

Г. Л. ЛУНЦ, Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ

**ФУНКЦИИ
КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО
с элементами
операционного
исчисления**



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2002

ББК 22.161

Л 82

Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э.

Л 82 Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 2-е изд. — СПб.: Издательство «Лань», 2002. — 304 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0457-3

В предлагаемом учебнике излагаются основные элементарные факты теории функций комплексного переменного и ряд приложений этой теории (к электростатике, гидродинамике и др.), а также элементы операционного исчисления и его приложения к интегрированию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и некоторых других типов уравнений.

Книга рассчитана на студентов вузов и инженеров.

ББК 22.161

Оформление
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2002
© Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц, 2002
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава I. Алгебраические действия над комплексными числами	7
§ 1. Комплексные числа	7
§ 2. Действия над комплексными числами	10
Задачи к главе I	17
Глава II. Основные понятия теории функций комплексного аргумента	18
§ 1. Функции комплексного аргумента	18
§ 2. Предел последовательности	23
§ 3. Предел функции. Непрерывность	26
Задачи к главе II	29
Глава III. Основные трансцендентные функции	30
§ 1. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции	30
§ 2. Логарифм и обратные тригонометрические функции	35
Задачи к главе III	41
Глава IV. Производная	43
§ 1. Аналитическая функция	43
§ 2. Связь аналитических функций с гармоническими	48
§ 3. Аргумент и модуль производной. Конформное отображение	51
Задачи к главе IV	56
Глава V. Интегрирование по комплексному аргументу	58
§ 1. Интеграл от функции комплексного переменного	58
§ 2. Теорема Коши	64
§ 3. Вычисление интеграла от аналитической функции	67
§ 4. Интегралы вида $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$	71
§ 5. Интеграл Коши	75
§ 6. Производные высших порядков от аналитической функции	82

§ 7. Теорема Морера	86
Задачи к главе V	88
Глава VI. Ряды	90
§ 1. Числовые ряды	90
§ 2. Функциональные ряды	91
§ 3. Степенные ряды	98
§ 4. Ряд Тейлора	102
§ 5. Теорема единственности и аналитическое продолжение	108
§ 6. Ряд Лорана	111
§ 7. Изолированные особые точки	121
§ 8. Некоторые приемы разложения функций в ряд Лорана	129
Задачи к главе VI	130
Глава VII. Теория вычетов	133
§ 1. Основная теорема о вычетах	133
§ 2. Вычет относительно полюса	136
§ 3. Логарифмические вычеты	139
§ 4. Вычисление определенных интегралов с помощью теории вычетов	144
Задачи к главе VII	156
Глава VIII. Конформное отображение	158
§ 1. Некоторые общие теоремы	158
§ 2. Линейная функция	160
§ 3. Функция $w = \frac{1}{z}$	163
§ 4. Дробно-линейная функция	164
§ 5. Степенная функция	176
§ 6. Профили Жуковского	186
§ 7. Показательная и логарифмическая функции	189
§ 8. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник и многоугольник	197
§ 9. Понятие о вариационных методах приближенного конформного отображения	208
§ 10. Принцип симметрии	213
Задачи к главе VIII	214
Глава IX. Комплексный потенциал	219
§ 1. Плоско-параллельные векторные поля	219
§ 2. Комплексный потенциал	220
§ 3. Комплексный потенциал в гидродинамике	226
§ 4. Задачи на обтекание	232
§ 5. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе	242
§ 6. Комплексный потенциал в электростатике и термодинамике	246
Задачи к главе IX	252
Глава X. Применение теории логарифмических вычетов к исследованию устойчивости движения	253
§ 1. Основные понятия теории устойчивости	253
§ 2. Признак отрицательности действительных частей всех корней многочлена	257

§ 3. Исследование на устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	260
Задачи к главе X	269
Глава XI. Некоторые сведения из операционного исчисления	270
§ 1. Преобразование Лапласа и его основные свойства	270
§ 2. Интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	280
§ 3. Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	283
§ 4. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в частных производных	284
§ 5. Разложение изображения в асимптотический ряд	286
Задачи к главе XI	289
Ответы к задачам	290
Цитированная литература	297
Рекомендуемая литература	298

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга рассчитана на лиц, имеющих математическую подготовку в объеме курса математики для технических вузов. Она имеет целью в краткой и по возможности общедоступной форме ознакомить читателя с основными понятиями и некоторыми приложениями теории функций комплексного аргумента.

Для читателей, желающих глубже изучить рассматриваемые в этой книге вопросы, на стр. 298 указана рекомендуемая литература.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность доцентам Ю. Л. Рабиновичу и А. Г. Свешникову и редактору книги С. Б. Норкину за ряд ценных замечаний.

ГЛАВА I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

§ 1. Комплексные числа

Число

$$z = x + iy,$$

где x и y — любые действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, называется *комплексным* числом. Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа z и обозначаются:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z \quad \text{или} \quad R(z), \\ y &= \operatorname{Im} z \quad \text{или} \quad I(z). \end{aligned}$$

Два комплексных числа считаются равными, если равны порознь их действительные и мнимые части, т. е. равенство

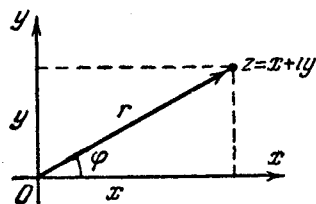
$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

равносильно двум равенствам:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ y_1 &= y_2. \end{aligned}$$

Так как две точки, определенные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат, совпадают тогда и только тогда, когда они имеют равные абсциссы и равные ординаты, то можно установить взаимно-однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости, с одной стороны, и всевозможными комплексными числами — с другой. Иначе говоря, будем изображать комплексное число $z = x + iy$ с помощью точки, абсцисса которой равна x , а ордината y ; тогда всякое комплексное число изобразится с помощью вполне

определенной точки плоскости и обратно всякой точке (x, y) плоскости будет соответствовать вполне определенное комплексное число $z = x + iy$ (черт. 1). Вместо «точка, изображающая число z » часто говорят короче: «точка z ». Можно действительной и мнимой частям комплексного числа поставить в соответствие не координаты точки, а координаты вектора, т. е. взятые с соответствующим знаком проекции на координатные оси вектора, начало которого совмещено, например, с началом координат, и, следовательно, изображать комплексные числа с помощью векторов (черт. 1).



Черт. 1.

Комплексное число с мнимой частью, равной нулю $x + i0$, будем отождествлять с его действительной частью: $x + i0 = x$, и считать действительное число частным случаем комплексного. Действительные числа изображаются точками, лежащими на оси Ox ; эту ось будем называть *действительной осью*. Аналогично будем писать $0 + iy = iy$. Числа, действительные части которых равны нулю (чисто мнимые числа), изображаются с помощью точек, лежащих на оси Oy ; эту ось будем называть *мнимой осью*.

Положение точки, изображающей комплексное число z , можно определять также с помощью полярных координат r и φ (черт. 1) или, что то же самое, с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величины угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси. Числа r и φ будем называть соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа z и пользоваться обозначениями:

$$r = |z|, \\ \varphi = \text{Arg } z.$$

Для действительного числа введенное здесь понятие модуля совпадает с понятием абсолютной величины. Модулем чисто мнимого числа является абсолютная величина его мнимой части.

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = |z| \cos (\text{Arg } z), \\ y &= r \sin \varphi = |z| \sin (\text{Arg } z) \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{tg} (\text{Arg } z) = \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

Величина $\text{Arg } z$ многозначна и определена лишь с точностью до целого кратного числа 2π . В качестве главного значения величины $\text{Arg } z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi.$$

Главное значение аргумента z обозначают $\arg z$. Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$; если z — действительное отрицательное, то $\arg z = \pi$; если z — чисто мнимое число с положительной мнимой частью, то $\arg z = \frac{\pi}{2}$, если z — чисто мнимое с отрицательной мнимой частью, то $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. При $z = 0$ величина $\text{Arg } z$ не имеет смысла.

Пользуясь формулами (1), можно всякое комплексное число, отличное от нуля, представить в так называемой *тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

Например,

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ i &= 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \\ 1 &= 1 (\cos 0 + i \sin 0), \\ -2 &= 2 (\cos \pi + i \sin \pi), \\ -3i &= 3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

С помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (см. [1], п. 135 или здесь гл. III, стр. 32) можно перейти от тригонометрической формы (2) к показательной:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Например,

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad -1 = e^{i\pi}.$$

Два комплексных числа, имеющие одну и ту же действительную часть, а мнимые части которых равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, называются *взаимно-сопряженными*. Число, сопряженное числу z , обозначается $\bar{z}$. Если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Из этого определения следует, что если $w = \bar{z}$, то $z = \bar{w}$ и, следовательно, $\bar{\bar{z}} = z$.

Модули взаимно-сопряженных чисел одинаковы, а аргументы отличаются только знаком:

$$|\bar{z}| = |z|; \quad \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z^1).$$

Всякое действительное число совпадает с числом, ему сопряженным.

Сопряженные числа изображаются точками, взаимно-симметричными относительно действительной оси.

§ 2. Действия над комплексными числами

Сложение и умножение комплексных чисел производятся по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов; последнее из этих правил дополняется требованием замены i^2 числом -1 (а следовательно, i^3 числом $-i$, i^4 числом 1 , i^5 числом i и т. д.). При записи результата действий, произведенных над комплексными числами, следует отделить действительную часть от мнимой, т. е. собрать отдельно члены, не содержащие множителя i , и члены, содержащие этот множитель:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3), в частности, следует, что произведение двух взаимно-сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

т. е.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

¹⁾ Так как функция $\text{Arg } z$ неоднозначна, то равенство $\text{Arg } z = -\text{Arg } z$ надо понимать в том смысле, что множество значений, определяемых левой частью этого равенства, совпадает с множеством значений, определяемых правой частью.

Сумма двух взаимно-сопряженных комплексных чисел также является действительным числом

$$(x + iy) + (x - iy) = 2x,$$

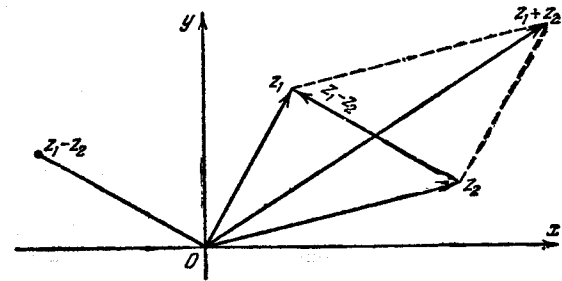
т. е.

$$z + \bar{z} = 2\text{Re } z.$$

Вычитание определяется как действие обратное сложению, откуда следует, что

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Итак, при сложении и при вычитании комплексных чисел отдельно складываются или вычитаются их действительные и



Черт. 2.

мнимые части. Если изобразить комплексное число с помощью вектора, то, как мы уже знаем, его действительная и мнимая части будут являться координатами вектора; а так как при сложении и вычитании векторов их координаты соответственно складываются или вычитаются, то сложение или вычитание комплексных чисел сводится к сложению или вычитанию векторов, изображающих эти числа (черт. 2). Модуль комплексного числа равен длине соответствующего вектора, поэтому модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Применяя это неравенство несколько раз, получим:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда векторы, изображающие числа $z_1, z_2, \dots, z_n$, лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону, т. е. когда

$$\arg z_1 = \arg z_2 = \dots = \arg z_n.$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа (черт. 2). Следовательно, если z_1 — данное комплексное число (данная точка), ρ — данное действительное положительное число, то совокупность точек z , удовлетворяющих уравнению

$$|z - z_1| = \rho,$$

образует окружность с центром в точке z_1 радиуса ρ . Неравенство $|z - z_1| < \rho$ определяет множество точек, лежащих внутри этой окружности («внутренность круга»), а неравенство $|z - z_1| > \rho$ — множество точек, лежащих вне окружности («внешность круга»).

Деление определяется как действие, обратное умножению. Пользуясь свойствами сопряженных чисел, удобнее всего деление комплексных чисел производить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, после чего делитель станет действительным положительным числом, а затем произвести деление действительной и мнимой частей отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Если воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то получим:

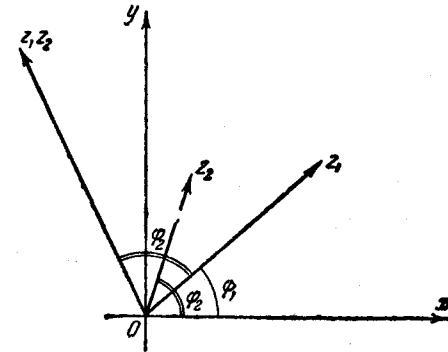
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (4)$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули

перемножаются, а аргументы складываются:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\ \text{Arg}(z_1 z_2) &= \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2^1). \end{aligned}$$

Вектор, изображающий произведение $z_1 z_2$, может быть получен из вектора, изображающего число z_1 , поворотом на угол φ_2 , образованный вектором z_2 с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину



Черт. 3.

вектора z_2 (черт. 3). Например, число i имеет модуль, равный единице, и аргумент $\frac{\pi}{2}$, поэтому умножение на i сводится к повороту вектора на 90° в положительном направлении без изменения его длины.

Число, модуль которого равен единице, имеет вид $\cos \varphi + i \sin \varphi$, или в показательной форме $e^{i\varphi}$. Следовательно, вектор $ze^{i\varphi}$ может быть получен поворотом вектора z около начала координат на угол φ .

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

¹⁾ Обе части этого равенства многозначны. Множество значений левой части этого равенства совпадает с множеством значений его правой части.

приводит к формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т. е.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Из правила умножения (4) следует правило возведения в целую положительную степень:
если

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

т. е.

$$|z^n| = |z|^n; \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z^1.$$

Пользуясь правилом деления, нетрудно проверить, что эти формулы остаются справедливыми и при целом отрицательном n .

Извлечь корень целой положительной степени n из числа z значит найти такое число $w = \sqrt[n]{z}$, n -я степень которого равна z . В соответствии с правилом возведения в степень имеем:

$$|w|^n = |z| \quad \text{и} \quad n \text{Arg } w = \text{Arg } z.$$

Если обозначить:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

то, учитывая, что аргумент комплексного числа содержит неопределенное слагаемое, кратное числу 2π , получим:

$$\rho^n = r; \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

¹⁾ Это равенство справедливо с точностью до кратного числа 2π , т. е. левая часть равенства или совпадает с правой или отличается от нее на $2k\pi$, k — целое число. Если же иметь в виду все множество значений аргумента, то равенство неверно, так как $n \text{Arg } z = n \arg z + 2k\pi$, в то время как $\text{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi$, и таким образом, с какими-либо значениями величины $n \text{Arg } z$ совпадают не все значения величины $\text{Arg}(z^n)$, а только те из них, для которых число k является кратным числу n .

Так как r и ρ — положительные числа, то первое из этих равенств однозначно определяет ρ , а именно:

$$\rho = (\sqrt[n]{r}),$$

где скобка в правой части обозначает, что берется арифметическое (действительное и положительное) значение корня. Из второго равенства находим:

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

и формула, с помощью которой можно извлекать корень из любого комплексного числа, принимает вид:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\sqrt[n]{r}) \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Хотя k — любое целое число, однако из этой формулы следует, что имеется лишь n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$, которые можно получить, полагая $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Действительно, два значения k , отличающиеся друг от друга на n , а значит и на любое кратное числа n , дают при подстановке в формулу (5) одно и то же значение, так как если $k' - k = n$, то

$$\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2(k' - k)\pi}{n} = 2\pi$$

и, следовательно,

$$\cos \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n}; \quad \sin \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

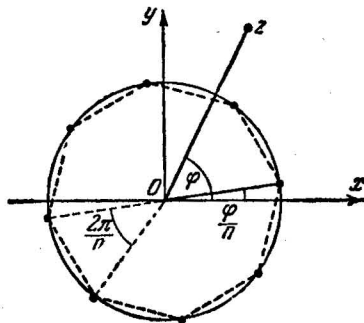
Как видно из формулы (5), все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, равный $(\sqrt[n]{|z|})$. А так как

$$\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

и, следовательно, аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующих соседним значениям k (k и $k+1$), отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$, то точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$,

являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $(\sqrt[n]{|z|})$ с центром в начале координат.

Поэтому способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$, таков (черт. 4): из начала координат, как из центра, описываем окружность, радиус которой равен $(\sqrt[n]{|z|})$; проводя из начала координат луч, направленный к положительному направлению действительной оси под углом в n раз меньшим, чем угол, образованный тем же направлением лучом, идущим из начала координат в точку z , мы найдем на окружности точку, соответствующую одному из значений $\sqrt[n]{z}$ (для этой точки в формуле (5) $k=0$); вписав в окружность правильный n -угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, мы построим точки, соответствующие остальным значениям корня.



Черт. 4.

Пример. Вычислить все значения $\sqrt[3]{-8}$.
Имеем: $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$, откуда

$$\sqrt[3]{-8} = (\sqrt[3]{8}) \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right).$$

При $k=0, 1, 2$ получим:

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + i\sqrt{3}, \\ -2, \\ 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Если так же, как это принято для действительных чисел, обозначить

$$\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}},$$

то действие возведения комплексного числа в степень окажется определенным для любого действительного рационального показателя степени,

Задачи к главе I

1. Записать в тригонометрической форме числа

- а) $3i$, б) $-i$, в) 2 , г) -2 , д) $1+i$, е) $-1-i$, ж) $\sqrt{3}-i$, з) $1-i\sqrt{3}$, и) $2+5i$, к) $-2+5i$, л) $2-5i$, м) $-2-5i$.

2. Где расположены точки z , для которых:

- а) $|z| > 5$, б) $|z-i| < 3$, в) $|z+2i| \geq 2$, г) $\operatorname{Re} z > 3$, е) $\operatorname{Im} z \leq 2$, ж) $|z-2| + |z+2| = 5$, з) $|z-2| - |z+2| > 3$, и) $|z^2-1| = a^2$ ($a > 0$), к) $R(z^2) = a^2$, л) $|z-i| = |z+2|$, м) $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1$, н) $\alpha < \arg z < \beta$, о) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$, п) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+2i) < \frac{\pi}{2}$.

3. Доказать, что если $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в круг радиуса 1 с центром в начале координат.

4. Найти:

- а) $\frac{1}{i}$, б) $\frac{1-i}{1+i}$, в) $\frac{2}{1-3i}$, г) $(\sqrt{3}-i)^2$, д) $(1+i\sqrt{3})^2$.

5. Найти:

- а) $\sqrt[3]{i}$, б) $\sqrt[6]{-8}$, в) $\sqrt[8]{1}$, г) $\sqrt{1-i}$, д) $\sqrt{3+4i}$, е) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

ГЛАВА II ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Функции комплексного аргумента

Основные понятия теории функций комплексного аргумента являются почти дословным обобщением соответствующих понятий теории функций действительного переменного. Эта глубокая аналогия в основных определениях влечет за собой столь же глубокую аналогию во многих теоремах, доходящую в некоторых разделах, например в излагаемой в этой главе теории пределов, до полного тождества формулировок основных теорем.

Говорят, что на некотором множестве точек, изображающих значения комплексного переменного z , задана функция $w=f(z)$, если каждой точке z (каждому значению z) этого множества поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) или большее число (в случае многозначной функции) значений w .

Множество точек, на котором задана (определена) функция $w=f(z)$, в дальнейшем будет, как правило, или совокупностью всех точек плоскости (вся плоскость), или всей плоскостью, за исключением отдельных ее точек, или односвязной, либо многосвязной областью (см. [2] п. 139), являющейся частью плоскости, ограниченной одной или несколькими гладкими или кусочно-гладкими¹⁾ кривыми, из которой могут быть удалены отдельные точки.

Так, например, функция $w=z^2$ однозначна и ее можно считать определенной на всей плоскости, так как с помощью

формулы, по которой производится возведение комплексного числа в степень (стр. 14), всякому комплексному числу z соответствует (и притом только одно) значение z^2 . Функция $w=\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена на всей плоскости, за исключением точки $z=0$ (см. стр. 8—9).

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y , являющихся соответственно действительной и мнимой частями z ($z=x+iy$), а числу w точно так же однозначно соответствует пара действительных чисел u и v ($w=u+iv$), то зависимость $w=f(z)$ между комплексной функцией w и комплексным аргументом z равносильна двум зависимостям:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных аргументов x и y .

Например, если $w=z^2$, то, полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$, получим $u+iv=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$ и, следовательно, равенство $w=z^2$ равносильно равенствам:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy. \end{aligned}$$

Если значения аргумента z изображать с помощью точек некоторой плоскости («плоскости z »), а значения функции w с помощью точек другой плоскости («плоскости w »), то функция $w=f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости z , в которых эта функция определена, и точками плоскости w , другими словами, функция осуществляет отображение точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w .

Обозначим символом g множество точек плоскости z , на котором определена функция $w=f(z)$, а символом G множество, состоящее из тех точек плоскости w , на которые с помощью функции $w=f(z)$ отображаются точки множества g . Выбрав какую-либо определенную точку множества G , найдем те точки множества g , которые отобразились в выбранную точку. Таким образом, каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества g . В соответствии с определением функции это будет означать, что на множестве G

¹⁾ Дуга называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную, непрерывно вращающуюся при движении точки по кривой; дуга непрерывной кривой, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется кусочно-гладкой.

определена некоторая функция $z = \varphi(w)$, которую называют *обратной* по отношению к функции $w = f(z)$.

Если функция $w = f(z)$ однозначна, то каждой точке плоскости z , в которой функция определена, соответствует одна точка плоскости w . Если при этом некоторое множество точек g плоскости z отображается взаимно-однозначно на некоторое множество G плоскости w , т. е. если функция $w = f(z)$ такова, что не только каждой точке множества g соответствует одна и только одна точка множества G , но и обратно, каждой точке множества G соответствует в точности одна точка множества g , то функция $z = \varphi(w)$, определенная на множестве G и отображающая его на множество g , обратная по отношению к функции $w = f(z)$, также является однозначной.

Пример 1. Функция $w = z^2$ осуществляет однозначное отображение внутренности круга g плоскости z с центром в начале координат и радиусом, равным 2, на внутренность круга G плоскости w с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

Действительно, точки круга g определены неравенством $|z| < 2$, но если $w = z^2$, то неравенство $|z| < 2$ равносильно неравенству $|w| < 4$, которое определяет совокупность точек, лежащих внутри круга G . Нетрудно видеть, что это отображение области g на область G однозначно, но не взаимно-однозначно. Действительно, функция $w = z^2$ однозначна и каждой точке z соответствует единственная точка w , но каждой точке w , лежащей внутри круга G , за исключением точки $w = 0$, соответствуют две точки круга g , симметричные относительно начала координат, так как если $z_1 = -z_1$ и $z_1^2 = w$, то $z_2^2 = z_1^2 = w$. Следовательно, функция $z = \sqrt{w}$, осуществляющая отображение области G на область g , обратная по отношению к функции $w = z^2$, многозначна (двузначна).

Пример 2. Сектор g , точки которого определены неравенствами $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $|z| < 1$, в силу того, что $\arg(z^2) = 2 \arg z$ и $|z^2| = |z|^2$, отображается с помощью функции $w = z^2$ на сектор G : $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$, $|w| < 1$ (черт. 5).

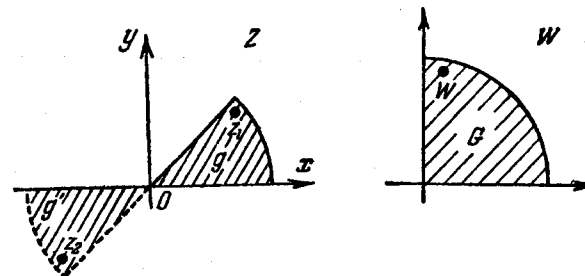
Нетрудно видеть, что это отображение взаимно-однозначно. Действительно, хотя функция $z = \sqrt{w}$, обратная по отношению к данной, двузначна, все же из двух точек z_1 и z_2 ($z_2 = -z_1$), соответствующих точке w области G , лишь одна принадлежит области g . Иными словами, отображение области G на область g осуществляется с помощью однозначной ветви¹⁾ функции $z = \sqrt{w}$ (другая ветвь функции $z = \sqrt{w}$ отображает область G на область g' , граница которой на черт. 5 отмечена пунктиром).

¹⁾ О ветвях многозначной функции см. подробнее в главе VIII.

Если в плоскости z кривая c задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (2)$$

то для того, чтобы найти уравнение кривой C в плоскости w , на которую отображается кривая c , с помощью функции



Черт. 5.

$w = f(z)$, достаточно исключить x и y из уравнений (1) (стр. 19) и (2). Если кривая c задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

то, подставляя $x(t)$ и $y(t)$ вместо x и y в (1) (стр. 19), получим уравнения кривой C также в параметрической форме:

$$u = u[x(t), y(t)] = \varphi_1(t),$$

$$v = v[x(t), y(t)] = \varphi_2(t).$$

Пример 3. Найти уравнения линий плоскости w , на которые с помощью функции $w = z^2$ отображаются прямые, параллельные координатным осям плоскости z .

Как было показано выше (стр. 19), равенство $w = z^2$ равносильно равенствам:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy, \end{aligned} \quad (3)$$

где $z = x + iy$ и $w = u + iv$.

Образ прямых $x = c$, параллельных мнимой оси плоскости z , получим, исключая x и y из уравнения $x = c$ и уравнений (3):

$$\begin{aligned} u &= c^2 - y^2, \\ v &= 2cy, \end{aligned}$$

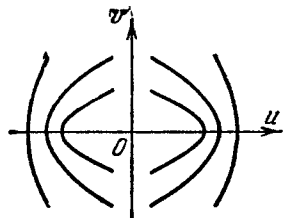
откуда

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

Мы получили уравнение некоторого семейства парабол, симметричных относительно оси Ou , вершины которых находятся на положительной части этой оси и которые обращены вогнутостью в сторону отрицательной части оси Ou (черт. 6).

Мнимая ось $x=0$ плоскости z отобразится на линию

$$\begin{aligned} u &= -v^2, \\ v &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$



Черт. 6.

плоскости z отображается на отрицательную часть действительной оси плоскости w :

$$u \leq 0, \quad v = 0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что семейство прямых $y=c$, параллельных действительной оси плоскости z , отобразится в семейство парабол

$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$$

плоскости w , также изображенное на чертеже 6, причем действительная ось $y=0$ плоскости z отобразится в положительную часть действительной оси плоскости w :

$$u \geq 0, \quad v = 0.$$

Следует заметить, что параметрические уравнения линии в плоскости z

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

могут быть заменены одним уравнением

$$z = z(t),$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Например, уравнение

$$z = \cos t + i \sin t$$

является уравнением окружности радиуса 1 с центром в начале координат, так как оно равносильно уравнениям:

$$x = \cos t,$$

$$y = \sin t.$$

Уравнение кривой в плоскости w , на которую с помощью функции $w=f(z)$ отображается кривая $z=z(t)$, имеет вид $w=f[z(t)]$.

Пример 4. Найти образ прямой $z=(1+i)t$ при отображении $w=z^2$.

Уравнение $z=(1+i)t$ равносильно системе уравнений

$$x=t,$$

$$y=t$$

и определяет в плоскости z биссектрису первого координатного угла $y=x$.

С помощью функции $w=z^2$ эта биссектриса отображается на линию

$$w=(1+i)^2 t^2$$

или

$$w=(-2+2i)t^2,$$

откуда

$$u=-2t^2,$$

$$v=2t^2.$$

Исключая параметр t , получим $v=-u$ — уравнение биссектрисы второго координатного угла плоскости w .

§ 2. Предел последовательности

Окрестностью точки, изображающей комплексное число z_0 , называется всякая область, внутри которой лежит точка z_0 . В дальнейшем мы будем пользоваться только круговыми окрестностями, т. е. будем называть окрестностью точки z_0 внутренность круга с центром в этой точке, при этом ρ -окрестностью точки z_0 мы будем называть внутренность круга радиуса ρ с центром в точке z_0 , т. е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \rho.$$

Число z_0 называется *пределом* последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0,$$

если для любого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно подобрать такое число N (N зависит от ε), что при $n \geq N$ выполнено неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. В этом случае говорят также, что последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ сходится к числу z_0 . Если среди членов последовательности нет бесконечного множества одинаковых чисел, то числа $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ определяют бесконечное множество различных точек. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0,$$

то как бы мала ни была ε -окрестность точки z_0 , вне этой окрестности может остаться лишь конечное число точек последовательности, так как все точки последовательности z_n , начиная с той, для которой $n = N$, попадут внутрь этой ε -окрестности.

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, то, учитывая равенство

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2},$$

нетрудно, исходя из определения предела, заключить, что существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$$

равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Если последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ такова, что модули всех ее членов, начиная с некоторого, становятся больше любого, сколь угодно большого положительного числа (т. е. если, как бы велико ни было положительное число M , к нему можно подобрать такое N , что $|z_n| > M$ при $n \geq N$), то хотя последовательность, очевидно, предела не имеет, однако удобно и в этом случае писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

и говорить, что последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ сходится к бесконечно удаленной точке или что предел последовательности бесконечен. Окрестностью бесконечно удаленной

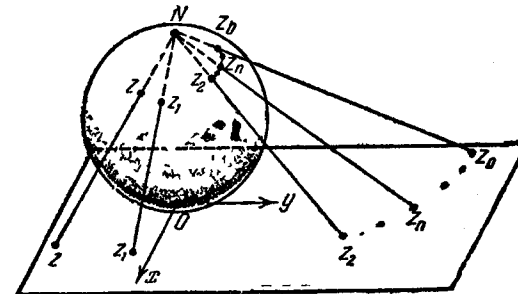
точки будем называть внешностью круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R , а центр находится в точке $z = 0$, то множество точек, образующих окрестность бесконечно удаленной точки, определяется неравенством $|z| > R$. Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющаяся внешностью этого круга.

Сопоставляя определение равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ с определением окрестности бесконечно удаленной точки, мы видим,

что, если последовательность точек сходится к бесконечно удаленной точке, то, как бы мала ни была окрестность бесконечно удаленной точки, т. е. как бы велик ни был радиус R круга, внешностью которого эта окрестность является, все точки последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, за исключением конечного их числа (все точки z_n , начиная с той, для которой $n = N$), попадут внутрь этой окрестности.

Таким образом, определение предела, по существу, одно и то же как в случае, когда этот предел конечен, так и в том случае, когда он бесконечен, и в этом смысле бесконечно удаленная точка вполне равноправна с остальными точками плоскости.

Равноправность бесконечно удаленной точки по отношению к другим точкам можно сделать наглядной, если изменить геометрическую интерпретацию комплексных чисел.



Черт. 7.

Построим сферу (черт. 7), касающуюся в точке $z = 0$ плоскости z , служившей нам для интерпретации комплексных чисел. Пусть N — точка сферы, диаметрально противоположная

точке касания сферы с плоскостью z . Проведем из точки N луч в любую точку z плоскости z и отметим на сфере точку, отличную от точки N , в которой этот луч пересекает сферу. Будем считать эту точку изображением того же самого комплексного числа z . Любому комплексному числу z ставится таким образом в соответствие определенная точка сферы, которую будем так же, как и соответствующую точку плоскости, называть точкой z . Если на плоскости взята последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ точек, сходящаяся к некоторой точке z_0 , то соответствующая последовательность точек на сфере также будет сходиться к точке z_0 на сфере (т. е. расстояние точки z_n на сфере от точки z_0 на сфере будет стремиться к нулю).

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

то последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ на сфере будет сходиться к точке N , т. е. при $n \rightarrow \infty$ расстояние между точкой z_n на сфере и точкой N будет стремиться к нулю. Таким образом, точка N (а это «обычная» точка сферы) соответствует бесконечно удаленной точке плоскости.

Заметим, что в соответствии с введенным нами определением на комплексной плоскости имеется только одна бесконечно удаленная точка (соответствующая точке N на сфере), в то время как, например, во многих разделах геометрии удобно считать, что существует бесконечное множество бесконечно удаленных точек: каждому направлению соответствует своя бесконечно удаленная точка.

§ 3. Предел функции. Непрерывность

Число w_0 называется *пределом* однозначной функции $f(z)$ при z , стремящемся к z_0 :

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

если, как бы мала ни была выбранная ε -окрестность точки w_0 , можно найти такую δ -окрестность точки z_0 , что для всех точек z этой окрестности (кроме, быть может, самой точки z_0) соответствующие значения функции $f(z)$ будут изображаться точками выбранной ε -окрестности точки w_0 .

В случае, если z_0 и w_0 — конечные числа, это определение равносильно следующему. Равенство

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

обозначает, что как бы мало ни было положительное число ε , к нему можно подобрать такое положительное число δ , что для всех значений z ($z \neq z_0$), удовлетворяющих условию

$$|z - z_0| < \delta, \quad (5)$$

выполнено неравенство

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \quad (6)$$

Если z_0 или w_0 или оба эти числа бесконечны, то в соответствии с определением окрестности бесконечно удаленной точки неравенства (5) или (6), или оба эти неравенства должны быть заменены другими. Так, например, равенство

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$$

(w_0 конечно) обозначает, что, как бы мало ни было положительное число ε , к нему можно подобрать столь большое положительное число A , что для всех значений z , для которых

$$|z| > A,$$

функция $f(z)$ будет удовлетворять неравенству

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Введенное нами определение предела функции формально ничем не отличается от определения предела функции действительного аргумента, и следовательно, все доказываемые в курсе математического анализа теоремы о пределах и бесконечно малых¹⁾ остаются в силе для функций комплексного аргумента.

Если функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

¹⁾ Функция $f(z)$ называется бесконечно малой в окрестности точки z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0.$$

не только существует, но равен значению функции $f(z)$ в точке z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 . В соответствии с определением предела это значит, что функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если для любого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta \quad (7)$$

будет следовать, что

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Если обозначить $z - z_0 = \Delta z$, $w - w_0 = \Delta w$ (Δz — приращение аргумента, Δw — приращение функции), то неравенства (7) и (8) заменяются, соответственно, неравенствами:

$$|\Delta z| < \delta, \quad (7')$$

$$|\Delta w| < \varepsilon, \quad (8')$$

и определение непрерывности в точке z_0 функции $w = f(z)$, заданной в некоторой окрестности этой точки, сводится к тому, что в этой точке

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

Так как сформулированное выше определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функций действительного аргумента, то доказываемые в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения, частного¹⁾ непрерывных функций, а также непрерывной функции от непрерывной функции остаются в силе для функций комплексного аргумента.

Как уже указывалось выше (стр. 19), равенство $w = f(z)$ равносильно системе равенств:

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y),$$

где $w = u + iv$, $z = x + iy$.

¹⁾ Если делитель не обращается в нуль.

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, то

$$f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]$$

и

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2}. \quad (9)$$

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке z следует, что, если точка (x, y) находится в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) , то выполнено неравенство (8), а следовательно, в соответствии с (9), тем более, удовлетворяются неравенства:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &< \varepsilon, \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

которые означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) .

Таким образом, из непрерывности функции комплексного аргумента следует непрерывность ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных аргументов x и y . Справедливо и обратное утверждение: из неравенств (10) и равенства (9) непосредственно следует, что непрерывность функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ влечет за собой непрерывность функции $f(z)$.

Заметим, что если вспомнить (см. стр. 21) способ, с помощью которого, зная уравнение некоторой линии в плоскости z , можно найти уравнение ее образа на плоскости w при отображении $w = f(z)$, то мы легко убедимся в справедливости утверждения: непрерывная кривая отображается с помощью непрерывной функции на непрерывную кривую (или, если $f(z)$ постоянна вдоль заданной кривой, в одну точку).

Задачи к главе II

1. На какие линии плоскости w отображаются с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ следующие кривые плоскости z ($z = x + iy$, $w = u + iv$):

- а) $x^2 + y^2 = 4$; г) $y = 0$;
б) $x^2 + y^2 = 1$; д) $x = 1$;
в) $y = x$; е) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

2. Какие линии заданы уравнениями (t — действительный параметр):

- а) $z = t(1 + i)$; б) $z = a \cos t + ib \sin t$,
в) $z = t + \frac{i}{t}$; г) $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$.

Если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots,$$

членами которого являются модули членов данного ряда (1), то ряд (1) также сходится и называется *абсолютно сходящимся*. Действительно, из очевидных неравенств

$$|x_n| \leq |z_n|,$$

$$|y_n| \leq |z_n|$$

вытекает сходимость рядов (2) и (3), а следовательно и ряда (1).

Определения суммы, разности, произведения двух рядов и теоремы о сходимости суммы, разности, произведения рядов не отличаются от соответствующих теорем для рядов с действительными членами (см. [1], п. 126).

Введем определения основных трансцендентных функций для комплексных значений независимой переменной. Очевидно, что когда показатель степени является комплексным числом, определение степени a^z , вводимое в алгебре, теряет смысл. Точно так же известные из тригонометрии определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ теряют смысл при комплексных значениях z . Принимая во внимание известные для действительных значений x разложения функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в степенной ряд, положим, по определению,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (4)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (5)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (6)$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении z . Действительно, рассмотрим, например, ряд (4). Если $z = r$, где r — любое действительное положительное число, то ряд (4), как известно из курса анализа, сходится, но это и значит, что ряд (4) сходится абсолютно при $|z| = r$, а так как r произвольно, то ряд (4) сходится абсолютно в любой точке плоскости z . Аналогичные рассуждения применимы к рядам (5) и (6). Следовательно, равенства (4), (5), (6) определяют во всей плоскости комплексного переменного z функции e^z , $\sin z$, $\cos z$, совпадающие при действительных значениях z с соответствую-

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (1)$$

так же как и ряд с действительными членами, называется *сходящимся*, если существует предел при $n \rightarrow \infty$ его частичной суммы

$$s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

Этот предел

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

называется *суммой ряда*.

Очевидно, что ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad (2)$$

членами которого являются действительные части членов ряда (1), так и ряд

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots, \quad (3)$$

составленный из мнимых частей членов ряда (1).

Это утверждение немедленно следует из того, что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости двух последовательностей, одна из которых составлена из действительных, а другая из мнимых частей членов данной последовательности. Отсюда, в частности, получаем, что в случае сходимости ряда (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, так как $z_n = x_n + iy_n$,

а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ввиду сходимости рядов (2) и (3).

циями функциями, определяемыми в курсах математического анализа.

Функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ связаны между собой формулой Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (7)$$

Действительно, подставив в равенство (4) iz вместо z , получим:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \dots$$

Умножив, далее, обе части равенства (5) на i и почленно сложив полученное равенство с равенством (6), убедимся в справедливости формулы Эйлера.

Если в формуле Эйлера заменить z на $-z$, будем иметь:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (9)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (10)$$

Как уже указывалось на стр. 9, формула Эйлера позволяет преобразовать тригонометрическую форму комплексного числа в показательную:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Если x_1 и x_2 — действительные числа, то, как известно,

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Принимая во внимание, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

получим:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x_1}{1!} + \frac{x_1^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x_2}{1!} + \frac{x_2^2}{2!} + \dots\right) = \\ = 1 + \frac{x_1 + x_2}{1!} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Если заметить, что сходимость (и притом абсолютная) рядов, участвующих в равенстве (11), не нарушится при замене действительных чисел x_1 и x_2 любыми комплексными числами z_1 и

z_2 , и что формальное перемножение рядов с комплексными членами можно производить по правилам перемножения рядов с действительными членами, то можно утверждать, что равенство

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (12)$$

справедливо и при любых комплексных z_1 и z_2 . В частности, если $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Но, в силу (7),

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

следовательно,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|e^z| = e^x$ и одно из значений $\text{Arg } e^z$ равно y .

Равенство (13) позволяет вычислять значения показательной функции при любых комплексных значениях показателя. Например:

$$e^{3-3i} = e^3 (\cos 3 - i \sin 3),$$

$$e^{\pi i} = -1,$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i.$$

Из равенства (13) следует периодичность функции e^z с периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Действительно, если $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+(y+2\pi)i} = e^x [\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)] = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

В частности, $e^{2k\pi i} = e^0 = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i} = -1$ (k — целое число).

Если m — целое число, то из (13) получим:

$$\begin{aligned} (e^z)^m &= [e^x (\cos y + i \sin y)]^m = e^{mx} (\cos y + i \sin y)^m = \\ &= e^{mx} (\cos my + i \sin my) = e^{m(x+iy)} = e^{mz}. \end{aligned}$$

Если p — рациональная дробь ($p = \frac{m}{n}$, где m и n — целые числа), то выражение $(e^z)^p$ многозначно (оно имеет n значений) и только одно из значений этой величины равно e^{pz} .

Формула (13) позволяет вычислять значения показательной функции, а формулы (9) и (10) могут служить для вычисления $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном z .

Показательная функция имеет период $2\pi i$, поэтому правые части равенств (9) и (10) не изменятся при замене z на $z + 2\pi$, так как $e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz}$, $e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz-2\pi i} = e^{-iz}$, следовательно,

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z,$$

т. е. определенные с помощью (9) и (10) функции $\cos z$ и $\sin z$ периодичны и имеют, как и в случае действительного аргумента, период 2π . Нетрудно убедиться в том, что для функций $\sin z$ и $\cos z$ при любых комплексных значениях z сохраняется основное связывающее их тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \\ &= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Сохраняются также и другие основные тригонометрические тождества. Например, на основании (9) и (10)

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \\ &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}, \end{aligned}$$

и, преобразовав правую часть этого равенства, получим:

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2).$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются с помощью равенств:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \quad (14)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \quad (14')$$

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Принимая во внимание (9), (10), (14) и (14'), заметим, что гиперболические функции легко могут быть выражены через тригонометрические:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Из этих тождеств следует в частности периодичность гиперболических функций, причем периоды $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ равны $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ равны πi .

Пример 1. Найти $\cos i$.

Принимая во внимание, что $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, получим:

$$\cos i = \frac{e^{-1} + e}{2} = \operatorname{ch} 1.$$

Пример 2. Найти $\sin(1 + 2i)$.

Принимая во внимание, что $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, получим:

$$\begin{aligned} \sin(1 + 2i) &= \frac{e^{i(1+2i)} - e^{-i(1+2i)}}{2i} = \frac{e^{-2}e^i - e^2e^{-i}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i \sin 1) - e^2(\cos 1 - i \sin 1)}{2i} = \\ &= \frac{\cos 1(e^{-2} - e^2) + i \sin 1(e^2 + e^{-2})}{2i} = \\ &= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \sin 1 + i \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cos 1 = \operatorname{ch} 2 \sin 1 + \operatorname{sh} 2 \cos 1 \end{aligned}$$

(аргумент под знаком синуса и косинуса измеряется, конечно, в радианах).

§ 2. Логарифм и обратные тригонометрические функции

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной.

Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, то число w называется *логарифмом* числа z и обозначается

$$w = \operatorname{Ln} z.$$

Если $w = u + iv$, то, как уже было отмечено выше, из формулы (13) следует, что $|e^w| = e^u$ и $\operatorname{Arg} e^w = v$. Так как в рассматриваемом случае $e^w = z$, то $e^u = |z|$, или

$$u = \ln |z|$$

($|z|$ — число действительное, и положительное, и здесь имеется в виду известное из курса математического анализа обычное определение логарифма), и

$$v = \operatorname{Arg} z.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z &= \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \\ &= \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (15)$$

Ввиду многозначности величины $\operatorname{Arg} z$ логарифм является многозначной функцией (действительная часть логарифма, равная $\ln |z|$, определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π).

Главным значением логарифма числа z будем называть то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа z . Следовательно, в формуле (15) главное значение логарифма получим при $k=0$.

Если $z = x$ — действительное положительное число, то $|z| = x$ и $\arg z = 0$, поэтому, согласно (15), главное значение логарифма действительного положительного числа является числом действительным и совпадает со значением, обозначаемым символом $\ln x$, которое и приводится в таблицах логарифмов. Естественно поэтому символом $\ln z$ обозначать главное значение логарифма любого комплексного числа z ; тогда в соответствии с формулой (15) получим:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (15')$$

Пример 1. Найти $\ln(-1)$ и $\operatorname{Ln}(-1)$.

Модуль числа -1 равен 1, а главное значение аргумента равно π , следовательно,

$$\ln(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi,$$

а

$$\operatorname{Ln}(-1) = i\pi + 2k\pi i = (2k+1)\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 2. Вычислить $\ln i$ и $\operatorname{Ln} i$.

Модуль числа i равен 1, а главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{2}$,

следовательно,

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i,$$

$$\operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 3. Найти $\ln(3+4i)$ и $\operatorname{Ln}(3+4i)$. Модуль числа $3+4i$ равен $\sqrt{3^2+4^2}=5$, а главное значение аргумента равно $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, следовательно,

$$\ln(3+4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{Ln}(3+4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Так как

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z,$$

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z$$

(n — целое число, положительное или отрицательное), то из формулы (15) следует, что обобщенная на случай комплексных значений аргумента логарифмическая функция обладает следующими известными свойствами логарифмов действительного аргумента¹⁾:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Формула (13) (стр. 33) служит для возведения в комплексную степень числа e . Чтобы перейти к определению возведения в степень любого комплексного числа, заметим сначала,

¹⁾ Относительно смысла двух последних свойств, следующих из соответствующих свойств аргумента, следует иметь в виду сказанное в сноске на стр. 14.

что в силу определения логарифмической функции

$$e^{\operatorname{Ln} \zeta} = \zeta$$

для любого комплексного ζ .

Для действительных ζ и z при $\zeta > 0$, очевидно, справедливо тождество

$$\zeta^z = e^{z \operatorname{Ln} \zeta}.$$

Будем теперь считать

$$\zeta^z = e^{z \operatorname{Ln} \zeta} \quad (16)$$

для любых комплексных ζ и z и тем самым определим величину ζ^z при любых комплексных значениях ζ и z .

В силу многозначности логарифма определенное равенством (16) выражение ζ^z многозначно. Его главным значением будем называть то, которое получим, подставив в правую часть (16) $\operatorname{Ln} \zeta$ вместо $\operatorname{Ln} \zeta$. Только при целых действительных (положительных, отрицательных или равных нулю) значениях z формула (16) определяет единственное значение величины ζ^z , так как в этом случае неопределенное слагаемое вида $2k\pi i$, входящее в $\operatorname{Ln} \zeta$, будучи умножено на целое число z , дает в показателе правой части равенства (16) слагаемое вида $2k'\pi i$, где k' — также целое действительное число и значения правой части (16), соответствующие различным значениям k' , совпадают.

Пример 4. Найти i^i :

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Главное значение величины i^i равно $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Пример 5. Найти 2^{1+i} :

$$2^{1+i} = e^{(1+i) \operatorname{Ln} 2} = e^{(1+i)(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{(\ln 2 - 2k\pi) + i(\ln 2 + 2k\pi)} = e^{\ln 2 - 2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2).$$

Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим (см. определение обратной функции на стр. 19).

Если

$$z = \sin w,$$

то w называется *арксинусом* числа z и обозначается

$$w = \operatorname{Arcsin} z.$$

Аналогично, если

$$z = \cos w,$$

то w называется *арккосинусом* z и обозначается

$$w = \operatorname{Arccos} z;$$

если $z = \operatorname{tg} w$, то w называется *арктангенсом* z и обозначается

$$w = \operatorname{Arctg} z$$

и т. д.

Если $z = \sin w$, то на основании (10)

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

откуда

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

или

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решив это квадратное относительно e^{iw} уравнение, получим:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2 + 1},$$

т. е.

$$iw = \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2})$$

и

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}). \quad (17)$$

В силу многозначности логарифма и двузначности корня в правой части (17) $\operatorname{Arcsin} z$ является функцией многозначной. Если z — число действительное и $|z| \leq 1$, то величина $\sqrt{1 - z^2}$ также является действительной и

$$|iz + \sqrt{1 - z^2}| = 1.$$

Но, в силу формулы (15), все значения логарифма числа, модуль которого равен 1, являются числами чисто мнимыми, а

¹⁾ Мы не пишем перед радикалом двойного знака, так как символом $\sqrt[n]{z}$ обозначаем все значения корня.

так как перед знаком логарифма в правой части (17) стоит множитель $-i$, то все значения $\operatorname{Arctg} z$ будут в рассматриваемом случае, как и следовало ожидать, числами действительными; во всех прочих случаях значения $\operatorname{Arctg} z$ действительными быть не могут.

На основании (14), если $z = \operatorname{tg} w$, имеем:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})},$$

откуда

$$e^{iw}(1 - iz) = e^{-iw}(1 + iz)$$

или

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Следовательно,

$$2iw = \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

и

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}. \quad (18)$$

Если z является любым действительным числом, то числа $1 + iz$ и $1 - iz$ будут взаимно-сопряженными, поэтому их модули одинаковы, следовательно, модуль выражения, стоящего под знаком логарифма в правой части (18), равен 1 и, в силу (15), все значения этого логарифма чисто мнимы. В этом случае ввиду наличия в правой части (18) множителя $-\frac{i}{2}$ величина $\operatorname{Arctg} z$, как и следовало ожидать, действительна, в остальных случаях эта величина действительной быть не может.

Аналогично можно получить:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

Пример 6. Найти $\operatorname{Arcsin} 2$. С помощью (17) и (15) получим:

$$\operatorname{Arcsin} 2 = -i \operatorname{Ln} (2i \pm i\sqrt{3}) = -i \operatorname{Ln} [(2 \pm \sqrt{3})i] =$$

$$= -i \left[\ln (2 \pm \sqrt{3}) + i \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - i \ln (2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 7. Найти $\operatorname{Arctg}(2i)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}(2i) &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{i}{2} \left(\ln \frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{i \ln 3}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Функции, обратные $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, называются обратными гиперболическими функциями и обозначаются соответственно $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$. Обратные гиперболические функции многозначны. Действительно, если $w = \operatorname{Arsh} z$, то $z = \operatorname{sh} w$ или $z = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$, откуда $e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$. Решая это квадратное относительно e^w уравнение, получим: $e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$, откуда $w = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 + 1})$ или $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 + 1})$. Многозначность функции $\operatorname{Arsh} z$ является следствием многозначности логарифма и квадратного корня, стоящих в правой части последнего равенства.

Совершенно так же можно доказать, что $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})$,

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Задачи к главе III

1. Найти:

а) $\operatorname{Ln} (1 + i)$, б) $\operatorname{Ln} (-i)$, в) $\operatorname{Ln} (-3 + 4i)$.

2. Найти:

а) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, г) i^{1+i} ,

б) $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$, д) $(1+i)^i$,

в) e^{2+i} , е) 3^i .

3. Доказать тождества:

а) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$,

б) $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$,

в) $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$.

4) Найти:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| а) $\sin i$, | г) $\operatorname{ch} i$, |
| б) $\cos(1+i)$, | д) $\operatorname{sh}(-2+i)$, |
| в) $\operatorname{tg}(2-i)$, | е) $\sin(x+iy)$, |
| | ж) $\cos(x+iy)$. |

5. Доказать тождества:

- | | |
|---|---|
| а) $\sin x = -i \operatorname{sh} ix$, | г) $\sin ix = i \operatorname{sh} x$, |
| б) $\cos x = \operatorname{ch} ix$, | д) $\cos ix = \operatorname{ch} x$, |
| в) $\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} x$, | е) $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$. |

6. Найти:

- | | |
|--|---|
| а) $\operatorname{Arcsin} 3$, | г) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$, |
| б) $\operatorname{Arcsin} i$, | д) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$, |
| в) $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}-i)$, | е) $\operatorname{Arth} i$, |
| | ж) $\operatorname{Arch}(-1)$. |

ГЛАВА IV ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. Аналитическая функция

Определения производной и дифференциала функции комплексного переменного дословно совпадают с определениями тех же понятий для функций действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются и на функции комплексного аргумента.

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного обладают по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного многими дополнительными свойствами, причина появления которых заключается в том, что требование существования производной функции комплексного аргумента, как будет видно из дальнейшего, является несравненно более ограничительным, чем требование существования производной функции действительного аргумента.

Дадим независимому переменному $z = x + iy$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и вычислим вызванное этим приращением аргумента приращение Δw функции $w = f(z)$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Если существует предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, w' , $\frac{dw}{dz}$ или $\frac{df}{dz}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Требование существования предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления Δz к нулю накладывает на функцию $f(z)$ значительно более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y = \varphi(x)$ действительного переменного x . В самом деле, требование существования производной функции действительного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x + \Delta x$ к точке x по двум направлениям, слева (при $\Delta x < 0$) и справа (при $\Delta x > 0$), и совпадение этих пределов, а требование существования производной функции $f(z)$ комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по любому пути, по любому из бесконечного множества различных направлений, и совпадение всех этих пределов.

Пусть

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y;$$

тогда

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$$

и

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

В этих обозначениях

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (1)$$

Функция, имеющая производную в точке z , называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z , то предел (1) существует и не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю; в частности, при $\Delta z = \Delta x$, т. е. при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной

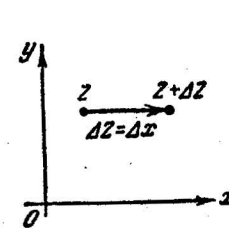
оси Ox (черт 8), получим:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

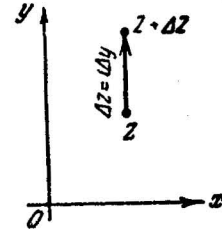
Выбрав $\Delta z = i\Delta y$, т. е. устремляя точку $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси Oy (черт. 9), получим:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ не должен за-



Черт. 8.



Черт. 9.

висеть от закона стремления Δz к нулю, то из (2) и (3) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Эти условия, называемые условиями Даламбера—Эйлера или условиями Коши—Римана, должны быть выполнены в каждой точке, в которой функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема.

При некоторых дополнительных ограничениях, например, требуя существования полных дифференциалов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, можно доказать, что условия Даламбера—Эйлера не только необходимы, но и достаточны для дифференцируемости функции $f(z) = u + iv$.

Действительно, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют полный дифференциал (см., например, [2], п. 145), то

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_2 = 0, \quad (5)$$

и каково бы ни было $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, имеем:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Заменяя на основании условий Даламбера—Эйлера в числителе

правой части $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, а $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как $|\Delta x + i\Delta y| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, то

$$\left| \frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y} \right| = |\varepsilon_1 + i\varepsilon_2|.$$

и, в силу (5), $|\varepsilon_1 + i\varepsilon_2|$ стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, т. е. при $\Delta z \rightarrow 0$.

Следовательно, по какому бы закону приращение Δz ни стремилось к нулю, из (6) получим:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

и достаточность условий Даламбера—Эйлера для существования $f'(z)$ доказана. Мы снова пришли для вычисления производной к формуле (2), которая показывает, что дифференцирование функции по комплексному аргументу z (если оно возможно) равносильно вычислению частной производной по x .

Если однозначная функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической* в данной точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической¹⁾ в этой области.

Точки плоскости z , в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют *правильными точками* этой функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена), — *особыми точками*.

Пример 1. Выяснить, является ли функция $w = z^2$ аналитической.

Если $w = z^2$, то $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ и $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, откуда находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия (4) выполнены во всех точках плоскости, следовательно, функция z^2 является аналитической во всей плоскости.

Пример 2. Выяснить, является ли функция e^z аналитической.

Если $w = e^z$, то $u + iv = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ и $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, условия Даламбера—Эйлера выполнены в каждой точке.

Функция e^z является аналитической во всей плоскости.

Пример 3. Выяснить, является ли аналитической функция $w = \bar{z}$.

Если $w = \bar{z}$, то $u + iv = x - iy$ и $u = x$, $v = -y$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$$

и следовательно, первое из условий (4) не выполнено. Функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

¹⁾ Аналитическую функцию называют также *голоморфной*, *монотонной*, *регулярной*.

Пример 4. Выяснить, является ли функция $w = z \operatorname{Re} z$ аналитической.

Если $w = z \operatorname{Re} z$, то $u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy$ и $u = x^2$, $v = xy$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Условия (4) выполнены только при $x = 0$ и $y = 0$. Следовательно, функция $z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$ и нигде не является аналитической.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функций, зависящих от комплексного аргумента, а определение производной функции комплексного аргумента также не отличается от определения производной для функции действительного аргумента, то нетрудно проверить, что известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, функции от функции, обратной функции остаются справедливыми и в случае комплексного аргумента.

Легко проверить, что сохраняются и правила дифференцирования элементарных трансцендентных функций. Например, если

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

то, пользуясь формулой (2) (стр. 45), получим:

$$\frac{dw}{dz} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

С помощью формул (9) и (10) (стр. 32) главы III нетрудно проверить справедливость известных формул дифференцирования тригонометрических функций. Правило дифференцирования обратной функции приведет нас к известным формулам дифференцирования логарифма и обратных тригонометрических функций.

§ 2. Связь аналитических функций с гармоническими

Действительная и мнимая части функции $f(z) = u + iv$, аналитической в некоторой области D , в той же области являются решениями уравнения $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, называемого *уравнением Лапласа*, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Действительно, функции u и v связаны в области D условиями Даламбера — Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое из этих тождеств по x , а второе по y и складывая, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0^1).$$

Дифференцируя первое из тех же тождеств по y , а второе по x и вычитая, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Решения уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ называются *гармоническими функциями*. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Однако, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, то функция $u(x, y) + iv(x, y)$, вообще говоря, не будет аналитической функцией, так как условия (4), как правило, не будут выполнены.

Аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мы получим, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, подберем другую так, чтобы удовлетворялись условия Даламбера — Эйлера $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, т. е. определим другую из этих функций по ее двум частным производным или, что то же самое, по ее полному дифференциалу. Как известно (см., например, [2], п. 187), по

¹⁾ Существование и непрерывность частных производных второго порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следует из доказываемой в следующей главе возможности дифференцировать аналитическую функцию любое число раз.

полному дифференциалу функция определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого определяется своей действительной или мнимой частью.

Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Даламбера — Эйлера и, следовательно, являющиеся действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называются сопряженной парой гармонических функций.

Пример. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть

$$v = 2x^2 - 2y^2 + x.$$

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -4y,$$

то из условий Даламбера — Эйлера (4) находим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1. \quad (8)$$

Воспользовавшись первым из этих уравнений, получим:

$$u = \int -4y \, dx = -4xy + \varphi(y), \quad (9)$$

где функция $\varphi(y)$ пока произвольна. Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем (9) по y и подставляем в (8):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1,$$

откуда

$$\varphi'(y) = -1 \quad \text{и} \quad \varphi(y) = -y + C.$$

Следовательно,

$$u = -4xy - y + C$$

и окончательно получим:

$$\begin{aligned} w = u + iv &= -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) = \\ &= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + C = \\ &= 2iz^2 + iz + C, \end{aligned}$$

где $z = x + iy$.

Многие задачи, связанные с изучением стационарных тепловых и электрических полей, а также с изучением потенциального течения жидкости, сводятся к решению уравнения Лапласа.

В простейших двумерных задачах такого типа в некоторой области D требуется определить непрерывное решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, принимающее заданные значения на границе области D . Эта задача называется первой краевой задачей для уравнения Лапласа или *задачей Дирихле*.

Задача Дирихле и некоторые более сложные краевые задачи для уравнения Лапласа легко решаются для небольшого числа простейших областей, например для круга или для прямоугольника.

Для более сложной области D задача Дирихле обычно решается следующим методом.

Стараются подобрать аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которая отображала бы область D , лежащую в плоскости x, y , на одну из тех простейших областей, лежащих в плоскости u, v , для которой задача Дирихле легко решается, например на круг.

Если удастся подобрать такую аналитическую в области D функцию, то задачу Дирихле можно считать решенной, так как при указанном преобразовании уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ снова пере-

ходит в уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0$.

Действительно, T можно рассматривать как действительную (или мнимую) часть некоторой аналитической функции $w_1 = \varphi(z) = T(x, y) + iQ(x, y)$. Переходя к новым переменным u и v с помощью преобразования $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где f является аналитической в области D функцией, и предполагая, что функция $f(z)$ имеет однозначную обратную функцию $z = F(w)$, которая, согласно замечанию на стр. 48, также будет аналитической функцией в соответствующей области, можем рассматривать $w_1 = T + iQ$ как функцию u и v :

$$w_1 = \varphi[F(w)] = T(u, v) + iQ(u, v),$$

причем сложная функция $\varphi[F(w)]$ будет аналитической функцией w (в соответствии со сказанным на стр. 48). Следовательно, $T(u, v)$ будет гармонической функцией и $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0$.

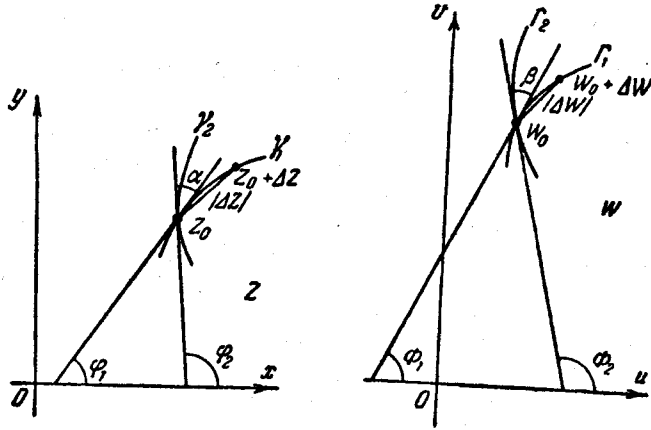
§ 3. Аргумент и модуль производной. Конформное отображение

Пусть в плоскости z дана некоторая точка z_0 и через эту точку проведены линии γ_1 и γ_2 , причем каждая из них имеет в точке z_0 определенную касательную.

Функция $w = f(z)$, которую мы будем предполагать аналитической в некоторой области, содержащей точку z_0 ,

отображает точку z_0 плоскости z в некоторую точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w , а линии γ_1 и γ_2 , проходящие через точку z_0 , отображаются на линии Γ_1 и Γ_2 , проходящие через точку w_0 (черт. 10).

Возьмем на линии γ_1 произвольную точку $z_0 + \Delta z$, которая отобразится в некоторую точку $w_0 + \Delta w$ линии Γ_1 .



Черт. 10.

Комплексное число Δz изобразится при этом вектором, идущим из точки z_0 в точку $z_0 + \Delta z$, а число Δw с помощью вектора, идущего из точки w_0 в точку $w_0 + \Delta w$.

Так как функция $w = f(z)$ является аналитической в точке z_0 , то предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$, не зависит от закона стремления Δz к нулю и равен числу $f'(z_0)$. Будем стремиться Δz к нулю так, чтобы точка $z_0 + \Delta z$ оставалась на кривой γ_1 (т. е. будем перемещать точку $z_0 + \Delta z$ к точке z_0 по кривой γ_1); тогда Δw будет стремиться к нулю так, что точка $w_0 + \Delta w$ будет перемещаться по кривой Γ_1 (черт. 10).

Из существования предела

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$$

следует существование предела

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|, \quad (10)$$

а также, если $f'(z_0) \neq 0$, и предела

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} f'(z_0)^1. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \Delta w - \operatorname{Arg} \Delta z,$$

где $\operatorname{Arg} \Delta z$ и $\operatorname{Arg} \Delta w$ — углы, образованные векторами, изображающими числа Δz и Δw с положительными направлениями соответствующих действительных осей. При выбранном нами способе предельного перехода эти векторы направлены по хордам кривых γ_1 и Γ_1 (черт. 10) и пределы величин $\operatorname{Arg} \Delta z$ и $\operatorname{Arg} \Delta w$ при $\Delta z \rightarrow 0$ равны соответственно углам φ_1 и Φ_1 между касательными к кривым γ_1 и Γ_1 в точках z_0 и w_0 и положительными направлениями соответствующих действительных осей.

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \Phi_1 - \varphi_1. \quad (12)$$

Повторив те же рассуждения для случая, когда точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0 по кривой γ_2 , и принимая во внимание, что величина $\operatorname{Arg} f'(z_0)$, определенная равенством (11), не зависит от закона, по которому $\Delta z \rightarrow 0$, получим:

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \Phi_2 - \varphi_2. \quad (13)$$

где φ_2 и Φ_2 — соответственно углы между касательными к кривым γ_2 и Γ_2 в точках z_0 и w_0 и положительными направлениями осей Ox и Ou .

Из (12) и (13) получим:

$$\Phi_1 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2,$$

или

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (14)$$

но $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ является углом между касательными к кри-

¹⁾ Здесь символ Arg служит для обозначения одного из значений аргумента, но не обязательно главного.

вым γ_1 и γ_2 в точке z_0 , т. е. углом между этими кривыми в точке z_0 , а $\beta = \Phi_2 - \Phi_1$ — угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке w_0 , причем, в силу (14), $\beta = \alpha$. Следовательно, при отображении, осуществляемом аналитической функцией, *угол между двумя кривыми, пересекающимися в точке, в которой производная отображающей функции отлична от нуля, сохраняется как по величине, так и по направлению отсчета (свойство постоянства углов)*¹⁾.

Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Равенства (12) и (13) показывают, что если совместить плоскость z с плоскостью w так, чтобы точка z_0 совпала с точкой w_0 , а ось Ox была бы направлена параллельно оси Ow , причем положительные направления этих осей совпали бы, то угол, на который после этого нужно повернуть вокруг точки z_0 плоскость z для того, чтобы касательная к кривой γ_1 (или γ_2) совпала с касательной к отображенной кривой Γ_1 (соответственно Γ_2), равен $\text{Arg } f'(z_0)$, — таков геометрический смысл аргумента производной отображающей функции.

Для выяснения геометрического смысла модуля производной заметим, что $|\Delta z|$ является расстоянием от точки z_0 до точки $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ — расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$ и, следовательно, величина $\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ указывает, в каком отношении в результате отображения изменяется расстояние между этими точками. Величину $|f'(z_0)|$, являющуюся [см. (10)] пределом отношения $\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ при $\Delta z \rightarrow 0$, естественно назвать коэффициентом растяжения в точке z_0 при отображении с помощью функции $w = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояния между точками при отображении увеличиваются и происходит растяжение; если $|f'(z_0)| < 1$, то отображение в окрестности точки z_0 приводит к сжатию.

Так как, в силу аналитичности функции $f(z)$, производная $f'(z_0)$ не зависит от того, по какому закону точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0 , то *коэффициент растяжения в данной точке постоянен*, т. е. одинаков во всех направле-

ниях, — таково второе свойство отображения, осуществляемого с помощью аналитической функции.

Отображение, обладающее свойством постоянства углов и свойством постоянства коэффициента растяжения в каждой точке, называют *конформным* или, точнее, *конформным отображением 1-го рода*. Отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным во всех точках, в которых производная этой функции отлична от нуля. Можно доказать и обратное утверждение: *если отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, конформно в области D , то функция $f(z)$ является аналитической в области D .*

Пример 1. Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией $w = 3z$.

Так как $\frac{dw}{dz} = 3 \neq 0$, то отображение конформно во всей плоскости и коэффициент растяжения в любой точке равен 3.

Так как

$$\arg \frac{dw}{dz} = 0,$$

то направление при отображении не изменяется.

Если учесть, наконец, что $w = 0$ при $z = 0$ и, следовательно, начало координат остается при рассматриваемом отображении неподвижным, то можно утверждать, что отображение с помощью функции $w = 3z$ сводится к преобразованию подобия с центром подобия в нулевой точке и коэффициентом подобия, равным 3.

Пример 2. Отображение $w = z^2$ конформно во всех точках плоскости z , за исключением точки $z = 0$.

Действительно, $\frac{dw}{dz} = 2z$ и лишь при $z = 0$ $\frac{dw}{dz} = 0$. Так как $\text{Arg } w = 2 \text{ Arg } z$, то лучи $\text{Arg } z = \alpha$ и $\text{Arg } z = \beta$, выходящие из точки $z = 0$ и образующие между собой угол, равный $\beta - \alpha$, отображаются соответственно в лучи $\text{Arg } w = 2\alpha$ и $\text{Arg } w = 2\beta$, образующие между собой угол $2(\beta - \alpha)$.

Следовательно, в точке $z = 0$ конформность отображения нарушается: углы в этой точке не сохраняются, а удваиваются.

Отображение, отличающееся от конформного тем, что углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное, называют *конформным отображением 2-го рода*. Таково, например, отображение, осуществляемое функцией $w = \bar{z}$. Действительно, если значения z и w изображать точками одной и той же плоскости, то ввиду того, что точки z и $\bar{z}$ взаимно-симметричны относительно действительной оси (черт. 11), это отображение сводится к симметрии относительно действительной оси, при этом не

¹⁾ Если бы при отображении углы сохранялись по величине, но направление отсчета углов изменялось бы, то равенство (14) заменилось бы равенством $\Phi_2 - \Phi_1 = -(\varphi_2 - \varphi_1)$.

происходит никакого искажения масштаба (коэффициент растяжения в каждой точке равен 1), а все углы сохраняются по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное.

В дальнейшем, говоря о конформном отображении, мы всегда будем иметь в виду лишь конформное отображение 1-го рода.

Дифференциалом $df(z)$ аналитической функции $w=f(z)$ в точке z называется главная линейная по отношению к Δz часть приращения $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ этой функции.

Так как

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

то

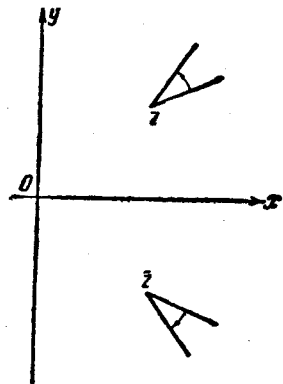
$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(z, \Delta z),$$

где $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha(z, \Delta z) = 0$. Следовательно,

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \alpha(z, \Delta z) \cdot \Delta z$$

и ввиду того, что произведение $\alpha(z, \Delta z) \cdot \Delta z$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δz , дифференциал функции

$f(z)$ равен произведению $f'(z) \Delta z$ или $f'(z) dz$ (так как при $f(z)=z$ $df(z)=dz=\Delta z$).



Черт. 11.

Задачи к главе IV

1. Проверить условия Даламбера — Эйлера для функций

- а) $w = \sin z$, г) $w = \operatorname{Arctg} z$,
 б) $w = \cos z$, д) $w = z^n$ (n — целое число).
 в) $w = \ln z$,

2. Найти аналитическую функцию аргумента z , действительная часть которой равна:

- а) $x^2 - 3xy^2$, г) $\frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$,
 б) $x^2 - y^2 + 2x$, д) $2e^x \sin y$.
 в) $\frac{x}{x^2 + y^2}$.

3. Найти аналитическую функцию аргумента z , мнимая часть которой равна:

- а) $-\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$, в) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x > 0$,
 б) $2xy + 3x$, г) $e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y$.

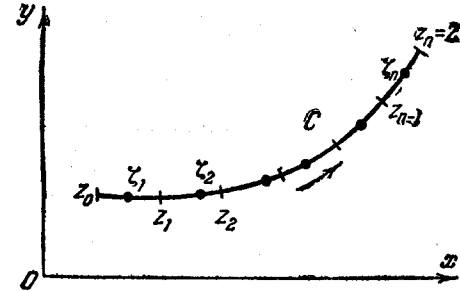
4. Найти угол поворота и коэффициент растяжения, при отображении с помощью аналитических функций $w=z^2$ и $w=z^3$ в каждой из следующих точек:

- а) $z=1$, г) $z=1+i$,
 б) $z=\frac{1}{2}$, д) $z=\sqrt{3}-i$.
 в) $z=-\frac{1}{4}$,

5. Выяснить, какая часть плоскости аргумента z сжимается и какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:

- а) $w=z^2$, г) $w=e^z$,
 б) $w=\frac{1}{z}$, д) $w=\ln(z-1)$.
 в) $w=z^2+2z$,

точку z_k , а $|\Delta z_k|$ — длина этого вектора, т. е. длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу. Внутри или на одном из концов каждой элементарной дуги выберем



Черт. 12.

ГЛАВА V ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АРГУМЕНТУ

Понятие интеграла функции комплексной переменной, основные свойства этих интегралов и формулы интегрирования элементарных функций почти не отличаются от аналогичных понятий и свойств интегралов функций действительного переменного. Однако определенный интеграл аналитической функции обладает еще одним замечательным свойством, присущим далеко не всем криволинейным интегралам дифференцируемых функций действительных переменных, а именно: в односвязных областях интеграл аналитической функции не зависит от пути интегрирования. Это свойство влечет за собой далеко идущие следствия, изложение которых и составляет основное содержание как настоящей главы, так и главы VII.

§ 1. Интеграл от функции комплексного переменного

Предположим, что в плоскости z дана замкнутая или незамкнутая дуга C , которую будем в дальнейшем считать гладкой или кусочно-гладкой. Граничные точки кривой C обозначим z_0 и Z ; если кривая замкнута, то $z_0 = Z$. Одну из этих точек, например z_0 , будем считать начальной, а другую конечной и тем самым установим положительное направление на кривой C , которое на чертеже будем отмечать стрелкой (черт. 12). Предположим, далее, что функция $f(z)$ комплексного аргумента z непрерывна во всех точках дуги C .

Разобьем дугу C произвольным способом на n «элементарных» дуг и занумеруем точки деления z_k в направлении от начальной точки к конечной, причем $z_n = Z$ (черт. 12). Введем обозначения:

$$z_1 - z_0 = \Delta z_1, \quad z_2 - z_1 = \Delta z_2, \quad \dots, \quad z_n - z_{n-1} = \Delta z_n.$$

Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в

по одной точке и обозначим эти точки $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ (точка ζ_k находится на элементарной дуге с концами в точках z_{k-1} и z_k).

Составим сумму

$$f(\zeta_1) \Delta z_1 + f(\zeta_2) \Delta z_2 + \dots + f(\zeta_n) \Delta z_n. \quad (1)$$

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $n \rightarrow \infty$ и длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю (ввиду того, что дуга кусочно-гладкая, это равносильно тому, что стремится к нулю максимальная из величин $|\Delta z_k|$), называется *интегралом* функции $f(z)$ по дуге C :

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k. \quad (2)$$

Из этого определения непосредственно получим следующие свойства интеграла²⁾:

$$1) \int_C [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz \pm \int_C f_2(z) dz,$$

$$2) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz,$$

где k — действительная или комплексная постоянная.

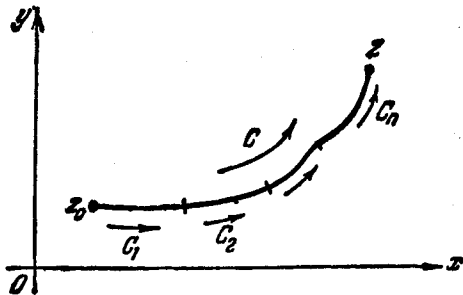
¹⁾ Существование этого предела при ограничениях, наложенных выше на функцию $f(z)$ и дугу C , будет доказано на стр. 62.

²⁾ Свойства 1)–5) могут быть также легко получены из формулы (3) (стр. 62) или из формулы (6) (стр. 63).

3) Если дуга $\bar{C}$ геометрически совпадает с дугой C , но имеет направление, противоположное направлению дуги C , то

$$\int_{\bar{C}} f(z) dz = - \int_C f(z) dz,$$

так как при замене дуги C дугой $\bar{C}$ все множители Δz_k в правой части (2) изменяют знаки на противоположные,



Черт. 13.

4) Если дуга C состоит из дуг $C_1, C_2, \dots, C_n$ (черт. 13), то

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

$$5) \int_C dz = Z - z_0,$$

так как при $f(z) \equiv 1$ сумма в правой части (2) принимает вид

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_n = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (Z - z_{n-1}) = Z - z_0.$$

6) Если $|f(z)| < M$ во всех точках дуги C и длина дуги C равна l , то

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq Ml.$$

Действительно,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq Ml,$$

так как сумма $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ равна длине ломаной, вписанной в дугу C , и следовательно, эта сумма не больше чем длина дуги C .

$$7) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|,$$

где символом

$$\int_C |f(z)| |dz|$$

обозначен предел

$$\lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k|.$$

Это свойство становится очевидным, если принять во внимание, что

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k|.$$

Вычисление интеграла (2) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных аргументов. В самом деле, пусть

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv,$$

где u и v являются функциями аргументов x и y :

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y).$$

Обозначим

$$z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta z_k &= (x_{k+1} + iy_{k+1}) - (x_k + iy_k) = \\ &= (x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k) = \Delta x_k + i\Delta y_k, \end{aligned}$$

где

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k,$$

а так как

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k),$$

то

$$\begin{aligned} f(\xi_k) \Delta z_k &= [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k + \\ &+ i[v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &+ i \lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k], \end{aligned}$$

или в соответствии с определением криволинейного интеграла (см., например, [2], п. 183)

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (3)$$

Существование криволинейных интегралов в правой части формулы (3), а следовательно и существование интеграла

$$\int_C f(z) dz,$$

следует из кусочной гладкости кривой C и из непрерывности вдоль дуги C функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, являющихся действительной и мнимой частями непрерывной вдоль кривой C функции $f(z)$.

Формула (3) показывает, что для того, чтобы свести вычисление интеграла по комплексному аргументу к вычислению обычных криволинейных интегралов, достаточно выделить из подынтегральной функции действительную и мнимую части

$$f(z) = u + iv$$

и умножить $u + iv$ на

$$dz = dx + i dy,$$

после чего подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

Если дуга C задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \quad (4)$$

а начальная и конечная точки дуги соответствуют при этом значениям параметра $t=t_0$ и $t=T$:

$$\begin{aligned} z_0 &= x(t_0) + iy(t_0), \\ Z &= x(T) + iy(T), \end{aligned}$$

то, как известно из правила вычисления криволинейного интеграла (см., например, [2], п. 183), подставив под знак интеграла вместо x и y функции, стоящие в правых частях уравнений (4), а вместо dx и dy дифференциалы этих функций, можно свести вычисление криволинейных интегралов в правой части (3) к вычислению определенных интегралов с нижним пределом t_0 и верхним пределом T . С другой стороны, уравнения (4) равносильны (см. стр. 22) одному уравнению в комплексной форме

$$z = z(t), \quad (5)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, и подстановка в правую часть формулы (3) вместо x и y функций, стоящих в правых частях (4), а вместо dx и dy соответствующих дифференциалов равносильна подстановке в левую часть формулы (3) вместо z функции, стоящей в правой части (5), а вместо dz дифференциала этой функции.

Следовательно, интеграл по комплексному аргументу можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^T f[z(t)] z'(t) dt. \quad (6)$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_C \operatorname{Re} z dz,$$

где дугой C является:

- 1) прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $1+i$;
- 2) ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $1+i$.

Решение.

- 1) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $1+i$ в параметрической форме, имеет вид

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= t, \end{aligned}$$

а в комплексной форме

$$z = (1+i)t,$$

где действительное переменное t изменяется от 0 до 1.

Находим:

$$dz = (1 + i) dt$$

и

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 \operatorname{Re} [(1 + i)t] (1 + i) dt = (1 + i) \int_0^1 t \, dt = \\ &= \frac{(1 + i)t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1 + i}{2}. \end{aligned}$$

2) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и 1 в комплексной форме:

$$z = t,$$

где t изменяется от 0 до 1; уравнение в комплексной форме отрезка, соединяющего точки 1 и $1 + i$:

$$z = 1 + it,$$

где t изменяется от 0 до 1.

Итак,

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 \operatorname{Re} t \, dt + \int_0^1 \operatorname{Re} (1 + it) i \, dt = \\ &= \int_0^1 t \, dt + i \int_0^1 dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + it \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i. \end{aligned}$$

§ 2. Теорема Коши

Если $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в односвязной области, ограниченной этим контуром, то

$$\int_C f(z) \, dz = 0$$

(теорема Коши).

Справедливость теоремы Коши немедленно следует из формулы (3), если предположить, что производная $f'(z)$ данной функции непрерывна на контуре C и в области, ограниченной этим контуром, так как в этих предположениях криволинейные интегралы $\int_C u \, dx - v \, dy$ и $\int_C v \, dx + u \, dy$, будучи интегралами по замкнутому контуру от полных дифференциалов, равны нулю (см. [2], п. 185).

Действительно, для того чтобы выражение

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy,$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции, было полным дифференциалом, как известно, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. В применении к интегралам

$\int_C u \, dx - v \, dy$ и $\int_C v \, dx + u \, dy$ это условие сводится к условиям

Эйлера — Даламбера $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, выполненным в силу

аналитичности функции $f(z)$, а непрерывность производной $f'(z)$ обеспечивает непрерывность частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

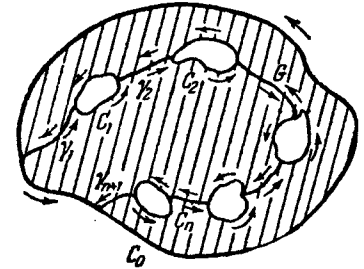
Таким образом, каждый из двух интегралов в правой части (3) равен нулю, и теорема Коши тем самым доказана.

Можно доказать теорему Коши и без предположения о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в области, ограниченной этим контуром, однако при этом доказательство значительно усложнится.

Распространим теорему Коши на случай многосвязной области. Рассмотрим многосвязную область G , ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$ (черт. 14); и предположим, что функция $f(z)$ является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_0, C_1, \dots, C_n$. Пусть

$$\int_{C_k} f(z) \, dz \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

обозначает интеграл по контуру C_k , проходимому против часовой стрелки. Сложный контур, являющийся границей данной многосвязной области и состоящий из контуров $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, обозначим Γ и выберем на нем в качестве положительного такое направление, при движении по которому область G остается слева. Иными словами, интеграл по



Черт. 14.

контур Γ будем считать равным сумме интеграла по контуру C_0 , проходимоу против часовой стрелки, и интегралов по контурам $C_1, C_2, \dots, C_n$, проходимым по часовой стрелке:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz. \quad (7)$$

Теорема Коши будет распространена на случай многосвязной области, если мы докажем, что при наших предположениях

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Соединим контуры, образующие сложный контур Γ , дугами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$, как показано на черт. 14, при этом область G окажется разбитой на две односвязные области. Контуры, ограничивающие эти односвязные области, обозначим, соответственно, Γ' и Γ'' . Так как функция $f(z)$ является аналитической как на контурах Γ' и Γ'' , так и в областях, ограниченных каждым из этих контуров, то в соответствии с теоремой Коши для односвязной области

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0$$

и

$$\int_{\Gamma''} f(z) dz = 0,$$

а следовательно и

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0. \quad (8)$$

Если на каждом из контуров Γ', Γ'' считать положительным то направление, при котором область, ограниченная этим контуром, остается слева, то

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad (9)$$

так как при сложении интегралов в левой части последнего

равенства интегралы по дугам $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ уничтожатся ввиду того, что интегрирование по каждой из этих дуг будет производится при вычислении суммы (9) два раза в противоположных направлениях.

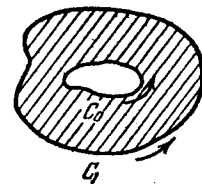
Из (8) и (9) следует

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (10)$$

и теорема Коши для многосвязной области доказана.

Учитывая (7), можно равенство (10) записать в виде

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (11)$$



Черт. 15.

В частности, если функция $f(z)$ является аналитической на контурах C_0 и C_1 (черт. 15) и в двусвязной области, ограниченной этими контурами, то из (11) при $n=1$ получим:

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz. \quad (12)$$

§ 3. Вычисление интеграла от аналитической функции

Если интеграл от функции $f(z)$ по всякому замкнутому контуру, расположенному в некоторой области G , равен нулю, то интеграл по всякой дуге, находящейся внутри области G , зависит только от положения начальной и конечной точек этой дуги и, следовательно, одинаков для всех дуг, имеющих общую начальную и общую конечную точки. Другими словами, интеграл не зависит от пути интегрирования. Действительно, если дуги



Черт. 16.

C_1 и C_2 имеют общую начальную точку z_0 и общую конечную точку Z (черт. 16), то величина

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz \quad (13)$$

представляет собой интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру C , состоящему из дуги C_1 и дуги $\bar{C}_1$, геометрически совпадающей с дугой C_1 , но противоположной ей по направлению. Если этот интеграл равен нулю, то равна нулю и разность (13), откуда

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{\bar{C}_1} f(z) dz^1.$$

Таким образом, из теоремы Коши следует, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области G , то, какова бы ни была дуга C внутри этой области, величина

$$\int_C f(z) dz$$

зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки Z дуги C и, следовательно, для этого интеграла можно пользоваться обозначением

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz.$$

Докажем, что если величина z_0 постоянна, а Z изменяется в области G , то в этой области функция

$$F(Z) = \int_{z_0}^Z f(z) dz$$

является аналитической и

$$\frac{dF(Z)}{dZ} = f(Z).$$

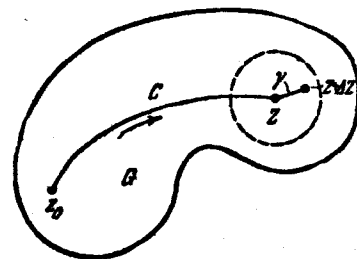
Какова бы ни была точка Z внутри области G , можно взять столь малый круг с центром в этой точке, что все точки рассматриваемого круга будут также принадлежать области G . Поэтому, если $|\Delta Z|$ достаточно мал, то можно точку Z соеди-

¹⁾ Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если в некоторой области интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, то интеграл по всякому замкнутому контуру, расположенному в этой области, равен нулю.

нить с точкой $Z + \Delta Z$ прямолинейным отрезком, лежащим в области G (черт. 17). Пусть C — какая-нибудь дуга, лежащая внутри области G и соединяющая точку z_0 с точкой Z ; тогда

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^Z f(z) dz = F(Z),$$

$$F(Z + \Delta Z) = \int_{z_0}^{Z + \Delta Z} f(z) dz, \quad (14)$$



Черт. 17.

