$= S_{\nu/2-\beta,(\mu-\nu)/2+\alpha+\beta,2}\psi(x), \tag{38.37}$$
$$Kg = K_{\nu/2-\beta,(\mu-\nu)/2+\beta-\alpha}\,S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,2}\,\psi(x) = S_{\nu/2-\beta,(\mu-\nu)/2+\alpha+\beta,2}\psi(x).$$

Таким же образом после аналогичных применений операторов K^{-1} и I несложно прийти и ко второму соотношению такого же рода, которое в совокупности с первым образует систему

$$I^{-1}f(x) = Kg(x),\ K^{-1}f(x) = Ig(x). \tag{38.38}$$

Уравнения (38.38) соответственно на интервалах I_1 и I_3 можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} I^{-1}f_1(x) = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} Kg_1(x) + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} Kg_2(x) + \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} Kg_3(x),\ x\in I_1, \tag{38.39}$$

$$\begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} K^{-1}f_3(x) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} Ig_1(x) + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} Ig_2(x) + \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} Ig_3(x),\ x\in I_3. \tag{38.40}$$

Обращая их соответственно относительно g_1 и g_3, приходим к следующей системе для этих неизвестных функций:

$$g_1(x) = -\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1}\begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} Kg_3(x) + \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} I^{-1}f_1(x) -$$
$$-\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} Kg_2(x), \tag{38.41}$$

$$g_3(x) = -\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} Ig_1(x) + \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1}\begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} K^{-1}f_3(x) -$$
$$-\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} Ig_2(x). \qquad (38.42)$$

Отсюда, исключив g_3, окончательно находим соотношение

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1}\begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} Ig_1(x) + \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1}\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} I^{-1}f_1(x) - \right. \qquad (38.43)$$
$$\left. -\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} Kg_2(x)\right\} - \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1}\begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} K^{-1}f_3(x) - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} Ig_2(x)\right\}.$$

Вычислив указанные в нем композиции операторов, можно убедиться, что это соотношение при соответствующих условиях на функции является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода относительно g_1. Решив его и воспользовавшись формулами (38.42), (38.35), (38.32), можно найти искомое решение системы (38.31).

В конце этого параграфа показано, что система (38.31) в частном случае $F_1 = F_3 = 0$ эквивалентна системе, исследуемой в следующем примере.

Пример 38.5. Рассмотрим тройные интегральные уравнения

$$\mathfrak{M}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\xi + s/\delta)}{\Gamma(\xi + \beta + s/\delta)}\varphi^*(s);\ x\right\} = 0,\ x \in I_1 \cup I_3;$$
$$\qquad (38.44)$$
$$\mathfrak{M}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(1 + \eta - s/\sigma)}{\Gamma(1 + \eta + \alpha - s/\sigma)}\varphi^*(s);\ x\right\} = g_2(x),\ x \in I_2,$$

где $I_j (j = 1, 2, 3)$ — интервалы (38.33), α, β, ξ, η, $\delta > 0$, $\sigma > 0$ — вещественные параметры, а искомая функция $\varphi^*(s) = \mathfrak{M}\{\varphi(x); s\}$ является преобразованием Меллина (1.112) некоторой функции $\varphi(x)$.

Воспользовавшись обозначениями типа (38.33) и формулами (23.1), (23.2), систему (38.44) приведем к виду

$$I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}\varphi(x) = g(x),\ I^{\beta}_{-,\delta,\xi}\varphi(x) = f(x) \qquad (38.45)$$

или же на соответствующих интервалах

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi}\varphi_1(x) + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi}\varphi_2(x) + \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi}\varphi_3(x) = 0,\ x \in I_1,$$
$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}\varphi_1(x) + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}\varphi_2(x) = g_2(x), \qquad x \in I_2, \qquad (38.46)$$
$$\begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi}\varphi_3(x) = 0, \qquad x \in I_3.$$

Обратив третье, второе и первое из этих уравнений по формулам (18.17) относительно функций φ_3, φ_2 и φ_1, получим соотношения

$$\varphi_3(x) = 0,$$
$$\varphi_2(x) = -\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}\varphi_1(x) + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha}g_2(x), \qquad (38.47)$$
$$\varphi_1(x) = -\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} I^{-\beta}_{-,\delta,\xi+\beta}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi}\varphi_2(x).$$

Подставив значение φ_1 из третьего соотношения во второе, окончательно придем к уравнению Фредгольма 2-го рода относительно φ_2:

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} I^{-\beta}_{-,\delta,\xi+\beta} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi_2(x) + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha} g_2(x). \tag{38.48}$$

Обратив его, несложно восстановить искомое решение системы (38.44).

В заключение отметим, что если в системе (38.31) положить

$$F_1 = F_3 = 0,\ G_2(x) = (x/2)^{2\alpha+1} g_2(x),\ \mu = \alpha_0 + \beta_0 + \xi + \eta,\ \nu = \xi + \eta,$$
$$\alpha = (\alpha_0 - \beta_0 + \eta - \xi - 1)/2,\ \beta = (\eta - \xi - 1)/2,\ \Psi(t) = S_{\eta,\beta_0+\xi-\eta,2}\varphi(t), \tag{38.49}$$

то в силу равенств (18.19), (18.22), (23.1), (23.2) она примет вид (38.44) с параметрами α_0, β_0 вместо α, β и $\delta = \sigma = 2$. Получив ее решение, по формуле $\Psi(t) = S_{\eta,\beta_0+\xi-\eta}\varphi(t)$ найдем решение системы (38.31), (38.49).

§ 39. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 7

1°. **Исторические сведения. К § 35, п. 1°.** Впервые уравнение вида (35.4) с $d=1$ и переменным нижним пределом рассмотрел Т. Хиггинс (T. P. Higgins [3], 1964 г.), получивший решения типа (35.11), (35.14) в классе достаточно гладких функций. Отметим, что ранее частные случаи этого уравнения с многочленами Чебышева и Лежандра в ядре рассматривали Та Ли (Та Li [1], 1960 г., и [2], 1961 г.) и Р. Бушман (R. G. Buschman [1], 1962 г.) соответственно, см. далее п. 2°, 35.1.

Впервые методы дробного интегродифференцирования к изучению уравнений (35.1)—(35.4) в классах Q_q, R_r (см. § 17, п. 1° (к § 10, п. 1°)) применил Э. Лав (E. R. Love [2, 3], 1967 г.), см. далее п. 2°, 35.2.

Теорема 36.1 ранее не публиковалась, но случай $p=1$ содержится в указанных выше работах Э. Лава.

К § 35, п. 2°. Впервые уравнение (35.16) было получено и обращено Е. Копсоном (E. T. Copson [5, с. 353], 1958 г.) при решении задачи Дирихле в первом квадранте для гиперболического уравнения (40.19) с $\lambda=0$. Однако в этой работе указанный результат специально не выделялся, и поэтому работа Р. Бушмана (R. G. Buschman [3], 1963 г.), в которой были обращены уравнения (35.16), (35.18), вполне заслуженно считается первой. А. Эрдейи (A. Erdelyi [9], 1964 г., и [12], 1967 г.) нашел решения уравнений (35.15), (35.17) в виде (35.25), (35.35), использовав методы дробного интегродифференцирования и теории обобщенных функций, см. далее п. 2°, 35.3.

К § 36, пп. 1, 2°. Идея определения дробных интегралов и производных через операторы обратного преобразования Меллина (36.1), (36.2) содержалась в работах Х. Кобера (H. Kober [1], 1940 г.) и А. Эрдейи (A. Erdelyi [4], 1940 г.), хотя ранее ее высказывал Н. Зейлон (N. Zeilon [1, с. 4], 1924 г.).

Определение G-преобразования через интеграл Меллина — Барнса (36.3) впервые введено в работе Ву Ким Туана, О. И. Маричева и С. Б. Якубовича [1], 1986 г., в несколько отличной от (36.3) форме. Ранее частный случай такого преобразования вида (36.23) рассматривался в работе Narain Roop [1], 1959 г., и более глубоко исследовался в статьях Narain Roop [2—4], 1962—1963 гг., и С. Fox [2], 1961 г. Пространство $\mathfrak{M}^{-1}_{0,0}(L)$ было введено в работе Ву Ким Туана [1], 1985 г., где оно обозначалось через L^{-1}, а более общее пространство $\mathfrak{M}^{-1}_{\Phi}(L)$ — в работе Ву Ким Туана [4], 1986 г. Пространство $L_2^{(c,\nu)}$ является частным случаем пространства L_2^{Φ}, введенного С. А. Акопяном [1, с. 6], 1960 г. (см. также М. М. Джрбашян [2]). Теоремы 36.1 — 36.4 доказаны в работах Ву Ким Туана [5], 1986 г., и Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г.

К § 36, п. 3°. Идея факторизации интегральных преобразований, т. е. их представлений через композиции других «более простых» интегральных преобразований, по-видимому, впервые проявилась в формуле разложения преобразования Стилтьеса через композицию двух прямых преобразований Лапласа (см. D. V. Widder [1], 1938 г., и [2], 1946 г., а также Г. Бейтмен, А. Эрдейи [4]). Ф. Трикоми (F. G. Tricomi [2], 1935 г.) указал формулу разложения преобразования Ханкеля через компози-

цию прямого и обратного преобразований Лапласа. Такого сорта композиции систематически применялись И. И. Хиршманом, Д. В. Уиддером [1], 1958 г., при изучении преобразований типа свертки. В отношении к G-преобразованию типа (36.23) идея факторизации развивалась Ч. Фоксом (C. Fox [3], 1963 г., и [6], 1971 г.) и П. Руни (P. G. Rooney [5], 1983 г.), см. далее п. 2°, 36.1—36.4.

Впервые техника факторизации G-преобразования вида (36.23) через более простые G-преобразования такого вида и специальные таблицы и обозначения, позволяющие ее осуществить, были разработаны формально (без описания всех условий и классов функций) в статье Ю. А. Брычкова, Х.-Ю. Глеске, О. И. Маричева [1], 1983 г. Ей предшествовали исследования О. И. Маричева [3], 1973 г. и [6], 1976 г., и труднодоступные работы Т. Хиггинса (T. P. Higgins [4, 5], 1965 г.). В пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ проблема факторизации была решена в работе Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г., где была установлена теорема 36.5.

К § 36, пп. 4—8°. Теоремы 36.6—36.8 и 36.10—36.13 содержатся соответственно в работах Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г., и О. И. Маричева, Ву Ким Туана [2], 1985 г. Остальные результаты принадлежат Ву Ким Туану и ранее не публиковались.

К § 37, п. 1°. Решение уравнения вида (37.1) при $\lambda=1$ получил К. Сривастава (K. N. Srivastava [5], 1964 г.), но в более громоздкой форме, чем (37.31)—(37.34). Решение вида (37.31) с $l=0$, $a=0$ дано Дж. Уимпом (J. Wimp [2], 1965 г.) с помощью преобразования Лапласа, см. также К. С. Rusia [4, 6]. Наиболее глубокое исследование уравнения (37.1) проведено Т. Прабхакаром (T. R. Prabhakar [1], 1969 г., в случае $\lambda=1$, $a=0$; [2], 1971 г.), который нашел решения (37.32) и (37.33) с помощью методов дробного интегродифференцирования при $\operatorname{Re}\alpha>0$ в случаях $\operatorname{Re}\beta>0$ и $\operatorname{Re}\beta<\operatorname{Re}\alpha$ соответственно.

Впервые уравнение (37.2) при $a=0$, $\alpha=2n+1$, $\lambda=i$, т. е. уравнение

$$\int_0^x (x-t)^n I_n(x-t) f(t)\,dt = g(x),$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя (1.84), при целых неотрицательных n рассмотрел О. Тидони (O. Tedone [1], 1914 г.). В случае натурального n он свел это уравнение к простейшему уравнению с $n=0$ и получил его формальное решение. Решение уравнения (37.2) при $a=0$, $\alpha=1$ с помощью соотношения (37.20) нашел Х. Эльрод (H. G. Elrod [1], 1958 г.).

Формальное решение уравнения (37.41), отличающегося от уравнения (37.4) лишь заменой переменных, получили Дж. Бурлак (J. Burlak [1], 1962 г.) и И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.). Достаточные условия его разрешимости указал Р. Сривастав (R. P. Srivastav [1], 1966 г.). Отметим только, что уравнение (37.4) в другой форме было решено еще Н. Я. Сониным в 1884 г., см. далее п. 2°, 37.3, а также краткий исторический очерк в начале книги.

Решение уравнений (37.5)—(37.7) дано О. И. Маричевым в работе [8], 1978 г., по материалам которой и написан этот пункт.

К § 37, п. 2°. Формально решения (37.43), (37.44) уравнений (37.41), (37.42) получили Дж. Бурлак (J. Burlak [1], 1962 г.) и И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.), см. также работы (R. P. Srivastav [1], K. C. Rusia [3]). Необходимые условия существования решения уравнения (37.41) в классе непрерывных функций даны П. Бхаратия (P. L. Bharatiya [1], 1965 г.), а необходимые и достаточные в классе $L_2(0, \infty)$ — К. Сони (K. Soni [5], 1971 г.).

Считается, что впервые решение уравнения (37.41), а следовательно, и уравнения (37.4) дали Дж. Бурлак и И. Снеддон. Однако на самом деле к такому уравнению квадратичной заменой переменных в частном случае приводится уравнение, решенное Н. Я. Сониным [4], 1884 г. (см. также [6], 1954 г., и далее п. 2°, 37.3). Отметим также, что, не зная об этой работе, И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.) тем не менее назвал оператор (37.41) оператором Сонина, основываясь на том, что Н. Я. Сонин вычислил два специальных интеграла такого рода от функций Бесселя, известных в литературе под именем интегралов Сонина, см. (2.54) и справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, формулы 2.12.4.6 и 2.12.35.12]. Заметим также, что формула обращения уравнения (37.41) при $\nu=0$ в классе $L_2(0, \infty)$ указана в работе Т. А. Розета [1], 1947 г. (см. далее п. 2°, 37.4).

Обобщенные операторы Эрдейи—Кобера (37.45), (37.46) и обобщенный оператор преобразования Ханкеля (37.47) введены в работе Дж. Лаундеса (J. S. Lowndes [1], 1970 г.), в которой наряду с формулами (37.48)—(37.66) доказаны и некоторые другие результаты.

К § 37, п. 3°. Обратный оператор к оператору (37.67) при $0<\alpha<1$ в форме (37.81) впервые построен Н. И. Бакиевичем [1], 1963 г. Однако обращение этого оператора для частного случая $\alpha=1$ в форме соотношений из теоремы 37.6 было получено ранее в работе И. Н. Векуа [1], 1945 г., см. также его монографию [3, с. 69, 70], где, кроме формул вида (37.78), (37.79), указаны более общие соотношения, установ-

ленные в 1942 г., которые связывают решения уравнений Лапласа $\Delta u=0$ и Гельмгольца $\Delta u+\lambda^2 u=0$ (об этом см. в § 40, п. 2° и § 43, п. 2°, 40.1).

Частный случай равенства (37.71), записанный в другой форме, имеется в статье P. Henrici [1, с. 256], 1957 г. Остальные результаты этого пункта являются развитием результатов работы Дж. Лаундеса (J. S. Lowndes [9], 1985 г.), где был введен и изучен оператор (37.68) в видоизмененной форме. Теорема 37.7 была указана в статье О. И. Маричева [1], 1972 г., как частный случай более общего результата.

К § 37, п. 4°. Приведенный результат получен в статье О. И. Маричева [1], 1972 г.

К § 37, п. 5°. Частные случаи так называемых интегральных преобразований по индексам (по параметрам) специальных функций были выявлены и изучены сравнительно недавно, см. об этом в монографии Н. Н. Лебедева [4], где излагаются основы теории преобразований Конторовича—Лебедева (37.109), (37.110) и Мелера—Фока (37.141), (38.23). В 1964 г. появилась работа Дж. Уимпа (J. Wimp [1]), в которой было введено значительно более общее преобразование (37.113) с G-функцией Мейера в ядре, и для него была получена формула обращения и выписаны пять частных случаев, см. об этом также в монографии О. И. Маричева [10, с. 118]. Более компактный вид формулы обращения (37.122) указал С. Б. Якубович [1], 1985 г., который также изучил композиционную структуру этого преобразования, см. статью Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г., по материалам которой написан п. 5°.

Отметим также, что различные представители указанного класса преобразований с G-функциями и H-функциями в ядрах рассматривались в работах R. N. Kalia [1], 1970 г., и M. Shah [1], 1972 г.

К § 37, п. 6°. Преобразование (37.127) в форме (37.131) было введено в работе Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1985 г. Теоремы 37.17—37.21 доказаны С. Б. Якубовичем и публикуются впервые.

К § 38, пп. 1, 2°. Впервые решение парного уравнения (38.1) в случае $R=G=\mu=\nu=0$, $\alpha-\beta=1/2$, $F\equiv 1$ было получено в работе Э. Бельтрами (E. Beltrami [1], 1881 г.). Заметим, что этой работе предшествовала работа Г. Вебера (H. Weber [1], 1872 г.), в которой были поставлены задачи для уравнений в частных производных, сводящиеся к парным уравнениям. Различные случаи уравнения (38.1) в основном при $R=G=\mu=\nu=0$ изучались значительно позже в работах L. V. King [1], 1935 г., I. W. Busbridge [1], 1938 г., C. J. Tranter [1—3], 1950—1954 гг., A. N. Gordon [1], 1954 г., и B. Noble [1], 1955 г., см. также книгу Е. Титчмарша [1], 1937, 1948 гг. Во всех этих работах использовались разнообразные методы, в основном отличные от дробного интегродифференцирования.

Впервые дробное интегрирование (порядка 1/2) при решении парных уравнений вида (38.1) использовал E. Копсон (E. T. Copson [3], 1947 г.), см. также B. Noble [2], 1958 г., и I. N. Sneddon [1], 1960 г. Этот метод был развит в работах E. T. Copson [6], 1961 г., A. S. Peters [1], 1961 г., M. Lowengrub, I. N. Sneddon [1], 1962 г., и [2], 1963 г., для решения уравнений (38.1) в случае $\mu=\nu$, $R\equiv 0$.

Дробное интегрирование с операторами Н. Я. Сонина (см. п. 2°, 37.3) при решении парных уравнений вида (38.16) с $F=\mu=\nu=0$ и измененным порядком условий на x впервые использовал Н. И. Ахиезер [1], 1954 г., см. также работу [2], 1957 г., где этот результат обобщен на случай $\nu=-\mu$. Исследованию уравнения (38.16) для произвольных μ и ν были посвящены работы A. S. Peters [1], 1961 г., J. Burlak [1], 1962 г., J. S. Lowndes [1], 1970 г., и др. Однако во всех этих работах содержится некорректная постановка задач: вместо интегрирования по (k, ∞) в первом из уравнений (38.16) интегрирование ведется по лучу $(0, \infty)$, что при произвольном β недопустимо, если специально не оговаривать значения функции $(t^2-k^2)^\beta$ при $0<t<k$.

Следует отметить, что начало систематическому применению операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.6) в теории парных, тройных и т. п. уравнений положили работы А. Эрдейи, И. Снеддона (A. Erdelyi, I. N. Sneddon [1], 1962 г.) и И. Снеддона (I. N. Sneddon [2], 1962 г.). Вместе с тем в этих и многих последующих работах исследования проводились формально, без изучения классов функций и условий на параметры.

Пункты 1, 2° написаны по материалам работ A. Erdelyi, I. N. Sneddon [1], 1962 г., и I. N. Sneddon [2], 1962 г. (пример 38.1), J. S. Lowndes [1], 1970 г. (пример 38.2), Н. А. Вирченко, С. П. Пономаренко [1], 1979 г. (пример 38.3), Н. А. Вирченко, Л. Г. Макаренко [2], 1975 г. (пример 38.4), J. S. Lowndes [2], 1971 г., I. N. Sneddon [5], 1975 г., и [6], 1979 г. (пример 38.5) с некоторыми изменениями. Отметим еще, что решение (38.8) получили Е. Титчмарш [1, с. 334], 1937 г., при $\mu=\nu$ и А. Петерс (A. S. Peters [1], 1961 г.), а решение (38.12), (38.13) — Б. Нобл (B. Noble [1], 1955 г.); метод «пробного» решения (см. пример 38.1) использовали А. Гордон (A. N. Gordon [1], 1954 г.) и Е. Копсон (E. T. Copson [6], 1961 г.).

2°. Обзор других результатов. 35.1. В работе T. P. Higgins [3] рассмотрено интегральное уравнение

$$\int_x^1 \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(\alpha,\ \beta;\ c;\ 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt = g(x),\quad 0<x_0\leqslant x\leqslant 1, \qquad (39.1)$$

и получены две формы его решения:

$$f(x) = I_{1-}^{\alpha-c} x^{\beta} I_{1-}^{-\alpha} x^{-\beta} g(x),$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-c+m)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-c+m-1} t^{\beta} (I_{1-}^{-m-\alpha} g_1)(t) \times$$

$$\times {}_2F_1\left(m, -\beta; \alpha-c+m; 1-\frac{x}{t}\right) dt, \quad g_1(\tau) = \tau^{-\beta} g(\tau), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

в зависимости от условий на достаточно гладкую правую часть $g(x)$. Здесь I_{1-}^{α} — оператор дробного интегродифференцирования (2.18) или (2.34). Отметим, что указанная работа была первой работой, в которой применялась техника факторизации ${}_2F_1$-преобразования (39.1) с помощью операторов дробного интегродифференцирования. Решение уравнения, отличающегося от (39.1) заменой $1-t/x$ на $1-x/t$, которое имеет вид

$$f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-c)} \int_x^1 (t-x)^{m-c-1} {}_2F_1\left(-\alpha, -\beta; m-c; 1-\frac{t}{x}\right) g^{(m)}(t)\, dt,$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad m > \operatorname{Re} c > 0,$$

с помощью преобразования Лапласа получил Дж. Уимп (J. Wimp [2]). Ранее частные случаи этого уравнения с многочленом Чебышева 1-го рода $T_n(x)$ в ядре

$$\int_x^1 \frac{T_n(t/x)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{39.2}$$

и с многочленом Лежандра $P_n(x)$ в ядре

$$\int_x^1 P_n(t/x) f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{39.3}$$

рассматривались в работах Ta Li [1, 2] и R. G. Buschman [1] соответственно. В этих работах использовалась классическая схема решения уравнения Абеля (2.1), см. § 2, п. 1°. В статье D. V. Widder [4] уравнения (39.2) и (39.3) решены методом, основанным на преобразовании Лапласа. Заметим также, что в работе A. Erdelyi [7] уравнение типа (39.3) решено с помощью формулы Родрига. В работах R. P. Singh [1] и L. A. Dixit [1, 2] получены решения уравнения вида (39.3) с заменой $P_n(x)$ на обобщенные многочлены Лежандра $Q_{mk}(x)$ и Райса $H_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и гипергеометрическую функцию ${}_4F_3(-n, \alpha+\beta+n+1, \xi, \xi'; p, p', 1+\alpha; x)$ соответственно.

Решение интегрального уравнения

$$\int_x^1 (t-x)^{\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2t}{x} - 1\right) f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{39.4}$$

с полиномом Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha+1)_n [n!]^{-1} {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-x)/2)$, которое является частным случаем уравнения (39.1), впервые получено в статье T. P. Higgins [2], см. также K. N. Srivastava [4] и K. C. Rusia [5]. В работах B. R. Bhonsle [1, 2], K. C. Rusia [2, 7], C. Singh [3] и K. N. Srivastava [3, 6—8] получены решения других уравнений однородного типа, содержащих в ядрах полиномы Якоби.

35.2. Обозначим через $Q_q(a, b)$, $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$, класс функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на (a, b), и таких, что функция $x^q \varphi(x)$ локально интегрируема на (a, b). В работе E. R. Love [2] получены необходимые, а также достаточные условия существования и единственности в $Q_q(0, d)$, $0 < d < \infty$, решения уравнений (35.1), (35.2) и даны явные выражения для их решений в виде (35.5)—(35.8). Эти исследования продолжены в работе E. R. Love [3], где в классе $Q_q(d, \infty)$, $0 < d < \infty$, установлены формулы (35.9)—(35.12), выражающие решения уравнений (35.3), (35.4).

Заметим, что представление решения в виде композиции двух операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) для уравнения вида (35.2) формально дано в работе R. G. Buschman [5], а в статье C. Müller, R. Richberg [1] получены формулы обращения частного случая уравнения (35.3) с многочленом Чебышева 1-го рода в ядре

$$\int_x^{\infty} \frac{T_n(x/t)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)\, dt = g(x), \quad x > 0,$$

которое является аналогом уравнения (39.2).

В работе R. K. Saxena, R. K. Kumbhat [3] выведены формулы обращения операторов

$$\frac{x^{-\eta-\delta}}{\Gamma(\delta)}\int_0^x t^{\eta}(x-t)^{\delta-1}{}_2F_1\left(\alpha,\ \beta;\ \delta;\ 1-\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt,$$

$$\frac{x^{\eta}}{\Gamma(\gamma)}\int_x^{\infty} t^{-\eta-\gamma}(t-x)^{\gamma-1}{}_2F_1\left(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1-\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt \tag{39.5}$$

для $f(x)\in L_p(0,\ \infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, при некоторых условиях на параметры.

В работе B. L. J. Braaksma, A. Schuitman [1] установлены формулы обращения оператора вида (35.4):

$$(Af)(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int_x^{\infty}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{c-1}{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{t}{x}\right)f(t)\,\frac{dt}{t}$$

в пространстве основных функций $T(\lambda,\ \mu)$ и сопряженного ему оператора A' в пространстве обобщенных функций $T'(\lambda,\mu)$ (см. § 23, п. 2°, 18.3).

Следуя работам E. R. Love [2, 3], T. R. Prabhakar [4] построил решение уравнения

$$\int_x^b\frac{(t^m-x^m)^{c-1}}{\Gamma(c)}{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{x^m}{t^m}\right)mt^{m-1}f(t)\,dt=g(x),\quad x>0,\ \operatorname{Re}c>0. \tag{39.6}$$

В работе A. C. McBride [1] получены формулы обращения уравнения $H_m^c f=g$, см. § 23, п. 2°, 18.5, которое обобщает уравнение (35.1), а также аналогичных обобщений уравнений (35.2)—(35.4). Исследования проведены в пространствах основных $F_{p\mu}$ и обобщенных $F'_{p\mu}$ функций, рассмотренных в § 8, п. 4°.

В работе М. М. Смирнова [5] сведением к уравнению вида (35.1) получено обращение некоторого уравнения 1-го рода с функцией Гаусса, которое возникает при изучении задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения.

35.3. В статье A. Erdelyi [9] методами дробного интегродифференцирования получены необходимые, а также достаточные условия для существования интегрируемого на конечном отрезке решения уравнения (35.15) при $\operatorname{Re}\mu<1$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant -1/2$ и дано явное решение в виде (35.25). Здесь также указано решение уравнения (35.17) с $d=\infty$ в форме (35.35), которое ранее исследовал K. N. Srivastava [1] (в формуле его обращения содержится ошибка), см. также G. M. Habibullah [2].

В работе A. Erdelyi [12] изучено уравнение (35.15) при произвольных действительных μ и ν в классе обобщенных функций с носителем на $(0,\ \infty)$, а также выяснены условия, при которых полученное решение будет обычной функцией.

Достаточные условия обратимости и формулы обращения двух уравнений вида (35.15), (35.16), но записанных в иной форме, указал М. М. Смирнов [4, 6].

Заметим, что ряд работ (R. G. Buschman [2], T. P. Higgins [1] и K. N. Srivastava [2]) посвящен решению уравнения вида (35.17) с ультрасферическими многочленами Гегенбауэра $C_n^{\lambda}(x)$ в ядре вместо $P_n^{\lambda}(x)$.

35.4. В работе I. N. Sneddon [4] предложен общий метод для нахождения решения уравнений вида

$$\int_x^a k\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\,\frac{dt}{t}=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad a\leqslant\infty, \tag{39.7}$$

основанный на использовании преобразования Меллина (1.112) и теоремы о свертке (1.115). В качестве примеров даны решения уравнений (35.4), (35.15), (35.17) с $d=\infty$, (39.1)—(39.3) и др.

35.5. В работе S. L. Kalla, R. K. Saxena [2] получены формулы обращения более общих, чем (23.5), (23.6), операторов

$$\frac{\mu x^{-\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x{}_2F_1\left(\alpha,\ \beta+m;\ \gamma;\ \frac{at^{\mu}}{x^{\mu}}\right)t^{\eta}f(t)\,dt, \tag{39.8}$$

$$\frac{\mu x^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{\infty} {}_2F_1\left(\alpha,\ \beta+m;\ \gamma;\ \frac{ax^{\mu}}{t^{\mu}}\right) t^{-\delta-1}f(t)\,dt \qquad (39.9)$$

для $f(x)\in L_p(0,\ \infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, или $f(x)\in \mathfrak{M}_p(0,\ \infty)$, $p>2$, при выполнении условий $\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>m-1$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, $\mu>0$, $\operatorname{Re}\eta>\max(1/p,\ 1/p')$, $1/p+1/p'=1$, $|\arg(1-a)|<\pi$.

Здесь через $\mathfrak{M}_p(0,\ \infty)$ обозначено подпространство $L_p(0,\ \infty)$, $p>2$, состоящее из функций, являющихся обратными преобразованиями Меллина функций из $L_{p'}(-i\infty,\ i\infty)$, см. также § 23, п. 2°, 18.1.

В работе B. P. Parashar [1] рассматривались обобщающие (23.5), (23.6) уравнения с G-функцией Мейера в ядрах и при некоторых условиях была доказана единственность их решения в классе $L_1(0,\ \infty)$. Формулы обращения таких уравнений в $L_p(0,\ \infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, или в $\mathfrak{M}_p(0,\ \infty)$, $p>2$, получены в работе S. L. Kalla [3] с помощью преобразования Меллина. Эти результаты распространены в работах S. L. Kalla [12, 11] на более общие уравнения с H-функцией Фокса и произвольной функцией в ядрах соответственно.

35.6. В работе E. R. Love [6] даны необходимые, а также достаточные условия разрешимости интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ -x/t)\,t^b f(t)\,dt = g(x),\quad 0<x<\infty,$$

и построено его решение на основании представления левой части в виде композиции оператора дробного интегрирования Римана—Лиувилля (5.1) и преобразования Стилтьеса (см. § 9, п. 2°, 7.3). Другая форма решения этого уравнения через обратное преобразование Меллина ранее была получена в статье R. Swaroop [1].

Эти исследования продолжены в работах T. R. Prabhakar, N. K. Kashyap [1] и E. R. Love, T. R. Prabhakar, N. K. Kashyap [1], где интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ -\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt = g(x),\quad \int_0^{\infty} \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_1F_1(a;\ c;\ -xt)\,f(t)\,dt = g(x)$$

решены на основании представления левых частей в виде композиции оператора дробного интегрирования Римана—Лиувилля (5.3) и преобразований Стилтьеса и Лапласа соответственно.

35.7. В работе Н. Н. Лебедева [1] показано, что интегральное уравнение

$$(Tf)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^a K\left(\frac{2\sqrt{tx}}{t+x}\right)\frac{f(t)\,dt}{t+x} = g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant a, \qquad (39.10)$$

где $K(u)=(\pi/2)\,{}_2F_1(1/2,\ 1/2;\ 1;\ u^2)$ — эллиптический интеграл 1-го рода, имеет решение

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\tau g(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}.$$

Этот результат основан на представлении оператора T в виде композиции двух операторов дробного интегрирования — правостороннего и левостороннего — по функции x^2:

$$(Tf)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\int_t^a \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}}.$$

Этот же метод одновременно был применен Е. Копсоном (E. T. Copson [3]) для решения одного двумерного уравнения электростатики. Следует отметить, что работы Н. Н. Лебедева и Е. Копсона являются первыми работами, в которых интегральные уравнения первого рода со специальными функциями в ядрах решались путем разложения на композиции более простых уравнений типа Абеля, решения которых известны. Другими словами, в этих работах был впервые применен метод факторизации интегральных операторов со специальными функциями в ядрах.

Отметим также, что в указанной работе Н. Н. Лебедева полученный им результат перенесен на уравнение

$$\int_0^a \frac{(xt)^m}{(x+t)^{2m+1}}\,{}_2F_1\left(m+\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ \frac{4xt}{(x+t)^2}\right) f(t)\,dt = g(x),$$

а в статье S. L. Kalla [10] методом Н. Н. Лебедева решено уравнение такого же типа, но с другими параметрами:

$$\int_0^a (x+t)^{-2\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{4xt}{(x+t)^2}\right) f(t)\,dt = g(x),\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0<\alpha<1.$$

В работе Н. И. Ахиезера, В. А. Щербины [1] дано формальное решение уравнения

$$\int_0^a \frac{1}{(x^2+t^2)^p}\,{}_2F_1\left(\frac{p}{2},\ \frac{p+1}{2};\ \frac{q}{2};\ \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) f(t)\,dt = g(x),\quad 0<x<a, \tag{39.10'}$$

где $0<a\leqslant+\infty$, $0<2p<q<2p+2$, частным случаем которого при $p=1/2$, $q=2$ является уравнение (39.10), см. также работу W. E. Williams [1].

35.8. В работах J. S. Lowndes [4, 6] с помощью операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.4) для интегрального уравнения 1-го рода

$$\int_a^b \mathcal{K}(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(x),\quad a<x<b, \tag{39.11}$$

получено решение в следующих случаях:

$$\mathcal{K}(x,\ t) = \frac{\sigma\delta x^{\sigma\eta-1}\,t^{\delta\mu}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)} \int_{\max(x,t)}^{\infty} \frac{\tau^{\sigma(\alpha-\eta)+\delta(\beta-\mu)-1}}{(\tau^\sigma-x^\sigma)^{\alpha}\,(\tau^\delta-t^\delta)^{\beta}}\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

$$a=0,\ b=+\infty,\ 0<\alpha,\ \beta<1,\ \sigma>0,\ \delta>0,\ -\infty<\mu,\ \eta<\infty;$$

и

$$\mathcal{K}_1(x,\ t) = \frac{\sigma\delta x^{-\sigma(\alpha+\eta)}\,t^{\delta(1-\mu-\beta)-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^{\min(x,t)} \frac{\tau^{\sigma(\eta+1)+\mu\delta-1}\psi(\tau)\,d\tau}{(x^\sigma-\tau^\sigma)^{1-\alpha}\,(t^\delta-\tau^\delta)^{1-\beta}},$$

$$\mathcal{K}_2(x,\ t) = x^{1-\sigma(\alpha+\eta+1-s)}\left(\frac{1}{\sigma}\,\frac{d}{dx}\,x^{1-\sigma}\right)^s (x^{\sigma(\alpha+\eta-1)-1}\mathcal{K}_1(x,\ t)),$$

$$b<+\infty,\ \sigma>0,\ \delta>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ -\infty<\mu,\ \eta<\infty,$$

$\psi(t)$ — некоторая функция (см. также статью W. E. Williams [1]).

В качестве примеров рассмотрены уравнение

$$\int_0^a K_\lambda(p\,|x-t|)\,\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^\lambda} = f(x),\quad 0<x<a,\ \operatorname{Re}p>0,\ |\lambda|<1/2,$$

с модифицированной функцией Бесселя $K_\lambda(z)$ и уравнение вида (39.10').

36.1. Ряд работ (C. Fox [3, 5, 6]) посвящен разработке методов решения интегрального уравнения

$$\mathrm{K}f(x) \equiv \int_0^\infty \mathrm{k}(xt)\,f(t)\,dt = g(x),\quad x>0, \tag{39.12}$$

в случае, когда преобразование Меллина $\mathrm{k}^*(s)=\mathfrak{M}\{\mathrm{k}(x);\ s\}$ (1.112) ядра k удовлетворяет некоторым условиям.

В работе C. Fox [3] разработан метод, основанный на теореме о свертке (1.116) для преобразования Меллина, позволяющий находить решение в $L_2(0,\ \infty)$ уравнения (39.12) при функции $\mathrm{k}^*(s)$, удовлетворяющей функциональному уравнению

$$\mathrm{k}^*(s)\,\mathrm{k}^*(1-s) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_j+(\eta_j+1-s)/m_j)\,\Gamma(\alpha_j+(\eta_j+s)/m_j)}{\Gamma((\eta_j+1-s)/m_j)\,\Gamma((\eta_j+s)/m_j)}. \tag{39.13}$$

Простейший случай (39.13), когда $\mathrm{k}^*(s)\mathrm{k}^*(1-s)=1$, общеизвестен, см., например, книгу Е. Титчмарша [1, с. 401]. В работе C. Fox [3] решение уравнения (39.12) с ядром $\mathrm{k}(x)$, удовлетворяющим условию (39.13), выражается через операторы типа

Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.4). Например, если это условие выполняется при $n=1$, $\alpha_1=\alpha$, $\eta_1=\eta$, $m_1=m$, то формальное решение уравнения (39.12) имеет вид

$$f(x)=\int_0^\infty (I^{\alpha}_{0+;\,m,\,\eta/m}\mathrm{k})(xt)\,(I^{\alpha}_{0+;\,m,\,\eta/m}g)(t)\,dt,$$

где $I^{\alpha}_{0+;\,\sigma,\eta}$ — оператор (18.1). В качестве примера дано также решение уравнения (39.12) с $\mathrm{k}(x)=\sqrt{2/\pi}\,x^{\alpha}\cos(x-\alpha\pi/2)$.

В работах C. Fox [5, 6] разработан метод, основанный на прямом и обратном преобразованиях Лапласа (1.119) и (1.120), который дает формальное решение уравнения (39.12) с ядром $\mathrm{k}(x)$, где

$$\mathrm{k}^*(s)=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j s+\beta_j)\Big[\prod_{k=1}^{n}\Gamma(\gamma_k s+\delta_k)\Big]^{-1}. \qquad (39.14)$$

В качестве примеров получено решение уравнения (39.12), когда $\mathrm{k}(x)=\sin x$, $\mathrm{k}(x)=\sqrt{x}\,J_{\nu}(x)$, $\mathrm{k}(x)=x^{\nu}K_{\nu}(x)$, где $J_{\nu}(x)$ и $K_{\nu}(x)$—функция Бесселя 1-го рода (1.83) и функция Макдональда (1.85) соответственно. В работе C. Fox [7] этот метод применен для получения формулы обращения преобразования Варма (9.6), а в работе R. U. Verma [8]—преобразования (39.12) с G-функцией Мейера $G^{2,0}_{1,2}(x)$ в ядре (см. (1.95)).

36.2. Говорят, что функции $\mathrm{k}(x)$ и $\mathrm{h}(x)$ образуют пару *ядер Фурье*, если они удовлетворяют взаимно обратным соотношениям

$$\int_0^\infty \mathrm{k}(xt)\,f(t)\,dt=g(x),\quad \int_0^\infty \mathrm{h}(xt)\,g(t)\,dt=f(x), \qquad (39.15)$$

каждое из которых можно рассматривать как формулу обращения другого. Если $\mathrm{h}(t)\neq\mathrm{k}(t)$, ядра Фурье называют *несимметричными*, а если $\mathrm{h}(t)=\mathrm{k}(t)$, —*симметричными*. Часто вместо (39.15) рассматриваются более общие равенства

$$\int_0^\infty \mathrm{k}_1(xt)\,f(t)\frac{dt}{t}=\int_0^x g(t)\,dt,\quad \int_0^\infty h_1(xt)\,g(t)\frac{dt}{t}=\int_0^x f(t)\,dt, \qquad (39.16)$$

где $\mathrm{k}_1(x)=\int_0^x \mathrm{k}(t)\,dt$, $\mathrm{h}_1(x)=\int_0^x \mathrm{h}(t)dt$, которые сводятся к (39.15) в случае возможности дифференцирования под знаком интеграла.

Впервые изучение G-функции Мейера (1.95) как симметричного ядра Фурье провел Narain Roop [1]. Эти исследования были развиты в работе C. Fox [2], в которой также впервые введена и изучена новая общая функция гипергеометрического типа, названная впоследствии H-функцией Фокса (изложение теории этой функции имеется в статье B. L. J. Braaksma [1], монографии A. M. Mathai, R. K. Saxena [1] и справочнике А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3]).

Вопросы, связанные с симметричными ядрами Фурье, рассматривались также в книге О. И. Маричева [10] и статье R. U. Verma [4]. В работах R. U. Verma [5, 6] методом, основанным на применении прямого и обратного преобразований Лапласа, уравнения вида (39.12) с G- и H-функциями соответственно в ядрах были сведены к уравнениям с симметричными ядрами Фурье, что позволило построить их решения в замкнутом виде. В работах R. N. Kesarwani [2—5] указанные функции изучались как несимметричные ядра Фурье. Заметим также, что в работе R. N. Kesarwani [6] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы функции $f(x)$, $g(x)\in L_2(0,\infty)$ удовлетворяли двойственным уравнениям (39.15) с $\mathrm{k}(x)=\mathrm{h}(x)=\gamma\mu^{\nu/2}x^{(\nu-1)/2}G^{q,p}_{2p,2q}\left((\mu x)^{\nu}\times\right.$

$\times\left|\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,\ -a_1,\ \ldots,\ -a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_q\end{matrix}\right.\Big)$, где $G^{q,p}_{2p,\,2q}$ — G-функция Мейера (1.95).

В случае, когда $\mathrm{h}(t)=\mathrm{k}(t)$ в (39.15) или (39.16), функции $f(x)$ и $g(x)$ называют k-*преобразованиями* друг друга. В работах V. P. Mainra [1] и B. Singh [1] изучены классы k-преобразований (39.15) с ядрами Фурье, в качестве которых взяты обобщенная функция Ватсона $\omega^{\nu_1,\ldots,\nu_m}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$, выражающаяся через многократный интеграл от произведения функций Бесселя, и функции, образованные действием на функцию Ватсона операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) соответственно. В работе K. Soni [2] показано, что если $f(x), g(x)\in L_2(0,\infty)$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}\,\eta>-1/2$, то $f(x)$ и $g(x)$ являются

k-преобразованиями тогда и только тогда, когда таковыми будут функции $I^{+}_{\eta,\alpha}f(x)$ и $K^{-}_{\eta,\alpha}f(x)$, где $I^{+}_{\eta,\alpha}$, $K^{-}_{\eta,\alpha}$ — операторы Кобера (18.5), (18.6).

36.3. Ряд работ (C. Fox [2], R. N. Kesarwani [5], R. K. Saxena [2, 4], K. C. Gupta, P. K. Mittal [1], Singh Rattan [1], S. L. Kalla [9], R. G. Buschman, H. M. Srivastava [1], R. K. Kumbhat [1], C. Nasim [1]) посвящен нахождению формул обращения в $L_1(0, \infty)$ или $L_2(0, \infty)$ уравнений вида (39.12) с H-функцией Фокса в ядре или же ее частными случаями. Решения в некоторых специальных случаях включают операторы дробного интегрирования типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) (R. K. Saxena [2], S. L. Kalla [9], R. G. Buschman, H. M. Srivastava [1]). В качестве примеров приведены формулы обращения преобразований Варма (9.6), Ханкеля и Мейера (см. § 1, п. 4°).

В работах V. P. Saxena [1], V. M. Bhise, Madhavi Dighe [1] и Madhavi Dighe [1] интегральные операторы вида (39.12) с H-функцией Фокса в ядре представлены в виде композиций операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) и операторов вида (39.12) с H-функцией Фокса меньшего порядка. В работе R. U. Verma [7] формально построено решение двумерного интегрального уравнения с ядром, являющимся произведением двух H-функций Фокса одной переменной.

Заметим еще, что в работах R. K. Raina, C. L. Koul [1, 2] и R. K. Raina [1] показано, что дробные интегралы (5.1), (5.3) от H-функции Фокса также являются H-функциями, но большего порядка.

36.4. В работе P. G. Rooney [5] исследовалось действие интегрального преобразования

$$(Kf)(x) = \int_0^\infty G^{mn}_{pq}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) f(t)\,dt, \quad x>0, \tag{39.17}$$

из весового пространства $\mathcal{L}_{\mu,r} = \left\{ f : \int_0^\infty |x^\mu f(x)|^r x^{-1} dx < \infty, \quad 1 \leqslant r < \infty \right\}$ (см. P. G. Rooney [3]) на $\mathcal{L}_{1-\mu,s}$. С помощью преобразования Меллина дано описание образа оператора Kf в терминах образов операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) и модифицированных преобразований Ханкеля и Лапласа:

$$(H_{k,\eta}f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{1/k-1/2} J_\eta(|k|(xt)^{1/k}) f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\eta > -1,$$

$$(L_{k,\alpha}f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{-\alpha} e^{-|k|(xt)^{1/k}} f(t)\,dt, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad x>0,$$

при различных значениях параметров G-функции Мейера из ядра. В случае $p+q = 2m+2n$ получены условия и формула обращения уравнения $(Kf)(x) = g(x)$.

36.5. Ряд работ (K. M. Saksena [1], C. Fox [5], R. K. Saxena [1], G. O. Okikiolu [3, 6], H. M. Srivastava [1], R. P. Manandhar [1], R. S. Pathak [1]) посвящен применению операторов типа Эрдейи—Кобера (18.2), (18.4) для получения формул обращения интегральных преобразований (39.12) со специальными функциями Макдональда $K_\nu(x)$ и Уиттекера $W_{k,\mu}(x)$ в ядрах.

В работах K. M. Saksena [1], C. Fox [5], G. O. Okikiolu [3] и R. P. Manandhar [1] операторы типа Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.4) и преобразование Меллина (1.112) использованы для нахождения формулы обращения в $L_p(0, \infty)$ преобразования

$$x^\nu \int_0^\infty (xt)^{\alpha-1/2} K_{\nu-1/2}(xt) f(t)\,dt = g(x), \quad x>0, \tag{39.18}$$

соответственно в случаях $p=2$, $\gamma=0$, $\alpha=\nu>1/2$; $p>1$, $\nu>1/p$, $\gamma \geqslant 1-2/p > \gamma-\nu$, $\alpha+1-1/p>\nu>-\alpha+1/p$ и $1 \leqslant p<\infty$, $\nu \in R^1$, $\alpha > |\nu-1/2| + 1/2 + 1/p'$ $(1/p + 1/p' = 1)$ при $\nu>0$ и $\alpha > |\nu| - 1/p'$ при $\nu<0$.

В работе G. O. Okikiolu [3] показано, что оператор (39.18) представим в виде композиции операторов модифицированного преобразования Лапласа и типа Эрдейи—Кобера (18.3) и действует ограниченно из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$, $1/q = 1-\gamma-1/p > 0$. Кроме того, доказано, что интегральные преобразования вида (39.18) с заменой $y^{\alpha-1/2}K_{\nu-1/2}(y)$ на $y^{1/2-\nu}J_{\nu-1/2}(y)$, $y^{1/2-\nu}Y_{1/2-\nu}(y)$, $y^{1/2-\nu}\mathbf{H}_{1/2-\nu}(y)$, где $J_\mu(y)$, $Y_\mu(y)$, $\mathbf{H}_\mu(y)$— функции Бесселя и Струве (см. (1.83) и Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 12]), представимы в виде композиций дробных интегралов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) и косинус- или синус-преобразований Фурье (1.108), (1.109).

Операторы Кобера (18.6) применены в работах K. M. Saksena [1] и R. K. Saxena [1] для получения формулы обращения преобразования Варма (9.6). Заметим также, что обращение преобразования Варма в терминах операторов прямого L и обратного L^{-1} преобразований Лапласа найдено в работе C. Fox [7].

В работе H. M. Srivastava [1] дана формула обращения преобразования

$$\int_0^\infty (xt)^{\nu-1/2}\, e^{-xt/2} W_{k+1/2,\mu}(xt)\, f(t)\, dt = g(x), \quad x>0, \tag{39.19}$$

частным случаем которого при $\mu=\nu$ является преобразование Варма. Показано, что если $f(x)\in L_2(0,\ \infty)$ — решение уравнения (39.19) и $-\nu\leqslant k<\nu+1/2$, то $f(x)=$ $=L^{-1}I^{\nu+k}_{-,1,\nu-k}\,g(x)$, где L^{-1}—оператор обратного преобразования Лапласа, $I^{\nu+k}_{-,1,\nu-k}$— оператор Эрдейи—Кобера (18.2). Другие формы решения уравнения (39.19) получены в работе R. S. Pathak [1].

Заметим также, что в работах B. H. J. McKellar, M. A. Box, E. R. Love [1] и E. R. Love [8] дробное интегродифференцирование применялось при получении формул обращения интегрального преобразования вида (39.12) с функцией Струве $\mathbf{H}_\nu(z)$ в ядре (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 46]).

36.6. Операторы Кобера (18.5), (18.6) в работе K. J. Srivastava [1] применены для изучения свойств обобщенного преобразования Мейера (9.7), действующего из $L_p(0,\ \infty)$ в $L_{p'}(0,\ \infty)$ $(1\leqslant p\leqslant 2,\ 1/p+1/p'=1)$, а в работах K. J. Srivastava [2, 3]—для изучения преобразования $\int_0^\infty \omega_{\mu,\nu}(xt)\, f(t)\, dt$ с функцией Ватсона $\omega_{\mu,\nu}(x)=x^{1/2}\int_0^\infty t^{-1}J_\nu(t)\times$ $\times J_\mu(x/t)\, dt$ в ядре, где $J_\nu(x)$—функция Бесселя (1.83), которое действует в $L_2(0,\ \infty)$.

36.7. В работах О. И. Маричева [1, 2] рассмотрено уравнение

$$\int_a^x f(t)\,\frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, F_3\left(\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta';\ c;\ 1-\frac{x}{t},\ 1-\frac{t}{x}\right) dt = g(x),$$

$$0\leqslant a<x<b\leqslant\infty,\quad \operatorname{Re} c>0,$$

содержащее в ядре функцию Аппеля F_3 двух переменных (10.45), и получено его решение через композиции трех операторов дробного интегродифференцирования или же через оператор с функцией F_3 в ядре (см. § 10, п. 3°). Уравнения подобного типа, но с функцией Аппеля F_1 в ядре изучены в работе О. И. Маричева, Ву Ким Туана [1].

36.8. В работе H. M. Srivastava, R. G. Buschman [1] рассмотрены операторы вида

$$x^{-\nu-\alpha}\int_0^x (x+at)^{\alpha-1}\, t^\nu f(t)\, dt, \qquad x^\delta\int_x^\infty (t+bx)^{\beta-1}\, t^{-\delta-\beta} f(t)\, dt,$$

из которых при $a=-1$, $b=-1$ получаются операторы Кобера (18.5), (18.6). Показано, что композиция таких операторов дает интегральный оператор с однородным ядром, включающим функцию Аппеля F_1 и, в частности, гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1$.

36.9. В работе G. M. Habibullah [1] рассмотрены интегральные операторы

$$Af(x)=x^\lambda\int_0^\infty (xt)^{b-1}\, {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ -xt)\, f(t)\, dt,$$

$$Bf(x)=x^\lambda\int_0^\infty (xt)^{a-1}\, {}_1F_1(a;\ c;\ -xt)\, f(t)\, dt,$$

$$Cf(x)=x^\lambda\int_0^\infty (xt)^{a-1}\,\Psi(a,\ c;\ xt)\, f(t)\, dt,$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция (1.81), а Ψ — функция Трикоми (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 245]). Показано, что операторы A и B представимы в виде композиции операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1) и обобщенных преобразований Стилтьеса и Лапласа соответственно, а оператор C — в виде композиции обобщенных преобразований Стилтьеса и Лапласа (см. § 1, п. 4° и § 9, п. 2°, 7.3 и 7.8). На основании этого уста-

новлена ограниченность операторов A, B, C из $L_p(0, \infty)$, $p \geqslant 1$, в $L_q(0, \infty)$, $1/q = 1 - 1/p - \lambda \geqslant 0$, и найдены их формулы обращения при некоторых условиях на параметры. Отметим, что ранее такого же рода результат, но в другом классе функций в отношении к операторам A и B получил R. Swaroop [1] (см. также книгу О. И. Маричева [10, с. 113—115]), а по отношению к оператору A — E. R. Love [6].

36.10. Пусть $I^{+}_{\eta,\alpha}$ — оператор Кобера (18.5), ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), а T_n — интегральный оператор $(T_n f)(x) = (-1)^n x f(x) + \int_0^x k(t/x) f(t)\, dt$. В работе A. Erdelyi [5] показано, что если $f(x) \in L_2(0, \infty)$, $k(x) = [B(n, \nu + 1)]^{-1} \times x^{\nu/2} {}_2F_1(1 - n, \nu + n - 1; \nu + 1; x)$, $\nu > -1$, то имеет место представление

$$(T_n f)(x^{-1}) = (I^{+}_{\nu/2,\alpha})^{-1} R I^{+}_{\nu/2,\alpha} f(x), \quad Rg(x) = x^{-1} g(x^{-1}).$$

36.11. В работе О. И. Маричева [6] установлен ряд соотношений композиционного характера с участием дробных интегралов $x^{\beta} I^{\alpha}_{0+} x^{\nu}$ и $x^{\beta} I^{\alpha}_{-} x^{\nu}$, которые являются частными случаями равенства (36.34). Особый интерес представляют аналоги формул (11.27)—(11.30), реализующие связь некоторых пар интегральных операторов со специальными функциями в ядрах с сингулярным оператором. Укажем две пары формул такого типа:

$$\{J_{-\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi = (\cos \nu\pi + \sin \nu\pi x^{-\nu/2} S x^{\nu/2}) \{J_{\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi,$$

$$\{J_{\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi = \{J_{-\nu}(2\sqrt{x})\}(\cos \nu\pi - \sin \nu\pi x^{\nu/2} S x^{-\nu/2})\varphi, \qquad (39.20)$$

где $|\operatorname{Re} \nu| < 1/2$, $\{J_{\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi = \int_0^{\infty} J_{\nu}(2\sqrt{x/t})\, \varphi(t)\, t^{-1}\, dt$, и

$${}_3I^{c}_{-}(a, b)\varphi(x) = [\cos c\pi + \gamma x^{c-a-b} S x^{a+b-c} + \lambda S]\, {}_1I^{c}_{0+}(a, b)\varphi(x),$$

$${}_2I^{c}_{0+}(a, b)\varphi(x) = {}_4I^{c}_{-}(a, b)[\cos c\pi - \gamma x^{a+b} S x^{-a-b} - \lambda x^{c} S x^{-c}]\varphi(x), \qquad (39.21)$$

где ${}_jI^{c}_{0+}(a, b)$ $(j = 1, 2)$, ${}_kI^{c}_{-}(a, b)$ $(k = 3, 4)$ — операторы (10.18)—(10.21) и

$$\gamma = -\frac{\sin a\pi \sin b\pi}{\sin(c - a - b)\pi}, \qquad \lambda = \frac{\sin(c - a)\pi \sin(c - b)\pi}{\sin(c - a - b)\pi}, \quad c \neq a + b,$$

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)\, dt}{t - x}.$$

Эти соотношения были получены еще ранее в работе О. И. Маричева [3]. Все такие формулы справедливы на достаточно хороших функциях и проверяются применением к обеим частям преобразования Меллина (1.112).

Отметим еще, что в работе О. И. Маричева [7] с помощью формул такого типа и преобразования Меллина был указан некоторый класс полных сингулярных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами, разрешимых в квадратурах.

37.1. Решению частных случаев уравнения (37.1) с обобщенными многочленами Лагерра $L^{\alpha}_{n}(x)$ или функциями Уиттекера $M_{k,\nu}(x)$ в ядре посвящен ряд работ (D. V. Widder [3], R. G. Buschman [4], P. R. Khandekar [1], K. N. Srivastava [9, 10], K. C. Rusia [1, 5], C. Singh [1, 2, 4], B. K. Joshi [1], H. L. Gupta, K. C. Rusia [1]). В этих работах применялся метод преобразования Лапласа или исходное уравнение приводилось к интегральному уравнению Абеля (2.1).

В работе S. D. Gupta [1] с помощью преобразования Лапласа решено уравнение

$$\int_0^x e^{a(x-t)} (x - t)^{\alpha} L^{\alpha}_{m,\mu}[(x - t)^{\mu}] f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x < a,$$

содержащее в ядре обобщенный полином Лагерра $L^{\alpha}_{m,\mu}(z)$, который определяется через преобразование Лапласа по формуле

$$L\{x^{\alpha} e^{ax} L^{\alpha}_{m,\mu}(x); p\} = \frac{\Gamma(m\mu + \alpha + 1)}{\Gamma(m\mu + 1)} (p - a)^{-\alpha} [1 - (p - a)^{-\mu}]^{-m}, \quad \alpha > 0, \ \operatorname{Re}(p - a) > 0$$

(ср. с (37.19)).

В работе H. M. Srivastava [3] с помощью преобразования Лапласа получена формула обращения обобщающего (37.1) интегрального уравнения с вырожденной гипергеометрической функцией нескольких переменных

$$\Phi_2^r(a_1, \ldots, a_r; b; z_1, \ldots, z_r) = \sum_{m_1, \ldots, m_r=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \ldots (a_r)_{m_r}}{(b)_{m_1+\ldots+m_r}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{z_r^{m_r}}{m_r!},$$

а также указано на применимость этого метода для решения общего уравнения (4.2) в случае, когда преобразование Лапласа ядра $L\,\mathrm{k}(p)$ представимо в виде $L\,\mathrm{k}(p) = [(p - \alpha)^n (L\,\mathrm{k}_1)(p)]^{-1}$, где $\mathrm{k}_1(x)$ — некоторая функция.

37.2. В работах S. L. Kalla [2] и T. N. Srivastava, Y. P. Singh [1] с помощью преобразования Лапласа получены решения уравнений (см. (37.2)):

$$\int_a^x (x^2 - t^2)^{\nu} J_{\nu}(\lambda (x^2 - t^2))\, e^{-b(x^2-t^2)} f(t)\, dt = g(x),$$

$$\int_0^x (x - t)^{\nu} J_{\nu}^{\mu}(\lambda (x - t)^{\mu})\, f(t)\, dt = g(x),$$

где $J_{\nu}(x)$ — функция Бесселя (1.83), а $J_{\nu}^{\mu}(x)$—функция Бесселя—Мейтленда (см. § 23, п. 2°, 18.2).

В работе T. R. Prabhakar [3] метод дробного интегродифференцирования применен для решения интегрального уравнения

$$\int_a^x (x - t)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}[\lambda (x - t)] f(t)\, dt = g(x), \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0,$$

и аналогичного уравнения с переменным нижним пределом, где $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, — обобщенная функция Миттаг-Леффлера.

В работе H. M. Srivastava, R. G. Buschman [2] метод, основанный на преобразовании Лапласа, был использован для нахождения решения наиболее общего сверточного уравнения

$$\int_0^x (x - t)^{\alpha-1} H_{p,q}^{m,n}\left[x - t \,\middle|\, \begin{matrix}(a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p)\\ (b_1, B_1), \ldots, (b_q, B_q)\end{matrix}\right] f(t)\, dt = g(x) \qquad (39.22)$$

с H-функцией Фокса в ядре. В качестве примеров были рассмотрены частные случаи этого уравнения с обобщенной гипергеометрической функцией Райта ${}_p\Psi_{q-1}$, специальным случаем G-функции Мейера вида $G_{p,q}^{1,n}(x)$ и обобщенной гипергеометрической функцией типа ${}_pF_{p-1}$, см. также работу V. C. Nair [1], где рассмотрены сверточные уравнения с обобщенной гипергеометрической функцией Райта ${}_p\Psi_q$ и обобщенной функцией Бесселя—Мейтленда $J_{\nu}^{\mu}(x)$. В работе H. M. Srivastava [2] решение аналогичного (39.22) уравнения с переменным нижним и бесконечным верхним пределами было получено с помощью преобразования Меллина, а в качестве частных случаев были рассмотрены уравнения с G-функцией вида $G_{p,q}^{m,n}(x)$, обобщенной гипергеометрической функцией типа ${}_pF_q(x)$, функцией Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(x)$ и функциями Бесселя $J_{\nu}(x)$, $K_{\nu}(x)$, $Y_{\nu}(x)$.

37.3. Н. Я. Сонин ([4, 5], 1884 г., см. также [6, с. 151]) показал, что свойством (4.2″) наряду с операторами дробного интегродифференцирования ($\mathrm{k}(x) = x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, $l(x) = x^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$) обладают также операторы (4.2), (4.2′) с ядрами

$$\mathrm{k}(x) = (2x)^{-p} \frac{J_{-p}(2i\sqrt{xy})}{(2i\sqrt{xy})^{-p}}, \quad l(x) = \frac{(2x)^{p-1} J_{p-1}(2\sqrt{xy})}{(2\sqrt{xy})^{p-1}}, \quad 0 < p < 1, \quad (39.23)$$

их частные случаи при $p = 1/2$ вида

$$\mathrm{k}(x) = \frac{\cos(2i\sqrt{xy})}{\sqrt{\pi x}}, \qquad l(x) = \frac{\cos(2\sqrt{xy})}{\sqrt{\pi x}}, \qquad (39.24)$$

а также операторы с ядрами

$$k(x)=\frac{x^{-p}e^{-yx}}{\Gamma(1-p)},\quad l(x)=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_{-\infty}^{x}\tau^{p-2}e^{-\tau x}d\tau.$$

После квадратичных замен переменных и функций соответственно вида

$$x=\xi^2,\ t=\tau^2,\ a=c^2,\ 2\sqrt{y}=\lambda,\ 2^{1-p}\tau f(\tau^2)=F(\tau),\ g(\xi^2)=G(\xi);$$

$$x=a+b^2-\xi^2,\ t=a+b^2-\tau^2,\ 2i\sqrt{y}=\lambda,\ 2f(t)=\sqrt{\pi}F(\tau),\ g(x)=G(\xi)$$

операторы (4.2), (4.2′) с ядрами (39.23) принимают форму

$$\int_c^{\xi}\left(\frac{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}{i\lambda}\right)^{-p}J_{-p}(i\lambda\sqrt{\xi^2-\tau^2})\,F(\tau)\,d\tau=G(\xi),$$

$$F(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_c^{\tau}\left(\frac{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}{\lambda}\right)^{p-1}J_{p-1}(\lambda\sqrt{\tau^2-\xi^2})\,\xi\,G(\xi)\,d\xi,\quad 0<p<1,$$

что совпадает с (37.41), (37.43), а операторы с ядрами (39.24)—вид

$$\int_{\xi}^{b}\frac{\cos(\lambda\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}\,\tau F(\tau)\,d\tau=G(\xi),$$

$$F(\tau)=-\frac{2}{\pi\tau}\,\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{b}\frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{\xi^2-\tau^2})}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,\xi G(\xi)\,d\xi.$$

Авторство последних формул в некоторых работах приписывают Д. Джонсу (D. S. Jones [1]).

37.4. В работе Т. А. Розета [1] получена формула обращения в $L_2(0,\infty)$ общего интегрального уравнения (39.11) при определенных условиях на ядро $K(x,t)$. В качестве примеров даны формулы решения уравнений

$$\int_0^x\frac{J_1(2\sqrt{x(x-t)})}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt=g(x),\qquad \int_0^{\infty}\frac{J_n(\sqrt{x(x+t)})}{(\sqrt{x+t})^n}\,f(t)\,dt=g(x),$$

первое из которых является предельным случаем уравнения (37.68) при $\alpha=0$, $\lambda=2i$.

Формула обращения несверточного уравнения $(J^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x)=g(x)$ с оператором (37.67) при $\alpha=1$ получена в работе A. G. Mackie [1] (см. также работу K. Soni [4]) как пример более общего результата (см. далее п. 37.11).

В работе K. Soni [1] с помощью несверточных операторов (37.67) и операторов дробного интегродифференцирования (5.1), (5.8) решена задача описания класса функций $f(x)\in L_2(0,\infty)$, для которых $x^{\nu/2}\int_0^{\infty}J_{\nu}(2\sqrt{xt})\,t^{-\nu/2}f(t)\,dt\in L_2(0,\infty)$ при $\nu>0$.

37.5. В работе H. Pollard, D. V. Widder [1] метод операционного исчисления применен для получения решения уравнения $\int_0^x k(x-t)\,f(t)\,dt=g(x)$, $x>0$, ядро $k(u)=\frac{1}{u\sqrt{4\pi u}}\exp\left(-\frac{1}{4u}\right)$ $(u>0)$ которого связано с решением уравнения теплопроводности. При этом решение этого уравнения выражается через операторы дробного интегродифференцирования Римана—Лиувилля порядка 1/2.

37.6. Пусть $J_{\lambda}(\eta,\alpha)$, $R_{\lambda}(\eta,\alpha)$ — операторы (37.45), (37.46), $L_{p,\nu}\equiv L_p([0,\infty);x^{\nu p-1})$ — весовое пространство. Если $\alpha\geqslant 1/2$, $1<p<\infty$, то оператор $J_{\lambda}(\eta,\alpha)$ ограничен в $L_{p,\nu}$ при $\nu<2+2\eta$, а оператор $R_{\lambda}(\eta,\alpha)$ — при $\nu>-2\eta$. Если $0<\alpha<1/2$, $2/(1+2\alpha)<p<2/(1-2\alpha)$, то оператор $J_{\lambda}(\eta,\alpha)$ ограничен в $L_{p,\nu}$ при $\nu<\min(1,2/p)+2\alpha+2\eta$, а оператор $R_{\lambda}(\eta,\alpha)$ — при $\nu>\max(1,2/p)-2\alpha-2\eta$ (P. Heywood, P. G. Rooney [1], P. Heywood [3]).

37.7. Следуя работам T. R. Prabhakar [1, 2], в статье T. R. Prabhakar, M. Chakrabarty [1] с помощью дробных q-интегралов (см. § 23, п. 2°, 18.15) получена формула обращения q-интегрального аналога уравнения (37.1) с заменой ${}_1F_1$ на базисную вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1\Phi_1$ в ядре (см. L. J. Slater [1]).

37.8. В работе E. Pinney [1] рассмотрено интегральное уравнение

$$\int_0^\infty p(t)\,\varphi(\sqrt{x^2+t^2})\,dt = f(x), \quad x>0, \tag{39.25}$$

и дано его решение $\varphi(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(\sqrt{x^2+t^2})\,q(t)\,dt$ в предположении, что для функции $p(x)$ существует функция $q(x)$ такая, что $\int_0^{\pi/2} p(r\cos\varphi)\,q(r\sin\varphi)\,d\varphi = 1$ для любого $r>0$. В этой работе также получены достаточные условия для выполнения последнего соотношения, которое для уравнения (39.25) является аналогом равенства (4.2″) для уравнения Н. Я. Сонина (4.2), и рассмотрены следующие частные случаи:

$$p(t) = t^{1-2\mu} L_\nu^{-\mu}(kt^2), \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1,$$

где

$$L_\nu^{-\mu}(z) = -\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(k+\mu+1)}\,\frac{z^k}{k!}$$

— обобщенная функция Лежандра (при натуральном $\nu=n$ многочлен Лежандра $L_n^{-\mu}(z)$); в частности, $p(t)\to t^{1-2\mu}$ при $\nu\to 0$; и

$$p(t) = t^{1-\mu} J_{-\mu}(\alpha t), \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1,$$

где $J_{-\mu}(z)$ — функция Бесселя 1-го рода (1.83); в частности, $p(t)=\cos\alpha t$ при $\mu=1/2$. В случае $p(t)=t^{1-2\mu}$, $0<\operatorname{Re}\mu<1$, показана связь уравнения (39.25) с уравнением Абеля (2.1), а при $p(t)=\cos\alpha t$ уравнение (39.25) сведено к виду $\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}}\times$ $\times f(t)\,dt = g(x)$, $x>0$.

37.9. В работе K. Soni [3] для операторов вида (37.4) найдено представление

$$\int_0^x (x-t)^{\nu/2} J_\nu[2\sqrt{k(x-t)}]\,f(t)\,dt = \frac{k^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^x (x-t)^\nu \times$$

$$\times\left[\frac{d}{dt}\int_0^t J_0[2\sqrt{k(t-\tau)}]f(\tau)\,d\tau\right]dt;$$

для уравнения $\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x J_0[2\sqrt{k(x-t)}]\,f(t)\,dt = g(x)$, $-\infty<x<\infty$, даны необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_2(-\infty,\infty)$ и получено его решение вида $f(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^\infty J_0[2\sqrt{k(t-x)}]\,g(t)\,dt$, а для уравнения

$$\frac{d}{dx}\int_a^x J_0[2\sqrt{k(x-t)}]f(t)\,dt = g(x), \quad a>-\infty,$$

исследованы условия единственности его решения в классе $L_2(a,+\infty)$ в связи с тем, что соответствующее однородное уравнение ($g\equiv 0$) может иметь в $L_2(a,+\infty)$ нетривиальное решение. Аналогичные исследования проведены для операторов с переменным нижним пределом (см. также C. J. Bouwkamp [1]). В работе W. E. Williams [1] методом представления в виде композиции двух уравнений вида (37.4) решено уравнение (39.11) с ядром

$$\mathcal{K}(x,t) = \int_b^\infty (\tau^2-b^2)^r\,\tau^{-m-n-1} J_m(x\tau)\,J_n(t\tau)\,d\tau.$$

Отметим здесь, что в приложениях встречаются и другие интегральные уравнения с функцией Бесселя $J_\nu(x)$ в ядре, рассматриваемые на всей оси. Два таких уравнения

можно получить из формул (40.26), (40.27), если в первой произвести дифференцирование по y при $y=0$ и учесть (40.45), (40.44), а во второй положить $y=0$ и учесть (40.32), (40.47). Тогда при $\mu=0$ после замены $\tau(x)=l_2 g(x)$ при $|p|<1/2$, $p\neq 0$ получатся соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(t)}{|t-x|^{2p}}\,\overline{J}_{-p}(\lambda|t-x|)\,dt = g(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\nu(x) = -\frac{\operatorname{ctg} p\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(t-x)}{|t-x|^{1-2p}} \frac{d}{dt}\left[g(t)\,\overline{J}_{p-1}(\lambda|t-x|)\right] dt,$$

где $\overline{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя—Клиффорда (37.8). Можно убедиться, что второе из них обращает первое при соответствующих условиях на функцию $g(x)$.

37.10. Пусть $K\nu(z)$ — функция Макдональда (1.85), $Y\nu(z)$ — функция Бесселя 2-го рода (Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 12]). В работе V. K. Varma [1] с помощью преобразования Меллина и использования формул 21 и 20 из табл. 9.1 даны решения аналогичных (37.4) уравнений с переменным нижним и бесконечным верхним пределами с заменой $J\nu$ на $K\nu$ и $Y\nu$:

$$\int_x^{\infty} (t-x)^{(\nu-1)/2} K_\nu(2\sqrt{t-x})\,f(t)\,dt = g(x),$$

$$\int_x^{\infty} (t-x)^{(\nu-1)/2} Y_\nu(2\sqrt{t-x})\,f(t)\,dt = g(x).$$

37.11. В работе A. G. Mackie [1] методом сведения к краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + c(x, y)\varphi = 0,\ c(x, y)=c(y, x),\ \varphi(x, 0)=f(x),\ x>0,\ \varphi(0, y)=-f(y),\ y>0, \tag{39.26}$$

в первом квадранте $x>0$, $y>0$ получено решение интегрального уравнения

$$\int_0^x \mathcal{K}(x, t)\,g(t)\,dt = f(x), \quad g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\Big|_{x=y},$$

где $\mathcal{K}(x, t) = R(x, x; t, 0)$, а $R(x, x_0; t, t_0)$—функция Римана уравнения (39.26), см. определение 40.2. В качестве примеров решены уравнение (37.67) при $\alpha=1$ и уравнения $\int_0^x P_n(x/t)\,\varphi(t)\,dt = g(x)$, $\int_0^x P_n(t/x)\,\varphi(t)\,dt = g(x)$ с многочленами Лежандра $P_n(z)$ в ядрах (ср. с уравнением (39.3)).

37.12. В работе T. R. Prabhakar [5] рассмотрены уравнения вида

$$\int_\alpha^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,\Phi_1(a, b; c; 1-x/t, \lambda(x-t))\,f(t)\,dt = g(x), \quad \alpha < x < \beta, \tag{39.27}$$

$$\int_\alpha^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,\Phi_1(a, b; c; 1-t/x, \lambda(x-t))\,f(t)\,dt = g(x), \quad \alpha < x < \beta, \tag{39.28}$$

где $\Phi_1(a, b; c; x, y)$ — функция Гумберта (10.64), $\alpha>0$, $\beta<\infty$. В частности, при $\lambda=0$ уравнения (39.27), (39.28) являются уравнениями Лава (35.1), (35.2), а при $b=0$ — уравнениями вида (37.1). Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости этих уравнений в $L_1(\alpha, \beta)$ и получены их решения в виде

$$f(x) = e^{\lambda x}x^{-b}I_{\alpha+}^{-a}\,e^{-\lambda x}x^{b}I_{\alpha+}^{a-c}g(x), \quad f(x) = I_{\alpha+}^{a-c}\,e^{\lambda x}x^{b}I_{\alpha+}^{-a}\,e^{-\lambda x}x^{-b}g(x)$$

соответственно. Здесь $I_{\alpha+}^{a}$ — оператор дробного интегродифференцирования Римана—Лиувилля (см. § 2). В работе T. R. Prabhakar [6] эти результаты перенесены на уравнения вида (39.27), (39.28) с переменным нижним и конечным верхним пределами и более общие уравнения, например, уравнение

$$\int_x^\beta \frac{[h(t)-h(x)]^{c-1}}{\Gamma(c)}\,\Phi_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{h(x)}{h(t)},\ \lambda(h(x)-h(t))\right) f(t)\,dh(t)=g(x),\ \alpha<x<\beta,$$

где $h(t)\in C^\infty[\alpha,\beta]$, $h'(t)>0$. Заметим, что, в частности, при $\lambda=0$, $h(t)=t^m$ последнее уравнение сводится к уравнению (39.6), а при $b=0$, $h(t)=t$ — к уравнению (37.1).

37.13. В работе Y. Tanno [1] изучена проблема обращения интегральных преобразований типа свертки $\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f(t)\,dt=g(x)$, где $k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}[l(t)]^{-1}e^{xt}dt$, а $l(t)$—мероморфная функция с действительными нулями и полюсами, а также более общих преобразований (см. по этой тематике монографию И. И. Хиршмана, Д. В. Уиддера [1]). В качестве примеров получены решения уравнения Абеля (2.1), уравнения Хиггинса (39.1) и уравнения вида (39.4).

37.14. В работе R. K. Saxena, P. L. Sethi [1] установлены аналогичные (37.60), (37.61) операторные соотношения, которые связывают оператор обобщенного преобразования Ханкеля (37.47) и модификации операторов (23.5), (23.6).

37.15. В работе O. Tedone [2] рассмотрено интегральное уравнение

$$\int_a^x (x-t)^n I_m(x-t)\,f(t)\,dt=g(x),\quad m\geqslant 0,\ m+n\geqslant 0, \tag{39.29}$$

с модифицированной функцией Бесселя (1.84) в ядре. На основании свойств функции $I_m(z)$ для операторов (39.29) установлены некоторые дифференциально-рекуррентные соотношения. С их помощью решение уравнения (39.29) при $m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ сведено к последовательному решению простейших уравнений с $m=n=0$ (см. п. 1° (к § 37, п. 1°)) и дифференциального уравнения, а при $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n=-1,\ -2,\ \ldots,\ m+n>0$ — к решению интегрального уравнения Вольтерра с разностным ядром.

38.1. Н. Н. Лебедев [2] при изучении частного случая уравнений (38.1) пришел к уравнению Шлемильха

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\equiv -\int_0^{\pi/2}\varphi(r\cos\theta)\,d\theta=g(r),$$

содержащему дробный интеграл порядка 1/2 по функции x^2 (см. § 18, п. 2°). Обращение этого уравнения было использовано в работе Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда [1].

38.2. В работе C. J. Tranter [3] решение уравнений (38.1) в случае $G=0$, $\mu=\nu$ представлено в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{\nu+2k+n}(x)$ по функциям Бесселя (1.83), в результате чего задача была сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно a_k.

В работе J. C. Cook [1] использован интегральный аналог такого метода, давший возможность свести эту систему к уравнению Фредгольма 2-го рода.

38.3. В работах J. R. Walton [1, 2] изучен вопрос единственности решения парного уравнения (38.1) в классе обобщенных функций.

38.4. В работе C. Nasim, I. N. Sneddon [1] исследованы парные уравнения с ядрами общего вида с помощью преобразования Меллина. В качестве примеров рассмотрены парные уравнения с различными функциями Бесселя и тригонометрическими функциями в ядрах вида (38.1).

38.5. В работе Л. Г. Макаренко [1] с помощью двумерных аналогов операторов Эрдейи—Кобера (см. § 29, п. 2°, 24.2) были изучены двумерные парные и тройные интегральные уравнения с функциями Бесселя в ядрах.

38.6. В работе P. L. Sethi, P. K. Banerji [1] с помощью дробного интегродифференцирования уравнение более общее, чем (38.16), сводится к уравнению Фредгольма 2-го рода.

38.7. Впервые система парных уравнений, связанная с преобразованием Мелера—Фока и сводящаяся к (38.22) при $g=\mu=0$, $H(\tau)=th\tau\pi/\tau$, была исследована В. Г. Гринченко, А. Ф. Улитко [1]. В этой работе использовались дробные интегралы порядка 1/2 по функции $ch x$, что позволило систему свести к уравнению Фредгольма 2-го рода.

Две системы с такими же ядрами и две системы с тригонометрическими ядрами подобным методом независимо исследовал А. А. Баблоян [1], а систему вида (38.22),

но с целым μ впервые исследовали А. Н. Руховец, Я. С. Уфлянд [1]. Эти результаты были развиты в статье Н. А. Вирченко, Л. Г. Макаренко [1].

Отметим также работу Н. Н. Лебедева, И. П. Скальской [1], где при изучении системы (38.22) с $\mu=0$ и $H(\tau)$ специального вида вместо дробных интегралов было получено уравнение с функцией Гаусса

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\, {}_2F_1\left(\alpha,\ -\alpha;\ \frac{1}{2};\ 1-\frac{x}{t}\right) dt = g(x),$$

для обращения которого использовался результат работы E. R. Love [2], см. § 35, п. 1°.

В статье Н. А. Вирченко [1] при исследовании трех парных уравнений с обобщенной присоединенной функцией Лежандра в ядре использовалась формула обращения более общего уравнения с функцией Гаусса

$$\int_a^x \varphi(t)\,(\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} t)^{c-1}\, {}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ \frac{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} x+d}\right) dt = g(x),\quad c>0.$$

В работе С. П. Пономаренко [2] рассматривалась система парных уравнений матричного типа $P^{\mu}[A_j(\tau)\,\Psi(\tau)] = f^{(j)}(x)$, $j=1,\ 2$, которая с помощью операторов (38.24)—(38.27) была сведена к системе уравнений Фредгольма 2-го рода.

Наряду с уравнениями (38.22) в некоторых работах рассматривались аналогичные уравнения, связанные с обратным преобразованием Конторовича—Лебедева. Парные и тройные уравнения такого типа исследованы в статье J. S. Lowndes [3], причем парные как предельный частный случай тройных. Один из случаев парных уравнений решен в замкнутой форме, а остальные сведены к уравнениям Фредгольма 2-го рода.

38.8. Уравнения (38.31) обобщают системы из работ J. C. Cooke [3] и Н. М. Бородачева [1] и пересекаются с системой из работы С. П. Пономаренко [1]. Все эти системы с помощью операторов Эрдейи—Кобера сводятся к уравнениям Фредгольма 2-го рода.

38.9. В работах Н. А. Вирченко, Л. Г. Макаренко [3] и Л. Г. Макаренко [1] рассматривались парные и тройные интегральные уравнения с более общими, чем $J_{\nu}(z)$, ядрами с функцией Ватсона $\omega_{\mu,\nu}(x)$, см. выше п. 36.6. Эти уравнения были сведены к уравнениям Фредгольма 2-го рода.

38.10. В статье Н. А. Вирченко [2] метод из § 38, п. 1°, пример 38.1, использован для вывода формул обращения двух парных уравнений с функциями ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$ в ядрах путем их сведения к уравнению $Af=g$, где A — оператор из п. 36.9.

38.11. В работах K. N. Srivastava [11] и Н. А. Вирченко, В. А. Ромащенко [1] рассматривались тройные интегральные уравнения типа (38.22) при $\mu=0$ и произвольном μ соответственно. В последней из этих работ был обобщен результат из статьи R. S. Pathak [2].

В работах M. Lowengrub, J. Walton [1], J. R. Walton [3] система тройных уравнений типа (38.31) с помощью операторов Эрдейи—Кобера (18.5), (18.6) сведена к системе обобщенных интегральных уравнений Абеля, см. § 34, п. 2°, 30.9.

38.12. В некоторых работах рассматривались 4-кратные и n-арные интегральные уравнения. Так, в работе M. I. Ahmad [1] методом из работы J. C. Cooke [2] были исследованы 4-кратные уравнения с функциями $J_{\nu}(z)$ в ядрах, а в работе A. P. Dwivedi, T. N. Trivedi [1] метод, использованный в § 38 при решении системы (38.16), был применен к аналогичным тройным и 4-кратным уравнениям.

Дальнейшее обобщение в этом направлении было сделано в работе Ву Ким Туана [5], в которой рассматривались n-арные уравнения с G-функцией Мейера в ядрах вида

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} xG^{m,l_i+1}_{p+l_i+1,\,q_i+m+1}\left(xy\,\middle|\,\begin{matrix}0, & (a^i_{l_i}), & (c_p)\\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1\end{matrix}\right) f(y)\,dy = g_i(x),\quad \alpha_{i-1}<x<\alpha_i,$$

$$x\,\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} G^{m_i,l+1}_{p_i+l+1,\,q+m_i+1}\left(xy\,\middle|\,\begin{matrix}1, & (a_l), & (c^i_{p_i})\\ (b^i_{m_i}), & (d_q), & 0\end{matrix}\right) f(y)\,dy = g_i(x),\quad \alpha_{i-1}<x<\alpha_i,$$

где $0<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=\infty$ — некоторое разбиение луча $[0,\ \infty)$ на n интервалов, $g_i(x)$ — заданные функции, а остальные параметры удовлетворяют специальным условиям. Было доказано, что для разрешимости системы в классе $f(x)\in L_2(0,\ \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $g_i\in L_2(\alpha_{i-1},\ \alpha_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Единственное решение в этом случае было найдено в замкнутом виде. При этом использовались методы работ C. Fox [4] и R. K. Saxena [3, 4], где формально (без исследования классов функций) строились решения парных уравнений с более общей H-функцией Фокса в ядрах. В этих работах применялись операторы Эрдейи—Кобера.

ГЛАВА 8

Приложения к дифференциальным уравнениям

В настоящей главе излагаются некоторые приложения аппарата дробного интегродифференцирования к исследованию дифференциальных уравнений в частных производных типа уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу и обыкновенных дифференциальных уравнений дробного и целого порядка. В частности, в замкнутом виде решаются краевые задачи Коши, Дирихле и Неймана с начальными данными на особых линиях и доказываются теоремы существования и единственности решений некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка. Построенные решения имеют широкие применения при исследовании краевых задач типа задачи Трикоми для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа.

§ 40. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЧЕРЕЗ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В данном параграфе после изложения ряда аспектов общей теории эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, разработанной в монографии И. Н. Векуа [3], 1948 г., рассмотрим ее приложения к исследованию так называемого обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца и покажем, что аналитические функции после применения к ним по каждой переменной оператора Эрдейи—Кобера (18.8) $I_{\eta,\alpha}$ а также обобщенного оператора Эрдейи—Кобера (37.45) $J_\lambda(\eta, \alpha)$ преобразуются в решения указанного уравнения Гельмгольца. Эти результаты используем для построения решений ряда краевых задач.

1°. Предварительные сведения. Пусть заданы следующие общие однородные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными и аналитическими коэффициентами:

$$Hu \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u = 0, \tag{40.1}$$

$$H_1u \equiv u_{xx} - u_{yy} + A_1(x, y)u_x + B_1(x, y)u_y + C_1(x, y)u = 0, \tag{40.2}$$

$$Ku \equiv u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0, \tag{40.3}$$

а также *сопряженные* к (40.1) и (40.3) уравнения вида

$$H^*v \equiv v_{\xi\eta} - (a(\xi, \eta)v)_\xi - (b(\xi, \eta)v)_\eta + c(\xi, \eta)v = 0, \quad (40.4)$$

$$K^*v \equiv v_{xx} + v_{yy} - (A(x, y)v)_x - (B(x, y)v)_y + C(x, y)v = 0. \quad (40.5)$$

Допустим, что комплексные (вообще говоря) переменные x, y, ξ, η связаны формулами

$$\xi = x + iy, \ \eta = x - iy, \ x = (\xi + \eta)/2, \ y = (\xi - \eta)/(2i). \quad (40.6)$$

Обозначив через $\overline{\xi}$ сопряженное к ξ число, отметим, что $\overline{\xi} = \eta$ справедливо лишь в случае, когда x и y действительны.

Введем дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (40.7)$$

для которых, в частности, очевидно формальное соотношение

$$4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta_2, \quad (40.8)$$

где через Δ_2 обозначен двумерный *лапласиан*.

Тогда, если коэффициенты уравнений (40.1)—(40.3) связаны равенствами

$$\left.\begin{matrix} 4a(\xi, \eta) \\ 4b(\xi, \eta) \end{matrix}\right\} = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right) \pm iB\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right),$$
$$4c(\xi, \eta) = C\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right), \quad (40.9)$$

$$A_1(x, y) = A(x, -iy), \ B_1(x, y) = iB(x, -iy), \ C_1(x, y) = C(x, -iy), \quad (40.10)$$

то уравнения (40.1)—(40.3) и соответственно (40.4), (40.5) могут быть преобразованы друг в друга заменами (40.6) и изменением y на iy при переходе от (40.2) к (40.3). Тем не менее в случае действительных переменных ξ, η, x, y указанные уравнения классифицируются по типам: уравнения (40.1), (40.4) и (40.2) называются уравнениями *гиперболического типа* соответственно в 1-й и 2-й канонических формах, а уравнения (40.3), (40.5) относятся к уравнениям *эллиптического типа*.

Пусть точка $\xi = x + iy$ принадлежит некоторой односвязной области $\mathfrak{D}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (в принципе x и y сами могут быть комплексными). Обозначим тогда через $\overline{\mathfrak{D}}$ область, которой принадлежит точка η, связанная с ξ формулами (40.6), а через $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ — декартово произведение $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$, называемое еще *цилиндрической областью*. Тогда введем следующее

Определение 40.1. *Односвязная область $\mathfrak{D}$ плоскости $\mathbf{C}$ называется основной для уравнений (40.1), (40.3), если их коэффициенты a, b, c аналитичны по двум переменным $(\xi, \eta) \in (\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, а A, B, C аналитичны при $(x, y) \in \mathfrak{D}$ и имеют место равенства (40.9).*

Укажем наиболее важные формулы представлений решений уравнения (40.3) через аналитические функции, которые ниже в частных случаях будут широко применяться. Первая из этих формул использует понятие *функции Римана*, которая определяется следующим образом.

Определение 40.2. *Решение $v = R(\xi, \eta) = R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ краевой задачи Гурса для сопряженного уравнения (40.4) с условиями*

$$R|_{\xi=\xi_0} = \exp \int_{\eta_0}^{\eta} a(\xi_0,\ t)\,dt,\quad R|_{\eta=\eta_0} = \exp \int_{\xi_0}^{\xi} b(\tau,\ \eta_0)\,d\tau \qquad (40.11)$$

называется функцией Римана оператора H (40.1), соответствующей точке $(\xi_0,\ \eta_0) \in \mathfrak{D}$.

Из свойств функции Римана отметим следующие:

а) если $a,\ b \in C^1(\mathfrak{D})$, $c \in C(\mathfrak{D})$, то функция Римана R оператора H в области $\mathfrak{D}$ существует и единственна;

б) на *характеристиках* $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ выполняются соотношения $R_\eta(\xi_0,\ \eta) = a(\xi_0,\ \eta)\,R(\xi_0,\ \eta)$, $R_\xi(\xi,\ \eta_0) = b(\xi,\ \eta_0)\,R(\xi,\ \eta_0)$;

в) выполняется *условие нормировки* $R(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi_0,\ \eta_0) = 1$;

г) справедливо *свойство взаимности*: $R^*(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) = R(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)$, т. е. по последним переменным ξ_0, η_0 функция $R(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$ является функцией Римана R^* сопряженного уравнения (40.4), соответствующей точке $\xi,\ \eta$.

Более подробную информацию о функции Римана и ее таблицы для различных частных уравнений вида (40.1) можно найти в книгах В. М. Бабича и др. [1], Н. С. Кошлякова, Э. Б. Глинера, М. М. Смирнова [1] и в статье А. А. Андреева, В. Ф. Волкодавова, Г. Н. Шевченко [1], см. также цитированную там литературу.

Имеет место следующая теорема, см. И. Н. Векуа [3, с. 31].

Теорема 40.1. *Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (40.3). Тогда все регулярные в $\mathfrak{D}$ (т. е. разложимые там в ряды Тейлора) решения уравнения (40.3) могут быть представлены в виде*

$$u(x,\ y) = \alpha_0 R(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi,\ \overline{\xi}) + \int_{\xi_0}^{\xi} \Phi(t)\,R(t,\ \eta_0;\ \xi,\ \overline{\xi})\,dt +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\overline{\xi}} \Phi^*(\tau)\,R(\xi_0,\ \tau;\ \xi,\ \overline{\xi})\,d\tau,\quad (\xi_0,\ \eta_0) \in (\mathfrak{D},\ \overline{\mathfrak{D}}), \qquad (40.12)$$

где α_0 — некоторая постоянная, а $\Phi(\xi)$ и $\Phi^*(\eta)$ — некоторые аналитические соответственно в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ функции, однозначно определяемые через функцию $u(x, y)$, причем предполагается, что выполняются соотношения (40.6).

Следующая теорема отражает еще несколько аналогичных интегральных представлений решений (40.3) через функции, подчиненные менее ограничительным условиям, чем функция Римана.

Теорема 40.2. *Пусть функция $\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)$ аналитична в цилиндре $(\mathfrak{D},\ \overline{\mathfrak{D}},\ \mathfrak{D})$, где $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (40.1), а по переменным $\xi,\ \eta$ удовлетворяет уравнению (40.1). Пусть еще $\varphi(\xi)$ — произвольная аналитическая в $\mathfrak{D}$ функция и все приведенные ниже интегралы существуют. Тогда интеграл*

$$u(x,\ y) = \int_L \gamma(\xi,\ \overline{\xi},\ \theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta \qquad (40.13)$$

по некоторому замкнутому контуру L из области $\mathfrak{D}$ удовлетворяет уравнению (40.3) при условиях (40.6), (40.9). Если еще выполняется приведенное ниже условие (40.14) (или соответственно (40.15)) вида

$$\lim_{\theta\to\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta) + a(\xi,\ \eta)\,\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)\right] = 0, \qquad (40.14)$$

$$\lim_{\theta\to\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta) + b(\xi,\ \eta)\,\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)\right] = 0, \qquad (40.15)$$

то интеграл (40.16) (или соответственно (40.17)) вида

$$u(x,\ y)=\int_{\xi_0}^{\xi}\gamma(\xi,\ \overline{\xi},\ \theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{40.16}$$

$$u(x,\ y)=\int_{\overline{\xi_0}}^{\overline{\xi}}\gamma(\xi,\ \overline{\xi},\ \theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{40.17}$$

где ξ_0 лежит на границе области $\mathfrak{D}$, является регулярным решением уравнения (40.3) в области $\mathfrak{D}$.

Замечание 40.1. По отношению к уравнению (40.2) теорема 40.2 также сохраняет силу, но при условиях $\xi=x+y$, $\overline{\xi}=x-y$, (40.10) вместо (40.6), (40.9). Требование аналитичности функций $\gamma(\xi,\ \overline{\xi},\ \theta)$, $\varphi(\xi)$ в этом случае можно ослабить до условия существования непрерывных вторых производных.

Замечание 40.2. К примерам функций $\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)$, удовлетворяющих условиям теоремы 40.2, можно отнести следующие две функции:

$$R(\theta,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta),\ \eta_0\in\overline{\mathfrak{D}};\int_{\theta}^{\xi}R(t,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)\,(t-\theta)^{\alpha-1}\,dt,\ \operatorname{Re}\alpha>0.$$

Теорема 40.3. *Если A, B, C — аналитические в $\mathfrak{D}$ функции, то любое регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (40.3) является там аналитической функцией от x, y.*

2°. Представления решений обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. В этом пункте получим различные интегральные представления решений и некоторые частные формулы их обращений для двух взаимосвязанных случаев уравнений (40.3) и (40.2), а именно для *обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца*

$$H^{\lambda}_{p,\mu}u\equiv u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\mu}{x}u_x+\frac{2p}{y}u_y+\lambda^2u=0,\ p,\ \mu,\ \lambda-\text{const}, \tag{40.18}$$

и соответствующего ему гиперболического уравнения

$$h^{\lambda}_{p,\mu}u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\frac{2p}{y}u_y+\frac{2\mu}{x}u_x+\lambda^2u=0, \tag{40.19}$$

получаемого из (40.18) заменой y на $-iy$.

Уравнение (40.18) в частном случае $\mu=\lambda=0$ представляет собой так называемое уравнение осесимметрической теории потенциала (подробнее о нем см. в § 41, п. 1°, § 43, п. 2°). Здесь отметим лишь, что само уравнение (40.18) появляется (при частных значениях $x=X$, $y=Y$, $2\mu=m-1$, $2p=n-1$), если искать монохроматические решения вида $u=u(X,\ Y,\ t)=u_1(X,\ Y)\,e^{\pm i\lambda t}$, $X^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2$, $Y^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$ в пространстве с координатами $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ и временем t для волнового уравнения Даламбера

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial y_k^2}-\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0. \tag{40.19'}$$

Возможность эффективного построения решений уравнения (40.18) во многом обусловлена двумя замечательными свойствами оператора $H^{\lambda}_{p,\mu}$: «формулами соответствий»

$$H^{\lambda}_{p,\mu}(x^{1-2\mu}u)=x^{1-2\mu}H^{\lambda}_{p,1-\mu}u,\ H^{\lambda}_{p,\mu}(y^{1-2p}u)=y^{1-2p}H^{\lambda}_{1-p,\mu}u \tag{40.20}$$

и композиционной представимостью решений уравнения (40.18) через операторы типа Эрдейи—Кобера (18.8), (37.45) от четных по x и y гармонических функций, вытекающей из формулы

$$I^{(x)}_{-1/2,\mu} I^{(y)}_{-1/2,p} J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0)\,\Delta f = H^{\lambda}_{p,\mu} I^{(x)}_{-1/2,\mu} I^{(y)}_{-1/2,p} J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f, \quad (40.21)$$

где индексы x, y в операторах означают переменную, по которой действуют эти операторы. Соотношения (40.20) каждому решению $\tilde{u}$ уравнения (40.18) ставят в соответствие другое решение, получаемое из $\tilde{u}$ заменой μ на $1-\mu$ (или p на $1-p$) и домножением на $x^{1-2\mu}$ (или y^{1-2p}). А соотношение (40.21) показывает, что если функция f гармоническая (т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$), то функция $u = H^{\lambda}_{p,\mu} I^{(x)}_{-1/2,\mu} \times \times I^{(y)}_{-1/2,p} J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f$ является решением уравнения (40.18). Аналогичные свойства имеют место и для уравнения (40.19).

Формулы (40.20) легко проверяются непосредственным вычислением. А соотношение (40.21) проще всего установить как прямое следствие первых двух из следующих трех лемм, характеризующих действие операторов типа Эрдейи—Кобера на дифференциальный оператор

$$L^{(x)}_{\eta} = x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}\,x^{2\eta+1}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx},\quad L^{(x)}_{-1/2} = \frac{d^2}{dx^2}. \quad (40.22)$$

Эти леммы были доказаны соответственно в работах J. S. Lowndes [7, 5, 9] (см. также A. Erdelyi [8, 10]).

Лемма 40.1. *Пусть* $f(x) \in C^2(0,\ b)$, $b > 0$, *и* $f(0) = f''(0) = 0$. *Тогда* $J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right) J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f(x)$.

Лемма 40.2. *Пусть* $\alpha > 0$, $f \in C^2(0,\ b)$, $b > 0$, *функция* $x^{2\eta+1} f(x)$ *интегрируема в нуле и* $x^{2\eta+1} f'(x) \to 0$ *при* $x \to 0$. *Тогда* $J^{(x)}_{\lambda}(\eta,\ \alpha) L^{(x)}_{\eta} f(x) = (L^{(x)}_{\eta+\alpha} + \lambda^2) J^{(x)}_{\lambda}(\eta,\ \alpha) f(x)$, *а, в частности, при* $\lambda = 0$ *справедливо* $I_{\eta,\alpha} L^{(x)}_{\eta} f(x) = L^{(x)}_{\eta+\alpha} I_{\eta,\alpha} f(x)$.

Лемма 40.3. *Пусть* $\alpha > 0$, $f(x) \in C^2(0,\ b)$, $b > 0$, *функции* $x^{\eta+k} f^{(k)}(x)$ *при* $k = 0,\ 1,\ 2$ *интегрируемы в нуле. Тогда*

$$(x^{-\eta-\alpha} \overline{J}_{\alpha,\lambda} x^{\eta})\, x^2 L^{(x)}_{\alpha+\eta} f(x) = x^2 (L^{(x)}_{\alpha+\eta} + \lambda^2)(x^{-\eta-\alpha} \overline{J}_{\alpha,\lambda} x^{\eta}) f(x),$$

где $\overline{J}_{\alpha,\lambda}$ *— оператор, получаемый из (37.68) заменой* $\overline{I}$ *на* $\overline{J}$.

Последняя лемма, как показано в работе J. S. Lowndes [9], дает возможность найти полную систему решений уравнения (40.18) в окрестности начала координат в виде

$$u_n(x,\ y) = A_n r^{-\mu-p} J_{2n+\mu+p}(\lambda r)\, P_n^{(p-1/2,\,\mu-1/2)}(\cos 2\theta),$$
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ A_n - \text{const},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad (40.23)$$

где $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя (1.83), а $P_n^{(a,b)}(z)$ — многочлены Якоби (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 170]), пользуясь известным результатом для случая $\lambda = 0$ уравнения (40.18), получаемым методом разделения переменных в полярных координатах. (Отметим здесь, что, в частности, для уравнения (40.18) при $\mu = 0$ система (40.23) принимает вид $A_n r^{-p} J_{n+p}(\lambda r) \times \times C_n^p(\cos\theta)$, а при $\mu = \lambda = 0$ — вид $A_n r^n C_n^p(\cos\theta)$, где $C_n^p(z)$ — многочлены Гегенбауэра.)

Однако для нахождения интегральных представлений решений (40.18) более удобно воспользоваться другим подходом, основанным на применении теоремы 40.2 и формулы (40.21). Обозначим через $\Gamma(x,\ y,\ t)$

частное решение уравнения (40.18), связанное с решением $\gamma(\xi, \eta, t)$ из теоремы 40.2 формулами (40.6). Пользуясь формулой (40.21) и ее частными случаями при $\mu p\lambda=0$, можно заключить, что это решение следует искать в виде

$$\Gamma(x, y, t) = x^a y^b \rho^c \theta(\tilde{x}, \tilde{y}), \tag{40.24}$$

где $\tilde{x} = -\rho/(4xt)$, $\tilde{y} = -\lambda^2\rho/4$, $\rho = (x-t)^2 + y^2$, а параметры a, b, c подлежат определению. Подставив (40.24) в (40.18), после некоторых выкладок придем к уравнению в частных производных второго порядка относительно функции $\theta(\tilde{x}, \tilde{y})$, которое будет линейной комбинацией двух уравнений 5.9 (29) из книги Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1] (с $\theta = \Xi_2$ с коэффициентами x^{-2}, λ^2) лишь в двух случаях, связанных свойством (40.20), а именно при:

1) $a = -\mu$, $b = 1-2p$, $c = p-1$, $\alpha\beta = \mu(1-\mu)$, $\alpha+\beta = 1$, $\gamma = p$;
2) $a = -\mu$, $b = 0$, $c = -p$, $\alpha\beta = \mu(1-\mu)$, $\alpha+\beta = 1$, $\gamma = 1-p$.

Таким образом, заключаем, что $\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; \tilde{x}, \tilde{y})$, где

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k x^k y^l}{(\gamma)_{k+l} k! l!}, \quad |x| < 1, \tag{40.25}$$

— одна из вырожденных гипергеометрических функций Гумберта с параметрами $\alpha=\mu$, $\beta=1-\mu$. Интегральное представление такой функции через функции Лежандра $P_\nu^0(z) = P_\nu(z)$ (1.79) и Бесселя—Клиффорда (37.8) получил М. Б. Капилевич [1, с. 1243] в виде

$$\Xi_2(\mu, 1-\mu; \gamma; x, y) = (\gamma-1)\int_0^1 (1-t)^{\gamma-2} P_{-\mu}(1-2tx)\, \bar{I}_{\gamma-2}(2\sqrt{(1-t)y})\, dt,$$

$$\operatorname{Re}\gamma > 1. \tag{40.25'}$$

Здесь следует отметить, что при $xt<0$, $\mu\neq 0$ переменная $\tilde{x}=-\rho/(4xt)$ может попадать на разрез (особую линию) функции Гумберта. Чтобы исключить эту ситуацию, умножим частное решение (40.24) с указанными в 1) параметрами на кусочно-постоянный множитель $l_1\tau(t)|t|^\mu (\operatorname{sign} xt + 1)^{|\operatorname{sign}\mu|}$, где $0^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, l_1 — const, и проинтегрируем его в соответствии с (40.13) по параметру t. Тогда получим функцию

$$u(x, y) = l_1 |x|^{-\mu} y^{1-2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)|t|^\mu (\operatorname{sign} xt+1)^{|\operatorname{sign}\mu|}}{[(x-t)^2+y^2]^{1-p}} \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\rho}{4xt}, -\frac{\lambda^2\rho}{4}\right) dt. \tag{40.26}$$

Аналогично на основе условий 2) получается вторая функция

$$u(x, y) = l_2 |x|^{-\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(t)|t|^\mu (\operatorname{sign} xt+1)^{|\operatorname{sign}\mu|}}{[(x-t)^2+y^2]^{p}} \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; 1-p; -\frac{\rho}{4xt}, -\frac{\lambda^2\rho}{4}\right) dt, \tag{40.27}$$

которая, как и первая, очевидно, является решением уравнения (40.18). Отметим здесь, что при $p=0, -1, -2, \ldots$ и соответственно $p=1, 2, \ldots$ эти функции не определены и к построению решений в этих случаях требуется специальный подход.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что построенные решения вида (40.24) удовлетворяют соответствующему условию (40.14).

Поэтому на основе формулы (40.16) и замечания 40.1 из равенства (40.26) после замены y на $-iy$ и промежутка $-\infty<t<\infty$ на $0<x-y<t<x+y$, $t=x+\theta y$, можно получить функцию

$$u(x,\ y)=l_3x^{-\mu}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(x+\theta y)}{(1-\theta^2)^{1-p}}(x+\theta y)^{\mu}\,\Xi_2\Big(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{y^2(1-\theta^2)}{4x(x+\theta y)},$$

$$\frac{\lambda^2}{4}y^2(1-\theta^2)\Big)\,d\theta, \tag{40.28}$$

которая при $p>0$ будет удовлетворять гиперболическому уравнению (40.19).

Совершив в (40.28) обратную замену y на iy, придем к формуле

$$u(x,\ y)=-i(2i)^{1-2p}l_3x^{-\mu}\int\limits_{L}\tau(\sigma)\,\sigma^{\mu}(\zeta-\zeta^{-1})^{2p-1}\,\Xi_2\Big(\mu,\ 1-\mu;$$

$$p;\ \frac{y^2(\zeta-\zeta^{-1})^2}{16x\sigma},\ \frac{\lambda^2y^2}{16}(\zeta-\zeta^{-1})^2\Big)\frac{d\zeta}{\zeta},\ \sigma=x+iy\cos\varphi, \tag{40.29}$$

$$L=\{\zeta=e^{i\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\},\ p>0,$$

которую после замены $\theta=y\cos\varphi$ также можно записать в виде

$$u(x,\ y)=l_3x^{-\mu}y\,|y|^{-2p}\int\limits_{-y}^{y}\tau(x+i\theta)(x+i\theta)^{\mu}(y^2-\theta^2)^{p-1}\times$$

$$\times\,\Xi_2\Big(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{\theta^2-y^2}{4x(x+i\theta)},\ \frac{\lambda^2}{4}(\theta^2-y^2)\Big)\,d\theta,\ p>0. \tag{40.30}$$

В формулах (40.26) — (40.30) функции τ и ν полагаются такими, чтобы указанные интегралы существовали. Условия для этого приводятся ниже и в теоремах следующего пункта. Следует отметить, что интегральные операторы в этих формулах представляют собой композиции типа $I^{(x)}_{-1/2,\mu}I^{(y)}_{-1/2,p}J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0)f$, см. (40.21), что прослеживается ниже при исследовании их граничных значений.

Проведенные рассуждения дают возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 40.4. *Пусть $p>0$ и $\mu\geqslant 0$, а $\tau(z)$ в окрестности точки $z=0$ является аналитической по $z=x+iy$ и четной по x и y функцией (т. е. $\tau(\bar z)=\overline{\tau(z)}$, $\tau(-\bar z)=\overline{\tau(z)}$, $\operatorname{Re}\tau$ четна по x и y, а $\operatorname{Im}\tau$ нечетна по x и y и $\operatorname{Im}\tau=0$ при $xy=0$). Тогда формулы (40.29), (40.30) доставляют все классические ($u\in C^2$) в окрестности $(0,\ 0)$, четные по x и y решения уравнения (40.18), для которых значение $u(x,\pm 0)$ ограничено и при $0<p<1/2$ (соответственно при $0<\mu<1/2$) справедливо равенство $u_y(x,\ 0)=0$, точнее, $u_y(x,\ y)=O(y)$ ($u_x(0,\ y)=0$, точнее, $u_x(x,\ y)=O(x)$). Если еще*

$$l_3=[\mathrm{B}(p,\ 1/2)]^{-1}=\Gamma(p+1/2)\,[\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)],^{-1} \tag{40.31}$$

то функции (40.28) — (40.30) удовлетворяют условию Дирихле

$$u(x,\ 0)=\tau(x), \tag{40.32}$$

причем $u(x,\ y)=\tau(x)+O(y^2)$ при $y\to 0$. Если в точках $z=z_1$ и $z=-z_1$ функция $\tau(z)$ имеет особенности, то точки $\pm z_1$, $\pm\bar z_1$ будут особыми и для решения $u(x,\ y)$ (40.29), (40.30).

Доказательство основных утверждений этой теоремы можно найти в монографии R. P. Gilbert [2]. Условие (40.32) можно проверить

непосредственным предельным переходом при $y \to 0$ в (40.28), (40.29).

Теорема 40.4 показывает, что оператор (40.29) осуществляет отображение аналитических функций в решения уравнения (40.18). Обратный ему оператор в общем случае построен в монографии R. P. Gilbert [2, с. 205—206] в виде громоздкого ряда. В частном же случае $\mu = \lambda = 0$ такой оператор находится явно и относительно просто, см. статью R. P. Gilbert [1]. Покажем, что и другие частные случаи обратного оператора (при $\mu\lambda = 0$) могут быть построены в замкнутом виде.

Случай А. Пусть $\mu = 0$, $p > 0$. Предположим, что $\tau(\bar{z}) = \overline{\tau(z)}$. Тогда формула (40.30) с условием (40.31) принимает вид

$$u(x, y) = \frac{y^{1-2p}}{B(p, 1/2)} \int_{-y}^{y} \tau(x + i\theta)(y^2 - \theta^2)^{p-1} \overline{J}_{p-1}(\lambda\sqrt{y^2 - \theta^2})\, d\theta =$$

$$= \frac{2y^{1-2p}}{B(p, 1/2)} \int_{0}^{y} \operatorname{Re} \tau(x + i\theta)(y^2 - \theta^2)^{p-1} \overline{J}_{p-1}(\lambda\sqrt{y^2 - \theta^2})\, d\theta =$$

$$= \pi^{-1/2}\Gamma(p + 1/2) J_{\lambda}^{(y)}(-1/2, p) \operatorname{Re} \tau(x + iy) =$$

$$= \pi^{-1/2}\Gamma(p + 1/2) y^{1-2p} (C_{0+}^{p,\lambda} f)(w), \quad f(t) = \operatorname{Re} \tau(x + i\sqrt{t})\, t^{-1/2}, \quad w = y^2, \tag{40.33}$$

где $\overline{J}_{\nu}(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда (37.8), а $J_{\lambda}^{(y)}(\eta, \alpha)$ и $C_{0+}^{p,\lambda}$ — операторы (37.45), (37.4), примененные по второй переменной. Воспользовавшись формулами (37.57), (37.37) обращения этих операторов, получим следующее представление обратного к (40.33) оператора:

$$\operatorname{Re} \tau(x + iy) = \sqrt{\pi}\Gamma^{-1}(p + 1/2) J_{i\lambda}^{(y)}(p - 1/2, -p) =$$

$$= \frac{2^{1-m}\sqrt{\pi} y}{\Gamma(p + 1/2)} \int_{0}^{y} \frac{(y^2 - t^2)^{m-p-1}}{\Gamma(m - p)} \overline{I}_{m-p-1}(\lambda\sqrt{y^2 - t^2}) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m (t^{2p-1} u(x, t))\, t\, dt \tag{40.34}$$

и соответствующую теорему, вытекающую из теоремы 37.2.

Теорема 40.5. *Пусть* $g(y) = u(x, \sqrt{y})\, y^{p-1/2} \in AC^m([0, b])$, $b < \infty$, *при всех* x, *причем* $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(m-1)}(0) = 0$ *и* $0 < p < m$. *Тогда каждому решению* $u(x, y)$ *уравнения (40.18) при* $\mu = 0$ *соответствует по формуле (40.34) некоторая гармоническая функция* $\operatorname{Re} \tau(x + iy)$; *причем если* $u(x, y)$ *четна по* x *и* y, *то и* $\operatorname{Re} \tau(x + iy)$ *будет четной по* x *и* y, *а для соответствующей аналитической функции* $\tau(z)$ *будет выполняться условие* $\tau(\bar{z}) = \overline{\tau(z)}$.

Случай Б. Пусть $\lambda = 0$, $p > 0$. Предположим, что на границе Γ единичного круга $|z| \leqslant 1$ задано значение четной функции u:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = f(\varphi), \quad \Gamma = \{x = \cos\varphi, \ y = \sin\varphi, \ |\varphi| \leqslant \pi\}, \tag{40.35}$$

$$f(\varphi) = f(-\varphi) = f(\pi - \varphi), \quad \varphi \neq \pm\pi/2.$$

Положив в (40.30) $z = x + iy = e^{i\varphi}$, $x + i\theta = t$ и воспользовавшись (40.35), придем к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{x^{-\mu}|y|^{2-2p}}{iyB(p, 1/2)} \int_{\bar{z}}^{z} \tau(t)\, t^{\mu} [(z - t)(\bar{z} - t)]^{p-1} {}_2F_1\left(\mu, 1 - \mu; p; \frac{(z - t)(t - \bar{z})}{2t(z + \bar{z})}\right) dt = f(\varphi), \quad |\varphi| < \pi, \ \varphi \neq \pm\pi/2. \tag{40.36}$$

Вертикальный отрезок, соединяющий точки $\bar{z}$ и z, по которому ведется интегрирование в (40.36), можно заменить на дугу окружности Γ вида $t=e^{i\alpha}$, $|\alpha|\leqslant\varphi$, поскольку функция $\tau(t)$ аналитична в единичном круге всюду, а остальные подынтегральные функции аналитичны всюду, кроме точек $t=z$, $\bar{z}$, 0, ∞, которые лежат на границе или за пределами соответствующего кругового сегмента. При таком изменении пути интегрирования в силу интегральной теоремы Коши величина интеграла не изменится. Для выделения однозначной ветви функции (40.36) относительно переменной z сделаем разрез по полуоси $y=0$, $x\leqslant 0$ и положим $|\varphi|<\pi$. Тогда функция $[(z-t)(\bar{z}-t)]^{p-1}=[2t(\cos\alpha-\cos\varphi)]^{p-1}$ станет однозначной функцией с разрывом в точке $t=-1$, а формула (40.36) примет вид

$$\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{\tau(e^{i\alpha})\,e^{i\alpha(p+\mu)}}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}}\,{}_2F_1\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)\right)d\alpha=$$

$$=2^{1-p}\mathrm{B}(p,\ 1/2)\sin\varphi\,|\sin\varphi|^{2p-2}\cos^{\mu}\varphi f(\varphi). \tag{40.37}$$

Так как аргумент гипергеометрической функции не должен лежать на разрезе $[1,\ \infty)$, то следует полагать $|\varphi|<\pi/2$, исключая тем самым переход через особую линию уравнения $x=0$.

Разбив последний интеграл на два: по $[-\varphi,\ 0]$ и по $[0,\ \varphi]$, $0\leqslant\varphi<\pi/2$, совершив в первом замену $\alpha=-\alpha_1$ и учтя четность $\tau(t)$ и формулу (1.79), придем к интегральному уравнению типа свертки Меллина с функцией Лежандра в ядре (35.18), где

$$\mathbf{f}(\cos\alpha)\,|\sin\alpha|=\mathrm{Re}\,(\tau(t)\,t^{p+\mu}),\ \eta=\cos\alpha,\ x=\cos\varphi,\ d=1,$$

$$0\leqslant\alpha<\pi/2,\ 0\leqslant\varphi<\pi/2,\ g(x)=\frac{2^{-p}\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1/2)}\,(1-x^2)^{p-1/2}\,x^{\mu}f(\arccos x). \tag{40.38}$$

Воспользовавшись теоремой 35.2 об обращении этого уравнения, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 40.6. *Пусть $p>0$, $\mu<1/2$, а функция $f(\varphi)$ такая, что соответствующая ей функция $g(x)$ из (40.38) представима в виде $g(x)=(I_{1-}^{p}h)(x)$, где $h\in L_1(\varepsilon,\ 1)$, $\varepsilon>0$, а $(I_{1-}^{p}h)(x)$ — дробный интеграл (2.18). Тогда решение уравнения (40.36) на окружности $|z|=1$, $xy\neq 0$, в классе четных функций $\tau(\bar{t})=\tau(-t)=\overline{\tau(t)}$ сводится к решению следующей краевой задачи Гильберта (см. Ф. Д. Гахов [1]).*

Задача Гильберта 40.1. В четвертькруге $|z|<1$, $x>0$, $y>0$, найти аналитическую функцию $\tau(z)=\xi(x,\ y)+i\eta(x,\ y)$, непрерывную вплоть до его границы l, предельные значения действительной и мнимой частей которой удовлетворяют на l линейному соотношению

$$a(t)\,\xi(t)+b(t)\,\eta(t)=c(t),\ t\in l, \tag{40.39}$$

где $a=c=0$, $b(t)=1$ на осях $x=0$ и $y=0$, а на четвертьокружности $a(t)=\cos\alpha(p+\mu)$, $b(t)=-\sin\alpha(p+\mu)$, $c(t)=\mathbf{f}(\cos\alpha)\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha<\pi/2$, причем функция $\mathbf{f}$ выражается через заданную функцию $f(\varphi)$ (40.35) формулами (35.34), (40.38). Решение следует искать в классе функций $\tau(z)$, ограниченных вблизи $z=1$ и допускающих интегрируемую особенность в точке $z=i$.

Замечание 40.3. Если $\mu>1/2$, то $1-\mu<1/2$ и имеет место аналог теоремы 40.6, получаемый с помощью свойств (40.20). Тогда вместо t^{μ} следует подставить $t^{1-\mu}$, а в формуле (35.34) μ заменить на $1-\mu$.

Доказательство теоремы 40.6. После обращения уравнения (35.18) возникает задача восстановления предельного значения $\tau(t)$ чет-

ной аналитической в правом полукруге функции $\tau(z)$ по известному краевому значению (40.38) вида $\operatorname{Re}[\tau(t)t^{p+\mu}] = f(\cos\alpha)|\sin\alpha|$. На осях координат функция $\tau(z)$, как отмечалось в теореме 40.4, должна обладать свойством $\operatorname{Im}\tau(z)=0$ при $xy=0$. Эти три условия объединяются в одно (40.39) с указанными коэффициентами.

Вычислим индекс $\varkappa$ и количество решений задачи (40.39). Поступив, как в монографии Ф. Д. Гахова [1, § 30], преобразуем условие $\operatorname{Re}[\tau(t)t^{p+\mu}] = c(t)$ к форме $2c(t) = t^{p+\mu}\tau^+(t) + \overline{t^{p+\mu}}\,\tau^+(t) = t^{p+\mu}\tau^+(t) + \overline{t^{p+\mu}}\,\tau^-(t)$. Отсюда получим краевое условие соответствующей задачи Римана

$$\tau^+(t) = -e^{-2i\alpha(p+\mu)}\tau^-(t) + 2e^{-i\alpha(p+\mu)}c(t),\quad t\in\Gamma, \tag{40.40}$$

где $\tau^+(t)$ — предельное значение на окружности $|z|=1$ аналитической функции $\tau(z)$ при $z\to t=e^{i\alpha}$, $0\leqslant\alpha<\pi/2$, изнутри, а $\tau^-(t)$ — предельное значение извне некоторой функции $\tau^-(z)$, $|z|>1$, которая может и не быть аналитической. На осях таким же образом выводится равенство $\tau^+=\tau^-$, отражающее аналитичность τ на осях.

В силу четности $\tau(t)$ однородное условие $\tau^+(t)=-t^{-2p-2\mu}\tau^-(t)$ можно продолжить на всю окружность, кроме особой точки $t=-1$, лежащей на разрезе. При переходе t через -1 аргумент функции $t^{-2p-2\mu}$ имеет скачок (см. Ф. Д. Гахов [1, § 43.2]), равный $-4\pi(p+\mu)$. Таким образом, в классе интегрируемых в точке $t=-1$ решений индекс $\varkappa$ равен $[-2p-2\mu]+1$, а величина $|\varkappa|$ характеризует количество решений однородной задачи Гильберта (при $\varkappa\geqslant 0$) или количество условий разрешимости неоднородной задачи (при $\varkappa<0$). Само же решение этой задачи строится по формулам из монографии Ф. Д. Гахова [1, § 46]. Подставив найденную функцию $\tau(z)$ в (40.30) при $\lambda=0$, придем к решению $u(x, y)$ следующей задачи Дирихле.

Задача Дирихле 40.2. Найти вещественную функцию $u(x, y)$, четную по x, y и непрерывную в круге $|z|\leqslant 1$ всюду, кроме, быть может, линии $x=0$, которая удовлетворяет в круге при $xy\neq 0$ уравнению (40.18), где $\lambda=0$, $0<p<1/2$, принимает на окружности $|z|=1$ заданные значения (40.35), а на линии $y=0$ непрерывна и ограничена, причем $u_y(x, 0)=0$ (на оси $x=0$ эта функция ограничена лишь при $\mu<1/2$).

3°. Краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. В настоящем пункте на основе формул (40.26)—(40.28) построим решения задач Дирихле, Неймана в полуплоскости для уравнения (40.18) и полуоднородной задачи Коши в характеристическом треугольнике для уравнения (40.19). При этом укажем характер поведения решений вблизи особых линий и условия на функции, обеспечивающие существование интегралов.

Выясним вначале картину поведения решения (40.26) при $x\to 0$. Из (40.25) следует, что имеют место представления

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{(\gamma)_l l!}\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma+l; x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_k(\beta)_k x^k}{(\gamma)_k k!}\,\bar{J}_{\gamma+k-1}(2i\sqrt{y}). \tag{40.41}$$

Подставив сюда разложение функции Гаусса вида (10.13), придем к следующим главным членам (40.41) при $x\to\infty$, $|\arg(-x)|<\pi$:

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) \sim \Gamma\begin{bmatrix}\gamma, & \beta-\alpha\\ \beta, & \gamma-\alpha\end{bmatrix}{}_0F_1(\gamma-\alpha; y)(-x)^{-\alpha} +$$

$$+\Gamma\begin{bmatrix}\gamma, & \alpha-\beta\\ \alpha, & \gamma-\beta\end{bmatrix}{}_0F_1(\gamma-\beta; y)(-x)^{-\beta},\quad \alpha\neq\beta; \tag{40.42}$$

$$\Xi_2(\alpha,\ \alpha;\ \gamma;\ x,\ y) \sim \Gamma\begin{bmatrix}\gamma\\ \alpha,\ \gamma-\alpha\end{bmatrix}(-x)^{-\alpha}\ln(-x),\quad \beta=\alpha,$$

(последнее соотношение следует из формулы 2.10 (7) справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1]). Применив (40.42) к (40.26), установим, что при $\mu<1/2$ существует значение $u(0,\ y)$, при $\mu>1/2$ существует предел $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{2\mu-1}u(x,\ y)$, а при $\mu=1/2$ — предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln^{-1}|x|\,u(x,\ y)$. Последние свойства показывают, что решение (40.26) на линии $x=0$ при $\mu>1/2$ имеет степенную особенность порядка $O(x^{1-2\mu})$, а при $\mu=1/2$ — логарифмическую особенность порядка $O(\ln|x|)$.

Воспользуемся теперь разложением ${}_0F_1(\nu;\ -y)=O[y^{(1-2\nu)/4}\cos(2\sqrt{y}+{}+\pi(1-2\nu)/4)]$, $y\to\infty$, см. книгу О. И. Маричева [10, с. 76]. Тогда из (40.42) получим, что

$$\Xi_2(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x,\ y)=O(y^{1/4+(\alpha-\gamma)/2}\,x^{-\alpha})+O(y^{1/4+(\beta-\gamma)/2}\,x^{-\beta}),$$
$$\alpha\neq\beta,\ x,\ y\to\infty. \tag{40.43}$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция из (40.26) при $t\to\infty$ имеет порядок $O[\tau(t)|t|^{\mu+p-3/2}]$, если $\lambda\neq 0$, и $O[\tau(t)|t|^{2p-2}(1+|t|^{2\mu-1})]$, если $\lambda=0$. Значит, для существования интеграла (40.26) на бесконечности последние порядки следует считать интегрируемыми.

Результаты таких исследований сводятся в следующие две теоремы.

Теорема 40.7. *Пусть $\tau(t)$ является непрерывной, ограниченной на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией, удовлетворяющей на бесконечности условиям $|\tau(t)|<C|t|^{1/2-\mu-p-\varepsilon}$ при $\mu>0$, $\lambda\neq 0$ или $|\tau(t)|<C|t|^{2-2\mu-2p-\varepsilon}$ при $\mu\geqslant 1/2$, $\lambda=0$ и $|\tau(t)|<C|t|^{1-2p-\varepsilon}$ при $0<\mu<1/2$, $\lambda=0$, где C — const, $\varepsilon>0$. Тогда задача Дирихле в полуплоскости $y>0$ о нахождении решения $u\in C^2(y>0,\ x\neq 0)$ уравнения (40.18) по условию (40.32) в точках x, $-\infty<x<\infty$, $x\neq 0$, разрешима при $p<1/2$, $p\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ формулой (40.26) с коэффициентом*

$$l_1=[B(1/2,\ 1/2-p)]^{-1}=\Gamma(1-p)[\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-p)]^{-1}. \tag{40.44}$$

Поведение производной u_y при $y\to 0$ характеризуется табл. 41.1 (при $q=0$), а поведение и и u_x при $x\to 0$ также отражается табл. 41.1, но при $q=0$ и с заменой p на μ и x, y местами. При $y\to\infty$ решение (40.26) имеет следующее поведение:

$$u(x,\ y)=O[y^{-p-\mu-1/2}(1+y^{2\mu-1})]\qquad \text{при } \lambda\neq 0,$$
$$u(x,\ y)=O[y^{-2\mu-1}(1+y^{4\mu-2})]\qquad \text{при } \lambda=0.$$

Теорема 40.8. *Пусть $\nu(t)$ является непрерывной на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией, удовлетворяющей на бесконечности условиям $|\nu(t)|<C|t|^{p-\mu-1/2-\varepsilon}$ при $\lambda\neq 0$ и $|\nu(t)|<C|t|^{2p-1-\varepsilon}(1+|t|^{1-2\mu})$ при $\lambda=0$, где C — const, $\varepsilon>0$. Тогда весовая задача Неймана в полуплоскости $y>0$ об отыскании решения $u\in C^2(y>0,\ x\neq 0)$ уравнения (40.18) по условию*

$$\lim_{y\to+0}y^{2p}u_y(x,\ y)=\nu(x),\quad -\infty<x<\infty,\quad x\neq 0, \tag{40.45}$$

разрешима при $p>-1/2$, $p\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, по формуле

$$u(x,\ y)=u_2(x,\ y)+C_1u_{01}(x,\ y)+C_2u_{02}(x,\ y),\quad C_1,\ C_2 \text{ — const}, \tag{40.46}$$

где $u_2(x,\ y)$ имеет вид (40.27) с коэффициентом

$$l_2=-\frac{B(p,\ 1/2)}{2\pi}, \tag{40.47}$$

а функции $u_{0j} = r^{-p-\mu} J_{(-1)^j(p+\mu)}(\lambda r)$, $r^2 = x^2 + y^2$, $j = 1, 2$, *являются особыми решениями уравнения (40.18), удовлетворяющими однородному условию вида (40.45). Поведение решения и и его производных при* $x \to 0$ *и* $y \to 0$ *устанавливается из табл. 41.1 способом, указанным в теореме 40.7, а поведение и при* $y \to \infty$ *получается из теоремы 40.7 на основе формул (40.20).*

Замечание 40.4. Формула (40.46) показывает, что решения задач с условиями на особых линиях без дополнительных ограничений на класс могут быть не единственными. В случае $p = 1/2$ к решению (40.46) может быть добавлено еще одно решение, содержащее в ядре функцию $\ln(\rho/y)$. Подробнее об этом см. в § 41, п. 4°.

Замечание 40.5. Разложив функцию (40.27) с постоянной (40.47) по степеням p : $u_2 = p^{-1}u_{20} + \tilde{u}_2 + O(p)$, выпишем второй член этого разложения

$$\tilde{u}_2(x, y) = \frac{|x|^{-\mu}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(t) |t|^{\mu} (\operatorname{sign} xt + 1)^{|\operatorname{sign}\mu|} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(\mu)_k (1-\mu)_k}{(k+l)!\, k!\, l!} \times$$

$$\times \left(-\frac{\rho}{4xt}\right)^k \left(-\frac{\lambda^2\rho}{4}\right)^l \left[\ln\rho + \mathbf{C} - \sum_{j=1}^{k+l} \frac{1}{j}\right] dt, \quad \rho = (x-t)^2 + y^2, \tag{40.48}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера—Маскерони. Эта функция является решением задачи (40.45) в особом случае $p = 0$, а при $\lambda = \mu = 0$ и необходимом условии разрешимости задачи Неймана в полуплоскости вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu(t)\, dt = 0 \tag{40.49}$$

соотношение (40.48) приводится к известной формуле Дини решения задачи Неймана в полуплоскости $y > 0$ для уравнения Лапласа

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(t) \ln[(x-t)^2 + y^2]\, dt. \tag{40.50}$$

Замечание 40.6. Формула (40.27) при $p \geqslant 1/2$ доставляет также решения следующих весовых задач Дирихле:

$$\lim_{y \to +0} y^{2p-1} u(x, y) = \frac{1}{1-2p} \nu(x), \quad p > 1/2, \quad p \neq 1, 2, 3, \ldots, \tag{40.51}$$

$$\lim_{y \to +0} \ln^{-1} y\, u(x, y) = \nu(x), \quad p = 1/2, \tag{40.52}$$

причем решением задачи (40.52) также является функция (40.48).

В заключение параграфа отметим, что, опираясь на формулу (40.28), аналогичным образом можно получить решение следующей полуоднородной задачи Коши для гиперболического уравнения (40.19):

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \to +0} y^{2p} u_y(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{40.53}$$

и соответствующую теорему о ее разрешимости.

Теорема 40.9. *Если* $\tau \in C^2([0, 1])$, $0 < p < 1/2$, *а* l_3 *имеет вид (40.31), то в треугольнике* $D = \{0 < x - y < x + y < 1\}$ *задача Коши (40.53) имеет классическое* ($u \in C^2(D)$) *решение вида (40.28).*

§ 41. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА — ДАРБУ

В этом параграфе получаются различные интегральные представления решений уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в эллиптическом и гиперболическом случаях и на их основе строятся решения краевых задач Дирихле, Неймана и Коши. Затрагивается многомерный случай. Как и в § 40, показывается, что с помощью операторов Эрдейи—Кобера (18.8) решения простейших уравнений с постоянными коэффициентами отображаются в решения уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу.

1°. Представления решений уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Исключительно важную роль при решении осесимметрических задач теории потенциала играет *обобщенное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу*

$$E(\beta,\ \beta^*)u = u_{\xi\eta} - \frac{\beta^* u_\xi - \beta u_\eta}{\xi - \eta} = 0,\ \beta^*,\ \beta - \text{const}. \tag{41.1}$$

Это уравнение соответствует случаю (40.1) при $a(\xi,\ \eta) = -\beta^*/(\xi - \eta)$, $b(\xi,\ \eta) = \beta/(\xi - \eta)$, $c(\xi,\ \eta) = 0$. После замен (40.6) оно принимает вид

$$E^+u = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y}u_x + \frac{2p}{y}u_y = 0, \tag{41.2}$$

$$\beta = p + iq,\ \beta^* = p - iq. \tag{41.3}$$

Отметим, что к уравнению (41.2) со значениями $q=0$, $2p=n-2$ при $y=r$ сводится всякое решение уравнения Лапласа в R^n вида

$$U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2} + \ \ldots\ + U_{x_nx_n} = 0, \tag{41.3'}$$

которое ищется в форме

$$U(x_1,\ \ldots\ ,\ x_n) = u(x,\ r),\ x = x_n,\ r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2},$$

с осью симметрии $r=0$. Такое решение называется $2p+2$-*мерным осесимметрическим потенциалом* и удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} + u_{rr} + \frac{2p}{r}u_r = 0. \tag{41.3''}$$

Поскольку оператор в (41.3″) четен по r, то всякое решение уравнения (41.3″) необходимо четно по r, а в случае $p=0$ 2-мерный осесимметрический потенциал является гармонической функцией.

В дальнейшем будем различать два случая: при рассмотрении уравнения (41.1) β и β^* будем полагать действительными, а при изучении уравнения (41.2) эти параметры будем считать комплексными и сопряженными, причем $\operatorname{Re}\beta = \operatorname{Re}\beta^* = p$.

Непосредственным вычислением несложно установить следующие леммы.

Лемма 41.1. *Для того чтобы функция u была решением уравнения $E(\beta,\ \beta^*)u = 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$v(\xi,\ \eta) = (\eta - \xi)^{\beta+\beta^*-1}u(\xi,\ \eta) \tag{41.4}$$

удовлетворяла уравнению $E(1-\beta^*,\ 1-\beta)v = 0$.

Лемма 41.2. *Если функция $u_1(\xi,\ \eta)$ удовлетворяет уравнению (41.1), то и функция*

$$u(\xi,\ \eta) = (a\xi + b)^{-\beta}(a\eta + b)^{-\beta^*}u_1\left(\frac{c\xi + d}{a\xi + b},\ \frac{c\eta + d}{a\eta + b}\right), \tag{41.5}$$

где a, b, c, d — произвольные постоянные, для которых $ad-bc\neq 0$, также является решением этого уравнения.

Лемма 41.3. *Пусть $\beta>0$, $\beta^*>0$, а $\tau(\theta)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда интеграл*

$$J_1(\beta,\ \beta^*)=\int_0^1 \tau\,[\xi+(\eta-\xi)\,t]\,t^{\beta^*-1}(1-t)^{\beta-1}dt \tag{41.6}$$

удовлетворяет уравнению (41.1), а при условиях (40.6) в случае $p>0$ — уравнению (41.2).

Отметим, что лемма 41.3 следует из теоремы 40.2, если положить

$$\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)=C(\xi-\theta)^{-\beta}(\eta-\theta)^{-\beta^*},\ C-\text{const}. \tag{41.7}$$

Тогда интеграл вида (40.17), т. е.

$$J_2(\beta,\ \beta^*)=\int_{\eta_0}^{\eta}\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)\,\nu(\theta)\,d\theta,\ \eta_0=\xi, \tag{41.8}$$

где $\nu(\theta)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\beta<1$, $\beta^*<1$, будет удовлетворять уравнению (41.1) и с помощью леммы 41.1 перейдет в решение (41.6). Очевидно, при $\beta\neq 1/2$, $\beta^*\neq 1/2$ ($p\neq 1/2$) решения (41.6), (41.8) линейно независимы.

Теорема 41.1. *Если $0<\beta<1$, $0<\beta^*<1$ и либо $\beta\neq 1/2$, либо $\beta^*\neq 1/2$ (соответственно $0<p<1$, $p\neq 1/2$), то общее решение уравнения (41.1) (соответственно (41.2)) выражается формулой*

$$u(\xi,\ \eta)=\int_0^1 \tau(\theta)\,t^{\beta^*-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt+(\eta-\xi)^{1-\beta-\beta^*}\int_0^1 \nu(\theta)\,t^{-\beta}\times$$

$$\times(1-t)^{-\beta^*}dt=J_1(\beta,\ \beta^*)+J_2(\beta,\ \beta^*)=J(\beta,\ \beta^*),\ \theta=\xi+(\eta-\xi)\,t, \tag{41.9}$$

где $\tau(\theta)$, $\nu(\theta)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые (соответственно непрерывные) функции.