причем в (14) можно считать путь интегрирования состоящим из дуги C и прямолинейного отрезка γ , соединяющего точку Z с точкой $Z + \Delta Z$. Тогда на основании свойства 4) (стр. 60)

$$F(Z + \Delta Z) - F(Z) = \int_Z^{Z + \Delta Z} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$$

$$\frac{F(Z + \Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = \frac{1}{\Delta Z} \int_\gamma f(z) dz. \quad (15)$$

Функция $f(z)$ является функцией аналитической, а следовательно и непрерывной, в области G и, в частности, на отрезке γ . Поэтому как бы мало ни было положительное число ε для любой точки z отрезка γ , соединяющего точку Z с точкой $Z + \Delta Z$, выполнено неравенство

$$|f(z) - f(Z)| < \varepsilon,$$

если только величина $|\Delta Z|$ достаточно мала. Если учесть, что длина отрезка γ равна $|\Delta Z|$, то на основании свойства 6) (стр. 60) получим:

$$\left| \int_\gamma f(z) dz - \int_\gamma f(Z) dz \right| = \left| \int_\gamma [f(z) - f(Z)] dz \right| < \varepsilon |\Delta Z|,$$

откуда

$$\left| \frac{1}{\Delta Z} \int_\gamma f(z) dz - \frac{1}{\Delta Z} \int_\gamma f(Z) dz \right| < \varepsilon. \quad (16)$$

Но в соответствии со свойствами 2) и 5) (стр. 59—60)

$$\int_{\gamma} f(Z) dz = f(Z) \int_{\gamma} dz = f(Z) [(Z + \Delta Z) - Z] = f(Z) \Delta Z$$

и неравенство (16) принимает вид

$$\left| \frac{1}{\Delta Z} \int_{\gamma} f(z) dz - f(Z) \right| < \epsilon,$$

откуда, учитывая (15), при достаточно малом $|\Delta Z|$ получим:

$$\left| \frac{F(Z + \Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} - f(Z) \right| < \epsilon.$$

Но это неравенство означает, что предел

$$\lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{F(Z + \Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = F'(Z)$$

существует и равен $f(Z)$. Утверждение доказано.

Если две функции имеют в некоторой области одинаковые производные, то в этой области разность между функциями постоянна. Действительно, если

$$\varphi(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

и

$$F_1'(z) = F_2'(z),$$

то

$$\varphi'(z) = 0. \quad (17)$$

Но если

$$\varphi(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

то

$$\varphi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

из (17) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Отсюда, в силу условий Даламбера — Эйлера и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, а значит и функция $\varphi(z)$, постоянны.

Если $\Phi(z)$ какая-нибудь функция, для которой

$$\Phi'(z) = f(z),$$

где $f(z)$ — аналитическая функция, то по доказанному

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz = \Phi(Z) + C,$$

где C — постоянная. Положив в этом равенстве $Z = z_0$ (точнее, перейдя к пределу при $Z \rightarrow z_0$), получим:

$$0 = \Phi(z_0) + C,$$

откуда

$$C = -\Phi(z_0)$$

и

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz = \Phi(Z) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \Big|_{z_0}^Z.$$

Эта формула совпадает с известной из интегрального исчисления формулой Ньютона — Лейбница.

§ 4. Интегралы вида $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$

Вычислим интеграл

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} \quad (18)$$

по замкнутому контуру C в предположении, что n является целым положительным числом (если целое число $n \leq 0$, то по теореме Коши $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_C (z-a)^m dz = 0$, $m = -n \geq 0$).

Если точка $z = a$ находится вне области, ограниченной контуром C , то в соответствии с теоремой Коши

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0.$$

Предположим теперь, что контур C один раз обходит точку a , и будем считать, что направление обхода выбрано так, что точка a остается слева. Тогда, в силу теоремы Коши (см. (12)), величина интеграла (18) не зависит от вида контура C , хотя,

быть может, и отлична от нуля. Поэтому в качестве контура C можно взять, например, окружность радиуса R с центром в точке a . Уравнение такой окружности в комплексной форме имеет вид

$$z - a = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Отсюда

$$dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$$

и на основании (6)

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi. \quad (19)$$

При $n \neq 1$ ($n = 2, 3, \dots$) получим:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z-a)^n} &= \frac{i}{R^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{(1-n)R^{n-1}} e^{i(1-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

так как $e^{2\pi i(1-n)} = e^0 = 1$.

Если же $n = 1$, то из (19) следует, что

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad (20)$$

Итак, если даже точка a находится внутри контура C , то интеграл (18) отличен от нуля только при $n = 1$.

Из (20) следует, что если контур C обходит k раз точку a в положительном направлении (черт. 18), то

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i; \quad (21)$$

Черт. 18.

если же контур C обходит k раз точку a в отрицательном направлении, то

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = -2k\pi i. \quad (21')$$

Равенства (20), (21), (21') находятся в тесной связи с определением логарифмической функции. Действительно, для не-

определенного интеграла имеем:

$$\int \frac{dz}{z-a} = \ln(z-a) + C.$$

Подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки $z = a$, и поэтому в любой односвязной области, не содержащей точки $z = a$, интеграл

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a},$$

где γ — дуга, принадлежащая этой области, не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной точки z_1 и конечной точки z_2 дуги γ .

Допустим для простоты, что $a = 0$, и рассмотрим интеграл

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Пусть $z_1 = 1$ и $z_2 = z$ являются соответственно начальной и конечной точками дуги γ и пусть дуга γ не пересекает отрицательной части действительной оси и не проходит через точку $z = 0$. Тогда можно дугу γ включить в односвязную область, не содержащую точки $z = 0$ и точек отрицательной части действительной оси; в такой области функция $\ln z$ будет непрерывной и аналитической (отрицательная часть действительной оси является для функции $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ линией разрыва, так как в силу определения главного значения аргумента величина $\arg z$ терпит разрыв при действительных отрицательных значениях z). При этих условиях независимо от формы дуги γ будем иметь:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z.$$

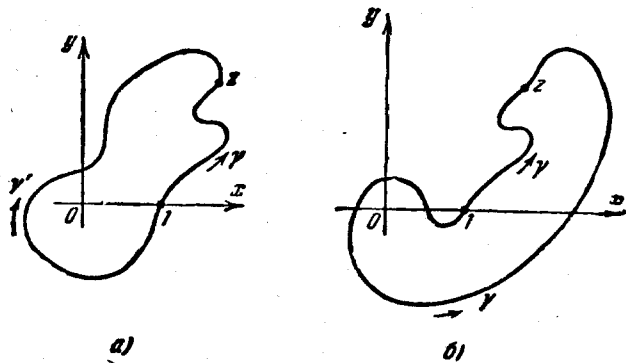
Если теперь соединить точку 1 с точкой z дугой γ' так, чтобы дуги γ и γ' образовывали замкнутый контур l , один раз окружающий точку $z = 0$, то в соответствии с равенством (20) получим:

$$\int_l \frac{dz}{z} = 2\pi i;$$

если направление на контуре l выбрано так, что он обходится против часовой стрелки. Но так как (черт. 19)

$$\int_l \frac{dz}{z} = \pm \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma'} \frac{dz}{z} \right)$$

(знак зависит от того, какое из расположений, указанных на



Черт. 19.

черт. 19, имеет место, а именно: верхний знак относится к черт. 19, а, нижний — к чертежу 19, б), то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2\pi i.$$

Если дуга γ' такова, что замкнутый контур, образованный ею и дугой γ k раз, обходит точку $z=0$, то на основании формулы (21) или (21') получим:

$$\int_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2k\pi i.$$

Поэтому, если Γ — любая, не проходящая через точку $z=0$ дуга с начальной точкой 1 и конечной точкой z , то

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z, \quad (22)$$

причем выбор значения многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в правой части этого равенства зависит от выбора дуги Γ .

§ 5. Интеграл Коши

Предположим, что функция $f(z)$ является аналитической на некотором контуре Γ и в односвязной области G , ограниченной этим контуром. Пусть, далее, z — любая точка внутри области G (черт. 20). Описав из точки z , как из центра, лежащую в области G окружность γ радиуса ρ , в силу основанной на теореме Коши формулы (12) получим:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (23)$$

Теорема Коши применима, так как единственной особой точкой в области G для подынтегральной функции является точка $\zeta = z$ и, следовательно, в двусвязной области между контурами Γ и γ эта функция является аналитической. Заметим, что в равенстве (23) радиус ρ окружности γ может быть выбран произвольно, лишь бы эта окружность лежала внутри области G .

Так как функция $f(z)$ является аналитической, а следовательно и непрерывной в области G , то для каждого $\epsilon > 0$, как бы мало оно ни было, и для любой точки ζ на окружности γ справедливо неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon,$$

если только радиус ρ окружности γ достаточно мал (напомним, что точка z — центр этой окружности и, следовательно, $|\zeta - z| = \rho$).

Поэтому

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon. \quad (24)$$

Здесь мы воспользовались свойством б) (стр. 60) и тем, что $|\zeta - z| = \rho$ на дуге γ .

Так как ϵ можно взять сколь угодно малым, то неравенство (24) означает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (25)$$



Черт. 20.

Но, как уже было отмечено, величина

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

при уменьшении ρ не изменяется, поэтому знак предела в левой части (25) можно опустить. Если учесть также, что в силу (20)

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z),$$

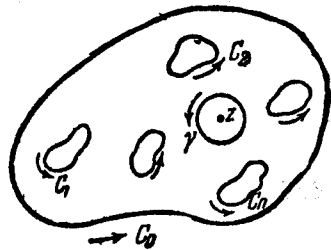
то из (25) будем иметь:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

Сопоставляя последнее равенство с равенством (25), получим так называемую *интегральную формулу Коши*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Величина, стоящая в правой части интегральной формулы Коши, называется *интегралом Коши*. Для вычисления интеграла Коши нужно знать значения функции $f(z)$ только на контуре Γ и, следовательно, интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области G , если известны значения этой функции на контуре Γ , ограничивающем область G .



Черт. 21.

Если точка z лежит вне области G , то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши, так как в этом случае подынтегральная функция является аналитической в области G .

Интегральная формула Коши легко обобщается на случай сложного контура Γ , ограничивающего многосвязную область G . Действительно, пусть функция $f(\zeta)$ является аналитической на сложном контуре Γ , состоящем из простых контуров $C_0, C_1, \dots, C_n$ (черт. 21), и в многосвязной области, огра-

ниченной контуром Γ . Пусть, далее, z — любая точка внутри этой многосвязной области и γ — лежащая в этой области окружность с центром в точке z . Рассмотрим многосвязную область, границей которой является сложный контур Γ' , состоящий из простых контуров $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \gamma$. В этой области и на ее границе функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ является аналитической и, в силу теоремы Коши,

$$\int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \int_{C_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \dots - \int_{C_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \end{aligned}$$

то

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (26)$$

Но область, ограниченная контуром γ , односвязна и для нее справедливость интегральной формулы Коши доказана, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z),$$

и на основании (26) получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Применим интегральную формулу Коши к случаю, когда контуром Γ является окружность с центром в точке $z = a$, уравнение которой имеет вид

$$\zeta - a = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

или

$$\zeta = a + Re^{i\varphi},$$

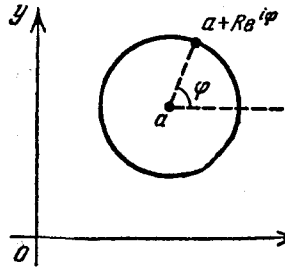
откуда

$$d\zeta = Re^{i\varphi} i d\varphi.$$

На основании интегральной формулы Коши

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} i d\varphi}{Re^{i\varphi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned} \quad (27)$$

Для того чтобы выяснить смысл этого равенства, представим себе, что на окружности Γ задана некоторая непрерывная функция $F(\varphi)$, значения которой зависят от угла φ (черт. 22) между радиусом, идущим из центра a в данную точку окружности, и положительным направлением действительной оси. Разобьем окружность Γ на n равных дуг лучами, идущими из центра (каждые два соседних луча образуют между собой угол $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$), и выберем на каждой из этих дуг по одной



Черт. 22.

точке, обозначив $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ значения угла φ , соответствующие выбранным точкам. Величина

$$\begin{aligned} \frac{F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + \dots + F(\varphi_n)}{n} = \\ = \frac{1}{2\pi} [F(\varphi_1) \Delta\varphi + F(\varphi_2) \Delta\varphi + \dots + F(\varphi_n) \Delta\varphi] \end{aligned} \quad (28)$$

является средним арифметическим из значений функции $F(\varphi)$ в точках окружности Γ , соответствующих углам $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Предел выражения (28) при $n \rightarrow \infty$ естественно назвать средним арифметическим значений функции $F(\varphi)$ на окружности Γ . Из (28) и из определения интеграла следует, что этот предел равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi.$$

Следовательно, формула (27) показывает, что значение аналитической функции в центре круга равно среднему арифметическому из ее значений на окружности этого круга.

Если $z_1, z_2, \dots, z_n$ — комплексные числа, а n — целое положительное число, то

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|}{n},$$

т. е. модуль среднего арифметического не больше, чем среднее арифметическое из модулей. Путем предельного перехода это неравенство распространяется на среднее арифметическое из значений функции на окружности Γ :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\varphi)| d\varphi$$

(впрочем, к тому же выводу приводит и свойство 7), стр. 61). В то же время очевидно, что среднее арифметическое не скольких действительных чисел не может быть больше, чем каждое из этих чисел. Путем предельного перехода это свойство также распространяется на среднее арифметическое значений непрерывной функции на окружности, если эта функция принимает в точках окружности только действительные значения. Учитывая, что модуль аналитической функции является непрерывной функцией, принимающей только действительные значения, можно доказать весьма важное свойство аналитических функций, носящее название *принципа максимума модуля*: *модуль функции, отличной от тождественной постоянной и аналитической в некоторой области, не может ни в одной внутренней точке этой области принять максимальное для этой области значение.*

Действительно, предположим, что z_0 — внутренняя точка области G , в которой функция $f(z)$ аналитична, и допустим, что $|f(z_0)|$ больше, чем $|f(z)|$, для любой другой точки области.

Опишем из точки z_0 , как из центра, окружность γ столь малого радиуса, что все точки этой окружности лежат в области G . По доказанному, значение $f(z_0)$ равно среднему арифметическому из значений $f(z)$ на окружности γ . Следовательно, $|f(z_0)|$ не больше, чем среднее арифметическое из значений $|f(z)|$ на окружности γ , и, тем более, не может быть больше, чем каждое из значений $|f(z)|$ на этой окружности. Но это заключение противоречит предположению о том, что значение $|f(z_0)|$ больше, чем значение $|f(z)|$ во всякой точке области G , и в частности во всякой точке окружности γ . Если

бы мы допустили, что значение модуля аналитической функции $f(z)$ в некоторой внутренней точке z_0 больше или равно значению $|f(z)|$ в любой другой точке области G , то можно было бы доказать, что функция $f(z)$ постоянна (доказательство мы опускаем).

Пользуясь тем, что действительная и мнимая части аналитической функции являются функциями гармоническими, можно, исходя из интегральной формулы Коши, выразить значения гармонической функции во всякой точке, лежащей внутри круга, через значения этой функции на окружности круга. Для этого следует в левой и правой частях интегральной формулы Коши отделить действительную часть от мнимой.

Выберем для упрощения вычислений систему координат так, чтобы центр круга совпал с началом координат. Тогда уравнение ограничивающий окружности будет иметь вид

$$\zeta = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

откуда

$$d\zeta = Re^{i\varphi} i d\varphi.$$

Положив $z = re^{i\theta}$ ($r < R$), получим с помощью интегральной формулы Коши:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}. \quad (29)$$

С другой стороны, если в правую часть формулы Коши подставить вместо z число, соответствующее точке, лежащей вне данного круга, то интеграл, в силу теоремы Коши, будет равен нулю. Вне данного круга лежит, в частности, точка z^* , определенная равенствами

$$|z^*| = \frac{R^2}{|z|} = \frac{R^2}{r}, \quad \text{Arg } z^* = \text{Arg } z = \theta,$$

т. е.

$$z^* = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}.$$

Действительно, из $r < R$ следует, что $|z^*| > R$.

¹⁾ Точка z^* называется симметричной точке z относительно данной окружности. Подробнее о симметрии относительно окружности см. на стр. 163.

Подставляя в правую часть формулы Коши z^* вместо z , получим:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}},$$

или

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) re^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}}. \quad (30)$$

Вычитая из левой и правой частей (29) соответственно левую и правую части (30), получим:

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{i\varphi} \left(\frac{R}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{r}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{i\varphi} \frac{(r^2 - R^2) e^{i\theta}}{(Re^{i\varphi} - re^{i\theta})(re^{i\varphi} - Re^{i\theta})} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{(R^2 - r^2) e^{i(\theta + \varphi)}}{R^2 e^{i(\theta + \varphi)} + r^2 e^{i(\theta + \varphi)} - Rr(e^{2i\theta} + e^{2i\varphi})} d\varphi. \end{aligned}$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла в правой части последнего равенства на $e^{i(\theta + \varphi)}$, найдем:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - Rr(e^{i(\theta - \varphi)} + e^{-i(\theta - \varphi)})} d\varphi.$$

Но

$$e^{i(\theta - \varphi)} + e^{-i(\theta - \varphi)} = 2 \cos(\theta - \varphi),$$

следовательно,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \quad (31)$$

Отделив действительную часть от мнимой

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= u(r, \theta) + iv(r, \theta), \\ f(Re^{i\varphi}) &= u(R, \varphi) + iv(R, \varphi) \end{aligned}$$

и приравняв действительные части в равенстве (31), получим:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi. \quad (32)$$

Эта формула позволяет найти значение гармонической функции в любой точке (r, θ) , находящейся внутри круга, если известны значения $u(R, \varphi)$ этой функции в точках (R, φ) на окружности круга радиуса R . Правую часть равенства (32) называют *интегралом Пуассона*.

Положив в (32) $r=0$ и обозначив через u_0 значение функции $u(r, \theta)$ при $r=0$, получим:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) d\varphi.$$

Следовательно, значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности круга. Так как среднее арифметическое значений $u(R, \varphi)$ не может быть больше наибольшего из этих значений и меньше наименьшего из них, то рассуждения, аналогичные изложенным на стр. 78—80, приводят к *принципу максимума и минимума для гармонической функции*: функция, отличная от тождественной постоянной и гармоническая в некоторой области, ни в одной внутренней точке этой области не может принять максимальное или минимальное для этой области значение.

§ 6. Производные высших порядков от аналитической функции

Докажем, что производная аналитической функции также является аналитической функцией.

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в ограниченной этим контуром области; тогда в соответствии с интегральной формулой Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где z — любая точка внутри рассматриваемой области.

Какова бы ни была внутренняя точка z рассматриваемой области, величину $|h|$ можно выбрать столь малой, что точка $z+h$ будет также лежать внутри этой области. Будем, например, считать, что $|h|$ меньше кратчайшего расстояния точки z до контура C . На основании той же интегральной формулы Коши

$$f(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - h}$$

и

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta,$$

или после несложных преобразований

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \quad (33)$$

При $h \rightarrow 0$ левая часть этого равенства стремится к $f'(z)$, а подынтегральная функция в правой части — к $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$. Следовательно, мы приходим к формуле

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (34)$$

справедливость которой будет доказана, если будет обоснован предельный переход под знаком интеграла в правой части (33), т. е. если будет доказано, что

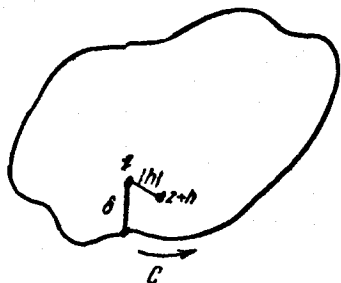
$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} = \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Для этого достаточно установить, что разность

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} &= \\ &= \int_C f(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta = \\ &= h \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \end{aligned} \quad (35)$$

стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

Если обозначить буквой δ кратчайшее расстояние точки z от контура C (черт. 23), то кратчайшее расстояние точки $z+h$ от этого контура будет во всяком случае не меньше, чем $\delta - |h|$, т. е. какова бы ни была точка ζ контура C , справедливы неравенства



Черт. 23.

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &\geq \delta, \\ |\zeta - z - h| &\geq \delta - |h|. \end{aligned}$$

Если, далее, M — наибольшее значение модуля функции $f(z)$ на контуре C , то для любой точки ζ этого контура

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{M}{(\delta - |h|)\delta^2}$$

и на основании уже неоднократно использованного свойства б) (стр. 60)

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{Ml}{(\delta - |h|)\delta^2},$$

где l — длина дуги C .

Но тогда на основании (35)

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq |h| \frac{Ml}{(\delta - |h|)\delta^2} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, и формула (34) доказана.

Составив с помощью (34) отношение

$$\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h}$$

и перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, можно с помощью аналогичных выкладок доказать, что

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3}. \quad (36)$$

Так же доказывается, что при любом целом положительном n

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (37)$$

¹⁾ Для удобства запоминания заметим, что формально формулы (34), (36), (37) можно получить из интегральной формулы Коши, диф-

Равенство (37) получено в предположении, что функция $f(z)$ является аналитической как на контуре C , так и в области, ограниченной этим контуром. Но если функция $f(z)$ является аналитической в точке z , то всегда можно провести из этой точки, как из центра, окружность C столь малого радиуса, что функция $f(z)$ останется аналитической на этой окружности и в круге, ею ограниченном, и следовательно, на основании формулы (37) можно заключить, что в точке z и в любой другой точке достаточно малой окрестности точки z существует производная любого порядка n этой функции. Итак, из аналитичности функции в некоторой точке, т. е. из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а следовательно и аналитичность этих производных.

Интегральная формула Коши и формула (37) могут служить для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)},$$

где C — окружность радиуса 2 с центром в точке $3i$. Функция $f(z) = \frac{e^z}{z}$ внутри круга, ограниченного окружностью C , аналитична, поэтому, применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)} &= \int_C \frac{f(z) dz}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = \\ &= 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i \sin 2). \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить

$$\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^2},$$

где C — замкнутый контур, однократно обходящий точку i . Применяя формулу (37) к функции $f(z) = \cos z$, получим.

$$\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^2} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2(\cos z)}{dz^2} \Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \frac{e^{-1} + e}{2}.$$

дифференцируя обе ее части по z (в правой части дифференцирование производится по параметру z под знаком интеграла).

Мы условились называть интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (38)$$

интегралом Коши в предположении, что C — замкнутый контур, а функция $f(z)$ — аналитическая на контуре C и в области G , ограниченной этим контуром. При этом оказалось, что функция, определяемая интегралом (38), совпадает с $f(z)$ внутри области G и равна тождественно нулю вне контура C . Если считать, что C — произвольная кусочно-гладкая дуга (или даже совокупность нескольких таких дуг), а относительно функции $f(\zeta)$ ограничиться предположением, что она непрерывна вдоль C , то величину (38) принято называть интегралом типа Коши. Интеграл Коши является, очевидно, частным случаем интеграла типа Коши.

Функция, определяемая интегралом типа Коши:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

определена всюду, кроме точек дуги C , так как в любой точке z , не принадлежащей C , интеграл типа Коши существует (единственной точкой разрыва подынтегральной функции является точка $\zeta = z$).

Дословно повторяя выкладки и рассуждения, с помощью которых была обоснована формула (34), можно найти производную интеграла типа Коши в любой точке z , не принадлежащей дуге C :

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

и тем самым доказать, что интеграл типа Коши является функцией, аналитической в любой точке, не лежащей на дуге C . Для производной любого порядка n интеграла типа Коши справедлива формула, аналогичная формуле (37).

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

§ 7. Теорема Морера

Докажем следующую теорему, называемую *теоремой Морера*, в известном смысле обратную теореме Коши: *если функция $f(z)$ непрерывна в области G и если для любого замкнутого контура C , расположенного внутри области G*

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0,$$

то функция $f(z)$ является аналитической в области G .

Действительно, в силу условий теоремы, интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G и соединяющего точку z_0 с произвольной точкой z области G , и, следовательно, при данном z_0 определяет однозначную функцию $F(z)$. Возьмем величину $|h|$ столь малой, чтобы круг радиуса $|h|$ с центром в точке z находился целиком внутри области G ; тогда

$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta$$

и

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta, \quad (39)$$

причем за путь интегрирования в последнем интеграле можно взять прямолинейный отрезок, соединяющий точку z с точкой $z+h$.

Так как

$$\int_z^{z+h} d\zeta = h,$$

то

$$f(z) = f(z) \frac{1}{h} \int_z^{z+h} d\zeta = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta,$$

и, принимая во внимание (39), получим:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta. \quad (40)$$

Пользуясь непрерывностью функции $f(z)$ и учитывая, что точка ζ находится на прямолинейном отрезке, соединяющем точку z с точкой $z+h$, можно утверждать, что при достаточно малом $|h|$

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon,$$

как бы мало ни было положительное число ε . Следовательно,

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon,$$

и на основании равенства (40) получаем:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

при достаточно малом $|h|$. Но это неравенство означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = F'(z) = f(z).$$

Итак, функция $F(z)$ имеет производную во всякой точке области G и является в этой области аналитической функцией, а на основании доказанного в предыдущем параграфе функция $f(z)$, будучи производной аналитической функции, также аналитична в области G .

Задачи к главе V

1. Вычислить

$$\int_C \operatorname{Im} z \, dz,$$

если путь интегрирования C :

а) является прямолинейным отрезком, соединяющим точку 0 с точкой $2+i$;

б) состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой i и прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $2+i$.

2. Вычислить

$$\int_C |z| \, dz,$$

если путь интегрирования C является:

а) прямолинейным отрезком, соединяющим точку -1 с точкой 1 ;

б) полуокружностью радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости, причем точка -1 является начальной, а точка 1 — конечной.

В задачах 3—8 следует пользоваться теоремой Коши, интегральной формулой Коши и формулами, получаемыми из интегральной формулы Коши дифференцированием. Контур C в этих задачах однократно обходится против часовой стрелки.

3. Вычислить

$$\int_C \frac{z^2 \, dz}{z-2i},$$

если:

а) C — окружность радиуса 3 с центром в начале координат;

б) C — окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

4. Вычислить

$$\int_C \frac{\sin z \, dz}{z+i},$$

если C — окружность радиуса 3 с центром в точке $-i$.

5. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{z^2+9},$$

если:

а) C — окружность с центром в точке $2i$ радиуса 2;

б) C — окружность с центром в точке $-2i$ радиуса 2.

6. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+9)^2},$$

если:

а) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $2i$;

б) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $-2i$.

7. Вычислить

$$\int_C \frac{e^z \, dz}{(z+2)^2},$$

если C — замкнутый контур, однократно обходящий точку -2 в положительном направлении.

8. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2},$$

если

а) C — окружность радиуса $R < 2$ с центром в точке $z = 1$;

б) C — окружность радиуса $R < 2$ с центром в точке $z = -1$;

в) C — окружность радиуса $R > 2$ с центром в точке $z = 1$ или $z = -1$.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1,$$

то расходится не только ряд (2), но и ряд (1), так как в этом случае, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0.$$

ГЛАВА VI

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

В главе III были введены основные понятия теории рядов с комплексными членами. Там было также доказано, что для сходимости ряда

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

достаточно, чтобы сходился ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots \quad (2)$$

Однако ряд (1) может сходиться, как известно, и тогда, когда ряд (2) расходится, в этом случае ряд (1) называется *неабсолютно (условно) сходящимся*.

Для исследования сходимости ряда (2) можно применять известные признаки сходимости знакоположительных рядов, например признаки Даламбера и Коши. Ряд (2) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1,$$

и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$$

(признак Даламбера).

Ряд (2) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1,$$

и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$$

(признак Коши).

§ 2. Функциональные ряды

Функциональный ряд, членами которого являются функции комплексного аргумента z :

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (3)$$

может в одних точках сходиться, в других расходиться. Сумма такого ряда

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z),$$

где

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z),$$

является функцией аргумента z , определенной в точках, в которых ряд (3) сходится. Множество точек, в которых ряд (3) сходится, будем называть *областью сходимости* этого ряда.

Остатком ряда (3) называется разность

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

В каждой точке сходимости ряда (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

Другими словами, если ряд в данной точке z сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое число N , что при $n > N$ модуль остатка ряда удовлетворяет неравенству

$$|R_n(z)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Наименьшее число N , определяющее номер n , начиная с которого справедливо неравенство (4), вообще говоря, зависит не

только от ϵ , но и от z и не является, следовательно, одинаковым для всех точек области сходимости ряда; чтобы подчеркнуть эту зависимость, лучше вместо N писать $N(\epsilon, z)$. Может случиться, что значения $N(\epsilon, z)$ для всех точек некоторой области не превышают некоторого числа $N^*(\epsilon)$, и тогда, следовательно, существует такое число $N^*(\epsilon)$ ($N^*(\epsilon)$ не зависит от z , а зависит только от ϵ), что при $n > N^*(\epsilon)$ неравенство (4) будет справедливо во всех точках области, — в этом случае говорят, что ряд (3) сходится в данной области *равномерно*.

Пример 1. Известная формула для суммы n членов геометрической прогрессии

$$a + az + az^2 + \dots + az^n = \frac{a(1 - z^{n+1})}{1 - z}, \quad (5)$$

как видно из ее доказательства, справедлива при любом комплексном z ($z \neq 1$). Принимая во внимание, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$, если $|z| < 1$, и

$\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = \infty$, если $|z| > 1$, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a + az + az^2 + \dots + az^n) = \begin{cases} \frac{a}{1-z}, & \text{если } |z| < 1; \\ \infty, & \text{если } |z| > 1 \text{ и } a \neq 0. \end{cases}$$

Но сумма (5) является частичной суммой бесконечной геометрической прогрессии

$$a + az + az^2 + \dots + az^n + \dots \quad (6)$$

и, следовательно, ряд (6) сходится внутри круга $|z| < 1$, и сумма этого ряда равна

$$f(z) = \frac{a}{1-z}.$$

Вне единичного круга (при $|z| > 1$) ряд (6), как установлено выше, расходится; нетрудно видеть, что он расходится и на окружности $|z| = 1$, так как в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0,$$

где $f_n(z)$ — общий член ряда.

Рассмотрим круг $|z| \leq \frac{1}{2}$, лежащий внутри круга $|z| < 1$. Подберем к данной точке z , лежащей в этом круге, и любому $\epsilon > 0$ такое $N(\epsilon, z)$, чтобы при $n > N(\epsilon, z)$ остаток ряда удовлетворял неравенству (4) $|R_n(z)| < \epsilon$.

Как указано выше,

$$f(z) = \frac{a}{1-z},$$

$$S_n(z) = \frac{a(1 - z^{n+1})}{1-z},$$

откуда

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = \frac{az^{n+1}}{1-z},$$

и для того, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\left| \frac{az^{n+1}}{1-z} \right| < \epsilon \quad (7)$$

или

$$|z|^{n+1} < \frac{\epsilon |1-z|}{|a|},$$

т. е.

$$(n+1) \ln |z| < \ln \frac{\epsilon |1-z|}{|a|},$$

достаточно, чтобы

$$n+1 > \frac{\ln \frac{\epsilon |1-z|}{|a|}}{\ln |z|}$$

(знак неравенства изменился, так как $\ln |z| < 0$ при $|z| < \frac{1}{2}$), откуда

$$n > \frac{\ln \frac{\epsilon |1-z|}{|a|}}{\ln |z|} - 1. \quad (8)$$

При достаточно малом ϵ не только знаменатель, но и числитель первого члена в правой части неравенства (8) отрицателен, поэтому правая часть (8) тем больше, чем больше абсолютная величина числителя и чем меньше абсолютная величина знаменателя первого члена. Так как $|1-z| \geq 1 - |z|$ и $|z| \leq \frac{1}{2}$, то наибольшее значение абсолютной

величины числителя первого члена в правой части (8) равно $\ln \frac{1}{2} \epsilon$,

а наименьшее значение абсолютной величины знаменателя $\left| \ln \frac{1}{2} \right|$, следовательно, правая часть неравенства (8) во всяком случае не превышает для всех точек круга $|z| \leq \frac{1}{2}$ числа

$$N(\epsilon) = \frac{\ln \frac{\epsilon}{2|a|}}{\ln \frac{1}{2}} - 1,$$

и следовательно, при $n > N(\epsilon)$ неравенство (7) будет удовлетворяться

во всех точках круга $|z| \leq \frac{1}{2}$, т. е. ряд (6) сходится в круге $|z| \leq \frac{1}{2}$ равномерно.

Очевидно, что ничего бы не изменилось в существе рассуждений и выкладок, если бы вместо круга $|z| \leq \frac{1}{2}$ мы рассматривали любой круг $|z| \leq 1 - \delta$, где $\delta > 0$, лежащий внутри единичного круга; следовательно, ряд (6) равномерно сходится в круге радиуса $1 - \delta$, т. е. в круге, радиус которого хотя бы немного меньше единицы. Но в круге $|z| < 1$ ряд (6), хотя и сходится, но сходится неравномерно. Действительно, как было показано выше, для того, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon,$$

необходимо, чтобы

$$n > \frac{\ln \frac{\varepsilon |1-z|}{|a|}}{\ln |z|} - 1;$$

правая часть этого неравенства стремится к бесконечности при $z \rightarrow 1$ и, следовательно, нельзя найти величину $N(\varepsilon)$, превышающую правую часть этого неравенства во всех точках круга $|z| < 1$. Иными словами, нельзя найти такое $N(\varepsilon)$, не зависящее от z , чтобы при $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|R_n(z)| < \varepsilon$ удовлетворялось во всех точках круга $|z| < 1$, а это и означает, что в круге $|z| < 1$ рассматриваемый ряд сходится неравномерно.

Часто равномерную сходимость ряда можно установить, пользуясь следующим признаком: если в любой точке z области G модуль каждого члена ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (9)$$

не превышает соответствующего члена сходящегося числового ряда

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots, \quad (10)$$

то ряд (9) сходится в области G равномерно.

Пусть $R_n(z)$ — остаток данного ряда (9), а r_n — остаток числового ряда (10):

$$R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots, \quad (11)$$

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (12)$$

По условию

$$|f_{n+1}(z)| \leq a_{n+1}, \quad |f_{n+2}(z)| \leq a_{n+2}, \dots,$$

следовательно, таким же неравенствам удовлетворяют частичные суммы рядов (11) и (12), а значит и их пределы:

$$|R_n(z)| \leq r_n.$$

Но, в силу сходимости числового ряда (10), для каждого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно подобрать такое $N(\varepsilon)$ (N зависит, конечно, только от ε , так как ряд (10) числовой), что при $n > N(\varepsilon)$

$$r_n < \varepsilon.$$

Следовательно, тем более при $n > N(\varepsilon)$

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

во всех точках области G .

Следовательно, ряд (9) сходится равномерно.

Докажем несколько теорем о равномерно сходящихся рядах.

1) Если члены ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (9)$$

являются непрерывными функциями в некоторой области G и если ряд сходится в этой области равномерно, то сумма ряда $f(z)$ также непрерывна в области G .

Пусть $S_n(z)$ — частичная сумма данного ряда, $R_n(z)$ — остаток ряда (9), z_0 и $z_0 + h$ — две произвольные точки области G ; тогда

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= [f(z_0 + h) - S_n(z_0 + h)] + \\ &+ [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)] = R_n(z_0 + h) + \\ &+ [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] - R_n(z_0) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |f(z_0 + h) - f(z_0)| &\leq \\ &\leq |R_n(z_0 + h)| + |S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| + |R_n(z_0)|. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как в области G данный ряд сходится равномерно, то в соответствии с определением равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое, не зависящее от z число $N^*(\varepsilon)$, что неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

удовлетворяется при $n > N^*(\varepsilon)$ во всех точках области G и, в частности, в точках z_0 и $z_0 + h$.

Итак, пусть $n > N^*(\varepsilon)$; тогда

$$\begin{aligned} |R_n(z_0)| &< \varepsilon, \\ |R_n(z_0 + h)| &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

каковы бы ни были z_0 и h (при условии, что z_0 и $z_0 + h$ принадлежат области G). Функция $S_n(z)$ непрерывна в области G , так как является суммой конечного числа непрерывных функций. Следовательно, в частности, функция $S_n(z)$ непрерывна в точке z_0 , и поэтому для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, при достаточно малом $|h|$ удовлетворяется неравенство

$$|S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| < \varepsilon. \quad (15)$$

Пользуясь (14) и (15), мы заключаем, что при достаточно малом $|h|$ из (13) следует

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| < 3\varepsilon,$$

а это и означает, что функция $f(z)$ непрерывна в произвольной точке z_0 области G .

2) В условиях предыдущей теоремы ряд можно почленно интегрировать вдоль всякой дуги C , лежащей внутри области G , причем сумма ряда, полученного в результате такого интегрирования, равна

$$\int_C f(z) dz,$$

где $f(z)$ — сумма данного ряда.

Пусть, по-прежнему, $S_n(z)$ — частичная сумма данного ряда:

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_n(z) &= \int_C f_0(z) dz + \int_C f_1(z) dz + \dots + \int_C f_n(z) dz = \\ &= \int_C S_n(z) dz. \end{aligned}$$

Теорема будет доказана, если мы обнаружим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(z) = \int_C f(z) dz.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz - \sigma_n(z) &= \int_C f(z) dz - \int_C S_n(z) dz = \\ &= \int_C [f(z) - S_n(z)] dz = \int_C R_n(z) dz, \end{aligned} \quad (16)$$

где $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ — остаток данного ряда. Ввиду равномерной сходимости данного ряда в области G для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N(\varepsilon)$ во всех точках области G и, в частности, во всех точках дуги C будет выполнено неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon,$$

если $N(\varepsilon)$ достаточно велико. Но тогда из (16) при $n > N(\varepsilon)$ получим:

$$\left| \int_C f(z) dz - \sigma_n(z) \right| = \left| \int_C R_n(z) dz \right| < \varepsilon l,$$

где l — длина дуги C . Так как число ε сколь угодно мало, то из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(z) = \int_C f(z) dz.$$

3) Если члены ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots = f(z)$$

являются аналитическими функциями в односвязной области G и ряд сходится в этой области равномерно, то сумма ряда $f(z)$ также является функцией, аналитической внутри области G (теорема Вейерштрасса).

Пусть C — любой замкнутый контур внутри области G . Так как данный ряд сходится в области G по условию равномерно, то его можно вдоль контура C интегрировать почленно и

$$\int_C f(z) dz = \int_C f_0(z) dz + \int_C f_1(z) dz + \dots + \int_C f_n(z) dz + \dots$$

Так как $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z), \dots$ являются аналитическими функциями в области G , то на основании теоремы Коши каждый из интегралов в правой части последнего равенства равен нулю, а следовательно,

$$\int_C f(z) dz = 0, \quad (17)$$

при любом выборе контура C в области G . Так как, кроме того, функция $f(z)$, будучи суммой равномерно сходящегося ряда аналитических, а следовательно и непрерывных, функций, также, по ранее доказанному, непрерывна, то из (17) на основании теоремы Морера (стр. 86—87) следует, что функция $f(z)$ аналитична внутри области G .

Теорема Вейерштрасса остается, конечно, справедливой и в случае многосвязной области G , так как каждая внутренняя точка z_0 многосвязной области может быть включена в односвязную часть области G , например в достаточно малую окрестность точки z_0 ; по доказанному функция $f(z)$ будет аналитической в этой односвязной области и, в частности, в данной точке z_0 .

§ 3. Степенные ряды

Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad (18)$$

где c_i — постоянные, называется *степенным*. Основной теоремой теории степенных рядов является *теорема Абеля*.

Если степенной ряд (18) сходится в точке z_0 , то он сходится и притом абсолютно во всех точках, лежащих внутри окружности S с центром в точке $z=0$ и проходящей через точку z_0 (т. е. во всех точках z , для которых $|z| < |z_0|$). При этом во всяком круге $|z| \leq \rho$ (черт. 24) радиуса ρ , меньшего, чем $|z_0|$, ряд (18) сходится равномерно.

Из сходимости ряда (18) при $z=z_0$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0,$$

и следовательно, модули членов ряда (18) ограничены, е. существует такая постоянная M , что

$$|c_n z_0^n| < M$$

при любом n . Пусть z — любая точка, лежащая внутри окружности S ; тогда $|z| < |z_0|$ и $\left|\frac{z}{z_0}\right| = q < 1$. Общий член ряда (18) можно преобразовать к виду

$$c_n z^n = c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$

Отсюда видно, что

$$|c_n z^n| < M q^n,$$

и следовательно, модули членов ряда (18) в точке z меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

со знаменателем q , меньшим единицы. Следовательно, ряд (18) сходится в точке z абсолютно, и первая часть теоремы доказана.

Возьмем теперь произвольный круг $|z| \leq \rho$ (черт. 24), лежащий внутри окружности S ($\rho < |z_0|$). По доказанному ряд (18) сходится абсолютно во всякой точке, расположенной внутри окружности S , и в частности во всякой точке, лежащей на окружности выбранного нами круга радиуса ρ . Итак, если z^* — какая-нибудь точка на окружности этого круга (т. е. $|z^*| = \rho$), то числовой ряд

$$|c_0| + |c_1 z^*| + |c_2 z^{*2}| + \dots + |c_n z^{*n}| + \dots$$

сходится. Но для любой другой точки z , лежащей внутри или на окружности круга $|z| \leq \rho$, справедливо неравенство $|z| \leq |z^*|$, следовательно,

$$|c_n z^n| \leq |c_n z^{*n}| \quad (19)$$

при любом n . На основании признака равномерной сходимости, доказанного на стр. 94—95, из (19) следует, что ряд (18) равномерно сходится в круге $|z| \leq \rho$. Этим доказана и вторая часть теоремы.

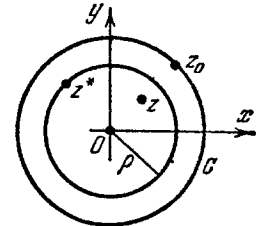
Рассмотрим теперь любой луч, выходящий из нулевой точки. Возможны три случая:

1) Ряд (18) сходится во всех точках этого луча. Тогда, в силу теоремы Абеля, ряд (18) сходится внутри круга сколь угодно большого радиуса, т. е. сходится во всей плоскости.

2) Ряд расходится во всех точках луча, кроме точки $z=0$ (в точке $z=0$ сходится всякий степенной ряд вида (18), так как при $z=0$ все члены ряда, кроме первого, обращаются в нуль).

В этом случае ряд расходится во всех точках плоскости, кроме точки $z=0$.

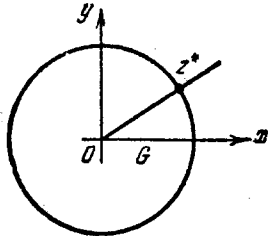
Действительно, из теоремы Абеля следует, что если ряд (18) в некоторой точке z расходится, то он расходится и всюду вне круга с центром в начале координат, окружность которого проходит через точку z , так как из сходимости ряда в некоторой точке вне такого круга следовала бы сходимости его и в точке z . Следовательно, в рассматриваемом случае ряд расходится вне круга сколь угодно малого радиуса с центром в нулевой точке, т. е. всюду, кроме точки $z=0$.



Черт. 24.

3) На луче имеются, как точки сходимости, отличные от $z=0$, так и точки расходимости ряда (18).

Как было указано выше, из теоремы Абеля следует, что всякая точка сходимости находится ближе к нулевой точке, чем всякая точка расходимости. Следовательно (черт. 25), на луче найдется точка z^* , отделяющая точки луча, в которых ряд (18) сходится от точек, в которых ряд расходится. Сама точка z^* принадлежит или к числу точек сходимости, или к числу точек расходимости ряда (18). Ряд (18) будет сходиться внутри круга G с центром в нулевой точке, окружность которого проходит через точку z^* , и расходиться вне этого круга.



Черт. 25.

Круг G называют *кругом сходимости*, а его радиус — *радиусом сходимости* степенного ряда (18). На окружности круга сходимости могут лежать как точки сходимости, так и точки расходимости ряда (18). В рассмотренных выше случаях 1) и 2) можно считать, что радиус сходимости равен, соответственно, бесконечности и нулю.

Так как во всяком круге, находящемся целиком внутри круга сходимости, как было доказано выше, степенной ряд сходится равномерно, то из теоремы Вейерштрасса следует, что сумма степенного ряда внутри круга сходимости является аналитической функцией.

Радиус сходимости степенного ряда можно определять, пользуясь известными признаками сходимости рядов. Например, если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|,$$

то (см. стр. 90—91) ряд (18) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1,$$

т. е. при

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|},$$

и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| > 1,$$

т. е. при

$$|z| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}.$$

Следовательно, в этом случае радиус сходимости r можно определять по формуле

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}. \quad (20)$$

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

то (см. стр. 90—91) ряд (18) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

т. е. при

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1,$$

т. е. при

$$|z| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

В этом случае радиус сходимости r можно определять по формуле

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (21)$$

Ряд

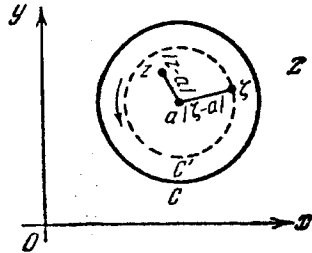
$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (22)$$

где a — любое комплексное число, также называется степенным.

Этот ряд подстановкой $z - a = t$ сводится к ряду (18), причем точке $t = 0$ соответствует точка $z = a$. Следовательно, областью сходимости ряда (22) является круг с центром в точке $z = a$. Радиус этого круга (радиус сходимости ряда (22)) можно определять по формулам (20), (21).

§ 4. Ряд Тейлора

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга G , ограниченного окружностью C с центром в точке $z = a$ (черт. 26). Разложим эту функцию в степенной ряд вида (22).



Черт. 26.

Пусть z — любая внутренняя точка круга G . Проведем внутри круга G окружность C' с центром в точке a так, чтобы точка z оказалась внутри этой окружности. Тогда в соответствии с интегральной формулой Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (23)$$

Преобразуем один из множителей подынтегральной функции

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)}, \quad (24)$$

где ζ — любая точка окружности C' . Модуль разности $|\zeta - a|$ равен радиусу окружности C' , а так как модуль разности $|z - a|$ равен расстоянию точки z от центра окружности C' , то, как бы ни перемещалась точка ζ по окружности C' , величина $\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right|$ при фиксированном z сохраняет постоянное значение, меньшее единицы (черт. 26).

Следовательно, функция

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}$$

является суммой, сходящейся во всякой точке z внутри окруж-

ности C' (см. стр. 92) геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \dots \quad (25)$$

Эта прогрессия равномерно сходится на окружности C' относительно ζ , потому что при фиксированном z величина $\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| = q$ постоянна на этой окружности и, следовательно, модули членов ряда (25) совпадают с соответствующими членами сходящегося числового ряда

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots, \quad \text{где } q < 1.$$

Следовательно, подынтегральную функцию в правой части (23) можно, пользуясь (24) и (25), представить в виде суммы ряда, равномерно сходящегося на окружности C'

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{(z - a)f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z - a)^2 f(\zeta)}{(\zeta - a)^3} + \dots + \frac{(z - a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots$$

и произвести почленное интегрирование, что приводит к разложению функции $f(z)$ в степенной ряд:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + \frac{(z - a)}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z - a)^2}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \dots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots \quad (26)$$

(множители $(z - a)$, $(z - a)^2$, ..., $(z - a)^n$ вынесены за знаки соответствующих интегралов).

Итак, во всякой точке z , находящейся внутри круга G , функция $f(z)$ представлена с помощью (26) в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots,$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

где C' — любая окружность с центром в точке $z = a$, лежа-

шая внутри круга G , или любой другой простой замкнутой контур, однократно обходящий точку a в положительном направлении и лежащий внутри круга G , так как, в силу теоремы Коши, величина интеграла (27) не зависит от выбора контура C' . Полученный ряд называется *рядом Тейлора*.

Пользуясь интегральной формулой Коши и вытекающей из нее формулой (37) главы V, можно для коэффициентов ряда Тейлора получить иное представление:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} = f(a),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и записать разложение в ряд Тейлора в форме, совпадающей с известной из курса математического анализа для функций действительного аргумента

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z-a) + \frac{f''(a)}{2!} (z-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n + \dots \quad (28)$$

Отсюда, в частности, легко получить известные разложения элементарных функций

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

и другие. Равенства

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots,$$

служившие нам для определения функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ можно рассматривать, как разложения этих функций в ряд Тейлора.

Всякая однозначная элементарная функция является аналитической во всех точках, в которых она определена. Но может случиться, что ряд Тейлора для какой-либо элементарной функции сходится и в такой точке, в которой эта элементар-

ная функция не определена. Условимся в этом случае приписывать рассматриваемой элементарной функции в соответствующей точке значение, равное сумме ряда Тейлора в этой точке.

Так, например, разложение

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

справедливо, как мы знаем, во всей плоскости. Поделив обе части этого равенства на z , что допустимо, если $z \neq 0$, получим:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Это равенство справедливо при любом $z \neq 0$. Однако ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится и при $z=0$, причем его сумма при $z=0$ равна 1. Условимся поэтому считать, что $\frac{\sin z}{z} = 1$ при $z=0$.

Из предыдущего следует, что при таком условии радиус сходимости ряда Тейлора для всякой однозначной элементарной функции $f(z)$ равен расстоянию ρ точки $z=a$, являющейся центром круга сходимости, до ближайшей особой точки этой функции.

Действительно, радиус сходимости не может быть больше указанного расстояния ρ , так как в противном случае внутрь круга сходимости попала бы по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$, причем эта точка была бы особой и для суммы ряда Тейлора (внутри круга сходимости ввиду принятого условия элементарная функция $f(z)$ и сумма ее ряда Тейлора тождественны). Это противоречило бы тому, что сумма ряда является функцией, аналитической во всякой точке, лежащей внутри его круга сходимости (см. стр. 97, теорема Вейерштрасса).

С другой стороны, радиус сходимости ряда Тейлора не может быть и меньше расстояния ρ точки $z=a$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$, потому что внутри круга радиуса ρ с центром в точке $z=a$ функция $f(z)$ аналитична и поэтому, как было доказано, допускает разложение в сходящийся ряд Тейлора.

Если R — радиус круга сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ и эта функция ограничена в круге сходимости, т. е. существует такая постоянная M , что $|f(z)| \leq M$ при $|z| < R$, то, пользуясь интегральной формулой для коэффициентов ряда

Тейлора и выбрав в качестве пути интегрирования в этой формуле окружность радиуса ρ с центром в точке $z=a$, уравнение которой $|\zeta-a|=\rho$, получим:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho,$$

или

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Так как радиус ρ окружности C можно брать сколь угодно близким к радиусу круга сходимости R , то

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (29)$$

Если функция $f(z)$ является аналитической во всей плоскости, то радиус круга сходимости ряда Тейлора бесконечен, и следовательно, из неравенств (29) находим, что все коэффициенты c_n , кроме c_0 , равны нулю и, значит, $f(z)=c_0$. Тем самым доказано, что *функция, аналитическая и в то же время ограниченная во всей плоскости, постоянна (теорема Лиувилля)*.

Ряд Тейлора можно почленно дифференцировать. Действительно, если $f(z)$ — аналитическая функция, то аналитической является и ее производная $f'(z)$; разложив по формуле (28) в ряд Тейлора функцию $f'(z)$, получим:

$$f'(z) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + \dots$$

Но к этому же равенству приводит почленное дифференцирование равенства (28). Полученный после дифференцирования ряд имеет тот же круг сходимости, что и исходный ряд, так как, с одной стороны, при дифференцировании степенного ряда модули его коэффициентов увеличиваются (коэффициент c_n умножается на n) и поэтому радиус сходимости не может увеличиться, а, с другой стороны, радиус сходимости не может и уменьшиться, так как сумма ряда (28), а следовательно, и ее производная являются функциями аналитическими во всякой внутренней точке круга сходимости ряда Тейлора для функции $f(z)$.

В качестве точки a в формуле (28) можно взять любую точку, в которой функция $f(z)$ аналитична. Разложение (28)

называют разложением функции $f(z)$ в окрестности точки a . Если $f(a)=0$, то точка a называется *нулем* функции $f(z)$. Если точка a является нулем функции $f(z)$, то разложение этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots,$$

так как $c_0=f(a)=0$. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a

$$c_0=c_1=\dots=c_{n-1}=0,$$

но $c_n \neq 0$ и, следовательно, разложение имеет вид

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots, \quad (30)$$

то точка a называется нулем функции $f(z)$ *порядка* или *кратности* n . Если $n=1$, то нуль называется *простым*. Продифференцировав (30), приходим к выводу, что если a — нуль порядка n функции $f(z)$, то эта же точка является нулем порядка $n-1$ для функции $f'(z)$.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то

$$f(a)=f'(a)=\dots=f^{(n-1)}(a)=0,$$

но $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Разложение (30) можно переписать в виде

$$f(z) = (z-a)^n [c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots] = (z-a)^n \varphi(z), \quad (31)$$

где функция $\varphi(z)$ определяется как сумма степенного ряда

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots,$$

имеющего, очевидно, тот же круг сходимости, что и данный ряд (30). Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a)=c_n \neq 0$. Справедливо и обратное утверждение: всякая функция вида

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

где n — целое положительное число, $\varphi(a) \neq 0$ и $\varphi(z)$ аналитична в точке a , имеет в этой точке нуль порядка n . Действительно, разложив $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a , получим:

$$\varphi(z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1(z-a) + \dots$$

где $\bar{c}_0 = \varphi(a) \neq 0$. Отсюда

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z) = \bar{c}_0 (z-a)^n + \bar{c}_1 (z-a)^{n+1} + \dots$$

Мы пришли к разложению вида (30) и, следовательно, точка a является нулем порядка n функции $f(z)$.

§ 5. Теорема единственности и аналитическое продолжение

Докажем следующую теорему о единственности аналитической функции.

Если значения аналитических в области G функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на некоторой бесконечной последовательности точек

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots,$$

сходящейся к точке a , которая является внутренней точкой области G , то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ тождественны во всей области G .

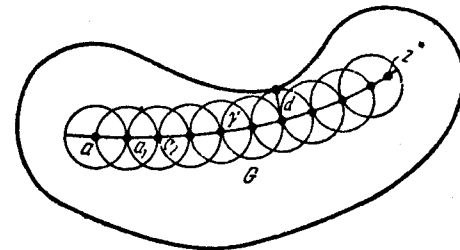
Для доказательства этой теоремы заметим сначала, что если точка a является нулем функции $f(z)$ и функция $f(z)$ не равна тождественно нулю в некоторой окрестности точки a , то из (31) следует, что в достаточно малой ε -окрестности точки a функция $f(z)$ других нулей не имеет. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что множитель $(z-a)^n$ в правой части (31) отличен от нуля всюду, кроме точки $z=a$, а функция $\varphi(z)$ отлична от нуля в точке a , а следовательно, в силу непрерывности, и в некоторой окрестности точки a .

Для функции $f_1(z) - f_2(z)$ точки $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ являются, по условию, нулями, следовательно, точка a также является нулем этой функции, так как, если бы в точке a функция $f_1(z) - f_2(z)$ была бы отлична от нуля, то в силу непрерывности она была бы отлична от нуля и в некоторой окрестности точки a , что невозможно, так как из определения предела следует, что в любой, сколь угодно малой окрестности точки a находится бесконечное множество точек последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, в которых $f_1(z) - f_2(z) = 0$. Итак, точка a является нулем аналитической функции $f_1(z) - f_2(z)$ и в то же время в любой, сколь угодно малой окрестности точки a имеются другие нули этой функции, что, как указано выше, возможно лишь в случае тождественного равен-

§ 5] ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ И АНАЛИТИЧ. ПРОДОЛЖЕНИЕ 109

ства нулю функции $f_1(z) - f_2(z)$ в некоторой окрестности точки a , но тогда равны нулю все коэффициенты разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a , и тождество $f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$ или $f_1(z) \equiv f_2(z)$ справедливо по крайней мере во всем круге сходимости указанного разложения и тем более в круге с центром в точке a и радиусом, равным расстоянию этой точки до ближайшей к ней точки границы области G .

Пусть теперь z^* — любая внутренняя точка области G . Соединим точку a с точкой z^* непрерывной дугой γ , лежащей



Черт. 27.

внутри области G (черт. 27). Пусть d — кратчайшее расстояние точек этой дуги от границы области G . Опишем из точки a , как из центра, окружность радиуса d . Тождество $f_1(z) \equiv f_2(z)$, по доказанному, справедливо внутри круга G_0 , ограниченного этой окружностью. Пусть a_1 — первая, если перемещаться по дуге γ от точки a к точке z^* , точка пересечения построенной окружности с дугой γ . В любой окрестности точки a_1 имеется бесконечное множество точек круга G_0 — точек, в которых значения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, по доказанному, совпадают. Следовательно, повторив для точки a_1 рассуждения, примененные к точке a , мы приходим к выводу, что тождество $f_1(z) \equiv f_2(z)$ справедливо в круге G_1 радиуса d с центром в точке a_1 . Обозначим a_2 первую при движении по дуге γ от точки a_1 к z^* точку пересечения окружности круга G_1 с дугой γ , рассмотрим круг G_2 радиуса d с центром в точке a_2 и будем повторять аналогичные рассуждения до тех пор, пока не докажем тождество $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в круге, содержащем точку z^* , откуда, в частности,

$$f_1(z^*) = f_2(z^*).$$

Так как z^* — любая точка области G , то теорема доказана.

Из теоремы единственности, в частности, следует, что две функции, аналитические в некоторой области, тождественны, если их значения одинаковы на сколь угодно малой площадке, принадлежащей этой области, и даже на сколь угодно малой дуге.

В главе III мы определили для комплексных значений аргумента функции $\operatorname{Ln} z$, e^z , $\sin z$, $\cos z$, причем было доказано, что:

1) значения функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ на действительной оси и главные значения функции $\operatorname{Ln} z$ на положительной части действительной оси совпадают со значениями соответствующих функций, определяемых в курсе математического анализа для действительных значений аргумента;

2) функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ являются аналитическими во всей конечной части плоскости, а функция $\operatorname{Ln} z$ всюду, кроме точек $z=0$ и $z=\infty$.

Из теоремы единственности следует, что никакие другие функции, кроме введенных нами, указанными двумя свойствами обладать не могут.

Всякое тождество (например, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ и т. д.), справедливое на действительной оси (или даже только на некотором отрезке действительной оси), остается справедливым во всей комплексной плоскости, если левая и правая части этого тождества являются функциями, аналитическими во всей плоскости.

С теоремой единственности связано очень важное понятие *аналитического продолжения*. Предположим, что в некоторой области G задана функция $f(z)$, аналитическая в этой области. Встает вопрос, существует ли функция, аналитическая в области более широкой, чем область G , и совпадающая в области G с функцией $f(z)$. Если такая функция существует, то она называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Если данную функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить, то такое продолжение является единственным в следующем смысле: функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в некоторой области G' , частью которой является данная область G , тождественны между собой, если они являются аналитическими продолжениями одной и той же функции $f(z)$, аналитической в области G .

Действительно, так как в соответствии с определением аналитического продолжения эти функции совпадают с функцией $f(z)$ в области G , то они совпадают также между со-

бой в области G , а следовательно, в силу теоремы единственности, они тождественны и в области G' .

В качестве примера рассмотрим функцию $f(z)$, которую определим как сумму ряда

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = f(z).$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1, и функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z| < 1$. Вне этого круга ряд расходится, и функция $f(z)$ вне круга $|z| < 1$ не определена.

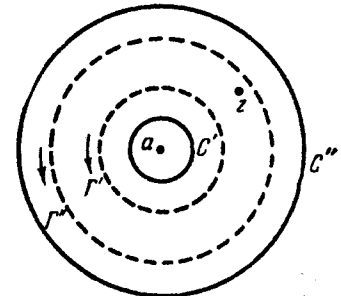
Нетрудно видеть, что функция $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$, аналитическая во всей плоскости, кроме точки $z=1$, является аналитическим продолжением данной функции $f(z)$, так как в соответствии с формулой для суммы геометрической прогрессии $f(z) = \frac{1}{1-z}$ в круге $|z| < 1$ и, следовательно, в этом круге функции $f_1(z)$ и $f(z)$ совпадают.

Обычно аналитическое продолжение функции $f(z)$ обозначают тем же символом $f(z)$.

§ 6. Ряд Лорана

Предположим, что $f(z)$ является однозначной аналитической функцией внутри кольца между concentрическими окружностями C' и C'' с центром в точке $z=a$ (черт. 28), и пусть z — произвольная внутренняя точка этого кольца. Проведем окружности Γ' и Γ'' с центром в точке a так, чтобы каждая из них находилась внутри данного кольца и чтобы точка z оказалась между Γ' и Γ'' . Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (32)$$



Черт. 28.

(окружности Γ' и Γ'' обходятся против часовой стрелки — черт. 28). Если ζ — точка на контуре Γ'' , то $|\zeta - a| > |z - a|$

и

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \dots \right].$$

Ряд в правой части этого равенства сходится на окружности Γ'' равномерно (см. совершенно аналогичные рассуждения на стр. 103); умножив его почленно на $f(\zeta) d\zeta$ и проинтегрировав вдоль Γ'' , получим для первого из интегралов в правой части (32) разложение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + \frac{z - a}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2} +$$

$$+ \frac{(z - a)^2}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \dots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots \quad (33)$$

Если же точка ζ находится на контуре Γ' , то $|z - a| > |\zeta - a|$ и, следовательно, $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1$; поэтому для того, чтобы получить ряд, равномерно сходящийся на Γ' , преобразуем $\frac{1}{\zeta - z}$ иначе:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = - \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} =$$

$$= - \frac{1}{z - a} \left[1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \frac{(\zeta - a)^2}{(z - a)^2} + \dots + \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^n} + \dots \right].$$

После такого преобразования для второго из интегралов в правой части (32) получим:

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = - \frac{1}{z - a} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\zeta) d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{(z - a)^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\zeta - a) f(\zeta) d\zeta + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta) d\zeta + \dots \quad (34)$$

Так как в силу теоремы Коши для двусвязной области вместо путей интегрирования Γ'' и Γ' в (33) и (34) можно взять лю-

бую окружность Γ с центром в точке a , лежащую в данном кольце между C' и C'' , то из (32) получаем следующее разложение функции $f(z)$, сходящееся во всякой точке z внутри кольца между C' и C'' и называемое *рядом Лорана*:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots$$

$$\dots + \frac{b_1}{z - a} + \frac{b_2}{(z - a)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z - a)^n} + \dots,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (35)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (36)$$

и Γ — любая окружность в данном кольце, с центром в точке a .

При замене n на $-n$ правая часть (36) переходит в правую часть (35), поэтому, обозначив для удобства $b_n = c_{-n}$, разложение в ряд Лорана можно записать в виде

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots +$$

$$+ \frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \dots,$$

где коэффициенты c_n как при $n = 0, 1, 2, \dots$, так и при $n = -1, -2, \dots$ определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad (37)$$

Γ — любая расположенная в данном кольце окружность с центром в точке $z = a$.

Разложив функцию $f(z)$ в ряд Лорана, мы тем самым представили ее в виде суммы

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (38)$$

а

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}. \quad (39)$$

Ряд (38) называется *правильной частью*, а ряд (39) *главной частью* ряда Лорана. Областью сходимости степенного ряда (38) является, как доказано выше, некоторый круг радиуса R с центром в точке $z=a$, на окружности которого имеется по крайней мере одна особая точка функции $f_1(z)$. Что касается ряда (39), то подстановка $\frac{1}{z-a}=t$ преобразует его в степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n. \quad (40)$$

Областью сходимости степенного ряда (40) является некоторый круг радиуса ρ с центром в точке $t=0$, на границе которого находится по крайней мере одна особая точка суммы этого ряда. С помощью преобразования $\frac{1}{z-a}=t$ или $z=$

$=\frac{1}{t}+a$ внутренность этого круга плоскости t отображается на внешность круга радиуса $r=\frac{1}{\rho}$ плоскости z с центром в точке $z=a$, так как $|z-a|=\frac{1}{\rho}$ при $|t|=\rho$ и

$|z-a|>\frac{1}{\rho}$ при $|t|<\rho$ (см. также стр. 163 и 167); следовательно, областью сходимости ряда (39) является внешность некоторого круга радиуса r с центром в точке $z=a$, на границе которого находится по крайней мере одна особая точка функции $f_2(z)$, являющейся суммой этого ряда. Если учесть, наконец, что по доказанному ряды (38) и (39) сходятся в концентрическом кольце с центром в точке $z=a$ и, что в этом кольце функция $f(z)$ аналитична, то мы приходим к выводу, что областью сходимости ряда Лорана (т. е. областью, в которой сходятся как ряд (38), так и ряд (39)) является кольцо, ограниченное окружностями, имеющими центр в точке a , причем на каждой из этих окружностей имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$. При этом на граничной окружности радиуса R (большого радиуса) имеется по крайней мере одна особая точка функции $f_1(z)$, являющейся суммой правильной части ряда Лорана, в то время как функция $f_2(z)$ (сумма главной части ряда Лорана) на этой окружности особых точек не имеет, так как она аналитична всюду вне

граничной окружности радиуса r (меньшего радиуса) и, в частности, на граничной окружности радиуса R . Аналогично на граничной окружности радиуса r имеется по крайней мере одна особая точка функции $f_2(z)$, но нет особых точек функции $f_1(z)$, так как функция $f_1(z)$ аналитична всюду внутри области, ограниченной окружностью радиуса R .

Если считать, что точка $z=a$ выбрана, то имеется все же, вообще говоря, несколько колец с центром в этой точке, в которых функция $f(z)$ аналитична, причем на граничных окружностях лежат особые точки функции $f(z)$. Каждому из этих колец соответствует свое разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана: контур Γ , по которому производится интегрирование в формуле (37), при вычислении коэффициентов ряда Лорана должен находиться внутри того кольца, в котором происходит разложение, и поэтому разным кольцам соответствуют различные коэффициенты разложения одной и той же функции $f(z)$. В частности, если в точке $z=a$ данная функция $f(z)$ аналитична (точка a — правильная точка данной функции), то круг с центром в точке a , радиус которого равен расстоянию точки a до ближайшей особой точки функции $f(z)$, также является одним из «колец», в которых можно произвести разложение в ряд Лорана. Все коэффициенты $b_n=c_{-n}$ такого разложения, как это видно из формул (36), в силу теоремы Коши, равны нулю, так как функция $f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1}$, стоящая под знаком интеграла в правой части формулы для вычисления b_n , при любом целом положительном n не имеет особых точек внутри окружности Γ . Следовательно, в этом случае ряд Лорана состоит только из правильной части, а так как формулы для вычисления коэффициентов правильной части ряда Лорана ничем не отличаются от интегральных формул для коэффициентов ряда Тейлора (см. стр. 103), то ряд Лорана превращается в ряд Тейлора. Итак, ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана.

Пример 1. Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

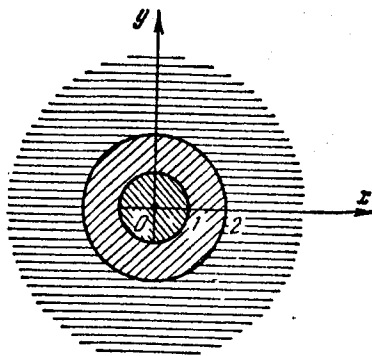
выбрав $a=0$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z=1$ и $z=2$. Следовательно, имеется три круговых «кольца» с центром в точке O ,

в каждом из которых функция аналитична, а именно (черт. 29):

- 1) круг $|z| < 1$,
- 2) кольцо $1 < |z| < 2$,
- 3) внешность круга $|z| > 2$.

В рассматриваемом примере нетрудно получить разложение в ряд



Черт. 29.

Лорана в каждом из перечисленных «колец», не прибегая к формулам для вычисления коэффициентов.

- 1) Разложение в круге $|z| < 1$.

Функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}},$$

а функция

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

является суммой геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots,$$

то

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \dots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \dots \quad (41)$$

Аналогично

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad (42)$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z| < 1$.

Складывая (41) и (42), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \dots + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$c_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = c_{-n} = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Полученное разложение является рядом Тейлора.

- 2) Разложение в кольце $1 < |z| < 2$.

Ряд (41) остается сходящимся, так как $|z| < 2$, но ряд (42) расходится, потому что $|z| > 1$; поэтому разложение (42) заменяем следующим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) = \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots \quad (43) \end{aligned}$$

В рассматриваемом кольце ряд (43) сходится, так как $|z| > 1$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$.

Складывая (41) и (43), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \dots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \dots \\ &\dots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$c_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = c_{-n} = -1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

- 3) Разложение в области $|z| > 2$.

Равенство (43) сохраняется, так как если $|z| > 2$, то тем более $|z| > 1$; но ряд в правой части (41) расходится, и равенство (41) заменяем следующим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{z^n} + \dots \quad (44) \end{aligned}$$

Ряд в правой части (44) сходится, так как $|z| > 2$, и следовательно, $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$. Складывая (43) и (44), получаем:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{2^2-1}{z^3} + \dots + \frac{2^{n-1}-1}{z^n} + \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} c_n &= 0 & (n=0, 1, 2, \dots), \\ b_n = c_{-n} &= 2^{n-1} - 1 & (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем разложения в ряд Лорана в различных областях той же функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

выбрав $a=1$.

В данном случае имеется два круговых «кольца» с центром в точке 1 (черт. 30):

- 1) круг, из которого удален центр $0 < |z-1| < 1$;
- 2) внешность круга $|z-1| > 1$. В каждом из этих «колец» функция $f(z)$ аналитична, а на границах имеет особые точки.

Разложим в каждом из этих «колец» функцию $f(z)$ по степеням разности $(z-1)$.

- 1) Разложение в области $0 < |z-1| < 1$.

Как и в примере 1, получим:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{1-(z-1)} = \\ &= -[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots \\ &\quad \dots + (z-1)^n + \dots], \end{aligned}$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z-1| < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \dots - (z-1)^n - \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} c_n &= -1 & (n=0, 1, 2, \dots), \\ c_{-1} &= -1, & c_{-2} = c_{-3} = \dots = c_{-n} = \dots = 0. \end{aligned}$$

Главная часть ряда Лорана состоит здесь только из одного члена.

- 2) Разложение в области $|z-1| > 1$.

В этой области

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \left[1 + \frac{1}{z-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(z-1)^2} + \dots \right] = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots + \frac{1}{(z-1)^n} + \dots, \end{aligned}$$

причем ряд в правой части равенства сходится, так как $|z-1| > 1$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots + \frac{1}{(z-1)^n} + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_n &= 0 & (n=0, 1, 2, \dots), \\ c_{-1} &= 0, & c_{-2} = c_{-3} = \dots = c_{-n} = \dots = 1. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать единственность разложения функции в ряд Лорана, т. е. в ряд вида

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \\ &\quad \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Иными словами, нетрудно доказать, что если функция $f(z)$ является в некотором кольце с центром в точке a аналитической, то не существует двух различных рядов указанного вида, сходящихся в этом кольце и имеющих своей суммой функцию $f(z)$.

Действительно, как доказано выше, областью сходимости рассматриваемого ряда является некоторое кольцо G с центром в точке a , и во всяком кольце, целиком внутреннем к кольцу G , ряд сходится равномерно. В частности, он сходится равномерно и на всякой окружности Γ с центром в точке a , расположенной внутри кольца сходимости, и следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать вдоль такой окружности. В § 4 главы V было доказано, что интегралы вида

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz,$$

где замкнутый контур Γ однократно обходит в положительном направлении точку a , равны нулю при всяком целом n , кроме $n = -1$, а в этом последнем случае интеграл равен $2\pi i$. Следовательно, при почленном интегрировании ряда (45) исчезнут все члены, кроме первого члена главной части, и мы получим:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{c_{-1} dz}{z-a} = c_{-1} \cdot 2\pi i,$$

откуда

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Чтобы определить c_{-n} , достаточно до интегрирования умножить все члены ряда (45) на $(z-a)^{n-1}$. Тогда после интегрирования все интегралы, кроме одного, опять обратятся в нуль, и мы получим:

$$\int_{\Gamma} f(z) (z-a)^{n-1} dz = \int_{\Gamma} \frac{c_{-n} dz}{z-a} = c_{-n} \cdot 2\pi i,$$

откуда

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (z-a)^{n-1} dz.$$

Аналогично, для того чтобы определить c_n при $n = 0, 1, 2, \dots$, достаточно, прежде чем почленно проинтегрировать ряд (45), разделить члены ряда на $(z-a)^{n+1}$. Тогда после интегрирования получим:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_{\Gamma} \frac{c_n dz}{z-a} = c_n \cdot 2\pi i$$

и

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Мы пришли к формулам (35) и (36) для коэффициентов ряда Лорана и тем самым доказали, что никакое другое разложение функции $f(z)$ в ряд указанного вида невозможно. Так как ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, то доказана и единственность разложения в ряд Тейлора.

§ 7. Изолированные особые точки

Особая точка функции $f(z)$ называется *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек. Разложение функции в ряд Лорана, сходящийся к этой функции во всех точках круга с центром в данной изолированной особой точке a , кроме этой точки a (радиус такого круга равен расстоянию данной особой точки a до ближайшей другой особой точки суммы ряда), будем называть разложением функции в ряд Лорана *в окрестности данной изолированной особой точки*. Так, в примере 2 (стр. 118) первое из разложений является разложением в окрестности особой точки $z=1$.

Выясним, как связано поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ с разложением функции в ряд Лорана в окрестности этой точки. Предположим сначала, что при разложении функции в окрестности точки $z=a$ главная часть ряда Лорана отсутствует, т. е. все коэффициенты c_{-n} равны нулю, и следовательно, разложение имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (46)$$

Ряд Лорана превращается в этом случае в степенной ряд, и его сумма есть функция аналитическая внутри круга сходимости, и в частности в точке $z=a$, являющейся центром этого круга (см. стр. 98). Если в точке a функция $f(z)$ аналитична, то равенство (46) дает разложение этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a ; если же точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то сумма ряда (46) совпадает с функцией $f(z)$ всюду в круге сходимости этого ряда, кроме самой точки $z=a$, и так как сумма ряда в точке a аналитична и, следовательно, непрерывна, а значение этой суммы при $z=a$ равно c_0 , то

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0.$$

Следовательно, если изменить определение функции в точке a и считать $f(a) = c_0$, то функция $f(z)$ станет в точке a аналитической, а равенство (46) будет разложением этой функции в ряд Тейлора. Точку a называют в этом случае *устраняемой особой точкой*.

Если обратиться к примеру, рассмотренному на стр. 105, то можно сказать, что точка $z=0$ является *устраняемой*

особой точкой функции $\frac{\sin z}{z}$, так как разложение

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

не содержит отрицательных степеней z . Если при $z=0$ принять $\frac{\sin z}{z} = 1$, то функция $\frac{\sin z}{z}$ станет аналитической в точке $z=0$.

Пусть теперь главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ содержит лишь конечное число членов. Следовательно, разложение имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \quad (47)$$

(здесь m — номер последнего из отличных от нуля коэффициентов главной части, т. е. $c_{-m} \neq 0$, $c_{-(m+1)} = c_{-(m+2)} = \dots = 0$).

Если обозначить

$$\varphi(z) = (z-a)^m f(z),$$

то из (47) получим:

$$\varphi(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + c_{-1} (z-a)^{m-1} + \dots + c_{-m} \quad (48)$$

Равенство (47), а следовательно, и равенство (48) справедливы во всей области сходимости ряда (47), т. е. во всех точках некоторого круга с центром в точке a , кроме точки a . Так как правая часть (48) при $z=a$ принимает значение c_{-m} , то

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Но

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \infty.$$

Итак, если главная часть разложения функции $f(z)$ в окрест-

ности точки a содержит лишь конечное число членов, то функция $f(z)$ стремится к бесконечности при $z \rightarrow a$. В этом случае изолированная особая точка a называется *полюсом*, а число m (номер последнего из отличных от нуля коэффициентов главной части ряда Лорана) — *порядком* полюса. Если $m=1$, полюс называется *простым*.

В примере 2 (стр. 118) вид разложения в ряд Лорана показывает, что точка $z=1$ является простым полюсом рассмотренной в этом примере функции $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Если в точке $z=a$ функция $f(z)$ имеет полюс порядка m , то функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке нуль порядка m . Действительно, как было показано выше, функцию $f(z)$, имеющую в точке a полюс порядка m , можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ определяется как сумма ряда (48) и является аналитической функцией в точке a , если считать

$$\varphi(a) = \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Отсюда следует, что функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ также является аналитической и отличной от нуля в точке $z=a$ и, следовательно, разлагается в окрестности точки a в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 (z-a) + \dots + \tilde{c}_n (z-a)^n + \dots,$$

причем $\tilde{c}_0 = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= \frac{(z-a)^m}{\varphi(z)} = (z-a)^m [\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 (z-a) + \dots] = \\ &= \tilde{c}_0 (z-a)^m + \tilde{c}_1 (z-a)^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

Но такой вид разложения в ряд Тейлора (см. стр. 107) и означает, что для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка a является нулем порядка m .

Справедливо и обратное утверждение: нуль порядка m функции $f(z)$ является полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Действительно, если точка a является нулем порядка m функции $f(z)$, то в соответствии с (31) функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в точке a , причем $\varphi(a) \neq 0$. Но тогда функция $\phi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ также является аналитической и отличной от нуля в точке a и может быть в окрестности этой точки разложена в ряд Тейлора

$$\phi(z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1(z-a) + \dots + \bar{c}_n(z-a)^n + \dots,$$

где $\bar{c}_0 = \phi(a) \neq 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= \frac{1}{(z-a)^m \varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \phi(z) = \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} [\bar{c}_0 + \bar{c}_1(z-a) + \dots] = \\ &= \frac{\bar{c}_0}{(z-a)^m} + \frac{\bar{c}_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\bar{c}_{m-1}}{z-a} + \\ &\quad + \bar{c}_m + \bar{c}_{m+1}(z-a) + \dots \end{aligned}$$

Ряд в правой части равенства является рядом Лорана, причем в главной части этого ряда коэффициент при $\frac{1}{(z-a)^m}$ отличен от нуля, а коэффициенты при $\frac{1}{(z-a)^{m+1}}, \frac{1}{(z-a)^{m+2}}, \dots$ равны нулю, так как соответствующие члены ряда отсутствуют. Следовательно, в соответствии с определением (стр. 123) точка a является полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Если главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ содержит бесконечное множество членов (т. е. бесконечное множество коэффициентов c_{-n} отлично от нуля), то точка a называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$. Поведение функции в окрестности существенно особой точки подчиняется следующей теореме Ю. В. Сохоцкого, доказательство которой мы опускаем¹⁾: *если точка a является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого заданного комплексного числа A найдется последовательность точек, сходящаяся к точ-*

¹⁾ См. [9], гл. VI, § 2, п° 5.

ке a , вдоль которой значения $f(z)$ стремятся к A , при этом случай $A = \infty$ не исключается.

Пример. Найти особые точки функции $e^{\frac{1}{z}}$ и определить их типы. Принимая во внимание, что

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

получим:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots, \quad (49)$$

причем ряд в правой части сходится всюду, кроме точки $z=0$. Равенство (49) можно рассматривать как разложение функции $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$, и так как его главная часть содержит бесконечное множество членов, то точка $z=0$ является существенно особой точкой функции $e^{\frac{1}{z}}$.

Рассмотрим поведение функции $e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$. При $z \rightarrow 0$ вдоль положительной части действительной оси получим $\frac{1}{z} \rightarrow +\infty$ и $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow \infty$; если $z \rightarrow 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\frac{1}{z} \rightarrow -\infty$ и $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow 0$. Пусть теперь $A = re^{i\varphi}$ — любое комплексное число, отличное от нуля и от бесконечности. Из равенства

$$e^{\frac{1}{z}} = A$$

или

$$\frac{1}{z} = \ln A$$

находим:

$$z = \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i}.$$

Полагая $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, получим последовательность точек, сходящуюся к точке $z=0$, так как

$$\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i} = 0,$$

причем функция $e^{\frac{1}{z}}$ не только стремится к A вдоль этой последовательности, но даже в точности равна A в каждой точке рассматриваемой последовательности.

Других особых точек функция $e^{\frac{1}{z}}$ не имеет.

Мы рассмотрели все возможные виды главной части ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки a (правильную часть ряда мы все время считали произвольной) и условились называть особую точку a устранимой, если главная часть разложения в окрестности этой точки отсутствует, полюсом, если главная часть содержит лишь конечное число членов, и существенно особой, если главная часть представляет собой бесконечный ряд. Мы установили, далее, что предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ существует и конечен, если особая точка a является устранимой, что этот предел бесконечен, если рассматриваемая точка является полюсом, и что предел $f(z)$ при $z \rightarrow a$ не существует, если a — существенно особая точка. Так как были рассмотрены все возможные случаи изолированных особых точек, то справедливы и обратные заключения: если a — изолированная особая точка функции $f(z)$, то она является: а) устранимой, если предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ существует и конечен, б) полюсом, если этот предел бесконечен, и в) существенно особой точкой, если $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не существует.

Классификацию изолированных особых точек можно распространить и на случай, когда изолированной особой точкой является бесконечно удаленная точка. Назовем бесконечно удаленную точку изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса нет других особых точек функции $f(z)$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке $z=0$ (кроме, быть может, самой бесконечно удаленной точки), будем называть разложением в окрестности бесконечно удаленной точки. Последнее из разложений в примере 1 (стр. 117—118)

является разложением функции $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд (49) является разложением функции $e^{\frac{1}{z}}$ не только в окрестности точки $z=0$, но также и в окрестности бесконечно удаленной точки. При разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки следует в соответствии с определением считать в (45) $a=0$. Запишем члены разложения в следующем

порядке:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (50)$$

Назовем ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

правильной частью, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

главной частью разложения в окрестности бесконечно удаленной точки. Такая терминология вполне естественна, если учесть, что при замене $z = \frac{1}{\bar{z}}$ окрестность бесконечно удаленной точки отображается на окрестность точки $\bar{z}=0$ и разложение (50) превращается в разложение функции $f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\bar{z}=0$:

$$f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = c_0 + c_{-1}\bar{z} + c_{-2}\bar{z}^2 + \dots + c_{-n}\bar{z}^n + \dots + \frac{c_1}{\bar{z}} + \frac{c_2}{\bar{z}^2} + \dots + \frac{c_n}{\bar{z}^n} + \dots, \quad (51)$$

в котором ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\bar{z}^n$$

является правильной, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\bar{z}^n}$$

главной частью.

Бесконечно удаленную точку будем называть устранимой особой точкой функции $f(z)$, если в разложении (50), а следовательно и в разложении (51), отсутствует главная часть. Нулевая точка является в этом случае устранимой особой точкой функции $f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$, и следовательно, предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\bar{z} \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

существует и конечен. Разложение функции $f(z)$ в этом случае имеет вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots \quad (52)$$

Если предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0$ принять за значение функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке, то функцию $f(z)$ можно считать аналитической в бесконечно удаленной точке. В частности, если $c_0 = 0$, то бесконечно удаленная точка будет нулем функции $f(z)$; при этом если $c_0 = c_{-1} = \dots = c_{-(m-1)} = 0$, но $c_{-m} \neq 0$, то бесконечно удаленная точка будет нулем порядка m функции $f(z)$.

Если главная часть (50), а следовательно и главная часть (51), состоит лишь из конечного числа членов, т. е. если (45) имеет вид

$$c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m,$$

где $c_m \neq 0$, то бесконечно удаленная точка называется полюсом порядка m функции $f(z)$. В этом случае

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\tilde{z} \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = \infty.$$

Если бесконечно удаленная точка является нулем порядка m функции $f(z)$, то она является полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$, и наоборот: нуль $z = \infty$ порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$ является полюсом порядка m функции $f(z)$.

Если главная часть (50), а следовательно и главная часть (51), состоит из бесконечного множества отличных от нуля членов, то бесконечно удаленная точка называется существенно особой точкой функции $f(z)$. В этом случае

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

т. е.

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right),$$

не существует и справедлива теорема Сохоцкого.

§ 8. Некоторые приемы разложения функций в ряд Лорана

Общие формулы (37) для коэффициентов ряда Лорана обычно мало удобны для вычислений. В некоторых случаях могут быть применены более простые приемы.

Для того чтобы разложить в ряд Лорана рациональную функцию, достаточно воспользоваться представлением правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей, как это было сделано в § 6 (примеры 1 и 2). Простейшая дробь вида $\frac{1}{z-a}$ разлагается в ряд, являющийся геометрической прогрессией, а дробь вида $\frac{1}{(z-a)^k}$ ($k > 1$ целое) — в ряд, полученный с помощью $(k-1)$ -кратного дифференцирования геометрической прогрессии. Заметим, что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму дробей вида $\frac{A}{(z-a)^k}$, где A, a — комплексные числа.

При разложении в ряд Лорана иррациональных и трансцендентных функций иногда можно использовать разложения в ряд Тейлора функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, биномиальный ряд и другие известные разложения. Так, например, в окрестности точки $z = 2$

$$\cos \frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}} + \dots$$

При этом иногда следует предварительно преобразовать разлагаемую в ряд функцию.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ функцию $\sin \frac{z}{z-1}$.

Имеем:

$$\sin \frac{z}{z-1} = \sin \left(1 + \frac{1}{z-1} \right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sin \frac{z}{z-1} = \sin 1 + \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{\sin 1}{2!(z-1)^2} - \frac{\cos 1}{3!(z-1)^3} + \dots + \\ + (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Если бесконечно удаленная точка является правильной (или устранимой особой) для функции $f(z)$, то разложение в ряд

в окрестности бесконечно удаленной точки сводится подстановкой $z = \frac{1}{\zeta}$ к разложению функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta = 0$.