В случае $\beta=\beta^*=p=1/2$ такое решение имеет вид

$$u(\xi,\ \eta)=\int_0^1 \tau(\theta)\,(t-t^2)^{-1/2}\,dt+\int_0^1 \nu(\theta)\,(t-t^2)^{-1/2}\ln[(t-t^2)(\eta-\xi)]\,dt. \tag{41.10}$$

Замечание 41.1. В частности, если функции $\tau(\theta)$, $\nu(\theta)$ аналитичны в некоторой области $\mathfrak{D}$ (т. е. при $(\xi,\eta)\in\mathfrak{D}$), то формулы (41.9), (41.10) доставляют все аналитические в $\mathfrak{D}$ решения уравнения (41.1).

Остановимся кратко на процессе нахождения общего решения уравнения (41.1) при других значениях параметров β, β^*. Пусть $-k<\beta^*<1-k$, $-l<\beta<1-l$, $k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, $\beta+\beta^*\neq -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ Тогда в силу неравенств $0<1-k-\beta^*<1$, $0<1-l-\beta<1$ функция $J_1(1-k-\beta^*,\ 1-l-\beta)$ (см. (41.6)) будет решением уравнения $E(1-k-\beta^*,\ 1-l-\beta)u=0$. Вычислим производную

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial\xi^k\partial\eta^l}J_1(1-k-\beta^*,\ 1-l-\beta)=\int_0^1 \tau^{(k+l)}(\theta)\,t^{-\beta}(1-t)^{-\beta^*}\,dt, \tag{41.11}$$

полагая $\tau(\theta)$ достаточно гладкой. Очевидно, интеграл справа в (41.11) удовлетворяет уравнению $E(1-\beta^*,\ 1-\beta)u=0$. Поэтому, умножив обе части (41.11) на $(\eta-\xi)^{1-\beta-\beta^*}$ и применив лемму 41.1, убедимся, что построенная функция будет решением уравнения (41.1). После аналогич-

ных преобразований над вторым решением J_2 придем к общему решению этого уравнения вида

$$u(\xi,\ \eta) = (\eta - \xi)^{1-\beta-\beta^*} \frac{\partial^{k+l}}{\partial \xi^k \partial \eta^l} J(1-k-\beta^*,\ 1-l-\beta), \quad (41.12)$$

где $J(\beta,\ \beta^*)$ указана в (41.9).

С учетом того, что $\beta^*+k>0$, $\beta+l>0$, можно получить и другой вид общего решения

$$u(\xi,\ \eta) = (\eta - \xi)^{1-\beta-\beta^*} \frac{\partial^{k+l}}{\partial \xi^k \partial \eta^l} \frac{J(\beta+l,\ \beta^*+k)}{(\eta-\xi)^{1-\beta-\beta^*-k-l}}. \quad (41.13)$$

Если, например, $\beta=\beta^*=1/2-k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то решения J_1, J_2 станут зависимыми и вместо J в формулы (41.12), (41.13) следует подставить правую часть из равенства (41.10). Если же одно из чисел β, β^* целое, то уравнение (41.1) может быть проинтегрировано в квадратурах каскадным методом Лапласа (см. книгу В. М. Бабича и др. [1, с. 43]).

Следует отметить, что к представлению (41.9) можно прийти и через формулу (40.12), опираясь на метод Римана и функцию Римана для уравнения (41.1), имеющую вид

$$R_E(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) = (\eta-\xi)^{\beta+\beta^*}(\eta-\xi_0)^{-\beta}(\eta_0-\xi)^{-\beta^*}\,{}_2F_1(\beta,\ \beta^*;\ 1;\ \sigma),$$

$$\sigma = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\eta-\xi_0)}, \quad (41.14)$$

где ${}_2F_1$ — функция Гаусса (1.73) (см., например, книгу В. М. Бабича и др. [1, с. 48]).

Полученные результаты несложно перенести на случай эллиптического уравнения (41.2). Так, из формул (41.7), (41.3), (40.6) при $\operatorname{Im} t=0$ получается следующее частное решение уравнения (41.2):

$$\gamma(\xi,\ \eta,\ t) = c_1(\xi-t)^{-\beta}(t-\bar{\xi})^{-\bar{\beta}} = c_1 \exp[-(p+iq)\ln(\xi-t) - (p-iq)\times$$

$$\times \ln(t-\bar{\xi})] = c_1 \exp[-2p\ln|\xi-t| - (p+iq)\,i\arg(\xi-t) -$$

$$-(p-iq)\,i\arg(t-\bar{\xi})] = c_1|\xi-t|^{-2p}\exp[-(p+iq)\,i\psi -$$

$$-(p-iq)\,i(\pi-\psi)] = c_2 r_1^{-2p} e^{2q\psi}, \quad (41.15)$$

где

$$r_1 = |\xi-t| = \sqrt{(x-t)^2+y^2}, \quad (41.16)$$

$$\psi = \arg(\xi-t) = \arccos[(x-t)/r_1],\ y \geqslant 0. \quad (41.17)$$

Положив здесь $c_2=l_1\tau(t)$ или $c_2=l_2\nu(t)$, проинтегрировав по оси $-\infty<t<\infty$ и воспользовавшись леммой 41.1 в отношении к уравнению (41.2) (см. также (40.20)), придем к следующим двум решениям уравнения (41.2):

$$u(x,\ y) = l_1 y^{1-2p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)\,e^{2q\psi}}{[(x-t)^2+y^2]^{1-p}}\,dt, \quad (41.18)$$

$$u(x,\ y) = l_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(t)\,e^{2q\psi}}{[(x-t)^2+y^2]^{p}}\,dt. \quad (41.19)$$

Эти представления являются аналогами решений (40.26) и (40.27) для уравнения (40.18), которое при $\mu=\lambda=0$ совпадает со случаем $q=0$ уравнения (41.2), а также аналогами функций $J_1(\beta,\ \beta^*)$ и $J_2(\beta,\ \beta^*)$. Аналогом

решения (41.10), содержащим логарифмическую функцию, здесь будет решение уравнения (41.2) с $p=1/2$ вида

$$u(x, y) = l_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)\, e^{2q\psi}}{\sqrt{(x-t)^2+y^2}} \left[C_1 + C_2 \ln \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \right] dt, \qquad (41.20)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Совершив в формуле (41.6) замены (40.6) и $(1-2t)\mathrm{y}=\theta$ и учтя (41.3), придем к следующему аналогу формулы (40.30):

$$u(x, y) = l_3 y^{1-2p} \int_{-y}^{y} \tau(x+i\theta)(y^2-\theta^2)^{p-1} \left(\frac{y+\theta}{y-\theta} \right)^{iq} d\theta. \qquad (41.21)$$

В частности, если $q=0$ и $\tau(\bar{z})=\overline{\tau(z)}$, то отсюда вытекает следующий частный случай (при $\lambda=0$) формулы (40.33):

$$u(x, y) = 2l_3 y^{1-2p} \int_{0}^{y} \operatorname{Re} \tau(x+i\theta)(y^2-\theta^2)^{p-1} d\theta =$$

$$= l_3 \Gamma(p)\, I^{(y)}_{-1/2, p} \operatorname{Re} \tau(x+iy), \qquad (41.22)$$

где $I^{(y)}_{\eta, \alpha}$ — оператор Эрдейи — Кобера (18.8), применяемый по переменной y. Для последних формул имеет место следующий аналог теоремы 40.4.

Теорема 41.2. *Пусть $p>0$, а функция $\tau(z)$ в окрестности точки $z=0$ аналитична (или соответственно аналитична, четна по y и удовлетворяет условию $\tau(\bar{z})=\overline{\tau(z)}$). Тогда формулы (41.21) (соответственно (41.22)) доставляют все классические ($u \in C^2$) (соответственно классические и четные по y) в окрестности $(0, 0)$ решения уравнения (41.2) (соответственно (41.2) при $q=0$), для которых значение $u(x, \pm 0)$ ограничено и при $0<p<1/2$ справедливо равенство $u_y(x, 0)=0$, причем $u_y(x, y)= =O(y)$, $y \to 0$. Если еще выполняется условие (40.31), то функции (41.21), (41.22) удовлетворяют краевому значению (40.32).*

Обратная к (41.22) формула получается из (40.34) при $\lambda = 0$ (когда $\overline{I_{m-p-1}}(\lambda\sqrt{y^2-t^2}) = 1$) и условиях из теоремы 40.5.

В заключение пункта отметим, что, основываясь на формулах из § 17, п. 2°, 16.2, можно выписать связь между асимптотиками функций $\tau(z)$ и $u(x, y)$ при $y \to +\infty$. В самом деле, если

$$\operatorname{Re} \tau(x+iy) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)\, y^{-2k} \text{ при } y \to +\infty, \qquad (41.23)$$

из равенств (41.22) и (17.17) получается следующее асимптотическое представление решения $u(x, y)$ задачи (40.32), (40.31) для уравнения (41.2) с $q=0$:

$$u(x, y) \sim l_3 \Gamma(p) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathfrak{M}^{(y)}\{g(x+iy);\ 2k+1\}}{k!\, \Gamma(p-k)\, y^{2k+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x) \frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(1/2+p-k)\, y^{2k}} \right] \text{ при } y \to +\infty, \qquad (41.24)$$

где $\mathfrak{M}^{(y)}\{g(x+iy);\ 2k-1\}$ — преобразование Меллина (1.112) функции $g(x+iy)$ по y в точке $2k+1$.

2°. Классические и обобщенные решения задачи Коши. После замены y на iy эллиптическое уравнение (41.2) принимает вид гиперболического уравнения

$$E^-u = u_{xx} - u_{yy} - \frac{2q}{y}u_x - \frac{2p}{y}u_y = 0. \tag{41.25}$$

Для последнего характерна задача Коши с условиями

$$u(x,\ 0) = \tau(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \lim_{y \to -0} (-y)^{2p} u_y(x,\ y) = \nu(x),\ 0 < x < 1, \tag{41.26}$$

рассматриваемая в характеристическом треугольнике $D^- = \{0 < -y < x < 1 + y\}$. Решение этой задачи с точностью до коэффициентов можно получить из формулы (41.9) и других формул для общего решения из предыдущего пункта, если в них положить

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y,\ \beta^* = p + q,\ \beta = p - q. \tag{41.27}$$

Таким образом, устанавливается следующая

Теорема 41.3. *Задача Коши (41.26) для уравнения (41.25) в области D^- при условиях $\tau \in C^2([0,\ 1])$, $\nu \in C^2((0,\ 1))$, $0 < \beta^* < 1$, $0 < \beta < 1$, $\beta + \beta^* < 1$ корректна, а ее решение $u \in C^2(D^-)$ и выражается формулой*

$$u(x,\ y) = -A_1(-y)^{1-2p} \int_0^1 \nu(x + y(1 - 2t))(1 - t)^{-\beta^*} t^{-\beta} dt +$$

$$+ \frac{1}{B(\beta,\ \beta^*)} \int_0^1 \tau(x + y(1 - 2t))(1 - t)^{\beta - 1} t^{\beta^* - 1}\, dt, \tag{41.28}$$

где $A_1 = [(1 - 2p)\, B(1 - \beta^*,\ 1 - \beta)]^{-1}$.

Следствие. *Если на характеристике $y = -x$ выполняется условие*

$$u(x,\ -x) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \tag{41.29}$$

имеет место следующее представление функции $\nu(x)$ через $\tau(x)$ и $\psi(x)$:

$$\nu(x) = -\frac{2^{1-2p}\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(1 - 2p)} x^{\beta} \frac{d}{dx} I_{0+}^{\beta^*} \psi\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2^{1-2p}\Gamma(2p)\,\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(1 - 2p)\,\Gamma(\beta^*)} \frac{d}{dx} I_{0+}^{2p} \tau(x), \tag{41.30}$$

где I_{0+}^{α} — оператор дробного интегрирования (2.17).

Доказательство. Подставив в (41.28) $y = -x$ и воспользовавшись (41.29), после замен $2xt = \eta$ и $2x$ на x получим следующее равенство:

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = -A_1 2^{2p-1}\Gamma(1 - \beta^*)\, I_{0+}^{1-\beta^*} x^{-\beta} \nu(x) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(\beta^*)} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} x^{\beta^* - 1} \tau(x).$$

Применив к нему оператор $I_{0+}^{\beta^* - 1}$, придем к соотношению

$$\nu(x) = -\frac{2^{1-2p} x^{\beta}}{A_1 \Gamma(1 - \beta^*)} I_{0+}^{\beta^* - 1} \psi\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2^{1-2p}\Gamma(2p)}{A_1 \Gamma(\beta^*)\,\Gamma(1 - \beta^*)} x^{\beta} I_{0+}^{\beta^* - 1} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} \tau(x)\, x^{\beta^* - 1}.$$

Воспользовавшись теперь формулой (10.12), вычислим композицию из последнего слагаемого:

$$I_{0+}^{\beta^*-1} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} x^{\beta^*-1}\tau(x) = I_{0+}^{-\beta}(I_{0+}^{2p-1} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} x^{-\beta}) x^{2p-1}\tau(x) =$$

$$= I_{0+}^{-\beta}(I_{0+}^{\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{2p-1} x^{1-2p}) x^{2p-1}\tau(x) = x^{-\beta}\frac{d}{dx} I_{0+}^{2p}\tau(x),$$

что в итоге приводит к формуле (41.30).

Замечание 41.2. Соотношение (41.30) сохраняет силу и при менее ограничительных, чем в теореме 41.3, условиях $0<\beta+\beta^*<1$, $\beta^*>0$, $\beta<1$.

Замечание 41.3. Соотношение (41.30) широко используется при исследовании уравнений смешанного типа, см., например, книги Ф. Трикоми [1], А. В. Бицадзе [1—3], М. М. Смирнова [2, 7]. Однако обычно оно доказывается более сложным способом, не использующим формулу (10.12).

Во многих случаях, особенно при решении краевых задач для уравнений смешанного типа, условия τ, ν, $u\in C^2$ из теоремы 41.3 приводят к труднопроверяемым ограничениям на заданные функции. Эта проблема решается путем рассмотрения формальных не достаточно гладких решений вида (41.28), которые могут быть приближены решениями из класса C^2. Рассмотрим теперь класс R_1 таких обобщенных решений задачи Коши, введенный К. И. Бабенко [1, 2].

Определение 41.1. *Функцию (41.28) с $\beta=\beta^*=p$ будем называть обобщенным решением уравнения (41.25) с $q=0$ из класса R_1 в области $D^-=\{0<-y<x<1+y\}$, если $0<p<1$ и*

$$\tau\in H^{\alpha_1}([0,\ 1)),\ \alpha_1>1-p;\quad \nu\in H^{\alpha_2}([0,\ 1)),\ \alpha_2>p, \tag{41.31}$$

где $H^{\lambda}([0,\ 1))$ — класс гельдеровских функций, см. § 1, п. 1°.

Справедлива следующая

Теорема 41.4. *Пусть обобщенное решение (41.28) с $q=0$ задачи Коши (41.25), (41.26) принадлежит классу R_1. Тогда u_x, $u_y\in C(D^-)$, функция u_y удовлетворяет второму условию (41.26) и существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n\in C^2(D^-)$, классических решений уравнения (41.25) такая, что в любом замкнутом треугольнике $D_{\varepsilon}^-=\{\varepsilon<-y<x<1+y\}$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.*

Доказательство. Перейдем в (41.28) к координатам (41.27) и воспользуемся леммой 13.2, из которой следует, что в силу (41.31) имеют место представления

$$\tau(\theta) = \tau(0) + \int_0^{\theta}(\theta-s)^{-p+\varepsilon}\varphi(s)\,ds,\quad \nu(\theta) = \nu(0) + \int_0^{\theta}(\theta-s)^{p-1+\varepsilon}\psi(s)\,ds, \tag{41.32}$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мала, а функции φ, $\psi\in C([0,\ 1))$. Подставив эти значения в формулу (41.28) при $\beta^*=\beta=p$ и поменяв порядок интегрирования по области $0<s<\theta$, $\xi<\theta<\eta$, получим

$$u(\xi,\ \eta) = -A_1 2^{2p-1}(\eta-\xi)^{1-2p}\mathrm{B}(1-p,\ 1-p)\nu(0) + \tau(0) +$$

$$+\Big(\int_0^{\xi} ds\int_{\xi}^{\eta} d\theta + \int_{\xi}^{\eta} ds\int_{s}^{\eta} d\theta\Big)[-A_1 2^{2p-1}\psi(s)(\eta-\theta)^{-p}(\theta-\xi)^{-p}(\theta-s)^{p-1+\varepsilon} +$$

$$+(\mathrm{B}(p,\ p))^{-1}(\eta-\xi)^{1-2p}\varphi(s)(\eta-\theta)^{p-1}(\theta-\xi)^{p-1}(\theta-s)^{-p+\varepsilon}]. \tag{41.33}$$

Воспользовавшись теперь заменами $\theta=(\eta-\xi)t+\xi$ или $\theta=(s-\eta)t+\eta$, вычислим внутренние интегралы по формуле (1.73). Тогда

$$u(\xi,\ \eta) = -A_1 2^{2p-1}\mathrm{B}(1-p,\ 1-p)(\eta-\xi)^{1-2p}\nu(0) + \tau(0) -$$

$$-2^{2p-1}A_1\mathrm{B}(1-p,\ p+\varepsilon)(\eta-\xi)^{-p}\int_{\xi}^{\eta}\psi(s)(\eta-s)^{\varepsilon}{}_2F_1\Big(p,\ 1-p;\ 1+\varepsilon;$$

$$\frac{\eta-s}{\eta-\xi}\Big)ds+\frac{B(p,\ 1-p+\varepsilon)}{B(p,\ p)}(\eta-\xi)^{-p}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(s)(\eta-s)^{\varepsilon}{}_2F_1\Big(p,\ 1-p;\ 1+\varepsilon;$$

$$\frac{\eta-s}{\eta-\xi}\Big)ds+\int_0^{\xi}\varphi(s)(\eta-s)^{-p+\varepsilon}{}_2F_1\Big(p,\ p-\varepsilon;\ 2p;\ \frac{\eta-\xi}{\eta-s}\Big)ds-$$

$$-2^{2p-1}A_1B(1-p,\ 1-p)(\eta-\xi)^{1-2p}\int_0^{\xi}\psi(s)(\xi-s)^{p-1+\varepsilon}{}_2F_1\Big(1-p,$$

$$1-p-\varepsilon;\ 2-2p;\ \frac{\xi-\eta}{\xi-s}\Big)ds. \tag{41.34}$$

Все указанные интегралы являются собственными, имеющими непрерывные в области $\mathfrak{D}$ производные по параметрам ξ и η. Производная по ξ последнего интеграла также существует, так как по формуле (10.13) соответствующая функция $(\xi-s)^{p-1+\varepsilon}{}_2F_1\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-s}\right)=O(1)$ при $s\to\xi$. Производные всех слагаемых из (41.34), кроме первого и последнего, при $\eta\to\xi$ имеют порядок $O[(\eta-\xi)^{-p}]$. Применив к равенству (41.34) оператор $(\eta-\xi)^{2p}\times$ $\times\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$, из первого и последнего слагаемых в пределе найдем значение

$$\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2p}(u_\eta-u_\xi)=-A_1 2^{2p}B(1-p,\ 1-p)(1-2p)\times$$

$$\times\Big[\nu(0)+\int_0^{\xi}\psi(s)(\xi-s)^{p-1+\varepsilon}ds\Big]=-2^{2p}\nu(\xi),$$

причем этот переход осуществляется равномерно при $0\leqslant\xi\leqslant\theta<1$. Отсюда после замен (41.27) получается второе из равенств (41.26).

Поскольку $\varphi,\ \psi\in C([0,\ 1))$, то по теореме Вейерштрасса существуют последовательности функций $\{\varphi_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi_n(s)\}_{n=1}^{\infty}\in C^2([0,\ 1))$, которые равномерно на любом отрезке $[0,\ \theta_0]$, $\theta_0<1$, стремятся к φ и ψ соответственно. Формулы (41.32) ставят им в соответствие функции τ_n, ν_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, которые также принадлежат $C^2([0,\ 1))$. Но тогда и соответствующие решения (41.28), обозначаемые через u_n, также принадлежат $C^2(D^-)$, причем $u_n\to u$. Теорема доказана.

3°. Полуоднородная задача Коши в многомерном полупространстве. Рассмотрим в полупространстве $R_+^{n+1}=\{(x,\ y):x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in R^n,\ y>0\}$ задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{2p}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{41.35}$$

с полуоднородными условиями

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\ u_y(x,\ 0)=0, \tag{41.36}$$

где $\tau(x)\in C^2(R^n)$ — заданная функция.

Известно, см., например, книгу Р. Куранта, Д. Гильберта [1, с. 466], что при $2p=n-1$ решение задачи (41.35), (41.36) единственно и выражается через *сферическое среднее* $M_n(x,\ y;\ \tau)$ от функции τ в пространстве R^n по формуле

$$u(x,\ y)=M_n(x,\ y;\ \tau)=\frac{1}{|S_{n-1}|}\int_{S_{n-1}}\tau(x+yt)\,d\sigma, \tag{41.37}$$

где $t=(t_1, \ldots, t_n)$ принадлежит единичной сфере S_{n-1}, т. е. $|t|=1$, $d\sigma$ — элемент площади поверхности этой сферы, а $|S_{n-1}|=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь ее поверхности (ее величина находится из равенства (25.9) при $f\equiv 1$). В частности, из равенства (41.37) следуют формулы

$$M_n(x,\ 0;\ \tau)=\tau(x), \tag{41.38}$$

$$M_1(x,\ y;\ \tau)=2^{-1}[\tau(x-y)+\tau(x+y)]. \tag{41.39}$$

Применив к решению (41.37) по переменной y оператор Эрдейи — Кобера $I_{\eta,\alpha}$ (18.8), обозначаемый ниже через $I^{(y)}_{\eta,\alpha}$, и подобрав его параметры так, чтобы оператор (41.35) с $2p=n-1$ преобразовывался бы в оператор (41.35) с произвольным $2p$ по лемме 40.2 в случае $\lambda=0$, построим функцию

$$u(x,\ y)=\frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(n/2)}\,I^{(y)}_{n/2-1,\,p+(1-n)/2}M_n(x,\ y;\ \tau). \tag{41.40}$$

Эта функция в силу леммы 40.2 будет решением уравнения (41.35), а постоянный коэффициент в ней выбран так, чтобы ввиду равенства (41.38) выполнялись условия (41.36).

Отметим, что и в случае $p<(n-1)/2$ функция (41.40) остается решением задачи Коши (41.35), (41.36), если пользоваться доопределением оператора Эрдейи—Кобера $I_{\eta,\alpha}$ на значения $\alpha<0$, рассмотренным в § 18, п. 1°. Однако, как показано в работе D. W. Bresters [2], решение (41.40) в случае $p<0$ не является единственным.

Формулу (41.40) с помощью равенства (23.1) можно представить в виде

$$u(x,\ y)=\frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(n/2)}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma((n-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2+p)}\,\mathfrak{M}^{(y)}\{M_n(x,\ y;\ \tau);\ s\}\,y^{-s}ds,$$

$$0<\gamma<1, \tag{41.41}$$

где $\mathfrak{M}^{(y)}$ — оператор преобразования Меллина (1.112), действующий по переменной y. Такая форма решения задачи Коши допускается при $2p\neq -1, -3, \ldots$ и оказывается полезной при изучении асимптотики этого решения.

В качестве примера такого исследования укажем асимптотическое разложение решения $u(x, y)$ при $y\to\infty$ в случае, когда $n=1$, $p>0$, а $\tau(t)$ имеет простейшую асимптотику вида

$$\tau(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^{-k},\quad t\to\infty. \tag{41.42}$$

Тогда, как указано в работе N. Berger, R. Handelsman [1]:

$$M_1(x,\ y;\ \tau)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x)\,y^{-2k}, \tag{41.43}$$

где $c_k(x)$ — многочлены вида

$$c_0(x)=a_0,\ c_k(x)=\sum_{j=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{j}a_{2k-j}\,(-x)^j,\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда с помощью разложения (17.18) находим искомую асимптотику решения уравнения (41.25) при $q=0$:

$$u(x,\ y) \sim \frac{\Gamma(p+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k\mathfrak{M}^{(y)}\{M_2(x,\ y;\ \tau);\ 2k+1\}}{k!\,\Gamma(p-k)\,y^{2k+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(p+1/2-k)}\right]c_k(x)\,y^{-2k}. \qquad (41.44)$$

В заключение пункта отметим, что лемма 40.2 в случае произвольного λ дает возможность на основе решения (41.37) построить решения задачи Коши для произвольных однородных линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. В самом деле, указанные уравнения заменами переменных могут быть сведены к уравнению вида

$$\sum_{k=1}^{n} v_{x_kx_k} - v_{yy} - \lambda^2 v = 0. \qquad (41.45)$$

В силу леммы 40.2 решение $v(x,\ y)$ этого уравнения можно преобразовать в решение $u(x,\ y)$ уравнения (41.35) с $2p=n-1$ по формуле

$$u(x,\ y) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}}\,J_{i\lambda}^{(y)}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)v(x,\ y), \qquad (41.46)$$

где $J_\lambda^{(y)}(\eta,\ \alpha)$ — оператор Эрдейи — Кобера $J_\lambda(\eta,\ \alpha)$ (37.45), действующий по переменной y. Тогда условия (41.36) сохранят силу и для решения $v(x,\ y)$, а обратное преобразование осуществляется формулой (37.57):

$$v(x,\ y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n/2)}\,J_\lambda^{(y)}\left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{1-n}{2}\right)M_n(x,\ y;\ \tau). \qquad (41.47)$$

Если еще на основе решения $v(x,\ y)$ построить функцию

$$\tilde{v}(x,\ y) = \int_0^y v(x,\ t)\,dt, \qquad (41.48)$$

то она также будет решением уравнения (41.45), удовлетворяющим симметричным с (41.36) полуоднородным условиям

$$\tilde{v}(x,\ 0) = 0,\ \ \tilde{v}_y(x,\ 0) = \tau_1^*(x). \qquad (41.49)$$

Заменив в этом решении $\tau(x)$ на $\nu(x)$ и сложив его с функцией (41.47), придем к решению задачи Коши общего вида (41.26) с $p=0$ для уравнения (41.45).

4°. Весовые задачи Дирихле и Неймана в полуплоскости. В настоящем пункте с помощью формул (41.18)—(41.20) осуществляются решения задач Дирихле и Неймана в полуплоскости $y>0$ для уравнения (41.2) при всех значениях параметров p и q. Имеют место следующие аналоги теорем 40.7 и 40.8.

Теорема 41.5. *Пусть τ является непрерывной ограниченной на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией. Тогда задача Дирихле в полуплоскости $y>0$ о нахождении решения $u(x,\ y)\in C^2(y>0)$ уравнения (41.2) в классе ограниченных на бесконечности функций по условию (40.32) корректна для любого действительного q лишь в случае $p<1/2$. Ее решение выражается формулой (41.18) с коэффициентом*

$$l_1 = \frac{(1-2p)\,B(1-\beta,\ 1-\bar{\beta})}{2^{2p}\pi e^{q\pi}}. \qquad (41.50)$$

Теорема 41.6. *Пусть ν является непрерывной и абсолютно интегрируемой на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией, причем если $p\leqslant 0$, то еще $|\nu(t)|<$*

$< C|t|^{2p-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $|t| \to \infty$, C — const. *Пусть также выполняется необходимое условие (40.49). Тогда весовая задача Неймана в полуплоскости* $y > 0$ *об отыскании решения* $u \in C^2(y > 0)$ *уравнения (41.2), исчезающего на бесконечности и удовлетворяющего краевому условию (40.45) при* $-\infty < x < \infty$, *является корректной лишь в трех случаях: 1)* $p > q$, q *произвольное, 2)* $-1/2 < p < 0$, $q = 0$, *3)* $p = q = 0$. *В случаях 1) и 2) ее решение имеет вид (41.19), где*

$$l_2 = -2^{2p-2}\pi^{-1}e^{-q\pi}B(\beta, \bar{\beta}), \tag{41.51}$$

а при $p = q = 0$ *выражается формулой (40.50), непрерывно связанной с (41.19), (41.51) лишь при* $q = 0$, $p \to 0$. *Эти решения содержат абсолютно и равномерно сходящиеся (по множествам* $\{y \geqslant 0, |x| < R\}$*) интегралы и исчезают на бесконечности порядка* $u = O(\rho^{-2p-1})$, *причем* u_x, $u_y = O(\rho^{-2p-2})$ *при* $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.

Теорема 41.7. *Пусть* $p = 1/2$, *а* τ *является непрерывной на оси функцией, причем* $|\tau(t)| < C|t|^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $|t| \to \infty$, C — const. *Тогда весовые задачи Дирихле и Неймана в полуплоскости* $y > 0$ *о нахождении решения* $u(x, y) \in C^2(y > 0)$ *уравнения (41.2), исчезающего на бесконечности и удовлетворяющего соответственно условиям*

$$\lim_{y \to +0} \ln^{-1} y\, u(x, y) = \lim_{y \to +0} y\, u_y(x, y) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{41.52}$$

разрешимы формулой (41.20), где ψ *имеет вид (41.17) и*

$$l_3^{-1} = -(1 + e^{2q\pi})(C_1 - AC_2), \quad A = \ln 4 + 2\mathbf{C} + \psi(1/2 - iq) + \psi(1/2 + iq) \tag{41.53}$$

или же эквивалентной формулой

$$u(x, y) = \frac{e^{-q\pi}}{2 \operatorname{ch} q\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)\, e^{2q\psi}}{\sqrt{(t-x)^2 + y^2}} \ln \frac{e^{AC-1} y^C}{((x-t)^2 + y^2)^C}\, dt, \tag{41.54}$$

где C, C_1, C_2 — *произвольные постоянные, а* $\psi(z)$ — *функция (1.67).*

Замечание 41.4. Если в формуле (41.19), а в (41.18) после дифференцирования по y перейти к пределу при $y \to +0$, $p < 1/2$ с условиями (40.32), (40.45), совершив затем замены

$$c_1 = \operatorname{ch} q\pi, \quad c_2 = -\operatorname{sh} q\pi, \quad \alpha = 1 - 2p, \quad f_1(x) = \tau(x), \quad \varphi(t) = \Gamma(\alpha)\, l_2 e^{q\pi} \nu(t),$$

то получатся равенства (12.11) и (30.78), отражающие связь между прямым и обратным преобразованиями Феллера.

При остальных значениях параметров p и q являются разрешимыми следующие краевые задачи.

А. Если $p > 1/2$, а q произвольно, то весовая задача Дирихле (40.51), $-\infty < x < \infty$, разрешима формулами (41.19), (41.51).

Б. Если $p = 0$, $q \neq 0$, то весовая задача Неймана

$$\lim_{y \to +0} \ln^{-1} y\, u_y(x, y) = \nu(x) \tag{41.55}$$

разрешима формулой (41.19) при $p = 0$, $l_2 = [4qe^{q\pi} \operatorname{sh} q\pi]^{-1}$.

В. Если $p < 0$, $q \neq 0$, то задача Неймана

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{41.56}$$

в классе ограниченных на бесконечности функций разрешима формулой (41.18), где следует положить $\tau(t) = -pq^{-1} \int_{-\infty}^{t} \nu(\theta)\, d\theta + C$, C — const, причем $C = 0$, если u на бесконечности исчезает.

ТАБЛИЦА 41.1

p	$<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<p<0$	0	<0	$0<p<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$>\frac{1}{2}$
q	0	0	0	0	$\neq 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$
$u=O$	1	1	1	1	1	1	$\ln y$	y^{1-2p}
$u_y=O$	y	$y\ln y$	y^{-2p}	1	1	y^{-2p}	y^{-1}	y^{-2p}

Г. Если $q=0$, $p=-1/2$, то весовая задача Неймана

$$\lim_{y\to+0}(y\ln y)^{-1}u_y(x,\ y)=\nu(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{41.57}$$

разрешима формулой (41.19) при $q=0$, $l_2=-1/2$.

Д. Если $q=0$, $p<-1/2$, то весовая задача Неймана

$$\lim_{y\to+0}y^{-1}u_y(x,\ y)=\nu(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{41.58}$$

при условиях (40.49) и $|\nu(t)|<C|t|^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $|t|\to\infty$, в классе исчезающих на бесконечности вместе с производными первого порядка функций единственным образом разрешима формулой (41.18), где следует положить $q=0$ и $\tau(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\theta)\nu(\theta)\,d\theta$, а $l_1=\dfrac{2\Gamma(1-p)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-1/2-p)}$.

Для достижения единственности решений всех указанных задач на искомые решения следует накладывать дополнительные ограничения, устраняющие особые решения уравнения (41.2) вида $y^{1-2p}r_1^{2p-2}e^{2q\psi}$, y^{1-2p}, $r_1^{-2p}e^{2q\psi}$, 1 (и $\ln y$, $r_1^{-1}\ln(yr_1^{-2})e^{2q\psi}$ при $p=1/2$).

В приведенной здесь табл. 41.1 отражается зависимость порядков решения u уравнения (41.2) и его производной u_y при $y\to 0$ от величин параметров p и q.

Из таблицы видно, какие веса соответствуют корректным задачам Неймана и Дирихле с данными на особой линии $y=0$.

§ 42. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Уравнения, в которые неизвестная функция $y(x)$ входит под знаком производной дробного порядка, т. е. уравнения типа

$$F(x,\ y(x),\ \mathcal{D}_{a_1}^{\alpha_1}\omega_1(x)\,y(x),\ \mathcal{D}_{a_2}^{\alpha_2}\omega_2(x)\,y(x),\ \ldots,\ \mathcal{D}_{a_n}^{\alpha_n}\omega_n(x)\,y(x))=g(x), \tag{42.1}$$

где $\mathcal{D}_{a_j}^{\alpha_j}=\mathcal{D}_{a_j+}^{\alpha_j}$ или $\mathcal{D}_{a_j-}^{\alpha_j}$, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями дробного порядка*. По аналогии с классической теорией дифференциальных уравнений среди дифференциальных уравнений дробного порядка выделяют линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Дифференциальные уравнения дробного порядка изучаются как в пространствах регулярных функций, т. е. функций, суммируемых с некоторой степенью, непрерывных и достаточное число раз дифференцируемых в классическом смысле, так и в различных пространствах обобщенных функций.

В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши и Дирихле для дифференциальных уравнений дробного порядка. Так, если требуется найти решение $y(x)$ уравнения (42.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathcal{D}_{b+}^{\beta_1} y(x)|_{x=x_0} = b_1, \quad \mathcal{D}_{b+}^{\beta_2} y(x)|_{x=x_0} = b_2, \quad \ldots,$$

$$\mathcal{D}_{b+}^{\beta_m} y(x)|_{x=x_0} = b_m, \quad x_0, \ b, \ b_1, \ \ldots, \ b_m, \ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_m \text{ — const},$$

то будем говорить, что разыскивается *решение задачи типа Коши* для уравнения (42.1). Если же значения искомой функции или значения ее производных целого или дробного порядка заданы на концах некоторого отрезка $[x_0, x_1]$, будем говорить, что для уравнения (42.1) поставлена краевая задача или *задача типа Дирихле.*

В последующих пунктах приведем постановки некоторых конкретных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, изучим вопросы разрешимости этих задач в различных классах функций, а также рассмотрим приложения теории дробного дифференцирования и теории дифференциальных уравнений дробного порядка к интегрированию некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка.

1°. Задачи типа Коши для дифференциальных уравнений и систем дробного порядка общего вида. Пусть требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y), \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{42.2}$$

$n = -[-\alpha]$ $\left(\text{здесь и ниже } \dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha} = \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\right)$ при начальных условиях

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y_i^{\cdot}(x)\Big|_{x=+0} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{42.3}$$

где $f(x, y)$, α, $b_1, \ldots, b_n$ — заданные функция и постоянные величины.

Рассмотрим ряд теорем о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Обозначим через R_n следующее множество точек (x, y) из области D, лежащей в $R \times R$:

$$R_n = \left\{(x, y) \in D : 0 < x \leqslant h, \quad \left| x^{n-\alpha} y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leqslant a \right\},$$

$$a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)}, \tag{42.4}$$

где a, h, b_0 — некоторые постоянные.

Теорема 42.1. *Пусть $f(x, y)$ — вещественнозначная, непрерывная в области D функция, удовлетворяющая по y условию Липшица*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant A |y_1 - y_2|$$

и ограничению $\sup\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)| = b_0 < \infty$. *Тогда решение задачи Коши (42.2), (42.3) для $n = 1$ в области $R_1 \subset D$ (см. (42.4) при $n = 1$) существует, непрерывно и единственно.*

Теорема 42.2. *Пусть $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 42.1. Тогда решение задачи Коши (42.2), (42.3) для $n = 1, 2, \ldots$ в области $R_n \subset D$ существует, непрерывно и единственно.*

Теорема 42.3. *Пусть* $f_k(x, y_1, \ldots, y_m)$, $k=1, 2, \ldots, m$, *вещественнозначные непрерывные в области* $D_m \subset R \times R^m$ *функции, удовлетворяющие условиям*

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_m) - f_k(x, z_1, \ldots, z_m)| \leqslant A \sum_{i=1}^{m} |y_i - z_i|, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

и $\sup\limits_{\substack{(x, y_1, \ldots, y_m) \in D_m \\ k=1,2,\ldots,m}} f_k(x, y_1, \ldots, y_m) = M < \infty$. *Тогда решение задачи Коши*

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y_k(x) = f_k(x, y_1, \ldots, y_m),$$

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y_k(x)\Big|_{x=+0} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

в области

$$\tilde{R}_1 = \left\{(x, y_1, \ldots, y_m) \in D_m : 0 < x \leqslant h, \left| x^{1-\alpha} y_k(x) - \frac{b_k}{\Gamma(\alpha)} \right| \leqslant a, \right.$$

$$\left. k = 1, 2, \ldots, m \right\},$$

где $a > Mh/\Gamma(\alpha+1)$, *существует, непрерывно и единственно.*

Теорема 42.4. *Пусть функция* $f(x, y_1, \ldots, y_m)$ *удовлетворяет условиям теоремы 42.3. Тогда решение задачи Коши*

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y_k(x) = f_k(x, y_1, \ldots, y_m),$$

$$\frac{d^{\alpha-j}}{dx^{\alpha-j}} y_k(x)\Big|_{x=+0} = b_{k,j}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$n - 1 < \alpha \leqslant n,$$

в области

$$\tilde{R}_n = \left\{(x, y_1, \ldots, y_m) \in D_m : 0 < x \leqslant h, \left| x^{n-\alpha} y_k(x) - \right.\right.$$

$$\left. \left. - \frac{b_{k,n}}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leqslant a, \quad k = 1, 2, \ldots, m \right\},$$

где $a > \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{h^{n-j} b_{k,j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)}$, $b_{k,0} = M$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *существует, непрерывно и единственно.*

Теорема 42.5. *Пусть* $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, *и* $f(x)$ — *непрерывные в интервале* $(0, h)$ *функции. Тогда задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x) \frac{d^{(m-k)\alpha}}{dx^{(m-k)\alpha}} y(x) = f(x), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

$$\frac{d^{k\alpha-1}}{dx^{k\alpha-1}} y(x)\Big|_{x=+0} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ *решение.*

Теорема 42.6. *При условиях теоремы 42.5 задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x)\frac{d^{(m-k)\alpha}}{dx^{(m-k)\alpha}}y(x)=f(x),\quad n-1<\alpha\leqslant n,$$

$$\frac{d^{k\alpha-j}}{dx^{k\alpha-j}}y(x)\Big|_{x=+0}=b_{k,j},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеет единственное непрерывное на $(0,\ h)$ *решение.*

Доказательства теорем 42.1—42.6 ненамного отличаются от доказательств соответствующих теорем для дифференциальных уравнений целого порядка. Поэтому полностью докажем лишь теорему 42.1.

Интегрируя уравнение (42.2) $\left(\text{здесь } \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}=I_{0+}^{\alpha}\right)$, имеем

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\,\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}y(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x,\ y),$$

откуда, согласно свойству (2.61) и условию (42.3), получим

$$y(x)=b_1\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(t,\ y)\,dt. \tag{42.5}$$

Итак, задача (42.2), (42.3) приводится к уравнению (42.5). Покажем теперь, наоборот, что если непрерывная функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет (42.5), то она удовлетворяет и (42.2), (42.3). Действительно, применяя к последнему равенству оператор $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$, имеем

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}y(x)=\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x^{\alpha-1}+\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\,\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x,\ y),$$

откуда $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}y(x)=f(x,\ y)$.

Условие (42.3) при $n=k=1$ получается без труда, если к (42.5) применить оператор $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}$:

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}y(x)=\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}x^{\alpha-1}+\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}f(x,\ y)=$$

$$=b_1+\frac{1}{\Gamma(1)}\cdot\int_0^x f(t,\ y(t))\,dt,$$

а затем положить $x=0$.

Из сказанного следует, что уравнение (42.5) в указанном смысле равносильно уравнению (42.2) с начальным условием (42.3).

Дальнейшее доказательство будем осуществлять методом последовательных приближений (также здесь допустимо использование теоремы о сжатых отображениях, см. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин [1, с. 73]). Пусть

$$y_0(x)=b_1\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad y_n(x)=b_1\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma_1(\alpha)}f(t,\ y_{n-1}(t))dt,\ n=1,\ 2,\ \ldots \tag{42.6}$$

Прежде всего позаботимся, чтобы точки $(x,\ y_n(x))$ оставались в R_1 при $0<x\leqslant h$. Из условия $\sup\limits_{(x,y)\in D}f(x,\ y)=b_0$ следует оценка

$$\left|x^{1-\alpha}y_n(x)-\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\right|=\left|\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,\ y_{n-1}(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{b_0x}{\Gamma(\alpha+1)}\leqslant\frac{b_0h}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (42.7)$$

Потребовав, чтобы $b_0h/\Gamma(\alpha+1)<a$, получим, что $(x,\ y_n(x))\in R_1$ при $0<x\leqslant h$.

Теперь оценим разность $y_n(x)-y_{n-1}(x)$. Согласно (42.7), имеем

$$|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant b_0x^\alpha/\Gamma(\alpha+1)\leqslant b_0h^\alpha/\Gamma(\alpha+1).$$

Из (42.6) при $n=1$ с помощью условия Липшица и предыдущей оценки находим

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\,[f(t,\ y_1(t))-f(t,\ y_0(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}|y_1(t)-y_0(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\,\frac{b_0t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,dt\leqslant\frac{Ab_0h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

Повторив многократно такие же оценки, окончательно приходим к равенству

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant A^{n-1}b_0h^{n\alpha}/\Gamma(n\alpha+1).$$

Отсюда следует, что последовательность $y_n(x)$ равномерно относительно x $(0<x\leqslant h)$ стремится к некоторой предельной функции $y(x)$. Эта функция при $0<x\leqslant h$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|x^{1-\alpha}y(x)-b_1/\Gamma(\alpha)|\leqslant a,$$

которое следует в пределе при $n\to\infty$ из неравенства (42.7). Совершив теперь в (42.6) предельный переход при $n\to\infty$ в силу непрерывности $f(x,\ y)$, легко получим равенство (42.5).

Докажем, что при достаточно малых h решение $y(x)$ единственно. Пусть $Ah^\alpha/\Gamma(\alpha+1)<1$, и предположим, что имеются два решения $y(x)$ и $Y(x)$ рассматриваемой задачи. Подставив их в (42.5), после вычитания получим

$$|y(x)-Y(x)|=\left|\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,[f(t,\ y(t))-f(t,\ Y(t))]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}|y(t)-Y(t)|\,dt.$$

Допустим, что разность $|y(x)-Y(x)|$ на промежутке $0<x\leqslant h$ допускает наибольшее значение δ при некотором $x=\xi$. Тогда при $x=\xi$ из последнего неравенства будем иметь $\delta\leqslant A\Gamma^{-1}(\alpha)\,\delta h^\alpha\alpha^{-1}$ или $1\leqslant Ah^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$, что противоречит предположению. Этим и завершается доказательство теоремы 42.1.

Теорема 42.2 доказывается аналогично теореме 42.1, только в этом случае полагают

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Теоремы 42.3 и 42.4 являются распространением предыдущих теорем на систему дифференциальных уравнений дробного порядка. А теоремы 42.5 и 42.6 являются частными случаями теорем 42.3 и 42.4.

В заключение пункта рассмотрим два примера на использование теорем 42.1 и 42.2.

Пример 42.1. Решим следующую задачу Коши:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \lambda y(x), \quad n-1 < \alpha \leqslant n,$$

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x)\Big|_{x=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При решении будем пользоваться доказательством теоремы 42.1. Имеем

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t)\, dt.$$

Отсюда при $m = 1, 2, \ldots$ находим

$$y_1(x) = y_0(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{x^{2\alpha-k}}{\Gamma(2\alpha-k+1)},$$

$$y_2(x) = y_1(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{x^{3\alpha-k}}{\Gamma(3\alpha-k+1)}, \ldots,$$

что в общем случае приводит к формуле

$$y_m(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^{j-1} \frac{x^{\alpha j-k}}{\Gamma(\alpha j-k+1)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Отсюда в пределе при $m \to \infty$ имеем следующее представление искомого решения:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{x^{\alpha j-k}}{\Gamma(\alpha j-k+1)} = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{\alpha-k} E_{\alpha, 1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера (1.91). В частности, если $\alpha = n = 1$, то

$$y(x) = b_1 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{x^{j-1}}{\Gamma(j)} = b_1 e^{\lambda x}$$

и происходит «стыковка» известного решения задачи Коши для уравнения первого порядка и рассматриваемой задачи для уравнения порядка α.

Пример 42.2. Построим теперь решение задачи типа Коши для неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) - \lambda y(x) = h(x), \quad n-1 < \alpha \leqslant n,$$

с условиями

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}}\,y(x)\Big|_{x=0}=b_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Аналогично предыдущему примеру имеем

$$y_m(x)=y_0(x)+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}y_{m-1}(t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}h(t)\,dt,$$

откуда

$$y_m(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k\sum_{j=1}^{m+1}\lambda^{j-1}\frac{x^{\alpha j-k}}{\Gamma(\alpha j-k+1)}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j)}\int_0^x(x-t)^{\alpha j-1}h(t)\,dt.$$

Далее в пределе при $m\to\infty$ находим искомое решение задачи Коши

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}b_kx^{\alpha-k}E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^{\alpha})+\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]\,h(t)\,dt.$$

2°. Задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение дробного порядка вида

$$\mathfrak{D}^{\sigma_n}y(x)+\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)\,\mathfrak{D}^{\sigma_n-k-1}y(x)+p_n(x)\,y(x)=f(x),\qquad(42.8)$$

где

$$\mathfrak{D}^{\sigma_k}=\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k-1}\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k-1}\ldots\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_0},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \mathfrak{D}^{\sigma_0}=\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_0-1},$$
$$\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j-1,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ 0<\alpha_j\leqslant 1,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n\qquad(42.9)$$

(очевидно, $\alpha_k=\sigma_k-\sigma_{k-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $\alpha_0=\sigma_0+1$), а $p_k(x)$, $f(x)$— некоторые заданные функции. Требуется найти решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathfrak{D}^{\sigma_k}y(x)\big|_{x=0}=b_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.\qquad(42.10)$$

Изучение этой задачи типа Коши начнем со случая

$$p_k(x)\equiv 0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

т. е. рассмотрим уравнение

$$\mathfrak{D}^{\sigma_n}y(x)=f(x)\qquad(42.11)$$

с начальными условиями (42.10). Справедлива следующая

Теорема 42.7. *Пусть функция $f(x)\in L_1(0,\ a)$ представима в виде*

$$f(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\,\tilde{f}(x),\ \alpha_n<1,\qquad(42.12)$$

где $\tilde{f}(x)\in L_1(0,\ a)$. Тогда решение задачи типа Коши (42.11), (42.10) существует, единственно и представимо в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}+\int_0^x\frac{(x-t)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)}f(t)\,dt.$$

Доказательство. Из формулы (42.9) очевидным образом вытекает, что

$$\mathfrak{D}^{\sigma_k} = \frac{d^{\alpha_k - 1}}{dx^{\alpha_k - 1}} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}^{\sigma_{k-1}}. \tag{42.13}$$

Следовательно, уравнение (42.11) можно переписать в форме

$$\frac{d^{\alpha_n - 1}}{dx^{\alpha_n - 1}} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}^{\sigma_{n-1}} y(x) = f(x)$$

или

$$\mathfrak{D}^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d^{-\alpha_n}}{dx^{-\alpha_n}} f(x) + b_{n-1}. \tag{42.14}$$

Таким образом, задача (42.11), (42.10) свелась к задаче (42.14) с условиями (42.10), где $k=0, 1, \ldots, n-2$. Снова, применив к уравнению (42.14) формулу (42.13), аналогично предыдущему найдем

$$\mathfrak{D}^{\sigma_{n-2}} y(x) = \frac{d^{-\alpha_{n-1}}}{dx^{-\alpha_{n-1}}} \frac{d^{-\alpha_n}}{dx^{-\alpha_n}} f(x) + \frac{d^{-\alpha_{n-1}}}{dx^{-\alpha_{n-1}}} b_{n-1} + b_{n-2}. \tag{42.15}$$

Теперь задача (42.11), (42.10) свелась к задаче (42.15) с условиями (42.10), где $k=0, 1, \ldots, n-3$. Продолжив этот процесс дальше, получим, что уравнение (42.11) сводится к эквивалентному уравнению

$$y(x) = \mathfrak{D}^{-\sigma_n} f(x) + \mathfrak{D}^{-\sigma_{n-1}} b_{n-1} + \ldots + \mathfrak{D}^{-\sigma_0} b_0,$$

которое после учета формулы

$$\mathfrak{D}^{-\sigma_k} b_k = b_k \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}$$

приобретает вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} + \mathfrak{D}^{-\sigma_n} f(x). \tag{42.16}$$

Покажем, что полученная функция $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (42.10). Для этого к равенству (42.16) применим оператор $\mathfrak{D}^{\sigma_0}$:

$$\mathfrak{D}^{\sigma_0} y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{\sigma_k - \sigma_0}}{\Gamma(1+\sigma_k-\sigma_0)} + \mathfrak{D}^{\sigma_0} \mathfrak{D}^{-\sigma_n} f(x).$$

Положив здесь $x=0$, получим условие (42.10) при $k=0$. Подействовав на (42.16) оператором $\mathfrak{D}^{\sigma_1}$ и положив затем $x=0$, придем к условию (42.10) при $k=1$. Продолжив этот процесс дальше, убедимся в выполнении всех оставшихся условий (42.10). Из равенства (42.16) также следует и единственность решения рассматриваемой задачи типа Коши. Теорема доказана.

Перейдем к основной теореме настоящего пункта.

Теорема 42.8. *Пусть функции $p_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, a]$ удовлетворяют условию Липшица (т. е. условию Гельдера с показателем $\lambda=1$), а функция $f(x)$ там непрерывна и допускает представление*

$$f(x) = \frac{d^{\alpha_n - 1}}{dx^{\alpha_n - 1}} \tilde{f}(x), \quad 0 < \alpha_n < 1, \tag{42.17}$$

где $\tilde{f}(x) \in L_1(0, a)$. Тогда если $\alpha_0 > 1 - \alpha_n$, то задача типа Коши (42.8), (42.10) имеет единственное непрерывное на $[0, a]$ решение.

Доказательство. Положим $\mathfrak{D}^{\sigma_n} y(x) = \Phi(x)$. Тогда (42.8) примет вид интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\Phi(x) = \omega(x) + \int_0^x W(x, t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{42.18}$$

где

$$W(x, t) = -p_n(x)\frac{(x-t)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k-1}(x)\,\frac{(x-t)^{\sigma_n-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_n-\sigma_k)}, \tag{42.19}$$

$$\omega(x) = f(x) - p_n(x)\sum_{k=0}^{n-1} b_k\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k-1}(x)\sum_{m=k}^{n-1} b_m\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_m-\sigma_k)}. \tag{42.20}$$

Из представления (42.19) видно, что ядро $W(x, t)$ при $t=x$ имеет слабую особенность. Применив к (42.18) метод последовательных приближений, получим, что это уравнение допускает не более одного непрерывного на $[0, a]$ решения $\Phi(x)\in L_1(0, a)$. Отсюда, согласно теореме 42.7, вытекает единственность решения задачи (42.8), (42.10). Доказательство существования решения этой задачи также в силу теоремы 42.7 сводится к доказательству возможности представления

$$\Phi(x) = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\Phi}(x),\ \tilde{\Phi}(x)\in L_1(0, a). \tag{42.21}$$

Действительно, поскольку уравнение (42.18) допускает не более одного решения $\Phi(x) = \mathfrak{D}^{\sigma_n} y(x)$, то, согласно теореме 42.7, осталось установить, что функция

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1}\Phi(t)\,dt$$

является решением задачи (42.8), (42.10). Таким образом, необходимо проверить выполнение условия (42.21), фигурирующего в теореме 42.7. Займемся этой проверкой.

Приняв во внимание условия $\alpha_0 > 1-\alpha_n$, $\alpha_n > 0$ и неравенства $\sigma_k + \alpha_n \geqslant \sigma_0 + \alpha_n = \alpha_0 - 1 + \alpha_n > 0$, $\sigma_m - \sigma_k + \alpha_n > \alpha_n > 0$, выпишем в соответствии с (2.44) формулы

$$\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\,\frac{x^{\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\alpha_n)},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_m-\sigma_k)} = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\,\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n)},\ m = k, k+1, \ldots, n-1,$$

которые вместе с (42.17) дают возможность равенство (42.20) записать в виде

$$\omega(x) = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{f}(x) - p_n(x)\,\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} b_k\frac{x^{\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\alpha_n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k-1}(x)\,\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\sum_{m=k}^{n-1} b_m\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n)}. \tag{42.22}$$

Теперь воспользуемся результатом, доказанным в работе М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [6, с. 17], где утверждается, что *для любых*

функций $g(x)\in L_1(0, a)$ *и* $p_k(x)\in C([0, a])$ *существует единственная функция* $G(x)\in L_1(0, a)$, *удовлетворяющая равенству*

$$p_k(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\cdot g(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}G(x),\ 0\leqslant\alpha<1 \tag{42.23}$$

(аналогичные утверждения см. также в леммах 3.2 и 10.1).

На основе этого результата соотношение (42.22) можно переписать в виде

$$\omega(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\omega}(x), \tag{42.24}$$

где $\tilde{\omega}(x)$ — некоторая функция из $L_1(0, a)$. Далее из (42.18) и (42.19) имеем

$$\Phi(x)=\omega(x)-p_n(x)\frac{d^{-\sigma_n}}{dx^{-\sigma_n}}\Phi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-k-1}(x)\frac{d^{\sigma_k-\sigma_n}}{dx^{\sigma_k-\sigma_n}}\Phi(x),$$

откуда, согласно (42.23), получаем

$$\Phi(x)=\omega(x)+\frac{d^{-\varkappa}}{dx^{-\varkappa}}v(x),\ v(x)\in L_1(0, a), \tag{42.25}$$

где $\varkappa=\min\{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_0, \ldots, \sigma_n-\sigma_{n-1}\}=\min\{\sigma_n, \alpha_n\}$.

Таким образом, из (42.24) и (42.25) вытекает, что

$$\Phi(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\omega}(x)+\frac{d^{-\varkappa}}{dx^{-\varkappa}}v(x).$$

Если теперь $\varkappa\geqslant 1-\alpha_n$, то представление (42.21) доказано. Если же $\varkappa<1-\alpha_n$, то, согласно (42.23), существует такое $p\in\mathbf{N}$, что $(p-1)\varkappa<1-\alpha_n<p\varkappa$ и

$$\Phi(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\omega}_1(x)+\frac{d^{-p\varkappa}}{dx^{-p\varkappa}}\tilde{v}(x),\ \tilde{v}(x)\in L_1(0, a),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

3°. Задача Дирихле для дифференциального уравнения дробного порядка. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с дробными производными вида

$$Ly\equiv y''(x)+a_0(x)y'(x)+\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}(\omega_k(x)y(x))+a_{m+1}(x)y(x)=f(x), \tag{42.26}$$

где $0<\alpha_k<1$, а $a_0(x)$, $a_{m+1}(x)$, $a_k(x)$, $\omega_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, $f(x)$ — непрерывные на $[0, 1]$ функции.

В теории краевых задач для уравнений типа (42.26) важную роль играют следующие две теоремы, первая из которых является аналогом принципа Хопфа, см. книгу А. В. Бицадзе [3, с. 25, 26].

Теорема 42.9. *Пусть неубывающие положительные на* $[0, 1]$ *функции* $\omega_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, *удовлетворяют там условию Гельдера с показателями* $\varkappa_k>\alpha_k$, $0<\alpha_k<1$, $k=1, 2, \ldots, m$, *и* $a_k(x)\in C[0, 1]$, $a_k(x)\leqslant 0$, $0<x<1$, $k=1, 2, \ldots, m+1$. *Тогда если* $y\in C^2(0, 1)$ — *решение уравнения* $Ly=0$ *(42.26), отличное от постоянной, то положительный максимум (отрицательный минимум) функции* $y(x)$ *может достигаться только на концах* $x=0$ *или* $x=1$.

Доказательство. Допустим противное, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}y(x)=y(x_0)>0$, $0<x_0<1$. Заметим, что если функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[0, x]$,

удовлетворяет условию Гельдера порядка $\varkappa > \alpha$ в точке $t = x$ и там же достигает максимума, то из равенства (13.1) следует, что $(\mathscr{D}_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) > 0$. Поэтому поскольку функции $\omega_k(x)$ положительны и не убывают на интервале $[0,1]$, то произведение $\omega_k y$ достигает положительного максимума в точке x_0 и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [x_0 - \delta, x_0]$ выполняются неравенства $0 < y(x) < y(x_0)$, $a_k(x)(\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}\omega_k y)(x) \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Из уравнения $Ly = 0$ имеем

$$y'' + a_0(x)y' = -\sum_{k=1}^{m} a_k(x)\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}\omega_k(x)\,y - a_{m+1}(x)\,y.$$

Следовательно,

$$y'' + a_0(x)\,y' \geqslant 0, \quad x \in [x_0 - \delta, x_0]. \tag{42.27}$$

На отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ введем вспомогательную функцию

$$z(x) = y(x) + \varepsilon g(x),$$

где $g(x) = \exp(-\mu x) - \exp(-\mu x_0)$, $\mu > 0$, $0 < \varepsilon < [y(x_0) - y(x_0 - \delta)]/g(x_0 - \delta)$, и подставим значение $y(x) = z(x) - \varepsilon g(x)$ в (42.27):

$$z'' + a_0(x)\,z' \geqslant \varepsilon\mu \exp(-\mu x)\,[\mu - a_0(x)].$$

Выбрав μ так, чтобы $\mu > a_0(x)$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0]$, получим

$$z'' + a_0(x)\,z' > 0. \tag{42.28}$$

Если бы функция $z(x)$ достигала максимума в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, то в соответствующей точке выполнялись бы условия $z' = 0$ и $z'' \leqslant 0$, что противоречит (42.28). Поэтому наибольшего значения $z(x)$ может достигать только в точке x_0, так как $z(x_0 - \delta) < y(x_0 - \delta) + \dfrac{y(x_0) - y(x_0 - \delta)}{g(x_0 - \delta)}\,g(x_0 - \delta) = y(x_0) = z(x_0)$, $z'(x_0) \geqslant 0$. Но $0 \leqslant z'(x_0) = y'(x_0) + \varepsilon g'(x_0) = y'(x_0) - \varepsilon\mu \exp(-\mu x_0)$, откуда $y'(x_0) \geqslant \varepsilon\mu \exp(-\mu x_0) > 0$, что противоречит необходимому условию экстремума $y'(x_0) = 0$. Значит, экстремум во внутренней точке отрезка $[0, 1]$ функцией $y(x)$ не может достигаться. Теорема доказана.

Вторая теорема является аналогом принципа Зарембы—Жиро (см. книгу А. В. Бицадзе [3, с. 26]).

Теорема 42.10. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда если* $y \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1] \cap C^2(0, 1)$ *— решение уравнения* $Ly = 0$ *(42.26) и* $y^* = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} y(x) = y(1) > 0$ $(y_* = \min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} y(x) = y(1) < 0)$, *то* $y'(1) > 0$ $(y'(1) < 0)$. *Если же* $y^* = y(0) > 0$ $(y_* = y(0) < 0)$, *то* $y'(0) < 0$ $(y'(0) > 0)$ *при дополнительном условии, что* $y(x) \in C^1[0, 1)$, $\omega_k(x) \in C^1[0, \varepsilon_0]$, $\omega_k(0) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *где* ε_0 *— сколь угодно близко к нулю.*

Доказательство легко следует из теоремы 42.9.

Определение 42.1. *Задачу о нахождении решения уравнения (42.26) по краевым условиям*

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{42.29}$$

будем называть задачей Дирихле для этого уравнения.

Теорема 42.11. *Пусть коэффициенты уравнения (42.26) удовлетворяют условиям теоремы 42.9 и* $a_0(x) \equiv 0$, $a_k(x)$, $\omega_k(x) \in C^1[0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда задача Дирихле (42.26), (42.29) в классе функций* $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ *безусловно и однозначно разрешима.*

Доказательство. Несложно убедиться в законности следующей цепочки равенств:

$$\varphi(x) = x\varphi(x) - (x-1)\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 (t-1)\,\varphi(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x t\varphi(t)\,dt + x(x-1)\varphi(x) + \int_x^1 (t-1)\varphi(t)\,dt - x(x-1)\varphi(x)\right] =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left[\int_0^x (x-t)\,t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 x(t-1)\,\varphi(t)\,dt\right] = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^1 G(x,\,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$G(x,\,t) = \begin{cases} t(x-1), & t \leqslant x, \\ x(t-1), & t > x. \end{cases} \tag{42.30}$$

Это позволяет уравнение (42.26) в случае $a_0(x) \equiv 0$ переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = 0, \tag{42.31}$$

где

$$\Phi(x) = y(x) + \int_0^1 G(x,\,t)\,a_{m+1}(t)\,y(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}\int_0^1 G(x,\,t)\,a_k(t) \times$$

$$\times\,(\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}\omega_k y)(t)\,dt - \int_0^1 G(x,\,t)\,f(t)\,dt. \tag{42.32}$$

Непосредственной проверкой с помощью (42.29) можно убедиться, что $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. Следовательно, из (42.31) имеем равенство

$$\Phi(x) = 0. \tag{42.33}$$

Тем самым установлено, что задача Дирихле (42.26), (42.29) эквивалентна интегральному уравнению (42.32), (42.33). Непосредственной проверкой можно убедиться, что это уравнение является уравнением Фредгольма 2-го рода. В силу теорем 42.9 и 42.10 и краевых условий (42.29) однородное интегральное уравнение (42.32), (42.33) (при $f(x) = 0$) эквивалентно однородной задаче Дирихле и поэтому имеет только тривиальное решение $y = 0$. Отсюда следует, что неоднородное уравнение Фредгольма безусловно и однозначно разрешимо, и поэтому задача Дирихле также безусловно и однозначно разрешима. Теорема доказана.

4°. Решение линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве обобщенных функций. Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение дробного порядка

$$\sum_{j=1}^{n} a_j I^{\alpha_j} y(x) = f(x) \tag{42.34}$$

(здесь и ниже $I^{\alpha_j} = I_{0+}^{\alpha_j} = \mathscr{D}_{0+}^{-\alpha_j}$) с постоянными комплексными ненулевыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и попарно различными вещественными показателями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Это уравнение обобщает интегральные уравнения Абеля 1-го и 2-го рода и обычные линейные дифференциальные уравнения целого порядка с постоянными коэффициентами.

В дальнейшем решение $y(x)$ уравнения (42.34) будем искать в пространстве $\mathscr{S}'_+$ обобщенных функций медленного роста, носитель которых заключен в интервале $[0, \infty)$. Более подробные разъяснения этого и других встречающихся в этом пункте терминов и обозначений можно найти в книге В. С. Владимирова [2].

Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'_+$. Уравнение (42.34) запишем в форме свертки

$$\mathrm{k}(x) * y(x) + f(x), \tag{42.35}$$

где

$$\mathrm{k}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_{\alpha_j}(x), \tag{42.36}$$

а обобщенная функция $f_\alpha(x) \in \mathcal{S}'_+$ имеет вид

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}(x), & \alpha \leqslant 0, \ \alpha + N > 0, \ N = -[-\alpha] + 1. \end{cases} \tag{42.37}$$

Применим к обеим частям уравнения (42.35) интегральное преобразование Фурье — Лапласа, которое при $f(x) \in \mathcal{S}'_+$ задается формулой

$$F(z) = L[f(x)](z) = L[f](x + iy) = V[f(\xi) e^{-y\xi}](x), \tag{42.38}$$

где $V[g(\xi)](x)$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g(\xi) \in \mathcal{S}'_+$, определяемое обычным образом (см., например, В. С. Владимиров [2, с. 105]). Введем еще обозначения

$$Y(z) = L[y(x)](z), \quad K(z) = L[\mathrm{k}(x)](z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j e^{i\pi\alpha_j/2}}{z^{\alpha_j}}, \tag{42.39}$$

где ветви степенных функций задаются условием $z^{\alpha_j} > 0$ при $z = x > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $f(x)$, $y(x)$, $\mathrm{k}(x) \in \mathcal{S}'_+$, то функции $F(z)$, $Y(z)$, $K(z)$ аналитичны в верхней полуплоскости $\mathbf{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Обозначим через H множество аналитических в $\mathbf{C}^+$ функций $G(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которые удовлетворяют условию $|G(z)| \leqslant M(1 + |z|^2)^{p/2}(1 + y^{-q})$, $z \in \mathbf{C}^+$, при некоторых вещественных неотрицательных и не зависящих от z постоянных M, p и q. Множество H относительно операций сложения и умножения аналитических функций, а также операции умножения функции на комплексное число является мультипликативной алгеброй, которая называется *алгеброй Владимирова*.

Имеет место следующее утверждение (см. книгу В. С. Владимирова [2, с. 173]).

Теорема 42.12. *Алгебры $\mathcal{S}'_+$ и H алгебраически и топологически изоморфны, этот изоморфизм осуществляется преобразованием Фурье—Лапласа, и для любых обобщенных функций $\mathrm{k}(x)$, $y(x) \in \mathcal{S}'_+$ имеет место равенство $L[\mathrm{k}(x) * y(x)](z) = K(z)Y(z)$.*

Таким образом, уравнение (42.34) имеет решение в пространстве $\mathcal{S}'_+$ только в том случае, когда решение $Y(z)$ алгебраического уравнения $K(z)Y(z) = F(z)$ принадлежит алгебре Владимирова H, причем если $Y \in H$, то единственное решение уравнения (42.34) доставляется формулой

$$y(x) = L^{-1}[F(z)/K(z)], \tag{42.40}$$

Здесь L^{-1} — обратное преобразование Фурье — Лапласа, действующее из H в $\mathcal{S}'_+$.

Если функция $K(z)$ вида (42.39) не имеет нулей, расположенных в $\mathbf{C}^+$, то $1/K(z) \in H$ и, следовательно, $Y(z) = F(z)/K(z) \in H$, т. е. в этом случае уравнение (42.34) разрешимо в $\mathcal{S}'_+$ при любой правой части $f(x) \in \mathcal{S}'_+$.