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = e^{\frac{z}{z+2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Положив $z = \frac{1}{\zeta}$, получим $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = e^{\frac{1}{\zeta+2}} = e^{\frac{1}{1+2\zeta}}$, причем точка $\zeta = 0$ является для этой функции правильной точкой. Обозначив $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$, будем иметь:

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{2}{(1+2\zeta)^2} e^{\frac{1}{1+2\zeta}}, \quad \varphi''(\zeta) = e^{\frac{1}{1+2\zeta}} \left[\frac{8}{(1+2\zeta)^3} + \frac{4}{(1+2\zeta)^4} \right]$$

и т. д. Следовательно, $\varphi(0) = e$, $\varphi'(0) = -2e$, $\varphi''(0) = 12e$ и т. Отсюда

$$\varphi(\zeta) = e(1 - 2\zeta + 6\zeta^2 + \dots),$$

т. е.

$$e^{\frac{z}{z+1}} = e \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{6}{z^2} + \dots \right).$$

Ряд сходится вне единичного круга (т. е. при $|z| > 1$), так как единственной особой точкой функции является точка $z = -1$.

Задачи к главе VI

1. Определить радиусы сходимости следующих рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{2^n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$,

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, е) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{ln n} z^n$.

§ 8] НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В РЯД ЛОРАНА 131

2. Доказать, что ряд

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^n + \dots$$

сходится в своем круге сходимости неравномерно.

3. Доказать, что ряд

$$1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$$

сходится во всем круге сходимости равномерно.

4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ левую ветвь функции $\sqrt[n]{z}$. Каков радиус сходимости полученного ряда?

5. Разложить в окрестности нулевой точки в ряд Тейлора те ветви функций $\operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcsin} z$, для которых $\operatorname{Arctg} 0 = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$. Каков радиус сходимости полученных разложений?

6. Написать первые четыре члена разложения в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки функций:

а) $e^{\frac{1}{1-z}}$, б) $\sin \frac{1}{1-z}$, в) $\ln(1+e^z)$.

Каковы радиусы сходимости этих рядов?

7. Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$:

- а) в кольце $|a| < |z| < |b|$,
б) в окрестности бесконечно удаленной точки,
в) в окрестности точки a .

8. Найти несколько первых членов разложения функции $\sin \frac{1}{1-z}$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Какова область сходимости этого разложения?

9. Найти особые точки функций и определить их тип (для полюсов указать порядок):

а) $\frac{z+2}{(z-1)^2 z (z+1)}$, д) $e^{\frac{1}{z-2i}}$, и) $\frac{1-\cos z}{z^2}$,

б) $\frac{1}{(z^2+i)^2}$, е) $\cos \frac{1}{z+i}$, к) $\frac{\sin z}{z^4}$.

в) $\frac{1}{\sin z}$,

ж) $\operatorname{tg} \frac{1}{z-1}$,

г) $\operatorname{tg}^2 z$,

з) $\frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$.

10. Каков характер особенности в бесконечно удаленной точке у функций:

а) $\frac{z^2}{3+z^2}$,

г) $\sin z$,

ж) $e^{\frac{1}{z}}$,

б) $\frac{z}{5-z^4}$,

д) $2+z+z^2$,

з) $e^{\frac{1}{1-z}}$,

в) e^z ,

е) $e^{\frac{1}{z}} + z^2 - 4$,

и) $e^z + z^2 + z - 2$.

11. Является ли точка $z=0$ изолированной особой точкой для функций:

а) $\operatorname{tg} \frac{1}{z}$, б) $\sin \frac{1}{z}$.

12. Является ли бесконечно удаленная точка изолированной особой точкой функций:

а) e^z , б) $\operatorname{ctg} z$.

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§ 1. Основная теорема о вычетах

Если точка $z=a$ является правильной точкой или изолированной особой точкой однозначной функции $f(z)$, то можно выбрать простой контур C , однократно обходящий точку a в положительном направлении (например, окружность достаточно малого радиуса), так, чтобы на контуре C и всюду внутри этого контура, за исключением, быть может, самой точки a , функция $f(z)$ была аналитической. Величину

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

будем в этом случае называть *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки a и писать:

$$\operatorname{Res}[f(z); a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

Из теоремы Коши следует, что вычет данной функции относительно заданной точки не зависит от формы и размеров контура C , если этот контур удовлетворяет указанным выше требованиям.

Если точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то коэффициент c_{-1} первого члена главной части разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a (см. формулу (37) на стр. 113) равен

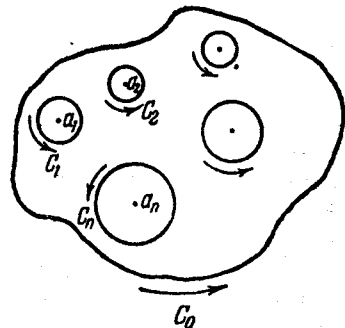
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

и, следовательно, вычет функции $f(z)$ относительно точки a

совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a :

$$\operatorname{Res}[f(z); a] = c_{-1}.$$

Если a является правильной или устранимой особой точкой функции $f(z)$, то все коэффициенты главной части разложения в окрестности этой точки равны нулю и, следовательно, вычет функции относительно правильной точки или устранимой особой точки равен нулю. Если a — полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно нее может оказаться отличным от нуля, но может быть и равным нулю (если $c_{-1} = 0$).



Черт. 31.

Пусть C_0 — простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за ис-

ключением n изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$. Окружим эти точки лежащими внутри C_0 окружностями $C_1, C_2, \dots, C_n$ (черт. 31) столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек. Тогда, в силу теоремы Коши, для сложного контура получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(z) dz, \end{aligned}$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки.

Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек этой функции, находящихся внутри контура C_0 (основная те-

рема о вычетах):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); a_k].$$

Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки естественно считать величину

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

где C — окружность с центром в начале координат столь большого радиуса, что вне этой окружности нет особых точек функции $f(z)$, отличных от бесконечно удаленной особой точки. Направление интегрирования на окружности C следует выбрать так, чтобы при обходе контура бесконечно удаленная точка оставалась слева, т. е. направление обхода надо установить по часовой стрелке. Отсюда следует, что если c_{-1} является коэффициентом при $\frac{1}{z}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname{Res}[f(z); \infty] = -c_{-1}.$$

Вычет относительно правильной (или устранимой особой) бесконечно удаленной точки функции $f(z)$ не обязательно равен нулю. Так, например, для функции

$$f(z) = 2 + \frac{3}{z}$$

точка ∞ является правильной, если считать $f(\infty) = 2$, но $c_{-1} = 3$ и, следовательно,

$$\operatorname{Res}[f(z); \infty] = -3.$$

Из сопоставления определения вычета относительно бесконечно удаленной точки с основной теоремой о вычетах следует, что если функция имеет конечное число особых точек, то вычет относительно бесконечно удаленной точки равен взятой с обратным знаком сумме вычетов относительно всех особых точек, расположенных в конечной части плоскости. Следовательно, сумма вычетов относительно всех особых точек, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю.

§ 2. Вычет относительно полюса

Если точка a является простым полюсом функции $f(z)$, то в окрестности этой точки функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a}, \quad (1)$$

где функция $\varphi(z)$, будучи суммой правильной части разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a , является аналитической и, тем более, непрерывной функцией в точке a . Из (1) имеем:

$$c_{-1} = (z-a)[f(z) - \varphi(z)]$$

и, переходя к пределу при $z \rightarrow a$, получим:

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)],$$

так как вследствие непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке a существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a)$ и

$$\lim_{z \rightarrow a} [(z-a)\varphi(z)] = 0.$$

Итак, если a простой полюс функции $f(z)$, то

$$\text{Res}[f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (2)$$

Пример 1. Вычислить вычет функции $\frac{z^3}{z-2}$ относительно точки $z=2$.

Точка $z=2$ является простым полюсом функции $\frac{z^3}{z-2}$.

Следовательно, в соответствии с (2) имеем:

$$\text{Res}\left[\frac{z^3}{z-2}; 2\right] = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \cdot \frac{z^3}{z-2}\right] = 4.$$

Пример 2. Вычислить вычет функции $\frac{1}{\sin z}$ относительно точки $z=0$.

Точка $z=0$ является простым полюсом функции $\frac{1}{\sin z}$, так как для функции $\sin z$ эта точка является простым нулем. Следовательно,

$$\text{Res}\left[\frac{1}{\sin z}; 0\right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \frac{1}{\sin z}\right) = 1.$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобен иной метод. Предположим, что точка a

является простым полюсом функции $f(z)$ и что функция $f(z)$ представлена в виде

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — функции, аналитические в точке a , причем для функции $f_2(z)$ точка a является нулем первого порядка, а $f_1(a) \neq 0$. В соответствии с (2) имеем:

$$\text{Res}[f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)}{\frac{f_2(z)}{z-a}} = \frac{f_1(a)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a}}.$$

Но так как $f_2(a) = 0$, то в соответствии с определением производной

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z) - f_2(a)}{z-a} = f_2'(a).$$

Итак,

$$\text{Res}[f(z); a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \quad (2')$$

Пример 3. Вычислить $\text{Res}[\text{ctg } z; 0]$.

Имеем $\text{ctg } z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Точка $z=0$ является нулем первого порядка для функции $\sin z$, и в соответствии с формулой (2') получим:

$$\text{Res}[\text{ctg } z; 0] = \frac{\cos 0}{\sin 0} = 1.$$

Пример 4. Вычислить

$$\int_C \frac{z dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z},$$

где C — окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Так как

$$\frac{1}{2} - \sin^2 z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z\right),$$

то внутри контура C подынтегральная функция имеет два простых полюса в точках $z_1 = \frac{\pi}{4}$ и $z_2 = -\frac{\pi}{4}$.

В соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\int_C \frac{z dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = 2\pi i \left\{ \text{Res}\left[\frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}; \frac{\pi}{4}\right] + \text{Res}\left[\frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}; -\frac{\pi}{4}\right] \right\}.$$

С помощью (2'), учитывая, что $\left(\frac{1}{2} - \sin^2 z\right)' = -\sin 2z$, находим:

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}; \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}; -\frac{\pi}{4} \right] = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\oint_C \frac{z dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = -\pi^2 i.$$

Если точка $z=a$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, то в окрестности этой точки

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad (3)$$

где функция $\varphi(z)$ является суммой правильной части разложения в ряд Лорана и, следовательно, аналитична в точке $z=a$. Умножив обе части (3) на $(z-a)^m$, получим справедливое в некоторой окрестности точки a (кроме самой точки a) равенство

$$(z-a)^m f(z) = (z-a)^m \varphi(z) + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_{-2}(z-a)^{m-2} + \dots + c_{-m}.$$

Продифференцировав обе части этого тождества $m-1$ раз, получим:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m \varphi(z)] + (m-1)! c_{-1}. \quad (4)$$

Для функции $(z-a)^m \varphi(z)$ точка $z=a$ является нулем порядка не ниже, чем m , следовательно, в точке a обращаются в нуль производные этой функции во всяком случае до порядка $m-1$ включительно (см. стр. 107). Отсюда

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m \varphi(z)] = 0$$

и, переходя в (4) к пределу при $z \rightarrow a$, получим:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}[f(z); a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \quad (5)$$

Пример 5. Определить вычет функции

$$\frac{1}{(z^2+1)^3}$$

относительно точки $z=i$.

Точка $z=i$ является полюсом третьего порядка данной функции, так как

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

В соответствии с (5) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2+1)^3}; i \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-i)^3 \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} [(z+i)^{-3}] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} [(-3)(-4)(z+i)^{-5}] = \\ &= \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16} i. \end{aligned}$$

§ 3. Логарифмические вычеты

Если точка a является полюсом порядка m функции $f(z)$, то, как было указано на стр. 122, функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична и отлична от нуля в точке a . Отсюда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\operatorname{Ln} f(z)]' = [\operatorname{Ln} \varphi(z) - m \operatorname{Ln} (z-a)]' = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{m}{z-a}.$$

Функция $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ является аналитической в точке a , и следовательно, главная часть разложения функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в ряд Лорана в окрестности точки a состоит из одного члена $-\frac{m}{z-a}$, поэтому

$$\operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = -m. \quad (6)$$

Если точка a является нулем порядка m функции $f(z)$, то эта же точка является полюсом порядка m функции $F(z) = \frac{1}{f(z)}$. Так как

$$\operatorname{Ln} f(z) = -\operatorname{Ln} F(z),$$

то

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\operatorname{Ln} f(z)]' = -[\operatorname{Ln} F(z)]' = -\frac{F'(z)}{F(z)}. \quad (7)$$

Для функции $F(z)$, как было указано выше, точка a является полюсом порядка m и, следовательно, в соответствии с (6)

$$\operatorname{Res} \left[\frac{F'(z)}{F(z)}; a \right] = -m;$$

отсюда на основании равенства (7) получим:

$$\operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = m. \quad (8)$$

Итак, вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки, являющейся нулем функции $f(z)$, равен порядку нуля, а относительно точки, являющейся полюсом функции $f(z)$, — порядку этого полюса с обратным знаком.

Предположим, что функция $f(z)$ аналитична и отлична от нуля во всех точках некоторого контура C , а внутри этого контура имеет конечное число особых точек $a_1, a_2, \dots, a_k$, причем все они являются полюсами. Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ нули функции $f(z)$, расположенные внутри контура C . При этих условиях особыми точками функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$, расположенными внутри контура C , будут только точки $a_1, a_2, \dots, a_k$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и в соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a_i \right] + \sum_{q=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right]. \quad (9)$$

Величину, стоящую в левой части этого равенства, называют *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно контура C .

С другой стороны, как указано выше (см. (8)), величина

$$\operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right]$$

равна порядку нуля функции $f(z)$ в точке α_q , в частности, если нуль простой, то $\operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right] = 1$.

Если каждый нуль считать столько раз, каков его порядок, то сумма

$$N = \sum_{q=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right]$$

будет равна числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C . Аналогично, если ввести обозначения

$$P = - \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a_i \right]$$

и условиться каждый полюс функции $f(z)$ считать столько раз, каков его порядок, то из формулы (6) следует, что P равно числу полюсов функции $f(z)$ внутри контура C . Записав равенство (9) с помощью введенных обозначений в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (10)$$

приходим к следующей теореме о логарифмическом вычете: при указанных выше условиях *логарифмический вычет функции относительно замкнутого контура равен разности между количеством нулей и количеством полюсов функции, расположенных внутри данного контура*.

В частности, если внутри контура C функция $f(z)$ не имеет особых точек, то $P = 0$ и логарифмический вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

равен числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C .

Если точка z пробегает дугу C с начальной точкой z_0 и конечной точкой z_1 , то соответствующая ей точка $w = f(z)$ пробегает некоторую дугу Γ плоскости w с начальной точкой $w_0 = f(z_0)$ и конечной точкой $w_1 = f(z_1)$.

Если аналитическая функция $f(z)$ не обращается в нуль вдоль дуги C , то в соответствии с правилом вычисления

интеграла от аналитической функции (см. стр. 71) получим:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ln} f(z_1) - \operatorname{Ln} f(z_0) = \operatorname{Ln} w_1 - \operatorname{Ln} w_0, \quad (11)$$

причем берется любая, аналитическая вдоль Γ ветвь логарифма. Если C — замкнутый контур ($z_1 = z_0$), то Γ также является замкнутым контуром ($w_1 = w_0$), пробегаемым точкой w один или несколько раз. Однако равенство нулю правой части (11) следует из того, что $w_1 = w_0$ только в том случае, когда вдоль Γ можно определить однозначную ветвь функции $\operatorname{Ln} w$, а это (см. стр. 73 — 74, а также подробнее дальше на стр. 192) возможно лишь тогда, когда внутри области, ограниченной контуром Γ , не содержится точка $w = 0$. Если же контур Γ обходит точку $w = 0$, то, как было показано на стр. 74, к мнимой части логарифма прибавляется приращение, полученное аргументом w (2π при обходе против часовой стрелки и -2π при обходе по часовой стрелке). Поэтому, если контур Γ k раз обходит точку $w = 0$, то из (11) получаем:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \pm 2k\pi i$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \pm k. \quad (12)$$

Если обозначить через $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ приращение, получаемое аргументом функции $f(z)$ при обходе точкой z контура C , то равенству (12) можно придать вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Сравнивая (12) с (10), приходим к следующей формулировке теоремы о логарифмическом вычете: *разность между числом нулей и числом полюсов, функции $f(z)$ внутри контура C равна числу оборотов, которые совершает в плоскости w вектор, идущий из точки $w = 0$ в точку $w = f(z)$, когда точка z описывает контур C (число оборотов считается при этом положительным, если вектор вращается против часовой стрелки, и отрицательным в противном*

ложном случае). В такой форме теорема о логарифмическом вычете носит название *принципа аргумента*.

В качестве приложения изложенной выше теории докажем следующую теорему (теорема Руше): *если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны на простом замкнутом контуре C и в области, им ограниченной, функция $\varphi(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке контура C и во всех точках контура справедливо неравенство $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$, то в области, ограниченной контуром C , функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ имеют одинаковое число нулей.*

Так как функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ являются, по условию, аналитическими в области, ограниченной контуром C , и, следовательно, не имеют полюсов в этой области, то для доказательства теоремы Руше достаточно в соответствии с принципом аргумента доказать, что

$$\Delta_C \operatorname{Arg} [\varphi(z) + \psi(z)] = \Delta_C \operatorname{Arg} \varphi(z). \quad (13)$$

Из тождества

$$\varphi(z) + \psi(z) = \varphi(z) \left[1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right]$$

следует, что

$$\Delta_C \operatorname{Arg} [\varphi(z) + \psi(z)] = \Delta_C \operatorname{Arg} \varphi(z) + \Delta_C \operatorname{Arg} \left[1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right]. \quad (14)$$

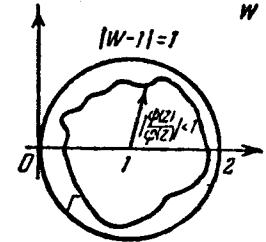
Когда точка z движется по контуру C , соответствующая ей точка $w = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, перемещается по некоторому контуру Γ , причем в силу условий теоремы

$$|w - 1| = \left| \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right| < 1.$$

Это означает, что контур Γ находится внутри круга радиуса 1 с центром в точке 1 (черт. 32), поэтому контур Γ не обходит точку $w = 0$, а следовательно,

$$\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w = \Delta_C \operatorname{Arg} \left[1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right] = 0. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), убеждаемся в справедливости равенства (13), что и доказывает теорему Руше.



Черт. 32.

Пример. Найти число корней уравнения

$$z^5 - 5z^3 - 2 = 0,$$

лежащих в единичном круге $|z| < 1$.

Функция $-5z^3$ не обращается в нуль на окружности $|z| = 1$, и во всех точках этой окружности справедливо неравенство

$$|z^5 - 2| < |-5z^3|,$$

так как в каждой точке окружности имеем $|z| = 1$ и, следовательно, $|-5z^3| = 5$, в то время как $|z^5 - 2| < |z^5| + 2 = 3$. Следовательно, внутри единичного круга в соответствии с теоремой Руше функция $z^5 - 5z^3 - 2$ имеет столько же нулей, сколько их имеет функция $-5z^3$, а так как функция $-5z^3$ имеет внутри единичного круга три нуля (один трехкратный нуль в начале координат), то три нуля имеет внутри единичного круга и функция $z^5 - 5z^3 - 2$.

§ 4. Вычисление определенных интегралов с помощью теории вычетов

Основная теорема о вычетах позволяет при указанных выше (см. стр. 134) условиях свести вычисление интеграла по замкнутому контуру к вычислению вычетов подынтегральной функции относительно особых точек, расположенных внутри данного контура. Иногда этим же методом удается вычислить интегралы, у которых путь интегрирования не замкнут, и в частности некоторые определенные интегралы функций действительного переменного. При этом предварительно эти интегралы преобразуют в интегралы по замкнутому контуру, к которым уже применима теорема о вычетах.

Вычислим, например, интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t},$$

где действительное число $a > 1$.

Положим $z = e^{it}$. При изменении t от 0 до 2π точка z описывает в положительном направлении окружность C единичного радиуса. Так как

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

и $it = \operatorname{Ln} z$, откуда $dt = \frac{dz}{iz}$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} &= \int_C \frac{\frac{1}{iz} dz}{a + \frac{z^2 + 1}{2z}} = \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 2az + 1}; b_k \right], \end{aligned}$$

где b_k — особые точки подынтегральной функции, расположенные внутри контура C . В данном случае особыми точками подынтегральной функции

$$\frac{1}{z^2 + 2az + 1}$$

являются простые полюсы в точках $z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, из которых, в силу условия $a > 1$, только точка $-a + \sqrt{a^2 - 1}$ лежит внутри единичной окружности C . Следовательно, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} &= 4\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 2az + 1}; -a + \sqrt{a^2 - 1} \right] = \\ &= 4\pi \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{z^2 + 2az + 1} = \\ &= 4\pi \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{[z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})][z - (-a - \sqrt{a^2 - 1})]} = \\ &= \frac{4\pi}{-a + \sqrt{a^2 - 1} - (-a - \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

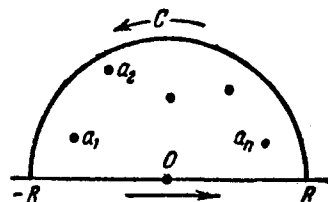
С помощью вычетов вычисляют также некоторые несобственные определенные интегралы.

Предположим, что бесконечно удаленная точка является нулем второго или более высокого порядка функции $f(z)$ и, следовательно, разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots \quad (16)$$

(случай $c_{-2} = 0$ не исключается). Допустим также, что $f(z)$ является аналитической функцией на действительной оси, а в

верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда все лежащие в верхней полуплоскости особые точки функции $f(z)$ можно заключить внутрь расположенного в верхней полуплоскости полукруга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. В соответствии с основной теоремой о вычетах интеграл



Черт. 33.

$$\int_L f(z) dz,$$

взятый по границе L этого полукруга, будет равен числу $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно

всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости, причем при дальнейшем увеличении R этот интеграл изменяться не будет, так как никакие новые особые точки при этом внутрь полукруга не попадут.

Пусть C — полуокружность, входящая в состав границы L указанного полукруга (черт. 33); тогда

$$\int_L f(z) dz = \int_C f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx.$$

На основании (16) имеем:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = c_{-2} + \frac{c_{-1}}{z} + \dots$$

Для функции $\varphi(z)$ бесконечно удаленная точка является правильной (вернее, устранимой особой точкой), причем $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c_{-2}$; следовательно, функция $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, и в частности на полуокружности C , если ее радиус R достаточно велик, т. е. во всех точках полуокружности C

$$|\varphi(z)| \leq M,$$

где M — некоторое положительное число. Следовательно,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_C \frac{\varphi(z) dz}{z^2} \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{M\pi}{R}.$$

и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0.$$

А так как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

то тем самым доказано, что если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

равен произведению числа $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Функция $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ имеет в бесконечности нуль четвертого порядка; особыми точками функции являются полюсы второго порядка в точках $z = \pm i$, из них только первый находится в верхней полуплоскости. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 1)^2}; i \right] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - i)^2}{(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z + i)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 1)^2}; i \right] = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}i \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

иногда может быть вычислен с помощью теории вычетов и в том случае, когда бесконечно удаленная точка не является нулем второго или более высокого порядка функции $f(x)$.

Докажем следующее предложение, называемое *леммой Жордана*:

Если:

1) $f(z) = e^{imz} F(z)$, причем $m > 0$ и $F(z) \rightarrow 0$, когда $z \rightarrow \infty$ по любому закону, оставаясь, однако, в верхней полуплоскости или на действительной оси, т. е. так, что $\operatorname{Im} z \geq 0$;

2) на действительной оси функция $f(z)$ аналитична, а в верхней полуплоскости имеет не более конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$,
то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); a_k]. \quad (17)$$

Для доказательства построим в верхней полуплоскости полукруг (см. черт. 33) с центром в точке $z=0$, выбрав его радиус R столь большим, чтобы все особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались лежащими внутри этого полукруга. Пусть C — дуга полуокружности, входящей в состав границы этого полукруга, с направлением обхода против часовой стрелки. Тогда, в силу основной теоремы о вычетах,

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); a_k],$$

причем при дальнейшем увеличении R правая часть этого равенства не изменяется, а предел первого члена левой части при $R \rightarrow \infty$ равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Следовательно, равенство (17) будет доказано, если мы обна-

ружим, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0.$$

На полуокружности C $z = Re^{i\varphi} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и в соответствии с правилом вычисления интеграла по комплексному переменному

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C e^{imz} F(z) dz = i \int_0^\pi e^{imR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} F(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} d\varphi = \\ &= iR \int_0^\pi e^{imR \cos \varphi} e^{-mR \sin \varphi} F(Re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим $M(R)$ максимальное значение модуля функции $F(z)$ на полуокружности C , т. е. максимальное значение $|F(Re^{i\varphi})|$ при изменении φ от 0 до π . В силу условий леммы $M(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Так как $|i| = 1$, $|e^{i\varphi}| = 1$ и $|e^{imR \cos \varphi}| = 1$, то, применяя к (18) обычную оценку для модуля интеграла, получим:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq RM(R) \int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} d\varphi. \quad (19)$$

Так как график функции $\sin x$, а, следовательно, и функции $e^{-mR \sin x}$ симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то

$$\int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi. \quad (20)$$

Пусть δ — любое положительное число, меньшее чем $\frac{\pi}{2}$; тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi = \int_0^\delta e^{-mR \sin \varphi} d\varphi + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi. \quad (21)$$

С помощью (20) и (21) неравенство (19) преобразуется к виду

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 2RM(R) \left[\int_0^\delta e^{-mR \sin \varphi} d\varphi + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi \right]. \quad (22)$$

Если $\delta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin \varphi \geq \sin \delta$ и $e^{-mR \sin \varphi} \leq e^{-mR \sin \delta}$, следовательно,

$$\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi \leq e^{-mR \sin \delta} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = ce^{-mR \sin \delta}, \quad (23)$$

где $c = \frac{\pi}{2} - \delta$. Если $0 \leq \varphi \leq \delta$, то $\cos \varphi \geq \cos \delta$ и $\frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \geq 1$.

Следовательно,

$$\int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi \leq \int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} d\varphi. \quad (24)$$

Интеграл в правой части (24) легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} d\varphi &= - \left. \frac{e^{-mR \sin \varphi}}{mR \cos \delta} \right|_0^{\delta} = \\ &= \frac{1 - e^{-mR \sin \delta}}{mR \cos \delta} < \frac{1}{mR \cos \delta}, \end{aligned}$$

и из неравенства (24) следует

$$\int_0^{\delta} e^{-mR \sin \varphi} d\varphi < \frac{1}{mR \cos \delta}. \quad (25)$$

Оценив интегралы, стоящие в правой части (22) с помощью (23) и (25), получим:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < 2RM(R) \left(ce^{-mR \sin \delta} + \frac{1}{mR \cos \delta} \right)$$

или

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < \frac{2M(R)}{m \cos \delta} + \frac{2cR}{e^{mR \sin \delta}} \cdot M(R). \quad (26)$$

Пользуясь правилом Лопиталя¹⁾, легко убедиться в том, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{e^{mR \sin \delta}} = 0,$$

¹⁾ См. [1], п. 73.

а так как по условию $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$, то из неравенства (26) следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0,$$

и лемма Жордана доказана.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

Функция

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10},$$

как нетрудно проверить, удовлетворяет условиям леммы Жордана.

Здесь $m=1$ и $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$.

Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы первого порядка $z=1+3i$ и $z=1-3i$ (эти точки являются нулями первого порядка для функции $z^2 - 2z + 10$). В верхней полуплоскости имеется единственная особая точка $z=1+3i$. Вычислим вычет функции $f(z)$ относительно точки $1+3i$:

$$\text{Res}[f(z); 1+3i] = \frac{ze^{iz}}{(z^2 - 2z + 10)'} \Big|_{z=1+3i} = \frac{(1+3i)e^{-3+3i}}{6i}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx &= 2\pi i \frac{(1+3i)e^{-3+3i}}{6i} = \\ &= \frac{\pi}{3} e^{-3} (1+3i)(\cos 1 + i \sin 1) = \\ &= \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1) + \frac{\pi}{3} e^{-3} (3 \cos 1 + \sin 1) i. \end{aligned}$$

Сравнивая в обеих частях этого равенства действительные и мнимые части и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx,$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3} e^{-1} (\cos 1 - 3 \sin 1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3} e^{-1} (3 \cos 1 + \sin 1).$$

При доказательстве леммы Жордана предполагалось, что на действительной оси нет особых точек функции $f(z)$. Если бы это предположение не было сделано, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (27)$$

мог бы и не существовать. Однако если на действительной оси расположено конечное число полюсов первого порядка функции $f(z)$, то интеграл (27) в смысле главного значения существует и может быть вычислен с помощью теории вычетов.

Предположим, что единственными особыми точками функции $f(z)$ на действительной оси являются простые полюсы $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_m$), а в остальном выполнены условия леммы Жордана, причем $a_1, a_2, \dots, a_n$ по-прежнему являются особыми точками функции $f(z)$, расположенными в верхней полуплоскости.

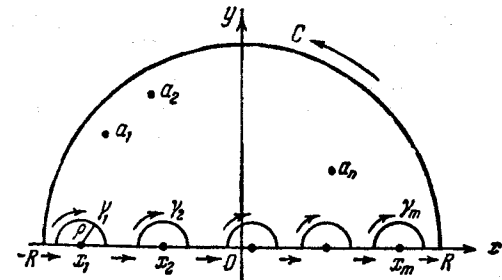
Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

будем понимать в смысле главного значения, т. е. будем считать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{x_1-\rho} f(x) dx + \int_{x_1+\rho}^{x_2-\rho} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}+\rho}^{x_m-\rho} f(x) dx + \int_{x_m+\rho}^R f(x) dx \right] \right\}. \quad (27')$$

Выберем число R столь большим, чтобы все особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, а также точки $x_1, x_2, \dots, x_m$ оказались внутри круга радиуса R с центром в $z=0$, и рассмотрим замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности C этого круга, отрезков действительной оси $[-R, x_1-\rho]$, $[x_1+\rho, x_2-\rho]$, $\dots$,



Черт. 34.

$[x_{m-1}+\rho, x_m-\rho]$, $[x_m+\rho, R]$ и верхних полуокружностей радиуса ρ с центрами в точках $x_1, x_2, \dots, x_m$ (черт. 34). Дуги этих полуокружностей, обходимые по часовой стрелке, обозначим, соответственно, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$.

Применив к этому замкнутому контуру основную теорему о вычетах, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{x_1-\rho} f(x) dx + \int_{x_1+\rho}^{x_2-\rho} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}+\rho}^{x_m-\rho} f(x) dx + \\ + \int_{x_m+\rho}^R f(x) dx + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \\ + \int_{\gamma_m} f(z) dz + \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z); a_k]. \quad (28) \end{aligned}$$

Как было доказано в лемме Жордана, условия которой выполнены на контуре C .

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0. \quad (29)$$

Переходя в равенстве (28) к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$,

учитывая (28) и (29), а также то обстоятельство, что правая часть постоянна, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); a_k] - \sum_{k=1}^m \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (30)$$

Если обозначить $\operatorname{Res}[f(z); x_k] = \alpha_k$, то в соответствии с правилом вычисления вычета относительно простого полюса

$$\lim_{z \rightarrow x_k} [(z - x_k) f(z)] = \alpha_k$$

и, следовательно, при достаточно малом ρ для любой точки z на γ_k будет справедливо неравенство

$$|(z - x_k) f(z) - \alpha_k| < \varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было.

Докажем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_k} f(z) dz = \alpha_k \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k}. \quad (31)$$

Для этого оценим модуль разности

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - \alpha_k \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} \right|.$$

Так как $|z - x_k| = \rho$ для любой точки z на γ_k , а длина дуги γ_k равна $\pi\rho$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - \alpha_k \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} \right| &= \left| \int_{\gamma_k} (z - x_k) f(z) \frac{1}{z - x_k} dz - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_k \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} \right| = \left| \int_{\gamma_k} [(z - x_k) f(z) - \alpha_k] \frac{dz}{z - x_k} \right| < \\ &< \varepsilon \frac{1}{\rho} \pi\rho = \pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε сколь угодно мало, то равенство (31) доказано.

С другой стороны, на γ_k $z - x_k = \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ и, следовательно,

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} = i \int_{\pi}^0 d\varphi = -\pi i.$$

Из равенства (31) получим:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_k} f(z) dz = -\pi \alpha_k i.$$

и на основании (30)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); a_k] + \pi i \sum_{k=1}^m \alpha_k$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z); a_k] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}[f(z); x_k] \right\}. \quad (32)$$

Напомним, что здесь a_k — особые точки функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости, а x_k — полюсы первого порядка функции $f(z)$ на действительной оси.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Применим формулу (32) к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

Если не считать точки $z = \infty$, то единственной особой точкой функции $\frac{e^{iz}}{z}$ является простой полюс, расположенный на действительной оси в точке $z = 0$, поэтому на основании (32) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right].$$

Но

$$\operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \frac{e^{iz}}{z} \right) = 1,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i.$$

Сравнивая в этом равенстве мнимые части, находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

откуда, ввиду четности функции $\frac{\sin x}{x}$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Задачи к главе VII

1. Найти вычеты следующих функций относительно каждого из полюсов:

а) $\frac{z^2+1}{z-2},$

е) $\frac{1}{z^2-z^3},$

б) $\frac{\cos z}{z-i},$

ж) $\operatorname{tg} z,$

в) $\frac{1}{(z^2+1)^3},$

з) $\operatorname{ctg}^2 z,$

г) $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n} \quad (n > 0 \text{ и целое}),$

и) $\operatorname{ctg}^3 z.$

д) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2},$

2. Найти вычеты относительно точки $z=0$ функций:

а) $e^{\frac{1}{z}},$

б) $\cos \frac{1}{z},$

в) $\sin \frac{1}{z}.$

3. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1},$$

если C — окружность $x^2+y^2=2x$, проходимая однократно в положительном направлении.

4. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}.$$

если C — окружность $x^2+y^2=2x+2y$, проходимая однократно в положительном направлении.

5. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$$

($n > 0$ и целое), если C — однократно проходимая в положительном направлении окружность $|z|=1$, в следующих случаях:

а) $|a| < |b| < 1,$

б) $|a| < 1 < |b|,$

в) $1 < |a| < |b|.$

6. Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx,$

е) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^3+9},$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2},$

ж) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^3+4x+20},$

в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2},$

з) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx,$

г) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},$

и) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)}.$

д) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+\cos \varphi)^2} \quad (a > 1),$

7. Найти число корней, находящихся внутри единичного круга $|z| < 1$ для каждого из следующих уравнений (каждый корень следует считать столько раз, какова его кратность):

а) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0,$

б) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0,$

в) $z^3 - 2z^2 + z^2 - 8z - 2 = 0.$

конечное множество, и для того чтобы обеспечить единственность отображающей функции $w=f(z)$, достаточно в любой точке z_0 области G_1 задать значения:

$$\left. \begin{aligned} f(z_0) &= w_0, \\ \arg f'(z_0) &= \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Геометрически это означает, что единственность отображения будет обеспечена, если для некоторой точки z_0 области G_1 будет указан ее образ w_0 в области G_2 и задан угол, на который при этом отображении поворачивается бесконечно малая окрестность точки z_0 .

Для того чтобы найти функцию, отображающую односвязную область G_1 на односвязную область G_2 , достаточно уметь отобразить каждую из этих областей на какую-нибудь область стандартного вида, например на единичный круг $|z| < 1$. Если одна какая-либо функция, отображающая взаимно-однозначно и конформно некоторую область G на единичный круг найдена, то все остальные функции найдутся с помощью отображения этого круга на самого себя. На стр. 174 будет найдена зависящая от нескольких произвольных параметров функция, отображающая единичный круг сам на себя. С помощью условий типа (1) можно будет однозначно определить значения этих параметров и, следовательно, зная какую-нибудь одну функцию, отображающую область G на единичный круг, можно найти функцию, осуществляющую это же отображение и, кроме того, удовлетворяющую заданным условиям.

б) *Принцип взаимно-однозначного соответствия* (см. [9], гл. XII, § 2). Пусть область G ограничена гладким или кусочно-гладким контуром Γ , и предположим, что функция $w=f(z)$, аналитическая в G и на Γ , отображает контур Γ взаимно-однозначно на некоторый контур Γ' , ограничивающий область G' , причем, когда точка z обходит контур Γ так, что область G остается слева, соответствующая точка w обходит контур Γ' так, что область G' также остается слева. В этом случае, как утверждает принцип взаимно-однозначного соответствия, область G отобразится с помощью функции $f(z)$ взаимно-однозначно и конформно на область G' .

Следовательно, в тех случаях, когда этот принцип применим, для отыскания области, на которую функция $w=f(z)$ отображает заданную область G , достаточно обойти границу области G и найти контур, на который эта граница отобра-

ГЛАВА VIII

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

§ 1. Некоторые общие теоремы

В главе IV было доказано, что отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным во всякой точке, в которой производная этой функции отлична от нуля. Справедливо и обратное утверждение: если функция $w=f(z)$ отображает конформно и взаимно-однозначно область G_1 на область G_2 , то она является функцией однозначной и аналитической в области G_1 , а обратная ей функция $z=\varphi(w)$ однозначной и аналитической в области G_2 . Приведем без доказательства некоторые теоремы теории конформных отображений.

а) *Теорема Римана* о возможности конформного и взаимно-однозначного отображения одной односвязной области на другую (см. [9], гл. XII, § 6).

Теорема Римана не дает способа для отыскания аналитической функции $w=f(z)$, отображающей взаимно-однозначно и конформно одну односвязную плоскую область G_1 на другую G_2 , но утверждает, что такая функция существует всегда, если только ни одна из областей G_1 , G_2 не принадлежит к числу двух исключительных. Одним из таких исключений является вся расширенная (т. е. включающая бесконечно удаленную точку) плоскость, другим — вся плоскость с одной выключенной точкой (например, вся плоскость с выключенной бесконечно удаленной точкой, т. е. вся конечная часть плоскости).

Можно, далее, доказать, что аналитических функций, осуществляющих взаимно-однозначное и конформное отображение односвязной области G_1 на односвязную область G_2 (если, конечно, ни одна из них не является исключительной), бес-

жается функцией $f(z)$. В дальнейшем принцип взаимно-однозначного соответствия будет неоднократно использован.

Перейдем теперь к изучению отображений, осуществляемых некоторыми простейшими функциями.

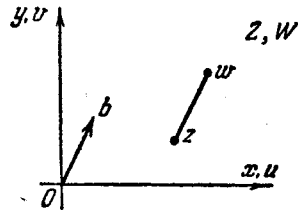
§ 2. Линейная функция

Отображение, осуществляемое линейной функцией

$$w = az + b,$$

где a и b — комплексные постоянные, $a \neq 0$, является конформным во всей плоскости, так как производная этой функции во всех точках плоскости существует и отлична от нуля.

Рассмотрим некоторые частные случаи линейных преобразований, причем для большей наглядности будем считать плоскость w совмещенной с плоскостью z :



Черт. 35.

$$1^\circ. w = z + b. \quad (2)$$

Так как сложение комплексных чисел сводится к сложению векторов, то при отображении (2) всякая точка z смещается в соответствующую точку w с помощью вектора сдвига, изображающего данное комплексное число b (черт. 35). Ввиду того, что b постоянно, вектор сдвига одинаков для всех точек, и мы имеем преобразование параллельного переноса;

$$2^\circ. w = e^{i\alpha} z,$$

где α — действительное число; $e^{i\alpha}$ — общий вид комплексного числа с модулем, равным единице. В соответствии с правилом умножения комплексных чисел (стр. 13) переход от точки z к точке w осуществляется с помощью поворота точки z на угол α около начала координат. Величина α постоянна, следовательно, рассматриваемое преобразование является преобразованием поворота вокруг начала координат (черт. 36);

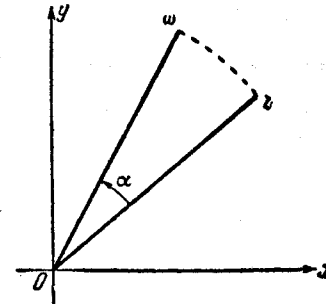
$$3^\circ. w = rz$$

(r — действительное положительное число).

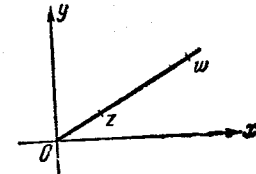
Так как $\arg r = 0$, то в соответствии с правилом умножения комплексных чисел

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z, \quad |w| = r|z|.$$

Первое из этих равенств показывает, что точка z и соответствующая ей точка w находятся на одном и том же луче (черт. 37), выходящем из начала координат, а из второго равенства следует, что отношение расстояния точки w от начала координат к расстоянию соответствующей точки z от начала координат постоянно и равно r . Следовательно, рассматриваемое преобразование



Черт. 36.



Черт. 37.

является преобразованием подобия с центром подобия в начале координат; r — коэффициент подобия.

Общий случай линейного преобразования

$$w = az + b$$

сводится к рассмотренным выше простейшим преобразованиям. Действительно, если r и α — модуль и аргумент числа a ($a = re^{i\alpha}$), то

$$w = re^{i\alpha} z + b$$

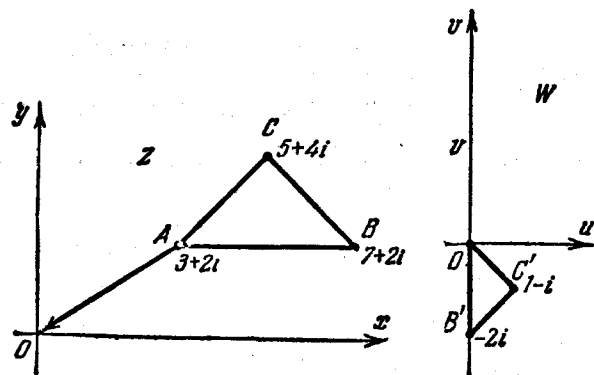
и переход от точки z к точке w осуществляется путем последовательного применения следующих операций: 1) поворота около начала координат на угол α , 2) преобразования подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным r , и 3) параллельного переноса с помощью вектора сдвига, соответствующего комплексному числу b .

Пример. Найти функцию, отображающую равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках A, B, C , соответствующих числам $3 + 2i, 7 + 2i, 5 + 4i$, лежащий в плоскости z , на равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках O, B', C' плоскости w , соответствующих числам $0, -2i, 1 - i$ (черт. 38).

Так как треугольники ABC и $OA'B'$ подобны, то отображение может быть осуществлено с помощью линейной функции.

Отображение можно разложить на следующие операции:

1) Параллельный сдвиг, смещающий точку A в начало координат



Черт. 38.

Этот сдвиг производится вектором $\overrightarrow{AO}$, соответствующим числу $-(3+2i)$, и, следовательно, осуществляется функцией

$$t = z - (3+2i).$$

2) поворот около начала координат на угол $-\frac{\pi}{2}$, соответствующий преобразованию

$$T = te^{-i\frac{\pi}{2}}$$

или

$$T = -it.$$

3) Преобразование подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{2}$. Это преобразование осуществляется функцией

$$w = \frac{1}{2} T.$$

Таким образом, окончательно

$$w = -\frac{1}{2} i [z - (3+2i)]$$

или

$$w = -\frac{iz}{2} + \frac{3}{2}i - 1.$$

§ 3. Функция $w = \frac{1}{z}$

Точки A и B называются *взаимно-симметричными* относительно окружности, если (черт. 39):

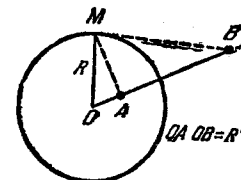
1) они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности;

2) произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса окружности:

$$OA \cdot OB = R^2,$$

или

$$OB = \frac{R^2}{OA}. \quad (3)$$



Черт. 39.

Отсюда, в частности, следует, что если точка A приближается к окружности, то точка B также приближается к окружности, и всякая точка, лежащая на окружности, симметрична самой себе относительно этой окружности. Из (3) следует также, что точкой, симметричной центру окружности, является бесконечно удаленная точка.

Если центр O окружности совпадает с началом координат и одна из двух взаимно-симметричных относительно окружности точек изображает комплексное число z , то другая соответствует числу $\frac{R^2}{\bar{z}}$. Действительно, модули чисел z и $\frac{R^2}{\bar{z}}$ удовлетворяют условию (3), так как

$$\left| \frac{R^2}{\bar{z}} \right| = \frac{R^2}{|z|},$$

и, кроме того, числа z и $\frac{R^2}{\bar{z}}$ изображаются точками, лежащими на одном луче, выходящем из начала координат, так как

$$\operatorname{Arg} \frac{R^2}{\bar{z}} = -\operatorname{Arg} \bar{z} = \operatorname{Arg} z.$$

В частности, точки z и $\frac{1}{\bar{z}}$ взаимно-симметричны относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

¹⁾ Построение пары взаимно-симметричных точек показано на черт. 39: MA — перпендикуляр к OB , MB — касательная к окружности.

нат («единичной окружности»), а так как точки $\frac{1}{z}$ и $\frac{1}{\bar{z}}$ взаимно-симметричны относительно действительной оси, то преобразование

$$w = \frac{1}{z}$$

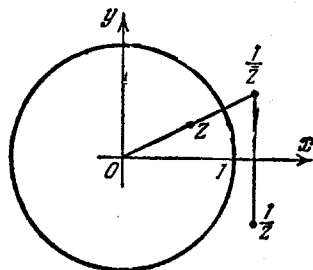
состоит из двух симметричных отражений: относительно единичной окружности и относительно действительной оси (черт. 40).

Производная

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

функции $\frac{1}{z}$ существует и отлична от нуля во всех точках плоскости, кроме точки $z=0$ (соответствующей точке $w=\infty$) и точки $z=\infty$ (соответствующей точке

$w=0$). Поэтому отображение, осуществляемое функцией $w = \frac{1}{z}$ ($z = \frac{1}{w}$), является конформным во всей плоскости, если условиться считать, что угол между линиями в бесконечно удаленной точке равен углу между отображениями этих линий с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ в начале координат.



Черт. 40.

§ 4. Дробно-линейная функция

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4)$$

где a, b, c, d — комплексные постоянные и $ad - bc \neq 0$ ¹⁾, осуществляет взаимно-однозначное отображение всей расширенной плоскости z на всю расширенную плоскость w . Действительно, разрешив (4) относительно z , получим:

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

¹⁾ Если $ad - bc = 0$, то $a:c = b:d$ и $w = k$, где k — постоянная.

и следовательно, не только всякому z соответствует единственное значение w , но и каждому w соответствует единственное значение z . При этом мы считаем бесконечно удаленную точку равноправной точкой плоскости. Точке $z = -\frac{d}{c}$ соответст-

вует точка $w = \infty$, а точке $w = \frac{a}{c}$ точка $z = \infty$.

Нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что дробно-линейная функция от дробно-линейной функции является также дробно-линейной функцией, т. е. если

$$t = \frac{az + b}{cz + d}$$

и

$$w = \frac{a_1 t + b_1}{c_1 t + d_1},$$

то зависимость между w и z также дробно-линейная:

$$w = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Произвольное дробно-линейное преобразование (4) может быть получено с помощью последовательного применения линейных преобразований и преобразования $w = \frac{1}{z}$. Действительно, преобразование (4) легко приводится к виду

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} = \\ &= \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}. \end{aligned}$$

Следовательно, к преобразованию (4) можно прийти путем последовательных преобразований:

$$\begin{aligned} t &= cz + d, \\ T &= \frac{1}{t}, \\ w &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} T. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если какое-нибудь свойство справедливо при линейном преобразовании и при образовании $w = \frac{1}{z}$, то оно справедливо и при дробно-линейном преобразовании (4).

Например, можно утверждать, что отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, конформно во всей плоскости, так как этим свойством обладают отображения, осуществляемые линейной функцией и функцией $w = \frac{1}{z}$.

Дробно-линейное преобразование обладает *круговым свойством*, состоящим в том, что с помощью этого преобразования окружность всегда отображается также на окружность, если прямую считать частным случаем окружности — окружностью бесконечного радиуса.

Для доказательства этого свойства достаточно проверить, выполнено ли круговое свойство при преобразовании $w = \frac{1}{z}$, так как для всех простейших преобразований, из которых состоит линейное преобразование (стр. 165), круговое свойство очевидно.

Считая $z = x + iy$, $w = u + iv$, перепишем равенство $w = \frac{1}{z}$ в виде

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}$$

или

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{u}{u^2 + v^2}, \\ y &= -\frac{v}{u^2 + v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнение произвольной окружности в плоскости z имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (6)$$

(при $A = 0$ имеем прямую — окружность бесконечного радиуса). Подставив в (6) x и y из (5), получим уравнение отображенной линии

$$\frac{A}{u^2 + v^2} + \frac{Bu}{u^2 + v^2} - \frac{cv}{u^2 + v^2} + D = 0$$

или

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0,$$

являющееся также уравнением окружности (при $D = 0$ получим уравнение прямой), и круговое свойство доказано.

Всякая окружность делит всю плоскость на две области: внутренность круга и внешность круга, если радиус окружности конечен, и две полуплоскости, если радиус окружности бесконечен. При отображении с помощью дробно-линейной функции каждая из двух областей, ограниченных окружностью в плоскости z , отображается на одну из двух областей, ограниченных соответствующей окружностью в плоскости w . Так, например, из сказанного выше относительно отображения, осуществляемого функцией $w = \frac{1}{z}$ (стр. 163), следует, что с помощью этой функции единичная окружность $|z| = 1$ отображается сама на себя (т. е. на такую же окружность плоскости w), причем внутренность единичного круга плоскости z отображается на внешность единичного круга плоскости w , а внешность единичного круга плоскости z — на внутренность единичного круга плоскости w . Вообще же, для того чтобы определить, на какую область плоскости w отображается каждая из двух областей, ограниченных окружностью в плоскости z , следует, учитывая, что при конформном отображении углы сохраняются не только по величине, но и по направлению, проследить за тем, в каком направлении движется точка w , когда соответствующая ей точка z непрерывно перемещается по окружности. При этом та из областей, ограниченных окружностью в плоскости z , которая находится, например, влево от движущейся по окружности точки, перейдет в область плоскости w , расположенную также влево, если смотреть в сторону движения точки w .

Если a, b, c, d — действительные числа, то дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

принимает при действительных значениях z действительные значения w , следовательно, действительная ось плоскости z отображается на действительную ось плоскости w . При этом, так как действительная ось делит плоскость на две полуплоскости («верхнюю» и «нижнюю»), то верхняя полуплоскость плоскости z отображается или сама на себя (т. е. на верхнюю полуплоскость плоскости w), или на нижнюю полуплоскость, в зависимости от того, в каком направлении при заданных

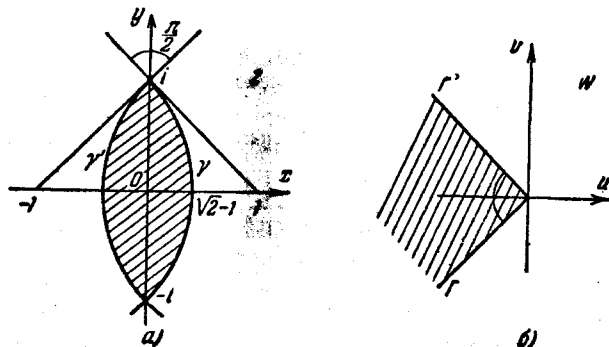
a, b, c, d движется по действительной оси точка w , если соответствующая точка z перемещается по действительной оси, например, слева направо.

Область, ограниченная дугами двух окружностей, в силу кругового свойства дробно-линейной функции, отображается этой функцией или на область такого же вида, или на область, ограниченную дугой окружности и прямолинейным отрезком (внутренность или внешность кругового сегмента), или на угол между двумя лучами. Для выяснения того, какой из указанных случаев осуществляется в некотором конкретном примере, следует иметь в виду, что если на данной окружности (или прямой) расположена точка, отображающаяся в бесконечно удаленную точку плоскости w , то эта окружность (или прямая) отображается в прямую, в противном случае она отобразится в окружность конечного радиуса. Поэтому, если, например, общая точка двух окружностей отображается в бесконечно удаленную точку, то область, ограниченная дугами этих окружностей, должна отобразиться в угол.

Пример 1. Найти область плоскости w , на которую отображается с помощью функции

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

заштрихованная на черт. 41, а область плоскости z , ограниченная дугами окружностей радиуса $\sqrt{2}$ с центрами в точках -1 и 1 .



Черт. 41.

Окружности пересекаются в точках i и $-i$ под прямым углом, так как радиусы, идущие в точку пересечения окружностей, взаимно-перпендикулярны. Так как $w = \infty$ при $z = -i$, то одна

из общих точек окружностей отображается в бесконечно удаленную точку плоскости w . Следовательно, заштрихованная область отображается на угол.

Другая общая точка отображается в начало координат ($w = 0$ при $z = i$), и таким образом, вершина угла, на который отображается данная область, находится в начале координат. Величина угла равна $\frac{\pi}{2}$, так как отображение конформно, а для того чтобы определить положение угла, достаточно найти хотя бы одну точку на какой-нибудь из его сторон. Точка $z = \sqrt{2} - 1$, как это видно из чертежа, находится на дуге γ . При $z = \sqrt{2} - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i} = \frac{(\sqrt{2}-1-i)^2}{(\sqrt{2}-1)^2+1} = \frac{2(1-\sqrt{2})+2(1-\sqrt{2})i}{4-2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i}{2-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Эта точка, как нетрудно видеть, расположена в третьей четверти на биссектрисе координатного угла (ее координаты одинаковы и отрицательны). Следовательно, дуга γ отображается в луч Γ , идущий из начала координат по биссектрисе координатного угла в третьей четверти (черт. 41, б). Так как углы сохраняются не только по величине, но и по направлению, то для того, чтобы получить вторую сторону угла Γ' , следует луч Γ повернуть около начала координат на угол 90° по часовой стрелке, потому что в плоскости z при движении по дуге γ от точки i (отображающейся в начало координат плоскости w) заштрихованная на черт. 41, а область остается справа.

Каковы бы ни были заданные окружности в плоскостях z и w , существует, и притом бесконечное множество дробно-линейных функций, отображающих одну из этих окружностей на другую. Действительно, не нарушая общности, можно считать один из коэффициентов в правой части (4) равным единице (так как числитель и знаменатель правой части (4) можно разделить на этот коэффициент) и представить общую дробно-линейную функцию, если, например, $a \neq 0$, в виде

$$w = \frac{z+b}{cz+d}.$$

Задав произвольно три различные точки α, β, γ в плоскости z и три различные точки α', β', γ' в плоскости w , можно найти дробно-линейную функцию, отображающую точку $z = \alpha$ в точку $w = \alpha'$, точку $z = \beta$ в точку $w = \beta'$ и точку $z = \gamma$ в точку $w = \gamma'$; для этого достаточно найти b, c и d из системы

уравнений

$$\alpha' = \frac{\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad \beta' = \frac{\beta + b}{c\beta + d}, \quad \gamma' = \frac{\gamma + b}{c\gamma + d}.$$

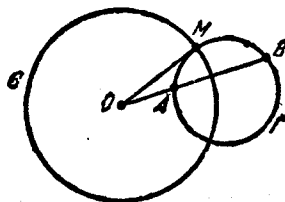
Можно показать, что эта система уравнений имеет единственное решение и что, следовательно, существует единственная дробно-линейная функция, отображающая три заданные точки плоскости z соответственно на три заданные точки плоскости w .

Эта функция в неявной форме задается равенством

$$\frac{w - \alpha'}{w - \beta'} \cdot \frac{\gamma' - \beta'}{\gamma' - \alpha'} = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}. \quad (7)$$

Непосредственная проверка убеждает нас в том, что точки α , β , γ действительно отображаются с помощью (7) в точки α' , β' , γ' .

Дробно-линейная функция обладает свойством симметрии: две точки, взаимно-симметричные относительно окружности C , отображаются с помощью дробно-линейной функции в точки, взаимно-симметричные относительно той окружности, на которую отображается окружность C .



Черт. 42.

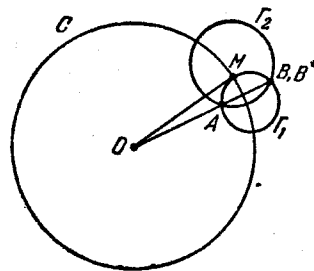
Переходя к доказательству этого свойства, заметим сначала, что если окружность Γ проходит через точки A и B , взаимно-симметричные относительно окружности C , то окружность Γ ортогональна к окружности C . Действительно, пусть M (черт. 42) — точка пересечения Γ и C . Тогда, в силу определения симметрии,

$$OA \cdot OB = R^2 = OM^2.$$

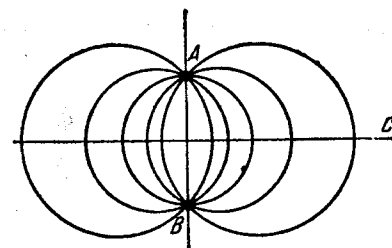
Но в силу известной теоремы о касательной и секущей отсюда следует, что радиус OM касается окружности Γ и, следовательно, окружность Γ ортогональна к C .

Докажем теперь, что если окружности Γ_1 и Γ_2 , пересекающиеся в точках A и B (черт. 43), ортогональны к окружности C , то точки A и B взаимно-симметричны относительно окружности C . Действительно, проведем через одну из точек пересечения Γ_1 с Γ_2 , например через точку A , луч OA из

центра окружности C , и пусть B^* — вторая точка пересечения этого луча с окружностью Γ_1 . Тогда, в силу ортогональности окружностей Γ_1 и C , обозначив через M точку пересечения C и Γ_2 , с помощью теоремы о секущей и касательной получим



Черт. 43.



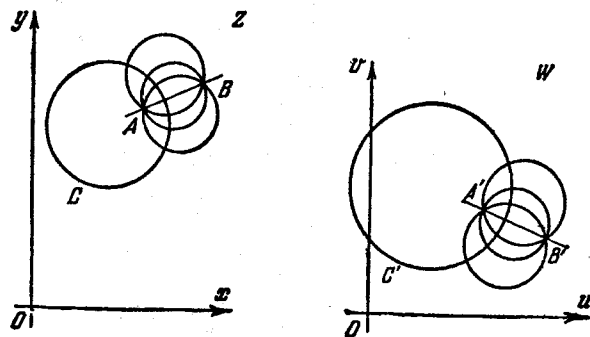
Черт. 44.

$OA \cdot OB^* = OM^2 = R^2$, следовательно, точка B^* симметрична точке A относительно окружности C . Те же рассуждения применимы и к окружности Γ_2 , которая тоже проходит через точку A и тоже ортогональна к C . Следовательно, та же самая точка B^* , симметричная точке A относительно C , лежит и на окружности Γ_2 , а значит точка B^* совпадает с точкой B .

Доказанное свойство сохраняется, если окружность C заменяется прямой. Читатель без труда докажет, что все окружности, проходящие через точки A и B , симметричны относительно прямой, ортогональной к этой прямой (черт. 44) и обратно: если две окружности, проходящие через точки A и B , ортогональны к прямой C , то эти точки взаимно-симметричны относительно C .

Свойство симметрии дробно-линейной функции следует из доказанных предложений. Действительно, если точки A и B плоскости z , взаимно-симметричны относительно окружности C (черт. 45), с помощью некоторой дробно-линейной функции отображены соответственно в точки A' и B' плоскости w , а окружность C — на окружность C' , то всевозможные окружности, проходящие через точки A и B , отображаются, в силу кругового свойства дробно-линейной функции, на окружности, проходящие через точки A' и B' . Но окружности, проходящие через точки A и B , как было доказано выше, ортогональны к окружности C , а следовательно, ввиду конформности

отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией, окружности, проходящие через точки A' и B' , ортогональны к



Черт. 45.

окружности C' ; отсюда следует, что точки A' и B' взаимно-симметричны относительно окружности C' , и доказательство свойства симметрии завершено.

Пример 2. Найти дробно-линейную функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга (черт. 46).

При этом отображении какая-то точка α верхней полуплоскости z отобразится в центр единичного круга (т. е. в начало координат плоскости w). В силу свойства симметрии, точка $\bar{\alpha}$, симметричная точке α относительно действительной оси, должна отобразиться в точку ∞ , симметричную точке 0 относительно единичной окружности плоскости w , так как действительная ось плоскости z по условию должна быть отображена

на единичную окружность плоскости w . Дробно-линейная функция, удовлетворяющая перечисленным условиям (т. е. такая, что $w=0$ при $z=\alpha$ и $w=\infty$ при $z=\bar{\alpha}$), имеет вид

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

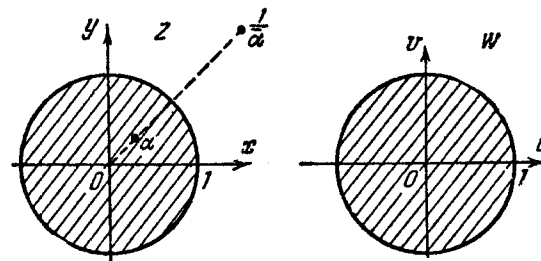
где k — комплексная постоянная.

Величина k не вполне произвольна, так как при действительном z точка w должна находиться на единичной окружности и, следовательно, $|w|=1$. Так как, с другой стороны, при действительном z

$|z - \alpha| = |z - \bar{\alpha}|$, то $|k|=1$, т. е. $k = e^{i\varphi}$, где φ — любое действительное число. Следовательно, отображающая функция имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

Как и следовало ожидать, существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих требуемое отображение. Каждая из этих функций определяется значениями трех действительных параметров (параметра φ и двух действительных параметров, определяющих комплексное число α)



Черт. 47.

Пример 3 Найти дробно-линейную функцию, отображающую внутренность единичного круга на себя (черт. 47).

Пусть α — точка внутри единичного круга плоскости z , отображающаяся в центр круга (в начало координат) плоскости w . Тогда точка $\frac{1}{\bar{\alpha}}$, симметричная точке α относительно единичной окружности, должна отобразиться в точку, симметричную с центром круга, т. е. в бесконечно удаленную точку плоскости w . Таким образом, $w=0$ при $z=\alpha$ и $w=\infty$ при $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$. Дробно-линейная функция, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k\bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1} = k' \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

где $k' = -k\bar{\alpha}$.

Постоянная k' не произвольна, так как точки единичной окружности плоскости z отображаются в точки единичной окружности плоскости w и, следовательно, $|w|=1$ при $|z|=1$. Так как, далее, $z\bar{z}=|z|^2$, то $z\bar{z}=1$ при $|z|=1$, числа $1 - \bar{\alpha}z$ и $1 - \alpha\bar{z}$ взаимно-сопряженные и $|1 - \bar{\alpha}z| = |1 - \alpha\bar{z}|$. Если $|z|=1$, то $|1 - \bar{\alpha}z| = |1 - \alpha\bar{z}|$ и $|z - \alpha| = |z - \alpha\bar{z}| = |z - \alpha|$, следовательно, при $|z|=1$

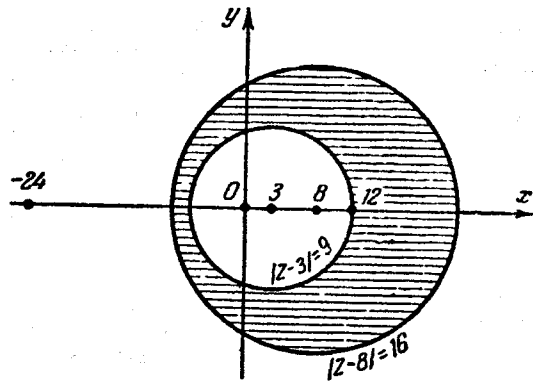
$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1,$$

а так как при этом условии $|w|=1$, то $|k'|=1$, т. е. $k'=e^{i\varphi}$, φ — действительное число. Следовательно, общий вид функции, отображающей единичный круг на себя, таков:

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

В этом равенстве также участвуют три действительных параметра. Произвольность параметра φ связана с тем, что при повороте на любой угол вокруг центра круг отображается сам на себя (умножение на $e^{i\varphi}$ соответствует повороту на угол φ вокруг начала координат). Произвольность комплексного числа α ($|\alpha| < 1$), определяемого, как и всякое комплексное число, двумя действительными числами, означает, что можно, отображая единичный круг сам на себя, потребовать еще, чтобы любая заданная точка, лежащая внутри круга, отображалась в центр круга.

Пример 4. Найти дробно-линейную функцию, отображающую двусвязную область, ограниченную окружностями $|z-3|=9$, $|z-8|=16$ (черт. 48) на концентрическое кольцо между окружностями



Черт. 48.

с центром в точке $w=0$, так, чтобы внешний радиус этого кольца был равен 1.

Точки $w_1=0$ и $w_2=\infty$ взаимно-симметричны одновременно относительно обеих окружностей, ограничивающих кольцо, на которое должна быть отображена заданная двусвязная область. В силу свойства симметрии в эти точки должны отобразиться те точки z_1, z_2 плоскости z , которые взаимно-симметричны одновременно относительно окружностей $|z-3|=9$ и $|z-8|=16$. Так как центры этих окружностей находятся на действительной оси, то точки z_1 и z_2 также должны расположиться на действительной оси, поэтому положим $z_1=x_1$, $z_2=x_2$. Произведение расстояний этих точек до центра

каждой из окружностей должно быть равно квадрату радиуса соответствующей окружности:

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 81, (x_1 - 8)(x_2 - 8) = 256.$$

Решив эту систему, получим $x_1 = -24$, $x_2 = 0$ (или $x_1 = 0$, $x_2 = -24$). Одна из найденных точек должна отобразиться, как было отмечено, в точку $w=0$, а другая в точку $w=\infty$. Пусть, например, $w=0$ при $z=-24$ и $w=\infty$ при $z=0$. Тогда

$$w = k \frac{z + 24}{z}, \quad (8)$$

где коэффициент k пока произволен. Так как точка $z=0$, внутренняя по отношению к данным окружностям, отображается в точку $w=\infty$, внешнюю по отношению к образам этих окружностей, то преобразование (8) отображает внутренность каждой из данных окружностей на внешность соответствующего образа. Окружность $|z-3|=9$ находится внутри окружности $|z-8|=16$, поэтому радиус образа окружности $|z-3|=9$ больше, чем радиус образа окружности $|z-8|=16$. Следовательно, по условию задачи требуется коэффициент k подобрать так, чтобы для точек окружности $|z-3|=9$ было $|w|=1$. Рассмотрим, например, точку $z=12$, лежащую на окружности $|z-3|=9$. Соответствующим значением w из (8) будет $w=3k$, следовательно, $|3k|=1$, или $|k|=\frac{1}{3}$. Итак, искомой функцией будет

$$w = e^{i\alpha} \frac{z + 24}{3z}, \quad (9)$$

где α — любое действительное число.

Если бы мы потребовали, чтобы $w=0$ при $z=0$ и $w=\infty$ при $z=-24$, то тем же методом получили другое решение:

$$w = e^{i\alpha} \frac{2z}{z + 24}. \quad (10)$$

Заметим, что в условии задачи был задан только внешний радиус кольца. Что касается внутреннего радиуса, то он, как нетрудно видеть, вполне определен, если внешний радиус задан. Действительно, подставив в (9) или (10) вместо z любую точку окружности, отображающейся во внутреннюю окружность концентрического кольца, мы легко найдем, что внутренний радиус равен $\frac{2}{3}$. Следовательно, заданную в условии задачи двусвязную область можно отобразить только на такое круговое концентрическое кольцо, у которого отношение внутреннего радиуса к внешнему равно $\frac{2}{3}$.

§ 5. Степенная функция

Отображение, осуществляемое степенной функцией

$$w = z^n, \quad (11)$$

где целое положительное число $n \geq 2$, является конформным во всей плоскости, кроме точки $z=0$, так как производная этой функции существует и отлична от нуля всюду, кроме точки $z=0$. В точке $z=0$, как будет показано ниже, конформность отображения нарушается. Введя в плоскостях z и w полярные координаты

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi}, \\ w &= \rho e^{i\theta}, \end{aligned}$$

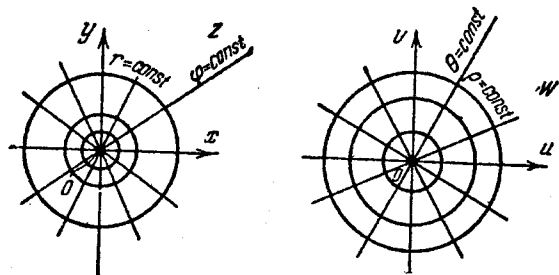
получим из (11):

$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi}$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r^n, \\ \theta &= n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

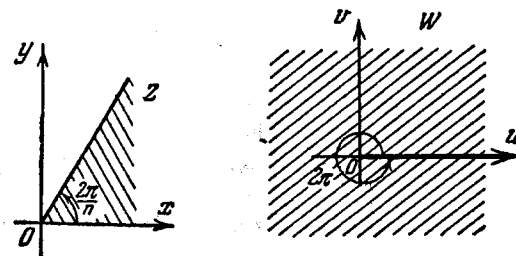
Из равенства (12) следует, что окружности $r = \text{const}$ с центром в точке $z=0$ плоскости z отображаются (черт. 49)



Черт. 49.

на окружности $\rho = \text{const}$ с центром в точке $w=0$ плоскости w , причем единичная окружность отображается сама на себя, а лучи $\varphi = \text{const}$, выходящие из начала координат плоскости z , на лучи $\theta = \text{const}$, выходящие из начала координат в плоскости w . При этом луч $\varphi=0$, идущий по положительному направлению действительной оси, отображается сам на себя, т. е. на луч $\theta=0$; луч $\varphi=\alpha$ плоскости z отображается на

луч $\theta = n\alpha$ плоскости w , и угол $0 < \varphi < \alpha$ плоскости z ($\alpha < \frac{2\pi}{n}$) с вершиной в начале координат отображается на угол $0 < \theta < n\alpha$ плоскости w . Следовательно, конформность отображения действительно нарушается в точке $z=0$; углы в этой точке увеличиваются при отображении в n раз. В частности, угол $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$ величины $\frac{\pi}{n}$ плоскости z отображается с помощью функции $w = z^n$ на верхнюю полуплоскость ($0 < \theta < \pi$) плоскости w . Угол $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ величины $\frac{2\pi}{n}$ отображается на угол $0 < \theta < 2\pi$, т. е. на всю плоскость,



Черт. 50.

кроме действительной положительной полуоси (черт. 50). На эту полуось отображаются обе стороны рассматриваемого угла плоскости z ($\varphi=0$ и $\varphi=\frac{2\pi}{n}$).

Для того чтобы отображение было взаимно-однозначным не только внутри угла $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$, но и на его сторонах, следует в плоскости w произвести «разрез» по положительной части действительной оси и условиться считать, что луч $\varphi=0$ отображается на верхний, а луч $\varphi=\frac{2\pi}{n}$ на нижний край этого разреза (если луч $\varphi=\alpha$, вращаясь против часовой стрелки, приближается к лучу $\varphi=\frac{2\pi}{n}$, то соответствующий луч в плоскости w приближается к действительной части положительной полуоси снизу).

Если $w = z^n$, то каждой точке z соответствует единственная точка w , но одной и той же точке w ($w \neq 0$, $w \neq \infty$)

соответствует (см. стр. 15) n точек плоскости z , расположенных в вершинах правильного n -угольника с центром в нулевой точке; отображение плоскости z на плоскость w не является, следовательно, взаимно-однозначным. Всякие два значения z , соответствующие одному и тому же w (т. е. всякие два значения величины $\sqrt[n]{w}$), имеют один и тот же модуль и аргументы, отличающиеся на число, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Если одно из этих чи-

сел z , то другое $ze^{\frac{2k\pi}{n}i}$, где k — целое.

Область плоскости z , не содержащая никаких различных точек, соответствующих одному и тому же w , т. е. не содержащая никаких двух различных вершин правильного n -угольника с центром в начале координат, отображается с помощью функции $w = z^n$ на соответствующую область плоскости w взаимно-однозначно. Этим свойством, во всяком случае, обладает любая область, целиком заключенная внутри угла величины $\frac{2\pi}{n}$ с центром в начале координат. В частности, как

указано выше, угол $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ отображается взаимно-однозначно на всю плоскость w с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу $\varphi = 0$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ нижний край разреза. Угол $\frac{2\pi}{n} < \varphi < \frac{4\pi}{n}$ с помощью функции $w = z^n$ также отображается взаимно-однозначно на плоскость w с тем же разрезом, причем лучу $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = \frac{4\pi}{n}$ нижний край разреза.

Такое же отображение получим для каждого из углов, на которые разбивают плоскость z лучи $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, где k — целое число, причем при отображении на плоскость с описанным выше разрезом угла $\frac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) лучу $\varphi = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ нижний край разреза.

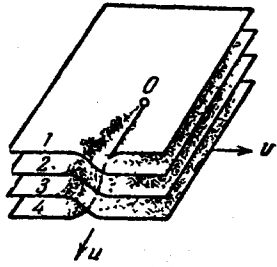
Для того чтобы получить во всей плоскости z взаимно-однозначное соответствие между точками z и точками w , осуществим следующее геометрическое построение,

Изготовим плоскость w с разрезом по положительной части действительной оси в n экземплярах и будем считать, что 1-й экземпляр (1-й лист) является отображением угла $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$, 2-й экземпляр (2-й лист) — отображением угла $\frac{2\pi}{n} < \varphi < \frac{4\pi}{n}$ и т. д., n -й экземпляр (n -й лист) — отображением угла $\frac{2(n-1)\pi}{n} < \varphi < 2\pi$. Если точка z , перемещаясь по непрерывной кривой в своей плоскости, пересекает один из лучей $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, соответствующая точка w переходит с одного экземпляра (листа) плоскости w на другой. Для того чтобы точка w описывала при этом также непрерывную кривую, а также для того чтобы отображение было взаимно-однозначным и на лучах $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, соответствующих краям разрезов, следует «склеить» (отождествить) края разрезов различных экземпляров (листов) плоскости w , соответствующие одному и тому же лучу плоскости z , а именно: нижний край разреза на 1-м листе следует склеить с верхним краем разреза 2-го листа (они оба соответствуют лучу $\varphi = \frac{2\pi}{n}$), нижний край разреза 2-го листа с верхним краем разреза 3-го листа (они оба соответствуют лучу $\varphi = \frac{4\pi}{n}$) и т. д., нижний край разреза $(n-1)$ -го листа с верхним краем разреза n -го листа (они оба соответствуют лучу $\varphi = \frac{2(n-1)\pi}{n}$); наконец, оставшийся свободным нижний край разреза n -го листа следует склеить с верхним краем разреза 1-го листа¹⁾ (один из них соответствует в плоскости z лучу $\varphi = 2\pi$, другой — лучу $\varphi = 0$, который геометрически совпадает с лучом $\varphi = 2\pi$). Отображение, осуществляемое функцией $w = z^n$, всей плоскости на построенную таким образом поверхность, называемую *римановой поверхностью* функции $z = \sqrt[n]{w}$ (черт. 51 для $n=4$), является взаимно-однозначным.

¹⁾ Такое склеивание, если представить себе каждый экземпляр плоскости w в виде листа бумаги неограниченных размеров, в трехмерном евклидовом пространстве осуществить без самопересечений нельзя.

При движении точки z в своей плоскости по непрерывной кривой точка w движется по непрерывной кривой на римановой поверхности, причем, как уже отмечалось, когда точка z пересекает один из лучей $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, точка w переходит по линии

склеивания с одного листа римановой поверхности на другой. Незамкнутой дуге плоскости z соответствует незамкнутая дуга на римановой поверхности, замкнутой дуге соответствует замкнутая. Если бы значения w изображались не точками римановой поверхности, а точками плоскости w , то незамкнутая дуга,



Черт. 51.

соединяющая точки z и $ze^{\frac{2k\pi i}{n}}$, где k — целое число, отображалась бы на замкнутую кривую, так как начальной и конечной точкам указанной дуги соответствовала бы одна и та же точка w . Если точка z обходит по не-

которой замкнутой кривой один раз начало координат и возвращается в исходное положение, то соответствующая точка плоскости w делает n полных оборотов вокруг начала координат в том же направлении, а точка w на римановой поверхности также возвращается в исходное положение, описав на римановой поверхности замкнутую кривую.

Как было отмечено выше, для того чтобы область плоскости z с помощью функции $w = z^n$ взаимно-однозначно отображалась на соответствующую область плоскости w , необходимо и достаточно, чтобы эта область плоскости z не содержала двух различных вершин какого-нибудь правильного n -угольника с центром в точке $z = 0$ (т. е. двух различных

точек вида $ze^{\frac{2k\pi i}{n}}$, где k — целое действительное число). Область, внутри которой находится начало координат или бесконечно удаленная точка, таким свойством заведомо не обладает, так как в первом случае область содержит целиком достаточно малые правильные n -угольники с центром в начале координат, а во втором случае содержит достаточно большие n -угольники указанного вида, и следовательно, отображение такой области с помощью функции $w = z^n$ на соответствующую область плоскости w не является взаимно-однозначным.

В любой односвязной области, не содержащей точек $w = 0$ и $w = \infty$, в частности в достаточно малой окрестности всякой точки $w = w_0$, не совпадающей ни с точкой 0 , ни с точкой ∞ , можно определить однозначные ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$. Это означает, что в такой окрестности можно определить несколько однозначных аналитических функций, по отношению к каждой из которых функция $w = z^n$ является обратной. Эти функции и называют однозначными ветвями функции $\sqrt[n]{w}$.

Вообще, если функция $w = f(z)$, аналитическая в некоторой области G и отображающая эту область на область G^* , такова, что обратная функция $z = \varphi(w)$ многозначна в области G^* , но в то же время существуют однозначные, аналитические в области G^* , содержащейся в G^* , функции $z = \varphi_1(w)$, $z = \varphi_2(w)$, ..., для которых данная функция $w = f(z)$ является обратной, то функции $z = \varphi_1(w)$, $z = \varphi_2(w)$, ... называются *однозначными ветвями* функции $z = \varphi(w)$, определенными в области G^* .

Если

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\theta},$$

то, имея в виду, что (см. стр. 15)

$$r = (\sqrt[n]{\rho}), \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (13)$$

выберем в точке w_0 какое-нибудь определенное значение $\theta = \theta_0$ (например, будем считать, что θ_0 — главное значение аргумента w_0) и фиксируем также число k . Если окрестность точки w_0 достаточно мала, то она не содержит нулевой точки и при непрерывном перемещении точки w в этой окрестности можно считать, что величина θ аргумента w изменяется также непрерывно, причем разность значений θ для любых двух точек w не превышает по абсолютной величине числа 2π . Тем самым в окрестности точки w_0 величина z определена с помощью равенств (13) как непрерывная и однозначная функция аргумента w ; эта функция и является ветвью функции $z = \sqrt[n]{w}$. Различным фиксированным в формуле (13) значениям k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) при одном и том же выборе числа θ_0 соответствуют различные ветви функции $\sqrt[n]{w}$ в окрестности точки w_0 .

Если точка w совершает один или несколько полных оборотов вокруг начала координат, то непрерывное изменение

величины θ при этом движении точки w приводит к тому, что точка w возвращается в исходное положение со значением аргумента θ , отличающимся от исходного на величину, кратную 2π , а это соответствует изменению значения k во втором равенстве (13), т. е. переходу на другую ветвь функции $\sqrt[n]{w}$.

Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг этой точки в ее достаточно малой окрестности влечет за собой переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется *точкой разветвления* (или *точкой ветвления*) рассматриваемой многозначной функции. Точки разветвления функции $z = \sqrt[n]{w}$ являются точки $w=0$ и $w=\infty$. Следует также отметить, что в каждой из этих точек ветвления функция $\sqrt[n]{w}$ имеет только одно значение ($\sqrt[n]{0}=0$ и $\sqrt[n]{\infty}=\infty$), т. е. различные ветви функции в этих точках совпадают. Это обстоятельство связано с тем, что на римановой поверхности точки $w=0$ и $w=\infty$, будучи конечными точками разрезов на каждом листе, являются общими для всех листов.

Как уже отмечалось выше, угол величины α ($\alpha < \frac{2\pi}{n}$) с вершиной в точке $z=0$ (соответствующей точке разветвления $w=0$) отображается функцией $w=z^n$ на угол с вершиной в точке $w=0$ величины $n\alpha$, в частности угол с вершиной в точке $w=0$ величины $\frac{\pi}{n}$ отображается взаимно-однозначно на полуплоскость. Это замечание относится и к тому случаю, когда число n дробное, так как угол с вершиной в начале координат не содержит никакой окрестности нулевой точки (а также и бесконечно удаленной точки) и, следовательно, внутри такого угла может быть определена однозначная ветвь отображающей функции. Так как, с другой стороны, с помощью дробно-линейной функции можно отобразить на угол область, ограниченную дугами двух окружностей (или дугой окружности и прямолинейным отрезком)¹⁾, то, комбинируя дробно-линейную и степенную функции, можно такую область отобразить на полуплоскость.

¹⁾ Для этого достаточно взять такую дробно-линейную функцию, с помощью которой одна общая точка дуг окружностей отображается в бесконечно удаленную точку. Если другую общую точку отобразить в начало координат, то вершина угла будет находиться в начале координат.

Пример 1. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, общую двум кругам радиуса 1 с центрами в точках 0 и 1 (черт. 52).

Точки пересечения дуг, ограничивающих заданную область, соответствуют числам

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ и } z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Дробно-линейная функция

$$t = \frac{z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad (14)$$

отображает одну из этих точек

$\left(z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в точку $t = \infty$, а

другую $\left(z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в точку $t = 0$

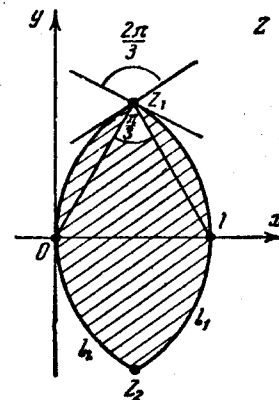
и, следовательно, данную область в угол с вершиной в точке $t = 0$. Величина этого

угла (см. чертеж) равна $\frac{2\pi}{3}$. Для того чтобы выяснить, как расположен в плоскости t этот угол, достаточно найти хотя бы одну точку на одной из его сторон. Выясним, например, в какую точку отобразится точка $z=1$, лежащая на одной из дуг (l_1), ограничивающих данную область. При $z=1$ получим:

$$t = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

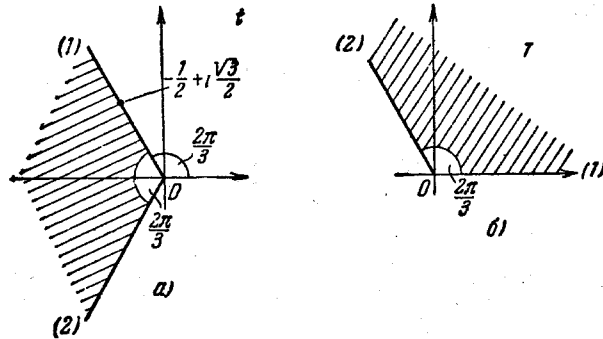
Следовательно, дуга l_1 плоскости z отображается на луч (1) плоскости w , выходящий из начала координат и проходящий через точку

$t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ (черт. 53, а). Если идти по дуге l_1 из точки z_1 , которой в плоскости t соответствует точка $t=0$, то отображаемая область окажется слева, следовательно, луч (2) плоскости t , являющийся отображением дуги l_2 , может быть получен поворотом луча (1) на угол $\frac{2\pi}{3}$ против часовой стрелки,



Черт. 52.

Так как полученный в плоскости t угол предстоит отобразить на верхнюю полуплоскость, то, прежде чем воспользоваться для этой цели степенной функцией, следует произвести в плоскости t поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке с тем, чтобы луч (1) совместить с по-



Черт. 53.

ложительной частью действительной оси, которая (см. стр. 176) степенной функцией отображается сама на себя. Такой поворот (см. стр. 160) осуществляется функцией

$$T = te^{-\frac{2\pi i}{3}}. \quad (15)$$

Полученный в результате в плоскости T угол (черт. 53, б) отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w одной из ветвей функции

$$w = T^{3/2} \quad (16)$$

(угол величины $\frac{2\pi}{3}$ отображается на угол величины $\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi$).

Объединяя (14), (15) и (16), получаем функцию

$$w = \left[\frac{z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right]^{3/2} = e^{-\pi i} \left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}} \right)^{3/2},$$

или окончательно

$$w = - \left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}} \right)^{3/2},$$

отображающую заданную область плоскости z на верхнюю полуплоскость. Это, конечно, только одна из функций, осуществляющих требуемое отображение. Все множество функций, удовлетворяющих

условию задачи, можно получить, отображая соответствующего дробно-линейного преобразования верхнюю полуплоскость плоскости w саму на себя.

Пример 2. Отобразить на верхнюю полуплоскость всю плоскость z с разрезом вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $3i$ (черт. 54).

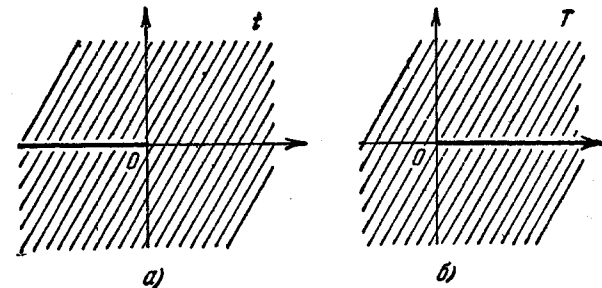
Дробно-линейная функция

$$t = \frac{z - i}{z - 3i} \quad (17)$$

отображает концы разреза $z = i$ и $z = 3i$ соответственно в точки $t = 0$ и $t = \infty$, а следовательно, заданную область на плоскость t с разрезом вдоль некоторого луча, выходящего из начала координат. Для того чтобы выяснить направление этого луча, достаточно найти на нем хотя бы одну промежуточную точку. Точке $z = 2i$ разреза в плоскости z соответствует точка

$$t = \frac{2i - i}{2i - 3i} = -1$$

плоскости t . Следовательно, функция (17) отображает данную область на плоскость t с разрезом вдоль луча, идущего по отрицательной



Черт. 55.