Допустим теперь, что функция $K(z)$ имеет нули в точках $z = z_j \in \mathbf{C}^+$, $j = 1, 2, \ldots, l$ (бесконечным это множество быть не может, так как тогда $K(z) \equiv 0$). Тогда для того, чтобы функция $Y(z) = F(z)/K(z)$ принадлежала H, необходимо выполнение условий $F(z_j) = L[f(x)](z_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Обозначим через N и N_0 суммы порядков нулей функции $K(z)$, имеющих положительные и нулевые мнимые части соответственно, причем если $K(z)$ обращается в нуль в начале координат, то этот нуль учитывать не будем. Тогда имеет место формула

$$N = \frac{1}{2\pi}[\arg K(z)]_\gamma - \frac{1}{2}(N_0 - \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_j), \tag{42.41}$$

которая следует из обобщенного принципа аргумента (см. монографию Ф. Д. Гахова [1, с. 100]). Здесь $[\omega]_\gamma$ означает приращение величины ω при обходе в положительном направлении замкнутого контура γ, образованного верхней полуокружностью, охватывающей все нули функции $K(z)$, и отрезком вещественной оси, стягивающим эту полуокружность.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 42.13. *Пусть $N \geqslant 0$ — определяемая по формуле (42.41) сумма порядков нулей, имеющих положительные мнимые части, аналитической в $\mathbf{C}^+$ функции $K(z)$ вида (42.39), являющейся преобразованием Фурье—Лапласа обобщенной функции $\mathrm{k}(x)$ (42.36). Если $N=0$, то уравнение (42.34) разрешимо в пространстве $\mathscr{D}'_+$ при любой правой части $f(x) \in \mathscr{D}'_+$. Если же $N>0$ и $z_1, z_2, \ldots, z_l$ — все нули функции $K(z)$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Im} z_j > 0$, $j=1, 2, \ldots, l$, а $r_1, r_2, \ldots, r_l$ — их порядки ($r_1+r_2+\ldots+r_l=N$), то для разрешимости уравнения (42.34) в пространстве $\mathscr{D}'_+$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(z) = L[f(x)](z)$ имела нули в точках $z_1, z_2, \ldots, z_l$ порядков, не меньших, чем $r_1, r_2, \ldots, r_l$ соответственно. Если решение существует, то оно единственно и определяется по формуле (42.40). В случае $N=0$ решение уравнения (42.34) можно также представить в форме $y(x) = f(x) * g_0(x)$, где $g_0(x) = L^{-1}[1/K(z)]$ — фундаментальное решение оператора $\mathrm{k}(x)*$ (т. е. обобщенная функция с носителем из $[0, +\infty)$, удовлетворяющая уравнению $\mathrm{k}(x) * g_0(x) = \delta(x)$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака).*

Пусть теперь в уравнении (42.34) правая часть $f(x)$ принадлежит пространству D'_+ (множеству обобщенных функций с носителями в $[0, \infty)$), которое, очевидно, шире, чем $\mathscr{D}'_+$. Построим решение $y(x)$, которое также принадлежит D'_+.

Пусть c — вещественная неотрицательная постоянная, удовлетворяющая условию $c > \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant l} |z_j|$. Тогда $1/K(z + ic) \in H$, а обобщенная функция

$$g(x) = e^{cx} L^{-1}[1/K(z + ic)] \tag{42.42}$$

является, вообще говоря, элементом пространства D'_+. Отметим, что $g(x)$ не зависит от c, и в случае $N = 0$ выполняется равенство $g(x) = g_0(x)$.

Рассмотрим следующее выражение:

$$\mathrm{k}(x) * g(x) = L^{-1}[K(z)] * e^{cx} L^{-1}[1/K(z + ic)] = e^{cx}(L^{-1}[K(z + ic)] * \\ * L^{-1}[1/K(z + ic)]) = e^{cx}\delta(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Из последнего вытекает, что функция $g(x)$ является фундаментальным решением оператора $\mathrm{k}(x)*$ в пространстве D'_+ и справедливо равенство

$$y(x) = f(x) * g(x). \tag{42.43}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 42.14. *Если* $f(x)\in D'_+$, *то единственное в пространстве* D'_+ *решение уравнения (42.34) доставляется формулой (42.43), где* $g(x)$ *— фундаментальное решение оператора* $\mathrm{k}(x)*$, *имеющее вид (42.42).*

Замечание 42.1. Обобщенная функция $g(x)$ из пространства D'_+ может принадлежать и более узкому пространству. Так, если $g(x)$ и $f(x)$ — непрерывные на $[0, \infty)$ функции, то и функция $y(x)$ из (42.43) будет непрерывной на $[0, \infty)$, а последняя формула имеет вид

$$y(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt, \quad x > 0.$$

Это представление сохранит силу и в случае, когда $g(x)$, $f(x)\in L_2^{\mathrm{loc}} = \{\varphi : \varphi\in L_2(a, b)\ \forall\ a,\ b\in R^1\}$.

5°. Приложения дробного дифференцирования к интегрированию дифференциальных уравнений целого порядка. Рассмотрим два примера применения теории дробного дифференцирования для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го и n-го порядков.

Пример 42.3. Пусть задано следующее уравнение 2-го порядка:

$$(a_2 + b_2x + c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1x)\frac{dy}{dx} + a_0y = 0. \qquad (42.44)$$

Его решение будем искать в виде дробной производной $y = \mathscr{D}^p_{x_0}z(x)$ (здесь $\mathscr{D}^p_{x_0} = \mathscr{D}^p_{x_0+}$), порядок p которой подлежит определению. Применив известные формулы Лейбница для производных дробного порядка (см. (15.11)):

$$x\mathscr{D}^{p+1}_{x_0}z(x) = \mathscr{D}^{p+1}_{x_0}(xz(x)) - (p+1)\mathscr{D}^p_{x_0}z(x),$$

$$x\mathscr{D}^{p+2}_{x_0}z(x) = \mathscr{D}^{p+2}_{x_0}(x^2z(x)) - 2(p+2)\mathscr{D}^{p+1}_{x_0}(xz(x)) + (p+1)(p+2)\mathscr{D}^p_{x_0}z(x),$$

из (42.44) получим равенство

$$\mathscr{D}^{p+2}_{x_0}[a_2 + b_2x + c_2x^2]z(x) + \mathscr{D}^{p+1}_{x_0}[a_1 + b_1x - 2c_2(p+2)x -$$

$$- b_2(p+2)]z(x) + \mathscr{D}^p_{x_0}[a_0 - b_1(p+1) + (p+1)(p+2)c_2]z(x) = 0.$$

Решение последнего уравнения будем искать в классе интегрируемых на любом конечном интервале функций $z(x)$, удовлетворяющих условиям $z(x_0) = z'(x_0) = 0$, которые нужны для выполнения операторных соотношений $\mathscr{D}^p_{x_0}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}\mathscr{D}^p_{x_0}$ и $\mathscr{D}^p_{x_0}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\mathscr{D}^p_{x_0}$ при $p < 0$. Тогда предыдущее уравнение можно будет переписать в виде

$$\mathscr{D}^p_{x_0}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(a_2 + b_2x + c_2x^2) + a_1 + b_1x - 2c_2(p+2)x - b_2(p+2)\right] + \right.$$

$$\left. + a_0 - b_1(p+1) + c_2(p+1)(p+2)\right\}z(x) = 0. \qquad (42.45)$$

Параметр p определим как одно из решений квадратного уравнения

$$a_0 - b_1(p+1) + c_2(p+1)(p+2) = 0. \qquad (42.46)$$

Тогда из (42.45) получим простое дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx}(a_2 + b_2x + c_2x^2) = z[a_1 + b_1x - (1+p)(b_2 + c_2x)],$$

решение которого легко выписывается методом разделения переменных

$$z(x) = (a_2 + b_2x + c_2x^2)^{p+1} \exp\left\{-\int \frac{a_1 + b_1x}{a_2 + b_2x + c_2x^2}\, dx\right\}. \quad (42.47)$$

При этом параметры a, b, c должны удовлетворять некоторым ограничениям, обеспечивающим выполнение условий $z(x_0) = z'(x_0) = 0$.

Таким образом, искомое решение уравнения (42.44) имеет вид

$$y(x) = \mathcal{D}^{p}_{x_0+} z(x) \quad (42.48)$$

с параметром p, определяемым из соотношения (42.46).

Интеграл, входящий в формулу (42.47), может быть вычислен в различных формах в зависимости от соотношений между его параметрами. Подробный анализ всех его значений и соответствующих представлений функции $z(x)$ изложен в работе Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [2], 1867 г.). Здесь мы приведем лишь формулы, относящиеся к одному из этих случаев.

Пусть $c_2 \neq 0$, $b_2^2 - 4a_2c_2 \neq 0$. Тогда $a_2 + b_2x + c_2x^2 = c_2(x - \alpha)(x - \beta)$ и функция $z(x)$ из формулы (42.47) после несложных вычислений принимает вид $z(x) = c_2^{p+1}(x - \alpha)^{p-q+1}(x - \beta)^{p-r+1}$, где $q = \dfrac{b_1\alpha + a_1}{c_2(\alpha - \beta)}$, $r = -\dfrac{b_1\beta + a_1}{c_2(\alpha - \beta)}$ и должны выполняться условия $\operatorname{Re}(p - q) > 0$ (или $\operatorname{Re}(p - r) > 0$), когда $x_0 = \alpha$ (или $x_0 = \beta$).

Частным случаем уравнения (42.44) является гипергеометрическое уравнение (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, 2.1(1)]), для которого $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = -1$, $a_1 = c$, $b_1 = -(a + b + 1)$, $a_0 = -ab$. Соответствующее уравнение (42.46) тогда доставляет значения $p_1 = a - 1$, $p_2 = b - 1$. Формулы (42.47), (42.48) для первого из этих значений приводят к следующему представлению решения гипергеометрического уравнения:

$$y(x) = \mathcal{D}^{a-1}_{0+} x^{a-c}(1 - x)^{c-b-1}, \quad (42.49)$$

которое является видоизмененным интегральным представлением Эйлера (1.73) (см. также табл. 9.1, формулу 3). Вычисляя последний интеграл, окончательно приходим к представлению решения через гипергеометрическую функцию в виде

$$y(x) = \frac{\Gamma(a - c + 1)}{\Gamma(2 - c)}\, x^{1-c}{}_2F_1(1 + a - c,\ 1 + b - c;\ 2 - c;\ x).$$

Пример 42.4. Рассмотрим следующее обыкновенное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с двучленными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_kx) \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (42.50)$$

Одно из его решений построим в виде $n-1$-кратного интеграла, воспользовавшись операторами интегродифференцирования произвольного порядка. Для этого введем сначала многочлены

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k = b_n \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k), \quad (42.51)$$

где корни $\psi(x)$ обозначены через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, причем $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. После замены

$$y = \exp(\lambda_1x)\, Y(x), \quad \lambda_1 \neq 0, \quad (42.52)$$

воспользовавшись тождеством

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{\lambda_1 x}Y(x)\right) = e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)^m Y(x),$$

уравнение (42.50) перепишем в виде

$$\varphi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)Y(x) + x\psi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)Y(x) = 0. \qquad (42.53)$$

Решение последнего будем искать в форме производной некоторого порядка

$$Y(x) = \frac{d^p}{dx^p}\, y_1(x),$$

где $y_1(x)$ — интегрируемая на произвольном интервале $(0, a)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$y_1(0) = y_1'(0) = \ldots = y_1^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (42.54)$$

Тогда уравнение (42.53) сведется к следующему:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left\{\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\left[\varphi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right) - (p+1)\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\psi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + x\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\psi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)\right\} y_1(x) = 0. \qquad (42.55)$$

Введем в рассмотрение многочлены

$$\psi_1(x) = x^{-1}\psi(\lambda_1 + x), \quad \varphi_1(x) = x^{-1}\left[\varphi(\lambda_1 + x) - (p+1)\psi_1(x)\right]. \qquad (42.56)$$

Первый из них в силу $\psi(\lambda_1) = 0$ имеет порядок $n-1$. Положив

$$p + 1 = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\psi_1(0)} = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\psi_1'(\lambda_1)} = \alpha_1, \qquad (42.57)$$

получим, что $x\varphi_1(x)$ при $x=0$ обращается в нуль и, следовательно, $\varphi_1(x)$ будет многочленом порядка $n-1$. Допустим, что $\alpha_1 < 0$. Тогда из однородного уравнения Абеля порядка $-p-1$ (42.55), записанного в обозначениях (42.56), будет следовать соотношение

$$\varphi_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_1(x) + x\psi_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_1(x) = 0. \qquad (42.58)$$

Таким образом, уравнение (42.50) при условиях (42.54) и $\alpha_1 < 0$ свелось к уравнению (42.58), порядок которого равен $n-1$.

Продолжив аналогичным образом указанный процесс понижения порядка, придем к следующей системе дифференциальных уравнений некоторых порядков $\alpha_j - 1$:

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}\frac{d^{\alpha_1 - 1}}{dx^{\alpha_1 - 1}}\, y_1(x),$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_{11} x}\frac{d^{\alpha_2 - 1}}{dx^{\alpha_2 - 1}}\, y_2(x), \ \ldots, \qquad (42.59)$$

$$y_{n-2}(x) = e^{\lambda_{1,n-2} x}\frac{d^{\alpha_{n-1} - 1}}{dx^{\alpha_{n-1} - 1}}\, y_{n-1}(x),$$

где $y_{n-1}(x) = \exp(\lambda_{1,n-1}x)(a_n + b_n x)^{-\alpha_n}$ — решение последнего простого уравнения 1-го порядка вида

$$\varphi_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) y_{n-1}(x) + x\psi_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) y_{n-1}(x) = 0, \tag{42.60}$$

а $x = \lambda_{1,m}$ — корень уравнения $\psi_m(x) = 0$, причем

$$\psi_m(x) = x^{-1}\psi_{m-1}(\lambda_{1,m-1} + x), \quad m = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \psi_0(x) = \psi(x), \quad \lambda_{1,0} = \lambda_1, \tag{42.61}$$

$$\varphi_m(x) = x^{-1}[\varphi_{m-1}(\lambda_{1,m-1} + x) - \alpha_m\psi_m(x)], \quad m = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\varphi_0(x) = \varphi(x), \tag{42.62}$$

$$\alpha_m = \varphi_{m-1}(\lambda_{1,m-1})/\psi'_{m-1}(\lambda_{1,m-1}), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{42.63}$$

Докажем, что $\lambda_{1,m} = \lambda_{m+1} - \lambda_m$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Из (42.56), (42.51), (42.61) имеем соотношения

$$\psi_2(x) = x^{-1}\psi_1(\lambda_{1,1} + x) = x^{-1}b_n \prod_{k=2}^{n} (x + \lambda_1 + \lambda_{1,1} - \lambda_k).$$

Поскольку $x = \lambda_{1,1}$ является корнем уравнения $\psi_1(x) = 0$, то $\lambda_{1,1}$ можно положить равным значению $\lambda_{1,1} = \lambda_2 - \lambda_1$. Продолжив такие рассуждения для $\lambda_{1,m}$, $m = 2, 3, \ldots, n-1$, получим

$$\lambda_{1,m} = \lambda_{m+1} - \lambda_m, \quad \psi_m(x) = b_n \prod_{k=m+1}^{n} (x + \lambda_m - \lambda_k), \quad m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{42.64}$$

Условия (42.54) и $\alpha_1 < 0$ относились к функции $y_1(x)$. Аналогичные условия для остальных функций $y_k(x)$ имеют вид

$$y_k(0) = y'_k(0) = \ldots = y_k^{(n-k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\alpha_k < 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad a_n = 0 \tag{42.65}$$

(последнее, т. е. $a_n = 0$, следует из $y_{n-1}(0) = 0$). При этих условиях после свертывания системы (42.59) приходим к следующему представлению одного из решений уравнения (42.50):

$$y(x) = b_n^{-\alpha_n} e^{\lambda_1 x} \frac{d^{\alpha_1 - 1}}{dx^{\alpha_1 - 1}} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \frac{d^{\alpha_2 - 1}}{dx^{\alpha_2 - 1}} \cdots \frac{d^{\alpha_{n-1} - 1}}{dx^{\alpha_{n-1} - 1}} e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} x^{-\alpha_n}. \tag{42.66}$$

Можно установить, что условия (42.65) приводят к следующим ограничениям на α_k:

$$\alpha_1 < 0, \ \alpha_n < -1, \ \alpha_{n-1} < -1, \ \alpha_{n-2} < -2, \ \ldots, \ \alpha_2 < -n + 2. \tag{42.67}$$

Последние можно расширить, если использовать аналитическое продолжение интегралов Абеля, входящих в формулу (42.66).

Частным случаем уравнения (42.50) при $n = 2$, $a_2 = b_0 = 0$, $b_2 = -b_1 = 1$ является вырожденное гипергеометрическое уравнение Куммера

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0. \tag{42.68}$$

Для него $\varphi(x) = cx - a$, $\psi(x) = x^2 - x$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha_1 = c - a$, $\alpha_2 = a$, а условия (42.67) принимают вид $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < -1$. Решение (42.66) для (42.68) приобретает форму

$$y(x) = e^x \frac{d^{c-a-1}}{dx^{c-a-1}} e^{-x} x^{-a} = e^x \int_0^x \frac{(x-t)^{a-c}}{\Gamma(1 + a - c)} e^{-t} t^{-a} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(2-c)} x^{1-c} e^x {}_1F_1(1 - a; 2 - c; -x), \tag{42.69}$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера (1.81) (см. также табл. 9.1, формулу 9). Условия $c-a<0$, $a<-1$ здесь могут быть расширены до условий $c-a<1$, $a<1$, которые обеспечивают сходимость интеграла.

§ 43. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 8

1°. Исторические сведения. К § 40, п. 1°. В основу пункта легли материалы монографии И. Н. Векуа [3, § 6 и 10], 1948 г.

К § 40, пп. 2, 3°. Пункты написаны по материалам статей О. И. Маричева [4], 1976 г., и [9], 1978 г., причем сделаны добавления, связанные с формулами (40.21)—(40.23), а в формулы (40.26), (40.27), (40.48) введены уточнения—регуляторы $(\operatorname{sign} xt + 1)^{|\operatorname{sign}\mu|}$. Более подробные исторические комментарии содержатся ниже в п. 1° (к § 41, п. 4°), поскольку вопросы, рассматриваемые в § 40 и 41, тесно переплетаются.

К § 41, п. 1°. Начало пункта написано по материалам книги Ф. Трикоми [2], 1957 г., формулы (41.18), (41.19) получены в работе О. И. Маричева [5], 1976 г., теорема 41.2 (при $q\neq 0$) доказана О. И. Маричевым, а равенства (41.23), (41.24) заимствованы из работы N. Berger, R. Handelsman [1], 1975 г.

К § 41, п. 2°. Теорема 41.3 установлена в работе А. М. Гордеева [1], 1968 г., хотя в иных обозначениях и в случае $\beta^*=\beta$ этот результат был известен и ранее, см. об этом в монографиях А. В. Бицадзе [1—3], М. М. Смирнова [1—3, 7] и R. P. Gilbert [2]. Класс R_1 ввел К. И. Бабенко [1], 1951 г., см. также [2], 1985 г. Теорема 41.4 доказана в первой из этих работ.

К § 41, п. 3°. Пункт написан по работе N. Berger, R. Handelsman [1], 1975 г., формулы (41.46)—(41.49) получены в статье J. S. Lowndes [8]. Отметим, что в работах E. C. Young [1] и B. Asral [1] соответственно содержатся обзоры исследований сингулярной задачи Коши (41.36) и регулярной задачи Коши с условием вида (41.36), но на линии $y=\varepsilon>0$. В работах J. B. Diaz, H. F. Weinberger [1], E. K. Blum [1] задача (41.35), (41.36) рассматривалась при всех значениях p, в том числе и при особых, когда $2p=-1, -3, -5, \ldots$

К § 41, п. 4°. Пункт написан по работе О. И. Маричева [5], 1976 г., с некоторыми уточнениями в случае $p=1/2$. Отметим, что теорема 41.5 при $q=0$ доказана И. Н. Векуа [2], 1947 г. Этот результат на случаи полушара и полупространства из R^n распространен М. Н. Олевским [1], 1949 г., при некоторых условиях на p, а затем на случай полушара из R^n обобщен в работе A. Huber [1], 1954 г., для всех значений параметра p (см. также работу N. S. Hall, D. W. Quinn, R. J. Weinacht [1], 1974 г., где аналогичный результат для уравнения типа (40.18) с $\lambda=0$ получен в четвертьшаре из R^n при любых p и μ). В работах В. Ф. Волкодавова [1], 1971 г., и В. И. Евсина [1, 2], 1973—1975 гг., построены фундаментальные решения уравнения (41.2) и решены соответственно задачи Дирихле для полукруга $\{x^2+y^2<1,\ y>0\}$ и Неймана—Дирихле для области, примыкающей к отрезку $[-1, 1]$ оси Ox.

Отметим, что впервые фундаментальное решение для уравнения (41.2) с $q=0$, т. е. (41.3″), указано Э. Бельтрами (E. Beltrami [1], 1881 г.) для случая $2p=1$. На значения $p>0$ этот результат распространен в работе A. Weinstein [1], 1948 г., где получено два представления для таких решений.

Уравнения вида (40.18), (40.19), (41.1), (41.2), (41.25), (41.35) имеют богатую историю. Впервые уравнение (41.1) как частный случай более общего уравнения получено Л. Эйлером [2, с. 177, 426—432] в 1772 г. в связи с изучением движения воздуха в трубах разного сечения и колебаний струн переменной толщины. Он дал решение этого уравнения при $0<\beta=\beta^*<1/2$. Такое же уравнение, но в форме (41.25) с $q=0$ решил С. Пуассон (S. D. Poisson [1], 1823 г.), найдя для него гиперболический аналог представления решений (41.22), называемый представлением Пуассона. В этой работе он также рассмотрел уравнение (41.35) при $n=3$, $p=1$. Общее решение уравнения (41.1) при $\beta^*=\beta$ нашел Б. Риман [1, с. 40, 381—395] в 1860 г., построивший решение задачи Коши с помощью вспомогательной функции и методом, который впоследствии был назван его именем. Значительно позже уравнение (41.25) при $q=0$, $0<p<1$ встречалось при исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г. Дарбу (G. Darboux [1], 1915 г.), где оно названо уравнением Эйлера—Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть уравнения вида (41.1), (41.25), (41.35) и их эллиптические аналоги уравнениями Эйлера—Пуассона—Дарбу, хотя точнее их было бы называть уравнениями Эйлера—Пуассона.

Интерес к таким уравнениям значительно увеличился после публикации в 1923 г. первого издания книги Ф. Трикоми [1], где уравнения вида (41.1), (41.2), (41.25) при $q=0$, $p=1/6$ сыграли ключевую роль при изучении краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа $yu_{xx}+u_{yy}=0$, названного впоследствии

уравнением Трикоми. Подробнее об этом направлении см. в монографиях А. В. Бицадзе [1—3] и М. М. Смирнова [1—3, 7].

Важную роль в создании теории уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу и их аналогов сыграли работы A. Weinstein [2—5], 1952—1955 гг. (см. также обзорную статью [8]). В статьях A. Weinstein [2, 4], 1952—1954 гг., при разных значениях параметра p изучена задача Коши (41.35), (41.36) и получено ее решение в виде (41.40). При этом автор указал и использовал формулы $u^p_y = yu^{p+1}$, $u^p = y^{1-2p}u^{1-p}$, связывающие решения $u=u^p$ уравнений вида (41.35), соответствующие различным значениям параметра p (см. (40.20)). В работе A. Weinstein [3], 1953 г., по-видимому, впервые отмечена сводимость общего уравнения (41.3′) к уравнению (41.3″) и изложена история вопроса. Здесь также указаны формулы соответствий вида (40.20) и представление (41.22) в отношении к уравнению (41.2) при $q=0$, $0<p<1/2$. Отметим, что формула типа (40.20) встречалась еще у Г. Дарбу (G. Darboux [1], 1915 г.), а более общие, чем (41.22), представления решений через аналитические функции типа (41.9) для уравнения (41.2) с $q=0$ и вида (40.33) для уравнения (40.18) с $\lambda=0$ были получены в работах Ю. П. Кривенкова [1], 1957 г., и P. Henrici [1], 1957 г.

В статье A. Weinstein [5], 1955 г., для уравнения (41.25) с $q=0$ установлены формулы, связывающие решения таких уравнений при различных значениях параметра p через дробный интеграл (см. лемму 40.2 при $\lambda=0$). Эта идея существенно развита в работах А. Эрдейи (A. Erdelyi [8, 10, 11, 14], 1963—1970 гг.), который, продолжив исследования из статьи A. Weinstein [7], 1960 г., более глубоко изучил свойства дифференциального оператора $L^{(x)}_\eta$ (40.22) (см. A. Erdelyi [8, 10], 1963—1965 гг.). В этих работах доказана лемма 40.2 в случае $\lambda=0$ и ее аналог для второго оператора Эрдейи—Кобера $K_{\eta,\alpha}$, которые позволили связывать через операторы Эрдейи—Кобера решения уравнений (41.2), (41.25) при $q=0$ для различных значений p. Заметим здесь, что в зародыше эта мысль была еще у С. Пуассона (S. D. Poisson ([1], 1823 г.), а после А. Эрдейи этот важный результат обобщен в работе J. S. Lowndes [5], 1979 г., где доказана лемма 40.2.

В работе A. Erdelyi [11], 1965 г., указанный подход распространен на обобщенную систему Стокса—Бельтрами

$$y^{2p}u_x = v_y, \quad y^{2p}u_y = -v_x, \tag{43.1}$$

решения (u, v) которой называются $(2p+2)$-мерными сопряженными симметрическими потенциалами. Такое наименование обусловлено тем, что после исключения функции v из этой системы получается уравнение (41.3″) с $r=y$, решения u которого называются *$(2p+2)$-мерными осесимметрическими потенциалами*. Развивая исследования Н. А. Пахаревой и Н. А. Вирченко [1], 1962 г. (см. Г. Н. Положий [1—3]), А. Эрдейи A. Erdelyi [11, с. 221]) доказал, что если пара (u, v) является $(2p+2)$-мерным потенциалом, то пара $(I^{(y)}_{p-1/2,\alpha}u,\ y^{2\alpha}I^{(y)}_{0,\alpha}v)$ будет $(2p+2\alpha+2)$-мерным потенциалом при условиях $p>-1/2$, $p+\alpha>-1/2$. Здесь $I^{(y)}_{\eta,\alpha}$ означает оператор $I_{\eta,\alpha}$ Эрдейи—Кобера (18.8), применяемый по переменной y.

В работе A. Erdelyi [14], 1970 г., аппарат дробного интегрирования использован для развития результатов из статьи F. G. Friedlander, A. E. Heins [1], 1969 г., где рассматривалось уравнение (41.25) с $q=0$. Здесь указанная выше идея А. Эрдейи применена для вывода представлений решений типа (41.6) из решений уравнения колебания струны. Ранее в работе E. T. Copson, A. Erdelyi [1], 1958 г., эта идея применялась при изучении решений одной краевой задачи для другого гиперболического уравнения (40.19) с $\lambda=0$.

К § 42, п. 1°. Началом развития теории дифференциальных уравнений дробного порядка, по-видимому, следует считать дискуссию о способах решения уравнения $D^{1/2}y = y/x$, начатую в заметке L. O'Shaughnessy [1], 1918 г. Предложенные там и обсужденные в работе E. L. Post [1], 1919 г., два решения существенно отличались, так как на самом деле они удовлетворяли двум различным уравнениям: $\mathscr{D}^{1/2}_{0+}y = y/x$ и $\mathscr{D}^{1/2}_{-}y = y/x$, что не было учтено авторами. Позже к дифференциальному уравнению дробного порядка пришел С. Мандельбройт (S. Mandelbrojt [1], 1925 г.) (см. также книгу В. Вольтерра [1, с. 99], 1982 г.). Он исследовал вопрос о нахождении экстремума функционала $\int_0^1 F[\mathscr{D}^\alpha_{a+}y(x);\ x]\,dx$. Приравняв к нулю соответствующие вариации, он получил дифференциальное уравнение дробного порядка $F_\alpha[\mathscr{D}^\alpha_{a+}y(x);\ x]=0$ с условиями Коши. К предыстории этого направления можно отнести и работу M. Fujiwara [1], 1933 г., в которой, в частности, рассматривалось уравнение $(\mathfrak{D}^\alpha_+ y)(x)=(\alpha x^{-1})^\alpha y(x)$, $\alpha>0$, содержащее оператор дробного дифференцирования по Адамару $\mathfrak{D}^\alpha_+$ (18.54).

Серьезную основу для теории дифференциальных уравнений дробного порядка заложила работа Е. Пичера, В. Сьюелла (E. Pitcher, W. E. Sewell [1], 1938 г.), в ко-

торой при несколько иных условиях были доказаны теоремы 42.1 и 42.2 о существовании и единственности решений задач типа Коши для уравнения $(\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}y)(x)=f(x,\ y)$. Намного позже вышла работа J. H. Barrett [1], 1954 г., в которой в явном виде было решено уравнение (42.11) с условиями (42.10). В дальнейшем эти результаты были значительно обобщены в работах M. A. Al-Bassam [4], 1965 г., [8], 1982 г., A. Z. Al-Abedeen [1], 1976 г., и A. Z. Al-Abedeen, H. L. Arora [1], 1978 г., где сформулирован и доказан ряд теорем, аналогичных соответствующим теоремам из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Эти результаты в несколько упрощенном виде легли в основу пункта.

К § 42, п. 2°. Пункт написан по работе М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [6], 1968 г.

К § 42, п. 3°. Задача Дирихле для уравнений вида (42.26) изучалась М. М. Джрбашяном [8], 1970 г., А. М. Нахушевым [4], 1976 г., [5], 1977 г., и Т. С. Алероевым [1, 2], 1982 г. Изложение этого пункта ведется по указанным работам А. М. Нахушева.

К § 42, п. 4°. Пункт написан по работам А. В. Диденко [1—3], 1984 г., и А. И. Кочуры, А. В. Диденко [1], 1985 г.

К § 42, п. 5°. Первым на возможность построения решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с помощью понятия обобщенного интегродифференцирования указал Ж. Лиувилль (J. Liouville [3], 1832 г.) на примере уравнения (42.40). Используя идею Ж. Лиувилля, это уравнение изучали Hj. Holmgren [2], 1867 г., L. Sohncke [1], 1867 г., и А. В. Летников [4, ч. III], 1874 г. Наиболее полное и подробное исследование провел А. В. Летников.

Уравнение (42.46) также было предметом исследований многих авторов, в частности А. В. Летникова [9], 1888 г., П. А. Некрасова [2], 1888 г., [4], 1891 г., и И. М. Карасева [1], 1957 г., применявших методы дробного интегродифференцирования. В основу пункта легли работы А. В. Летникова [4], 1874 г., [9], 1888 г., и Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [2], 1867 г.).

2°. Обзор других результатов. 40.1. В работах A. Erdelyi [8, 10, 14] наряду с утверждением леммы 40.2 в случае $\lambda=0$ была установлена аналогичная лемма, относящаяся ко второму из операторов Эрдейи—Кобера (18.8).

Лемма 43.1. *Пусть* $\alpha>0$, $f\in C^2(0,\ \infty)$, *причем функции* $x^{2\eta-1}f(x)$ *и* $x^{2\eta}f'(x)$ *интегрируемы на бесконечности. Тогда справедливо равенство*

$$L^{(x)}_{\eta}K_{-\eta,\alpha}f(x)=K_{-\eta,\alpha}L^{(x)}_{\eta-\alpha}f(x),$$

где $L^{(x)}_{\eta}$ *— оператор (40.22), а* $K_{\eta,\alpha}$ *— оператор (18.8).*

Отмечено, что с помощью равенства $L^{(x)}_{\eta}(x^{-2\eta}f(x))=x^{-2\eta}L^{(x)}_{-\eta}f(x)$ из лемм 40.2 и 43.1 при соответствующих условиях, указанных в работе A. Erdelyi [8], следуют соотношения

$$I^{\alpha}_{0+;x^2}L^{(x)}_{\eta}f=L^{(x)}_{\eta-\alpha}I^{\alpha}_{0+;x^2}f,\quad I^{\alpha}_{-;x^2}L^{(x)}_{\eta}f=L^{(x)}_{\eta-\alpha}I^{\alpha}_{-;x^2}f.$$

Эти соотношения в работе J. S. Lowndes [5] обобщены на

$$J^{\alpha}_{\lambda}L^{(x)}_{\eta}f=(L^{(x)}_{\eta-\alpha}+\lambda^2)J^{\alpha}_{\lambda}f,\quad R^{\alpha}_{\lambda}L^{(x)}_{\eta}f=(L^{(x)}_{\eta-\alpha}-\lambda^2)R^{\alpha}_{\lambda}f,$$

где операторы J^{α}_{λ}, R^{α}_{λ} выражаются через обобщенные операторы Эрдейи — Кобера $J_{\lambda}(\eta,\ \alpha)$, $R_{\lambda}(\eta,\ \alpha)$ (37.45), (37.46) по формулам

$$J^{\alpha}_{\lambda}f=x^{2\alpha+2\eta}J_{\lambda}(\eta,\ \alpha)x^{-2\eta}f,\quad R^{\alpha}_{\lambda}f=x^{-2\eta}R_{\lambda}(\eta,\ \alpha)x^{2\alpha+2\eta}f.$$

В частности, справедливы представления (J. S. Lowndes [7])

$$J_{\lambda}f(x)=J^{0}_{\lambda}f(x)=J^{1}_{\lambda}f'(x)=\int_0^x J_0(\lambda\sqrt{x^2-t^2})f'(t)\,dt=$$

$$=f(x)-\lambda\int_0^x\frac{t}{\sqrt{x^2-t^2}}J_1(\lambda\sqrt{x^2-t^2})f(t)\,dt,\quad f(0)=0;$$

$$R_{\lambda}f(x)=R^{0}_{\lambda}f(x)=-R^{1}_{\lambda}f'(x)=\int_x^{\infty}J_0(\lambda\sqrt{t^2-x^2})f'(t)\,dt=$$

$$=f(x)-\lambda\int_x^{\infty}\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}}J_1(\lambda\sqrt{t^2-x^2})f(t)\,dt,$$

когда $t^{-1/2} f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а обратные к J_λ, R_λ операторы вычисляются по формулам, см. (37.57), (37.58): $(J_\lambda)^{-1} f(x) = J_{i\lambda} f(x)$, $(R_\lambda)^{-1} f(x) = R_{i\lambda} f(x)$ (первая из них в иной форме указана в монографии И. Н. Векуа [3, с. 69]).

В работе J. S. Lowndes [7] кроме леммы 40.1 доказаны еще два аналогичных утверждения.

Лемма 43.2. *Пусть* $f \in C^2(b, \infty)$, $b > 0$, *и* $x^{-1/2} f(x) \to 0$, $x^{1/2} f'(x) \to 0$, $x^{-1/2} f''(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Тогда*

$$R_\lambda f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right) R_\lambda f(x), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Лемма 43.3. *Пусть* $f \in C^2(b, \infty)$, $b > 0$, *и* $f^{(k)}(x) = O(e^{-\delta x})$ *при* $x \to \infty$, $\delta > \lambda \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2$. *Тогда*

$$R_{i\lambda} f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right) R_{i\lambda} f(x).$$

Все эти результаты применены к решению некоторых краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями. Отмечено, что лемма 43.2 дает возможность из фундаментальных решений $u = -\ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $u = r^{-1}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, уравнений Лапласа $\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ и $\Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ соответственно получить фундаментальные решения $v = K_0(\lambda r)$ и $v = r^{-1} e^{-\lambda r}$ более общих уравнений типа Гельмгольца $(\Delta_2 - \lambda^2) v = 0$ и $(\Delta_3 - \lambda^2) v = 0$ по формуле $v = R_\lambda u$.

40.2. В работе E. T. Copson [5] рассматривается задача Дирихле в квадранте $x > 0$, $y > 0$ для гиперболического уравнения (40.19) с $\lambda = 0$. Ее решение при $x < y$ и $x > y$ построено методом Римана, а затем показано, что при переходе через линию $y = x$ это решение и его производные при достаточно больших значениях $\mu + p$ непрерывны, если заданные краевые значения $u(x, 0)$ и $u(0, y)$ удовлетворяют уравнениям $u(x, 0) = u(0, x)$ (при $\mu = p$) или $u(0, x) = \dfrac{\Gamma(p + 1/2)}{\Gamma(\mu + 1/2)} x^{-1} I_{\mu-1, p-\mu}\, u(x, 0)$ (при $p > \mu$), где $I_{\eta, \alpha}$ — оператор Эрдейи—Кобера (18.8).

40.3. В работе A. Weinstein [7] изучаются некоторые свойства оператора $L_\eta^{(x)}$ (40.22), которые затем применяются при исследовании решений уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{p_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0, \quad p_k = \text{const}. \tag{43.2}$$

В частности, показано, что каждому решению $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого уравнения соответствует другое его решение вида $r^{2-n-p_1-p_2-\ldots-p_n} u\left(\dfrac{x_1}{r^2}, \dfrac{x_2}{r^2}, \ldots, \dfrac{x_n}{r^2}\right)$, $r^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$. В случае $p_1 = \ldots = p_n = 0$ это свойство иногда называют теоремой Кельвина.

40.4. В работах Н. Раджабова [1—4] и Н. Раджабова, А. С. Саттарова, Д. К. Джабирова [1, 2] (см. также цитированные там другие статьи этих авторов) подробно исследуются свойства решений, в том числе и фундаментальных решений, а также получены различные интегральные представления и решения ряда краевых задач (Дирихле, Неймана, смешанных) для уравнений эллиптического типа с особенностями в коэффициентах, имеющих вид (40.18), (43.2), или их аналогов и итерационных обобщений. При этом получили развитие идеи, связанные с формулами (40.20), леммой 40.2, и подходы, изложенные в монографии R. P. Gilbert [2] и статье A. Weinstein [6], где установлена структура решений итерационных уравнений высокого порядка, разлагающихся на композиции уравнений типа (43.2).

Такого же рода уравнения, но в основном гиперболического типа, и краевые задачи Коши и Коши—Гурса для них глубоко исследовал М. Б. Капилевич в статьях [1—4 и др.], который использовал аппарат гипергеометрических функций нескольких переменных. В частности, в работах М. Б. Капилевича [1—3] для уравнения (40.19) впервые построены функции Римана и Грина—Адамара, с помощью которых найдены решения задач Коши и Коши—Гурса, а в статье М. Б. Капилевича [4] получено решение аналога полуоднородной задачи (41.36) для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{a}{s} \frac{\partial}{\partial s} + b^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u - c^{2m} u = 0$$

через интегральный оператор, содержащий в ядре функцию ${}_0F_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-1}, z)$, см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1].

40.5. В работах Y. W. Chen [1, 2] были исследованы свойства решений уравнения $\xi^m U_{xx} + U_{\xi\xi} = 0$ вблизи особой линии $\xi = 0$ в зависимости от свойств функций $U(x, 0) = U_0(x)$ и $U_\xi(x, 0) = U_1(x)$, в частности от их гельдеровости (Y. W. Chen [1]). Для этого после замен $2p = m(m+2)^{-1}$, $r = (1-2p)\,\xi^{1/(1-2p)}$, $U(x, \xi) = u(x, r)$ это уравнение сводится к виду (41.3″), $0 < p < 1/2$, а к последнему применяется метод аналитического продолжения в комплексную область по двум переменным, изложенный в работах H. Lewy [1, 2], который примыкает к известному методу из монографии И. Н. Векуа [3]. Этот метод позволяет автору каждому решению $U(x, \xi)$ поставить в соответствие некоторую аналитическую функцию, действительная и мнимая части которой при $\xi = 0$ выражаются через дробные интегралы от функций $U_0(x)$ и $U_1(x)$. В работе Y. W. Chen [2] указываются такие целые решения $U(x, \xi)$, дробные производные которых в пространстве L_q имеют нормы, удовлетворяющие специальным оценкам через нормы $U_1(x)$ или I_{a+}^{2p-1} $(U_0(x) - U_0(a))$.

41.1. В работах M. Saigo [2, 4, 5], см. также [6, 7], для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (41.1) в области $0 < \xi < \eta < 1$ изучены три краевые задачи с граничными условиями, содержащими интегральные операторы $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$ и $I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}$ (см. § 23, п. 2°, 18.6). У первой задачи типа Гурса граничные условия имеют вид

$$I_{0+}^{a,b,\beta^*-a-1} u(0, \eta) = \varphi_1(\eta), \quad I_{1-}^{c,d,\beta-c-1} u(\xi, 1) = \varphi_2(\xi).$$

Остальные две задачи относятся к так называемым задачам со смещением, изучение которых началось со статьи А. М. Нахушева [1], см. также пособие Х. Г. Бжихатлова, И. М. Карасева, И. П. Лесковского, А. М. Нахушева [1, § 4]. Во второй задаче граничные условия имеют форму

$$u(\xi, \xi) = \varphi_1(\xi), \quad AI_{0+}^{a,b,\beta^*-a-1} u(0, \xi) + BI_{1-}^{a+\beta-\beta^*,c,\beta^*-a-1} u(\xi, 1) = \varphi_2(\xi),$$

а в третьей —

$$u(\xi, \xi) = \varphi_1(\xi), \quad A\xi^{b+\beta+\beta^*-1} I_{0+}^{a,b,\beta^*-a-1} u(0, \xi) +$$

$$+ B(1-\xi)^{c+\beta+\beta^*-1} I_{1-}^{a+\beta-\beta^*,c,\beta^*-a-1} u(\xi, 1) = \varphi_2(\xi).$$

Во всех трех задачах A, B, a, b, c, d — некоторые заданные постоянные, а φ_1 и φ_2 — заданные функции. Вторая из задач в случае, когда A и B являются функциями, а $\beta^* = \beta$ и $a = -b = -c = \beta - 1$, совпадает с задачей из работы А. М. Нахушева [1]. Все задачи сводятся к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши, к которым применяются результаты из монографии Ф. Д. Гахова [1].

Отметим здесь, что результаты из работы А. М. Нахушева [1] обобщил И. Оразов [1], а в работе В. Ф. Волкодавова, О. А. Репина [1] решена еще одна задача такого типа с операторами $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$ и $I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}$.

41.2. В статье D. W. Bresters [3] с помощью преобразования Фурье в классе обобщенных функций построено решение задачи Коши (41.36) для уравнения, отличающегося от (41.35) добавлением к левой части слагаемого $-\lambda^2 u$. Формула решения имеет вид

$$u(x, y) = \frac{2}{|S_n|} \int_{-1}^{1} \tau(x + yt) \frac{\cos(\lambda y \sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

(см. (41.37)) и обобщает классическое решение такой же задачи из работы E. C. Young [1].

41.3. В работах F. J. Bureau [1—3] проведено исследование задачи Коши для уравнений в частных производных гиперболического типа, в частности для волнового уравнения (40.19) и уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (41.1), (41.35). При этом широко использовались понятия конечной и логарифмической частей расходящихся интегралов, обозначаемые соответственно через pf и pl и примыкающие к определению Адамара (см. § 5, п. 5°). С помощью этих понятий, в частности были расширены некоторые результаты из работ A. Weinstein [1—3]. Приведем определения, используемые автором.

Пусть в окрестности точки x функция $A(t) \in C^m$ и представима в виде $A(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k(x)}{k!}(t-x)^k + B_m(t)$, $A_k(x) = A^{(k)}(x)$. Пусть еще

$$I_s(x) = \int_a^x A(t)(x-t)^s dt, \quad P(y; s, u+1) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{A_k(x)}{k!\,(k-u)}\, y^{k-u}.$$

Тогда по определению полагается

$$\mathrm{pf}\, I_{-m-\mu}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x-\varepsilon} A(t)(x-t)^{-m-\mu}\,dt - P(\varepsilon;\ m-1,\ m+\mu)\right] =$$

$$= P(a-x;\ m-1,\ m+\mu) + \int_a^x B_m(t)(x-t)^{-m-\mu}\,dt,$$

$$\mathrm{pf}\, I_{-m}(x) = P(a-x;\ m-2,\ m) +$$

$$+ (-1)^{m-1}\frac{A_{m-1}(x)}{(m-1)!}\ln(x-a) + \int_a^x \frac{B_m(t)}{(x-t)^m}\,dt,$$

$$\mathrm{pl}\, I_{-m}(x) = (-1)^m \frac{A_{m-1}(x)}{(m-1)!};\quad \mathrm{pl}\, I_s(x) = 0,\ \ s \neq -m,$$

где $0 < \mu < 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

В указанных работах устанавливаются основные свойства $\mathrm{pf}\, I_s$ и $\mathrm{pl}\, I_s$, различные оценки, коммутируемость с оператором дифференцирования и связь с главным значением интеграла в смысле Коши. Все это распространяется на многомерные интегралы, и даются обзоры применения этих понятий к уравнениям в частных производных.

41.4. В работах X. Zheng [1] и H. Cheng [1] изучены некоторые смешанные краевые задачи с данными на особой линии соответственно для уравнения (41.25), $q = 0$, и его обобщения.

41.5. В работе D. H. Wood [1] решается задача о нахождении фундаментального решения для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + w^2 c^{-2}(z)\,u = 0$ по известному фундаментальному решению более простого уравнения такого же вида, но без слагаемого u_{yy}. В случае $c(z) = z$ эта задача решается с помощью дробного интегрирования.

41.6. В работе D. L. Clements, E. R. Love [1] рассмотрены две смешанные задачи Неймана — Дирихле о нахождении гармонических в полупространстве $z > 0$ функций $V(r, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, по заданным в различных частях плоскости $z = 0$ значениям V_z, V с разрывом при $r = a$ и $r = b$. Согласно E. Копсону (E. T. Copson [3]), решение этих задач отыскивается в виде

$$V(r, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sigma(\rho)\,\rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(z^2 + r^2 - 2r\rho\cos\varphi)^{1/2}},$$

что приводит к необходимости последовательного решения уравнений типа Абеля

$$\int_a^x \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} = f_1(x),\quad \int_x^b \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = f_2(x)$$

и уравнения вида

$$f(x) + \frac{2(-1)^\delta}{\pi}\int_0^c \frac{(xt)^\delta f(t)}{1 - x^2t^2}\,dt = y(x),\quad 0 < x < c = \sqrt{a/b},$$

где $\delta = 0$ или $\delta = 1$.

41.7. В работах С. М. Белоносова [1, 2] были изучены некоторые краевые задачи для бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$ в случае плоских двусвязных областей. При их решении использовалось дробное дифференцирование $f^{(\alpha)}$ в комплексной плоскости, определяемое формулой (22.4), где $\mathscr{L} = (-i\infty, i\infty)$, а также установленные автором формулы связи $f^{(\alpha)}$ с преобразованием Лапласа, см. об этом в § 7, п. 2° и § 9, п. 2°, 7.2 и 7.4.

41.8. В работе M. Shinbrot [1] указаны условия существования слабого решения u уравнения Навье—Стокса, имеющего дробную производную $\mathscr{D}_{0+}^{\alpha} u$, $0 < \alpha < 1/2$, по временной переменной. Для этой производной получена оценка нормы в L_2. Впервые этот вопрос был поставлен в работе J. L. Lions [1], где такая оценка была получена при $0 < \alpha < 1/4$ и с некоторыми ограничениями на размерность пространства.

41.9. В статье K. Senator [1] получены шаудеровские и L_p-оценки для решений и эллиптических краевых задач с граничными условиями, содержащими псевдодифференциальные операторы с негладкими символами, а также нормальные производные дробного порядка.

41.10. В работе H. Berens, U. Westphal [2] с помощью преобразования Лапласа и теории полугрупп решена задача Коши относительно оператора ω

$$\frac{d}{dx}\,\omega(x)f + \mathcal{D}_{0+}^{\gamma}\,\omega(x)f, \quad x>0,$$

$$\lim_{x\to+0}\|\omega(x)f - f\|_{L_p} = 0, \quad 0<\gamma<1.$$

Здесь $\omega(x)f$ — значение оператора $\omega(x)$ на функциях $f\in L_p(0,\ \infty)$, а $\mathcal{D}_{0+}^{\gamma}$ — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля (5.6).

42.1. В работе A. Z.-A. M. Tazali [1] методами Пикара и неподвижной точки Шаудера доказаны две теоремы об условиях существования решения $y(x)$ задачи типа Коши

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y)(x) = f(x,\ y(x)), \quad a<x\leqslant a+h, \quad h>0;$$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}y)(x)|_{x=a} = b, \quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

которые обобщают известные результаты Каратеодори для случая $\alpha=1$.

42.2. Ряд работ В. К. Вебера [1, 3, 5—8], М. И. Иманалиева, В. К. Вебера [1] посвящен исследованию систем линейных дифференциальных уравнений дробного порядка главным образом в пространствах обобщенных функций V' (см. § 9, п. 1° (к § 8)).

В работе В. К. Вебера [3] дано решение задачи Коши для системы уравнений $y^{(\alpha)}(x)=Ay(x)$, $0<\alpha<2$, с постоянной матрицей A. Асимптотическое поведение при $x\to\infty$ различных решений этой системы (в том числе фундаментальной матрицы) изучено в работах М. И. Иманалиева, В. К. Вебера [1] и В. К. Вебера [5, 6]. Задача Коши для системы

$$y^{(\alpha)}(x) = A(x)\,y(x) + f(x), \quad n-1<\alpha\leqslant n, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{43.3}$$

с непрерывной матрицей-функцией $A(x)$ при $x\geqslant 0$ рассмотрена в работе В. К. Вебера [7], а фундаментальное решение такой системы с постоянной матрицей $A(x)=A=\text{const}$ — в работе В. К. Вебера [8], см. случай одного уравнения в статье В. К. Вебера [1].

В работе В. К. Вебера [6] установлены необходимые и достаточные условия пассивности более общих, чем (43.3), систем вида

$$Ay'(x) + By^{(\alpha)}(x) + Cy(x) = g(x), \quad 0<\alpha<1, \tag{43.4}$$

с постоянными матрицами A, B, C и найдена квазиасимптотика их фундаментальных решений при $x\to\infty$ (определение указанных понятий см., например, в книгах В. С. Владимирова [2, с. 86, 278] и В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова, Б. И. Завьялова [1, с. 34, 58, 209]). Заметим, что решение уравнения вида (43.4) при $0<\alpha<1$ методом преобразования Лапласа построено также в работе А. Сейтказиевой [1].

К уравнению вида (43.4):

$$y'(x) = q - \lambda\int_0^x [1 + b(x-t)^{-\alpha}]\,y'(t)\,dt, \quad 0<\alpha<1,$$

сводится задача изучения полива по бороздам (Я. В. Быков, А. И. Боташев [1]). Другие примеры прикладных задач, сводящихся к уравнениям и системам дифференциальных уравнений с дробными производными, приведены в работе В. К. Вебера [8].

42.3. В работе H. M. Srivastava, S. Owa, K. Nishimoto [1] в терминах оператора дробного дифференцирования $f_{\nu}(z)\equiv(\mathcal{D}_{+,\pi}^{\nu}f)(z)$ (см. (22.17), (22.18), (22.21) в случае контуров $C=\mathcal{L}_{\pi}(z)$ или $C=\mathcal{L}_0(z)$) доказана следующая

Теорема 43.1. *Пусть* $\varphi(\nu;\ z)\neq 0$ *— аналитическая в области* D *плоскости* z *функция. Тогда, если*

$$\varphi(\nu;\ z) = \exp\left\{\int\frac{\varphi(\nu+1;\ z)}{\varphi(\nu;\ z)}\,dz\right\}\Big/\left(\exp\left\{\int\frac{\varphi(\nu+1;\ z)}{\varphi(\nu;\ z)}\,dz\right\}\right)_{-\nu}$$

и существует $f_\nu(z)$, *то уравнение* $f_\nu(z) = \varphi(\nu;\, z) f(z)$, $z \in D$, *имеет решение вида*

$$f(z) = k\left(\exp\left\{\int \frac{\varphi(\nu+1;\, z)}{\varphi(\nu;\, z)}\, dz\right\}\right)_{-\nu}, \quad k \neq 0 - \text{const}, \quad z \in D.$$

В работе K. Nishimoto, S. Owa, H. M. Srivastava [1] такого же рода результат получен и для более общего уравнения $f_\nu(z) = \varphi(\nu;\, z) f(z) + \varphi(\nu;\, z) g(z)$.

42.4. В работах K. Wiener [1, 2] (см. также цитируемые там другие работы этого автора) на основе теории дробных интегралов в смысле конечной части по Адамару (см. § 5, п. 5°) проводится исследование различных дифференциальных уравнений дробного порядка, в частности встречающегося в теории полярографии уравнения

$$(\mathcal{D}_{0+}^{1/2} y)(x) - cx^a y(x) = x^{-1/2}, \quad x > 0, \quad -1/2 < a \leqslant 0.$$

42.5. А. М. Нахушев [2] рассмотрел вопрос о корректности решения уравнения

$$K_\alpha \varphi \equiv \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} x^{\beta} \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m} a_j(x)\, \mathcal{D}_{0+}^{\alpha_j} \varphi(x) + b(x)\, \varphi(x) = c(x), \quad 0 < x < 1,$$

где

$$0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha > \alpha_1 > \ldots > \alpha_m > 0, \qquad a_j(x) \in \begin{cases} C^1([0,\, 1]), & \text{если } \alpha_j > 0, \\ C([0,\, 1]), & \text{если } \alpha_j < 0. \end{cases}$$

$b(x)$, $c(x) \in C([0,\ 1])$.

Пусть $C_\gamma((0,\ 1))$ — банахово пространство функций $\varphi(x) \in C((0,\ 1])$ с нормой $\|\varphi\|_\gamma = \max\limits_{x \in [0,\, 1]} |x^\gamma \varphi(x)|$, γ — некоторая постоянная. А. М. Нахушев показал, что если $\beta < \alpha - (\operatorname{sign} \alpha_j + 1)\, \alpha_j/2$, то для любого $c(x) \in C_0((0,\ 1))$ существует и единственно решение данного уравнения из пространства $C_\beta((0,\ 1))$.

В работе А. М. Нахушева [3] рассматривается смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} + a(x,\, y) u_x + b(x,\, y) u_y + c(x,\, y) u = 0$ в ограниченной области $D \in \{y > 0\}$, примыкающей к отрезку $0 < x < 1$ оси Ox. Краевое условие на этом отрезке имеет вид $\lim\limits_{y \to 0} K_1 u = \psi(x)$, $0 < x < 1$, где K_1 — значение указанного выше оператора K_α при $\alpha = 1$. На основе установленного в работе принципа экстремума была доказана устойчивость и единственность решения задачи и рассмотрен вопрос о его существовании.

42.6. Т. С. Алероев [1, 2] исследовал спектр задачи Дирихле для дифференциального уравнения при $0 < \alpha < 1$ вида

$$u''(x) + a(x)\, \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(x) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{43.5}$$

Он показал, что при $\beta \geqslant 0$ в классе функций $C[0,\ 1] \cap C^2(0,\ 1]$ задача с условиями $u(0) + \beta u'(0) = u(1) = 0$ и $f(x) = 0$, $a(x) = \lambda$ не имеет отрицательных собственных значений, а задача с условиями $\alpha u(0) + \beta u'(0) = \gamma$, $\overline{\alpha} u(1) + \overline{\beta} u'(1) = \overline{\gamma}$, $a(x) = \lambda$ имеет не более чем счетное множество собственных значений. Также для собственных значений $\lambda = \lambda_k$ задачи $a(x) = \lambda$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ было установлено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-2} \leqslant \frac{1}{16}\, \Gamma^2(2 - \alpha)$. Здесь также отметим, что А. М. Нахушев [5] показал ранее, что $\lambda = \lambda_k$ является собственным значением последней задачи тогда и только тогда, когда λ_k является нулем функции Миттаг-Леффлера $E_{2-\alpha,\, 2}(-\lambda)$, см. (1.91). Все такие достаточно большие по модулю нули являются простыми и имеют оценку $\lambda_k = O(k^{2-\alpha})$, $k \to \infty$ (см. М. М. Джрбашян [2, с. 142]).

42.7. Р. М. Малаховская и Е. Д. Шихмантер [1], применив некоторые формулы реализации операторов (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2, с. 151]), указали способ построения обобщенного решения задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$Q_n\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) - a \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt = f(x), \quad x > 0,$$

с условиями $u^{(j)}(0) = a_j$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, где $0 < \alpha < 1$, причем α — рациональное число, а $Q_n(x)$ — многочлен некоторой степени n.

42.8. И. П. Лесковский [1] построил линейно независимые решения однородного уравнения (42.34) с несовпадающими показателями α_j, $-1 \leqslant \alpha_j < 0$, в виде функции Миттаг-Леффлера (1.91). Впервые частное решение неоднородного уравнения (42.34) с $\alpha_j = (j-1)/n$ было найдено в работе H. T. Davis [2] (см. (4.6), а также § 4, п. 2°, 2.5 и § 30 и 34).

Уравнение такого же типа с постоянными коэффициентами

$$\lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Gamma(\alpha_j)} \int_x^c (y-x)^{\alpha_j - 1} f(y)\, dy = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha_j > 0$$

изучил J. Alonso [1]. Он показал, что его решение имеет вид $f(x) = e^{-\eta x}$ тогда и только тогда, когда параметр η удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \eta > 0, \quad \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta^{-\alpha_j} = 0, \quad c = \infty,$$

а также изучил ряд свойств решений соответствующего неоднородного уравнения для случая $n = 1$.

42.9. Уравнение (42.34) с кусочно-постоянными коэффициентами в пространстве обобщенных функций исследовалось в работе А. И. Кочуры и А. В. Диденко [1].

42.10. Абстрактная задача Коши для уравнения гипергеометрического вида

$$t \frac{d}{dt} \prod_{j=1}^{q} \left(t \frac{d}{dt} + \beta_j - 1 \right) u(t) - At \prod_{j=1}^{p} \left(t \frac{d}{dt} + \alpha_j \right) u(t) = 0, \quad t > 0,$$

где α_j, β_j — постоянные, а A — некоторый замкнутый линейный оператор, рассматривалась в работах L. R. Bragg [1, 2]. Там были получены формулы связи между решениями этого уравнения при разных значениях параметров, выражаемые через дробные интегралы. Эти формулы были использованы при исследовании задачи Коши для вырождающегося уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - t^m u_{xx} + \nu t^{m/2-1} u_x = 0, \quad t > 0, \quad m \geqslant 2,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

42.11. В работе Ю. Л. Рабиновича, С. В. Нестерова [1] рассматривались дифференциальные операторы $K_n u$:

$$K_n u = \sum_{k=0}^{n} P_k(z) \frac{d^{n-k} u}{dz^{n-k}} = 0, \tag{43.6}$$

коэффициенты которых $P_k(z)$ являются многочленами некоторых степеней. Установлены условия, при которых порядок n оператора (43.6) можно понизить с помощью дробных производных, определяемых по формулам (22.30), (22.33′) и аналогичной (22.33′) формуле для случая $z_0 = \infty$.

В работе С. В. Нестерова [1] такие дробные производные использовались при построении решений дифференциального уравнения класса Фукса с s особыми точками

$$\prod_{k=1}^{s} (z-a_k)^n u^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} Q_{(s-1)j}(z) \prod_{k=1}^{s} (z-a_k)^{n-j} u^{(n-j)} = 0,$$

где $Q_m(z)$ — многочлены степени m.

42.12. Ряд авторов применяли методы дробного интегродифференцирования для решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида (43.6) с многочленными коэффициентами.

В работах M. A. Al-Bassam [2, 3, 5—7], см. также [9], рассмотрены классы дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, сводящиеся с помощью правила Лейбница (17.11) и других свойств дробных интегралов и производных к операторным уравнениям композиционного типа

$$I_{a+}^{-\alpha} p(x)\, I_{a+}^{-1} q(x)\, I_{a+}^{\alpha+n-1} y(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{43.7}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ представляют собой произведения вида $\prod_{k=1}^{m} (a_k + b_k x)^{\alpha_k} e^{\mu x}$. Для неко-

торых классов дифференциальных уравнений 2-го порядка установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности уравнению (43.7) и построены решения. В качестве примеров рассмотрены уравнения для функций Гаусса, Куммера, Лагерра, Лежандра и Якоби, решения которых на основании (43.7) представляются через соответствующие дробные интегралы и их композиции (см. § 9, п. 3°, § 10).

В работе T. P. Higgins [6] предложен оригинальный метод для получения общих решений неоднородных гипергеометрических уравнений, основанный на применении прямого и обратного преобразований Лапласа (1.119), (1.120) и преобразований Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) по параметрам уравнений.

В работах K. Nishimoto [7—11] операторы дробного дифференцирования f_ν (см. § 43, п. 2°, 42.3) использовались при изучении частных решений дифференциальных уравнений 2-го порядка класса Фукса, связанных со специальными функциями Гаусса, Куммера и другими.

42.13. В работе В. П. Федосова, Н. Н. Яненко [1] показано, что уравнения в частных производных полуцелой степени

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{D}_{+,x}^{k/2} \mathcal{D}_{+,y}^{(n-k)/2} u(x, y) = f(x, y), \quad a_k - \text{const},$$

(см. § 24, п. 2°) могут быть исследованы путем разложения их операторов на композиции n обратимых операторов вида $\mathcal{D}_{+,x}^{1/2} + \alpha_j \mathcal{D}_{+,y}^{1/2}$, где

$$\mathcal{D}_{+,x}^{1/2} u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{-1/2} u(t, y)\, dt,$$

а α_j — корни некоторого характеристического многочлена. В частности, при $n = 1$, $a_0 = \alpha$, $a_1 = 1$ указана формула общего решения этого уравнения:

$$u(x, y) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{s} (s-\xi)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} [f(\xi, y + \alpha^2 (x-s)) -$$

$$- \alpha f(s, y + \alpha^2 (x-s) + \xi - s)]\, d\xi ds + \begin{cases} q(y + \alpha^2 x), & \alpha \leqslant 0, \\ 0, & \alpha > 0, \end{cases}$$

где $q(t)$ — произвольная функция. Также подробно разобран случай $n=2$.

42.14. В. Я. Ярославцева [1] построила операторы преобразования F_j, $j=1, 2$, оператора P в D^2, т. е. операторы F, обладающие свойством $PFv = FD^2 v$ на элементах v некоторого функционального пространства, где

$$P = -\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 2\nu \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} - \nu^2\right), \quad D = -i \frac{d}{d\varphi}.$$

В частности, при действительном $\nu > 0$ оператор F_1 имеет вид

$$F_1 v = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu)} (\sin \varphi)^{1-2\nu} \int_0^{\varphi} v(t) (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} dt,$$

а при остальных значениях ν — вид свертки основной функции v с функционалом $\sin^{2\nu}(\varphi/2)$.

Полученные результаты были применены при сведении задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k P^{n-k} u = 0, \quad a_k - \text{const}, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k w^{2n-2k} = 0.$$

42.15. В работе L. Biacino, D. Miserendino [2] рассматриваются свойства оператора

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 4} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad x = (x_1, x_2),$$

где $D^\alpha u$ — дробные производные, определенные в работах L. Biacino, D. Miserendino [1, 3] (см. также § 29, п. 2°, 24.10). На основе представления в форме

$$Lu = \sum_{|\alpha| \in \{2,3,4\}} a_\alpha(x) D^\alpha u + \sum_{|\alpha| < 2} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

указаны условия, когда индекс Lu равен нулю, и изучено действие оператора L в пространствах Соболева.

42.16. В работе I. G. Sprinkhuizen-Kuyper [1] доказан ряд теорем о решении задачи Коши для уравнений вида

$$\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = g(x), \quad 0 < x \leqslant 1,$$

с условиями типа $f^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, l + 2k - 1$. Указанная задача при $g(x) \in C([0, 1])$ в классе $f(x) \in C^{2k+l}([0, 1])$ разрешима формулой $f(x) = I_\nu^{2k, l} g(x)$, где

$$I_\nu^{\mu, \lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + \mu)} \int_x^1 \left(\frac{y^2 - x^2}{2}\right)^{\lambda+\mu-1} y^{1-\mu}\, {}_2F_1\left(\lambda + \frac{\mu + \nu - 1}{2}, \frac{\mu}{2};\right.$$

$$\left. \lambda + \mu; \ 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\, dy.$$

В работе изучены также некоторые свойства этого оператора с функцией Гаусса в ядре.

Эти результаты получили значительное развитие в работах A. C. McBride [7, 9] и I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova [2], где рассматривались обобщающие (9.5) операторы. Для них найдены интегральные представления в виде композиции операторов дробного интегродифференцирования типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) и в терминах G-функции Мейера вида (10.48). Частные случаи таких представлений, приводящие к операторам с функцией Гаусса типа (10.18), рассматривались ранее в работе I. G. Sprinkhuizen-Kuyper [1].

42.17. В работах R. Tremblay [2] и R. Tremblay, B. J. Fugère [1] исследованы свойства операторов

$$D^{\alpha, r} = D_z^\alpha (z^\alpha D_z^\alpha)^r, \quad D_{n, r_1, \ldots, r_m}^{\beta, \delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} = \left\{D_z^{(1-\delta), \beta} \prod_{j=1}^m (zD + \alpha_j)^{r_j} z^{\delta\beta}\right\}^n,$$

где $D = \dfrac{d}{dz}$, D_z^α, $\alpha \in \mathbf{C}$, — дробная производная (22.4); β, $\alpha_j \in \mathbf{C}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$; $\delta = 0$ или $\delta = 1$; r, n, r_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целые неотрицательные числа. В частности, получены операторные равенства

$$D^{\alpha, r} D^{\beta, r} = D^{\alpha+\beta, r}, \quad D_{n, r_1, \ldots, r_m}^{\beta, \delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} = D_z^{(1-\delta)\theta\beta n} z^{\delta(1-\theta)\beta n} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{m} (zD + \alpha_j - \beta\theta n + \beta i)^{r_j} z^{\delta\theta\beta n} D_z^{(1-\delta)(1-\theta)\beta n},$$

где $\theta = 0$ или $\theta = 1$, а также представление $D_{n, r_1, \ldots, r_m}^{\beta, \delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m}$ в терминах операторов $z^{(1-2\gamma)\omega + (1-\gamma)k} D^k z^{(2\gamma-1)\omega + \gamma k}$, где $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$, $\omega \in \mathbf{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n(r_1 + \ldots + r_m)$.

В качестве примеров даны новые операторные формулы для обычных дифференциальных операторов D и интегральных операторов D_z^{-1}.

Литература

Адамар Ж. 1) Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.

Акопян С. А. 1) Интегральные преобразования, связанные с дифференциальными операторами бесконечного порядка // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1960. Т. 13, № 1. С. 3—27.

Акопян С. А., Нерсесян А. Б. 1) Некоторые интегро-дифференциальные операторы и разложения в ряды, аналогичные рядам Шлемильха // Докл. АН АрмССР. 1958. Т. 27, № 4. С. 201—207.