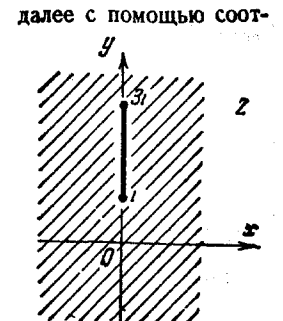
части действительной оси (черт. 55, а). Произведя с помощью функции

$$T = te^{\pi i} = -t \quad (18)$$

поворот на угол π , мы отобразим нашу область на плоскость с разрезом по положительной части действительной оси (черт. 55, б). Функция

$$w = \sqrt{T} \quad (19)$$

(точнее, одна из ветвей этой функции) отображает плоскость T



Черт. 54.

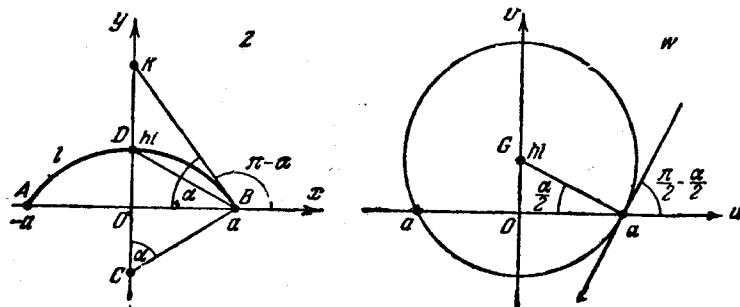
с разрезом вдоль положительной действительной полуоси на верхнюю полуплоскость. Объединяя (17), (18) и (19), получим:

$$w = \sqrt{-\frac{z-i}{z-3i}}.$$

Это, конечно, только одна из функций, осуществляющих требуемое отображение.

§ 6. Профили Жуковского

Отобразим всю плоскость z с разрезом по дуге l окружности, концы которой находятся в точках $-a$ и a действительной оси и которая пересекает мнимую ось в точке hi , на расположенную в плоскости w внешность круга G с центром в точке hi , окружность которого проходит через точки $-a$ и a (черт. 56).



Черт. 56.

Заметим, что если α — угол между касательной BK к дуге l в точке a и отрицательным направлением действительной оси, то луч, идущий из точки a в точку hi , образует с отрицательным направлением действительной оси угол $\frac{\alpha}{2}$. Действительно, если C — центр дуги l , A, B, D — точки, соответствующие числам $-a, a, hi$, то $\angle BCD = \alpha$ и, следовательно, $\angle CDB = \angle DBC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Но так как $\angle KBC = \frac{\pi}{2}$, то $\angle KBD = \frac{\alpha}{2}$, а значит и $\angle DBO = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда вытекает, что в плоскости w угол между радиусом, идущим из точки hi в точку a , и отрицательным направлением действительной оси также равен $\frac{\alpha}{2}$, а угол между касательной к окружности в точке a

и положительным направлением действительной оси равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

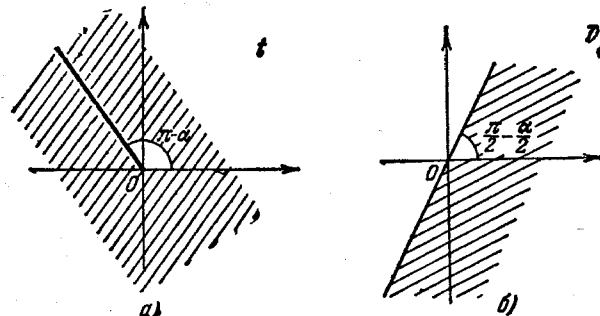
Для того чтобы найти функцию, осуществляющую требуемое отображение, отобразим сначала как плоскость z с разрезом по данной дуге

l , так и внешность данного круга G плоскости w на одну и ту же вспомогательную область.

Функция

$$t = \frac{z-a}{z+a}$$

отображает плоскость z с разрезом по данной дуге l на плоскость t с разрезом по лучу, идущему из точки 0 в точку ∞ (черт. 57, а). Этот луч наклонен к положительному направлению действительной оси под тем же самым углом $\pi - \alpha$, что и данная (в плоскости z) дуга в



Черт. 57.

точке a . Это утверждение следует из конформности отображения и из того, что движению точки z по действительной оси от точки a вправо соответствует движение точки t по действительной оси от точки 0 также вправо, так как при $z > a$

$$t = \frac{z-a}{z+a} > 0.$$

Функция

$$T = \frac{w-a}{w+a} \quad (20)$$

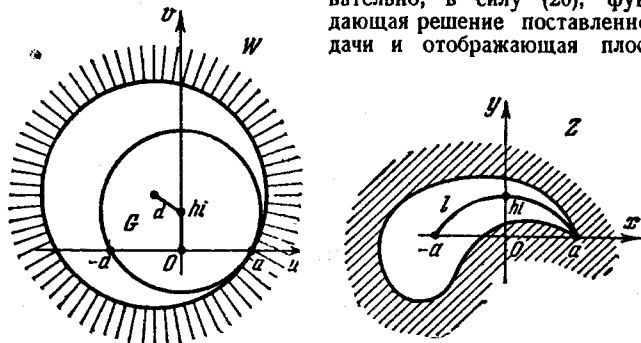
отображает окружность данного круга плоскости w на прямую плоскости T , проходящую через точку 0 (черт. 57, б). При этом действительная ось плоскости w отображается на действительную ось плоскости T , причем если точка w движется по действительной оси от точки a вправо, то точка T движется от точки 0 по действительной оси также вправо. Отсюда следует, что внешность круга G плоскости w отображается на полуплоскость плоскости T , содержащую положительную действительную полуось и ограниченную прямой, наклоненной к этой полуоси под тем же углом $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, что и касательная к окружности круга G плоскости w в точке a . Функция

$$t = T^2$$

отображает эту полуплоскость на плоскость t с разрезом вдоль луча, наклоненного к положительному направлению действительной оси под углом $2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \pi - \alpha$, т. е. на ту же область, на которую с помощью функции

$$t = \frac{z - a}{z + a}$$

была отображена плоскость z с разрезом по заданной дуге l . Следовательно, в силу (20), функция, дающая решение поставленной задачи и отображающая плоскость



Черт. 58.

с разрезом по дуге l на внешность круга G , может быть определена равенством

$$\left(\frac{w - a}{w + a}\right)^2 = \frac{z - a}{z + a}.$$

Разрешая это уравнение относительно z или w , получим:

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{a^2}{w} \right),$$

$$w = z + \sqrt{z^2 - a^2}.$$

Так как полученная зависимость не содержит величины h , то плоскость z с разрезом по всякой дуге окружности, соединяющей точки $-a$ и a , отображается на внешность круга, проходящего через точки $-a$ и a и имеющего центр в точке, совпадающей с точкой

¹⁾ В плоскости z с разрезом по дуге l функцию $\sqrt{z^2 - a^2}$, как нетрудно видеть, можно считать однозначной, точнее, каждая из ветвей этой функции является в этой области непрерывной и однозначной. Точки $-a$ и a делят окружность круга G на две дуги L_1 и L_2 , одна из которых соответствует одному краю разреза, идущего по дуге l , а другая — другому краю разреза. Выбором определенной ветви функции $\sqrt{z^2 - a^2}$ мы и устанавливаем, какому краю разреза соответствует дуга L_1 , а какому — дуга L_2 .

пересечения данной дуги с мнимой осью (если плоскости z и w считать совмещенными).

Внешность всякого круга плоскости w , содержащего круг G и касающегося окружности этого круга в точке a (черт. 58), отображается с помощью найденной функции на область, лежащую вне некоторого замкнутого контура, содержащего дугу l , для которого точка a является точкой возврата с касательной, совпадающей с касательной к дуге l . Такой контур носит название *профиля Жуковского*. Форма контура Жуковского зависит от параметров a и h , а также от расстояния d центра круга G от центра того круга, отображением которого является рассматриваемый профиль.

Существование функции весьма простого вида, отображающей внешность профиля Жуковского на внешность круга, делает профили крыльев самолета, входящие в класс профилей Жуковского, весьма удобными для расчетов при решении задач на обтекание (см. стр. 241).

§ 7. Показательная и логарифмическая функции

Отображение, осуществляемое функцией

$$w = e^z,$$

конформно во всей плоскости, так как производная этой функции существует и отлична от нуля во всякой конечной точке плоскости z . Введя в плоскости z декартовы, а в плоскости w полярные координаты, т. е. положив $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\theta}$, получим:

$$\rho e^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Следовательно,

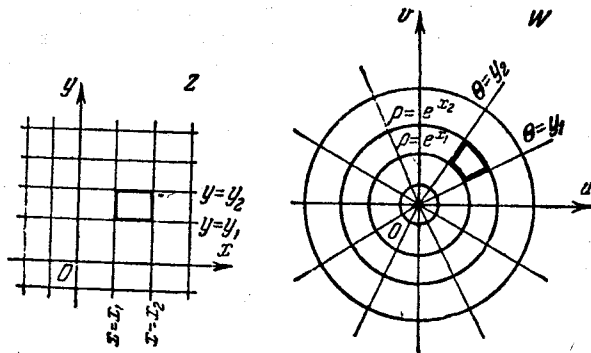
$$\rho = e^x,$$

$$\theta = y.$$

(21)

Из равенств (21) следует, что прямые, параллельные мнимой оси Oy (черт. 59) плоскости z ($x = \text{const}$), переходят при отображении $w = e^z$ в окружности с центром в нулевой точке плоскости w ($\rho = \text{const}$), а прямые, параллельные действительной оси Ox ($y = \text{const}$), — в лучи, выходящие из начала координат ($\theta = \text{const}$). Прямоугольник со сторонами $y = y_1$, $y = y_2$, $x = x_1$, $x = x_2$, параллельными осям координат плоскости z , отображается на область, плоскости w , ограниченную лучами $\theta = y_1$, $\theta = y_2$ и дугами концентрических окружностей $\rho = e^{x_1}$, $\rho = e^{x_2}$. Действительная ось плоскости z ($y = 0$) отображается на действительную положительную полуось ($\theta = 0$) плоскости w , прямая $y = \alpha$ — на луч $\theta = \alpha$. Следовательно, полоса ширины α ($\alpha < 2\pi$), прилегающая к действительной оси: $0 < y < \alpha$,

отображается конформно и взаимно-однозначно на угол $0 < \theta < \alpha$, величины α (в радианах) с вершиной в начале координат, одной из сторон которого является действительная положительная полуось. В частности, полоса $0 < y < \pi$ ширины π отображается функцией $w = e^z$ взаимно-однозначно на верхнюю



Черт. 59.

полуплоскость, а полоса $0 < y < 2\pi$ ширины 2π — на всю плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси: $0 < \theta < 2\pi$.

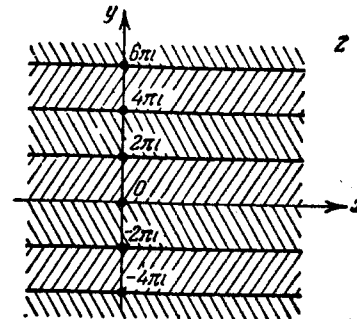
Отображение всей плоскости z на плоскость w не является взаимно-однозначным: всякой точке w (кроме точек $w = 0$ и $w = \infty$) соответствует бесконечное множество точек z :

$$z = \operatorname{Ln} w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i \arg w + 2k\pi i \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

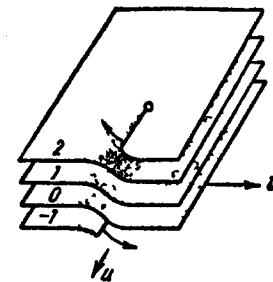
Для того чтобы область плоскости z отображалась функцией $w = e^z$ взаимно-однозначно на соответствующую область плоскости w , необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никаких двух точек, абсциссы которых одинаковы, а ординаты отличаются друг от друга на величину, кратную 2π , так как $e^{z_2} = e^{z_1}$ лишь при $z_2 - z_1 = 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Такому условию, в частности, удовлетворяет всякая область, заключенная в полосе $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$.

Если плоскость z разбить (черт. 60) на полосы $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то каждая из этих полос отобразится функцией $w = e^z$ взаимно-однозначно на всю плоскость w с разрезом вдоль положительной части действи-

тельной оси. Для того чтобы такое отображение было взаимно-однозначным не только внутри полосы, но и на ее граничных прямых $y = 2k\pi$ и $y = 2(k+1)\pi$, достаточно условиться, что нижней границе $y = 2k\pi$ соответствует верхний край разреза в плоскости w , а верхней границе $y = 2(k+1)\pi$ — нижний край разреза (если в плоскости z прямая $y = \alpha$ поднимается от положения $y = 2k\pi$ до положения $y = 2(k+1)\pi$,



Черт. 60.



Черт. 61.

соответствующий луч $\theta = \alpha$ в плоскости w совершает полный оборот против часовой стрелки от положения $\theta = 2k\pi$, соответствующего верхнему краю разреза, до положения $\theta = 2(k+1)\pi$, соответствующего нижнему краю разреза).

Изготовим бесконечное множество экземпляров плоскости w , проведем на каждом экземпляре разрез по положительной части действительной оси, занумеруем эти экземпляры (листы) плоскости w целыми числами от $-\infty$ до $+\infty$ и сложим их в «стопку» так, чтобы 2-й лист лежал на 1-м, 3-й на 2-м, 4-й на 3-м и т. д. 0-й лист под 1-м, —1-й лист под 0-м, —2-й лист под —1-м и т. д. Склеим (отождествим) нижний край разреза каждого листа с верхним краем разреза листа, лежащего над данным листом (и, тем самым, верхний край разреза каждого листа с нижним краем разреза листа, лежащего под данным листом) (черт. 61). Как нетрудно видеть, функция $w = e^z$ (или $z = \operatorname{Ln} w$) отображает плоскость z взаимно-однозначно на построенную поверхность (риманову поверхность). Если точка z движется параллельно оси Oy вверх, то точка w , вращаясь против часовой стрелки вокруг начала координат, как бы «поднимается» на римановой поверхности по спирали, переходя

с одного листа на другой с ббльшим номером; если точка плоскости z движется параллельно оси Oy вниз, соответствующая точка w римановой поверхности, вращаясь по часовой стрелке вокруг начала координат, как бы «опускается» по спирали, переходя с одного листа на другой с меньшим номером.

В достаточно малой окрестности всякой точки $w = w_0$, кроме $w_0 = 0$ и $w_0 = \infty$, можно определить однозначные ветви функции $z = Lp w$. Для этого достаточно, положив $w = \rho e^{i\theta}$, фиксировать в формуле

$$z = Lp w = \ln \rho + i\theta + 2k\pi i \quad (22)$$

целое число k , выбрать в точке w_0 какое-либо определенное значение $\theta = \theta_0$ (например, положить θ_0 равным главному значению аргумента w в точке w_0) и считать, что θ изменяется непрерывно при движении точки w по непрерывной кривой. Различным значениям k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют различные ветви функции $Lp w$. Если окрестность точки w_0 достаточно мала, то она не содержит точки $w = 0$, и при указанном способе изменения θ абсолютная величина разности значений θ для любых двух точек этой окрестности не превышает 2π . Если же точка w совершает в своей плоскости один или несколько полных оборотов вокруг начала координат, то она возвращается в начальное положение со значением θ , отличающимся от исходного на величину, кратную 2π , а z о равносильно изменению значения k в равенстве (22), т. е. переходу на другую ветвь функции $Lp w$. Следовательно, точка $w = 0$ является точкой разветвления функции $Lp w$; нетрудно убедиться, что точкой разветвления является также точка $w = \infty$. В каждой из этих точек функция $Lp w$ имеет только одно значение ($Lp 0 = \infty$, $Lp \infty = \infty$). Точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются конечными точками разрывов на всех листах римановой поверхности и, следовательно, являются общими для всех листов.

Характер точек разветвления функций $z = \sqrt[n]{w}$ и $z = Lp w$ различен. После n -кратного обхода вокруг точки $w = 0$ мы вернемся к первоначальной ветви функции $\sqrt[n]{w}$; точки разветвления, обладающие таким свойством, называются *алгебраическими точками разветвления* порядка $n - 1$. Иначе обстоит дело с функцией $Lp w$. Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $w = 0$ не приведет к возвращению к первоначальной ветви функции $Lp w$. Такие точки разветвления называются *логарифмическими*.

Так как с помощью дробно-линейной функции область, ограниченная двумя касающимися друг друга окружностями (или окружностью и касающейся ее прямой), может быть отображена на полосу между двумя параллельными прямыми (для этого достаточно, чтобы точка касания отобразилась в бесконечно удаленную точку), а полоса ширины π с помощью показательной функции отображается на верхнюю полуплоскость, то, комбинируя дробно-линейную и показательную функции, можно область указанного вида отобразить на верхнюю полуплоскость.

Пример 1. Найти функцию, отображающую область, ограниченную единичной окружностью C и прямой l , касающейся этой окружности в точке $z = i$ (черт. 62) на верхнюю полуплоскость.

Функция

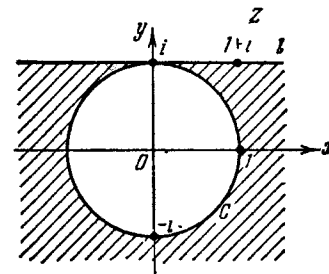
$$t = \frac{z+i}{z-i} \quad (23)$$

отображает общую для окружности и прямой точку $z = i$ (точку касания) в бесконечно удаленную точку плоскости t , следовательно, в силу кругового свойства дробно-линейной функции, как окружность C , так и прямая l отображаются этой функцией на прямые, параллельные друг другу (окружность C и прямая l имеют единственную общую точку i , переходящую в ∞). Так как точка $z = -i$ находится на окружности C и при $z = -i$ $t = 0$, то прямая C' плоскости t , соответствующая окружности C , проходит через начало координат. Для того чтобы определить в плоскости t положение прямой C' , достаточно найти еще хотя бы одну точку, лежащую на этой прямой. Возьмем, например, точку $z = 1$ на окружности C , ей соответствует на прямой C' точка

$$t = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i.$$

Итак, прямая C' проходит через точки $t = 0$ и $t = i$, следовательно, совпадает с мнимой осью плоскости t (черт. 63, а). Чтобы определить положение прямой l' плоскости t , на которую функция (23) отображает прямую l , достаточно знать на прямой l' одну точку. Точке $z = 1 + i$ прямой l соответствует точка

$$t = \frac{1+i+i}{1-i-i} = 1 + 2i$$



Черт. 62.

прямой l' . Прямая l' проходит через точку $1 + 2i$ параллельно мнимой оси i , следовательно, отстоит от этой оси на расстоянии, равном 1. Итак, функция (23) отображает заданную область на полосу ширины 1, прилегающую к мнимой оси.

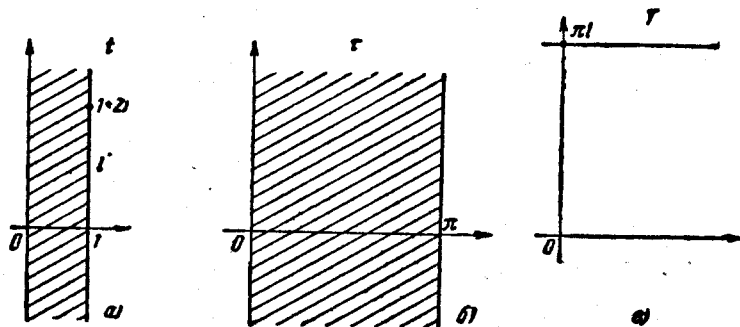
Функция

$$\tau = \pi i \quad (24)$$

отобразит эту полосу на полосу ширины π (черт. 63, б), прилегающую к мнимой оси, а с помощью функции

$$T = e^{\frac{\pi}{2} \tau} \quad \tau = k \quad (25)$$

эта полоса в плоскости τ поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой



Черт. 63.

стрелки и переходит в полосу, изображенную на черт. 63, в. Эта последняя полоса функцией

$$w = e^T \quad (26)$$

отображается на верхнюю полуплоскость.

Объединяя (23), (24), (25) и (26), находим одну из функций, осуществляющих требуемое отображение:

$$w = e^{\frac{\pi i}{2} \frac{z+1}{z-i}}.$$

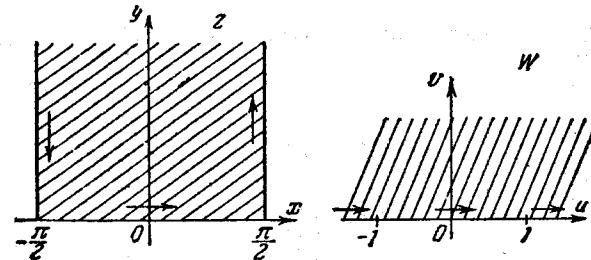
Тригонометрические функции могут быть выражены через показательную функцию (см. стр. 32). Рассмотрим, например, отображение, определяемое функцией

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)}{2i}.$$

Возьмем в плоскости z полуполосу $y > 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (черт. 64). Если точка z находится на прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, то

$$w = -\frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad (27)$$

и если точка z движется по прямой $x = -\frac{\pi}{2}$ от $y = +\infty$ до $y = 0$, то точка w перемещается по действительной оси от



Черт. 64.

$w = -\infty$ до $w = -1$. На действительной оси $y = 0$, поэтому

$$w = \sin x, \quad (28)$$

и если точка z передвигается по действительной оси от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то соответствующая ей точка w пробегает отрезок действительной оси от $w = -1$ до $w = 1$.

На прямой $x = \frac{\pi}{2}$

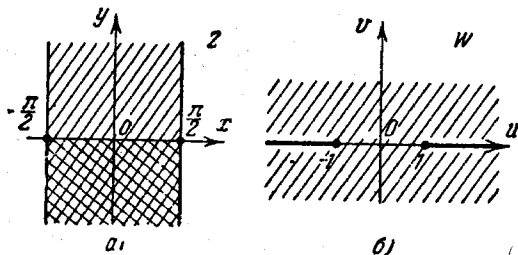
$$w = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad (29)$$

и если точка z движется по прямой $x = \frac{\pi}{2}$ от $y = 0$ до $y = \infty$, то соответствующая ей точка w перемещается по действительной оси от $w = 1$ до $w = +\infty$.

Итак, если точка z обходит границу полуполосы $y > 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ так, что эта полуполоса остается слева, то точка

w пробегает слева направо всю действительную ось, и следовательно, пользуясь принципом взаимно-однозначного соответствия (см. стр. 159), заключаем, что функция $w = \sin z$ отображает рассматриваемую полуполосу на верхнюю полуплоскость.

Пользуясь (27), (28) и (29), нетрудно проверить, что если точка z обходит границу полуполосы $y < 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (на черт. 65, а эта полуполоса заштрихована дважды) так, что

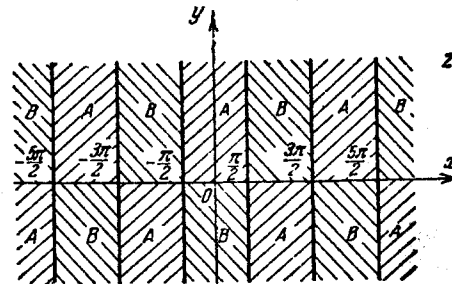


Черт. 65.

эта полуполоса остается слева, то точка w пробегает справа налево всю действительную ось и функция $w = \sin z$ отображает эту полуполосу на нижнюю полуплоскость, причем стороне полуполосы $y < 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ соответствует отрезок $-\infty < w < -1$ действительной оси плоскости w , стороне $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ — отрезок $-1 < w < 1$ и стороне $y < 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ — отрезок $1 < w < \infty$.

Проведенное исследование отображений рассмотренных полуполос приводит к выводу, что полоса $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (черт. 65) отображается функцией $w = \sin z$ на всю плоскость w с разрезами по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞ , причем верхним краем этих разрезов соответствуют в плоскости z линии $x = -\frac{\pi}{2}$, $y > 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, $y > 0$, а нижним краем — линии $x = -\frac{\pi}{2}$, $y < 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, $y < 0$.

Так как $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ и $\sin(z + \pi) = -\sin z$, то (черт. 66) все полуполосы A отображаются функцией $w = \sin z$ на верхнюю, а все полуполосы B — на нижнюю полуплоскость



Черт. 66.

плоскости w . Учитывая вышесказанное, читателю в качестве упражнения рекомендуется построить риманову поверхность функции $z = \operatorname{Arcsin} w$ (листы плоскости w с соответствующими разрезами склеить так, чтобы функция $z = \operatorname{Arcsin} w$ отображала полученную поверхность взаимно-однозначно и непрерывно на плоскость z).

§ 8. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник и многоугольник

Рассмотрим функцию

$$\zeta = \varphi(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (30)$$

где $0 < k < 1$. Особыми точками подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (31)$$

являются точки $z_{1,2} = \pm 1$ и $z_{3,4} = \pm \frac{1}{k}$. Эти точки являются точками разветвления, так как

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \sqrt{1-z} \sqrt{1+z} \sqrt{1-kz} \sqrt{1+kz},$$

а точка $w = 0$ является точкой разветвления функции $\sqrt[n]{w}$

(см. стр. 182). Следовательно, выбор однозначной ветви функции $f(z)$ возможен лишь в такой области, в которой нельзя обойти вокруг точек ± 1 и $\pm \frac{1}{k}$. Для того чтобы обеспечить выполнение указанных условий, будем считать, что точка z в правой части (30) расположена в верхней полуплоскости или на действительной оси (но не в точках ± 1 и $\pm \frac{1}{k}$) и что путь интегрирования тоже лежит в верхней полуплоскости. Если в дальнейшем будет необходимо интегрировать по действительной оси, то потребуем, чтобы точки ± 1 , $\pm \frac{1}{k}$ обходились, например, по верхним полуокружностям с центрами в этих точках. При этих условиях функция $\zeta = \varphi(z)$, определенная равенством (30), будет аналитической и однозначной во всей верхней полуплоскости, а также на действительной оси, за исключением точек ± 1 , $\pm \frac{1}{k}$.

Для того чтобы функция $\zeta = \varphi(z)$ была вполне определена, нужно договориться о том, какую из двух ветвей функции $f(z)$ мы выбираем. Условимся брать ту ветвь функции $f(z)$, для которой $f(0) = 1$ (для другой ветви $f(0) = -1$).

Найдем линию в плоскости ζ , на которую с помощью (30) отображается действительная ось плоскости z . Точке $z = 0$ соответствует, очевидно, точка $\zeta = 0$. Если точка z движется из положения $z = 0$ по действительной оси вправо, то интеграл в правой части (30) является обычным определенным интегралом функции действительного переменного, причем пока $z < 1$, подынтегральная функция положительна, а поэтому ζ тоже является положительной величиной, возрастающей при возрастании z . При $z = 1$ интеграл (30) становится несобственным, обозначим его $\frac{\omega_1}{2}$:

$$\frac{\omega_1}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)}. \quad (32)$$

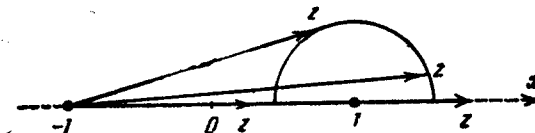
Величина ω_1 зависит от k и может быть найдена по таблицам эллиптических интегралов (см., например, [10], таблицу 22).

Продолжим теперь движение точки z по действительной оси в положительном направлении. Точнее, пусть точка z , двигаясь от точки $z = 0$ вправо в положительном направлении и несколько

не дойдя до точки $z = 1$, обходит точку $z = 1$ по верхней полуокружности радиуса ρ (впоследствии нужно считать, что $\rho \rightarrow 0$), после чего точка z продолжает двигаться по действительной оси в положительную сторону. При $1 < z < \frac{1}{k}$ подкоренное выражение в знаменателе становится отрицательным и корень мнимым. Выясним, будет ли при этом мнимая часть знаменателя положительной или отрицательной. Запишем $V(1-z^2)(1-k^2z^2)$ в виде

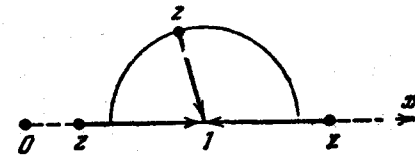
$$V(1-z^2)(1-k^2z^2) = V1-z \sqrt{1+z} V1-kz \sqrt{1+kz}. \quad (33)$$

Для последних трех множителей точка $z = 1$ не является точ-



Черт. 67.

кой разветвления, и поэтому при переходе через эту точку аргумент каждого из этих множителей не изменится. Действительно, рассмотрим, например, $V1+z$. Число $1+z = z - (-1)$ изображается вектором, идущим из точки -1 в точку z . При $0 < z < 1$ этот вектор (черт. 67) идет по действительной оси в положительную сторону. Следовательно, $\arg(1+z) = 0$. Когда точка z движется по полуокружности с центром в точке $z = 1$, вектор, изображающий число



Черт. 68.

$1+z$, сначала отклоняется от действительной оси, но после того, как точка z , описав полуокружность, вернулась на действительную ось, направление вектора опять становится прежним. Таким образом, обход вокруг точки $z = 1$ не влияет на аргумент числа $1+z$, а следовательно и числа $V1+z$. Аналогично обстоит дело с множителями $V1-kz$ и $V1+kz$.

Рассмотрим теперь первый множитель $V1-z$. Число $1-z$ изображается вектором, идущим из точки z в точку 1 (черт. 68).

При $0 < z < 1$ этот вектор направлен по действительной оси в положительную сторону, что соответствует тому, что $\arg(1-z) = 0$. Но когда точка z обходит по полуокружности точку $z=1$, вектор поворачивается на 180° по часовой стрелке, следовательно, его аргумент уменьшается на π , и поэтому при $z > 1$ аргумент числа $1-z$ нужно считать равным $-\pi$, а аргумент числа $\sqrt{1-z}$ равным, соответственно, $-\frac{\pi}{2}$. Так как аргументы всех остальных множителей в (33) не изменились и остались равными нулю, то аргумент всего произведения также станет при $1 < z < \frac{1}{k}$ равным $-\frac{\pi}{2}$, а так как это произведение стоит в знаменателе подынтегральной функции, то аргумент подынтегральной функции (31) при $1 < z < \frac{1}{k}$ следует считать равным $+\frac{\pi}{2}$, т. е. величину $f(z)$ нужно считать чисто мнимой с положительной мнимой частью. Это значит, что при $1 < z < \frac{1}{k}$ удобнее писать:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}, \quad (34)$$

причем радикал в знаменателе положителен. Без предшествующих рассуждений нельзя было установить, справедливо ли при $1 < z < \frac{1}{k}$ равенство (34) или равенство

$$f(z) = -i \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Итак, при $1 < z < \frac{1}{k}$ имеем:

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \\ &+ \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\omega_1}{2} + i \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Если точка z движется по действительной оси от $z=1$ к $z=\frac{1}{k}$, то из (35) следует, что действительная часть ζ остается постоянной и равной $\frac{\omega_1}{2}$, а мнимая часть положительна и уве-

личивается, так как подынтегральная функция в последнем интеграле правой части (35) положительна. Это значит, что точка ζ движется параллельно мнимой оси от точки $\zeta = \frac{\omega_1}{2}$ до точки $\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$, где ω_2 — несобственный интеграл

$$\omega_2 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}},$$

вычисляемый с помощью таблиц эллиптических интегралов.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно убедиться, что после того, как точка z обойдет по полуокружности точку $\frac{1}{k}$, аргумент $f(z)$ увеличится еще на $\frac{\pi}{2}$ и станет равным π , т. е. величина $f(z)$ станет действительной и отрицательной. Это означает, что при $z > \frac{1}{k}$ следует писать:

$$f(z) = -\frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}},$$

причем радикал в правой части положителен. Следовательно, при $z > \frac{1}{k}$ будем иметь:

$$\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 - \int_{\frac{1}{k}}^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}.$$

Если $z \rightarrow \infty$, то

$$\zeta \rightarrow \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 - \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}.$$

Пользуясь подстановкой $t = \frac{1}{k\tau}$, $dt = -\frac{d\tau}{k\tau^2}$ и учитывая, что $\tau=1$ при $t=\frac{1}{k}$ и $\tau \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получим:

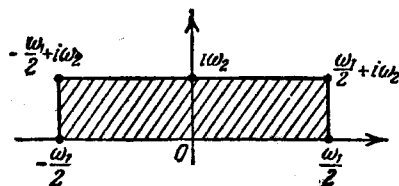
$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}} &= \int_1^0 \frac{-d\tau}{k\tau^2 \sqrt{\left(\frac{1}{k^2\tau^2}-1\right)\left(\frac{1}{\tau^2}-1\right)}} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-k^2\tau^2)(1-\tau^2)}} = \frac{\omega_1}{2} \end{aligned}$$

в соответствии с (32). Следовательно, если $z \rightarrow \infty$, то $\zeta \rightarrow i\omega_2$.

Итак, если точка z движется по действительной оси от $z = \frac{1}{k}$ до $z = \infty$, то точка ζ движется параллельно действительной оси от $\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ до $\zeta = i\omega_2$.

Продолжая аналогичные рассуждения, обнаружим, что когда точка z движется по действительной оси от $z = -\infty$ до $z = -\frac{1}{k}$, точка ζ продолжает перемещаться параллельно мнимой оси от $\zeta = i\omega_2$ до $\zeta = -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$. Далее, отрезок действительной оси плоскости z между $z = -\frac{1}{k}$ и $z = -1$ отображится на отрезок, параллельный мнимой оси плоскости ζ между точками $\zeta = -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ и $\zeta = -\frac{\omega_1}{2}$, и, наконец, отрезок действительной оси между точками $z = -1$ и $z = 0$ отображится на отрезок действительной оси между точками $\zeta = -\frac{\omega_1}{2}$ и $\zeta = 0$.

Таким образом, если точка z пробегает слева направо всю действительную ось (верхняя полуплоскость остается при этом



Черт. 69.

слева), то соответствующая точка ζ обходит против часовой стрелки границу прямоугольника, изображенного на черт. 69. Отсюда следует, что функция $\zeta = \varphi(z)$, определенная с помощью (30), отображает конформно и взаимно-однозначно верхнюю

полуплоскость плоскости z на прямоугольник со сторонами длины ω_1 и ω_2 плоскости ζ . Обратная функция $z = F(\zeta)$ отображает прямоугольник плоскости ζ на верхнюю полуплоскость плоскости z .

Если требуется отобразить верхнюю полуплоскость на некоторый заданный прямоугольник, то сначала, пользуясь таблицами эллиптических интегралов, следует подобрать такое значение параметра k , при котором отношение $\omega_1:\omega_2$ будет равно

отношению сторон заданного прямоугольника. При таком выборе параметра k функция $\varphi(z)$, определенная равенством (30), будет отображать верхнюю полуплоскость на прямоугольник, подобный заданному. Для того чтобы этот прямоугольник отобразить на заданный, достаточно воспользоваться преобразованием подобия, а также, если это понадобится, параллельным переносом и поворотом плоскости. Все эти преобразования осуществляются линейной функцией. Следовательно, функция $w = c_1\zeta + c_2$, т. е.

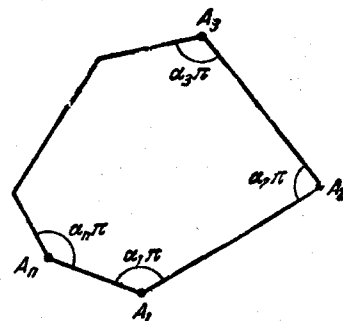
$$w = c_1 \int_0^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} + c_2$$

при соответствующем выборе параметров k , c_1 и c_2 отображает верхнюю полуплоскость на любой заданный прямоугольник.

Функция

$$\zeta = \int_0^z (t-a_1)^{\alpha_1-1} (t-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (t-a_n)^{\alpha_n-1} dt, \quad (36)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные действительные числа, а $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$, является, как в этом можно убедиться, повторяя рассуждения, аналогичные приведенным на стр. 197—202, аналитической и однозначной в верхней полуплоскости и отображает верхнюю полуплоскость на многоугольник плоскости ζ с углами, соответственно равными $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Вершины многоугольника являются образами точек $a_1, a_2, \dots, a_n$. Функцию (36) называют *интегралом Шварца — Кристоффеля*. Отображение (30) получается из (36) как частный случай при $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = \frac{1}{k}, a_4 = -\frac{1}{k}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$.



Черт 70.

Обозначим $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 70) вершины многоугольника, а $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — соответствующие им значения

переменной ζ . Тогда длина стороны $A_k A_{k+1}$ будет равна

$$A_k A_{k+1} = |\zeta_{k+1} - \zeta_k| = \left| \int_0^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots \right. \\ \left. \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt - \int_0^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots \right. \\ \left. \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt \right| = \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots \right. \\ \left. \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt \right|. \quad (37)$$

Если занумеровать точки a_i так, чтобы $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, и считать, что выбор ветвей функций $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) таков, что действительным положительным значениям $z - a_k$ соответствуют действительные положительные значения соответствующих функций, то вместо (37) можно писать:

$$A_k A_{k+1} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots \\ \dots (t - a_k)^{\alpha_k - 1} (a_{k+1} - t)^{\alpha_{k+1} - 1} \dots (a_n - t)^{\alpha_n - 1} dt, \quad (38)$$

так как интеграл в правой части (38) положителен, и знак модуля становится излишним.

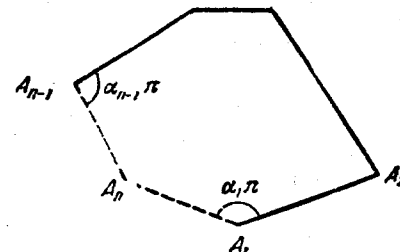
Покажем, как подбирают параметры $a_1, a_2, \dots, a_n$ для того, чтобы многоугольник, на который с помощью (36) отображается верхняя полуплоскость, был подобен некоторому заданному многоугольнику со сторонами $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Для этого достаточно выполнения равенств

$$\frac{A_1 A_2}{A_1 A_2} = \frac{l_2}{l_1}, \frac{A_2 A_3}{A_1 A_2} = \frac{l_3}{l_1}, \dots, \frac{A_{n-1} A_n}{A_1 A_2} = \frac{l_{n-1}}{l_1}, \frac{A_n A_1}{A_1 A_2} = \frac{l_n}{l_1}. \quad (39)$$

Левые части этих равенств в силу (38) содержат под знаками интегралов неизвестные параметры $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для определения этих параметров имеем $n - 1$ уравнений (39). Так как углы многоугольника $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \dots, \alpha_n \pi$ заданы, то два из этих уравнений (например, два последних) являются следствием остальных. В самом деле, если длины всех сторон какого-либо

многоугольника, кроме двух (например, кроме $A_{n-1} A_n$ и $A_n A_1$), найдены, то эти последние стороны можно построить (черт. 71), пользуясь соответствующими углами. Таким образом, для определения неизвестных параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$ мы имеем лишь $n - 3$ независимых уравнений. Следовательно, какие-нибудь три параметра, например a_1, a_2 и a_n , можно выбрать произвольно. Это вполне естественно, так как полуплоскость можно отобразить на себя так, чтобы какие-либо три точки, например a_1, a_2 и a_n , перешли в любые другие три точки на действительной оси.



Черт. 71.

После того как параметры $a_1, a_2, \dots, a_n$ определены так, что удовлетворяется система (39), функция (36) будет отображать верхнюю полуплоскость на многоугольник, подобный заданному многоугольнику, имеющему стороны $l_1, l_2, \dots, l_n$. С помощью функции $w = c_1 \zeta + c_2$ при соответствующем выборе c_1 и c_2 можно затем отобразить этот многоугольник на заданный.

Итак, задача об отображении полуплоскости на заданный многоугольник сводится к определению параметров $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ (параметры $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_n = b_n$ считаем выбранными) из системы уравнений:

$$J_2(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) = \lambda_2 J_1(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) \\ J_2(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) = \lambda_3 J_1(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}), \quad (40) \\ \dots \dots \dots J_{n-2}(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) = \lambda_{n-2} J_1(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}),$$

где $\lambda_k = \frac{l_k}{l_1}$ — отношения длин соответствующих сторон, а (см. (38))

$$J_1 = A_1 A_2 = \int_{b_1}^{b_2} (t - b_1)^{\alpha_1 - 1} (b_2 - t)^{\alpha_2 - 1} (a_3 - t)^{\alpha_3 - 1} \dots \\ \dots (a_{n-1} - t)^{\alpha_{n-1} - 1} (b_n - t)^{\alpha_n - 1} dt,$$

$$J_2 = A_2 A_3 = \int_{b_2}^{a_2} (t-b_1)^{a_1-1} (t-b_2)^{a_2-1} (a_3-t)^{a_3-1} \dots \\ \dots (a_{n-1}-t)^{a_{n-1}-1} (b_1-t)^{a_1-1} dt, \\ \dots \\ J_{n-2} = A_{n-2} A_{n-1} = \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} (t-b_1)^{a_1-1} (t-b_2)^{a_2-1} (t-a_3)^{a_3-1} \dots \\ \dots (t-a_{n-2})^{a_{n-2}-1} (a_{n-1}-t)^{a_{n-1}-1} (b_1-t)^{a_1-1} dt.$$

Укажем один из способов для приближенного решения системы (40). Выберем какую-нибудь начальную систему приближенных значений параметров $a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, \dots, a_{n-1}^{(0)}$ и обозначим $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \dots, J_{n-2}^{(0)}$ значения $J_1, J_2, \dots, J_{n-2}$ при $a_3 = a_3^{(0)}, a_4 = a_4^{(0)}, \dots, a_{n-1} = a_{n-1}^{(0)}$, а $\frac{\partial J_k^{(0)}}{\partial a_m}$ — значения $\frac{\partial J_k}{\partial a_m}$ при тех же значениях параметров. Пусть, далее,

$$\delta_3^{(1)} = a_3 - a_3^{(0)}, \delta_4^{(1)} = a_4 - a_4^{(0)}, \dots, \delta_{n-1}^{(1)} = a_{n-1} - a_{n-1}^{(0)}.$$

Разложив левые и правые части уравнений (40) в ряд по степеням величин $\delta_k^{(1)}$ и, сохранив только первые степени этих величин, получим:

$$J_2^{(0)} + \delta_3^{(1)} \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial a_3} + \delta_4^{(1)} \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + \delta_{n-1}^{(1)} \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial a_{n-1}} = \\ = \lambda_2 \left[J_1^{(0)} + \delta_3^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_3} + \delta_4^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + \delta_{n-1}^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right] \\ \dots \dots \dots (41)$$

$$J_{n-2}^{(0)} + \delta_3^{(1)} \frac{\partial J_{n-2}^{(0)}}{\partial a_3} + \delta_4^{(1)} \frac{\partial J_{n-2}^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + \delta_{n-1}^{(1)} \frac{\partial J_{n-2}^{(0)}}{\partial a_{n-1}} = \\ = \lambda_{n-2} \left[J_1^{(0)} + \delta_3^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_3} + \delta_4^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + \delta_{n-1}^{(1)} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}} \right].$$

Решив эту линейную систему относительно $\delta_3^{(1)}, \delta_4^{(1)}, \dots, \delta_{n-1}^{(1)}$, найдем приближенные значения параметров:

$$a_3^{(1)} = a_3^{(0)} + \delta_3^{(1)}, a_4^{(1)} = a_4^{(0)} + \delta_4^{(1)}, \dots, a_{n-1}^{(1)} = a_{n-1}^{(0)} + \delta_{n-1}^{(1)}.$$

Положив, далее, $\delta_3^{(2)} = a_3 - a_3^{(1)}, \delta_4^{(2)} = a_4 - a_4^{(1)}, \dots, \delta_{n-1}^{(2)} = a_{n-1} - a_{n-1}^{(1)}$, составим для поправок $\delta_3^{(2)}, \delta_4^{(2)}, \dots, \delta_{n-1}^{(2)}$ систему,

аналогичную системе (41), и т. д. Этим методом можно вычислить значения $a_3, a_4, \dots, a_{n-1}$ с любой точностью.