Алероев Т. С. 1) Задача Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения 2-го порядка с дробными производными в младших членах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 341.

2) Спектральный анализ одного класса несамосопряженных операторов // Там же. 1984. Т. 20, № 1. С. 171—172.

Алимов Ш. А. 1) Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Там же. 1972. Т. 8, № 9. С. 1609—1626.

Андреев А. А., Волкодавов В. Ф., Шевченко Г. Н. 1) О функции Римана // Дифференц. уравнения: Тр. мат. кафедр пед. ин-тов РСФСР. Рязань, 1974. Вып. 4. С. 25—31.

Арутюнян Н. Х. 1) Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1959. Т. 12, № 2. С. 77—105.

2) Плоская контактная задача теории ползучести // Прикл. мат. и мех. 1959. Т. 23, № 5. С. 901—924.

Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. 1) Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения // Там же. 1963. Т. 27, № 5. С. 813—820.

Аткинсон Ф. В. 1) Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 1. С. 3—14.

Ахиезер Н. И. 1) О некоторых спаренных интегральных уравнениях // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 3. С. 333—336.

2) К теории спаренных интегральных уравнений // Уч. зап. Харьк. ун-та. Сер. 4. 1957. Т. 80 (25). С. 5—31.

Ахиезер Н. И., Щербина В. А. 1) Об обращении некоторых сингулярных интегралов // Там же. С. 191—198.

Бабенко В. Ф. 1) О поперечниках некоторых классов сверток // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 5. С. 603—607.

Бабенко К. И. 1) К теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1951. 196 с.

2) О принципе максимума для уравнения Эйлера — Трикоми // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 777—782.

Бабенко Ю. И. 1) Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. М.: Химия, 1986. 144 с.

Бабич В. М. и др. 1) Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.

Баблоян А. А. 1) Решение некоторых парных интегральных уравнений // Прикл. мат. и мех. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1015—1023.

Бадалян Г. В. 1) К вопросу обобщений формулы Тейлора // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 2. С. 265—268.

Бакаев Н. Ю., Тарасов Р. П. 1) Полугруппы и один метод устойчивого решения уравнения Абеля // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 3—9.

Бакиевич Н. И. 1) Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^{\alpha} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \mu^2 \eta^{\alpha} u = 0$ //

Волж. мат. сб. Куйбышев: Пед. ин-т, 1963. Вып. 1. С. 42—52.

Бари Н. К. 1) Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 935 с.

Бари Н. К., Стечкин С. Б. 1) Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483—522.

Бейтмен Г., Эрдейи А. 1) Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.

2) То же. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. 1966. 295 с.

3) То же. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. 1967. 299 с.

4) Таблицы интегральных преобразований. В 2 т. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970. 327 с.

Белинский Э. С., Белый В. И. 1) Об интегральных представлениях с союзными ядрами и обобщенных интегро-дифференциальных операторах // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1971. Вып. 2. С. 21—36.

Белоносов С. М. 1) Об одном методе решения плоских статических задач теории упругости для двусвязных областей // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 3. С. 341—365.

2) Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 231 с.

Белый В. И. 1) О некоторых свойствах дробных производных в комплексной области и их применение в теории приближения функций // Доп. АН УРСР. 1965. № 2. С. 167—170.

2) Вопросы приближения функций некоторых классов в комплексной области, ч. I; II // Укр. мат. журн. 1965. Т. 17, № 1. С. 3—17; № 2. С. 3—18.

3) К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Там же. 1967. Т. 19, № 2. С. 104—109.

4) Приближение функций с непрерывной дробной производной // Докл. АН УССР. Сер. А. 1967. № 11. С. 994—997.

5) О приближении квазигладких функций комплексного переменного // Изв. АН АрмССР. Мат. 1969. Т. 4, № 5. С. 364—393.

6) К вопросу об интегральных представлениях регулярных функций в круговом кольце // Там же. 1977. Т. 12, № 2. С. 147—156.

Белый В. И., Волков Ю. И. 1) Некоторые применения интегро-дифференциальных операторов произвольного порядка в теории приближения функций // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1968. № 10. С. 3—12.

Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. 1) Мероморфность функции P^{λ} // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3, № 1. С. 84—85.

Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. 1) Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

Бессонов Ю. Л. 1) О существовании смешанных производных дробного порядка в L_p // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 4. С. 163—170.

Бетилгириев М. А. 1) Об асимптотике интегрального уравнения Винера — Хопфа в случае дробных нулей символа. Ростов н/Д, 1982. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 15.10.82, № 5166.

2) Асимптотика решений уравнения Винера — Хопфа в случае дробных нулей символа // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1984. № 3. С. 63—65.

Бжихатлов Х. Г. 1) Краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения и сингулярные интегральные уравнения третьего рода // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 3—14.

Бжихатлов Х. Г., Карасев И. М., Лесковский И. П., Нахушев А. М. 1) Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений: Метод. пособие для студентов по спец. курсам. Нальчик: Кабард.-Балкар. ун-т, 1972. 290 с.

Бицадзе А. В. 1) К проблеме уравнений смешанного типа // Итоги науки: Тр. Мат. ин-та АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 41. 60 с.

2) Уравнения смешанного типа // Итоги науки. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Вып. 2.

3) Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

Бородачев Н. М. 1) Об одном классе решений тройных интегральных уравнений // Прикл. мат. и мех. 1976. Т. 40, вып. 4. С. 655—661.

Бохнер С. 1) Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.

Брычков Ю. А. 1) К теории пространств с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 679—694.

Брычков Ю. А., Глеске Х.-Ю., Маричев О. И. 1) Факторизация интегральных преобразований типа свертки // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 3—41.

Брычков Ю. А., Маричев О. И., Якубович С. Б. 1) F_3-transformation / Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, S. B. Yakubovich // Intern. conf. on complex analysis and applications. Varna, 1985. Summaries. P. 54.

Бугров Я. С. 1) Дробные разностные операторы и классы функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 172. С. 60—70.

Бухгейм А. Л. 1) Карлемановские оценки для операторов Вольтерра и единственность обратных задач // Неклассические проблемы математической физики. Новосибирск: СО АН, 1981. С. 56—64.

2) Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, СО, 1983. 207 с.

Быков Я. В., Боташев А. И. 1) О свойствах спецфункций Ю. Н. Работнова и обращении интегральных операторов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1965. Вып. 3. С. 3—22.

Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г. 1) Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 151—180.

Вакулов Б. Г. 1) Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных пространствах Гельдера. Ростов н/Д, 1986. 31 с. Деп. в ВИНИТИ 6.03.86, № 1563-В.

Васильев И. Л. 1) О единственности решения системы уравнений Абеля с постоянными коэффициентами // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 2. С. 105—107.

2) Операторы типа потенциала с вырождающимся символом. Мн., 1981. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 1.07.81, № 3217.

3) О методе эрмитовых форм в теории разрешимости систем уравнений Абеля. Мн., 1981. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 1.07.81, № 3218.

4) Системы интегральных уравнений с ядром Абеля на отрезке вещественной оси // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 2. С. 47—53.

5) Операторы типа потенциала с вырожденным символом // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 4. С. 300—302.

6) Системы обобщенных уравнений Абеля с отражением // Науч. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 151—153.

Ващенко-Захарченко М. Е. 1) Of fractional differentiation / M. Wastchenxo-Zachartchenxo // Quart. J. Math. Ser. 1. 1861. Vol. 4. P. 237—243.

Вебер В. К. 1) Об одном дифференциальном уравнении нецелого порядка // Сб. тр. аспирантов и соискателей Кирг. ун-та. Сер. мат. наук. 1973. Вып. 10. С. 7—14.

2) Об одном пространстве основных функций в теории лиувиллевского дифференцирования // Тр. Кирг. ун-та. Сер. мат. наук. 1974. Вып. 9. С. 164—168.

3) Структура общего решения системы $y^{(\alpha)}=Ay$, $0<\alpha\leqslant 1$ // Там же. 1976. Вып. 11. С. 26—32.

4) Обобщенное лиувиллевское дифференцирование; свертка, преобразование Фурье // Там же. 1976. Вып. 12. С. 11—25.

5) Асимптотическое поведение решений линейной системы дифференциальных уравнений дробного порядка // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1983. Вып. 16. С. 119—125.

6) Пассивность линейных систем дифференциальных уравнений с дробными производными и квазиасимптотика решений // Там же. 1983. Вып. 16. С. 349—356.

7) К общей теории линейных систем с дробными производными // Там же. 1985. Вып. 18. С. 301—305.

8) Линейные уравнения с дробными производными и постоянными коэффициентами в пространствах обобщенных функций // Там же. 1985. Вып. 18. С. 306—312.

Вебер В. К., Урдолетова А. Б. 1) Пространство обобщенных функций и операции дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля // Тр. молодых ученых. Мат., физ., хим. Фрунзе: Кирг. ун-т, 1974. Вып. 2. С. 16—21.

Векуа И. Н. 1) Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сообщ. АН ГССР. 1945. Т. 6, № 3. С. 177—183.

2) Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56, № 3. С. 229—231.

3) Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.

Вирченко Н. А. 1) О некоторых гибридных парных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36, № 2. С. 139—142.

2) Парные интегральные уравнения с гипергеометрическими функциями ${}_2F_1(a, b; c; -xt)$, ${}_3F_2(\nu, \alpha_1, \alpha_2; \mu+\nu, b_1; -xt)$ // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ. мат. и техн. науки. 1986. № 2. С. 3—5.

Вирченко Н. А., Макаренко Л. Г. 1) О некоторых интегральных уравнениях с функциями Лежандра // Тр. науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». 1974. Канев, 1974. Вып. 1. С. 86—91.

2) О некоторых тройных интегральных уравнениях с бесселевыми функциями // Математическая физика. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 18. С. 72—76.

3) О некоторых парных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, № 6. С. 790—794.

Вирченко Н. А., Пономаренко С. П. 1) Свойства обобщенного интегрального преобразования Мелера — Фока и его применение к решению парных интегральных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 2. С. 83—85.

Вирченко Н. А., Ромащенко В. А. 1) О некоторых тройных интегральных уравнениях с присоединенными функциями Лежандра // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1982. Вып. 46. С. 13—18.

Владимиров В. С. 1) Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 411 с.

2) Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. 1) Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986. 304 с.

Волкодавов В. Ф. 1) Решение задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения // Волж. мат. сб. Куйбышев: Пед. ин-т, 1971. Вып. 8. С. 51—57.

Волкодавов В. Ф., Репин О. А. 1) Об одной краевой задаче для уравнения Эйлера — Дарбу с положительными параметрами // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 7. С. 1275—1277.

Вольтерра В. 1) Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

Воскобойников Ю. Е. 1) Обращение уравнения Абеля с использованием кубических сплайнов // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. С. 180—189.

2) Регуляризующий алгоритм обращения уравнения Абеля // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 39, № 2. С. 270—274.

Ву Ким Туан. 1) Интегральные преобразования типа Фурье в новом классе функций // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 7. С. 584—587.

2) Некоторые вопросы теории и приложений функций гипергеометрического типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1985. 118 с.

3) Об n-арных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37, № 4. С. 430—437.

4) К теории обобщенных интегральных преобразований в некотором пространстве функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 3. С. 521—524.

5) О факторизации интегральных преобразований типа свертки в пространстве L_2^{Φ} // Докл. АН АрмССР. 1986. Т. 83. С. 7—10.

Ву Ким Туан, Якубович С. Б. 1) Интегральное преобразование Конторовича — Лебедева в новом классе функций // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 11—14.

Ву Ким Туан, Маричев О. И., Якубович С. Б. 1) Композиционная структура интегральных преобразований // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 4. С. 786—790.

Габидзашвили М. А. 1) Весовые неравенства для анизотропных потенциалов // Математический анализ: Науч. тр. Груз. политехн. ин-та. 1985. № 3 (285). С. 48—57.

2) Весовые неравенства для интегралов типа потенциала в однородных пространствах // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 37—40.

3) Весовые неравенства для потенциалов Рисса и их обобщений // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 121, № 1. С. 37—40.

Гаймназаров Г. 1) О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 3. С. 148—150.

Ганеев Р. М. 1) Об обобщенном интегральном уравнении Абеля // Дифференциальные уравнения и математическая физика: Науч. тр. Куйбышев. пед. ин-та. 1979. Т. 232. Вып. 1. С. 12—14.

2) Решение интегрального уравнения Абеля с постоянными коэффициентами // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1982. № 6. С. 14—18.

Гарнетт Дж. 1) Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 470 с.

Гахов Ф. Д. 1) Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. 1) Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.

Гейсберг С. П. 1) Обобщение неравенства Адамара // Сб. науч. тр. Ленингр. мех. ин-та. 1965. № 50. С. 42—54.

2) Аналоги неравенств С. Н. Бернштейна для дробной производной // Вопросы прикладной математики и геометрического моделирования: Краткие содержания докл. 25-й науч. конф., 24 янв.— 4 февр. 1967 г. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1967. С. 5—10.

3) Дробные производные ограниченных на оси функций // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1968. № 11. С. 51—69.

Гельман И. В. 1) Об интегралах типа потенциала в пространствах Орлича // Там же. 1960. № 2. С. 44—56.

Гельфанд И. М., Граев М. И. 1) Аналог формулы Планшереля для классических групп // Тр. Моск. мат. о-ва. 1955. Т. 4. С. 375—404.

Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. 1) Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. 1) Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958. 307 с.

2) Обобщенные функции и действия над ними. Там же, 1959. 470 с.

Гельфонд А. О. 1) Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.

Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. 1) Об одном обобщении ряда Фурье // Мат. сб. 1951. Т. 29, вып. 3. С. 477—500.

Гиндикин С. Г. 1) Анализ в однородных областях // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 4. С. 3—92.

2) Задача Коши для сильно однородных дифференциальных операторов // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 181—208.

Годунова Е. К., Левин В. И. 1) О некоторых интегральных неравенствах, содержащих производные // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1969. № 12. С. 20—24.

Гордеев А. М. 1) Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Волж. мат. сб. Куйбышев: Пед. ин-т, 1968. Вып. 6. С. 56—61.

Гохберг И. Ц. 1) О линейных уравнениях в нормированных пространствах // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76, № 4. С. 477—480.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. 1) Основные положения о дефектных числах, корневых

числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 2. С. 43—118.

Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. 1) О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p // Studia math. 1968. Vol. 31, N 4. P. 347—382.

2) О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 745—748.

3) Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35, № 4. С. 940—964.

4.) Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.

5) О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами // Математические исследования. Кишинев: Ин-т мат. с ВЦ АН МССР, 1970. Т. 5, вып. 3. С. 46—57.

Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. 1) Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства // Инж.-физ. журн. 1963. Т. 6, № 10. С. 67—71.

Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. 1) Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 414 с.

Давтян А. А. 1) Гиперсингулярные интегралы и анизотропные потенциалы. Ереван, 1984. 25 с. Деп. в АрмНИИНТИ 8.01.85, № 1.

2) Пространства Соболева — Лиувилля с квазиоднородной нормой // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1986. № 5. С. 82—84.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т. 1) Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

Джрбашян М. М. 1) О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 5. С. 1024—1027.

2) Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.

3) Классы функций и их параметрическое представление // Современные проблемы теории аналитических функций // М.: Наука, 1966. С. 118—137.

4) Обобщенный оператор Римана — Лиувилля и некоторые его применения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177, № 4. С. 767—770.

5) Обобщенный оператор Римана — Лиувилля и некоторые его применения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 5. С. 1075—1111.

6) Расширение квазианалитических классов Данжуа — Карлемана // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 4. С. 782—785.

7) Расширение квазианалитических классов Данжуа — Карлемана // Изв. АН АрмССР. Мат. 1968. Т. 3, № 3. С. 171—248.

8) Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма — Лиувилля // Там же. 1970. Т. 5, № 2. С. 71—97.

9) Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1054—1058.

10) Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики: Сб. докл. 7-го сов.-чехосл. семинара. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1982. С. 103—111.

11) Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Мат. 1984. Т. 19, № 2. С. 81—181.

Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. 1) Критерии разложимости функций в ряды Дирихле // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т. 11, № 5. С. 85—106.

2) О применении некоторых интегро-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 2. С. 210—213.

3) Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квазианалитические классы функций // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т. 11, № 5. С. 107—120.

4) Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 4. С. 747—750.

5) Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 89—179.

6) Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Мат. 1968. Т. 3, № 1. С. 3—29.

Джрбашян М. М., Саакян Б. А. 1) Классы формул и разложения типа Тейлора — Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 1. С. 69—122.

2) О разложениях в ряды обобщенно-абсолютно-монотонных функций // Anal. Math. 1981. Vol. 7, N 2. P. 85—106.

Дзядык В. К. 1) О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0<s<1$) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. Т. 17, № 2. С. 135—162.

Диденко А. В. 1) О решении составного уравнения типа Абеля в обобщенных функциях. Одесса, 1984. 11 с. Деп. в УкрНИИНТИ 15.08.84, № 1464.

2) О решении систем некоторых сверточных уравнений в пространстве обобщенных функций. Мн., 1984. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 11.09.84, № 6170.

3) О решении одного класса интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка. Одесса, 1984. 13 с. Деп. в УкрНИИНТИ 1.04.85, № 662.

Диткин В. А., Прудников А. П. 1) Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.

Докторский Р. Я., Осипов А. В. 1) Обращение уравнения Абеля с помощью кубических сплайнов // Вычислительные системы и алгоритмы. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. С. 114—121.

Дудучава Р. В. 1) О сингулярных интегральных операторах в пространстве Гельдера с весом // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 1. С. 16—19.

2) Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гельдеровых пространствах с весом // Математические исследования. Кишинев: Ин-т мат. с ВЦ АН МССР, 1970. Т. 5, вып. 1. С. 56—76.

Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. 1) Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 42—129.

Евсин В. И. 1) Задача Хольмгрена для одного уравнения с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 41—48.

2) О разрешимости задачи Хольмгрена для одного эллиптического вырождающегося уравнения // Там же. 1975. Т. 11, № 1. С. 38—46.

Есмаганбетов М. Г. 1) О связях модулей гладкости производной с наилучшим приближением и коэффициентами Фурье функции в $L_p[0, 2\pi]$ $(1<p<\infty)$. Алма-Ата, 1982. 14 с. Деп. в ВИНИТИ 28.01.82, № 380.

2) Условия существования смешанных производных Вейля в $L_p([0, 2\pi]^2)$ $(1<p<\infty)$ и их структурные свойства. Алма-Ата, 1982. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 8.04.82, № 1675.

Есмаганбетов М. Г., Наурызбаев К. Ж., Смаилов Е. С. 1) Об оценках модулей гладкости положительного порядка в L_p. Алма-Ата, 1981. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 12.06.81, № 2859.

Ефимов А. В. 1) О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 1. С. 81—116.

2) О приближении непрерывных функций суммами Фурье // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 2. С. 225—227.

3) О приближении периодических функций суммами Валле — Пуссена, II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24, № 3. С. 431—468.

4) Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 62. С. 3—47.

Желудев В. А. 1) О корректности одного класса уравнений в свертках // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1974. Т. 14, № 3. С. 610—630.

2) Производные дробного порядка и численное решение одного класса уравнений в свертках // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 11. С. 1950—1960.

Жук В. В. 1) Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Вопр. мех. и процессов упр. Л., 1986. № 8. С. 88—94.

Забрейко П. П. 1) О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра // Лит. мат. сб. 1967. Т. 7, № 2. С. 281—287.

Зигмунд А. 1) Тригонометрические ряды. В 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.

2) То же. Т. 2. 538 с.

Ибрагимов И. И. 1) О наилучшем приближении функции, s-я производная которой имеет разрыв первого рода // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89, № 6. С. 973—975.

2) О наилучшем приближении в среднем функции, s-я производная которой имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1, 1]$ // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 1. С. 13—16.

Ильин В. П. 1) Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтлвуда // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 128—144.

2) Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области // Там же. 1962. Т. 66. С. 227—363.

Иманалиев М. И., Вебер В. К. 1) Об одном обобщении функции типа Миттаг-Леффлера и его применении // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1980. Вып. 13. С. 49—59.

Иосида К. 1) Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Кабанов С. Н. 1) Теорема равносходимости для одного оператора дробного дифференцирования // Исследования по современным проблемам математики: Матер. конф. молодых ученых Саратов. ун-та. Саратов, 1984. С. 38—41. Деп. в ВИНИТИ 23.05.84. № 3318.

Капилевич М. Б. 1) О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 9. С. 1239—1254.

2) О сингулярных задачах Коши и Трикоми // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177, № 6. С. 1265—1268.

3) Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1465—1483.

4) О решении итерированных задач Коши в базисных рядах // Докл. АН СССР, 1969. Т. 185, № 1. С. 28—31.

Карапетянц Н. К. 1) Интегральное уравнение Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1471—1478.

Карапетянц Н. К., Рубин Б. С. 1) Радиальные потенциалы Рисса на круге и операторы дробного интегрирования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1299—1302.

2) Об операторах дробного интегрирования в пространствах с весом // Изв. АН АрмССР. Мат. 1984. Т. 19, № 1. С. 31—43.

3) Локальные свойства дробных интегралов и пространства BMO на отрезке вещественной оси. Ростов н/Д, 1985. 43 с. Деп. в ВИНИТИ 6.02.86, № 869-В.

4) Об интегральных уравнениях первого рода со слабой особенностью с радиальной правой частью // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвуз. сб. науч. ст. Элиста: Калмыцк. ун-т, 1986. С. 87—106.

Карапетянц Н. К., Самко С. Г. 1) Сингулярные операторы в свертках с разрывным символом // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 1. С. 44—61.

2) Сингулярные интегральные операторы со сдвигом Карлемана в случае кусочно-непрерывных коэффициентов, I // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1975, № 2. С. 43—54.

Карасев И. М. 1) К вопросу интегрирования одного типа вырожденного гипергеометрического уравнения // Уч. зап. Кабард.-Балкар. пед. ин-та. Нальчик: Кабард.-Балкар. кн. изд-во, 1957. Вып. 17. С. 29—38.

Кашин Б. С., Саакян А. А. 1) Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.

Килбас А. А. 1) Степенно-логарифмические интегралы в пространствах гельдеровских функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975, № 1. С. 37—43.

2) Применение одного интегрального представления к исследованию нетеровости интегральных операторов с логарифмическими ядрами // Там же. 1976, № 2. С. 24—33.

3) О нетеровости интегральных операторов с логарифмическими ядрами // Там же, 1976, № 4. С. 35—39.

4) Обобщенные пространства Гельдера и оператор типа свертки со специальной функцией Вольтерра // Там же. 1976, № 5. С. 44—52.

5) Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмическими ядрами произвольного порядка // Докл. АН БССР. 1977. Т. 21, № 12. С. 1078—1081.

6) Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах Гельдера с весом // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978, № 2. С. 29—37.

7) Операторы типа потенциала с логарифмическими ядрами произвольных неотрицательных порядков // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1979, № 1. С. 28—37.

8) Асимптотические разложения для степенно-логарифмических интегралов, содержащих логарифмы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982, № 6. С. 29—36.

9) О гладкости многомерных интегралов типа потенциала по ограниченной области // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1983, № 6. С. 58—61.

10) Интегральные уравнения с логарифмическими ядрами // Комплексный анализ и приложения: Тр. междунар. конф., 20—27 сент. 1981 г., Варна. София: Изд-во Болг. АН, 1984. С. 537—548.

11) Интегральные уравнения первого рода с логарифмическими ядрами // Научн. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 57—64.

12) О действии потенциала Рисса из $L_p(R^n)$ и гладкости интегральных операторов // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 2. С. 108—111.

Килбас А. А., Ву Ким Туан. 1) Об одном многомерном аналоге интегрального уравнения Абеля // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 10. С. 879—881.

Килбас А. А., Самко С. Г. 1) О гладкости функций, представимых логарифмическими интегралами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. 1978, № 1. С. 73—75.

Киприянов И. А. 1) Дробная производная и теоремы вложения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 6. С. 1187—1190.

2) Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов // Там же. 1960. Т. 131, № 2. С. 238—241.

3) О пространствах дробно-дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24, № 6. С. 865—882.

4) О некоторых неравенствах для оператора дробного дифференцирования // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961. С. 143—148.

5) О некоторых свойствах дробной производной по направлению // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1961. № 2. С. 32—40.

6) Преобразование Фурье — Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 89. С. 130—213.

7) Об одном операторе, порожденном преобразованием Фурье — Бесселя // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 601—620.

Ключанцев М. И. 1) Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 6. С. 983—990.

Коган Х. М. 1) Об одном интегро-дифференциальном уравнении // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 4. С. 228—230.

2) О порядке приближения функций класса Z_α линейными положительными полиномиальными операторами // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку: Изд-во АН АзССР, 1965. С. 157—162.

Кокилашвили В. М. 1) Анизотропные потенциалы Бесселя. Теорема вложения с предельным показателем // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1978. Т. 58. С. 134—149.

2) Максимальные функции и сингулярные интегралы в весовых функциональных пространствах // Там же. 1985. Т. 80. 114 с.

3) Максимальные функции и интегралы типа потенциала в весовых пространствах Лебега и Лоренца // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 172. С. 192—201.

4) Сингулярные и дробные интегралы в весовых пространствах // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 83—86.

Кокилашвили В. М., Габидзашвили М. А. 1) О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и максимальных функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 6. С. 1304—1306.

Кокилашвили В. М., Крбец М. 1) Weighted norm inequalities for fractional order maximal functions and Riesz potentials in Orlicz spaces / V. M. Kokilashvili, M. Krbec // Ceskoslov. Academia Věd. Matem. Ustav. 1984. P. 1—17.

2) On the boundedness of Riesz potentials and fractional maximal functions in weighted Orlicz spaces / V. M. Kokilashvili, M. Krbec // Конструктивная теория функций'84: Тр. Междунар. конф., 1984 г., Варна. София: Изд-во Болг. АН, 1984. С. 468—472.

3) Весовые неравенства для риссовых потенциалов и дробных максимальных функций в пространствах Орлича // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 2. С. 280—283.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1) Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

Коробейник Ю. Ф. 1) Об уравнениях бесконечного порядка в обобщенных производных // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 6. С. 1259—1281.

2) Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 4. С. 833—854.

3) Об одном интегральном операторе // Лит. мат. сб. 1965. Т. 5, № 1. С. 97—115.

4) Операторы сдвига на числовых семействах. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. 155 с.

Косарев Е. Л. 1) О численном решении интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1973. Т. 13, № 6. С. 1591—1596.

Кочура А. И., Диденко А. В. 1) О решении дифференциального уравнения дробного порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. Одесса, 1985. 13 с. Деп. в УкрНИИНТИ 29.04.85, № 855.

Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. 1) Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.

Краснов В. А. 1) О дробных производных функций многих переменных // Краевые задачи электродинамики производящих сред. Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1976. С. 240—243.

2) О дробной производной функции по функции // Науч. тр. Ташкент. ун-та. Вопр. мат. 1977. № 548. С. 56—61.

Краснов В. А., Фохт А. С. 1) Интегральные оценки дробных производных решений линейных уравнений эллиптического типа в метрике L_2, ч. 1 // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 6. С. 1042—1053.

Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. 1) Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.

Красносельский М. А., Соболевский П. Е. 1) Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 3. С. 499—502.

Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. 1) Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.

Крейн М. Г. 1) Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, № 3. С. 413—416.

Крейн С. Г. 1) Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.

Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. 1) Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

Крепкогорский В. Л. 1) Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой. Казань, 1980. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 11.07.80, № 2963.

Кривенков Ю. П. 1) Представление решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу через аналитические функции // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 4. С. 545—548.

Кудрявцев Д. Л. 1) О рядах Фурье функций, имеющих дробно-логарифмическую производную // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 2. С. 274—276.

Курант Р., Гильберт Д. 1) Методы математической физики. М.; Л.: Гостехтеоризд-ат, 1951. Т. 2. 544 с.

Ландкоф Н. С. 1) Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.

Лебедев Н. Н. 1) О применении сингулярных интегральных уравнений к задаче о распределении электричества на тонких незамкнутых поверхностях // Журн. техн. физики. 1948. Т. 18, вып. 6. С. 775—784.

2) Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 3. С. 513—516.

3) Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.

Лебедев Н. Н., Скальская И. П. 1) О решении одного класса парных интегральных

уравнений теории упругости и математической физики, связанных с преобразованием Мелера — Фока // Прикл. мат. и мех. 1969. Т. 33, вып. 6. С. 1061—1068.

Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. 1) Осесимметричная контактная задача для упругого слоя // Там же. 1958. Т. 22, вып. 3. С. 320—326.

Левитан Б. М. 1) Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102—143.

Леонтьев А. Ф. 1) Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 175 с.

Лере Ж. 1) Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 208 с.

Лесковский И. П. 1) О решении линейных однородных дифференциальных уравнений с дробными производными и постоянными коэффициентами // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений в решении прикладных задач. Тула: ТПИ, 1980. С. 85—88.

Летников А. В. 1) Теория дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 1—68.

2) Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 85—112.

3) К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1872. Т. 6, вып. 1. С. 413—445.

4) Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$ // Мат. сб. 1874. Т. 7, вып. 1. С. 5 — 205.

5) Recherches relatives a la theorie des integrales de la forme $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$ / A. B. Letnikov // Bull. Sci. Math. Astron. J. 1874. Vol. 7. P. 233 — 238.

6) Новые изыскания о тригонометрических функциях // Мат. сб. 1882. Т. 10, вып. 1—4. С. 227—312.

7) Об определенных интегралах, содержащих функции, удовлетворяющие гипергеометрическому уравнению // Мат. сб. 1884. Т. 11, вып. 3. С. 327—414.

8) О гиперсферических функциях и о разложении произвольной функции в ряды, расположенные по функциям гиперсферическим // Мат. сб. 1885. Т. 12, вып. 2. С. 205—282.

9) Об интегрировании уравнения $(a_n + b_n x)\frac{d^n y}{dx^n} + (a_{n-1} + b_{n-1}x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\,y = 0$ // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 205 — 215.

10) О гипергеометрических функциях высших порядков // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 216—222.

11) О приведении многократных интегралов // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 303—328.

Лизоркин П. И. 1) Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 325—353.

2) Функция типа Хиршмана и соотношения между пространствами $B_p^r(E_n)$ и $L_p^r(E_n)$ // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 4. С. 505 — 535.

3) Оценка тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 1. С. 109—126.

4) Обобщенные гельдеровы пространства $B_{p\theta}^{(r)}$ и их соотношения с пространствами Соболева L_p^r / Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 5. С. 1127—1152.

5) Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89—167.

6) Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 1. С. 79 — 91.

7) Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой. Приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 1. С. 218—247.

8) Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 212—243.

9) Обобщенно-гельдеровы классы функций в связи с дробным дифференцированием // Там же. 1972. Т. 128. С. 172—177.

10) Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности // Современные проблемы теории функций: Матер. всесоюз. шк. по теории функций. Баку, 21 мая — 1 июня 1977 г. Баку: Азерб. ун-т, 1980. С. 156—159.

11) Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1979. Т. 150. С. 174—197.

Лизоркин П. И., Никольский С. М. 1) Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной // Там же. 1965. Т. 77. С. 143—167.

Линкер А. И., Рубин Б. С. 1) Теоремы о сужении, продолжении и склеивании об-

разов операторов свертки со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке. Ростов н/Д, 1981. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 18.06.81, № 2919.

Линчук П. Е. 1) Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда — Леонтьева // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 5. С. 72—74.

Люк Ю. 1) Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.

Магарил-Ильяев Г. Г. 1) Задача о промежуточной производной // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 81—96.

2) Обобщенные соболевские классы и неравенства типа Бернштейна — Никольского // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 5. С. 1066—1069.

Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. 1) On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G. G. Magaril-Il'jaev, V. M. Tihomirov // Analysis Math. 1981. Vol. 7, N 1. P. 37—48.

2) О некоторых вопросах гармонического анализа на $T^{n'} \times R^{n''}$ // Некоторые вопросы современного анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 57—82.

Мазья В. Г., Хавин В. П. 1) Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 6. С. 67—138.

Макаренко Л. Г. 1) О некоторых тройных интегральных уравнениях с ядрами типа Ватсона // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, вып. 5. С. 682—686.

Маламуд М. М. 1) О возмущениях оператора дробного интегрирования // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 2. С. 85—86.

Малаховская Р. М., Шихмантер Е. Д. 1) О некоторых формулах реализации операторов и применения их к решению интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Том. ун-та. 1975. Т. 220. С. 46—56.

Маловичко В. А. 1) Об одной обобщенной гипергеометрической функции и некоторых интегральных операторах, ее содержащих // Мат. физика. Киев: Наук. думка, 1976. Вып. 19. С. 99—103.

Малоземов В. Н. 1) Обобщенное дифференцирование периодических функций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 1965. Вып. 2, № 7. С. 164—167.

2) Обобщенное дифференцирование периодических функций // Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. Ленингр. мех. ин-та. 1965. Т. 50. С. 147—166.

3) Совместное приближение периодической функции и всех ее производных, включая дробные, тригонометрическими многочленами // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 1969. Вып. 2, № 7. С. 49—54.

4) Совместное приближение функции и ее производных. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. 112 с.

Мамедов Р. Г., Оруджаев Г. Н. 1) Некоторые характеристики классов функций, имеющих дробные производные // Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций и дифференциальных уравнений. Баку: Азерб. ин-т нефти и химии, 1981. С. 3—11.

2) Некоторые классы функций, их взаимосвязь и характеристики // Там же. С. 12—15.

Маричев О. И. 1) Два уравнения Вольтерра с функциями Горна // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 3. С. 546—549.

2) Уравнение Вольтерра типа свертки Меллина с функцией F_3 в ядре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 1. С. 128—129. Деп. в ВИНИТИ 21.09.73, № 7307. 23 с.

3) Один класс интегральных уравнений типа свертки Меллина со специальными функциями в ядрах // Там же. С. 126—127. Деп. в ВИНИТИ 21.09.73, № 7308. 18 с.

4) Сингулярные краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 3. С. 523—526.

5) Весовые задачи Неймана и Дирихле в полуплоскости для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 4. С. 128—131.

6) Некоторые интегральные уравнения типа свертки Меллина, содержащие в ядрах специальные функции // Там же, № 6. С. 119—120. Деп. в ВИНИТИ 2.04.76, № 1640. 85 с.

7) Полные сингулярные интегральные уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, разрешимые в квадратурах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. 1978. № 1. С. 8—14.

8) Интегральные операторы со специальными функциями в ядрах, обобщающие операторы интегрирования комплексного порядка // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 2. С. 38—44.

9) Интегральное представление решений обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца и формулы его обращения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1824—1831.

10) Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Мн.: Наука и техника, 1978. 310 с. Handbook of integral transforms of higher transcendental functions, theory and algorithmic tables / O. I. Marichev // Chichester: Ellis Horwood, 1982. 336 p.

11) Один метод вычисления интегралов от гипергеометрических функций // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 7. С. 590—593.

12) Асимптотика функций гипергеометрического типа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 4. С. 18—25.

Маричев О. И., Ву Ким Туан. 1) Некоторые уравнения Вольтерра с функцией Аппеля F_1 в ядре // Науч. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 169—172.

2) Композиционная структура некоторых интегральных преобразований типа свертки // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 1. С. 139—142.

Мацнев Л. Б. 1) О порождающих функциях одного класса вольтерровых операторов // Вычислительные методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. Вып. 3. С. 71—85.

Медведев Н. В. 1) Решение интегральных уравнений Абеля методом сплайнов // Вопросы качественной теории дифференц. уравнений. Чебоксары: Чебокс. ун-т, 1982. С. 62—65.

Михайлов Л. Г. 1) Интегральные уравнения с ядром, однородным степени —1. Душанбе: Дониш, 1966. 49 с.

Михлин С. Г. 1) Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

2) Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

Мурдаев Х. М. 1) Оценка модуля непрерывности интегралов и производных дробного порядка. Грозный, 1985. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 14.06.85, № 4209.

2) Оценки типа Зигмунда для дробных интегралов и производных Вейля. Грозный, 1985. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 18.09.85, № 6720-В.

Мурдаев Х. М., Самко С. Г. 1) Операторы дробного интегродифференцирования в весовых обобщенных пространствах Гельдера // Вопросы вычислений и прикладной математики. Ташкент, 1986. Вып. 80. С. 116—117.

2) Весовые оценки модулей непрерывности дробных интегралов от функций, имеющих с весом заданный модуль непрерывности. Ростов н/Д, 1986. 42 с. Деп. в ВИНИТИ 11.05.86, № 3351-В.

3) Действие дробного интегродифференцирования в весовых обобщенных пространствах Гельдера $H_0^{\omega}(\rho)$ с весом $\rho(x)=(x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$. Ростов н/Д, 1986. 25 с. Деп. в ВИНИТИ 11.05.86, № 3350-В.

Мусхелишвили Н. И. 1) Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Мхитарян С. М. 1) О формулах Н. И. Ахиезера и В. А. Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов // Математические исследования. Кишинев: Ин-т мат. с ВЦ АН МССР, 1968. Т. 3, вып. 1. С. 61—70.

Нагнибида Н. И. 1) О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 6. С. 1306—1318.

Насибов Ф. Г. 1) О порядке наилучших приближений функций, имеющих дробную производную в смысле Римана — Лиувилля // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1962, № 3. С. 51—57.

2) О порядке наилучших приближений функций многих переменных, имеющих дробную производную // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции. Баку: Изд-во АН АзССР, 1965. С. 73—79.

Натансон И. П. 1) Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

Нахушев А. М. 1) Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736—739.

2) Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100—111.

3) Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений // Там же. 1975. Т. 11, № 1. С. 192—195.

4) О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Там же. 1976. Т. 12, № 1. С. 103—108.

5) Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308—311.

Некрасов П. А. 1) Общее дифференцирование // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 45—168.

2) Приложение общего дифференцирования к интегрированию уравнений вида $\Sigma(a_s+b_sx)x^sD^sy=0$ // Там же. С. 344—393.

3) Приложение общего дифференцирования к задаче о приведении многократных интегралов (в связи с интегрированием уравнения Лапласа) // Там же. С. 410—426.

4) Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden / P. A. Nekrassoff // Math. Ann. 1891. Bd 38. S. 509—560.

Нестеров С. В. 1) Применение оператора обобщенного дифференцирования к уравнениям класса Фукса // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. 1961. № 2. С. 21—27.

Николаев В. П. 1) Оценка интегралов типа потенциала в пространстве L_p с весом. Теоремы вложения // Теория и расчет передаточных механизмов. Хабаровск, 1973. С. 176—181.

2) Оценки интегралов типа потенциала. Теоремы вложения в пространствах L_p^r с весом // Тр. Джамбул. техн. ин-та легк. и пищев. пром-сти. 1973. Вып. 5. С. 149—156.

Никольская Н. С. 1) Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 2. С. 395—412.

Никольский С. М. 1) Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 386—389.

2) Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7, № 3. С. 147—166.

3) Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1945. Т. 15. С. 1—76.

4) Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с.

5) Курс математического анализа. М.: Наука, 1983. Т. 1. 464 с.

6) То же. Т. 2. 448 с.

Никольский С. М., Лионс Ж., Лизоркин П. И. 1) Integral representation and isomorphism properties of some classes of functions / S. M. Nikolsky, J. L. Lions, P. I. Lizorkin // Ann. della Scuola Norm. Super. Pisa. Sci. fis., mat. Ser. 3. 1965. Vol. 19, N 11. P. 127—178.

Ногин В. А. 1) О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов. Ростов н/Д, 1980. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 18.11.80, № 4851.

2) Обращение и описание параболических потенциалов с L_p-плотностями. Ростов н/Д, 1981. 19 с. Деп. в ВИНИТИ 30.03.81, № 1395.

3) Об обращении бесселевых потенциалов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1407—1411.

4) Об обращении бесселевых потенциалов. Ростов н/Д, 1982. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 29.04.82, № 2088.

5) Гиперсингулярные интегралы и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1982. 150 с.

6) Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 3. С. 57—65.

7) О сходимости почти всюду гиперсингулярных интегралов. Ростов н/Д, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 27.05.85, № 3651.

8) Об одном способе обращения и описания бесселевых потенциалов с L_p-плотностями // Интегральные уравнения и интегральные операторы. Краснодар: Кубан. ун-т и Ростов. ун-т, 1987.

Ногин В. А., Рубин Б. С. 1) Применение метода гиперсингулярных интегралов к исследованию пространств параболических потенциалов. Ростов н/Д, 1985. 53 с. Деп. в ВИНИТИ 26.02.85, № 1457.

2) Обращение и описание параболических потенциалов с L_p-плотностями // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 535—538.

3) Об ограниченности оператора умножения на характеристическую функцию области Стрихарца в пространствах риссовых потенциалов // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1986. № 2. С. 62—66.

4) Обращение параболических потенциалов с L_p-плотностями // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 6. С. 831—840.

5) Пространства $\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(R^{n+1})$ параболических потенциалов // Analysis Math. 1987. Vol. 13, N 4.

Ногин В. А., Самко С. Г. 1) О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой. Ростов н/Д, 1980. 47 с. Деп. в ВИНИТИ 14.01.81, № 179.

2) Об одновременной аппроксимации функций и их риссовых производных // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 3. С. 548—550.

3) О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: Межвуз. сб. науч. ст. Элиста, 1982. С. 119—131.

4) Обращение и описание риссовых потенциалов с плотностями из весовых L_p-пространств // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 1. С. 70—72.

Огиевецкий И. И. 1) Обобщение некоторых результатов Харди, Литтлвуда и Зигмунда о дробном дифференцировании и интегрировании периодических функций // Укр. мат. журн. 1957. Т. 9, № 2. С. 205—210.

2) К теории дробного дифференцирования и интегрирования периодических функций, принадлежащих классу L_p, $p>1$ // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 3. С. 443.

3) Узагальнення нерівності Сайвіна про похідну дробового порядку тригонометричного многочлена на випадок простору L_p / І. І. Огієвецький // Доп. АН УРСР. 1958. № 5. С. 486—488.

4) Generalization of the inequality of P. Civin for the fractional derivative of a trigonometrical polynomial to L_p space / I. I. Ogiewetzki // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1958. Vol. 9, N 1—2. P. 133—135.

5) Интегрирование и дифференцирование дробного порядка периодических функций и конструктивная теория функций // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций: Тр. 1 конф. по конструктивной теории функций. Л., 1959. М.: Физматгиз, 1961. С. 159—164.

Олвер Ф. 1) Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.

Олевский М. Н. 1) Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \rho$ // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 767 — 770.

Оразов И. 1) Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 339—344.

Павлов П. М., Самко С. Г. 1) Описание пространств $L_p^{\alpha}(S_{n-1})$ в терминах сферических гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 3. С. 546—550.

Паламодов В. П. 1) Интегралы Римана — Лиувилля, особые точки гиперповерхностей и гиперболические уравнения // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. конф. по дифференц. уравнениям и выч. мат. Новосибирск, 1978. Новосибирск: Наука, СО, 1980. С. 144—148.

Пахарева Н. А., Вирченко Н. А. 1) Про деякі інтегральні перетворення в класі x^k-аналітичних функцій / Н. О. Пахарева, Н. О. Вирченко // Доп. АН УРСР. 1962. № 8. С. 998—1003.

Пекарский А. А. 1) Рациональные приближения класса H_p, $0<p\leqslant\infty$ // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 1. С. 9—12.

2) Прямые и обратные теоремы рациональной аппроксимации класса Харди // Там же. 1984. Т. 28, № 2. С. 111—114.

3) Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 4. С. 571—588.

Песчанский А. И. 1) Интегральные уравнения с гипергеометрической функцией на замкнутом контуре. Одесса, 1984. 25 с. Деп. в УкрНИИНТИ 29.02.84, № 361 Ук-Д.

Пилиди В. С. 1) О некоторых свойствах кратных операторов Абеля // Матер. 2-й науч. конф. молодых ученых Рост. обл. Секция естеств. наук. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1968. С. 125—126.

Пинкевич В. Т. 1) О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4, № 6. С. 521—528.

Покало А. К. 1) Линейные методы приближения производных и интегралов в смысле Вейля периодических функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1970. № 2. С. 32—39.

Положий Г. Н. 1) О предельных значениях и формулах обращения вдоль разрезов основного интегрального представления p-аналитических функций с характеристикой $p=x^k$, ч. 1. // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16, № 5. С. 631—656.

2) Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. 442 с.

3) Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.

Пономаренко В. Г. 1) Неравенства А. Ф. Тимана для модулей гладкости дробного порядка. Днепропетровск, 1979. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 20.08.79, № 3093.

2) Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в L_p $(1<p<\infty)$ // Конструктивная теория функций: Тр. Междунар. конф., 1—5 июня 1981 г., Варна. София: Изд-во Болг. АН, 1983. С. 129—133.

Пономаренко С. П. 1) О решении одного класса тройных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Ханкеля // Укр. мат. журн. 1978. Т. 30. С. 833—840.

2) Операторный метод решения систем парных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Мелера — Фока // Там же. 1982. Т. 34, № 3. С. 316—321.

Попов Г. Я. 1) Метод парных интегральных уравнений // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 56—87.

Преображенский Н. Г. 1) Абелева инверсия в физических задачах // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. С. 6—24.

Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. 1) Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

2) Интегралы и ряды: Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

3) Интегралы и ряды: Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 801 с.

Рабинович В. С. 1) Многомерное уравнение типа свертки, символ которого имеет особенности вида сложной степенной функции линейно-однородного конуса // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1969. № 8. С. 64—74.

Рабинович Ю. Л. 1) Примечания переводчиков // Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. 2-е изд. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. Т. 2. С. 520—529.

Рабинович Ю. Л., Нестеров С. В. 1) Общий вид линейных дифференциальных уравнений, порядок которых понижается с помощью оператора обобщенного дифференцирования D^{α} // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1309—1311.

Раджабов Н. 1) О некоторых интегральных представлениях для уравнения типа Гельмгольца с сингулярной линией // Докл. АН ТаджССР. 1971. Т. 14, № 8. С. 5—9.

2) Элементарные решения и интегральные представления для одного класса дифференциальных уравнений с n сингулярной гиперплоскостью // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1832—1843.

3) Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференци-

альных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. В 3 ч. Душанбе: Тадж. ун-т. Ч. 1. 1980. 127 с.; Ч. 2. 1981. 170 с.; Ч. 3. 1982. 170 с.

4) Интегральные представления и граничные задачи для одного уравнения типа Гельмгольца со многими сингулярными поверхностями // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, СО, 1982. С. 34—46.

Раджабов Н., Саттаров А. С., Джабиров Д. К. 1) Фундаментальное решение и интегральные представления для одного уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными линиями // Докл. АН ТаджССР. 1977. Т. 20, № 9. С. 13—17.

2) Аналог формулы Пуассона для одного уравнения второго порядка эллиптического типа с двумя сингулярными линиями // Там же. № 12. С. 3—7.

Раджабов Э. Л. 1) О некоторых сверхсингулярных интегральных операторах // Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. 1974. № 2. С. 17—25.

Рафальсон С. З. 1) О коэффициентах Фурье — Лагерра // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1971, № 11. С. 93—98.

Риекстыньш Э. Я. 1) Асимптотическое представление некоторых типов интеграла свертки // Латв. мат. ежегодник. 1970. Вып. 8. С. 223—239.

2) Асимптотические разложения интегралов. В 3 т. Рига: Зинатне. Т. 1. 1974. 391 с.; Т. 2. 1977. 463 с.; Т. 3. 1981. 370 с.

Риман Б. 1) Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation / B. Riemann // Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331—334. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Б. Риман. Соч. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. С. 262—275, 506—508.

Розанова Г. И. 1) Точные интегральные неравенства с производными порядка $\alpha>0$ // Мат. физика. 1976. Вып. 3. С. 97—103.

Розет Т. А. 1) О формулах обращения одного класса интегральных преобразований // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 3. С. 227—230.

Рубин Б. С. 1) О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре // Изв. АН АрмССР. Мат. 1972. Т. 7, № 5. С. 373—386.

2) Об операторах типа потенциала в весовых пространствах на произвольном контуре // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 2. С. 300—303.

3) Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1973. № 6. С. 73—81.

4) О нетеровости операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на отрезке вещественной оси // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1973. № 4. С. 112—114.

5) Операторы типа потенциала на совокупности отрезков вещественной оси // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1974. Вып. 5. С. 144—149.

6) Об операторах типа потенциала на криволинейном контуре // Там же. С. 150—155.

7) Дробные интегралы в пространствах Гельдера с весом и операторы типа потенциала // Изв. АН АрмССР. Мат. 1974. Т. 9, № 4. С. 308—324.

8) О нетеровости операторов типа потенциала в весовых пространствах p-суммируемых функций // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1975. № 8. С. 81—90.

9) Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в случае неотрицательного показателя степени при логарифме // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1976. № 3. С. 17—22.

10) Общий метод исследования на нетеровость операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке // Изв. АН АрмССР. Мат. 1977. Т. 12, № 6. С. 447—461.

11) Теория Нетера для обобщенных уравнений Абеля с вещественным показателем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 917—927.

12) Описание образа операторов свертки со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке. Ростов н/Д, 1980. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 18.11.80, № 4848.

13) О нетеровости интегральных уравнений первого рода с конечным числом ядер потенциала // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1980. № 3. С. 29—31.

14) Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала. I и II // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1982. № 1. С. 53—63; № 2. С. 49—59.

15) Обобщенное уравнение Абеля и плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала с переменным коэффициентом трения // Изв. АН АрмССР. Мех. 1983. № 2. С. 19—25.

16) Многомерные интегралы типа Римана — Лиувилля и риссовы потенциалы в полупространстве. Ростов н/Д, 1983. 34 с. Деп. в ВИНИТИ 23.06.83, № 3414.

17) Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 521—523.

18) О риссовых потенциалах и операторах типа Римана — Лиувилля в полупространстве // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 1. С. 30—34.

19) Односторонние шаровые потенциалы и обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности. Ростов н/Д, 1984. 48 с. Деп. в ВИНИТИ 18.07.84, № 5150.

20) Метод односторонних потенциалов в теории некоторых классов дифференцируе-

мых функций дробной гладкости и обращение потенциалов по полупространству. Ростов н/Д, 1985. 63 с. Деп. в ВИНИТИ 26.02.85, № 1456.

21) Обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 6. С. 81—85.

22) Дробные интегралы и риссовы потенциалы с радиальной плотностью в пространствах со степенным весом // Изв. АН АрмССР. Мат. 1986. Т. 21, № 5. С. 488.

23) Об одном методе характеризации и обращения бесселевых и риссовых потенциалов // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1986. № 5. С. 59—68.

24) Описание и обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 10. С. 1805—1818.

25) Обращение и описание бесселевых потенциалов с L_p-плотностями по R^n и по полупространству // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 124, № 2. С. 245—248.

26) Обращение потенциалов в R^n с помощью интегралов Гаусса — Вейерштрасса // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 1. С. 34—42.

27) Пространства типа Лизоркина на полупрямой и дробное интегрирование обобщенных функций // Интегральные уравнения и интегральные операторы: Межвуз. сб. науч. ст. Краснодар: Кубан. ун-т и Ростов. ун-т, 1987.

Рубин Б. С., Володарская Г. Ф. 1) Теорема вложения для сверток на конечном отрезке и ее применение к интегральным уравнениям первого рода // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 6. С. 1322—1326.

Русак В. Н. 1) О приближении рациональными операторами функций, имеющих дробную производную ограниченной вариации // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 6. С. 20—26.

2) О приближении рациональными операторами типа Фурье периодических функций, представимых в виде свертки // Там же. 1984. № 2. С. 25—32.

3) Рациональная аппроксимация периодических функций, имеющих кусочно-выпуклую производную // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 118—121.

Русев П. К. 1) О представлении аналитических функций рядами по полиномам Лагерра // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 57—59.

Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. 1) Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости // Прикл. мат. и мех. 1966. Т. 30, вып. 2. С. 271—277.

Саакян Б. А. 1) Дифференциальные операторы дробного порядка и ассоциированные с ними $<\rho_j>$-абсолютно-монотонные функции // Изв. АН АрмССР. Мат. 1974. Т. 9, № 4. С. 285—307.

2) Дифференциальные операторы дробного порядка и ассоциированные с ними $<\rho_j, \omega_j>$-абсолютно-монотонные функции // Уч. зап. Ереван. ун-та. Естеств. науки. 1975. Т. 1(128). С. 3—9.

Савелова Т. И. 1) Об устойчивом дифференцировании функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1980. Т. 20, № 2. С. 501—505.

Садикова Р. Х. 1) Неравенства для истокообразно представимых функций // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1979. № 11. С. 61—64.

Сакалюк К. Д. 1) Обобщенное интегральное уравнение Абеля // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 4. С. 748—751.

2) Обобщение интегрального уравнения Абеля / Уч. зап. Кишинев. ун-та. 1962. Т. 50. С. 95—102.

3) Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешимые в замкнутой форме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кишинев, 1963. 94 с.

4) Обобщенное интегральное уравнение Абеля с внутренними коэффициентами // Уч. зап. Кишинев. ун-та. 1965. Т. 82 (мат.). С. 60—68.

Самко С. Г. 1) Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 5. С. 1019—1022.

2) О сведении некоторых интегральных уравнений первого рода теории упругости и гидродинамики к уравнениям второго рода // Прикл. мат. и мех. 1967. Т. 31, № 2. С. 343—345.

3) К теории обобщенного интегрального уравнения Абеля // Материалы 7-й и 8-й научной конференции аспирантов Рост. ун-та. Сер. точн. и естеств. наук. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1968. С. 56—61.

4) Обобщенное уравнение Абеля в бесконечных пределах // Там же. С. 160—165.

5) Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 2. С. 298—314.

6) О теории Нетера для обобщенного интегрального уравнения Абеля // Там же. С. 315—326.

7) Обобщенное уравнение Абеля, преобразование Фурье и уравнения типа свертки // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 743—746.

8) Об интегральном модуле непрерывности потенциалов с плотностями, суммируемыми на оси с весом // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1969. С. 175—184.

9) Обобщенное интегральное уравнение Абеля на прямой // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1970. № 8. С. 83—93.

10) Интегральные уравнения первого рода с ядрами типа потенциала // Матер.

Всесоюз. конф. по краевым задачам. Казань, 1969. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. С. 216—220.

11) Об операторах типа потенциала // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 2. С. 299—301.

12) Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1971. № 4. С. 78—86.

13) Об одном классе операторов типа потенциала на прямой // Там же. № 5. С. 92—100.

14) О пространстве $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала // Изв. АН АрмССР. Мат. 1973. Т. 8, № 5. С. 359—383.

15) Об ограниченности оператора урезания в пространстве дробных интегралов // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1974. Т. 5. С. 16—19.

16) Об интегральных уравнениях типа свертки первого рода со степенным ядром // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1975. № 4. С. 60—67.

17) О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40, № 5. С. 1143—1172.

18) Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 2. С. 34—41.

19) Об обобщенных потенциалах Рисса // Семин. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1976. Т. 11. С. 35—44.

20) Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Stud. Math. (PRL). 1977. Vol. 61, N 3.P. 193 — 230.

21) Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 3. С. 528—531.

22) Сферические потенциалы, сферическое риссово дифференцирование и их приложения // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1977. № 2. С. 135—139.

23) К описанию образа $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов (потенциалов Рисса) // Изв. АН АрмССР. Мат. 1977. Т. 12, № 5. С. 329—334.

24) Классы $C^{\lambda}(R^n)$ и мультипликаторы в пространстве $I^{\alpha}(L_p)$ риссовых потенциалов // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1977, № 3. С. 13—17.

25) Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве, и о делении на функции // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 5. С. 677—689.

26) Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой // Тр. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1978. Т. 5—6. С. 235—249.

27) Методы обращения операторов типа потенциала и уравнения с инволютивными операторами и их приложения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1978. 295 с.

28) Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 156. С. 157—222.

29) О плотности в $L_p(R^n)$ пространства Φ_V типа Лизоркина // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 855—865.

30) Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1983. № 4. С. 28—42.

31) Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 208 с.

32) Одномерные и многомерные интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью в ядре // Науч. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 103—115.

33) О совпадении дифференцирования Грюнвальда — Летникова с другими формами дробного дифференцирования. Периодический и непериодический случаи // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 1. С. 183—186.

Самко С. Г., Васильев И. Л. 1) Интегральные уравнения с аналитическими ядрами типа потенциала. Мн., 1981. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 1.07.81, № 3227.

Самко С. Г. Умархаджиев С. М. 1) Описание пространства риссовых потенциалов в терминах старших производных // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1980. № 11. С. 79—82.

2) Описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$ риссовых потенциалов в терминах производных порядка $[\alpha]$. Ростов н/Д, 1980. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 18.07.80, № 3165.

3) Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям первого рода // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 172. С. 299—312.

Самко С. Г., Чувенков А. Ф. 1) О потенциалах Рисса в пространствах Орлича // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1975. Т. 7. С. 150—156.

Самко С. Г., Якубов А. Я. 1) Оценка Зигмунда для сингулярного интеграла с быстро убывающим степенным весом // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1984. № 12. С. 42—51.

2) Оценки типа Зигмунда для гиперсингулярных интегралов. Ростов н/Д, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 19.03.85, № 1966.

3) Оценка Зигмунда для модулей непрерывности дробного порядка сопряженной функции // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 12. С. 49—53.

4) Оценка Зигмунда для гиперсингулярных интегралов в случае модулей непрерывности дробного порядка // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1986. № 3. С. 37—42.

Сейтказиева А. 1) Интегро-дифференциальные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1980. Вып. 13. С. 132—135.

Семянистый В. И. 1) О некоторых интегральных преобразованиях в евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 3. С. 536—539.

Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. 1) Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.

Скориков А. В. 1) О нетеровости операторов типа потенциала в пространствах Соболева — Слободецкого // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1974. Т. 6. С. 136—147.

2) К описанию пространств $L_p^{\alpha}(\Omega)$ // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 5. С. 691—701.

3) Операторы типа бипотенциала в $L_p(R^2)$ // Тр. молодых ученых кафедры высшей математики. Рост. инж.-строит. ин-т, 1977. С. 32—51. Деп. в ВИНИТИ 5.05.77, № 1780.

4) Интегральные уравнения типа свертки первого рода. Ростов н/Д, 1979. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 31.08.79, № 3193.

Смирнов В. И., Лебедев Н. А. 1) Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1964. 438 с.

Смирнов М. М. 1) Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.

2) Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.

3) Вырождающиеся гиперболические уравнения. Мн.: Вышэйш. шк., 1977. 160 с.

4) Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре /// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. 1981. Вып. 3, № 13. С. 117—119.

5) Решение в замкнутой форме уравнения Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 171—173.

6) Об одном интегральном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. 1984. № 7. С. 111—113.

7) Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк., 1985. 304 с.

Соболев С. Л. 1) Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 3. С. 471—497.

2) Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. 256 с.

3) Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

Соболев С. Л., Никольский С. М. 1) Теоремы вложения // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, 3—12 июля 1961 г. Л.: Изд-во АН СССР, 1963. Т. 1. С. 227—242.

Солонников В. А. 1) Простое доказательство неравенства Харди и Литтлвуда для дробных интегралов // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. 1962. № 13. С. 150—153.

Сонин Н. Я. 1) Сообщение о дифференцировании с произвольным указателем // Тр. 2-го съезда русских естествоиспытателей. 1870. Т. 2. С. 18—21.

2) О дифференцировании с произвольным указателем // Мат. сб. 1872. Т. 6, вып. 1. С. 1—38.

3) Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries / N. Sonine // Math. Ann. 1880. Vol. 16. P. 1—80.

4) Обобщение одной формулы Абеля // Зап. мат. отд. Новороссийского о-ва естествоиспытателей. 1884. Т. 5. С. 143—150.

5) Sur la generalization d'une formule d'Abel / N. Sonine // Acta Math. 1884. Vol. 4. P. 171—176.

6) Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 241 с.

Старовойтов А. П. 1) О рациональной аппроксимации функций, имеющих производную ограниченной вариации // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 104—106.

2) Рациональная аппроксимация функций, представимых в виде интеграла дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля // Там же. 1985. Т. 29, № 12. С. 1079.

3) Рациональная аппроксимация функций из $W^r V\,[a, b]$ // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 129—132.

4) О рациональной аппроксимации функций, дифференцируемых в смысле Римана — Лиувилля // Теория функций и приближений. Тр. 2-й Сарат. зимн. шк., 24 янв.—5 февр. 1984 г. Саратов, 1986. Ч. 3. С. 99—102.

Стейн И. 1) Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.

Стейн И., Вейс Г. 1) Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 334 с.

Стечкин С. Б. 1) О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 219—242.

2) О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Там же. 1956. Т. 20, № 5. С. 643—648.

Сунь Юн-Шен. 1) О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 1. С. 67—92.

Теляковский С. А. 1) Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле — Пуссена // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 2. С. 259—262.

2) О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 62. С. 61—97.

Тиман А. Ф. 1) Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81, № 4. С. 509—511.

2) О теоремах Джексона // Укр. мат. журн. 1958. Т. 10, № 3. С. 334—336.

3) Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.

Титчмарш Е. 1) Introduction to the theory of Fourier integrals / E. C. Titchmarsh. Oxford, 1937. 334 p. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948

Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1) Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26—29.

Торин Г. О. 1) Теоремы вложения. Математика // Периодический сборник переводов иностранных статей. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. Т. 1: 3. С. 43—78.

Трибель Х. 1) Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

Трикоми Ф. 1) О линейных уравнениях смешанного типа. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.

2) Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. 1) Курс современного анализа. В 2 т. Т. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Умархаджиев С. М. 1) О полной непрерывности мультипликаторов в шкале пространств риссовых потенциалов // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1981. № 4. С. 32—35.

Уфлянд Я. С. 1) Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1977. 220 с.

Федорюк М. В. 1) Неоднородные обобщенные функции двух переменных // Мат. сб. 1959. Т. 49, № 4. С. 431—446.

2) Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Федосов В. П. 1) О некоторых обобщенных уравнениях Абеля // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. С. 106.

Федосов В. П., Яненко Н. Н. 1) Уравнения в частных производных полуцелой степени // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 4. С. 804—808.

Фихтенгольц Г. М. 1) Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: Наука, 1966. Т. 3. 656 с.

Фохт А. С., Краснов В. А. 1) Интегральные оценки дробных производных гармонической функции и некоторые их приложения // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 12. С. 2276—2279.

Харди Г. Г. 1) Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. 1) Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

Хелгасон С. 1) Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.

Хилле Э., Филлипс Р. 1) Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 829 с.

Хиршман И. И., Уиддер Д. В. 1) Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 312 с.

Хромов А. П. 1) Об одном применении оператора дробного дифференцирования // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. Вып. 6, ч. 1. С. 3—22.

Цейтлин А. И. 1) Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 334 с.

Чувенков А. Ф. 1) О пространствах Соболева — Орлича дробного порядка // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1979, № 1. С. 6—10.

Чумаков Ф. В. 1) Уравнение Абеля с гипергеометрическим ядром // Матер. Всесоюз. конф. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. С. 267—271.

2) Уравнение типа Абеля на сложном контуре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 1. С. 55—61.

Чумаков Ф. В., Васильев И. Л. 1) Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. 1980, № 2. С. 40—44.

Шелковников Ф. А. 1) Обобщенная формула Коши // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 3. С. 157—159.

Эйлер Л. 1) De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generales algebraice dari neqvevnt / L. Eulero // Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae. 1738. Т. 5. P. 38—57.

2) Интегральное исчисление. М.: Физматгиз, 1958. Т. 3. 447 с.

Эскин Г. И. 1) Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.

Якубович С. Б. 1) Замечание к формуле обращения интегрального преобразования Уимпа по индексу // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 1097—1098.

Ярославцева В. Я. 1) Об одном классе операторов преобразования и их приложении к дифференциальным уравнениям // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 816—819.

Ясаков А. И. 1) Об операторах типа потенциала // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научно-исследовательских и народнохозяйственных задач. Воронеж: Воронеж. ун-т. 1969. Вып. 1. С. 6—9.

Abel N. H. 1) Solution de quelques problèmes à l'aide d'integrales défines // Gesammelte mathematische werke. Leipzig: Teubner, 1881. T. 1. P. 11—27. (First publ. in Mag. Naturvidenkaberne, Aurgang 1. Bd 2. Christiania 1823.)

2) Auflösung einer mechanischen Aufgabe // J. für reine und angew. Math. 1826. Bd 1. S. 153—157.

Adams D. R. 1) A note on Riesz potentials // Duke Math. J. 1975. Vol. 42, N 4. P. 765—778.

Adams D. R., Bagby R. J. 1) Translation-dilation invariant estimates for Riesz potentials // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23, N 11. P. 1051—1067.

Adams R., Aronszajn N., Smith K. T. 1) Theory of Bessel potentials. II // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1967. T. 17, N 2. P. 1—135.

Agarwal R. P. 1) A propos d'une note de M. Pierre Humbert // C. r. seances Acad. Sci. 1953. Vol. 236, N 21. P. 2031—2032.

2) Certain fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 66, N 2. P. 365—370.

3) Fractional q-derivatives and q-integrals and certain hypergeometric transformations // Ganita. 1976. Vol. 27, N 1—2. P. 25—32.

Ahmad M. I. 1) Quadruple integral equations and operators of fractional integration // Glasgow Math. J. 1971. Vol. 12, N 1. P. 60—64.

Ahuja G. 1) On fractional integration for generalized functions // J. Maulana Azad College Tech. 1981. Vol. 14. P. 79—85.

Al-Abedeen A. Z. 1) Existence theorem on differential equations of generalized order // Rafidain J. Sci. Mosul. Univ. Iraq. 1976. Vol. 1. P. 95—104.

Al-Abedeen A. Z., Arora H. L. 1) A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equations of generalized order // Canad. Math. Bull. 1978. Vol. 21, N 3. P. 267—271.

Al-Bassam M. A. 1) Some properties of Holmgren—Riesz transform // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3, sci. fis. e mat. 1961. Vol. 15, fasc. 1—2. P. 1—24.

2) Conserning Holmgren—Riesz transform equations of Gauss—Riemann type // Rend. Circolo Mat. Palermo. Ser. 2. 1962. Vol. 11, N 11. P. 47—66.

3) On certain types of Holmgren—Riesz transform equations and their equivalent differential equations // J. für reine und angew. Math. 1964. Bd 216, N 1—2. S. 91—100.

4) Some existence theorems on differential equations of generalized order // Ibid. 1965. Bd 218. S. 70—78.

5) On an integro-differential equation of Legendre—Volterra type // Portugal. Math. 1966. Vol. 25, N 1—2. P. 53—61.

6) On Laplace's second order linear differential equations and their equivalent Holmgren—Riesz transform equations // J. für reine und angew. Math. 1967. Bd 225. S. 76—84.

7) On some differential and integro-differential equations associated with Jacobi's differential equation // Ibid. 1976. Bd 288. S. 211—217.

8) On fractional calculus and its applications to the theory of ordinary differential equations of generalized order // Nonlinear analysis and applications (St Johns, New Foundland, Canada, 1981). Lect. Notes in Pure and Appl. Math. Dekker. New York, 1982. Vol. 80. P. 305—331.

9) Some applications of fractional calculus to differential equations // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 1—11.

Alonso J. 1) On differential equations of fractional order: Dr Diss. Univ. Cincinnati. 1964. 70 p. Diss. Abstrs. 1965. Vol. 26, N 4. Pos. 2231. Order N 64—11, 947.

Al-Salam W. A. 1) Some fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1966. Vol. 15, N 2. P. 135—140.

2) q-Analogues of Cauchy's formulas // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, N 3. P. 616—621.

Al-Salam W. A., Verma A. 1) Remarks on fractional q-integrals // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1965. Vol. 44, N 9—10. P. 600—607.

2) A fractional Leibniz q-formula // Pacif. J. Math. 1975. Vol. 60, N 2. P. 1—9.

Andersen K. F. 1) On the range and inversion of fractional integrals in weighted spaces // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. Vol. A92, N 1—2. P. 51—64.

2) Weighted inequalities for fractional integrals // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advances Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 12—25.

Andersen K. F., Heinig H. P. 1) Weighted norm inequalities for certain integral operators // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, N 4. P. 834—844.

Aronszajn N. 1) Potentiels besseliens // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1965. T. 15, N 1. P. 43—58.

Aronszajn N., Smith K. T. 1) Theory of Bessel potentials.I // Ibid. 1961. T. 11. P. 385—475.

Aronszajn N., Mulla F., Szeptycki P. 1) On spaces of potentials connected with L_p classes // Ibid. 1963. T. 13, N 2. P. 211—306.

Askey R. 1) Inequalities via fractional integration // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 106—115.

Asral B. 1) On the regular Cauchy problems for the Euler—Poisson—Darboux equations and the method of ascent // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1981. Vol. 25, N 2. P. 121—128.

Atiyah M. F. 1) Resolution of singularities and division of distributions // Comm. Pure and Appl. Math. 1970. Vol. 23, N 2. P. 145—150.

Atkinson K. E. 1) An existence theorem for Abel integral equations // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, N 5. P. 729—736.

Bagby R. J. 1) Lebesgue spaces of parabolic potentials // Illinois J. Math. 1971. Vol. 15, N 4. P. 610—634.

2) Parabolic potentials with support on a half-space // Ibid. 1974. Vol. 18, N 2. P. 219—222.

3) A characterization of Riesz potentials and an inversion formula // Indiana Univ. Math. J. 1980. Vol. 29, N 4. P. 581—595.

Baker B. B., Copson E. T. 1) The mathematical theory of Huygens' principle. Oxford: Clarendon Press, 1950. 192 p.

Balakrishnan A. V. 1) Representation of abstract Riesz potentials of the elliptic type // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 64, N 5. P. 288—289.

2) Operational calculus for infinitesimal generators of semi-groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 91, N 2. P. 330—353.

3) Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them // Pacif. J. Math. 1960. Vol. 10, N 2. P. 419—437.

Balasubramanian R., Norrie D. H., Vries G. de. 1) The application of the least squares finite element method to Abel's integral equation // Intern. J. Numer. Methods in Eng. 1979. Vol. 14. P. 201—209.

Bang T. 1) Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques // Det. Kgl. Danske Vig. Selskab. Math.-fys. Medd. Kobenhavn, 1941. Vol. 19, N 4. 28 p.

Barrett J. H. 1) Differential equations of non-integer order // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, N 4. P. 529—541.

Beekmann W. 1) Perfekte Integralverfahren: Dr Diss. Eberhard-Karls-Univ. Tübingen, 1967. 65 S.

2) Perfecte Integralverfahren // Math. Z. 1968. Bd 104. S. 99—105.

Beltrami E. 1) Sulla teoria delle funzioni potenziali symmetriche // Rend. Accad. sci. di Bologna. 1881. Vol. 2. P. 461—505.

Belward J. A. 1) Solutions of some Fredholm integral equations using fractional integration, with an application to a forced convection problem // Z. angew. Math. und Phys. 1972. Bd 23, N 6. S. 901—917.

Benedek A., Panzone R. 1) The spaces L_p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. Vol. 28, N 3. P. 302—324.

Berens H., Westphal U. 1) Zur Charakterisierung von Ableitungen nichtganzer Ordnung im Rahmen der Laplace-Transformation // Math. Nachr. 1968. Bd 38, N 1—2. S. 115—129.

2) A Cauchy problem for a generalized wave equation // Acta sci. math. 1968. Vol. 29, N 1—2. P. 93—106.

Berens H., Butzer P. L., Westphal U. 1) Representations of fractional powers of infinitesimal generators of semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, N 1. P. 191—196.

Berger N., Handelsman R. 1) Asymptotic evaluation of fractional integral operators with applications // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6, N 5. P. 766—773.

Bharatiya P. L. 1) The inversion of a convolution transform whose kernel is a Bessel function // Amer. Math. Month. 1965. Vol. 72, N 4. P. 393—397.

Bhise V. M. 1) Inversion formula for a generalized Laplace integral // J. Vikram Univ. India. 1959. Vol. 11, N 3. P. 57—63.

2) Operators of fractional integration and a generalised Hankel transform // Collect. Math. 1964. Vol. 16, N 2—3. P. 201—209.

Bhise V. M., Madhavi Dighe. 1) On composition of integral operators with Fourier type kernels // Indian J. Pure and Appl. Math. 1980. Vol. 11, N 9. P. 1183—1187.

Bhonsle B. R. 1) Inversion integrals for the Legendre transformation and the birth rate of a population // Ganita. 1966. Vol. 17. P. 89—95.

2) Inversions of some integral equations // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1966. Vol. A36, N 4. P. 1003—1006.

Biacino L. 1) Teoremi di immersione per le derivate parziali di ordine frazionario delle funzioni di $W^r(\Omega)$ // Boll. Unione mat. ital. 1983. Vol. 2-C, N 1. P. 1—40.

2) Soluzioni negli spazi de Lebesgue della equazione integrale di Abel // Ric. mat. 1984. Vol. 33, N 2. P. 267—287.

Biacino L., Miserendino D. 1) Derivate di ordine frazionario per funzioni di $L^2(R^2)$ e caratterizzazione degli spazi $H^s(R^2)$ // Le Matematiche, Catania. 1979. Vol. 34, N 1—2. P. 143—165.

2) Perturbazioni di operatori ellittici mediante operatori contenenti derivate di ordine frazionario // Ibid. 1979. Vol. 34, N 1—2. P. 166—187.

3) Le derivate di ordine frazionario e gli spazi $W_0^s(\Omega)$ // Rend. Accad. sci. fis., mat. Napoli. Ser. 4. 1979 (1980). Vol. 46, N 118. P. 189—220.

Biacino L., Di Giorgio M., Miserendino D. 1) Derivate di ordine frazionario per funzioni di $W^r(\Omega)$ // Boll. Unione mat. ital. Analisi funzionale e Appl. Ser. 6. 1982. Vol. 1-C, N 1. P. 235—278.

Bleistein N. 1) Asymptotic expansions of integral transforms of functions with logarithmic singularities // SIAM J. Math. Anal. 1977. Vol. 8, N 4. P. 655—672.

Blum E. K. 1) The Euler—Poisson—Darboux equation in the exceptional cases // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 5, N 4. P. 511—520.

Blumenthal L. M. 1) Note on fractional operators and the theory of composition // Amer. J. Math. 1931. Vol. 53. P. 483—492.

Bôcher M. 1) An Introduction to the Study of Integral Equations // Tracts in Math. and Math. Physics. N 10. Cambridge Univ. Press, 1909. P. 8—9.

Boman J. 1) Equivalence of generalized moduli of continuity // Stockholms Univ. Math. Inst. (Medd.). 1978. N 1. P. 1—54.

Boman J., Shapiro H. S. 1) Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Arkiv für Mat. 1971. Bd 9, N 1. S. 91—116.

Bora S. L., Saxena R. K. 1) On fractional integration // Publs. inst. math. Beograd. 1971. T. 11, N 25. P. 19—22.

Bosanquet L. S. 1) On Abel's integral equation and fractional integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1931. Vol. 32. P. 134—143.

2) The absolute summability (A) of Fourier series // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1934. Vol. 4. P. 12—17.

3) A mean value theorem // J. London Math. Soc. 1941. Vol. 16, N 1—4. P. 146—148.

4) Note on convexity theorems // Ibid. 1943. Vol. 18. P. 239—248.

5) Some properties of Cesàro—Lebesgue integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1945. Vol. 49. P. 40—62.

6) On the order of magnitude of fractional differences // Calcutta Math. Soc. Golden Jubilee Memorial Volume. 1958—1959. Pt 1. P. 161—172.

7) Some extensions of M. Riesz's mean value theorem // Indian J. Math. 1967. Vol. 9, N 1. P. 65—90.

8) On Liouville's extension of Abel's integral equation // Mathematika. 1969. Vol. 16, N 1. P. 59—85.

Bosanquet L. S., Linfoot E. H. 1) Generalized means and the summability of Fourier series // Quart. J. Math. Oxford ser. 1931. Vol. 8, N 5—8. P. 207—229.

Bouwkamp C. J. 1) On some Bessel-function integral equations // Ann. mat. pura ed appl. 1976. T. 108. P. 63—67.

Braaksma B. L. J. 1) Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes integrals // Compos. Math. 1964. Vol. 15, N 3. P. 239—341.

Braaksma B. L. J., Schuitman A. 1) Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalized functions // SIAM J. Math. Anal. 1976. Vol. 7, N 6. P. 771—798.

Bragg L. R. 1) Hypergeometric operator series and related partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 143, N 1. P. 319—336.

2) The Riemann—Liouville integral and parameter shifting in a class of linear abstract Cauchy problems // SIAM J. Math. Anal. 1976. Vol. 7, N 1. P. 1—12.

Brakhage H., Nickel K., Rieder P. 1) Auflösung der Abelschen Integralgleichung. 2 Art. // Z. angew. Math. und Phys. 1965. Bd 16, N 2. S. 295—298.

Brédimas A. 1) L'operateur de différentiation d'ordre complexe // Bull. sci. math. Ser. 2. 1973. T. 97, N 1. P. 17—28.

2) La differentiation d'ordre complexe, le produit de convolution généralizé et le produit canonique pour les distributions // C. R. Acad. Sci. Paris. 1976. T. 282, N 1. P. A37—A40.

3) Extensions, propriétés complémentaires et applications des opérateurs de différentiation à gauche et à droite d'ordre complexe // Ibid. T. 283, N 1. P. A3—A6.

4) Applications a'certaines équations differentielles des premier et second ordre a'coefficients polynomiaux des opérateurs de différentiation d'ordre complexe a'gauche et a'droite // Ibid. T. 283, N 6. P. A337—A340.

5) La différentiation d'ordre complexe et les produits canonique et de convolution generalise: complements // Ibid. T. 283, N 16. P. A1095—A1098.

6) The complex order differentiation operator and the «spherical» Liouville—Radon transform in R^n, $n \geqslant 2$ // J. math. pures et appl. 1977. T. 56, N 4. P. 479—491.

Brenke W. C. 1) An application of Abel's integral equation // Amer. Math. Month. 1922. Vol. 29. P. 58—60.

Bresters D. W. 1) On distributions connected with quadratic forms // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16, N 3. P. 563—581.

2) On the Euler—Poisson—Darboux equation // SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, N 1. P. 31—41.

3) On a generalized Euler—Poisson—Darboux equation // Ibid. 1978. Vol. 9, N 5. P. 924—934.

Bureau F. J. 1) Divergent integrals and partial differential equations // Comm. Pure and Appl. Math. 1955. Vol. 8, N 1. P. 143—202.
2) Problems and methods in partial differential equations // Ann. mat. pura ed appl. 1960. T. 51. P. 225—299.
3) Problems and methods in partial differential equations // Ibid. 1961. T. 55. P. 323.
Burkill J. C. 1) Fractional orders of integrability // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 220—226.
Burlak J. 1) A pair of dual integral equations occurring in diffraction theory // Proc. Edinburg Math. Soc. Ser. 2. 1962. Vol. 13, N 2. P. 179—187.
Busbridge I. W. 1) Dual integral equations // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44, N 2. P. 115—129.
Buschman R. G. 1) An inversion integral for a Legendre transformation // Amer. Math. Month. 1962. Vol. 69, N 4. P. 288—289.
2) An inversion integral // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13, N 5. P. 675—677.
3) An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Rev. 1963. Vol. 5, N 3. P. 232—233.
4) Convolution equations with generalized Laguerre polynomial kernels // Ibid. 1964. Vol. 6, N 2. P. 166—167.
5) Fractional integration // Math. Japon. 1964. Vol. 9. J. 99—106.
Buschman R. G., Srivastava H. M. 1) Inversion formulas for the integral transformation with the H-function as kernel // Indian J. Pure and Appl. Math. 1975. Vol. 6, N 6. P. 583—589.
Butzer P. L., Berens H. 1) Semi-groups of operators and approximation. Die Grund. Math. Wiss. New York: Springer, 1967. Bd. 145. 321 S.
Butzer P. L., Nessel R. J. 1) Fourier Analysis and Approximation. Vol. 1. One-dimensional theory. Basel: Birkhäuser, 1971. 553 p.
Butzer P. L., Stens R. L. 1) The operational properties of the Chebyshev transform. II. Fractional derivatives // Теория приближения функций. М.: Наука, 1977. С. 49—61.
Butzer P. L., Trebels W. 1) Hilbert transforms, fractional integration and differentiation // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, N 1. P. 106—110.
2) Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation. Köln-Opladen: Westdeutscher Verl., 1968. 82 S.
Butzer P. L., Westphal U. 1) An access to fractional differentiation via fractional difference quotients // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 116—145.
Butzer P. L., Dyckhoff H., Görlich E., Stens R. L. 1) Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. 1977. Vol. 29, N 4. P. 781—793.
Calderon A. P. 1) Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions // Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I. 1961. Vol. 4. P. 33—49.
Campos L. M. B. C. 1) On a concept of derivative of complex order with applications to special functions // IMA J. Appl. Math. 1984. Vol. 33, N 2. P. 109—133.
Carleman T. 1) Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen // Math. Z. 1922. Bd 15. S. 111—120.
2) L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent. Almqvist and Wiksells Boktyckere, 1944. 119 p.
Cartwright D. I., McMullen J. R. 1) A note on the fractional calculus // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1978. Vol. 21, N 1. P. 79—80.
Cayley A. 1) Note on Riemann's paper «Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation», Werke, p. 331—344 // Math. Ann. 1880. Bd 16. S. 81—82.
Center R. W. 1) On the value of $(d/dx)^{\theta} x^{\theta}$ when θ is a positive proper fraction // Cambridge and Dublin Math. J. 1848. Vol. 3. P. 163—169.
2) On differentiation with fractional indices, and on general differentiation // Ibid. 1848. Vol. 3. P. 274—285.
3) On differentiation with fractional indices, and on general differentiation. II. On general differentiation // Ibid. 1849. Vol. 4. P. 21—26.
4) On the symbolical value of the integral $\int x^{-1} dx$ // Ibid. 1849. Vol. 4. P. 261—264.
Chan C. K., Lu P. 1) On the stability of the solution of Abel's integral equation // J. Phys. A: Math. and Gen. 1981. Vol. 14, N 3. P. 575—578.
Chandrasekharan K., Minakshisundaram S. 1) Typical means. Tata institute Monographs. I. Oxford Univ. Press, 1952. 142 p.
Chanillo S. 1) Hypersingular integrals and parabolic potentials // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 267, N 2. P. 531—547.
2) A note on commutators // Indiana Univ. Math. J. 1982. Vol. 31, N 1. P. 7—16.
Chen Y. W. 1) Hoëlder continuity and initial value problems of mixed type differential equations // Comm. Math. Helv. 1959. Vol. 33, N 4. P. 296—321.
2) Entire solutions of a class of differential equations of mixed type // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14, N 3. P. 229—255.
Cheng H. 1) On mixed problem for nonhomogeneous Euler—Poisson—Darboux equation // J. of Hangzhou Univ. 1982. Vol. 9, N 1, P. 67—73.
Choudhary B. 1) An extension of Abel's integral equation // J. Math. Anal. and Appl. 1973. Vol. 44, N 1. P. 113—130.
Chrysovergis A. 1) Some remarks on Talenti's semigroup // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, N 2. P. 147—150.

Civin P. 1) Inequalities for trigonometric integrals. Preliminary report // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 46, N 5. P. 410.
2) Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, N 4. P. 656—665.
Clements D. L., Love E. R. 1) Potential problems involving an annulus // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1974. Vol. 76, N 1. P. 313—325.
Colzani L. 1) Hardy spaces on unit spheres // Boll. Unione mat. ital. 1985. Vol. 64, N 1. P. 219—244.
Conlan J., Koh E. L. 1) A fractional differentiation theorem for the Laplace transform // Canad. Math. Bull. 1975. Vol. 18, N 4. P. 605—606.
Cooke J. C. 1) A solution of Tranter's dual integral equations problem // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1956. Vol. 9, N 1. P. 103—110.
2) The solution of triple integral equations in operational form // Ibid. 1965. Vol. 18, N 1. P. 57—72.
3) The solution of triple and quadruple integral equations and Fourier—Bessel series // Ibid. 1972. Vol. 25, N 2. P. 247—263.
Copson E. T. 1) Some applications of Marsel Riesz's integrals of fractional order // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1943. Vol. A61. P. 260—272.
2) On the Riesz—Riemann—Liouville integral // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1947. Vol. 8, N 2. P. 25—36.
3) On the problem of the electrified disc // Ibid. N 3. P. 14—19.
4) Some applications of Riesz's method // Proc. Conf. on Different. equat. 1955. Univ. Maryland: Book Stora, 1956. P. 107—113.
5) On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1958. Vol. 1, N 4. P. 349—356.
6) On certain dual integral equations // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1961. Vol. 5, N 1. P. 21—24.
Copson E. T., Erdelyi A. 1) On a partial differential equation with two singular lines // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1958. Vol. 2, N 1. P. 76—86.
Cossar J. 1) A theorem on Cesàro summability // J. London Math. Soc. 1941. Vol. 16. P. 56—68.
Cotlar M., Panzone R. 1) Generalized potential operators // Rev. Union Mat. Argentina. 1960. Vol. 19, N 1. P. 3—41.
Darboux G. 1) Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applicattions géométriques du calcul infinitésimal. Paris: Gauthier-Villars. 1915. Vol. 2.
Davis H. T. 1) Fractional operations as applied to a class of Volterra integral equations // Amer. J. Math. 1924. Vol. 46. P. 95—109.
2) The applications of fractional operators to functional equations // Ibid. 1927. Vol. 49, N 1. P. 123—142.
3) The Theory of Linear Operators. Bloomington, Indiana: Principia Press, 1936. 617 p.
4) A survey of methods for the inversion of integrals of Volterra type // Indiana Univ. Studies. Study N 76, 77. 1927. 72 P.
Delerue P. 1) Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesséliennes // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1953. T. 67, N 2. P. 83—104.
Diaz J. B., Osler T. J. 1) Differences of fractional order // Math. Comput. 1974. Vol. 28, N 125. P. 185—202.
Diaz J. B., Weinberger H. F. 1) A solution of the singular initial value problem for the Euler—Poisson—Darboux equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4, N 5. P. 703—715.
Dimovski I. H. 1) Convolution representation of the commutant of Gel'fond—Leont'ev integration operator // Докл. Болг. АН. 1981. Т. 34, № 12. С. 1643—1646.
2) Representation formulas for the commutants of integer powers of Gelfond—Leont'ev integration operators // Математика и математическое образование: Докл. II конф. Союзе матем. България, Слънчев бряг, 6—9 апр., 1982 г. София: Изд-во Болг. АН, 1982. С. 166—172.
3) Convolutional calculus. Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1982. Vol. 2. 198 p.
Dimovski I. H., Kiryakova V. S. 1) Convolution and commutant of Gelfond—Leontiev operator of integration // Конструктивная теория функций'81: Тр. Междунар. конф., Варна, 1—5 июня 1981 г. София: Изд-во Болг. АН, 1983. С. 288—294.
2) Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function // Proc. Intern. Conf. on Complex Analysis and Appl. '83, Varna, May 2—10, 1983. Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1985. P. 45—66.
Dixit L. A. 1) An integral equation involving generalized Rice's polynomials // Proc. Indian Acad. Sci. 1977. Vol. A85, N 5. P. 379—382.
2) An integral equation involving ${}_4F_3$ in the kernel // Indian J. Pure and Appl. Math. 1978. Vol. 9, N 7. P. 739—745.
Doetsch G. 1) Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin: Springer, 1937. 436 S.
Domingues A. G., Trione S. E. 1) On the Laplace transforms of retarded, Lorentz-invariant functions // Adv. Math. 1979. Vol. 31, N 1. P. 51—62.
Drianov D. P. 1) Average modulus of smoothness of fractional index and fractional order derivatives // Докл. Болг. АН. 1982. Т. 35, № 12. С. 1635—1637.

2) Average modulus of smoothness of fractional index and applications // Ibid. 1983. T. 36, N 1. C. 41—43.

Dwivedi A. P., Trivedi T. N. 1) Triple and quadruple integral equations occurring in diffraction theory // Proc. Indian Acad. Sci. 1977. Vol. A85, N 4. P. 179—185.

Edels H., Hearne K., Young A. 1) Numerical solutions of the Abel integral equation // J. Math. and Phys. 1962. Vol. 41, N 1. P. 62—75.

Eggermont P. P. B. 1) A new analysis of the trapezoidal-discretization method for the numerical solution of Abel-type integral equations // J. Integr. Equat. 1981. Vol. 3, N 4. P. 317—332.

Elrod H. G., Jr. 1) Note on a solution of the telegraphist's equation applicable to supersonic shear flow // J. Math. and Phys. 1958. Vol. 37, N 1. P. 66—68.

Erdelyi A. 1) Note on the transformation of Eulerian hypergeometric integrals // Quart. J. Math. Oxford ser. 1939. Vol. 10. P. 129—134.

2) Transformation of hypergeometric integrals by means of fractional integration by parts // Ibid. 1939. Vol. 10. P. 176—189.

3) On some biorthogonal sets of functions // Ibid. 1940. Vol. 11, N 42. P. 111—123.

4) On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms // Ibid. 1940. Vol. 11, N 44. P. 293—303.

5) A class of hypergeometric transforms // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 209—212.

6) On some functional transformations // Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn. di Torino. 1950. Vol. 10. P. 217—234.

7) An integral equation involving Legendre's polynomial // Amer. Math. Month. 1963. Vol. 70, N 6. P. 651—652.

8) Some applications of fractional integration // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note N 316, D1-82-0286, 1963. 23 p.

9) An integral equation involving Legendre functions // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1964. Vol. 12, N 1. P. 15—30.

10) An application of fractional integrals // J. Analyse Math. 1965. Vol. 14. P. 113—126.

11) Axially symmetric potentials and fractional integration // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1965. Vol. 13, N 1. P. 216—228.

12) Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. 1967. Vol. 8, N 1. P. 50—54.

13) Some dual integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16, N 6. P. 1338—1340.

14) On the Euler—Poisson—Darboux equation // J. Analyse Math. 1970. Vol. 23. P. 89—102.

15) Fractional integrals of generalized functions // J. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 14, N 1. P. 30—37.

16) Asymptotic evaluation of integrals involving a fractional derivative // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, N 2. P. 159—171.

17) Fractional integrals of generalized functions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 151—170.

Erdelyi A., Kober H. 1) Some remarks on Hankel transforms // Quart. J. Math. Oxford ser. 1940. Vol. 11, N 43. P. 212—221.

Erdelyi A., McBride A. C. 1) Fractional integrals of distributions // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 4. P. 547—557.

Estrada R., Kanwal R. P. 1) Distributional solutions of singular integral equations // Canad. J. Math. 1962. Vol. 14, N 4. P. 685—693.

Estrada R., Kanwal R. P. 1) Distributional solutions of singular integral equations // J. Integr. Equat. 1985. Vol. 8, N 1. P. 41—85.

Exton H. 1) *q*-Hypergeometric Functions and Applications. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1983. 347 p.

Fabian W. 1) Fractional calculus // J. Math. and Phys. 1936. Vol. 15. P. 83—89.

2) Expansions by the fractional calculus // Quart. J. Math. Oxford ser. 1936. Vol. 7. P. 252—255.

3) The Riemann surfaces of a function and its fractional integral // Edinburgh Math. Notes. 1954. N 39. P. 14—16.

Fattorini H. O. 1) A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions // Pacif. J. Math. 1983. Vol. 109, N 2. P. 335—347.

Favard J. 1) Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. 1937. T. 61. P. 209—224, 243—256.

Feller W. 1) On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semigroups, generated by them // Comm. Sémin. Math. L'Univ. Lund (Medd. Lunds Univ. Mat. Sémin.). Tome suppl. 1952. Vol. 21. P. 72—81.

Fenyö S., Stolle H. W. 1) Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen. Berlin: Dtsch. Verl. Wiss., 1983. Bd 3. 548 S.

Ferrar W. L. 1) Generalised derivatives and integrals // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1927—1928. Vol. 48, N 1—2. P. 92—105.

Fettis H. E. 1) On the numerical solution of equations of the Abel type // Math. Comput. 1964. Vol. 18, N 84. P. 491—496.

Fisher M. J. 1) Singular integrals and fractional powers of operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 161, N 2. P. 307—326.
2) Imaginary powers of the indefinite integrals // Amer. J. Math. 1971. Vol. 93, N 2. P. 317—328.
3) Purely imaginary powers of certain differential operators. I // Ibid. 1971. Vol. 93, N 2. P. 452—478.
4) Purely imaginary powers of certain differential operators. II // Ibid. 1972. Vol. 94, N 3. P. 835—860.
5) Fractional powers of operators and Bessel potentials on Hilbert space // Stud. Math. 1972. Vol. 41, N 2. P. 191—206.
6) Applications of the theory of imaginary powers of operators // Rocky Mountain. J. Math. 1972. Vol. 2, N 3. P. 465—511.
7) Some generalizations of the hypersingular integral operators // Stud. Math. 1973. Vol. 47, N 2. P. 95—121.
Flett T. M. 1) On the absolute summability of a Fourier series and its conjugate series // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1958. Vol. 8, N 30. P. 258—311.
2) Some more theorems concerning the absolute summability of Fourier series and power series // Ibid. 1958. Vol. 8, N 31. P. 357—387.
3) A note on some inequalities // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1958. Vol. 4, N 1. P. 7—15.
4) Some theorems on fractional integrals // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1959. Vol. 55, N 1. P. 31—50.
5) Mean values of power series // Pacif. J. Math. 1968. Vol. 25, N 3. P. 463—494.
6) Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces // Proc. London Math. Soc. 1971. Vol. 22, N 3. P. 385—451.
7) The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities // J. Math. Anal. and Appl. 1972. Vol. 38, N 3. P. 746—765.
8) Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc // Ibid. 1972. Vol. 39, N 1. P. 125—158.
Fourier J. 1) The Analytical Theory of Heat. N. Y.: Dover publ., 1955. 466 p. (First publ.: Thèorie Analytique de la Chaleur. A Paris: Chez firmin didot père et fils, 1822.)
Fox C. 1) An application of fractional integration to chain transform theory // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9, N 6. P. 968—973.
2) The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 98, N 3. P. 395—429.
3) Integral transforms based upon fractional integration // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1963. Vol. 59, N 1. P. 63—71.
4) A formal solution of certain dual integral equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 119, N 3. P. 389—398.
5) An inversion formula for the kernel $K_\nu(x)$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1965. Vol. 61, N 3. P. 457—467.
6) Solving integral equations by L and L^{-1} operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 29, N 2. P. 299—306.
7) Applications of Laplace transforms and their inverses // Ibid. 1972. Vol. 35, N 1. P. 193—200.
Fremberg N. E. 1) Proof of a theorem of M. Riesz concerning a generalization of the Riemann—Liouville integral // Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förhandl. 1945. Bd 15, N 27. S. 265—276.
2) A study of generalized hyperbolic potentials with some physical applications // Comm. Sémin. Math. L' Univ. Lund. 1946. Vol. 7. P. 1—100.
3) Some applications of the Riesz potential to the theory of the electromagnetic field and the meson field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1946. Vol. 188. P. 18—31.
Frie W. 1) Zur Auswertung der Abelschen Integralgleichung // Ann. Phys. DDR. 1963. Bd 10, N 5—6. S. 332—339.
Friedlander F. G., Heins A. E. 1) On the representation theorems of Poisson, Riemann and Volterra for the Euler—Poisson—Darboux equation // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1969. Vol. 33, N 3. P. 219—230.
Frostman O. 1) Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications a la théorie des fonctions // Medd. Lunds Univ. Mat. Sémin. 1935. Vol. 3. P. 1—118.
Fujiwara M. 1) On the integration and differentiation of an arbitrary order // Tôhoku Math. J. 1933. Vol. 37. P. 110—121.
Gaer M. C. 1) Fractional derivatives and entire functions: Ph. Dr thes. Univ. of Illinois. Urbana, Illinois, 1968. 91 p.
Gaer M. C., Rubel L. A. 1) The fractional derivative via entire functions // J. Math. Anal. and Appl. 1971. Vol. 34, N 2. P. 289—301.
2) The fractional derivative and entire functions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 171—206.
Garding L. 1) The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals // Ann. Math. Ser. 2. 1947. Vol. 48, N 4. P. 785—826.
Gatto A. E., Gutierrez C. E., Wheeden R. L. 1) On weighted fractional integrals // Proc. Conf. on harmonic analysis in honour of A. Zygmund. Wadswath Intern. Group, march 23—28, 1981. Belmont, Calif., Univ. of Chicago. 1983. Vol. 1. P. 124—137.

2) Fractional integrals on weighted H^p spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 289, N 2. P. 575—589.

Gearhart L. 1) The Weyl semigroup and left translation invariant subspaces // J. Math. Anal. and Appl. 1979. Vol. 67, N 1. P. 75—91.

Gilbert R. P. 1) On the singularities of generalized axially symmetric potentials // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1960. Vol. 6, N 2. P. 171—176.

2) Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. N. Y.; London: Acad. Press, 1969. 311 p.

Gomes M. I., Pestana D. D. 1) The use of fractional calculus in probability // Portugal. Math. 1978. Vol. 37, N 3—4. P. 259—271.

Gopala Rao V. R. 1) A characterization of parabolic function spaces // Amer. J. Math. 1977. Vol. 99, N 5. P. 985—993.

2) Parabolic function spaces with mixed norm // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 246, N 2. P. 451—461.

Gordon A. N. 1) Dual integral equations // J. London Math. Soc. 1954. Vol. 29, N 3. P. 360—363.

Gorenflo R. 1) Lösung einer Abelschen Integralgleichung bei Anwesenheit von störungen mittels quadratischer optimierung // Z. angew. Math. und Mech. 1965. Bd 45. S.-H. S. T33—T35.

Greatheed S. S. 1) On general differentiation. Nos 1 and 2 // Cambridge Math. J. 1839. Vol. 1. P. 11—21, 109—117.

2) On the expansion of a function of a binomial // Ibid. P. 67—74.

Grünwald A. K. 1) Uber «begrenzte» Derivationen und deren Anwendung // Z. angew. Math. und Phys. 1867. Bd 12. S. 441—480.

Gupta H. L., Rusia K. C. 1) Inversion of an integral equation involving generalized Laguerre polynomial // Ganita. 1974. Vol. 25, N 1. P. 45—54.

Gupta K. C., Mittal P. K. 1) The H-function transform // J. Austral. Math. Soc. 1970. Vol. 11, N 2. P. 142—148.

Gupta S. D. 1) On certain integral equations // Math. Balkan. 1973. Vol. 3. P. 115—117.

Gupta Sulaxana K. 1) On the strong Riesz means of Fourier series // Indian J. Math. 1967. Vol. 9, N 1. P. 95—107.

Gwilliam A. E. 1) On Lipschitz conditions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1936. Vol. 40. P. 353—364.

Habibullah G. M. 1) Some integral operators with hypergeometric functions as kernels // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1977. T. 21, N 3/4. P. 293—300.

2) An integral operator involving a Legendre function // J. Natur. Sci. and Math. 1981. Vol. 21, N 2. P. 147—153.

Hadamard J. 1) Essai sur l'etude des fonctions données par leur développement de Taylor // J. math. pures et appl. Ser. 4. 1892. T. 8. P. 101—186.

Hall N. S., Quinn D. W., Weinacht R. J. 1) Poisson integral formulas in generalized bi-axially symmetric potential theory // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, N 1. P. 111—118.

Handelsman R. A., Lew J. S. 1) Asymptotic expansion of a class of integral transforms via Mellin transforms // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1969. Vol. 35, N 5. P. 382—396.

2) Asymptotic expansion of a class of integral transforms with algebraically dominated kernels // J. Math. Anal. and Appl. 1971. Vol. 35, N 2. P. 405—433.

Handelsman R. A., Olmstead W. E. 1) Asymptotic solution to a class of nonlinear Volterra integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1972. Vol. 22, N 3. P. 373—384.

Harboure E., Macias R. A., Segovia C. 1) Boundedness of fractional operators on L^p spaces with different weights // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 285, N 2. P. 629—647.

2) A two weight inequality for the fractional integral when $p=n/\alpha$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 90, N 4. P. 555—562.

Hardy G. H. 1) Notes on some points in the integral calculus. XLVIII. On some properties of integrals of fractional order // Messenger. Math. 1917. Vol. 47, N 10. P. 145—150.

2) Notes on some points in the integral calculus. LV. On the integration of Fourier series // Ibid. 1922. Vol. 51, N 12. P. 186—192.

Hardy G. H., Landau E., Littlewood J. E. 1) Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions // Math. Z. 1935. Bd 39, N 5. S. 677—695.

Hardy G. H., Littlewood J. E. 1) Some properties of fractional integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1925. Vol. 24. P. 37—41.

2) Notes on the theory of series (V). On Parseval's theorem // Ibid. 1926. Vol. 26. P. 287—294.

3) Some properties of fractional integrals. I // Math. Z. 1928. Bd 27, N 4. S. 565—606.

4) A convergence criterion for Fourier series // Ibid. 1928. Bd 28, N 4. S. 612—634.

5) Some properties of fractional integrals. II // Ibid. 1932. Bd 34. S. 403—439.

6) Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series // Duke Math. J. 1936. Vol. 2, N 2. P. 354—382.

7) Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions // Quart. J. Math. Oxford ser. 1941. Vol. 12, N 48. P. 221—256.

Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. 1) The maximum of a certain bilinear form // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1926. Vol. 25. P. 265—282.

Hardy G. H., Riesz M. 1) The general theory of Dirichlet's series // Cambridge Univ. Press. 1915. N 18. 78 p.

Hardy G. H., Rogosinski W. W. 1) Notes on Fourier series (I). On sine series with positive coefficients // J. London Math. Soc. 1943. Vol. 18. P. 50—57.

Hardy G. H., Titchmarsh E. C. 1) An integral equation // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1932. Vol. 28, N 2. P. 165—173.

Hedberg L. I. 1) On certain convolution inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36, N 2. P. 505—510.

Heinig H. P. 1) Weighted norm inequalities for classes of operators // Indiana Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, N 4. P. 573—582.

2) Estimates for operators in mixed weighted L^p-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287, N 2. P. 483—493.

Helgason S. 1) The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds // Acta Math. 1965. Vol. 113, N 3—4. P. 153—180.

Henrici P. 1) Zur Funktionentheorie der Wellengleichung mit Anwendungen auf spezielle Reihen und Integrale mit Besselschen, Whittakerschen und Mathieuschen Funktionen // Comm. Math. Helv. 1957. Vol. 27, N 3—4. P. 235—293.

Herson D. L., Heywood P. 1) On the range of some fractional integrals // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1974. Vol. 8, N 4. P. 607—614.

Herz C. S. 1) Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms // J. Math. and Mech. 1968. Vol. 18, N 4. P. 283—323.

Heywood P. 1) On a modification of the Hilbert transform // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1967. Vol. 42, N 4. P. 641—645.

2) On the inversion of fractional integrals // Ibid. 1971. Vol. 3, N 3. P. 531—538.

3) Improved boundedness conditions for Lowndes' operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1975. Vol. A73, N 19. P. 291—299.

Heywood P., Rooney P. G. 1) On the boundedness of Lowndes' operators // J. London Math. Soc. 1975. Vol. 10, N 2. P. 241—248.

Higgins T. P. 1) An inversion integral for a Gegenbauer transformation // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1963. Vol. 11, N 4. P. 886—893.

2) An inversion for a Jacobi integral transformation // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. D1-82-0250. 1963.

3) A hypergeometric function transform // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1964. Vol. 12, N 3. P. 601—612.

4) The Rodrigues operator transform, Preliminary report // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note N 437, D1-82-0492. Seattle, Washington, 1965. 125 p.

5) The Rodrigues operator transform. Tables of generalized Rodrigues formulas // Ibid. N 438, D1-42-0493. Seattle, Washington, 1965. 55 p.

6) The use of fractional integral operators for solving nonhomogeneous differential equations // Ibid. N 541, D1-82-0677. Seattle, Washington, 1967. 19 p.

Hille E. 1) Notes on linear transformations. II. Analyticity of semi-groups // Ann. Math. 1939. Vol. 40, N 1. P. 1—47.

2) Remarks on ergodic theorems // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 57, N 2. P. 246—269.

Hille E., Tamarkin J. D. 1) On the theory of linear integral equations // Ann. Math. 1930. Vol. 31. P. 479—528.

Hirsch F. 1) Extension des proprietés des puissances fractionnaires // Lect. Notes Math. 1976. Vol. 563. P. 100—120.

Hirshman I. I. 1) Fractional integration // Amer. J. Math. 1953. Vol. 75, N 3—4. P. 531—546.

Holmgren Hj. 1) Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst // Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Stockholm. 1865—1866. Bd 5, N 11. S. 1—83.

2) Sur l'intégration de l'équation différentielle $(a_2+b_2x+c_2x^2)d^2y/dx^2+(a_1+b_1x)dy/dx+a_0y=0$ // Ibid. 1867. Bd 7, N 9. S. 1—58.

Hövel H. W., Westphal U. 1) Fractional powers of closed operators // Stud. Math. 1972. Vol. 42, N 2. P. 177—194.

Huber A. 1) On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials // Ann. Math. 1954. Vol. 60, N 2. P. 351—358.

Hughes R. J. 1) On fractional integrals and derivatives in L^p // Indiana Univ. Math. J. 1977. Vol. 26, N 2. P. 325—328.

Humbert P., Agarwal R. P. 1) Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations // Bull. Sci. Math. 1953. T. 77, N 10. P. 180—185.

Isaacs G. L. 1) M. Riesz's mean value theorem for infinite integrals // J. London Math. Soc. 1953. Vol. 28, N 110. P. 171—176.

2) The iteration formula for inverted fractional integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1961. Vol. 11, N 42. P. 213—238.

Izumi S. 1) Some trigonometrical series. III // J. Math. Tokyo. 1953. Vol. 1, N 2—3. P. 128—136.

Izumi S., Sato M. 1) Some trigonometrical series. XVII // Proc. Japan Acad. 1955. Vol. 31, N 10. P. 659—664.

Jackson F. H. 1) On q-definite integrals // Quart. J. Pure Appl. Math. 1910. Vol. 41, P. 193—203.

2) Basic integration // Quart. J. Math. Oxford ser. 1951. Vol. 2, N 5. P. 1—16.

Jain N. C. 1) A relation between Mellin transform and Weyl (fractional) integral of two variables // Ann. polon. math. 1970. Vol. 23, N 3. P. 255—257.

Joachimsthal F. 1) Ueber ein Attractionsproblem // J. für reine und angew. Math. 1861. Bd 58. S. 135—137.

Johnson R. 1) Temperatures, Riesz potentials and the Lipschitz spaces of Herz // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 27, N 2. P. 290—316.

Jones B. F., Jr. 1) Lipschitz spaces and the heat equation // J. Math. and Mech. 1968. Vol. 18, N 5. P. 379—409.

Jones D. S. 1) A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disk // Comm. Pure and Appl. Math. 1956. Vol. 9, N 4. P. 713—746.

2) A modified Hilbert transform // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1970. Vol. A69, N 1. P. 45—76.

Joshi B. K. 1) An integral equation involving Whittaker's function // Math. Student. 1973. Vol. 41, N 4. P. 407—408.

Joshi C. M. 1) Fractional integration and integral representations of certain generalized hypergeometric functions // Ganita. 1966. Vol. 17, N 2. P. 79—88.

Joshi J. M. Ch. 1) Fractional integration and generalized Hankel transform // Agra Univ. J. Res. (sci.). 1961. Vol. 10, N 2. P. 293—300.

Juberg R. K. 1) Finite Hilbert transforms in L^p // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78, N 3. P. 435—438.

2) On the boundedness of certain singular integral operators // Hilbert space operators and operator algebras: Proc. Intern. Conf. Tihany, 1970. Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai. Amsterdam: North-Holland Publ., 1972. Vol. 5. P. 305—318.

3) The spectra for operators of a Basic collection // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 79, N 4. P. 821—824.

Kalia R. N. 1) Theorems on a new class of integral transforms. III // Acta Mexic. cienc. y tecnol. 1970. Vol. 4, N 1. P. 1—5.

Kalisch G. K. 1) On fractional integrals of pure imaginary order in L_p // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18, N 1. P. 136—139.

2) On the similarity of certain operators. Hilbert space operators and operator algebras // Proc. Intern. Conf. Tihany, 1970. Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai. Amsterdam: North-Holland Publ., 1972. Vol. 5. P. 333—346.

Kalla S. L. 1) Some theorems on fractional integration // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1966. Vol. A36, N 4. P. 1007—1012.

2) On the solution of certain integral equations of convolution type // Acta Mexic. cienc. y tecnol. 1968. Vol. 2, N 2. P. 85—87.

3) Fractional integration operators involving generalized hypergeometric functions. II // Ibid. 1969. Vol. 3, N 1. P. 1—5.

4) Integral operators involving Fox's H-function // Ibid. 1969. Vol. 3, N 3. P. 117—122.

5) Some theorems on fractional integration. II // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1969. Vol. A39, N 1. P. 49—56.

6) Fractional integration operators involving generalized hypergeometric functions // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1970. Vol. A20, N 1—2. P. 93—100.

7) On operators of fractional integration // Math. Notae. 1970—1971. Vol. 22, N 1—2. P. 89—93.

8) Some generalized theorems of fractional integration // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1971. Vol. A21, N 1—2. P. 235—239.

9) On the solution of an integral equation involving a kernel of Mellin—Barnes type integral // Kyungpook Math. J. 1972. Vol. 12, N 1. P. 93—101.

10) On an integral equation of electrostatic problems // Metn. J. Pure and Appl. Sci. 1975. Vol. 8, N 3. P. 291—294.

11) On operators of fractional integration. II // Math. Notae. 1976. Vol. 25. P. 29—35.

12) Operators of fractional integration // Lect. Notes Math. 1980. N 798. P. 258—280.

Kalla S. L., Saxena R. K. 1) Integral operators involving hypergeometric functions // Math. Z. 1969. Bd 108, N 3. S. 231—234.

2) Integral operators involving hypergeometric functions. II // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1974. Vol. A24. P. 31—36.

Kato T. 1) Perturbation theory for nullity, deficiencies and other quantities of linear operators // J. Analyse Math. 1958. Vol. 6, N 2. P. 261—322.

Katsaras A., Liu D. 1) Sur les dérivées fractionnaires des fonctions périodiques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1975. T. 281, N 9. P. A265—A268.

Kaul C. L. 1) On fractional integration operators of functions of two variables // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1971. Vol. A41, N 3—4. P. 233—240.

Kelland P. 1) On general differentiation. I and II // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1840. Vol. 14. P. 567—603, 604—618.

2) On general differentiation. III // Ibid. 1849. Vol. 16, N 2—3. P. 241—303.

3) On a process in the differential calculus, and its application to the solution of certain differential equations // Ibid. 1850—1951. Vol. 20, N 1. P. 39—55.

Kesarwani R. N. (Narain Roop). 1) A Fourier kernel // Math. Z. 1959. Bd 70, N 4, S. 297—299.

2) The G-functions as unsymmetrical Fourier kernel. I // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13, N 6. P. 950—959.

3) The G-function as unsymmetrical Fourier kernels. II // Ibid. 1963. Vol. 14, N 1. P. 18—28.

4) The G-function as unsymmetrical Fourier kernels. III // Ibid. 1963. Vol. 14, N 1. P. 271—277.
5) A pair of unsymmetrical Fourier kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 115, N 3. P. 356—369.
6) On an integral transform involving G-functions // SIAM J. Appl. Math. 1971. Vol. 20, N 1. P. 93—98.

Khan M. A. 1) An algebraic study of certain q-fractional integrals and q-derivatives // Math. Student. 1972 (1974). Vol. 40. P. 442—446.

Khandekar P. R. 1) On a convolution transform involving generalized Laguerre polynomial as its kernel // J. math. pures et appl. 1965. T. 44, N 2. P. 195—197.

Kim Hong Oh. 1) Derivatives of Blaschke products // Pacif. J. Math. 1984. Vol. 114, N 1. P. 175—190.
2) On a theorem of Hardy and Littlewood on the polydisc // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 97, N 3. P. 403—409.

King L. V. 1) On the acoustic radiation pressure on circular discs: Inertia and diffraction corrections // Proc. Roy Soc. London. Ser. A. 1935. Vol. 153, N A878. P. 1—16.

Kober H. 1) On fractional integrals and derivatives // Quart. J. Math. Oxford ser. 1940. Vol. 11, N 43. P. 193—211.
2) On a theorem of Schur and on fractional integrals of purely imaginary order // Trans. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 50, N 1. P. 160—174.
3) On Dirichlet's singular integral and Fourier transforms // Quart. J. Math. Oxford ser. 1941. Vol. 12, N 46. P. 78—85.
4) On certain linear operations and relations between them // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1961. Vol. 11, N 43. P. 434—456.
5) A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations // J. London Math. Soc. 1967. Vol. 42, N 1. P. 42—50.
6) The extended Weyl integral and related operations // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 19, N 2. P. 285—291.
7) New properties of the Weyl extended integral // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1970. Vol. 21, N 3. P. 557—575.

Koeller R. C. 1) Polynomial operators, Stiltjes convolution and fractional calculus in hereditary mechanics // Acta Mechanica. 1986. Vol. 58. P. 251—264.

Koh E. L., Conlan J. 1) Fractional derivatives, Laplace transforms and association of variables // Int. J. Syst. Sci. 1976. Vol. 7, N 5. P. 591—596.

Koizumi S. 1) On fractional integration // Tôhoku Math. J. 1957. Vol. 9, N 3. P. 298—306.

Komatsu H. 1) Fractional powers of operators. I // Pacif. J. Math. 1966. Vol. 19, N 2. P. 285—346.
2) Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces // Ibid. 1967. Vol. 21, N 1. P. 89—111.
3) Fractional powers of operators. III. Negative powers // J. Math. Soc. Japon. 1969. Vol. 21, N 2. P. 205—220.
4) Fractional powers of operators. IV. Potential operators // Ibid. P. 221—228.
5) Generalized Poisson integrals and regularity of functions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 232—248.

Komatu Y. 1) On fractional angular derivative // Ködai Math. Sem. Rep. 1961. Vol. 13, N 4. P. 249—254.
2) On mean distortion for analytic functions with positive real part in a circle // Nagoya Math. J. 1967. Vol. 29. P. 221—228.
3) On a one-parameter additive family of operator defined on analytic functions regular in the unit disc // Bull. Fac. Sci. Engng. Chuo Univ. 1979. Vol. 22. P. 1—22.
4) On the range of analytic functions related to Caratheodory class // Ann. polon. Math. 1985. Vol. 46. P. 141—145.

Koschmieder L. 1) Funktionales Rechnen mit allgemeinen Ableitungen // Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1949. Bd 86, N 13. S. 241—244.
2) Verallgemeinerte Ableitungen und hypergeometrische Funktionen // Monatsh. Math. 1949. Vol. 53. P. 169—183.

Kostitzin V. 1) Sur une généralisation de l'équation intégrale d'Abel // C. R. Acad. Sci. Paris. 1947. T. 224, N 12. P. 885—887.

Kralik D. 1) Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktiontheorie // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1956. Vol. 7, N 1. P. 49—64.

Krantz S. G. 1) Fractional integration on Hardy spaces // Stud. Math. 1982. Vol. 73, N 2. P. 87—94.

Krug A. 1) Theorie der Derivationen // Akad. Wiss., Wien, Denkenschriften. Math.-Natur. Kl. 1890. Bd 57. S. 151—228.

Kumbhat R. K. 1) An inversion formula for an integral transform // Indian J. Pure and Appl. Math. 1976. Vol. 7, N 4. P. 368—375.

Kuttner B. 1) Some theorems on fractional derivatives // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1953. Vol. 3, N 12. P. 480—497.

Kuttner B., Tripathy N. 1) An inclusion theorem for Hausdorff summability method associated with fractional integrals // Quart. J. Math. Oxford ser. 1971. Vol. 22, N 86. P. 299—308.

Lacroix S. F. 1) Traité du calcul différentibl et de calcul intégral. 3 ed. Paris: Courcier, 1820.

Lamb W. 1) Fractional powers of operators defined on a Fréchet space // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1984. Vol. 27, N 2. P. 165—180.

2) A distributional theory of fractional calculus // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1985. Vol. A99, N 3—4. P. 347—357.

3) Fractional calculus via fractional powers of operators // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 49—62.

Laplace P. S. 1) Théorie analytique des probabilites. Paris: Courcier, 1812.

Laurent H. 1) Sur le calcul des dérivées a indices quelconques // Nouv. Ann. Math. 1884. Vol. 3, N 3. P. 240—252.

Lavoie J. L., Osler T. J., Tremblay R. 1) Fractional derivatives and special functions // SIAM Rev. 1976. Vol. 18, N 2. P. 240—268.

Lavoie J. L., Tremblay R., Osler T. J. 1) Fundamental properties of fractional derivatives via Pochhammer integrals // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 323—356.

Leibniz G. W. 1) Leibniz an de l'Hospital (Letter from Hannover, Germany, September 30, 1695) // Oeuvres Mathématiques de Leibniz. Correspondance de Leibniz avec Huygens, van Zulichem et le Marquis de L'Hospital. Paris: Libr. de A. Franck, ed. 1853. P. 1. Vol. 2. P. 297—302.

2) Leibniz an Wallis (Letter, may 28, 1697) // Leibnizens Mathematische Schriften. Hildesheim: Olms Verl., 1962. Bd 4. P. 23—29.

Leray J. 1) Hyperbolic differential equations. Princeton: Inst. Advanced Study, 1953. 238 p.

Lewy H. 1) A theory of terminals and reflection laws of partial differential equations // ONR Tech. Rep. N 4. Stanford Univ., 1952.

2) On the reflection laws of second order partial differential equations in two independent variables // Bull. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 65, N 2. P. 37—58.

Lions J. L. 1) Sur l'existence de solutions des équations de Navier—Stokes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. T. 248, N 20. P. 2847—2849.

Lions J. L., Peetre J. 1) Sur une classe d'espaces d'interpolation // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. Vol. 19. P. 5—68.

Liouville J. 1) Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions // J. l'Ecole Roy. Polytéchn. 1832. T. 13, sect. 21. P. 1—69.

2) Mémoire sur le calcul des différentielles a indices quelconques // Ibid. P. 71—162.

3) Mémoire sur l'intégration de l'équation: $(mx^2+nx+p)d^2y/dx^2+(qx+r)dy/dx+sy=0$ à l'aide des différentielles à indices quelconques // Ibid. P. 163—186.

4) Mémoire sur le théoréme des fonctions complémentaires // J. für reine und angew. Math. 1834. Bd 11. S. 1—19.

5) Mémoire sur une formule d'analyse // Ibid. 1834. Bd 12, N 4. S. 273—287.

6) Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des differentielles à indices quelconques // Ibid. 1835. Bd 13, N 1—3. S. 219—232.

7) Mémoire sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des differentielles a indices quelconques // J. l'Ecole Roy. Polytéchn. 1835. T. 15, sect. 24. P. 17—54.

8) Mémoire sur l'intégration des équations différentielles a indices fractionnaires // Ibid. 1837. T. 15, N 55. P. 58—84.

Liverman T. P. G. 1) Generalized Functions and Direct Operational Methods. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964. Vol. 1. 338 p.

Loo C.-T. 1) Two tauberian theorems in the theory of Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 56, N 3. P. 508—518.

Love E. R. 1) Fractional integration and almost periodic functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44, N 5. P. 363—397.

2) Some integral equations involving hypergeometric functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967. Vol. 15, N 3. P. 169—198.

3) Two more hypergeometric integral equations // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. Vol. 63, N 4. P. 1055—1076.

4) Fractional derivatives of imaginary order // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1971. Vol. 3, N 2. P. 241—259.

5) Two index laws for fractional integrals and derivatives // J. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 14, N 4. P. 385—410.

6) A hypergeometric integral equation // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 272.

7) A third index law for fractional integrals and derivatives // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 63—74.

8) Inversion of the Struve transform // Ibid. P. 75—86.

9) Inequalities like Opial's inequality // Rocznik naukowo-dydaktyczny WSP w Krakowie. Pr. mat. 1985. Vol. 97, N 11. P. 109—118.

Love E. R., Young L. C. 1) In fractional integration by parts // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44. P. 1—35.

Love E. R., Prabhakar T. R., Kashyap N. K. 1) A confluent hypergeometric integral equation // Glasgow Math. J. 1982. Vol. 23, N 1. P. 31—40.

Lowengrub M. 1) Systems of Abel type integral equations // Function theoretic me-

thods in differential equations / R. P. Gilbert, R. J. Weinacht, eds. Pitman Publ., 1976. P. 277—296.

Lowengrub M., Sneddon I. N. 1) An axisymmetric boundary value problem of mixed type for a half-space // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1962. Vol. 13, N 1. P. 39—46.

2) The solution of a pair of dual integral equations // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, N 1. P. 14—18.

Lowengrub M., Walton J. 1) Systems of generalized Abel equations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, N 4. P. 794—807.

Lowndes J. S. 1) A generalisation of the Erdélyi—Kober operators // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1970. Vol. 17, N 2. P. 139—148.

2) Some triple integral equations // Pacif. J. Math. 1971. Vol. 38, N 2. P. 515—521.

3) On dual and triple integral equations involving modified Bessel functions // Appl. Anal. 1977. Vol. 6, № 4. P. 253—260.

4) Solution of an integral equation // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19, N 1. P. 69—73.

5) An application of some fractional integrals // Ibid. 1979. Vol. 20, N 1. P. 35—41.

6) The solution of some integral equations // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. Vol. 2, N 1. P. 26—33.

7) On some generalisations of the Riemann—Liouville and Weyl fractional integrals and their applications // Glasgow Math. J. 1981. Vol. 22, N 2. P. 173—180.

8) Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. Vol. 26, N 3. P. 307—311.

9) On some fractional integrals and their applications // Ibid. Ser. 2. 1985. Vol. 28, N 1. P. 97—105.

Luke Y. L. 1) The Special Functions and Their Approximations. In 2 vls. N. Y.: Acad. Press, 1969. Vol. 1. 349 p.

Lundgren T., Chiang D. 1) Solutions of a class of singular integral equations // Quart. Appl. Math. 1967. Vol. 24, N 4. P. 303—313.

Mackie A. G. 1) A class of integral equations // Amer. Math. Month. 1965. Vol. 72, N 9. P. 956—960.

Madhavi Dighe. 1) Composition of fractional integral operator and an operator with Fourier type kernel // Bul. Univ. Brasov. 1978 (1979). Vol. C20. P. 3—8.

Mainra V. P. 1) On self-reciprocal functions // Bull. Calcutta Math. Soc. 1963. Vol. 55, N 1. P. 41—49.

Manandhar R. P. 1) Fractional integrals and Meijer Bessel transform // Ranchi Univ. Math. J. 1972. Vol. 3. P. 36—43.

Mandelbrojt S. 1) Sulla generalizzazione del calcolo delle variazione // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. Ser. 6. 1925. Vol. 1. P. 151—156.

Manocha H. L. 1) Transformation of integral expression for F_4 by means of fractional integration by parts // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1965. T. 9, N 4. P. 337—341.

2) Integral expressions for Appell's functions F_1 and F_2 // Riv. mat. Univ. Parma. Ser. 2. 1967. Vol. 8. P. 235—242.

3) Some expansions by fractional derivatives // Mathematica (RSR). 1967. Vol. 9, N 2. P. 303—309.

Manocha H. L., Sharma B. L. 1) Fractional derivatives and summation // J. Indian Math. Soc. 1974. Vol. 38, N 1—4. P. 371—382.

Marchaud A. 1) Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles // J. math. pures et appl. 1927. T. 6, N 4. P. 337—425.

Marke P. W. 1) Bidrag til teorien for integration og differentiation af vilkaarlig orden. I. Kobenhavn: Kommission hos J. H. Schultz Forl. Fr. Bagges Kgl., 1942. 127 p.

Martić B. 1) A note on fractional integration // Publs. l'Inst. math. 1973. T. 16, N 30. P. 111—113.

2) On the connections between Riemann—Liouville fractional integral, Meijer and Hankel transforms // Rad. Akad. nauka i Umjetn. Bosne i Hercegovine. Od. prirod. i mat. nauka. Sarajevo, 1973. Vol. 45, kn. 12. P. 145—148.

Mathai A. M., Saxena R. K. 1) The H-function with Applications in Statistics and Other Disciplines. N. Y. ets.: A Halsted Press book John Wiley, 1978. 192 p.

Mathur B. L., Krishna S. 1) On multivariate fractional integration operators // Indian J. Pure and Appl. Math. 1978. Vol. 8, N 9. P. 1078—1082.

Mathur S. L. 1) Meijer—Laplace transform and fractional integration // Math. Education. 1971. Vol. A5, N 2. P. 58—64.

2) Some theorems on fractional integration // Ibid. 1972. Vol. A6, N 1. P. 29—36.

Matsuyama N. 1) Some trigonometrical series. II // J. Math. Tokyo. 1953. Vol. 1, N 2—3. P. 117—127.

McBride A. C. 1) Solution of hypergeometric integral equations involving generalized functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1975. Vol. 19, N 3. P. 265—285.

2) A theory of fractional integration for generalized functions // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6, N 3. P. 583—599.

3) A note on the spaces $F'_{p,\mu}$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1976. Vol. A77, N 1—2. P. 39—47.

4) A theory of fractional integration for generalised functions. II // Ibid. 1977. Vol. A77, N 3—4. P. 335—349.

5) The Hankel transform of some classes of generalised functions and connections with fractional integration // Ibid. 1978. Vol. A81, N 1—2. P. 95—117.

6) Fractional calculus and integral transforms of generalised functions // Res. Notes Math. 31. San Francisco ets.: Pitman Press, 1979. 179 p.
7) Fractional powers of a class of ordinary differential operators // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1982. Vol. 45, N 3. P. 519—546.
8) Index laws for some ordinary differential operators // Lect. Notes Math. 1982. Vol. 964. P. 485—493.
9) A note on the index laws of fractional calculus // J. Austral. Math. Soc. 1983. Vol. A34, N 3. P. 356—363.
10) On an index law and a result of Buschman // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1984. Vol. A96, N 3—4. P. 231—247.
11) A Mellin transform approach to fractional calculus on $(0, \infty)$ // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 99—139.

McClure J. P., Wong R. 1) Exact remainders for asymptotic expansions of fractional integrals // J. Inst. Math. and Appl. 1979. Vol. 24, N 2. P. 139—147.

McKellar B. H. J., Box M. A., Love E. R. 1) Inversion of the Struve transform of half integer order // J. Austral. Math. Soc. 1983. Vol. B25, N 2. P. 161—174.

Mikolás M. 1) Differentiation and integration of complex order of functions represented by trigonometrical series and generalized zeta-functions // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1959. Vol. 10, N 1—2. P. 77—124.
2) Sur la sommation des séries de Fourier au moyen de l'intégration d'ordre fractionnaire // C. R. Acad. Sci. Paris, 1960. T. 251, N 6. P. 837—839.
3) Application d'une nouvelle méthode de sommation aux séries trigonométriques et de Dirichlet // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1960. Vol. 11, N 3—4. P. 317—334.
4) Generalized Euler sums and the semigroup property of integro-differential operators // Ann. Univ. sci. Budapest. Sect. math. 1963. Vol. 6. P. 89—101.
5) Sur la propriété principale des opérateurs différentiels généralisés // C. R. Acad. Sci. Paris, 1964. T. 258, N 2. P. 5315—5317.
6) On the recent trends in the development, theory and applications of fractional calculus // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 357—375.
7) Integro-differential operators and theory of summation // Functional Analysis, Holomorphy and Approximational Theory. Amsterdam: North-Holland Publ., 1984. Vol. 2. P. 245—258.

Miller J. B. 1) A continuum of Hilbert spaces in L^2 // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1959. Vol. 9, N 34. P. 208—226.

Minakshisundaram S. 1) A note on the theory of Fourier series // Proc. Nat. Inst. Sci. India. 1944. Vol. 10. P. 205—215.

Minerbo G. N., Levy M. E. 1) Inversion of Abel's integral equation by means of orthogonal polynomials // SIAM J. Numer. Anal. 1969. Vol. 6, N 4. P. 598—616.

Miserendino D. 1) Tracce delle derivate di ordine frazionario delle funzioni di classe W^r in un rettangolo // Boll. Unione mat. ital. Analisi funzionale e Appl. Ser. 6. 1982. Vol. 1-C, N 1. P. 357—376.
2) Derivate di ordine frazionario per funzioni di classe W^r in un rettangolo limitato di R^k e loro tracce // Ibid. 1983. Vol. 2-C, N 1. P. 105—158.

Misra A. P. 1) Application of fractional-derivative operators to Rodrigues' type of formulae for polynomial sets // Math. Balkan. 1973. Vol. 3. P. 358—362.

Mohapatra R. N. 1) Note on summability (L) of Fourier integrals // Colloq. Math. 1973. Vol. 28, N 2. P. 291—297.

Montel P. 1) Sur les polynomes d'approximation // Bull. Soc. math. France. 1918. T. 46. P. 151—196.

Moppert K. F. 1) Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator // Comm. Math. Helv. 1953. Vol. 27, N 2. P. 140—150.

Most R. 1) Ueber die Anwendung der Differentialquotienten mit allgemeinem Index zum Integrieren von Differentialgleichungen // Z. angew. Math. und Phys. 1871. Bd 16. S. 190—210.

Mourya D. P. 1) Fractional integrals of the functions of two variables // Proc. Indian Acad. Sci. 1970. Vol. A72, N 4. P. 173—184.

Muckenhoupt B. 1) On certain singular integrals // Pacif. J. Math. 1960. Vol. 10, N 1. P. 239—261.

Muckenhoupt B., Stein E. M. 1) Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 118, N 6. P. 17—92.

Muckenhoupt B., Wheeden R. L. 1) Weighted norm inequalities for fractional integrals // Ibid. 1974. Vol. 192, N 465. P. 261—274.

Müller C., Richberg R. 1) Über die Radon-Transformation kreissymmetrischer Funktionen und ihre Beziehung zur Sommerfeldschen Theorie der Hankelfunktionen // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. Bd 2, N 1. S. 108—129.

Nagy B. S. 1) Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verhandl. Sächsisch Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. 1938. Bd 90. S. 103—134.
2) Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall // Ibid. 1939. Bd 91, N 1. S. 3—24.

Nair V. C. 1) Integral equations of convolution form // Riv. mat. Univ. Parma. Ser. 4. 1975. Vol. 1. P. 9—15.

Narain Roop (see Kesarwani Roop Narain)

Nasim C. 1) An integral equation involving Fox's H-function // Indian J. Pure and Appl. Math. 1982. Vol. 13, N 10. P. 1149—1162.

Nasim C., Sneddon I. N. 1) A general procedure for deriving solutions of dual integral equations // J. Eng. Math. 1978. Vol. 12, N 2. P. 115—128.

Neunzert H., Wick J. 1) Über eine Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung // Ber. Kernforschungsanlage. Jülich, 1966. N 442. 23 S.

Nieva del Pino M. E. 1) Theoremas de integracion fraccional // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1973. Vol. A23. P. 205—214.

Nishimoto K. 1) Fractional derivative and integral. Pt I // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1976. Vol. B-17. P. 11—19.

2) Nishimoto's fractional differintegration and the solution of Legendre's differential equation // Ibid. 1976. Vol. B-17. P. 21—25.

3) Osler's cut and Nishimoto's cut // Ibid. 1977. Vol. B-18. P. 9—13.

4) On the fractional calculus // Dissertations in Celebration of the 30th anniversary of Coll. of Engng. Nihon Univ. 1977. P. 91—131.

5) Fractional calculus (generalized integral and derivative) // On fractional calculus and its applications: Proc. Symp., Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 1981. P. 1—32.

6) Tables of fractional differintegrations of elementary functions // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1984. Vol. B-25. P. 41—46.

7) Fractional calculus (Integrals and differentiations of arbitrary order). Koriyama: Descartes Press, 1984. 197 p.

8) Applications to the solutions of linear second order differential equations of Fuchs type // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 140—153.

9) An application of fractional calculus to the differential equation of Fuchs type $\varphi_2 \cdot z + \varphi_1 \cdot (\nu - az) - \varphi \cdot a_\nu = f$ // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1985. Vol. B-26. P. 1—11.

10) An application of fractional calculus to a differential equation of Fuchs type $\varphi_2 \cdot (z^2 - z) + \varphi_1 \cdot (2\nu z - \nu - 1) + \varphi \cdot \nu(\nu - 1) = f$ // Ibid. 1986. Vol. B-27. P. 5—16.

11) Application of fractional calculus to a differential equation of Fuchs type $\varphi_2 \cdot (z^2 - z) + \varphi_1 \cdot (2\nu z - \nu + 1) + \varphi \cdot \nu(\nu - 1) = f$ // Ibid. 1986. Vol. B-27. P. 17—30.

Nishimoto K., Owa S., Srivastava H. M. 1) Solutions to a new class of fractional differintegral equations // Ibid. 1984. Vol. B-25. P. 75—78.

Noble B. 1) On some dual integral equations // Quart. J. Math. Oxford ser. 1955. Vol. 6, N 2. P. 81—87.

2) Certain dual integral equations // J. Math. and Phys. 1958. Vol. 37, N 2. P. 128—136.

Okikiolu G. O. 1) A generalisation of the Hilbert transform // J. London Math. Soc. 1965. Vol. 40, N 1. P. 27—30.

2) Fourier transforms and the operator H_α // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. Vol. 62, N 1. P. 73—78.

3) On integral operators with kernels involving Bessel functions // Ibid. N 3. P. 477—484.

4) Fractional integrals of the H_α-type // Quart. J. Math. Oxford ser. 1967. Vol. 18, N 69. P. 33—42.

5) On the operator $F_\sigma^{(\nu)}$ and fractional integrals // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1969. Vol. 1, N 4. P. 619—629.

6) On integral operators with kernels involving Bessel functions (correction and addendum) // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1970. Vol. 67, N 3. P. 583—586.

7) Aspects of the theory of bounded integral operators in L_p-spaces. London: Acad. Press, 1971. 522 p.

Oldham K. B., Spanier J. 1) The fractional calculus. N. Y.; London: Acad. Press, 1974. 234 p.

2) Fractional calculus and its applications // Bul. Inst. Politehn. Iasi. Sec. 1. 1978. Vol. 24, N 3—4. P. 29—34.

Olmstead W. E., Handelsman R. A. 1) Asymptotic solution to a class of nonlinear Volterra integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 30, N 1. P. 180—189.

O'Neil R. 1) Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. 1963. Vol. 30, N 1. P. 135—140.

2) Fractional integration in Orlicz spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 115, N 3. P. 300—328.

3) Les fonctions conjugées et les intégrales fractionnaires de la classes $L(\log^+ L)^s$ // C. R. Acad. Sci. Paris, 1966. T. 263, N 14. P. A463—A466.

Orton M. 1) The generalized Abel equations for Schwartz distributions // SIAM J. Math. Anal. 1980. Vol. 11, N 3. P. 596—611.

O'Shaughnessy L. 1) Problem # 433 // Amer. Math. Month. 1918. Vol. 25. P. 172—173.

Osler T. J. 1) Leibniz rule for fractional derivatives, generalized and an application to infinite series // SIAM J. Appl. Math. 1970. Vol. 18, N 3. P. 658—674.

2) The fractional derivative of a composite function // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 2. P. 288—293.

3) Taylor's series generalized for fractional derivatives and applications // Ibid. 1971. Vol. 2, N 1. P. 37—48.

4) Fractional derivatives and Leibniz rule // Amer. Math. Month. 1971. Vol. 78, N 6. P. 645—649.

5) A further extension of the Leibniz rule to fractional derivatives and its relation to Parseval's formula // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3, N 1. P. 1—16.

6) An integral analogue of Taylor's series and its use in computing Fourier transforms // Math. Comput. 1972. Vol. 26, N 118. P. 449—460.

7) The integral analog of the Leibniz rule // Ibid. N 120. P. 903—915.

8) A correction to Leibniz rule for fractional derivatives // SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, N 3. P. 456—459.

9) Open questions for research // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 376—381.

10) Leibniz rule for fractional derivatives used to generalize formulas of Walker and Cauchy // Bul. Inst. Politehn. Iasi. Sec. 1. 1975. Vol. 21, N 1—2. P. 21—24.

Owa S. 1) On the distortion theorems. I // Kyungpook Math. J. 1978. Vol. 18, N 1. P. 53—59.

2) On applications of the fractional calculus // Math. Japon. 1980. Vol. 25, N 2. P. 195—206.

3) A remark on new criteria for univalent functions // Kyungpook Math. J. 1981. Vol. 21, N 1. P. 15—23.

4) An application of the fractional derivative. I // Ibid. N 2. P. 205—212.

5) On the fractional calculus // On fractional calculus and its applications: Proc. Symp., Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 1981. P. 57—80.

6) On the Ruscheweyh's new criteria for univalent functions // Math. Japon. 1982. Vol. 27, N 1. P. 77—96.

7) On the classes of univalent functions with negative coefficients // Ibid. N 4. P. 409—416.

8) An application of the fractional calculus // Kyungpook Math. J. 1982. Vol. 22, N 1. P. 15—19.

9) On new criteria for analytic functions // Tamkang J. Math. 1982. Vol. 13, N 2. P. 201—213.

10) An application of the fractional derivative. II // Ibid. 1983. Vol. 14, N 2. P. 123—130.

11) An application of the fractional derivative. III // Math. Japon. 1983. Vol. 28, N 2. P. 239—244.

12) On certain subclass of analytic and univalent functions in the unit disc // Bull. Iran Math. Soc. 1983. Vol. 10, N 1-2. P. 55—66.

13) Some applications of the fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 164—175.

14) An application of the Ruscheweyh derivatives // Math. Japon. 1985. Vol. 30, N 6. P. 927—946.

15) An application of the Ruscheweyh derivatives. II // Publ. Inst. math. 1985. Vol. 38. P. 99—110.

Owa S., Ahuja O. P. 1) An application of the fractional calculus // Math. Japon. 1985. Vol. 30, N 6. P. 947—955.

Owa S., Nishimoto K. 1) A remark on Nishimoto's fractional differintegrations // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1982. Vol. B-23. P. 25—32.

2) A note on a class of convex functions // Ibid. 1984. Vol. B-25. P. 53—56.

Owa S., Obradovic M. 1) A remark on the Ruscheweyh derivatives // Bull. Soc. Roy. Sci., Liege, 1986. T. 55, N 2. P. 279—284.

Owa S., Shen C. Y. 1) On the coefficients of generalized starlike of convex functions of order α // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1985. Vol. 54, N 4—5. P. 195—202.

Paley R. E. A. C. 1) On the Cesàro summability of Fourier series and allied series // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1930. Vol. 26, N 2. P. 173—203.

Parashar B. P. 1) Domain and range of fractional integration operators // Math. Japon. 1967. Vol. 12, N 2. P. 141—145.

Pathak R. S. 1) Some theorems on Whittaker transforms // Indian J. Pure and Appl. Math. 1973. Vol. 4, N 3. P. 308—317.

2) On a class of dual integral equations // Proc. Kongl. Nederl. Akad. Weten. 1978. Vol. A81, N 4. P. 491—501.

Peacock G. 1) Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis (general differentiation) // 3rd annual report of the British Association. 1833. P. 206—225, 240—247.

Peetre J. 1) On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces // J. Funct. Analysis. 1969. Vol. 4, N 1. P. 71—87.

Pennell W. O. 1) The use of fractional integration and differentiation for obtaining certain expansions in terms of Bessel functions or of sines and cosines // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 38. P. 115—122.

Penzel F. 1) Zer Theorie Verallgemeinerter Abelscher Integralgleichungen: Dr Diss. Darmstadt, 1986. 63 S.

Peters A. S. 1) Certain dual integral equations and Sonine's integrals // Technical Report N 285, IMM-NYU. Courant Inst. Math. Sci. New York Univ., 1961. 41 p.

2) Some integral equations related to Abel's equation and the Hilbert transform // Comm. Pure and Appl. Math. 1969. Vol. 22, N 4. P. 539—560.

Pichorides S. K. 1) On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov // Stud. Math. 1972. Vol. 44, N 2. P. 165—179.

Pinney E. 1) A class of integral equations which generalize Abel's equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51, N 4. P. 259—265.

Pitcher E., Sewell W. E. 1) Existence theorems for solutions of differential equations of non-integral order // Ibid. 1938. Vol. 44, N 2. P. 100—107. (A correction in N 12, P. 888.)

Plessis N. du. 1) A theorem about fractional integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3. P. 892—898.

2) Some theorems about the Riesz fractional integral // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. Vol. 80, N 1. P. 124—134.

Poisson S. D. 1) Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles // J. l'Ecole Roy. Polytéchn. 1823. T. 12. P. 215—248.

Polking J. C. 1) A Leibniz formula for some differentiation operators of fractional order // Indiana Univ. Math. J. 1972. Vol. 21, N 11. P. 1019—1029.

Pollard H., Widder D. V. 1) Inversion of a convolution transform related to heat conduction // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 4. P. 527—532.

Popoviciu T. 1) Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles // Mathematica (Cluj). 1934. Vol. 8. P. 1—85.

Post E. L. 1) Discussion of the solution of $(d/dx)^{1/2}y=y/x$ (problem # 433) // Amer. Math. Month. 1919. Vol. 26. P. 37—39.

2) Generalized differentiation // Trans. Amer. Math. Soc. 1930. Vol. 32. P. 723—781.

Prabhakar T. R. 1) Two singular integral equations involving confluent hypergeometric functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 66, N 1. P. 71—89.

2) Some integral equations with Kummer's functions in the kernels // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, N 3. P. 391—404.

3) A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7—15.

4) A class of integral equations with Gauss functions in the kernels // Math. Nachr. 1972. Bd 52, N 1—6. S. 71—83.

5) Hypergeometric integral equations of a general kind and fractional integration // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3, N 3. P. 422—425.

6) A general class of operators involving $\Phi_1(a, b; c; z, w)$ and related integral equations // J. Indian Math. Soc. 1977. Vol. 41, N 1—2. P. 163—179.

Prabhakar T. R., Chakrabarty M. 1) A class of basic integral equations with basic hypergeometric function ${}_1\Phi_1$ in the kernels // Indian J. Pure and Appl. Math. 1976. Vol. 7, N 11. P. 1253—1260.

Prabhakar T. R., Kashyap N. K. 1) A new class of hypergeometric integral equations // Ibid. 1980. Vol. 11, N 1. P. 92—97.

Pryde A. J. 1) Spaces with homogeneous norms // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 21, N 2. P. 189—205.

Raina R. K. 1) On the Weyl fractional differentiation // Indian J. Pure and Appl. Math. 1979. Vol. 10, N 1—2. P. 37—41.

2) On composition of certain fractional integral operators // Ibid. 1984. Vol. 15, N 5. P. 509—516.

3) On the multiple Weyl fractional integral of a general system of polynomials // Boll. Unione mat. ital. Ser. 6. 1984. Vol. 3-A, N 2. P. 283—287.

Raina R. K., Kiryakova V. S. 1) On the Weyl fractional operator of two dimensions // Докл. Болг. АН. 1983. Т. 36, N 10. С. 1273—1276.

Raina R. K., Koul C. L. 1) Fractional derivatives of the H-functions // Jnanabha. 1977. Vol. 7. P. 97—105.

2) On Weyl fractional calculus and H-function transform // Kyungpook Math. J. 1981. Vol. 21, N 2. P. 275—279.

Rakesh S. L. 1) Theorems on fractional integration operators // Fasc. Math. 1973. N 7. P. 37—40.

Reddy G. L., Padmanabhan K. S. 1) Some properties of fractional integrals and derivatives of univalent functions // Indian J. Pure and Appl. Math. 1985. Vol. 16, N 3. P. 291—302.

Reimann H. M., Rychener T. 1) Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 487. S. 1—141.

Rieder P. 1) Die Auflösung einer Klasse verallgemeinerter Abelscher Integralgleichungen // Math. Z. 1969. Bd 109, N 1. S. 29—52.

Riemann B. 1) Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation // Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331—344.

Riesz M. 1) Sur un théoréme de la moyenne et ses applications // Acta Litt. ac Sci. reg. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae. Sec. Sci., Math. 1922—1923. T. 1. P. 114—126.

2) Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green // C. R. Congrès Intern. Math. Oslo, 1936. T. 2. P. 62—63.

3) L'intégrales de Riemann—Liouville et solution invariantive du probléme de Cauchy pour l'equation des ondes // Ibid. P. 44—45.

4) Integrales de Riemann—Liouville et potentiels // Acta Litt. Acad. Sci. Szeged, 1938. T. 9. P. 1—42.

5) Rectification an travail «Intégrales de Riemann—Liouville et potentiels» // Ibid. 1939. T. 9, N 2. P. 116—118.

6) L'integrales de Riemann—Liouville et le probléme de Cauchy // Acta Math. 1949. Vol. 81, N 1—2. P. 1—223.

7) The analytic continuation of the Riemann—Liouville integral in the hyperbolic case // Canad. J. Math. 1961. Vol. 13, N 1. P. 37—47.
8) L'integrale de Riemann—Liouville et le probléme de Cauchy pour l'équation des ondes // Bull. Soc. math. France. 1967. Déc. suppl. P. 153—170.

Rooney P. G. 1) On some properties of certain fractional integrals // Trans. Roy. Soc. Canada. Ser. 3. 1956. Vol. 50. P. 61—70.
2) On the ranges of certain fractional integrals // Canad. J. Math. 1972. Vol. 24, N 6. P. 1198—1216.
3) A technique for studying the boundedness and extendability of certain types of operators // Ibid. 1973. Vol. 25, N 5. P. 1090—1102.
4) On the ranges of certain fractional integrals. II // Appl. Anal. 1978. Vol. 8, N 2. P. 175—184.
5) On integral transformations with G-function kernels // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1983. Vol. A93, N 3—4. P. 265—297.

Ross B. 1) A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 1—36.
2) The development of fractional calculus 1695—1900 // Historia Math. 1977. Vol. 4. P. 75—89.
3) Fractional calculus. An historical apologia 56 # 5811 for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non-integral orders // Math. Magaz. 1977. Vol. 50, N 3. P. 115—122.

Rothe R. 1) Zur Abelschen Integralgleichung // Math. Z. 1931. Bd 33, N 3. S. 375—387.

Rusia K. C. 1) An integral equation involving generalized Laguerre polynomial // Math. Japon. 1966. Vol. 11. P. 15—18.
2) An integral equation involving Jacobi polynomial // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1966. Vol. A36, N 4. P. 933—936.
3) Some integral equations and integrals // Ibid. 1967. Vol. A37, N 1. P. 67—70.
4) An integral equation involving confluent hypergeometric function // Math. Student. 1969. Vol. 37, N 1—4. P. 55—58.
5) A class of integral equations // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1969. Vol. A39. P. 334—336.
6) A class of integral equations involving confluent hypergeometric function // Ibid. P. 349—354.
7) On some integral equations involving Jacobi polynomials // Ibid. P. 381—388.

Sadowska D. 1) Equation intégro-differentielle d'Abel // Bull. Soc. sci. et lettres Lodz. 1959. Cl. 3. Vol. 10, N 6. P. 1—17.

Saigo M. 1) A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11, N 2. P. 135—143.
2) A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation // Math. Japon. 1979. Vol. 24, N 4. P. 377—385.
3) On the Hölder continuity of the generalized fractional integrals and derivatives // Math. Rep. Kyushu Univ. 1980. Vol. 12, N 2. P. 55—62.
4) A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation. II // Math. Japon. 1980. Vol. 25, N 2. P. 211—220.
5) A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation. III // Ibid. 1981. Vol. 26, N 1. P. 103—119.
6) A generalization of fractional calculus and its applications to Euler—Darboux equation // On fractional calculus and its applications: Proc. Symp., Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 1981. P. 33—56.
7) A generalization of fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 188—198.

Saksena K. M. 1) Inversion and representation theorems for a generalised Laplace integral // Pacif. J. Math. 1958. Vol. 8, N 3. P. 597—607.

Sampson C. H. 1) A characterization of parabolic Lebesgue spaces: Dr Diss. Rice Univ., 1968. 91 p. Diss. Abstrs. 1968. Vol. 29, N 6. Pos. 2125-B.

Sargent W. L. G. 1) A mean value theorem involving Cesàro means // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1946. Vol. 49. P. 227—240.
2) On fractional integrals of a function integrable in the Cesàro—Perron sense // Ibid. 1950. Vol. 51, N 1. P. 46—80.
3) On the continuity (C) and integrability (CP) of fractional integrals // Ibid. 1951. Vol. 52, N 4. P. 253—270.

Satô T. 1) On Abel's integral equation // Mem. Coll. Sci. Kyoto. 1935. Vol. 18. P. 63—78.

Sawyer E. 1) A two weight weak type inequality for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 281, N 1. P. 339—345.

Saxena R. K. 1) An inversion formula for the Varma transform // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. Vol. 62, N 3. P. 467—471.
2) An inversion formula for a kernel involving a Mellin—Barnes type integral // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, N 4. P. 771—779.
3) A formal solution of certain dual integral equations involving H-functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. Vol. 63, N 1. P. 171—178.

4) On the formal solution of dual integral equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18, N 1. P. 1—8.
5) On fractional integration operators // Math. Z. 1967. Bd 96, N 4. S. 288—291.
Saxena R. K., Kumbhat R. K. 1) A generalization of Kober operators // Vijnana Parishad Anusandhan Patrika. 1973. Vol. 16, N 1. P. 31—36.
2) Integral operators involving H-function // Indian J. Pure and Appl. Math. 1974. Vol. 5, N 1. P. 1—6.
3) Some properties of generalized Kober operators // Vijnana Parishad Anusandhan Patrika. 1975. Vol. 18, N 2. P. 139—150.
Saxena R. K., Modi G. C. 1) Multidimensional fractional integration operators associated with hypergeometric functions // Nat. Acad. Sci. Lett. 1980. Vol. 3, N 5. P. 153—157.
Saxena R. K., Sethi P. L. 1) Relations between generalized Hankel and modified hypergeometric function operators // Proc. Indian Acad. Sci. 1973. Vol. A78, N 6. P. 267—273.
Saxena V. P. 1) Inversion formulae to certain integral equations involving H-function // Portugal. Math. 1970. Vol. 29, N 1. P. 31—42.
Schneider W. R. 1) The general solution of a non-linear integral equation of convolution type // J. Appl. Math. and Phys. 1982. Vol. 33, N 1. P. 140—142.
Schwartz J. T. 1) A remark on inequalities of Calderon—Zygmund type for vector-valued functions // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14, N 4. P. 785—799.
Schwartz L. 1) Théorie des distributions. In 2 vlms. Paris: Hermann, 1950. Vol. 1. 162 p.; 1951. Vol. 2. 169 p.
Sekine T., Owa S., Nishimoto K. 1) An application of the fractional calculus // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1986. Vol. B-27. P. 31—37.
Senator K. 1) Schauder and L_p estimates for a certain class of integro-differential boundary value problems // Bull. L'Acad. pol. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. 1971. T. 19, N 5. P. 359—363.
Sethi P. L., Banerji P. K. 1) Fractional integration and dual integral equations // J. Indian Math. Soc. 1974 (1975). Vol. 38, N 1—4. P. 359—363.
Sewell W. E. 1) Generalized derivatives and approximation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Ser. 2. 1935. Vol. 21. P. 255—258.
2) Generalized derivatives and approximation by polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 14, N 1. P. 84—123.
Shah M. 1) Two integral transform pairs involving H-function // Glasnik Matem. 1972. T. 7, N 1. P. 57—65.
Shapiro H. S. 1) Topics in approximation theory // Lect. Notes Math. 1971. Vol. 187. P. 1—275.
Sharma S. 1) Certain fractional q-integral operators // Indian J. Pure and Appl. Math. 1979. Vol. 10, N 5. P. 581—589.
Sharpley R. 1) Fractional integration in Orlicz spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 59, N 1. P. 99—106.
Shinbrot M. 1) Fractional derivatives of solutions of the Navier—Stokes equations // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1971. Vol. 40, N 2. P. 139—154.
Singh B. 1) The generalized Erdelyi—Kober operators and self-reciprocal functions // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1965. T. 79, N 2. P. 117—132.
2) A note on fractional integration // Bol. Acad. cienc., fis., mat. y natur. Venezuela, 1975. Vol. 33, N 190. P. 95—97.
Singh C. 1) On a convolution transform involving Whittaker's function as its kernel // Math. Japon. 1968. Vol. 13, N 1. P. 71—74.
2) An inversion integral for a Whittaker transform // Riv. mat. Univ. Parma. Ser. 2. 1970. Vol. 11. P. 277—280.
3) An integral equation with Jacobi polynomial in the kernel // Ibid. Ser. 2. 1970. Vol. 11. P. 313—316.
4) On a class of integral equations // Ibid. Ser. 4. 1975. Vol. 1. P. 1—7.
Singh Rattan. 1) An inversion formula for Fox H-transform // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1970. Vol. A40, N 1. P. 57—64.
Singh R. P. 1) An integral equation involving generalized Legendre polynomials // Math. Student. 1967. Vol. 35, N 1—4. P. 81—84.
Sirola R. O., Anderson T. P. 1) Abel integral inverter // Rev. Sci. Instrum. 1967. Vol. 38, N 6. P. 749—759.
Skórnik K. 1) О дробных интегралах и производных одного класса обобщенных функций / К. Скурник. Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 5. С. 1085—1087.
2) On tempered integrals and derivatives of nonnegative orders // Ann. polon. math. 1981. Vol. 40, N 1. P. 47—57.
Slater L. J. 1) Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966. 273 p.
Smith C. V. L. 1) The fractional derivative of a Laplace integral // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, N 1—2. P. 47—77.
Sneddon I. N. 1) The elementary solution of dual integral equations // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1960. Vol. 4, N 3. P. 108—110.
2) Fractional integration and dual integral equations // North Carolina State College, Appl. Math. Res. Group Raleigh, PSR-6. 1962. 40 p.
3) Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam: North-Holland Publ., 1966. 283 p.

4) A procedure for deriving inversion formulae for integral transform pairs of a general kind // Glasgow Math. J. 1968. Vol. 9, N 1. P. 67—77.
5) The use in mathematical physics of Erdelyi—Kober operators and of some of their generalizations // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 37—79.
6) The use of operators of fractional integration in applied mathematics // Appl. mech. ser. Warszawa; Poznan: PWN, 1979. 42 p.

Sohncke L. 1) Ueber den Zusammenhang hypergeometrischer Reihen mit höheren Differentialquotienten und Vielfachen Integralen // Programm Königlichen Friedrichs Collegium zu Königsbergin Pr. 1867. N 26—27. S. 3—30.

Soni K. 1) Fractional integrals and Hankel transforms // Duke Math. J. 1968. Vol. 35, N 2. P. 313—319.
2) A note on Fourier kernels // Amer. Math. Month. 1969. Vol. 76, N 2. P. 174—176.
3) A unitary transform related to some integral equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 4. P. 426—436.
4) A Sonine transform // Duke Math. J. 1970. Vol. 37, N 3. P. 431—438.
5) An integral equation with Bessel function kernel // Ibid. 1971. Vol. 38, N 1. P. 175—180.

Spain B. 1) Interpolated derivatives // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1940. Vol. 60, N 2. P. 134—140.

Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 1) A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Anal. and Appl. 1979. Vol. 72, N 2. P. 674—702.
2) A fractional integral operator corresponding to negative powers of a second order partial differential operator // Report TW 191/79. Amsterdam: Math. Centrum, 1979. 44 p.

Srivastav R. P. 1) On certain integral equations of convolution type with Bessel-function kernels // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1966. Vol. 15, N 2. P. 111—116.

Srivastava H. M. 1) Fractional integration and inversion formulae associated with the generalized Whittaker transform // Pacif. J. Math. 1968. Vol. 26, N 2. P. 375—377.
2) A class of integral equations involving the H-function as kernel // Proc. Kongl. Nederl. Akad. Weten. 1972. Vol. A75, N 3. P. 212—220.
3) An integral equation involving the confluent hypergeometric function of several complex variables // Appl. Anal. 1976. Vol. 5, N 4. P. 251—256.
4) The Weyl fractional integral of a general class of polynomials // Boll. Unione mat. ital. 1983. Vol. 132, N 1. P. 219—228.

Srivastava H. M., Buschman R. G. 1) Composition of fractional integral operators involving Fox's H-function // Acta Mexic. cienc. y tecnol. 1973. Vol. 7, N 1—3. P. 21—28.
2) Some convolution integral equations // Proc. Kongl. Nederl. Akad. Weten. 1974. Vol. A77, N 3. P. 211—216.
3) Convolution Integral Equations with Special Function Kernels. New Delhi, Bangalore: Wiley Eastern, 1977. 164 p.

Srivastava H. M., Owa S. 1) An application of the fractional derivative // Math. Japon. 1984. Vol. 29, N 3. P. 383—389.
2) An application of the fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 199—212.

Srivastava H. M., Owa S., Nishimoto K. 1) A note on a certain class of fractional differintegral equations // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1984. Vol. B-25. P. 69—73.

Srivastava H. M., Sekine T., Owa S., Nishimoto K. 1) Fractional derivatives and fractional integrals of certain subclasses of starlike and convex functions // Ibid. 1986. Vol. B-27. P. 39—46.

Srivastava K. J. 1) Fractional integration and Meijer transform // Math. Z. 1957. Bd. 67. N 5. S. 404—412.
2) Fractional integration and the $\tilde{\omega}_{\mu,\nu}$-transform // Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn. di Torino. 1957—1958. Vol. 17. P. 201—208.
3) Self-reciprocal function and $\omega_{\mu,\nu}$-transform // Bull. Calcutta Math. Soc. 1959. Vol. 51, N 2. P. 57—65.

Srivastava K. N. 1) On some integral transforms // Math. Japon. 1961—1962. Vol. 6, N 3—4. P. 65—72.
2) A class of integral equations involving ultraspherical polynomials as kernels // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14, N 6. P. 932—940.
3) Inversion integrals involving Jacobi's polynomials // Ibid. 1964. Vol. 15, N 4. P. 635—638.
4) On some integral equations involving Jacobi polynomials // Math. Japon. 1964. Vol. 9. P. 85—88.
5) Integral equations involving a confluent hypergeometric function as kernel // J. Analyse Math. 1964. Vol. 13. P. 391—397.
6) A class of integral equations involving Jacobi polynomials as kernel // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1965. Vol. A35, N 2. P. 221—226.
7) On some integral transforms involving Jacobi functions // Ann. polon. math. 1965. Vol. 16, N 2. P. 195—199.
8) Fractional integration and integral equations with polynomial kernels // J. London Math. Soc. 1965. Vol. 40, N 3. P. 435—440.

9) A class of integral equations involving Laguerre polynomials as kernel // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1966. Vol. 15, N 1. P. 33—36.
10) On integral equations involving Whittaker's function // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1966. Vol. 7, N 3. P. 125—127.
11) On some triple integral equations involving Legendre functions of imaginary argument // J. of M. A. C. T. 1968. Vol. 1. P. 54—67.

Srivastava T. N., Singh Y. P. 1) On Maitland's generalized Bessel function // Canad. Math. Bull. 1968. Vol. 11, N 5. P. 739—741.

Stein E. M. 1) The characterization of functions arising as potentials. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 67, N 1. P. 102—104.

Stein E. M., Weiss G. 1) Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. and Mech. 1958. Vol. 7, N 4. P. 503—514.
2) On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p spaces // Acta Math. 1960. Vol. 103, N 1—2. P. 25—62.

Stein E. M., Zygmund A. 1) Smoothness and differentiability of functions // Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös. Sect. Math. 1960—1961. Vol. 3—4. P. 295—307.
2) On the fractional differentiability of functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1965. Vol. 14a. P. 249—264.
3) Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p-spaces // Ann. Math. 1967. Vol. 85, N 2. P. 337—349.

Steinig J. 1) The changes of sign of fractional integrals // Math. Z. 1970. Bd 116, N 3. S. 183—190.

Strichartz R. S. 1) Multipliers for spherical harmonic expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 167, N 1. P. 115—124.
2) Bounded mean oscillation and Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. 1980. Vol. 29, N 4. P. 539—558.

Strömberg J.-O., Wheeden R. L. 1) Fractional integrals on weighted H^p- and L^p-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287, N 1. P. 293—321.

Stuloff N. 1) Die differentiation beliebiger reeller ordnung // Math. Ann. 1951. Bd. 122. S. 400—410.

Sunouchi G. 1) Some theorems on fractional integration // Tôhoku Math. J. 1957. Vol. 9, N 3. P. 307—317.

Swaroop R. 1) On a generalization of the Laplace and the Stieltjes transformations // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1964. T. 78, N 2. P. 105—112.

Ta Li. 1) A new class of integral transforms // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 11, N 2. P. 290—298.
2) A note on integral transforms // Ibid. 1961. Vol. 12, N 6. P. 556.

Taberski R. 1) Two indirect approximation theorems // Demonstr. Math. 1976. Vol. 9, N 2. P. 243—255.
2) Approximation of functions possessing derivatives of positive orders // Ann. polon. math. 1977. Vol. 34, N 1. P. 13—23.
3) Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Ann. soc. math. polon. // Comm. math. Prace mat. 1977. Vol. 19, N 2. P. 389—400.
4) Indirect approximation theorems in L^p-metrics $(1<p<\infty)$. Approximation theory // Banach Center Publ. Polish. Sci. Publ. 1979. Vol. 4. P. 247—259.
5) Estimates for entire functions of exponential type // Funct. et approxim. (PRL). 1982. Vol. 13. P. 129—147.
6) Trigonometric approximation in the norms and seminorms // Stud. Math. 1984. Vol. 80, N 3. P. 197—217.

Takahashi S. 1) Some new properties of Bohr almost periodic Fourier series // Japon. J. Math. 1940. Vol. 16. P. 99—133.

Takano K. 1) One-parameter semigroups with infinitesimal generators of fractional powers of the Laplacian on weighted L^p-spaces // Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A. 1981. N 13. P. 45—55.
2) An application of weighted norm inequalities for maximal functions to semigroups of convolution transforms on $L^p_w(R^n)$ // Tsukuba J. Math. 1982. Vol. 6, N 2. P. 151—156.

Talenti G. 1) Sul problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali // Ann. mat. pura ed appl. 1965. T. 67. P. 365—394.

Tamarkin J. D. 1) On integrable solutions of Abel's integral equation // Ann. Math. Ser. 2. 1930. Vol. 31. P. 219—229.

Tanno Y. 1) On a class of convolution transform. II // Tôhoku Math. J. 1967. Vol. 19, N 2. P. 168—186.

Tardy P. 1) Sui differenziali a indice qualungue // Ann. mat. pura ed appl. 1858. T. 1. P. 135—148.

Tazali A. Z.-A. M. 1) Local existence theorems for ordinary differential equations of fractional order // Lect. Notes Math. 1982. Vol. 964. P. 652—665.

Tedone O. 1) Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. Sem. 1°. 1914. Vol. 23, N 7. P. 473—480.
2) Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra // Ibid. 1915. Vol. 24. P. 544—554.

Thielman H. P. 1) Note on the use of fractional integration of Bessel functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 695—698.

Thorin G. O. 1) Convexity theorems // Comm. Sémin. Math. L'Univ. Lund. Uppsala. 1948. Vol. 9. P. 1—57.

Tonelli L. 1) Su un problema di Abel // Math. Ann. 1928. Bd 99. S. 183—199.

Tranter C. J. 1) On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1950. Vol. 3, N 4. P. 411—419.

2) On some dual integral equations // Quart. J. Math. Oxford ser. 1951. Vol. 2, N 5. P. 60—66.

3) A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1954. Vol. 7, N 3. P. 317—325.

Trebels W., Westphal U. 1) A note on the Landau—Kallman—Rota—Hille inequality // Linear operators and approximations: Proc. Conf. Oberwolfach (1971). Birkhauser Verl., 1972. P. 115—119.

Tremblay R. 1) Une contribution à la théorie de la dérivée fractionnaire: These de docteur. Univ. Laval, Québec, Canada, 1974. 544 p.

2) Some operational formulas involving the operators xD, $x\Delta$ and fractional derivatives // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, N 5. P. 933—943.

Tremblay R., Fugère B. J. 1) Expansions of operators related to xD and the fractional derivative // Ibid. 1984. Vol. 15, N 6. P. 1214—1219.

Tricomi F. G. 1) Sull' equazioni integrale di Abel con limiti d'integrazione constanti // Rend. Inst. Lombardo. Ser. 2. 1927. Vol. 60. P. 598—604.

2) Sulla transformazione e il teorema di reciprocità di Hankel // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. IV. 1935. Vol. 22. P. 564—571.

Triméche K. 1) Transformation intégrale de Weyl et théoréme de Paley—Wiener associés a un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$ // J. math. pures et appl. 1981. T. 60, N 1. P. 51—98.

Trione S. E. 1) On the Fourier transforms of retarded Lorentz-invariant functions // Trab. mat. Inst. argent. mat. 1980. Vol. 26. 109 p.

Türke H., Zeller K. 1) Riesz mean-value theorem extended // Generalized Inequalities'3: 3rd Intern. Conf. Oberwolfach, Apr. 26-may 2, 1981. Basel ets., 1983. P. 491—496.

Ugniewski S. 1) Solving the Abel integral equation by means of orthogonal polynomials // Warszawa, 1976. 17 p.

2) Solving the Abel integral equation by interpolation methods // Zastos. Mat. Appl. Math. 1977. Vol. 16, N 1. P. 91—109.

Upadhyay M. 1) q-Fractional differentiation and basic hypergeometric transformations // Ann. polon. math. 1971. Vol. 25, N 2. P. 109—124.

Varma R. S. 1) On a generalization of Laplace integral // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1951. Vol. A20. P. 209—216.

Varma V. K. 1) Inversion of a class of transforms with a difference kernel // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 65, N 3. P. 673—677.

Vasilache S. 1) Asupra unei ecuatii integrale de tip Abel cu douá variable // Comm. Acad. R. P. Române. 1953. Vol. 3, N 3—4. P. 109—113.

Verblunsky S. 1) On the limit of a function at a point // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1931. Vol. 32. P. 163—199.

Verma R. U. 1) On fractional integrals of two variables and a generalization of the Laplace transformation // Math. Student. 1969. Vol. 37, N 1—4. P. 143—146.

2) Theorem on fractional integration and generalized Hankel transform // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR, 1970. T. 14, N 1. P. 117—122.

3) Some theorems on fractional integration and a generalized Hankel transform of two variables // Math. Student. 1972. Vol. A40. P. 169—178.

4) On symmetrical Fourier kernel. II // Bol. Acad. cienc., fis., mat. y natur. Venezuela, 1972. Vol. 32, N 97. P. 107—116.

5) Solution of an integral equation by L and L^{-1} operators // An. sti. Univ. «Al. I. Cuza» Iasi. Sec. 1a. 1974. T. 20, N 2. P. 381—387.

6) A formal solution of an integral equation by L and L^{-1} operators // Ghana J. Sci. 1975. Vol. 15, N 2. P. 225—237.

7) A formal solution of an integral equation involving the H-function of two variables by L_2 and L_2^{-1} operators // Math. Notae. 1977—1978. Vol. 26. P. 39—46.

8) Integral equations involving the G-function as kernel // An. Univ. Bucuresti. Ser. mat. 1978. Vol. 27. P. 107—110.

Volterra V. 1) Sulla inversione degli integrali definiti. I—IV // Atti Reale Accad. delle Sci. Torino. 1896. T. 31. P. 311—323, 400—408, 557—567, 693—708.

2) Theoria delle potenze, dei logarithmi e delle funzioni di composizione // Atti Accad. dei Lincei. Ser. 5. 1916. Vol. 11. P. 167—249.

Volterra V., Peres J. 1) Lecons sur la composition et les fonctions permutables. Paris: Gauthier-Villars, 1924. 183 p.

2) Théorie générale des fonctionnelles. Paris: Gauthier-Villars, 1936. T. 1.

Walton J. R. 1) A distributional approach to dual integral equations of Titchmarsh type // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6, N 4. P. 628—643.

2) The question of uniqueness for dual integral equations of Titchmarsh type // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1977. Vol. A76, N 4. P. 267—282.

3) Systems of generalized Abel integral equations with applications to simultaneous dual relations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, N 4. P. 808—822.

Wang F. T. 1) A convergence criterion for a Fourier series // Duke Math. J. 1944. Vol. 11, N 3. P. 435—439.

2) On Riesz summability of Fourier series by exponential means // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50. P. 420—424.

Watanabe J. 1) On some properties of fractional powers of linear operators // Proc. Japon. Acad. 1961. Vol. 37, N 6. P. 273—275.

Watanabe T. 1) On distributions measured by the Riemann—Liouville operators associated with homogeneous convex cones // Hiroshima Math. J. 1977. Vol. 7, N 2. P. 643—653.

Watanabe Y. 1) Notes on the generalized derivative of Riemann—Liouville and its application to Leibnitz's formula. I and II // Tôhoku Math. J. 1931. Vol. 34. P. 8—27, 28—41.

Weber H. 1) Ueber die Besselschen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme // J. für reine und angew. Math. 1872. Bd 75, N 1. S. 75—105.

Weinstein A. 1) Discontinuous integrals and generalized potential theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63, N 2. P. 342—354.

2) Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson et l'équation des ondes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1952. T. 234. P. 2584—2585.

3) Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 59, N 1. P. 20—38.

4) On the wave equation and the equation of Euler—Poisson // Wave motion and vibration theory. Proc. Sympos. Appl. Math. N. Y.: McGraw-Hill, 1954. Vol. 5. P. 137—147.

5) The generalized radiation problem and the Euler—Poisson—Darboux equation // Summa Brasil Math. 1955. Vol. 3. P. 125—147.

6) On a class of partial differential equations of even order // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4. 1955. T. 39. P. 245—254.

7) On a singular differential operator // Ibid. 1960. T. 49. P. 359—365.

8) Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics // Приложения теории функций в механике сплошной среды: Тр. междунар. симпоз. в Тбилиси, 17—23 сент. 1963 г. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 440—453.

Weiss R. 1) Product integration for the generalized Abel equation // Math. Comput. 1972. Vol. 26, N 117. P. 177—190.

Welland G. V. 1) Fractional differentiation of functions with lacunary Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 19, N 11. P. 135—141.

2) On the fractional differentiation of a function of several variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132, N 2. P. 487—500.

3) Weighted norm inequalities for fractional integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 51, N 1. P. 143—148.

Westphal U. 1) Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil I. Halbgruppenerzeuger // Compos. Math. 1970. Vol. 22, N 1. P. 67—103.

2) Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil II. Gruppenerzeuger // Ibid. P. 104—136.

3) An approach to fractional powers of operators via fractional differences // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. 29, N 3. P. 557—576.

4) Gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren, definiert mit Hilfe gebrochener Differenzen // Int. ser. Numer. Math. Basel—Stuttgart. 1974. Vol. 25. P. 23—27.

Weyl H. 1) Bemerkungen zum begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 1917. Bd 62, N 1—2. S. 296—302.

Wheeden R. L. 1) Hypersingular integrals and summability of Fourier integrals and series // A. P. Calderon, ed. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Vol. 10. Singular Integrals. Univ. Chicago. III. 1966. Providence, R. I. 1967. P. 336—369.

2) On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 134, N 3. P. 421—435.

3) On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions. II // Ibid. 1969. Vol. 139, N 1. P. 37—53.

4) On hypersingular integrals and certain spaces of locally differentiable functions // Ibid. 1969. Vol. 146, N 2. P. 211—230.

5) A note on a generalized hypersingular integral // Stud. Math. 1972. Vol. 44, N 1. P. 17—26.

Whittaker E. T. 1) On the numerical solution of integral equations // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1917—1918. Vol. 94. P. 367—383.

Wick J. 1) Über eine Integralgleichung vom Abelschen Typ // Z. angew. Math. und Mech. 1968. Bd 48, N 8. S. 39—41.

Widder D. V. 1) The Stieltjes transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. Vol. 43, N 1. P. 7—60.

2) The Laplace Transform. Princeton: Princeton Univ. Press, 1946. 406 p.

3) The inversion of a convolution transform whose kernel is a Laguerre polynomial // Amer. Math. Month. 1963. Vol. 70, N 3. P. 291—293.

4) Two convolution transforms which are inverted by convolutions // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14, N 5. P. 812—817.

Widom H. 1) Singular integral equations in L_p // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 97, N 1. P. 131—160.

Wiener K. 1) Über Lösungen einer in der Theorie der Polarographie auftretenden

Differentialgleichung von nichtganzzahliger Ordnung // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturwiss. Reihe. 1983. Bd 32, N 1. S. 41—46.

2) Über des asymptotische Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung nichtganzzahliger Ordnung aus der Polarographie // Ibid. N 5. S. 75—86.

Williams W. E. 1) A class of integral equations // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1963. Vol. 59, N 3. P. 589—597.

Wimp J. 1) A class of integral transforms // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1964. Vol. 14, N 1. P. 33—40.

2) Two integral transform pairs involving hypergeometric functions // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1965. Vol. 7, N 1. P. 42—44.

Wolfersdorf L. von. 1) Über eine Beziehung zwischen Integralen nichtganzer Ordnung // Math. Z. 1965. Bd 90, N 1. S. 24—28.

2) Abelsche Integralgleichung und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung // Math. Nachr. 1965. Bd 27, N 3—4. S. 161—178.

3) Zur Lösung der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung mit konstanten Koeffizienten // Z. angew. Math. und Mech. 1969. Bd 49, N 12. S. 759—761.

4) Zur Theorie der Spiele über dem Einheitsquadrat mit Auszahlungsfunktionen von der Form eines Schmetterlings // Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-Naturwiss. Reihe. 1970. Bd 19, N 6/7. S. 425—433.

Wong R. 1) Asymptotic expansions of fractional integrals involving logarithms // SIAM J. Math. Anal. 1978. Vol. 9, N 5. P. 835—842.

2) Explicit error terms for asymptotic expansions of Mellin convolutions // J. Math. Anal. and Appl. 1979. Vol. 72, N 2. P. 740—756.

Wood D. H. 1) Fractional integration of fundamental solutions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 317—322.

Xie Ting-fan. 1) The best approximation of periodic differentiable functions by trigonometric polynomials // Chinese Math. 1963. Vol. 4, N 2. P. 179—187.

Yoshinaga K. 1) On Liouville's differentiation // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Natur. sci. 1964. N 11. P. 1—17.

2) Fractional powers of an infinitesimal generator in the theory of semigroup distribution // Ibid. 1971. N 18. P. 1—15.

Young E. C. 1) On a generalized Euler—Poisson—Darboux equation // J. Math. and Mech. 1969. Vol. 18, N 12. P. 1167—1175.

Zâgânescu M. 1) Some applications of fractional integration and differentiation in quantum mechanics and field theory // România, Preprint. Univ. din Timisoara. U. T. F. T. 1982. T. 5/82. 30 p.

2) Continuously iterated Schrödinger equation and the Riemann—Liouville and Riesz perators // Ibid. 1982. T. 7/82. 7 p.

Zanelli V. 1) I polinomi di Stieltjes approssimanti in variazione di ordine frazionario // Atti Semin. Mat., Fis. Univ. Modena. 1981. T. 30, N 1. P. 151—175.

2) Funzioni momento convergenti «dal basso» in variazione di ordine non intero // Ibid. N 2. P. 355—369.

Zeilon N. 1) Sur quelques points de la théorie de l'equation intégrale d'Abel // Arkiv. för Mat., Astr. och Fysik. 1924. Bd 18, N 5. S. 1—19.

Zheng X. 1) The singular, mixed problem for a class of Euler—Poisson—Darboux equation // J. of Hangzhou Univ. 1982. Vol. 9, N 1. P. 1—16.

Zygmund A. 1) Some points in the theory of trigonometric and power series // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 36, N 2. P. 586—617.

2) Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, N 1. P. 47—76.

3) A theorem on fractional derivatives // Ibid. N 3. P. 455—464.

4) On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations // J. math. pures et appl. 1956. T. 35, N 3. P. 223—248.

Именной указатель

Адамар Ж. 131, 625
Адамчик В. С. 8
Акопян С. А. 327, 557, 625
Алероев Т. С. 616, 621, 625
Алимов Ш. А. 426, 625
Андреев А. А. 576, 625
Арутюнян Н. Х. 501, 625
Аткинсон Ф. В. 498, 625
Ахиезер Н. И. 231, 497, 499, 559, 563, 625

Бабенко В. Ф. 330, 625
Бабенко К. И. 231, 591, 614, 625
Бабенко Ю. И. 8, 625
Бабич В. М. 576, 588, 625
Баблоян А. А. 572, 625
Бадалян Г. В. 80, 625
Бакаев Н. Ю. 131, 625
Бакиевич Н. И. 558, 625
Бари Н. К. 197, 232, 267, 276, 293, 330, 626
Бейтмен Г. 29, 32, 33, 34, 80, 82, 131, 143, 148, 150, 152, 157, 160, 162, 164, 247, 328, 337, 396, 403, 481, 492, 525, 526, 532, 533, 543, 544, 557, 565, 566, 571, 578, 579, 584, 611, 617, 626
Белинский Э. С. 324, 626
Белоносов С. М. 619, 626
Белый В. И. 324, 333, 626
Бернштейн И. Н. 426, 626
Бесов О. В. 255, 423, 430, 432, 626
Бессонов Ю. Л. 423, 428, 626
Бетилгириев М. А. 244, 626
Бжихатлов Х. Г. 501, 618, 626
Бицадзе А. В. 591, 605, 606, 614, 615, 626
Бородачев Н. М. 573, 626
Боташев А. И. 8, 620, 627
Бохнер С. 424, 626
Брычков Ю. А. 29, 32, 33, 34, 35, 37, 128, 143, 161, 164, 167, 173, 177, 218, 219, 225, 248, 268, 280, 404, 427, 428, 516, 524, 532, 536, 538, 539, 546, 558, 559, 564, 626, 637
Бугров Я. С. 279, 322, 626
Бухгейм А. Л. 81, 626
Быков Я. В. 8, 620, 627

Вайнберг Б. Р. 439, 627
Вакулов Б. Г. 8, 366, 424, 627
Васильев И. Л. 500, 501, 502, 627, 640, 642
Ватсон Дж. Н. 33, 642
Ващенко-Захарченко М. Е. 11, 627
Вебер В. К. 132, 504, 620, 627, 630
Вейс Г. 36, 367, 388, 403, 414, 641
Векуа И. Н. 558, 574, 576, 614, 617, 618, 627
Виленкин Н. Я. 421, 628
Вирченко Н. А. 8, 559, 573, 615, 627, 637
Владимиров В. С. 120, 426, 439, 607, 608, 620, 627
Волков Ю. И. 333, 626
Волкодавов В. Ф. 576, 614, 618, 625, 628
Вольтерра В. 498, 499, 615, 628
Володарская Г. Ф. 503, 504, 639
Воскобойников Ю. Е. 77, 628
Ву Ким Туан 8, 132, 426, 515, 517, 547, 557, 558, 559, 566, 573, 628, 631, 635

Габидзашвили М. А. 424, 431, 628, 632
Гаймназаров Г. 332, 628
Ганеев Р. М. 497, 500, 628
Гарнетт Дж. 83, 628
Гахов Ф. Д. 163, 164, 165, 166, 441, 450, 454, 474, 497, 498, 505, 582, 583, 609, 618, 628
Гейсберг С. П. 134, 136, 233, 239, 322, 628
Гельман И. В. 136, 628

Гельфанд И. М. 120, 124, 132, 230, 360, 402, 407, 421, 426, 621, 628
Гельфанд С. И. 426, 626
Гельфонд А. О. 31, 316, 324, 628
Гильберт Д. 592, 632
Гиндикин С. Г. 16, 439, 440, 627, 628
Глеске Х.-Ю. (Glaeske H.-J.) 8, 524, 558, 626
Глинер Э. Б. 576, 632
Годунова Е. К. 240, 628
Гордеев А. М. 541, 614, 628
Гохберг И. Ц. 163, 231, 459, 470, 477, 490, 497, 498, 628, 629
Граев М. И. 421, 426, 628
Гринченко В. Т. 572, 629
Гусейнов А. И. 198, 199, 232, 276, 629

Давтян А. А. 434, 629
Данфорд Н. 103, 108, 131, 286, 467, 629
Джабиров Д. К. 617, 638
Джрбашян М. М. 5, 13, 16, 34, 35, 75, 76, 80, 232, 261, 262, 321, 324, 336, 481, 499, 515, 518, 557, 604, 616, 621, 629
Дзядык В. К. 321, 330, 629
Диденко А. В. 8, 616, 622, 630, 632
Диткин В. А. 35, 38, 630
Докторский Р. Я. 77, 630
Дрожжинов Ю. Н. 439, 620, 627
Дудучава Р. В. 231, 630
Дынькин Е. М. 431, 630

Евсин В. И. 614, 630
Есмаганбетов М. Г. 330, 429, 630
Ефимов А. В. 321, 330, 630

Желудев В. А. 77, 279, 480, 630
Жук В. В. 330, 630

Забрейко П. П. 102, 131, 250, 477, 487, 630, 632
Завьялов Б. И. 439, 620, 627
Зигмунд А. 5, 54, 264, 265, 267, 275, 276, 316, 321, 630

Ибрагимов И. И. 241, 630
Ильин В. П. 233, 255, 423, 430, 626, 630
Иманалиев М. И. 620, 630
Иосида К. 102, 630

Кабанов С. Н. 78, 630
Капилевич М. Б. 541, 579, 617, 630
Карапетянц Н. К. 77, 82, 83, 137, 236, 237, 238, 321, 431, 498, 631
Карасев И. М. 616, 618, 626, 631
Кашин Б. С. 83, 237, 631
Килбас А. А. 8, 77, 232, 322, 323, 333, 426, 431, 499, 503, 504, 631
Киприянов И. А. 16, 423, 427, 428, 631
Ключанцев М. И. 327, 631
Коган Х. М. 501, 631
Кокилашвили В. М. 424, 430, 431, 432, 632
Колмогоров А. Н. 21, 26, 36, 250, 599, 632
Коробейник Ю. Ф. 324, 337, 632
Косарев Е. Л. 77, 632
Кочура А. И. 616, 622, 632
Кошляков Н. С. 576, 632
Краснов В. А. 320, 429, 632, 642
Красносельский М. А. 102, 131, 136, 137, 477, 632
Крбец М. (Krbec M.) 432, 632
Крейн М. Г. 497, 498, 628, 632
Крейн С. Г. 23, 24, 459, 632
Крепкогорский В. Л. 346, 632
Кривенков Ю. П. 615, 632
Крупник Н. Я. 163, 231, 459, 470, 477, 490, 497, 498, 629
Кудрявцев Д. Л. 330, 632
Курант Р. 592, 632

Ландкоф Н. С. 424, 632
Лебедев Н. А. 318, 324, 641
Лебедев Н. Н. 35, 506, 559, 562, 563, 572, 573, 632, 633
Левин В. И. 240, 628
Левитан Б. М. 320, 633
Леонтьев А. Ф. 316, 324, 628, 633
Лере Ж. 424, 437, 633
Лесковский И. П. 618, 622, 626, 633
Летников А. В. 6, 7, 10, 11, 12, 75, 76, 130, 131, 143, 231, 233, 245, 279, 290, 308, 322, 323, 616, 633,
Лизоркин П. И. 16, 132, 139, 278, 322, 332, 346, 353, 423, 424, 425, 426, 428, 429, 430, 432, 434, 436, 438, 633, 636
Линкер А. И. 238, 503, 633
Линчук Н. Е. 336, 634
Лионс Ж. (Lions J. L.) 426, 636
Литтлвуд Д. Е. 28, 131, 642
Люк Ю. 31, 34, 634

Магарил-Ильяев Г. Г. 239, 423, 428, 429, 634
Мазья В. Г. 425, 634
Макаренко Л. Г. 559, 572, 573, 627, 634
Маламуд М. М. 502, 634
Малаховская Р. М. 621, 634
Маловичко В. А. 326, 634
Малоземов В. Н. 329, 634
Мамедов Р. Г. 328, 634
Манукян М. М. 501, 625
Маричев О. И. 8, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 128, 143, 155, 156, 161, 164, 167, 173, 177, 218, 219, 225, 231, 248, 268, 280, 325, 404, 427, 509, 510, 514, 516, 524, 525, 526, 527, 532, 536, 538, 539, 546, 550, 554, 557, 558, 559, 564, 566, 567, 584, 614, 626, 628, 634, 635, 637
Мацнев Л. Б. 78, 635
Медведев Н. В. 77, 635
Михайлов Л. Г. 79, 635
Михлин С. Г. 28, 381, 383, 417, 426, 479, 635
Мурдаев Х. М. 200, 232, 233, 238, 321, 635
Мусхелишвили Н. И. 22, 23, 163, 165, 194, 231, 441, 450, 454, 497, 498, 635
Мухтаров Х. Ш. 198, 199, 232, 276, 629
Мхитарян С. М. 498, 635

Нагнибида Н. И. 324, 635
Насибов Ф. Г. 241, 635
Натансон И. П. 26, 40, 49, 138, 635
Наурызбаев К. Ж. 330, 630
Нахушев А. М. 616, 618, 621, 626, 635
Некрасов П. А. 12, 231, 309, 323, 616, 635
Нерсесян А. Б. 76, 80, 232, 327, 336, 604, 616, 625, 629
Нестеров С. В. 622, 635, 637
Николаев В. П. 424, 635
Никольская Н. С. 423, 428, 636
Никольский С. М. 16, 21, 25, 26, 28, 36, 210, 211, 255, 277, 321, 330, 353, 388, 423, 426, 428, 430, 432, 498, 626, 633, 636, 641
Ногин В. А. 8, 385, 405, 425, 426, 433, 434, 435, 437, 438, 636

Огиевецкий И. И. 16, 321, 330, 636
Олвер Ф. 220, 636
Олевский М. Н. 614, 637
Оразов И. 618, 637

Оруджаев Г. Н. 328, 634
Осиленкер Б. П. 431, 630
Осипов А. В. 77, 630

Павлов П. М. 439, 637
Паламодов В. П. 426, 637
Пахарева Н. А. 615, 637
Пекарский А. А. 334, 335, 637
Песчанский А. И. 500, 637
Петунин Ю. И. 23, 24, 632
Пилиди В. С. 423, 637
Пинкевич В. Т. 330, 637
Племели И. (Plemelj I.) 231
Покало А. К. 330, 637
Полиа Г. 28, 131, 642
Положий Г. Н. 75, 615, 637
Пономаренко В. Г. 332, 637
Пономаренко С. П. 559, 573, 627, 637
Попов Г. Я. 551, 637
Преображенский Н. Г. 8, 426, 637
Привалов И. И. 231
Прудников А. П. 29, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 128, 143, 161, 164, 167, 173, 177, 218, 219, 225, 248, 268, 280, 404, 427, 516, 532, 536, 538, 539, 546, 558, 564, 630, 637
Пустыльник Е. И. 102, 131, 477, 632

Рабинович В. С. 440, 637
Рабинович Ю. Л. 322, 622, 637
Раджабов Н. 617, 637, 638
Раджабов Э. Л. 425, 638
Рафальсон С. З. 328, 638
Репин О. А. 618, 628
Риекстыньш Э. Я. 222, 233, 234, 243, 244, 333, 638
Риман Б. 10, 614, 638
Розанова Г. И. 240, 638
Розет Т. А. 558, 569, 638
Ромащенко В. А. 573, 627
Рубин Б. С. 8, 76, 77, 78, 80, 82, 83, 129, 131, 132, 135, 232, 234, 236, 237, 238, 321, 406, 424, 425, 426, 431, 432, 434, 435, 437, 438, 498, 499, 501, 502, 503, 504, 631, 633, 636, 638, 639
Русак В. Н. 330, 639
Русев П. К. 337, 639
Рутицкий Я. Б. 136, 137, 632
Руховец А. Н. 573, 639

Саакян А. А. 83, 237, 631
Саакян Б. А. 80, 629, 639
Савелова Т. И. 480, 639
Садикова Р. Х. 240, 639
Сакалюк К. Д. 77, 497, 500, 639
Самарский А. А. 243, 642
Самко С. Г. 6, 7, 8, 76, 131, 132, 133, 137, 139, 200, 231, 232, 233, 235, 238, 321, 322, 323, 332, 333, 358, 373, 382, 385, 388, 389, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 424, 425, 429, 432, 433, 434, 435, 439, 497, 498, 500, 502, 631, 635, 636, 637, 639, 640
Саттаров А. С. 617, 638
Сейтказиева А. 620, 641
Семенов Е. М. 23, 24, 632
Семянистый В. И. 132, 424, 641
Сидоров Ю. В. 220, 221, 641
Скальская И. П. 573, 632
Скориков А. В. 328, 329, 423, 429, 502, 641
Смаилов Е. С. 330, 630
Смирнов В. И. 318, 324, 641
Смирнов М. М. 561, 576, 591, 614, 615, 632, 641
Соболев С. Л. 14, 388, 424, 430, 641
Соболевский П. Е. 102, 131, 477, 632
Солонников В. А. 131, 641
Сонин Н. Я. 12, 76, 77, 233, 308, 309, 320, 323, 506, 558, 568, 641
Старовойтов А. П. 241, 641
Стейн И. 26, 28, 36, 131, 367, 388, 396, 400, 401, 403, 414, 424, 433, 641
Стечкин С. Б. 197, 232, 276, 330, 626, 641
Сунь Юн-Шен 330, 642

Тарасов Р. П. 131, 625
Теляковский С. А. 321, 330, 642
Тиман А. Ф. 16, 241, 273, 274, 330, 642
Титчмарш Е. 35, 505, 515, 518, 559, 563, 642
Тихомиров В. М. 239, 429, 634
Тихонов А. Н. 243, 642
Торин Г. О. 424, 642
Трибель Х. 437, 642
Трикоми Ф. 591, 614, 642

Уиддер Д. В. 505, 558, 572, 642
Уиттекер Э. Т. 33, 642
Улитко А. Ф. 572, 629
Умархаджиев С. М. 7, 434, 435, 640, 642
Урдолетова А. Б. 132, 627
Уфлянд Я. С. 551, 572, 573, 633, 639, 642

Федорюк М. В. 220, 221, 426, 641, 642
Федосов В. П. 8, 426, 623, 642
Филлипс Р. 56, 76, 78, 103, 131, 642
Фихтенгольц Г. М. 358, 642
Фомин С. В. 21, 26, 36, 250, 599, 632
Фохт А. С. 429, 632, 642

Хавин В. П. 425, 634
Харди Г. Г. 28, 131, 213, 214, 642
Хведелидзе Б. В. 231
Хелгасон С. 424, 432, 642
Хилле Э. 56, 76, 78, 103, 131, 642
Хиршман И. И. 505, 558, 572, 642
Хромов А. П. 78, 642

Цейтлин А. И. 8, 642

Черский Ю. И. 505, 628
Чувенков А. Ф. 137, 432, 640, 642
Чумаков Ф. В. 500, 642

Шабунин М. И. 220, 221, 641
Шварц Дж. Т. 103, 108, 131, 286, 467, 629
Шевченко Г. Н. 576, 625
Шелковников Ф. А. 320, 642
Шилов Г. Е. 120, 124, 132, 230, 360, 402, 407, 426, 621, 628
Шихмантер Е. Д. 621, 634

Щербина В. А. 231, 497, 499, 563, 625

Эйлер Л. 9, 76, 614, 642
Эрдейи А. 29, 32, 33, 34, 80, 82, 131, 143, 148, 150, 152, 157, 160, 162, 164, 247, 328, 337, 396, 403, 481, 492, 525, 526, 532, 533, 543, 544, 557, 565, 566, 571, 578, 579, 584, 611, 617, 626
Эскин Г. И. 425, 437, 642

Якубов А. Я. 232, 233, 332, 333, 433, 640
Якубович С. Б. 8, 547, 557, 558, 559, 626, 628, 643
Яненко Н. Н. 623, 642
Ярославцева В. Я. 623, 643
Ясаков А. И. 136, 643

Abel N. H. 7, 9, 75, 643
Adams D. R. 430, 432, 643

Adams R. 425, 643
Agarwal R. P. 79, 242, 329, 643, 651
Ahmad M. I. 573, 643
Ahuja G. 139, 643
Ahuja O. P. 336, 658
Al-Abedeen A. Z. 616, 643
Al-Bassam M. A. 241, 616, 622, 643
Alonso J. 622, 643
Al-Salam W. A. 242, 329, 643
Andersen K. F. 135, 137, 431, 435, 643
Anderson T. P. 77, 661
Aronszajn N. 320, 425, 643, 644
Arora H. L. 616, 643
Askey R. 240, 644
Asral B. 614, 644
Atiyah M. F. 426, 644
Atkinson K. E. 502, 644

Bagby R. J. 426, 430, 434, 438, 643, 644
Baker B. B. 426, 644
Balakrishnan A. V. 131, 644
Balasubramanian R. 77, 644
Banerji P. K. 572, 661
Bang T. 15, 233, 278, 321, 322, 644
Barrett J. H. 616, 644
Beekmann W. 240, 644
Beltrami E. 559, 614, 644
Belward J. A. 231, 644
Benedek A. 423, 430, 644
Berens H. 131, 138, 620, 644, 646
Berger N. 243, 593, 614, 644
Bharatiya P. L. 558, 644
Bhise V. M. 138, 325, 565, 644
Bhonsle B. R. 560, 644
Biacino L. 321, 429, 624, 644, 645
Bleistein N. 226, 234, 645
Blum E. K. 614, 645
Blumenthal L. M. 323, 645
Bôcher M. 75, 645
Boman J. 333, 645
Bora S. L. 138, 645
Bosanquet L. S. 76, 77, 131, 133, 134, 214, 238, 239, 240, 241, 322, 332, 645
Bouwkamp C. J. 570, 645
Box M. A. 566, 656
Braaksma B. L. J. 325, 561, 564, 645
Bragg L. R. 622, 645
Brakhage H. 79, 645
Brédimas A. 132, 142, 322, 432, 645
Brenke W. C. 8, 645
Bresters D. W. 426, 593, 618, 645
Bureau F. J. 618, 646
Burkill J. C. 239, 646
Burlak J. 558, 559, 646
Busbridge I. W. 559, 646
Buschman R. G. 8, 320, 505, 557, 560, 561, 565, 566, 567, 568, 646, 662
Butzer P. L. 5, 16, 131, 232, 279, 321, 322, 330, 331, 332, 333, 644, 646

Calderon A. P. 425, 646
Campos L. M. B. C. 335, 646
Carleman T. 333, 497, 499, 646
Cartwright D. I. 81, 646
Cayley A. 75, 646
Center R. W. 11, 646
Chakrabarty M. 570, 659
Chan C. K. 77, 646
Chandrasekharan K. 214, 233, 646
Chanillo S. 426, 430, 438, 646
Chen Y. W. 77, 230, 231, 257, 321, 618, 646
Cheng H. 619, 646
Chiang D. 501, 655
Choudhary B. 133, 646
Chrysovergis A. 320, 646
Civin P. 15, 321, 647
Clements D. L. 619, 647
Colzani L. 439, 647
Conlan J. 139, 647, 653
Cooke J. C. 572, 573, 647
Copson E. T. 426, 557, 559, 562, 615, 617, 619, 644, 647
Cossar J. 16, 133, 241, 647
Cotlar M. 431, 647

Darboux G. 614, 615, 647
Davis H. T. 6, 79, 231, 322, 622, 647
Delerue P. 423, 647
Diaz J. B. 335, 614, 647
Di Giorgio M. 429, 645
Dimovski I. H. 8, 231, 324, 336, 624, 647
Dixit L. A. 560, 647
Doetsch G. 132, 647
Domingues A. G. 437, 647
Drianov D. P. 332, 647
Dwivedi A. P. 573, 648
Dyckhoff H. 322, 330, 332, 333, 646

Edels H. 77, 648
Eggermont P. P. B. 77, 648
Elrod H. G., Jr. 558, 648
Erdelyi A. 15, 16, 79, 80, 132, 134, 231, 244, 249, 320, 324, 325, 327, 337, 557, 559, 560, 561, 567, 578, 615, 616, 647, 648 (см. также Эрдейи А.)
Estrada R. 132, 648
Exton H. 329, 648

Fabian W. 80, 333, 648
Fattorini H. O. 131, 648
Favard J. 15, 330, 648
Feller W. 175, 232, 648
Fenyö S. 6, 648
Ferrar W. L. 322, 648
Fettis H. E. 77, 648
Fisher B. 8
Fisher M. J. 76, 425, 437, 649
Flett T. M. 77, 82, 131, 241, 334, 335, 425, 649
Fourier J. 9, 16, 649
Fox C. 324, 328, 557, 558, 563, 564, 565, 566, 573, 649
Fremberg N. E. 426, 649
Frie W. 77, 649
Friedlander F. G. 615, 649
Frostman O. 424, 649
Fugère B. J. 624, 664
Fujiwara M. 615, 649

Gaer M. C. 242, 335, 649
Garding L. 440, 649
Gatto A. E. 431, 649
Gearhart L. 136, 650
Gilbert R. P. 580, 581, 614, 617, 650
Glaeske H.-J. 8 (см. также Глеске Х.-Ю.)
Gomes M. I. 8, 650
Gopala Rao V. R. 426, 438, 650
Gordon A. N. 559, 650
Gorenflo R. 77, 650
Görlich E. 322, 330, 332, 333, 646
Greatheed S. S. 11, 650
Grünwald A. K. 10, 11, 233, 279, 322, 323, 650
Gupta H. L. 567, 650
Gupta K. C. 139, 565, 650
Gupta S. D. 567, 650

Gupta Sulaxana K. 241. 650
Gutierrez C. E. 431, 649
Gwilliam A. E. 334, 650

Habibullah G. M. 561, 566, 650
Hadamard J. 12, 251, 261, 320, 323, 650 (см. также Адамар Ж.)
Hall N. S. 614, 650
Handelsman R. A. 222, 243, 244, 593, 614, 644, 650, 657
Harboure E. 430, 431, 650
Hardy G. H. 13, 14, 28, 76, 77, 79, 82, 131, 132, 214, 233, 239, 240, 241, 316, 321, 323, 334, 650, 651 (см. также Харди Г. Г.)
Hearne K. 77, 648
Hedberg L. I. 424, 432, 651
Heinig H. P. 135, 431, 643, 651
Heins A. E. 615, 649
Helgason S. 424, 651
Henrici P. 559, 615, 651
Herson D. L. 132, 651
Herz C. S. 432, 651
Heywood P. 132, 497, 569, 651
Higgins T. P. 143, 231, 326, 557, 558, 559, 560, 561, 623, 651
Hille E. 78, 230, 651 (см. также Хилле Э.)
Hirsch F. 131, 651
Hirshman I. I. 335, 651 (см. также Хиршман И. И.)
Holmgren Hj. 10, 11, 75, 76, 233, 241, 320, 323, 423, 611, 616, 651
Hövel H. W. 131, 651
Huber A. 614, 651
Hughes R. J. 239, 651
Humbert P. 79, 651

Isaacs G. L. 76, 238, 651
Izumi S. 330, 651

Jackson F. H. 329, 651
Jain N. C. 423, 652
Joachimsthal F. 75, 652
Johnson R. 8, 424, 425, 652
Jones B. F., Jr. 426, 652
Jones D. S. 497, 569, 652
Joshi B. K. 567, 652
Joshi C. M. 80, 652
Joshi J. M. Ch. 325, 652
Juberg R. K. 231, 652

Kalia R. N. 559, 652
Kalisch G. K. 76, 132, 502, 652
Kalla S. L. 8, 138, 326, 561, 562, 563, 565, 568, 652
Kanwal R. P. 132, 648
Kashyap N. K. 562, 654, 659
Kato T. 498, 652
Katsaras A. 329, 652
Kaul C. L. 427, 652 (см. также Koul C. L.)
Kelland P. 11, 652
Kesarwani R. N. (Narain Roop) 564, 565, 652
Khan M. A. 329, 653
Khandekar P. R. 567, 653
Kim Hong Oh 334, 653
King L. V. 559, 653
Kiryakova V. S. 231, 336, 423, 624, 647, 659
Kober H. 15, 16, 76, 131, 132, 230, 231, 232, 234, 320, 324, 325, 335, 557, 648, 653
Koeller R. C. 8, 653
Koh E. L. 139, 647, 653
Koizumi S. 335, 653
Kölbig K. S. 8
Komatsu H. 131, 653
Komatu Y. 336, 337, 653
Koschmieder L. 82, 427, 653
Kostitzin V. 79, 653
Koul C. L. 565, 659 (см. также Kaul C. L.)
Kralik D. 330, 653
Krantz S. G. 431, 653
Krishna S. 427, 655
Krug A. 323, 653
Kumbhat R. K. 326, 561, 565, 653, 661
Kuttner B. 231, 241, 653

Lacroix S. F. 9, 654
Lamb W. 139, 654
Landau E. 239, 650
Laplace P. S. 9, 654
Laurent H. 323, 654
Lavoie J. L. 143, 242, 335, 654
Leibniz G. W. 9, 654
Leray J. 424, 654 (см. также Лере Ж.)
Levy M. E. 77, 656
Lew J. S. 222, 243, 338, 650
Lewy H. 618, 654
Linfoot E. H. 241, 645
Lions J. L. 131, 619, 654 (см. также Лионс Ж.)
Liouville J. 7, 10, 11, 79, 130, 131, 233, 320, 322, 323, 616, 654
Littlewood J. E. 14, 28, 76, 77, 82, 131, 132, 233, 239, 316, 321, 323, 334, 650 (см. также Литтлвуд Д. Е.)
Liu D. 329, 652
Liverman T. P. G. 320, 654
Loo C.-T. 241, 654
Lorch Lee 337
Love E. R. 8, 15, 16, 75, 76, 81, 134, 230, 231, 232, 239, 321, 326, 337, 557, 560, 561, 562, 566, 567, 573, 619, 647, 654, 656
Lowengrub M. 501, 559, 573, 655
Lowndes J. S. 320, 326, 558, 559, 563, 573, 578, 614, 615, 616, 617, 655
Lu P. 77, 646
Luke Y. L. 34, 655 (см. также Люк Ю.)
Lundgren T. 501, 655

Macias R. A. 430, 431, 650
Mackie A. G. 569, 571, 655
Madhavi Dighe 565, 644, 655
Mainra V. P. 564, 655
Manandhar R. P. 565, 655
Mandelbrojt S. 615, 655
Manocha H. L. 80, 242, 243, 655
Marchaud A. 14, 131, 136, 232, 423, 655
Marke P. W. 6, 655
Martić B. 138, 655
Mathai A. M. 564, 655
Mathur B. L. 427, 655
Mathur S. L. 138, 139, 655
Matsuyama N. 331, 655
McBride A. C. 5, 8, 16, 129, 132, 139, 142, 143, 230, 231, 320, 326, 561, 624, 648, 655
McClure J. P. 222, 656
McKellar B. H. J. 566, 656
McMullen J. R. 81, 646
Mikolàs M. 6, 8, 16, 241, 321, 322, 656
Miller J. B. 131, 656
Minakshisundaram S. 214, 233, 241, 646, 656
Minerbo G. N. 77, 656
Miserendino D. 429, 624, 644, 645, 656
Misra A. P. 82, 656
Mittal P. K. 139, 565, 650
Modi G. C. 427, 661
Mohapatra R. N. 240, 656

Montel P. 13, 76, 241, 321, 323, 423, 429, 656
Moppert K. F. 233, 322, 656
Most R. 322, 656
Mourya D. P. 427, 656
Muckenhoupt B. 8, 237, 424, 431, 656
Mulla F. 320, 425, 644
Müller C. 560, 656

Nagy B. S. 15, 321, 322, 330, 656
Nair V. C. 568, 656
Narain Roop 557, 564, 656
Nasim C. 565, 572, 657
Nessel R. J. 5, 646
Neunzert H. 500, 657
Nieva del Pino M. E. 326, 657
Nickel K. 79, 645
Nishimoto K. 8, 143, 323, 336, 620, 621, 623, 657, 658, 661, 662
Noble B. 559, 657
Norrie D. H. 77, 644

Obradovic M. 336, 658
Okikiolu G. O. 6, 137, 232, 235, 424, 565, 657
Oldham K. B. 5, 7, 143, 657
Olmstead W. E. 244, 650, 657
O'Neil R. 136, 137, 328, 330, 432, 657
Orton M. 500, 657
O'Shaughnessy L. 615, 657
Osler T. J. 16, 80, 81, 143, 232, 233, 241, 242, 320, 335, 337, 647, 654, 657
Owa S. 8, 323, 324, 336, 620, 621, 657, 658, 661, 662

Padmanabhan K. S. 336, 659
Paley R. E. A. C. 241, 658
Panzone R. 423, 430, 431, 644, 647
Parashar B. P. 326, 562, 658
Pathak R. S. 565, 566, 658
Peacock G. 11, 658
Peetre J. 83, 131, 654, 658
Pennell W. O. 82, 658
Penzel F. 232, 501, 658
Peres J. 498, 503, 664
Pestana D. D. 8, 650
Peters A. S. 500, 559, 658
Pichorides S. K. 163, 658
Pinney E. 570, 659
Pitcher E. 615, 659
Plessis N. du 424, 430, 659
Poisson S. D. 614, 615, 659
Polking J. C. 242, 659
Pollard H. 569, 659
Polya G. 28, 650 (см. также Полиа Г.)
Popoviciu T. 136, 659
Post E. L. 14, 241, 281, 322, 332, 615, 659
Prabhakar T. R. 231, 558, 561, 562, 568, 570, 571, 654, 659
Pryde A. J. 434, 659

Quinn D. W. 614, 650

Raina R. K. 423, 427, 565, 659
Rakesh S. L. 139, 659
Reddy G. L. 336, 659
Reimann H. M. 83, 659
Rieder P. 79, 645, 659
Richberg R. 560, 656
Riemann B. 10, 75, 659 (см. также Риман Б.)
Riesz M. 13, 14, 15, 212, 214, 230, 231, 232, 233, 240, 424, 426, 651, 659
Roach G. F. 5
Rogosinski W. W. 241, 651
Rooney P. G. 134, 324, 328, 558, 565, 569, 651, 660
Ross B. 5, 6, 8, 338, 660
Rothe R. 8, 660
Rubel L. A. 242, 335, 649
Rusia K. C. 558, 560, 567, 650, 660
Rychener T. 83, 659

Sadowska D. 501, 660
Saigo M. 8, 326, 327, 618, 660
Saksena K. M. 565, 566, 660
Sampson C. H. 426, 660
Sargent W. L. G. 239, 660
Sato M. 330, 651
Satô T. 75, 660
Sawyer E. 431, 660
Saxena R. K. 138, 326, 427, 561, 564, 565, 566, 572, 573, 645, 652, 655, 660, 661
Saxena V. P. 565, 661
Schneider W. R. 79, 661
Schuitman A. 325, 561, 645
Schwartz J. T. 346, 661 (см. также Шварц Дж. Т.)
Schwartz L. 120, 126, 132, 424, 425, 426, 661
Segovia C. 430, 431, 650
Sekine T. 336, 661, 662
Senator K. 620, 661
Sethi P. L. 572, 661
Sewell W. E. 14, 320, 321, 323, 333, 615, 659, 661
Shah M. 559, 661
Shapiro H. S. 333, 645, 661
Sharma B. L. 243, 655
Sharma S. 329, 661
Sharpley R. 136, 661
Shen C. Y. 336, 658
Shinbrot M. 619, 661
Singh B. 139, 564, 661
Singh C. 560, 567, 661
Singh Rattan 565, 661
Singh R. P. 560, 661
Singh Y. P. 568, 663
Sirola R. O. 77, 661
Skórnik K. 139, 661
Slater L. J. 570, 661
Smith C. V. L. 139, 661
Smith K. T. 320, 425, 643, 644
Sneddon I. N. 5, 16, 320, 551, 558, 559, 561, 572, 648, 655, 657, 661
Sohncke L. 616, 662
Soni K. 558, 564, 569, 570, 662
Spain B. 81, 662
Spanier J. 5, 7, 143, 657
Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 438, 624, 662
Srivastav R. P. 558, 662
Srivastava H. M. 134, 336, 427, 505, 565, 566, 568, 620, 621, 646, 657, 662
Srivastava K. J. 138, 324, 566, 662
Srivastava K. N. 558, 560, 561, 567, 573, 662
Srivastava T. N. 568, 663
Stein E. M. 83, 131, 331, 424, 425, 426, 431, 497, 656, 663 (см. также Стейн И.)
Steinig J. 238, 663
Stens R. L. 322, 330, 331, 332, 333, 646
Stolle H. W. 6, 648
Strichartz R. S. 430, 435, 663
Strömberg J.-O. 135, 431, 663
Stuloff N. 322, 663
Sunouchi G. 335, 663
Swaroop R. 562, 567, 663
Szeptycki P. 320, 425, 644

Ta Li 557, 560, 663

Taberski R. 330, 332, 663
Takahashi S. 321, 663
Takano K. 439, 663
Talenti G. 320, 663
Tamarkin J. D. 14, 75, 76, 78, 232, 651, 663
Tanno Y. 572, 663
Tardy P. 11, 663
Tazali A. Z.-A. M. 620, 663
Tedone O. 558, 572, 663
Thielman H. P. 82, 663
Thorin G. O. 232, 424, 664 (см. также Торин Г. О.)
Titchmarsh E. C. 79, 651 (см. также Титчмарш Е.)
Tonelli L. 14, 75, 664
Tranter C. J. 559, 572, 664
Trebels W. 5, 232, 239, 646, 664
Tremblay R. 6, 143, 230, 242, 335, 624, 654, 664
Tricomi F. G. 235, 557, 664 (см. также Трикоми Ф.)
Trimèche K. 328, 664
Trione S. E. 426, 437, 647, 664
Tripathy N. 241, 653
Trivedi T. N. 573, 648
Türke H. 239, 664

Ugniewski S. 77, 664
Upadhyay M. 329, 664

Varma R. S. 138, 664
Varma V. K. 571, 664
Vasilache S. 423, 664
Verblunsky S. 233, 239, 240, 664
Verma A. 242, 329, 643
Verma R. U. 427, 564, 565, 664
Volterra V. 76, 78, 80, 498, 503, 664 (см. также Вольтерра В.)
Vries G. de 77, 644

Walton J. R. 501, 572, 573, 655, 664
Wang F. T. 241, 664
Watanabe J. 131, 665
Watanabe T. 440, 665
Watanabe Y. 80, 233, 241, 665
Weber H. 559, 665
Weinacht R. J. 614, 650
Weinberger H. F. 614, 647
Weinstein A. 614, 615, 617, 618, 665
Weiss G. 424, 431, 663 (см. также Вейс Г.)
Weiss R. 77, 665
Welland G. V. 331, 424, 665
Westphal U. 16, 131, 138, 239, 279, 321, 322, 331, 332, 620, 644, 646, 651, 664, 665
Weyl H. 13, 14, 76, 131, 321, 665
Wheeden R. L. 8, 135, 424, 425, 431, 434, 649, 656, 663, 665
Whittaker E. T. 77, 665 (см. также Уиттекер Э. Т.)
Wick J. 78, 500, 657, 665
Widder D. V. 132, 137, 138, 231, 557, 560, 567, 569, 659, 665 (см. также Уиддер Д. В.)
Widom H. 498, 665
Wiener K. 621, 665
Williams W. E. 497, 499, 563, 570, 666
Wimp J. 558, 559, 560, 666
Wolfersdorf L. von 231, 232, 497, 500, 501, 666
Wong R. 222, 226, 234, 244, 656, 666
Wood D. H. 619, 666

Xie Ting-fan 330, 666

Yoshinaga K. 131, 132, 423, 666
Young A. 77, 648
Young E. C. 614, 618, 666
Young L. C. 15, 75, 230, 654

Zâgânescu M. 8, 666
Zanelli V. 81, 666
Zeilon N. 231, 497, 501, 557, 666
Zeller K. 239, 664
Zheng X. 619, 666
Zygmund A. 14, 82, 83, 131, 321, 330, 331, 424, 497, 663, 666 (см. также Зигмунд А.)

Предметный указатель

Абеля интегральное уравнение 38, 39
— — — многомерное 340
— — — обобщенное 77, 445, 449, 500
— — — пирамидальный аналог 417, 418
Абеля типа интегральный оператор 530
Абсолютно непрерывная функция 21, 109
Адамара свойство 97
Асимптотическая последовательность 220
Асимптотическое разложение (ряд) 220
— — дробного интеграла 221, 222, 224, 226, 227, 228, 243, 244
— — степенное 220
Асимптотическое решение уравнения Абеля 229

Банаха теорема 28
Бернштейна неравенство 277
— — аналог 277, 278, 332
Бесселев дробный интеграл $G^{\alpha}\varphi$ 253, 396
Бесселев потенциал $G^{\alpha}\varphi$ 253, 396
— — анизотропный 436
— — модификация $G^{\alpha}_{\pm}\varphi$, $\mathfrak{G}^{\alpha}\varphi$ 254, 397
— — односторонний $G^{\alpha}_{\pm}\varphi$ 436, 437
Бесселева дробная производная $(E \pm \mathscr{D})^{\alpha} f$, $(E \pm \mathbf{D})^{\alpha} f$ 255
Бесселево ядро 396
Бесселя функция 1-го рода $J_{\nu}(z)$ 32
— — модифицированная $I_{\nu}(z)$ 32
Бесселя—Клиффорда функция $\overline{J}_{\nu}(z)$ 530
Бесселя—Мейтленда функция $J^{\mu}_{\nu}(z)$ 325
Бета-функция $B(z, w)$ 31
Биномиальные коэффициенты $\binom{a}{b}$ 29
Бисингулярный интегральный оператор 346
Бохнера формула 358

Вейля дробная производная $\mathscr{D}^{(\alpha)}_{\pm} f$, $\mathbf{D}^{(\alpha)}_{\pm} f$ 263, 266
— — — кратная (смешанная) 353
— — — усеченная 270
Вейля дробный интеграл $I^{(\alpha)}_{\pm}\varphi$ 263, 264
— — — кратный (смешанный) 353
Вейля — Лиувилля дробная производная $\mathscr{D}^{(\alpha)}_{\pm} f$ 266
Вейля—Маршо дробная производная $\mathbf{D}^{(\alpha)}_{\pm} f$ 266
— — — — усеченная $\mathbf{D}^{(\alpha)}_{+, \varepsilon} f$ 270
Волновое уравнение Даламбера 577
Вольтерра интегральное уравнение 477
— функции $\mu(x, \sigma, \alpha)$, $\nu(x)$, $\mu_{t, \beta}(x)$ 481, 482

Гамма-функция $\Gamma(z)$ 29
Гаусса—Вейерштрасса интеграл $W_t\varphi$ 366
— — ядро $W(x, t)$ 366
Гельдера пространство $H^{\lambda} = H^{\lambda}(\Omega)$ 21, 22, 24
— — обобщенное H^{ω}, $H^{\omega}_0([0, 2\pi])$ 196, 274
— — с весом $H^{\lambda}(\rho) = H^{\lambda}(\Omega; \rho)$, $H^{\lambda}_0(\rho) = H^{\lambda}_0(\Omega; \rho)$ 22, 23
Гельдера условие 21, 22

— — обобщенное 24
Гельмгольца уравнение обобщенное двуосесимметрическое 577
Гельфонда—Леонтьева обобщенное интегрирование и дифференцирование $I^n(a; f)$, $\mathcal{D}^n(a; f)$ 316, 317, 318
Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ 31
— — Горна $F_3(a, a', b, b'; c; x, y)$ 157
— — вырожденная (Куммера) ${}_1F_1(a; c; z)$ 32
— — — Гумберта $\Phi_1(\ldots)$, $\Xi_1(\ldots)$, $\Xi_2(\ldots)$ 162, 543, 579
— — обобщенная ${}_pF_q((\alpha_p); (\beta_q); z)$ 82
Гиперсингулярный интеграл $\mathbf{D}^\alpha f$, $T^\alpha f$ 367, 368, 372
— — аннигиляция 376
— — нейтрального типа 382
— — нечетного типа 382
— — параболический $T^\alpha f$, $\mathfrak{T}^\alpha f$ 413, 414
— — символ $\mathcal{D}^\alpha_\Omega(x)$ 383
— — со «взвешенными» разностями $T^\alpha_l f$ 405
— — с однородной характеристикой 381, 386
— — усеченный $\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f$ 368
— — характеристика 381
— — четного типа 382
Грюнвальда—Летникова дифференцирование в области 429
— — дробная производная $f^{\alpha)}_\pm$ 280
— — — — многомерная $f^{\alpha)}_{\pm\ldots\pm}$ 355
— — — — на конечном отрезке $f^{\alpha)}_{a+}$, $f^{\alpha)}_{b-}$ 290
Грюнвальда—Летникова дробный интеграл $J^\alpha_{a+}\varphi$, $J^\alpha_{b-}\varphi$ 290, 291
Грюнвальда—Летникова—Рисса дробная производная $f^{\alpha)}$ 280, 281

Джрбашяна обобщенный дробный интеграл $L^{(\omega)}\varphi$ 261, 262
Дзета-функция Римана, обобщенная $\zeta(s, a)$ 33
Дирихле ряд 313
— формула 26
— — пирамидальный аналог 417
Дифференциальное уравнение дробного порядка, обыкновенное 596
— — — — задача Дирихле 605
— — — — задача типа Коши 597, 602
— — — — линейное 602
— — — — — с постоянными коэффициентами 607
Дифференциальное уравнение целого порядка, обыкновенное 610
Дробная производная абсолютно непрерывной функции 208
— — аналитической функции 313, 314
— — в комплексной области $\mathcal{D}^\alpha_{z_0}f$, $\mathcal{D}^\alpha_{\pm,\theta}f$, $\mathcal{D}^\alpha_\pm f$ 308, 311, 312, 313
— — комплексного порядка 45
— — Коссара 133
— — от функции по функции $\mathcal{D}^\alpha_{a+;g}f$ 249, 335
— — периодической функции (см. Вейля дробная производная)
— — по Адамару $\mathfrak{D}^\alpha_\pm f$, $\mathfrak{D}^\alpha_{a+}f$, $\mathfrak{D}^\alpha_{b-}f$ 252, 253
— — по направлению $f^{(\alpha)}_a$, $\mathfrak{D}^\alpha_\rho f$ 348, 427, 428
— — Рушевея 319
— — чисто мнимого порядка $\mathcal{D}^{i\theta}_{a+}f$ 45
Дробная q-производная 329
Дробная степень оператора 103, 406, 407
Дробное интегродифференцирование аналитических функций 214, 308, 312
— — — — обобщение 316
Дробный интеграл в комплексной области $I^\alpha_{z_0}\varphi$, $I^\alpha_{\pm,\theta}\varphi$, $I^\alpha_\pm\varphi$ 308, 309, 310, 311
— — обобщенной функции 120, 124, 127, 128, 129
— — от функции по функции $I^\alpha_{a+;g}\varphi$ 248, 250
— — по Адамару $\mathfrak{I}^\alpha_\pm\varphi$, $\mathfrak{I}^\alpha_{a+}\varphi$, $\mathfrak{I}^\alpha_{b-}\varphi$ 251, 252
— — по направлению $I^\alpha_\omega f$ 348
— — типа Эрдейи — Кобера $I^\alpha_{a+;\sigma,\eta}f$, $I^\alpha_{b-;\sigma,\eta}f$ 246
— — чисто мнимого порядка $I^{i\theta}_{a+}f$, $I^{i\theta}_{b-}f$, $I^{i\beta}_+$ 45, 81, 86
Дробный q-интеграл ${}_qI^{-\nu}_-$ 329

Зигмунда обобщенный класс $\Lambda^\omega_0([0, 2\pi])$ 274
— типа оценка 196, 197

Индекс оператора $\varkappa$ 459
— G-преобразования η 513
— сингулярного интегрального уравнения $\varkappa$ 442
— сложности G-преобразования $p+q$ 513
Индексные законы 145, 230, 231, 527
Интегральная формула Коши 308
Интегральное преобразование 34
— — по индексу 34, 545
— — типа свертки 34, 512
Интегральное уравнение Абеля (см. Абеля интегральное уравнение)
— — первого рода 441, 505
— — композиционного типа 540
— — с гипергеометрической функцией Гаусса 506
— — сингулярное 442
— — — нетеровость 460, 461
— — с логарифмическим ядром 504
— — со степенно-логарифмическим ядром 480, 488
— — — — — — нетеровость 488
— — со степенным ядром 441, 445, 459
— — — — — нетеровость 459
— — с функцией Бесселя 530, 537
— — с функцией Лежандра 508
Инфинитезимальный (производящий) оператор полугруппы 103

Карлемана уравнение 456
Класс абсолютно непрерывных функций $AC(\Omega)$ 21
Конечная часть интеграла (в смысле Адамара) $p.f.$, pf 97, 618, 619
Коши формула 12, 313
Краевая задача Гильберта 582
— — Дирихле (весовая) 583, 584, 585,

594, 595, 605, 606, 621
— — Коши 585, 590, 592, 597, 598, 620
— — Неймана (весовая) 584, 585, 595, 596
— — типа Дирихле 597
— — — Коши 597, 601, 602

Лапласа уравнение 586
Лебега мажорантная теорема 26
— точка 54
Лежандра присоединенная функция $P_\nu^\mu(z)$ 32
Лейбница правило 214
— — аналог 242
— — обобщенное 216, 241, 242, 332
— — — интегральный аналог 218, 242
Лизоркина класс Φ 352
— пространство обобщенных функций Φ', Ψ' 124, 360
— — основных функций Φ, Ψ 122, 352, 359
Липшицевы классы $H^1(\Omega)$, H_p^λ, h_p^λ 21, 200

Лиувилля дробная производная на оси $\mathscr{D}_\pm^\alpha f$ 85
— — — частная (смешанная) $\mathscr{D}_\pm^{\alpha_k} f$ 343
— — — — — в форме Маршо 347
— — — — — — — — усеченная $\mathbf{D}_{+\ldots+,\varepsilon}^\alpha f$ 347, 349
Лиувилля дробный интеграл $I_\pm^\alpha \varphi$, $I_{\pm\ldots\pm}^\alpha \varphi$ 85, 343
— класс дробной гладкости $G^\alpha(L_p)$ 399
Лоренцево расстояние 407

Макенхоупта условие 136
Макенхоупта—Видена условие 365
Макдональда функция $K_\nu(z)$ 33, 396
Маршо дробная производная, аналог 253
— — — на оси $\mathbf{D}_\pm^\alpha f$ 95, 102
— — — — — усеченная $\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^\alpha f$ 96, 102
— — — обобщенная 136
— — — на отрезке $\mathbf{D}_{a+}^\alpha f$, $\mathbf{D}_{b-}^\alpha f$ 180, 181
— — — — — усеченная $\mathbf{D}_{a+,\varepsilon}^\alpha f$ 181
— — — на полуоси 97
Мейера G-функция $G_{pq}^{mn}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$ 34
Метод суммирования интегралов ((C, α)-метод) 214
Миттаг-Леффлера функция $E_\alpha(z)$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ 33
Модуль непрерывности (интегральный) $\omega_p(f, t)$ 110, 113, 116
— — дробного порядка 332
Мультипликатор 435
Мусхелишвили класс H^* 194

Нейтральная периодическая функция 353
Неравенство Гельдера 25
— Минковского 25, 26
— типа Бернштейна 435
— — Колмогорова 213, 239
Нетера оператор 459

Оператор бесселева дробного интегрирования G^α 253
— d-характеристика (n, m) 459
— Кобера (Кобера—Эрдейи) $I_{\eta,\alpha}^+\varphi$, $K_{\eta,\alpha}^-\varphi$ 246
— несверточный с функцией Бесселя в ядре $\overline{J}_{\alpha,\lambda}^\pm$, $\overline{I}_{\alpha,\lambda}^\pm$ 537
— нормально разрешимый 459
— полисингулярный 356
— Римана—Лиувилля I_{a+}^α, I_{b-}^α, $\mathscr{D}_{a+}^\alpha$, $\mathscr{D}_{b-}^\alpha$ 42, 43
— сингулярный S 163
— с однородным ядром 28
— со степенно-логарифмическим ядром $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $I_{b-}^{\alpha,\beta}$ 291
— теплопроводности 406, 411
— типа бесселева полипотенциала 356
— — полипотенциала (Рисса) $\mathscr{K}^\alpha$ 355
— — потенциала Рисса $I^{(\alpha)}$, $I_\pm^{(\alpha)}$ 268
— — Эрдейи—Кобера $I_{a+;\sigma,\eta}^\alpha$, $I_{b-;\sigma,\eta}^\alpha$ 246
— транспонированный 471
— урезания (проектор) P_{ab}, P_+, P_- 171
— Эрдейи $I_{0+;\sigma,\eta}^\alpha$, $I_{-;\sigma,\eta}^\alpha$ 246
— Эрдейи—Кобера $I_{\eta,\alpha}$, $K_{\eta,\alpha}$ 246
— — — аналог 554
— — — обобщенный $J_\lambda(\eta, \alpha)$, $R_\lambda(\eta, \alpha)$ 535
O-символика $f = O(g)$, $f = o(g)$, $f \sim g$ 30

Параболические потенциалы $H^\alpha\varphi$, $\mathscr{H}^\alpha\varphi$ 412, 413
Парные уравнения 551, 553
Парсеваля равенство 37
Показатель Гельдера 21
— сопряженный 25
Полугрупповое свойство 42, 43, 51, 52, 86, 127, 145, 175, 176, 216, 248, 252, 254, 257, 264, 268, 310, 342, 348, 364, 367, 371, 397, 408, 409, 421
Поста обобщенное дифференцирование $a(\mathscr{D})f$, $a[\mathscr{D}]f$ 281
Потенциал Рисса $I^\alpha\varphi$ 173, 357, 363
— — аналог $I^{(\alpha)}\varphi$ 268
— — анизотропный 430
— — гиперболический (с лоренцевым расстоянием) $I_{P\pm i0}^\alpha f$, $I_\square^\alpha f$ 407, 409
— — модифицированный $H^\alpha\varphi$ 173
— — на отрезке 179
— — на полуоси 178
— — обобщенный $I_\Omega^\alpha\varphi$ 431
— — односторонний 370
— — — модифицированный $I_{0+}^\alpha\varphi$, $B_\pm^\alpha\varphi$ 432, 433
— — с радиальной плотностью 431
— осесимметрический p-мерный 586
Потенциал Фелера $M_{u,v}^\alpha\varphi$, $M^\alpha\varphi$ 174, 454
— — аналог $I_\mu^{(\alpha)}\varphi$ 269
Похгаммера петля 314, 315
— символ $(a)_n$ 29
Преобразование Варма 138
— интегральное (см. интегральное преобразование)
— Конторовича—Лебедева $K_{ix}^{\pm1}\{f(t)\}$ 35, 545
— Лапласа $L\varphi = L\{\varphi(t); p\}$ 38
— — видоизмененное $\Lambda_\pm f$, $\Lambda_\pm^{-1} f$ 518
— — дробного интеграла и производной

116, 117, 351
— — многомерное 351
— — обобщенное 526
— — свертки 38
— Мелера—Фока 550, 553, 554
— Меллина $\varphi^*(s)=\mathfrak{M}\{\varphi(t);\ s\}$ 36
— — дробного интеграла и производной 118, 119, 134, 324, 351
— — многомерное 351
— — свертки 37
— Стилтьеса 35, 138
— Фурье $\mathcal{F}\varphi=\mathcal{F}\{\varphi(t);\ x\}=\hat{\varphi}(x)$ 35, 36
— — в смысле обобщенных функций 360
— — дробного интеграла и производной 114, 350
— — многомерное 350
— — свертки 36
— — сингулярного интеграла 163
— — синус и косинус $\mathcal{F}_s\varphi$, $\mathcal{F}_c\varphi$ 36
— Ханкеля 35
— — видоизмененное $\{J_\nu(2\sqrt{x})\}f$ 524
— — модифицированное $S_{\eta,\alpha;\sigma}f$ 247
— — обобщенное $S\begin{pmatrix}a,\ b,\ y\\ \eta,\ \alpha,\ \sigma\end{pmatrix}f$ 535
— — урезанное 325
F_3-преобразование 548
G-преобразование 512, 516, 517
— — характеристика $(c^*,\ \gamma^*)$ 513
H- и Y-преобразования 525
W-преобразование 545
Пространство бесселевых потенциалов $L_p^\alpha\ (R^1)=H^{\alpha,p}(R^1)=G^\alpha(L_p)$ 255, 399
— — — на отрезке 329
— липшицевых функций H_p^λ, h_p^λ, $\tilde{H}_p^\lambda$ 200
— параболических потенциалов $H^\alpha(L_p)$ 413
— — — обобщенное 437, 438
— риссовых потенциалов $I^\alpha(L_p)$ 104, 372
— суммируемых функций $L_p=L_p(\Omega)$ 25
— — — со смешанной нормой $L_{\bar{p}}(R^n)$ 344, 345, 356
— — — с экспоненциальным весом $L_{p\omega}$ 94
— функций ограниченной в среднем осцилляции BMO $(a,\ b)$ 83
Пси-функция $\psi(z)$ 31
Пуанкаре—Бертрана формула перестановки 165
Пуассона интеграл $P_t\varphi$ 366
— ядро $P(x,\ t)$ 366

Радиальная функция 358
Разность векторного порядка $(\Delta_t^l f)(x)$ 347, 354
— взвешенная $\Delta_y^l f$, $\Delta_{y,\eta}^l f$ 405, 414, 415
— дробного порядка $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ 279, 289, 335
— конечная $(\Delta_h^l f)(x)$ 100
— с векторным шагом, нецентрированная $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ 368
— — — — центрированная $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ 368
Регуляризация расходящегося интеграла 386
Римана функция $R(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$ 575, 588
Римана—Гурвица функция $\zeta(s,\ a)$ 33
Римана—Лиувилля дробная производная $\mathcal{D}_{a+}^\alpha f$, $\mathcal{D}_{b-}^\alpha f$ 43, 44
— — — — левосторонняя (правосторонняя) $\mathcal{D}_{a+}^\alpha f$, $\mathcal{D}_{b-}^\alpha f$ 43
— — — — смешанная (частная) 341, 342
— — — — пирамидальный аналог $\mathcal{D}_{A_c}^\alpha f$, $\mathcal{D}_{E_1}^\alpha f$ 421
— — — — функции по другой функции $\mathcal{D}_{a+;g}^\alpha f$ 249, 250
— — — — — — — — форма Маршо 249
Римана—Лиувилля дробный интеграл $I_{a+}^\alpha\varphi$, $I_{b-}^\alpha\varphi$ 42
— — — — левосторонний (правосторонний) $I_{a+}^\alpha\varphi$, $I_{b-}^\alpha\varphi$ 42
— — — — смешанный (частный) $I_{a_k+}^{\alpha_k}\varphi$, $I_{a+}^\alpha\varphi$ 340, 341
— — — — пирамидальный аналог $I_{A_c}^\alpha\varphi$, $I_{E_1}^\alpha\varphi$ 421, 422
Рисса дифференцирование 367
— дробная производная $\mathbf{D}^\alpha f$ 368
— дробное интегродифференцирование 357
— «нормальные средние» (средние) $C^\alpha(x)$ 213
— теорема о среднем 210
— ядро $k_\alpha(x)$ 363

Свертка 27, 36, 38, 126, 345, 358, 524
Сингулярный интеграл со степенно-логарифмическим ядром $S_{a,\alpha,m}\varphi$, $S_{b,\alpha,m}\varphi$ 490
— — с ядром Коши S 163
— — — — — с весом 178, 179, 451
— — — — Гильберта $H\varphi$ 267
Соболева предельный показатель 365
— пространство $G^\alpha(L_p)$ 399
— теорема 365
— — весовой случай 365
— усреднение 399
Сонина оператор 78, 568, 569
— условие 78
— — аналог 440
Среднее сферическое $M_n(x,\ y;\ \tau)$ 592
Сферические гармоники $Y_m(\sigma)$ 389

Таблицы дробных интегралов и производных 143
Тейлора формула, аналог и обобщение 51, 80
Тензорное произведение операторов $A_1\otimes A_2$ 343
Теорема об аппроксимации единицы 27
— о Фурье-мультипликаторах 28
Тройные уравнения 554, 556

Усеченная степенная функция $y_\pm^\alpha$ 34, 85

Фавара неравенство 278
Факторизация G- и W-преобразований 518, 546
Фокса H-функция 564, 568
Формула дробного интегрирования по частям 42, 51, 86, 108, 247, 327, 343, 536
— соответствия 577
— Функа—Гекке 403
Фубини теорема 25
Функция обобщенная (некоторые понятия) 120
— однородная 27
— ограниченной в среднем осцилляции 83

— распределения 365
Фурье ряд 263, 352
— ядра 564
Фурье—Лапласа ряд 388

Ханкеля контур $\mathscr{L}_\theta$ 315
Харди неравенство 92
— пространство H_p 316
Харди—Литтлвуда теорема 64, 91
— — — аналог 82, 298, 345, 411

Чженя дробная производная $\mathscr{D}_c^\alpha f$, $\mathrm{D}_c^\alpha f$ 257, 258

— дробный интеграл $I_c^\alpha \varphi$ 257

Эйлера—Пуассона—Дарбу уравнение обобщенное 586
— — — — — гиперболическое 590
— — — — — эллиптическое 586

Юнга теорема 27

Ядро оператора $Z_x(A)$ 459

Указатель обозначений

Латинский и готический алфавиты

$A^\alpha \varphi$ 179

$(-A)^\alpha f$ 331

$A_l(\alpha)$ 100, 372

$A^{\alpha,\lambda}_{a+} f$, $A^{\alpha,\lambda}_{b-} f$ 530

$AC(\Omega)$, $AC^n(\Omega)$ 21

$(a)_n$ 29

(a_n), (a_p^{n+1}) 513

$a(\mathscr{D})f$, $a[\mathscr{D}]f$ 281

$(a - \Delta_h f)(x)$ 281

$B^\alpha \varphi$ 179

$B^\alpha_\pm \varphi$ 433

$B^{\alpha,\lambda}_{a+} f$, $B^{\alpha,\lambda}_{b-} f$ 530

$\mathrm{BMO}(a, b)$ 83, 237, 430

(b_m), (b_q^{m+1}) 513

$C_\omega = C_\omega(R^1)$ 94

$C(\Omega)$, $C^m(\Omega)$ 21, 24

$C_0^\infty(\Omega)$ 26

$C^\alpha(x)$ 213

$C^{\alpha,\lambda}_{a+} f$, $C^{\alpha,\lambda}_{b-} f$ 530

$C_a^\infty([a, b])$, $C_b^\infty([a, b])$ 130

c^* 513

$\mathbf{D}^\alpha f$, $\mathbf{D}^\alpha_\varepsilon f$ 270, 368, 372

$\mathbf{D}^\alpha_\pm f$, $\mathbf{D}^\alpha_{\pm,\varepsilon} f$ 95, 96, 102, 272, 371

$\mathbf{D}^{(\alpha)}_\pm f$, $\mathbf{D}^{(\alpha)}_{+,\varepsilon} f$ 266, 270

$\mathbf{D}^\alpha_{\pm\ldots\pm} f$, $\mathbf{D}^\alpha_{\pm\ldots\pm,\varepsilon} f$ 347

$\mathbf{D}^\alpha_c f$, $\mathbf{D}^\alpha_\omega f$ 258, 348

$\mathbf{D}^\alpha_\Omega f$, $\mathbf{D}^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f$ 381, 383, 385, 405

$\mathbf{D}^\alpha_{a+} f$, $\mathbf{D}^\alpha_{b-} f$, $\mathbf{D}^\alpha_{a+,\varepsilon} f$ 97, 180, 181, 348

$\mathscr{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 339

$\mathscr{D}^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$ 339

$\mathscr{D}^n(a; f)$, $\mathscr{D}\{b; f\}$ 316, 318

$\mathscr{D}^{(\alpha)} f$ 353

$\mathscr{D}_\alpha f$ 317

$\mathscr{D}^\alpha_\pm f$, $\mathscr{D}^\alpha_{\pm,\varepsilon} f$, $\mathscr{D}^{\alpha_k}_{\pm\ldots\pm} f$ 85, 86, 95, 102, 343, 347

$\mathscr{D}^{(\alpha)}_\pm f$, $\mathscr{D}^{(\alpha)}_{+\ldots+} f$ 263, 353

$\mathscr{D}^\alpha_{\pm\ldots\pm} f$, $\mathscr{D}^\alpha_{+\ldots+,\varepsilon} f$ 343, 344, 347, 349

$\mathscr{D}^\alpha_{\pm,\theta} f$ 311, 312

$\mathscr{D}^\alpha_c f$, $\mathscr{D}^\alpha_\omega f$ 257, 348

$\mathscr{D}^\alpha_{z_0} f$ 308, 313

$\mathscr{D}^\alpha_\Omega(x)$ 383, 384

$\mathcal{D}^{\alpha}_{A_c} f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{E_1} f$ 421
$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-} f$, $\mathcal{D}^{\alpha_k}_{a_k+} f$ 43, 44, 45, 180, 209, 210, 341, 342
$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+;g} f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-;x^\sigma} f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm;x^\sigma} f$ 249, 250
$D^{\alpha,\lambda}_{a+} f$, $D^{\alpha,\lambda}_{b-} f$ 530
$\mathcal{D}^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(a_1,a_2)+} f$, $\mathcal{D}^{(\alpha,0)}_{+,\varepsilon}$ 342, 349
$d_{n,l}(\alpha)$ 368, 373, 375, 382
$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = \mathcal{D}^{\alpha}_{0+}$, $\frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}}$ 343, 597
$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm} f$, $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f$, $\mathfrak{D}^{\alpha}_{b-} f$ 252, 253
$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\varepsilon} f$, $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\rho} f$ 405, 428
E 344
$(E \pm \mathbf{D})^{\alpha} f$, $(E \pm \mathcal{D})^{\alpha} f$ 255
$E_\alpha(z)$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ 33
$E(\beta, \beta^*)\, u$ 586
$E^{\alpha,\lambda,\nu}_{a+} f$, $E^{\alpha,\lambda,\nu}_{b-} f$ 530
${}_1F_1(a; c; z)$ 32
${}_2F_1(a, b; c; z)$ 31
$F_3(a, a', b, b'; c; x, y)$ 157
F_p, $F_{p,\mu} = F_{p\mu}$ 129
${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix} x\right]$ 82
$\mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi}$, $\mathcal{F}^{-1} f = \check{f}$ 35, 350, 357, 359
$\mathcal{F}_c \varphi$, $\mathcal{F}_s \varphi$ 36
$f_{n-\alpha}(x)$ 39, 49, 419
$f^{(\alpha)}$, $f^{(\alpha)}_{\pm}$, $f^{(\alpha)}_{\pm\ldots\pm}$ 280, 281, 355
$f^{(\alpha)}_{a+}$, $f^{(\alpha)}_{b-}$ 290, 429
$f^{(\alpha)}_{a}$ 427
$f^{(\alpha)}_{a+}$, $f^{(\alpha)}_{b-}$ 289, 290
$G^{\alpha}\varphi$ 253, 356, 396, 436
$G^{\alpha}_{\pm}\varphi$ 105, 254, 356, 396, 436
$G^{\alpha}(L_p)$, $G^{\alpha}_{\pm}(L_p)$ 255, 357, 399
$G_\alpha(x)$ 396
$G^{mn}_{pq}\left(z \left| \begin{matrix}(\alpha_p) \\ (\beta_q)\end{matrix}\right.\right)$ 34
$\left(G^{mn}_{pq}\left| \begin{matrix}(a_p) \\ (b_q)\end{matrix}\right| f(t)\right)(x)$ 512
$\mathfrak{G}^{\alpha}\varphi$, $\mathfrak{G}_\alpha(x)$ 397
H, H^{μ}, H^*, H^*_a, H^*_b 194, 195, 443, 449
$H\varphi$ 267
$H^{\lambda} = H^{\lambda}(\Omega)$, $H^{\lambda}_0(\Omega)$ 21, 22, 23
H^{ω}, H^{ω}_0, $H^{\omega}_0(\rho)$ 196, 199
H_p 316
$H^{\alpha}\varphi$, $H^{\alpha}_0\varphi$ 173, 178
$(H^{\alpha}\varphi)(x, t)$, $H^{\alpha}(L_p)$ 412, 413
$H^{\lambda}(\rho) = H^{\lambda}(\Omega; \rho)$, $H^{\lambda}_0(\rho) = H^{\lambda}_0(\Omega; \rho)$ 22, 23
$H^{\lambda}(\dot{R}^n)$, $H^{\lambda}(\dot{R}^n, \rho)$ 366
H^*_α, $\tilde{H}_\alpha$, $\tilde{\tilde{H}}_\alpha$ 195
$H^{\omega}_0([0, 2\pi])$ 274
H^{λ}_p, $\tilde{H}^{\lambda}_p$ 200
$H^{\lambda}_x(\overline{R}^2_{\pm})$ 462
$H^{\lambda}_p([0, 2\pi])$ 276
$H^{\alpha,p}(R^1)$, $H^{s,p}([a, b])$, $H^{s,p}_0([a, b])$ 186, 255, 256
$H^{\lambda,k}(\Omega)$, $H^{\lambda,k}_0(\rho)$ 24
$H^{\lambda}_{p,\mu} u$ 577
$\mathcal{H}^{\alpha}\varphi$ 355
$\mathcal{H}^{\alpha}\varphi$ 413
$h^{\lambda} = h^{\lambda}(\Omega)$, $h^{\lambda}_0(\rho)$ 21, 23
h^{λ}_p, $\tilde{h}^{\lambda}_p$, $h^{\lambda}_p([0, 2\pi])$ 200, 276
$h^{\lambda,k}(\Omega)$, $h^{\lambda,k}_0(\rho)$ 21, 24
$h^{\lambda}_{p,\mu} u$ 577
$\{h(x)\}\varphi$ 524
${}_jI^{c}_{e+}(a, b)$, ${}_kI^{c}_{d-}(a, b)$ 153, 154
$I^n(a; f)$, $I\{b; f\}$ 317, 318
$I^{\alpha}\varphi$ 173, 357, 363
$I^{\alpha}_0\varphi$ 178
$I^{(\alpha)}\varphi$, $I^{(\alpha)}_{\mu}\varphi$ 268, 269, 353
$I^{\alpha}(L_p)$, $I^{\alpha}_{\pm}(L_p)$ 104, 391
$I^{\alpha}(L_{\overline{p}})$, $I^{\alpha}_{\pm\pm}(L_{\overline{p}})$ 349
$I^{\alpha}_{\pm}\varphi$ 85, 311, 370
$I^{\alpha}_{\pm\ldots\pm}\varphi$ 343
$I^{(\alpha)}_{\pm}\varphi$, $I^{(\alpha)}_{+\ldots+} f$ 263, 264, 353
$I_\nu(z)$, $\overline{I}_\nu(z)$ 32, 530
$I^{\alpha}_c\varphi$ 257
$I^{\alpha}_{\omega}\varphi$ 348
$I^{\alpha}_{\Omega}\varphi$, $I^{\alpha}_{i}\varphi$, $I^{\alpha}_{i}(L_p)$ 431, 434, 435
$I^{\alpha}_{z_0} f$ 309, 310
$I^{\alpha}_{A_c}\varphi$, $I^{\alpha}_{E_1}\varphi$ 421
$I^{\alpha}_{\square}\varphi$ 409, 410, 411
$I^{\alpha}_{P\pm i0}\varphi$, $I^{\alpha}_{P\pm}\varphi$ 407, 408
$I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $I^{\alpha}_{b-}\varphi$ 42, 45, 85
$I^{\alpha_k}_{a_k+}\varphi$ 340, 341
$I^{\alpha}_{a+}(L_p)$, $I^{\alpha}_{b-}(L_p)$, $I^{\alpha}(L_p)$ 49, 104, 185
$I^{\alpha}_{\pm,\theta} f$ 310, 311
$I^{\alpha}_{a+;g}\varphi$, $I^{\alpha}_{b-;x^\sigma}\varphi$, $I^{\alpha}_{\pm;x^\sigma}\varphi$ 248, 250
$I^{\alpha,\beta}_{a+}\varphi$, $I^{\alpha,\beta}_{b-}\varphi$ 291
$I^{\alpha,\beta}_{a+}(L_p)$, $I^{\alpha,\beta}_{b-}(L_p)$, $I^{\alpha,\beta}(L_p)$ 489, 494
$I^{\alpha,\beta,\eta}_{a+} f$, $I^{\alpha,\beta,\eta}_{b-} f$, $I^{\alpha,\beta,\eta}_{-} f$ 326, 327
$I^{c,a,\lambda}_{a+}$, $I^{c,a,\lambda}_{-}$ 161

$I_{0+}^{m(\alpha)*}(\Omega)$, $I_{-}^{m(\alpha)*}(\Omega)$ 145

$I_{a+,b-}^{\alpha}\varphi$ 341

$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha}\varphi$, $I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha}\varphi$, $I_{\pm;\sigma,\eta}^{\alpha}\varphi$ 246

$I_{\eta,\alpha}$, $I_{\eta,\alpha}^{+}$ 134, 246

$\overline{I}_{\alpha,\lambda}^{\pm}f$ 537

${}_{q}I_{-}^{-\nu}f$ 329

$J_{a+}^{\alpha}\varphi$ 291

$J_{\nu}(z)$, $\overline{J}_{\nu}(z)$, $J_{\nu,m}(z)$, $J_{\lambda}^{\mu}(z)$ 32, 325, 530

$J_{\lambda}(\eta, \alpha)f$ 535

$\overline{J}_{\alpha,\lambda}^{\pm}f$ 537

$\mathcal{J}_{p}$, $\mathcal{J}_{p}'$, $\mathcal{J}_{p,l}$, $\mathcal{J}_{0}^{*}$ 129, 132

$\mathcal{J}_{\alpha}f$ 317

$\mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha}\varphi$, $\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha}\varphi$ 251, 252

$K_{\pm}$, K_{+}^{+}, K_{+}^{-} 407, 409

$K_{\eta,\alpha}$, $K_{\eta,\alpha}^{-}$ 246

$K_{\nu}(z)$ 33, 396

$K_{ix}\{f(t)\}$, $K_{ix}^{-1}\{g(t)\}$ 545

$\mathcal{K}^{\alpha}\varphi$ 355

$\mathcal{K}_{l,\alpha}(x)$ 106, 378

$\mathrm{k}_{l,\alpha}(x)$ 378

$L\varphi$, $L^{-1}g$ 38, 351

$L^{(\omega)}\varphi$ 261, 262

$L_{p} = L_{p}(\Omega)$ 25

$L_{p}(\rho) = L_{p}(\Omega; \rho)$, $L_{p}(R^{n}; \rho)$ 27, 365

$L_{p}(R^{n})$ 339

$L_{\overline{p}}(R^{n})$ 344, 356

$L_{p,*}(a, b)$ 145

$L_{\eta}^{(x)}$ 578

$L_{p}^{\alpha}(R^{1})$ 255

$L_{p,\omega}$ 94

$L_{2}^{(c,\gamma)}$ 513

$L_{p,r}^{\alpha}(R^{n})$, $L_{p}^{\alpha}(R^{n})$ 392, 399

$\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}$ 437

$M^{\alpha}\varphi$, $\overline{M}^{\alpha}\varphi$ 445

$M_{u,v}^{\alpha}\varphi$ 174

$m(\alpha_{1}, \ldots, \alpha_{n})$ 145

$\mathfrak{M}\varphi$, $\mathfrak{M}\{\varphi(t); s\} = \varphi^{*}(s)$ 36, 351

$\mathfrak{M}^{-1}\{\varphi^{*}(s); x\}$ 36

$\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ 513

$p_{\alpha}(x)$ 282

$P_{\pm}^{\lambda}$, $(P \pm i0)^{\lambda}$ 407

$P(x, t)$, $P_{t}\varphi$ 366

$P_{\pm}\varphi$, $P_{ab}\varphi$ 171

$P_{\nu}^{\mu}(z)$ 32

$p.f.$, pf, pl 97, 386, 618

$\mathcal{P}_{V}\varphi$ 439

Q_{q} 230

R^{n}, $\dot{R}^{n}$, R_{+}^{n}, $R_{+\ldots+}^{n}$ 20, 339

$R_{\lambda}(\eta, \alpha)f$ 535

$r_{a}(x)$, $r_{b}(x)$ 168

S, S', S_{+} 121, 124, 127

$S\varphi$ 163, 356

$S_{a}f$, $S_{b}f$, $S_{\alpha}\varphi$ 172, 178, 179, 187

S_{n-1}, $|S_{n-1}|$ 339

$S_{a+}^{\alpha}f$, $S_{b-}^{\alpha}f$ 530

$S_{a,b}f$ 451, 490

$S_{a,\alpha,m}\varphi$, $S_{b,\alpha,m}\varphi$ 490

$S_{\eta,\alpha;\sigma}f$ 247

$S\begin{pmatrix} a, b, y \\ \eta, \alpha, \sigma \end{pmatrix}f$ 535

$\mathfrak{S}_{\pm}$, $\mathfrak{S}_{+}^{0}(R_{+}^{1})$ 121, 127

$T^{\alpha}f$, $T_{\varepsilon}^{\alpha}f$ 368, 401, 405, 412, 415

$\mathfrak{T}^{\alpha}f$, $\mathfrak{T}_{\varepsilon}^{\alpha}f$ 413, 415, 416

$W(x, t)$, $W_{t}\varphi$ 366

$W_{p,r}^{\alpha}$ 434

$\left(W_{pq}^{mn}\left|\begin{matrix}\nu, (\alpha_{p}) \\ (\beta_{q})\end{matrix}\right|f(t)\right)(x)$ 545

$\omega_{\mu,\nu}(x)$ 324

$\omega_{p}(f, t)$ 110, 113, 186, 332

$X(R^{1})$, $X_{2\pi}$ 279

$Y_{m}(f, x)$, $Y_{m}(\sigma)$ 388, 389

$y_{\pm}^{\alpha}$ 34, 85

$(z+, z_{0}+, z-, z_{0}-)$ 315

Греческий алфавит

$[\alpha]$, $\{\alpha\}$, $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ 29, 44

$\mathrm{B}(z, w)$ 31

$\Gamma(z)$ 29

γ^{*} 513

$\gamma_{n}(\alpha)$ 361

$-\Delta_{x} + \dfrac{\partial}{\partial t}$ 411

$(\Delta_{h}^{\alpha}f)(x)$, $(\Delta_{y}^{l}f)(x, \rho)$ 100, 279, 347, 354, 368, 405

$\Delta_{l,\alpha}(x, h)$ 378

$\delta(x - x_{0})$ 120, 352

$\zeta(s, a)$ 33

$\varkappa$ 442, 459

$\varkappa(\alpha, l)$ 102, 347

$\Lambda_{\pm}$, $\Lambda_{\pm}^{-1}$ 518

$\Lambda_{0}^{\omega}([0, 2\pi])$ 274

λ_{0}^{1} 276

$\lambda_f(t)$ 365
$\mu(x, \sigma, \alpha)$, $\mu_{t,\beta}(x)$ 481, 482
$\nu(x)$, $\nu_h(x)$ 482
$\Box_p$, $(-\Box_p)^{\lambda}_{\pm}\varphi$ 406, 407
Φ, Φ', Φ'_0 122, 124, 352, 359
Φ_+, Φ^{α}_+, Φ'_+, $(\Phi^{\alpha}_+)'$ 127, 128, 129, 132
Φ^{δ}_{β} 199
$\Phi_1(\beta, \delta; \gamma; x, y)$ 162
$\varphi^*(s)$, $\hat{\varphi}(x)$ 35, 36, 350
$\chi_\alpha(x; h)$ 282
Ψ, Ψ', Ψ'_+ 122, 124, 352, 359
$\psi(z)$ 31
$\Omega_\alpha(y)$ 385, 390
$\omega(\varphi, h)$ 196, 272
$\omega_p(f, t)$ 110, 186
$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; x, y)$ 543
$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y)$ 579, 583

Содержание

От редактора 3
Предисловие 5
Краткий исторический очерк 9
Введение 17
Обозначения основных форм дробных интегралов и производных 19

ГЛАВА 1 Дробные интегралы и производные на отрезке вещественной оси 20

§ 1. Предварительные сведения 20

1°. Классы H^λ и $H^\lambda(\rho)$ (20). 2°. Классы L_p и $L_p(\rho)$ (25). 3°. Некоторые специальные функции (28). 4°. Интегральные преобразования (34).

§ 2. Дробные интегралы Римана—Лиувилля и дробные производные 38

1°. Интегральное уравнение Абеля (38). 2°. Обоснование решения уравнения Абеля в классе интегрируемых функций (39). 3°. Определение дробных интегралов и производных и простейшие свойства (41). 4°. Дробные интегралы и производные комплексного порядка (45). 5°. Дробные интегралы некоторых элементарных функций (47). 6°. Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции (48). 7°. Формулы композиции. Связь с полугруппами операторов (51).

§ 3. Дробные интегралы гельдеровских и суммируемых функций 56

1°. Действие в пространстве H^λ (56). 2°. Действие в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$ (58). 3°. Действие в пространстве L_p (64). 4°. Действие в пространстве $L_p(\rho)$ (66).

§ 4. Литературные указания и дополнительная информация к главе 1 75

1°. Исторические сведения (75). 2°. Обзор других результатов (77).

ГЛАВА 2 Дробные интегралы и производные на оси и полуоси 84

§ 5. Основные свойства дробных интегралов и производных . . 84

1°. Определения и простейшие свойства (84). 2°. Дробные интегралы гельдеровских функций (88). 3°. Дробные интегралы суммируемых функций (90). 4°. Дробная производная Маршо (95). 5°. Интегралы в смысле конечной части по Адамару (97). 6°. Свойства конечных разностей и производные Маршо порядка $\alpha>1$ (100). 7°. Связь с дробными степенями операторов (102).

§ 6. Представимость функций дробными интегралами от функций из L_p 104

1°. Пространство $I^\alpha(L_p)$ (104). 2°. Обращение дробных интегралов от функций из L_p (105). 3°. Описание класса $I^\alpha(L_p)$. Достаточные признаки (107). 4°. Достаточные признаки представимости функций дробным интегралом (110). 5°. Об интегральном модуле непрерывности функций из $I^\alpha(L_p)$ (113).

§ 7. Интегральные преобразования дробных интегралов и производных 114

1°. Преобразование Фурье (114). 2°. Преобразование Лапласа (116). 3°. Преобразование Меллина (117).

§ 8. Дробные интегралы и производные обобщенных функций . 119

1°. Предварительные указания (120). 2°. Случай оси. Класс основных функций Лизоркина (121). 3°. Подход Л. Шварца (126). 4°. Случай полуоси. Подход через сопряженный оператор (127). 5°. Случай отрезка (130).

§ 9. Литературные указания и дополнительная информация к главе 2 130

1°. Исторические сведения (130). 2°. Обзор других результатов (133). 3°. Таблицы дробных интегралов и производных (143).

ГЛАВА 3 Дальнейшие свойства дробных интегралов и производных 144

§ 10. Весовые формулы композиций 144

1°. Композиции двух односторонних интегралов со степенными весами (145). 2°. Композиции двух разносторонних интегралов со степенными весами (153). 3°. Композиции нескольких интегралов со степенными весами (156). 4°. Композиции с экспоненциальными и степенно-экспоненциальными весами (159).

§ 11. Связь дробных интегралов с сингулярным оператором . 163

1°. Сингулярный оператор S (163). 2°. Случай оси (165). 3°. Случай отрезка и полуоси (166). 4°. Некоторые другие формулы композиции (171).

§ 12. Дробные интегралы типа потенциала 173

1°. Случай оси. Потенциалы Рисса и Феллера (173). 2°. Об «урезании» риссова потенциала на полуось (176). 3°. Случай полуоси (177). 4°. Случай отрезка (179).

§ 13. Функции, представимые дробными интегралами на отрезке 180

1°. Дробная производная Маршо на отрезке (180). 2°. Описание дробных интегралов от функций из L_p. Достаточные признаки (183). 3°. Продолжение, сужение и «склеивание» дробных интегралов (187). 4°. Описание дробных интегралов гельдеровских функций (189). 5°. Дробное интегрирование функций из объединения весовых гельдеровских классов (194). 6°. Дробные интегралы и производные функций с заданным модулем непрерывности (196).

§ 14. Различные вопросы дробного интегродифференцирования функций действительного переменного 200

1°. Липшицевы классы H_p^λ, $\tilde{H}_p^\lambda$ (200). 2°. Действие дробного интегрирования в H_p^λ (201). 3°. Дробные интегралы и производные функций, заданных на всей прямой и принадлежащих H_p^λ на любом конечном отрезке (204). 4°. Дробные производные абсолютно непрерывных функций (208). 5°. Теорема Рисса о среднем и неравенства для дробных интегралов и производных (210). 6°. Дробное интегродифференцирование и суммирование рядов и интегралов (213).

§ 15. Обобщенное правило Лейбница 214

1°. Дробное интегродифференцирование аналитических функций на вещественной оси (214). 2°. Обобщенное правило Лейбница (216).

§ 16. Асимптотические разложения дробных интегралов . . . 219

1°. Определения и свойства асимптотических разложений (220). 2°. Случай степенной асимптотики (221). 3°. Случай степенно-логарифмической асимптотики (225). 4°. Случай степенно-показательной асимптотики (228). 5°. Асимптотическое решение уравнения Абеля (229).

§ 17. Литературные указания и дополнительная информация к главе 3 230

1°. Исторические сведения (230). 2°. Обзор других результатов (234).

ГЛАВА 4 Другие формы дробных интегралов и производных . 245

§ 18. Непосредственные модификации и обобщения дробных интегралов Римана—Лиувилля 245

1°. Операторы типа Эрдейи—Кобера (245). 2°. Дробный интеграл от функции по другой функции (248). 3°. Дробное интегродифференцирование по Адамару

(250). 4°. Одномерная модификация бесселева дробного интегродифференцирования и пространства $H^{s,\,p}=L_p^s$ (253). 5°. Дробный интеграл Чженя (256). 6°. Обобщенный дробный интеграл Джрбашяна (261).

§ 19. Дробные интегралы и производные Вейля периодических функций 263

1°. Определения. Связь с рядами Фурье (263). 2°. Простейшие свойства дробного интеграла Вейля (266). 3°. Другие формы дробного интегрирования периодических функций (268). 4°. Совпадение дробной производной Вейля с дробной производной Маршо (269). 5°. Представимость периодических функций дробным интегралом Вейля (270). 6°. Действие дробного интегрирования и дифференцирования Вейля в классах гельдеровских функций (272). 7°. Дробные интегралы и производные Вейля периодических функций из H_p^{λ} (276). 8°. Неравенство Бернштейна для дробных производных тригонометрических многочленов (277).

§ 20. Определение дробного интегродифференцирования через разности дробного порядка (производная Грюнвальда—Летникова) 279

1°. Разности дробного порядка и их свойства (279). 2°. Совпадение дробной производной Грюнвальда—Летникова с производной Маршо. Периодический случай (282). 3°. Совпадение дробной производной Грюнвальда—Летникова с производной Маршо. Непериодический случай (287). 4°. Дробное дифференцирование Грюнвальда—Летникова на конечном отрезке (289).

§ 21. Операторы со степенно-логарифмическими ядрами . . . 291

1°. Действие в пространстве H^{λ} (292). 2°. Действие в пространстве $H_0^{\lambda}(\rho)$ (296). 3°. Действие в пространстве L_p (299). 4°. Действие в пространстве $L_p(\rho)$ (301). 5°. Асимптотические разложения (305).

§ 22. Дробные интегралы и производные в комплексной области 308

1°. Определения и простейшие свойства дробного интегродифференцирования в комплексной области (309). 2°. Дробное интегродифференцирование аналитических функций (312). 3°. Обобщения дробного интегродифференцирования аналитических функций (316).

§ 23. Литературные указания и дополнительная информация к главе 4 320

1°. Исторические сведения (320). 2°. Обзор других результатов (324). 3°. Ответы на некоторые вопросы, поставленные на конференции по дробному исчислению (г. Нью-Хейвен, 1974 г.) (337).

ГЛАВА 5 Дробное интегродифференцирование функций многих переменных 339

§ 24. Частные и смешанные интегралы и производные дробного порядка 340

1°. Многомерное интегральное уравнение Абеля (340). 2°. Частные и смешанные дробные интегралы и производные (340). 3°. Случай двух переменных. Тензорное произведение операторов (343). 4°. Действие операторов дробного интегрирования в пространствах $L_{\bar{p}}(R^n)$ (со смешанной нормой) (344). 5°. Связь с сингулярным интегралом (346). 6°. Частные и смешанные дробные производные в форме Маршо (347). 7°. Описание дробных интегралов от функций из $L_{\bar{p}}(R^2)$ (349). 8°. Интегральные преобразования дробных интегралов и производных (350). 9°. Пространство Лизоркина, инвариантное относительно дробного интегродифференцирования (351). 10°. Дробные производные и интегралы периодических функций многих переменных (352). 11°. Дробное дифференцирование по Грюнвальду—Летникову (354). 12°. Операторы типа полипотенциала (355).

§ 25. Риссово дробное интегродифференцирование 357

1°. Предварительные сведения (357). 2°. Потенциал Рисса и его преобразование Фурье. Инвариантное пространство Лизоркина (361). 3°. Действие оператора

I^α в пространствах $L_p(R^n)$ и $L_p(R^n; \rho)$ (364). 4°. Риссово дифференцирование (гиперсингулярный интеграл) (367). 5°. Односторонние риссовы потенциалы (370).

§ 26. Гиперсингулярные интегралы и пространство $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов 372

1°. Исследование нормировочных постоянных $d_{n,l}(\alpha)$ как функций параметра α (372). 2°. Сходимость гиперсингулярного интеграла на дифференцируемых функциях и снижение порядка l до $l>2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности (376). 3°. Гиперсингулярный интеграл как обратный риссову потенциалу (377). 4°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой (381). 5°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой как свертки с обобщенной функцией (386). 6°. Представление дифференциальных операторов в частных производных гиперсингулярными операторами (388). 7°. Пространство $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов и его описание в терминах гиперсингулярных интегралов. Пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$ (391).

§ 27. Бесселево дробное интегродифференцирование 395

1°. Бесселево ядро и его свойства (395). 2°. Связь с полугруппами Пуассона, Гаусса—Вейерштрасса и метагармонического продолжения (397). 3°. Пространство бесселевых потенциалов (399). 4°. Реализация $(E-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha>0$, с помощью гиперсингулярного интеграла (401).

§ 28. Другие формы многомерного дробного интегродифференцирования 406

1°. Потенциалы Рисса с лоренцевым расстоянием (гиперболические риссовы потенциалы) (406). 2°. Параболические потенциалы (411). 3°. Реализация дробных степеней $\left(-\Delta_x+\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha/2}$ и $\left(E-\Delta_x+\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha/2}$, $\alpha>0$, в виде гиперсингулярного интеграла (413). 4°. Пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных (416).

§ 29. Литературные указания и дополнительная информация к главе 5 423

1°. Исторические сведения (423). 2°. Обзор других результатов (427).

ГЛАВА 6 Приложения к интегральным уравнениям первого рода со степенными и степенно-логарифмическими ядрами 441

§ 30. Обобщенное интегральное уравнение Абеля 442

1°. О характеристическом сингулярном уравнении (442). 2°. Обобщенное интегральное уравнение Абеля на оси (445). 3°. Обобщенное интегральное уравнение Абеля на отрезке (449). 4°. Случай постоянных коэффициентов (454).

§ 31. Нетеровость уравнений первого рода со степенными ядрами 459

1°. Сведения о нетеровых операторах (459). 2°. Уравнения на прямой (462). 3°. Уравнения на конечном отрезке (470). 4°. Об устойчивости решений (478).

§ 32. Уравнения со степенно-логарифмическими ядрами с переменным пределом интегрирования 480

1°. Специальные функции Вольтерра и некоторые их свойства (481). 2°. Решение уравнений с целыми неотрицательными степенями логарифмов (483). 3°. Решение уравнений с действительными степенями логарифмов (485).

§ 33. Нетеровость уравнений первого рода со степенно-логарифмическими ядрами 488

1°. Теоремы вложения для образов оператора $I^{\alpha,\beta}_{a+}$, $I^{\alpha,\beta}_{b-}$ (489). 2°. Связь операторов со степенно-логарифмическими ядрами с сингулярным оператором (490). 3°. Нетеровость уравнений (494).

§ 34. Литературные указания и дополнительная информация к главе 6 497

1°. Исторические сведения (497). 2°. Обзор других результатов (499).

ГЛАВА 7 Интегральные уравнения первого рода со специальными функциями в ядрах 505

§ 35. Некоторые уравнения с однородными ядрами, содержащими функции Гаусса и Лежандра 506

1°. Уравнения с функцией Гаусса (506). 2°. Уравнения с функцией Лежандра (508).

§ 36. Дробные интегралы и производные как интегральные преобразования 511

1°. Определение G-преобразования. Классы $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ и их описание (512). 2°. Существование, действие и представления G-преобразования (515). 3°. Факторизация G-преобразования (518). 4°. Обращение G-преобразования (520). 5°. Действие, факторизация и обращение дробных интегралов в пространствах $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ (522). 6°. Другие примеры факторизаций (524). 7°. Действие G-преобразования на дробные интегралы и производные (527). 8°. Индексные законы для дробных интегралов и производных (527).

§ 37. Уравнения с неоднородными ядрами 530

1°. Уравнения с разностными ядрами (530). 2°. Обобщенные операторы преобразований Ханкеля и Эрдейи—Кобера (535). 3°. Несверточные операторы с функциями Бесселя в ядрах (537). 4°. Уравнения композиционного типа (540). 5°. W-преобразование и его обращение (545). 6°. Использование дробных интегралов при обращении W-преобразования (548).

§ 38. Приложения дробного интегродифференцирования к исследованию парных интегральных уравнений 551

1°. Парные уравнения (551). 2°. Тройные уравнения (554).

§ 39. Литературные указания и дополнительная информация к главе 7 557

1°. Исторические сведения (557). 2°. Обзор других результатов (559).

ГЛАВА 8 Приложения к дифференциальным уравнениям . . 574

§ 40. Интегральные представления решений уравнений в частных производных второго порядка через аналитические функции и их приложения к исследованию краевых задач 574

1°. Предварительные сведения (574). 2°. Представления решений обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца (577). 3°. Краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца (583).

§ 41. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу 586

1°. Представления решений уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (586). 2°. Классические и обобщенные решения задачи Коши (589). 3°. Полуоднородная задача Коши в многомерном полупространстве (592). 4°. Весовые задачи Дирихле и Неймана в полуплоскости (594).

§ 42. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка 596

1°. Задачи типа Коши для дифференциальных уравнений и систем дробного порядка общего вида (597). 2°. Задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка (602). 3°. Задача Дирихле для дифференциального уравнения дробного порядка (605). 4°. Решение линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве обобщенных функций (607). 5°. Приложения дробного дифференцирования к интегрированию дифференциальных уравнений целого порядка (610).

§ 43. Литературные указания и дополнительная информация к главе 8 614

1°. Исторические сведения (614). 2°. Обзор других результатов (616).

Литература 625
Именной указатель 667
Предметный указатель 674
Указатель обозначений 679

СТЕФАН ГРИГОРЬЕВИЧ САМКО
АНАТОЛИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КИЛБАС
ОЛЕГ ИГОРЕВИЧ МАРИЧЕВ

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Заведующая редакцией Л. Ю. Бельзацкая
Редакторы Е. Г. Волкинд, С. М. Михасева
Художник Д. М. Суринович
Художественный редактор В. А. Жаховец
Технический редактор А. В. Скакун
Корректор З. Я. Авербах

ИБ № 2773

Сдано в набор 27.10.86. Подписано в печать 10.06.87.
АТ 14846. Формат 70×108$^{1}/_{16}$. Бум. тип. № 1.
Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 60,2. Усл. кр.-отт. 60,2. Уч.-изд. л. 60,60.
Тираж 3140 экз. Зак. № 1384. Цена 7 р. 60 к.

Издательство «Наука и техника» Академии наук БССР
и Государственного комитета БССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
220600. Минск, Ленинский проспект, 68.
Типография им. Франциска Скорины
издательства «Наука и техника».
220600. Минск, Ленинский проспект, 68.