Применение изложенного метода требует умения приближенно вычислять несобственные интегралы вида

$$J_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-b_1)^{a_1-1} (t-b_2)^{a_2-1} (t-a_3)^{a_3-1} \dots \\ \dots (t-a_k)^{a_k-1} (a_{k+1}-t)^{a_{k+1}-1} \dots (b_1-t)^{a_1-1} dt$$

(подынтегральная функция обращается в бесконечность при $t = a_k$ и при $t = a_{k+1}$, поэтому к ним нельзя применять обычные формулы приближенного интегрирования).

Здесь можно воспользоваться следующим методом Л. В. Канторовича. Выбираем какое-нибудь число c_k между a_k и a_{k+1} и пишем $J_k = E_{k1} + E_{k2}$, где

$$E_{k1} = \int_{a_k}^{c_k} (t-b_1)^{a_1-1} (t-b_2)^{a_2-1} (t-a_3)^{a_3-1} \dots \\ \dots (t-a_k)^{a_k-1} (a_{k+1}-t)^{a_{k+1}-1} \dots (b_1-t)^{a_1-1} dt, \\ E_{k2} = \int_{c_k}^{a_{k+1}} (t-b_1)^{a_1-1} (t-b_2)^{a_2-1} (t-a_3)^{a_3-1} \dots \\ \dots (t-a_k)^{a_k-1} (a_{k+1}-t)^{a_{k+1}-1} \dots (b_1-t)^{a_1-1} dt.$$

Обозначим подынтегральную функцию $F(t)$. Имеем:

$$F(t) = (t-a_k)^{a_k-1} \varphi(t), \quad (42)$$

где

$$\varphi(t) = (t-b_1)^{a_1-1} (t-b_2)^{a_2-1} (t-a_3)^{a_3-1} \dots \\ \dots (t-a_{k-1})^{a_{k-1}-1} (a_{k+1}-t)^{a_{k+1}-1} \dots (b_1-t)^{a_1-1}.$$

Преобразуем (42) следующим образом:

$$F(t) = (t-a_k)^{a_k-1} [\varphi(a_k) + \varphi'(a_k) \cdot (t-a_k)] + \\ + (t-a_k)^{a_k-1} [\varphi(t) - \varphi(a_k) - \varphi'(a_k) \cdot (t-a_k)]$$

и разобьем интеграл E_{k1} на два интеграла E'_{k1} и E''_{k1} :

$$E'_{k1} = \int_{a_k}^{c_k} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} [\varphi(a_k) + \varphi'(a_k)(t - a_k)] dt,$$

$$E''_{k1} = \int_{a_k}^{c_k} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} [\varphi(t) - \varphi(a_k) - \varphi'(a_k)(t - a_k)] dt.$$

Первый из этих интегралов легко вычисляется точно с помощью неопределенного интеграла; что же касается второго, то он не является несобственным, так как в соответствии с формулой Тейлора выражение в квадратных скобках под знаком этого интеграла имеет вид

$$\frac{\varphi''(\xi)}{2!} (t - a_k)^2,$$

где $a_k < \xi < t$ и, следовательно,

$$E''_{k1} = \int_{a_k}^{c_k} \frac{\varphi''(\xi)}{2!} (t - a_k)^{\alpha_k + 1} dt.$$

Отсюда видно, что подынтегральная функция ограничена, интеграл не является несобственным и может быть вычислен по какой-нибудь из известных формул приближенного интегрирования. Аналогично вычисляется интеграл E_{k2} .

Заметим в заключение, что интеграл Шварца — Кристоффеля используется для приближенных конформных отображений. Если требуется отобразить полуплоскость (или круг) на некоторую односвязную область, то подбирают многоугольник с достаточно большим числом сторон так, чтобы ломаная, ограничивающая этот многоугольник, была достаточно близка к границе заданной области, и заменяют приближенно функцию, отображающую полуплоскость на данную область, интегралом Шварца — Кристоффеля, отображающим полуплоскость на подобранный многоугольник. Подробнее о приближенных конформных отображениях см. [5].

§ 9. Понятие о вариационных методах приближенного конформного отображения

Конформное отображение области на круг обладает некоторыми экстремальными свойствами, благодаря которым задачу об отображении области на круг можно рассматривать как вариационную и для приближенного решения этой задачи применять различные приближен-

ные методы решения вариационных задач, например метод Ритца¹⁾. Напомним, что идея метода Ритца в применении к функционалу

$$V[z(x, y)] = \iint_D F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) dx dy, \text{ где } p(x, y) =$$

$= \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$ с какими-нибудь граничными условиями заключается в том, что значения функционала $V[z(x, y)]$ рассматриваются не на произвольных допустимых функциях данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях

$z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x, y)$ с постоянными коэффициентами α_i , составленных из функций некоторой выбранной системы $w_1(x, y), w_2(x, y), \dots, w_n(x, y)$.

При этом, конечно, предполагается, что функции $\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x, y)$ являются допустимыми в рассматриваемой вариационной задаче. На таких линейных комбинациях функционал $V[z(x, y)]$ превращается в функцию $V[z_n(x, y)] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ достигала экстремума. Следовательно, если коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ независимы, то они должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если при найденных из этой системы значениях α_i функция $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ достигает максимума или минимума, то

$z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x, y)$ дает приближенное решение вариационной задачи.

Для некоторых часто встречающихся классов функционалов при определенном выборе функций $w_i(x, y)$ могут быть указаны оценки погрешностей при применении метода Ритца (см. [5]).

Докажем следующее экстремальное свойство конформного отображения области на круг.

При конформном отображении $w = f(z)$ круга $|z| < R$ на некоторую область G , удовлетворяющую условиям

$$f(0) = 0 \tag{43}$$

и

$$f'(0) = 1, \tag{44}$$

площадь области G больше или равна площади отображаемого круга.

Заметим, что условию (43) при отображении круга $|z| = R$ на некоторую область G всегда можно удовлетворить параллельным переносом области G , а условию (44) можно удовлетворить путем изме-

¹⁾ С вариационным исчислением читатель может ознакомиться по книге [16], а более подробное изложение приближенных методов конформного отображения можно найти в [5] и [IV].

нения масштаба отображаемой области, т. е. путем соответствующего выбора радиуса отображаемого круга.

Доказательство. Разложив аналитическую внутри круга $|z| < R$ функцию $f(z)$ в окрестности точки $z=0$ в ряд Тейлора, получим:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (45)$$

$$(a_0 = f(0) = 0, \quad a_1 = f'(0) = 1).$$

При конформном отображении $w = f(z)$ элемент площади $dx dy$ или в полярных координатах $\rho d\rho d\varphi$ приобретает множитель $|f'(z)|^2$, так как при конформном отображении коэффициент линейного растяжения в точке z равен $|f'(z)|$. Следовательно, площадь S области G в полярных координатах равна

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 \rho d\rho d\varphi,$$

где $z = \rho e^{i\varphi}$, или

$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} f'(z) \overline{f'(z)} \rho d\rho d\varphi. \quad (46)$$

Пусть G^* — та часть области G , на которую функция $f(z)$ отображает круг $|z| < r$ радиуса r , меньшего чем R . Площадь S^* области G^* равна

$$S^* = \int_0^r \int_0^{2\pi} f'(z) \overline{f'(z)} \rho d\rho d\varphi. \quad (46a)$$

Из (45) получим:

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} + \dots,$$

откуда

$$\overline{f'(z)} = 1 + 2\bar{a}_2 \bar{z} + \dots + n\bar{a}_n \bar{z}^{n-1} + \dots$$

или, полагая $z = \rho e^{i\varphi}$,

$$f'(z) = 1 + 2a_2 \rho e^{i\varphi} + \dots + na_n \rho^{n-1} e^{i(n-1)\varphi} + \dots, \quad (47)$$

$$\overline{f'(z)} = 1 + 2\bar{a}_2 \rho e^{-i\varphi} + \dots + m\bar{a}_m \rho^{m-1} e^{-i(m-1)\varphi} + \dots \quad (48)$$

Принимая во внимание (46a), (47), (48), получим:

$$S^* = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{a}_m n m \rho^{n+m-1} e^{i(n-m)\varphi} d\rho d\varphi. \quad (49)$$

Заметим, что если $n \neq m$, то $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = 0$; если же $n = m$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Следовательно, интегрируя почленно равномерно сходящиеся при $0 \leq \rho \leq r$ ($r < R$) и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ряды в (49) сначала по φ , а затем по ρ , получим:

$$S^* = 2\pi \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \rho^{2n-1} d\rho = \pi r^2 |a_1|^2 + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n}$$

или, так как $a_1 = 1$,

$$S^* = \pi r^2 + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n},$$

откуда $S^* \geq \pi r^2$.

Принимая во внимание, что r можно выбрать сколь угодно близким к R и что площадь S области G больше площади S^* области G^* , получим:

$$S \geq \pi R^2,$$

причем величина S может быть равна площади πR^2 отображаемого круга лишь, если все $a_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$), но тогда $f(z) = z$ и отображение $f(z)$ является тождественным.

Доказанная теорема позволяет утверждать, что при конформном отображении некоторой области G на область F , осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условиям (43), (44), из всевозможных областей F наименьшую площадь имеет круг.

Действительно, если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют условиям (43) и (44), то и $f(z) = \psi[\varphi(z)]$ удовлетворяет тем же условиям:

$$f(0) = \psi[\varphi(0)] = \psi(0) = 0$$

и

$$f'(0) = \psi'[\varphi(0)] \varphi'(0) = \psi'(0) \varphi'(0) = 1.$$

Поэтому конформное отображение области G на F можно рассматривать как результат двух последовательно совершаемых конформных отображений φ и ψ , удовлетворяющих условиям (43) и (44), первое из которых отображает область G на круг, а второе отображает этот круг на область F , и так как при втором отображении площадь может лишь увеличиваться, то наименьшую площадь из областей F будет иметь круг.

Итак, аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям (43) и (44) и отображающая область G на круг, реализует минимум интеграла (46), который может быть записан в виде

$$S = \iint_G f'(z) \overline{f'(z)} dx dy. \quad (50)$$

Искомую функцию $f(z)$, реализующую минимум интеграла (50), можно приближенно определить методом Рунца. Выберем систему $n+1$ аналитических в области G и линейно независимых функций $w_0(z), w_1(z), \dots, w_n(z)$ так, чтобы хотя бы одна из них, например $w_0(z)$, была отлична от нуля в точке $z=0$. Рассмотрим значение

функционала (50) не на произвольных допустимых функциях $f'(z)$, а лишь на линейных комбинациях функций $w_k(z)$:

$$f'_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k w_k(z),$$

с произвольными постоянными комплексными коэффициентами $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$, подчиненными условию $f'_n(0) = 1$, т. е.

$$\alpha_0 w_0(0) + \alpha_1 w_1(0) + \dots + \alpha_n w_n(0) = 1, \quad (51)$$

которому, в силу предположения $w_0(0) \neq 0$, всегда можно удовлетворить выбором коэффициента α_0 :

$$\alpha_0 = \frac{1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(0)}{w_0(0)}. \quad (51a)$$

Подставляя вместо $f'(z)$ под знак интеграла (50) функцию

$$f'_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k w_k(z),$$

получим некоторую функцию комплексных коэффициентов $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$:

$$S[f'_n(z)] = \iint_G \sum_{k=0}^n \alpha_k w_k(z) \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_k \bar{w}_k(z) dx dy = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

(α_0 выражено через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ с помощью (51a)) или функцию $\Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ действительных коэффициентов β_k и γ_k ($k=1, 2, \dots, n$).

Пользуясь основными необходимыми условиями минимума функции $\Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

определим β_k и γ_k и тем самым найдем $f'_n(z)$. Отсюда, интегрируя, получим $f_n(z)$, причем постоянная интегрирования определится из условия $f_n(0) = 0$.

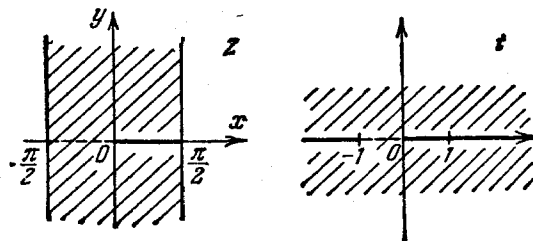
Заметим, что вычисление функции $\Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ значительно упрощается, если функции w_k взаимно-ортогональны в области G , т. е. если $\iint_G w_k \bar{w}_l dx dy = 0$ при $k \neq l$; чаще всего в ка-

честве функций w_k берут систему ортогональных в области G полиномов.

§ 10. Принцип симметрии

Приведем без доказательства формулировку еще одной весьма полезной теоремы теории конформного отображения, называемой *принципом симметрии* (см. [9], гл. XII, § 2).

Если функция $f(z)$, аналитическая в области G и непрерывная на ее границе, содержащей дугу окружности (или прямолинейный отрезок) γ , отображает область G на некоторую область G' так, что дуга γ отображается на дугу γ' , также являющуюся либо дугой окружности, либо прямолинейным отрезком, то функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить через дугу γ и продолженная таким образом функция будет отображать пару точек (из которых одна принадлежит области G) взаимно-симметричных относительно γ , в пару точек взаимно-симметричных относительно γ' .



Черт. 72.

Пример 1. Найти функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость полосу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ с разрезом вдоль отрезка $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (черт. 72).

Функция $t = \sin z$ отображает, как было показано (см. стр. 194), полуполосу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$ на верхнюю полуплоскость. При этом отрезок $(0, \frac{\pi}{2})$ оси x переходит в отрезок $(0, 1)$ действительной оси плоскости t , отрезок $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ оси x — в отрезок $(-1, 0)$ действительной оси, отрезку $0 < y < \infty$ прямой $x = -\frac{\pi}{2}$ соответствует отрезок $(-\infty, -1)$ действительной оси и отрезку $0 < y < \infty$ прямой $x = \frac{\pi}{2}$ — отрезок $(1, \infty)$ действительной оси плоскости t .

Применим принцип симметрии, выбрав в качестве дуги γ , о которой идет речь в формулировке принципа и через которую осуществ-

вляется аналитическое продолжение, отрезок $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ действительной оси (ему соответствует, как указано выше, отрезок $(-1, 0)$ действительной оси плоскости t). На основании принципа симметрии можно утверждать, что функция $t = \sin z$ будет отображать нижнюю полуполосу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y < 0$ на нижнюю полуплоскость плоскости t (функцией, полученной аналитическим продолжением из верхней полуполосы функции $\sin z$ через отрезок $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, будет опять-таки функция $\sin z$, так как эта функция является аналитической во всей плоскости). При этом, в силу принципа симметрии, отрезку $-\infty < y < 0$ прямой $x = -\frac{\pi}{2}$ будет соответствовать нижний край отрезка $(-\infty, -1)$ действительной оси плоскости t , отрезку $-\infty < y < 0$ прямой $x = \frac{\pi}{2}$ — нижний край отрезка $(1, \infty)$ действительной оси, а нижнему краю отрезка $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (вдоль этого отрезка, как сказано в условии, сделан разрез, т. е. этот отрезок входит в границу интересующей нас области, в то время как отрезок $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, обозначенный на чертеже пунктиром, лежит внутри этой области) — нижний край отрезка $(0, 1)$ действительной оси плоскости t . Итак, функция $t = \sin z$ отображает данную в условии задачи область на всю плоскость t с разрезами по действительной оси вдоль отрезков $(-\infty, -1)$ и $(0, \infty)$.

Функция

$$T = \frac{t+1}{t} = \frac{\sin z + 1}{\sin z}$$

«склеивает» эти два разреза (в этом читатель может легко убедиться самостоятельно) и отображает заданную область на всю плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Наконец, функция $w = \sqrt{T}$, т. е.

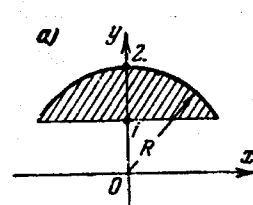
$$w = \sqrt{\frac{\sin z + 1}{\sin z}},$$

отображает заданную в условии задачи область на верхнюю полуплоскость.

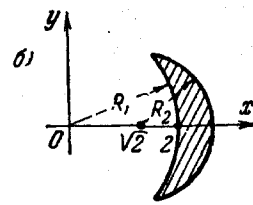
Задачи к главе VIII

1. Найти функцию, отображающую конформно и взаимно-однозначно единичный круг плоскости z на нижнюю полуплоскость плоскости w так, что точки $z = 1, i, -i$ переходят в точки $w = 1, 0, -1$.

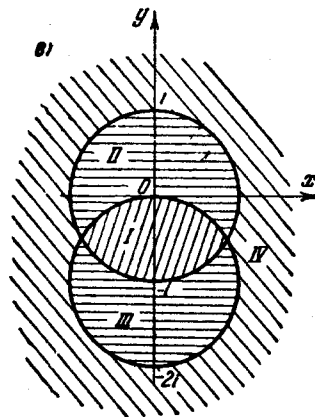
2. Найти функцию, отображающую конформно и взаимно-однозначно верхнюю полуплоскость плоскости z на единичный круг



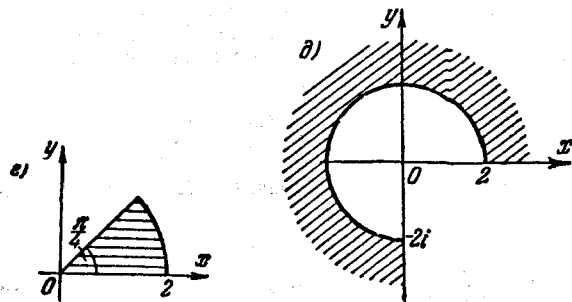
$$\operatorname{Im} z > 1, |z| < 2.$$



$$|z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}.$$

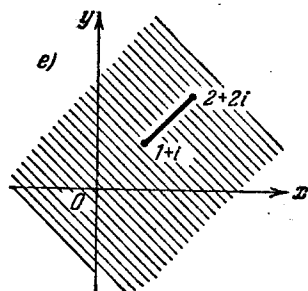


- I. $|z| < 1, |z + i| < 1$; II. $|z| < 1, |z + i| > 1$;
III. $|z| > 1, |z + i| < 1$; IV. $|z| > 1, |z + i| > 1$.

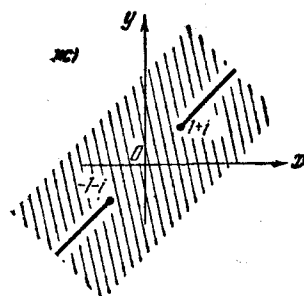


$$|z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

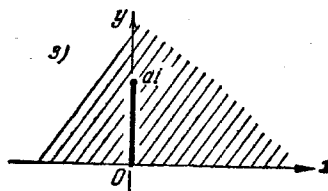
$$|z| > 2, 0 < \arg z < \frac{3}{2}\pi.$$



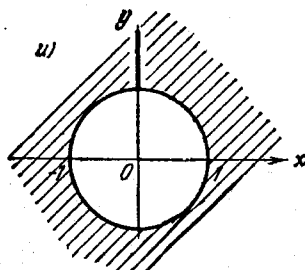
Вся плоскость с разрезом по отрезку, соединяющему точки $1+i$ и $2+2i$.



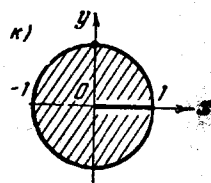
Вся плоскость с разрезом по биссектрисе координатного угла от $z = 1+i$ до $z = \infty$ и от $z = -1-i$ до $z = \infty$.



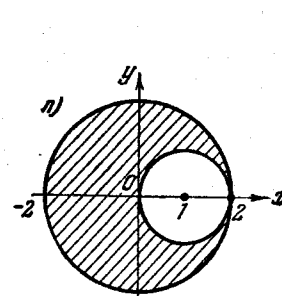
Вся плоскость с разрезом по отрезку, соединяющему точки $z = 0$ и $z = ai$.



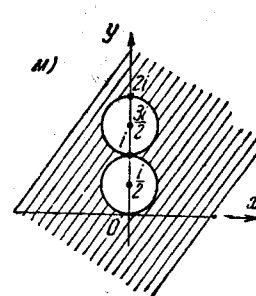
Внешность единичного круга с разрезом по мнимой оси от $z = i$ до $z = \infty$.



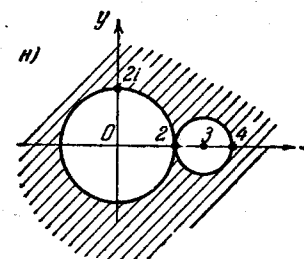
Внутренность единичного круга с разрезом по радиусу от $z = 0$ до $z = 1$.



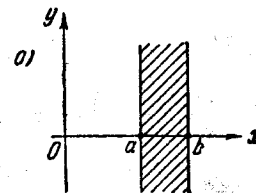
$$|z| < 2, \quad |z-1| < 1.$$



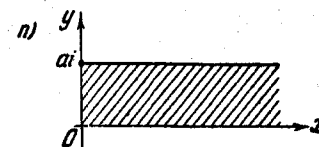
$$\left| z - \frac{i}{2} \right| > \frac{1}{2}, \quad \left| z - \frac{3}{2}i \right| > \frac{1}{2}.$$



$$|z| > 2, \quad |z-3| > 1.$$



$$a < \operatorname{Re} z < b.$$



$$\operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < a.$$

плоскости, w так, что точке $z=i$ и направлению, идущему из этой точки параллельно действительной оси в положительную сторону, соответствуют точка $w=0$ и выходящее из точки $w=0$ положительное направление мнимой оси.

3. Найти функцию $w=f(z)$, отображающую конформно и взаимно-однозначно единичный круг на себя и такую, что:

а) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \quad \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$

б) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \quad \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$

в) $f(0)=0, \quad \arg f'(0)=-\frac{\pi}{2}.$

4. Найти какую-нибудь функцию, отображающую взаимно-однозначно и конформно на верхнюю полуплоскость каждую из заштрихованных на чертежах а) — п) (стр. 215—217) областей, ограниченных отрезками прямых и дугами окружностей.

5. На какую область плоскости w отображает функция $w=\cos z$ полосу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$?

6. На какую область плоскости w отображает функция $w=\operatorname{tg} z$ полосу $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$?

ГЛАВА IX

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

§ 1. Плоско-параллельные векторные поля

Векторное поле

$$A = A_x(x, y, z, t)i + A_y(x, y, z, t)j + A_z(x, y, z, t)k,$$

где i, j, k — единичные векторы, направленные по осям координат, t — время, называется плоско-параллельным, если все векторы поля параллельны некоторой плоскости P , причем в точках каждой прямой, перпендикулярной к этой плоскости, в любой фиксированный момент времени t векторы поля равны (черт. 73).

В дальнейшем мы будем считать плоскость XOY параллельной плоскости P . Тогда

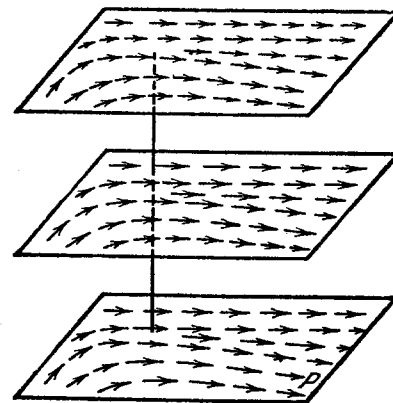
$$A_z(x, y, z, t) = 0$$

и

$$A = A_x(x, y, t)i + A_y(x, y, t)j.$$

Очевидно, что изучение плоско-параллельного векторного поля сводится к изучению плоского векторного поля в плоскость P или в любой другой параллельной ей плоскости.

Векторное поле называется стационарным, если оно не изменяется с течением времени.



Черт. 73.

В этой главе мы будем рассматривать лишь *плоские* (или плоско-параллельные) стационарные векторные поля:

$$A = A_x(x, y)i + A_y(x, y)j. \quad (1)$$

Точку (x, y) в плоскости XOY можно характеризовать комплексным числом $z = x + iy$, а вектор $A = A_x(x, y)i + A_y(x, y)j$ — комплексным числом $w = A_x(x, y) + iA_y(x, y)$. Поэтому наряду с записью (1) вектор A можно представлять в виде

$$A = A_x(x, y) + iA_y(x, y). \quad (1a)$$

Следовательно, векторное поле (1) можно задать, указав две функции действительных переменных $A_x(x, y)$ и $A_y(x, y)$ или одну функцию комплексного переменного $\varphi(z) = A_x(x, y) + iA_y(x, y)$.

§ 2. Комплексный потенциал

Напомним некоторые понятия векторного анализа (см. [2], гл. XIII или [3], ч. II, гл. IV) в применении к плоским стационарным векторным полям (1) или в комплексной форме (1a). Проекции $A_x(x, y)$ и $A_y(x, y)$ вектора A в области их определения будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Циркуляцией вектора поля A вдоль замкнутого контура C называется криволинейный интеграл

$$\Gamma_C = \int_C A_s(x, y) ds,$$

где A_s — проекция вектора $A(x, y)$ на положительное направление касательной к дуге C в точке (x, y) (положительное направление на касательной соответствует положительному направлению обхода дуги C), ds — элемент дуги кривой C . Если ввести вектор $ds = i dx + j dy$ (или в комплексной форме $ds = dx + i dy$), то скалярное произведение

$$(A \cdot ds) = A_s ds = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$$

$$\Gamma_C = \int_C (A \cdot ds) = \int_C A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy. \quad (2)$$

Если в некоторой односвязной области циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то подынтегральное вы-

ражение $A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$ в этой области является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, называемой *потенциальной функцией*. По отношению к функции $u(x, y)$ вектор A называется *градиентом* $u(x, y)$ и обозначается

$$A = \text{grad } u(x, y).$$

Справедливо и обратное утверждение: если в (2) подынтегральное выражение $A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в односвязной области G :

$$du = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy,$$

т. е.

$$A_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

то циркуляция по любому замкнутому контуру C в этой области равна нулю.

В рассматриваемом случае, т. е. при $A = \text{grad } u(x, y)$, векторное поле называется *безвихревым* или *потенциальным*.

Для того чтобы в (2) подынтегральное выражение $A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$ являлось полным дифференциалом и, следовательно, поле $A = A_x(x, y)i + A_y(x, y)j$ было бы потенциальным, как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x}. \quad (3)$$

Если условие (3) выполняется во всех точках рассматриваемого поля, за исключением конечного числа точек z_i , в которых условие (3) нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из производных $\frac{\partial A_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial A_y}{\partial x}$, то циркуляция по замкнутому контуру C , обходящему какую-нибудь из этих точек или группу таких точек, может быть отличной от нуля. Если циркуляция по контуру C , ограничивающему область D , внутри которой находится лишь одна из этих точек z_i , отлична от нуля, то точка z_i называется *вихревой точкой*. Если при этом контур C однократно обходит точку z_i в положительном направлении, то число Γ_C называется *интенсивностью вихря* в точке z_i .

Потоком вектора поля A через замкнутую или незамкнутую кривую C называется криволинейный интеграл

$$N_C = \int_C A_n ds,$$

где ds — элемент дуги кривой C , а A_n — проекция вектора $A(x, y)$ на положительное направление нормали к кривой C в точке (x, y) .

Вектор dn , направленный по нормали к кривой C в точке (x, y) и по длине равный вектору $ds = i dx + j dy$, направленному по касательной к той же кривой, можно записать в виде

$$dn = \pm (i dy - j dx).$$

Выбрав какой-нибудь из двух знаков перед скобкой в правой части равенства, мы установим положительное направление на нормали. Условимся в дальнейшем брать знак $+$, тогда $dn = i dy - j dx$. При этом условии для замкнутого контура C с направлением обхода против часовой стрелки вектор dn направлен по внешней нормали к контуру C .

Так как

$$A_n ds = (A \cdot dn) = A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx,$$

то

$$N_C = \int_C A_n ds = \int_C (A \cdot dn) = \int_C A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx. \quad (4)$$

Если в некоторой области поток вектора через любой замкнутый контур C равен нулю, то подынтегральное выражение $A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx$ в (4) является полным дифференциалом некоторой функции $v(x, y)$, называемой *функцией тока* (это название связано с гидродинамическим смыслом функции v , см. стр. 227):

$$dv = A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x(x, y).$$

В этом случае поле называется *соленоидальным*.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является

$$\frac{\partial A_y(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Если условие соленоидальности (5) выполняется во всех точках рассматриваемого поля, за исключением конечного числа точек z_i , в которых условие (5) нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из производных $\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x}$ или $\frac{\partial A_y(x, y)}{\partial y}$, то поток вектора поля через замкнутый контур, внутри которого содержатся точки z_i , может быть отличным от нуля.

Если поток вектора поля N_C через замкнутый контур C , ограничивающий область, в которой содержится лишь одна из этих точек z_i , отличен от нуля, то точка z_i называется *источником*, если $N_C > 0$, и *стоком*, если $N_C < 0$. При этом предполагается, что контур C обходится в положительном направлении, т. е. при обходе контура C точка z_i остается слева. Если контур C однократно обходит точку z_i в положительном направлении, то число N_C называется *производительностью* или *интенсивностью* источника (если $N_C > 0$) или стока (если $N_C < 0$). Если в области D , ограниченной контуром C , не проходящим через точки z_i , содержится несколько точек z_i , то поток вектора поля N_C через контур C , однократно проходимый в положительном направлении, равен алгебраической сумме производностей всех источников и стоков, находящихся в области D .

Аналогичная теорема, являющаяся следствием свойств криволинейных интегралов от полных дифференциалов, конечно справедлива и для циркуляции по контуру C в потенциальном поле с конечным числом вихревых точек.

Предположим, что поле $A(x, y)$ потенциально и соленоидально и, следовательно, существуют потенциальная функция $u(x, y)$ и функция тока $v(x, y)$, определяемые с точностью до постоянных слагаемых своими полными дифференциалами:

$$du = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$$

$$dv = A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx.$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называемую *комплексным потенциалом*. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условиям

Эйлера — Даламбера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= A_x(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = A_y(x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -A_y(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно, комплексный потенциал $f(z) = u + iv$ является аналитической функцией.

Весь превосходно разработанный аппарат теории аналитических функций может быть использован для изучения потенциально-соленоидальных векторных полей, если их описывать с помощью комплексного потенциала.

Если известен комплексный потенциал $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то соответствующее ему векторное поле $A = A_x(x, y) + iA_y(x, y)$ легко определяется, так как

$$A_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\text{или } \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad A_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \left(\text{или } -\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = A_x(x, y) - iA_y(x, y),$$

получим:

$$A = A_x(x, y) + iA_y(x, y) = \overline{f'(z)}. \quad (6)$$

Следовательно, $|A(x, y)| = |f'(z)|$, а аргумент вектора $A(x, y)$ отличается от аргумента вектора $f'(z)$ знаком (так как $\arg f'(z) = -\arg \overline{f'(z)}$). Линии уровня функций u и v :

$$u(x, y) = c_1 \text{ и } v(x, y) = c_2,$$

образуют ортогональную сеть, так как их образами в плоскости w при сохраняющем углы конформном отображении $w = f(z)$ являются взаимно-ортогональные семейства прямых, параллельных осям координат $u = c_1$ и $v = c_2$. Линии уровня функции $u(x, y)$ ортогональны вектору поля, так как вектор поля A является градиентом функции $u(x, y)$:

$$A = \operatorname{grad} u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j.$$

Следовательно, вектор поля $A(x, y)$ направлен по касательным

к линиям уровня $v(x, y) = c_2$, т. е. линии уровня функции $v(x, y)$ являются векторными линиями рассматриваемого векторного поля.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_C f'(z) dz &= \int_C [A_x(x, y) - iA_y(x, y)](dx + i dy) = \\ &= \int_C [A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy] + i \int_C [A_x(x, y) dy - \\ &\quad - A_y(x, y) dx] = \Gamma_C + iN_C \end{aligned}$$

где C — замкнутый контур (см. (2) и (4)).

Во многих прикладных задачах приходится изучать потенциально-соленоидальные векторные поля с изолированными особыми точками z_i , т. е. точками, в которых не выполнены условие потенциальности $\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$ или условие соленоидальности $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$. Среди точек z_i могут быть вихревые точки, источники и стоки. Могут быть вихревые точки, которые одновременно являются источниками или стоками; такие точки называются *вихреисточниками* или *вихрестокками*. Могут быть также и иные особые точки, например особые точки, получающиеся от слияния источника со стоком равной бесконечной интенсивности (см. стр. 231).

Заметим, что если условия потенциальности (3) и соленоидальности (5) выполнены в многосвязной области G , то потенциальная функция $u(x, y)$ и функция тока $v(x, y)$ могут быть многозначными.

Действительно,

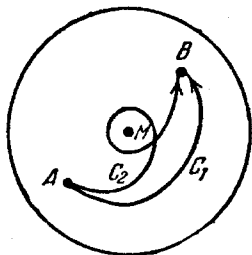
$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy, \quad (7)$$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx, \quad (8)$$

но в случае многосвязной области G криволинейные интегралы от полных дифференциалов могут до некоторой степени зависеть от пути интегрирования, соединяющего заданные точки $P(x_0, y_0)$ и $Q(x, y)$, — эти интегралы совпадают при изменении пути интегрирования лишь с точностью до слагаемого,

равного линейной комбинации с целыми коэффициентами некоторых постоянных, называемых циклическими постоянными (см [12], гл. III, § 2).

На черт. 74 изображена двухсвязная область: круг, из которого удалена точка M .



Черт. 74.

Если точка M является вихревой точкой, то криволинейные интегралы (7), взятые по путях C_1 и C_2 , очевидно, будут отличаться на не равную нулю циркуляцию вектора A по замкнутому контуру C , однократно обходящему точку M . Точно также, если точка M является источником (или стоком), то криволинейные интегралы (8), взятые по путям C_1 и C_2 , будут отличаться на величину потока вектора через упомянутый выше замкнутый контур C , т. е. на производительность источника (или стока), находящегося в точке M .

§ 3. Комплексный потенциал в гидродинамике

Рассмотрим поле скоростей $A(x, y) = A_x(x, y)i + A_y(x, y)j$ стационарного плоско-параллельного движения несжимаемой жидкости в области, не имеющей источников или стоков жидкости.

В рассматриваемом случае поток $N_C = \int_C A_n ds$ вектора скорости $A(x, y)$ через некоторую кривую C по абсолютной величине равен в соответствующих единицах количеству жидкости, протекающей в единицу времени через кривую C^1 . Если в области D , ограниченной замкнутым контуром C , нет источников и стоков, то, в силу несжимаемости жидкости, ее количество внутри контура C не может изменяться и, следовательно, количество втекающей в область D жидкости равно количеству вытекающей жидкости, т. е. поток вектора скорости через замкнутый контур C равен нулю — поле соленоидально.

¹⁾ Точнее, количеству жидкости, протекающей через цилиндрическую поверхность единичной высоты с образующими, параллельными оси Oz , проекцией которой на плоскость Oxy является кривая C .

Если к тому же рассматриваемое поле скоростей движения несжимаемой жидкости потенциально, то для его изучения целесообразно ввести комплексный потенциал

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

При этом векторными линиями $v = c$ в данном случае будут линии тока жидкости, так как касательный к ним вектор A является вектором скорости течения. Отсюда и происходит название функции v — «функция тока». Названия «источник», «сток», «производительность» источника или стока также заимствованы из рассматриваемой в этом параграфе гидродинамической интерпретации векторного поля.

Пример 1. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, комплексный потенциал которого равен az , где действительное число $a > 0$.

Функция $w = az$ является аналитической во всей плоскости и, следовательно, ее можно рассматривать как комплексный потенциал движения несжимаемой жидкости, в котором отсутствуют вихревые точки, источники, стоки и другие особые точки.

Так как

$$\frac{dw}{dz} = a$$

и a — число действительное и положительное, то вектор скорости параллелен действительной оси, направлен в положительную сторону и по длине равен a во всех точках плоскости.

Пример 2. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, линии тока, линии уровня потенциальной функции (эквипотенциальные линии), зная комплексный потенциал

$$w = \operatorname{Ln} z.$$

Для течения жидкости, определяемого комплексным потенциалом

$$w = \operatorname{Ln} z,$$

особой точкой является начало координат, так как $z = 0$ является особой точкой функции

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}^1).$$

Длина вектора скорости A в точке z в соответствии с (6) равна

$$|A| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}.$$

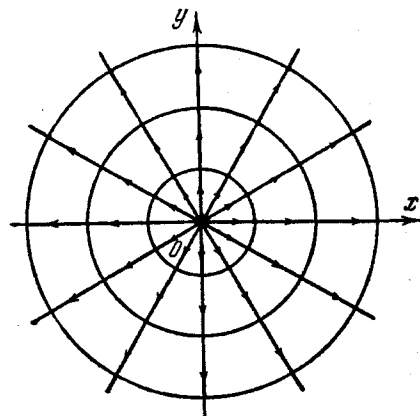
¹⁾ Предполагается, что при дифференцировании выбирается непрерывная в окрестности точки $z (z \neq 0)$ ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ (см. стр. 192).

Следовательно, модуль вектора скорости обратно пропорционален расстоянию точки от начала координат.

Угол α , образованный направлением вектора скорости и положительным направлением оси Ox , согласно (6), равен

$$\alpha = -\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \operatorname{Arg} z,$$

и следовательно, направление вектора скорости в точке z совпадает с направлением луча, идущего из начала координат в эту точку. Очевидно, линиями тока являются лучи, выходящие из начала координат (черт. 75), а линиями уровня потенциальной функции — окружности с центром в начале координат.



Черт. 75

Начало координат является источником. Так как других особых точек нет, то для подсчета количества жидкости, производимого этим источником в единицу времени, достаточно подсчитать поток через любой простой замкнутый контур, содержащий начало координат. Выбрав в качестве такого контура окружность C радиуса r с центром в начале координат, получим

$$N = \int_C A_n ds = \int_C \frac{1}{r} ds = \frac{1}{r} \int_C ds = \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi$$

(так как на окружности C всюду $A_n = |A| = \frac{1}{r}$).

Пример 3. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, линии тока и эквипотенциальные линии, зная комплексный потенциал $w = i \operatorname{Ln} z$.

Для комплексного потенциала

$$w = i \operatorname{Ln} z$$

единственной особой точкой является начало координат. Пусть A — вектор скорости, а α — угол, образованный этим вектором с положи-

тельным направлением действительной оси. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{i}{z}, \quad |A| = \left| \frac{i}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad \alpha = -\operatorname{Arg} \frac{i}{z} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} z.$$

Модуль вектора скорости обратно пропорционален расстоянию точки от начала координат, а направление вектора скорости (черт. 76) перпендикулярно к лучу, соединяющему точку с началом координат, т. е. совпадает с направлением касательной к окружности с центром в начале координат, проходящей через данную точку. Отсюда следует, что линиями тока являются окружности с центром в начале координат, а линиями уровня потенциальной функции — лучи, выходящие из начала координат. К этому же выводу можно бы было прийти, выделив из комплексного потенциала потенциальную функцию и функцию тока.

Начало координат является вихревой точкой. Для того чтобы вычислить циркуляцию вектора A по контуру C , обходящему вихревую точку, проще всего взять в качестве контура C окружность с центром в начале координат произвольного радиуса r . Вектор скорости касателен к этой окружности и

$$A_s = -|A| = -\frac{1}{r}$$

(отрицательный знак указывает на то, что движение происходит по часовой стрелке). Следовательно,

$$\Gamma = \int_C A_s ds = - \int_C \frac{1}{r} ds = -2\pi.$$

Пример 4. Найти линии тока движения несжимаемой жидкости, если комплексный потенциал равен $(a + bi) \operatorname{Ln} z$.

Из примеров 2 и 3 следует, что в движении, определяемом комплексным потенциалом

$$w = (a + bi) \operatorname{Ln} z,$$

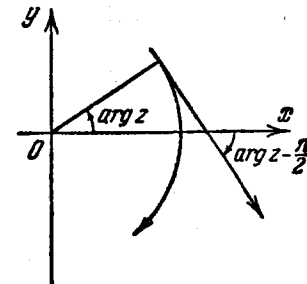
где a и b — действительные постоянные, начало координат является вихреисточником (если $a > 0$, $b \neq 0$) или вихресток (если $a < 0$, $b \neq 0$), причем поток через контур, окружающий начало координат, равен $2\pi a$, а циркуляция равна $-2\pi b$.

Линиями тока являются логарифмические спирали (черт. 77). Действительно,

$$w = (a + bi) \operatorname{Ln} z = (a + bi)(\ln \rho + i\varphi) = (a \ln \rho - b\varphi) + i(b \ln \rho + a\varphi), \quad \text{где } z = \rho e^{i\varphi}.$$

Функция тока имеет вид

$$v = b \ln \rho + a\varphi$$



Черт. 76.

и линии тока определяются уравнением

$$b \ln \rho + a\varphi = c, \text{ где } c — \text{постоянная,}$$

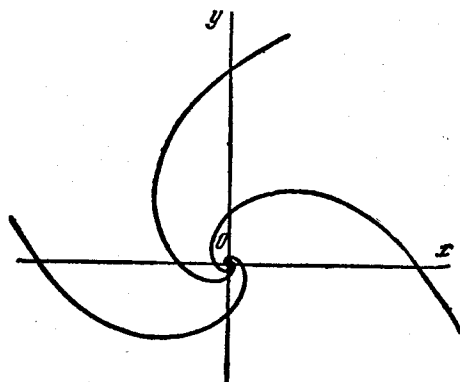
или

$$\ln \rho = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \varphi,$$

откуда

$$\rho = C e^{-\frac{a}{b} \varphi} \quad (C = e^{\frac{c}{b}}).$$

Пример 5. Найти линии тока, эквипотенциальные линии и особые точки движения несжимаемой жидкости, если комплексный потенциал равен $\frac{1}{z}$.



Черт. 77.

Движение, определенное комплексным потенциалом

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2},$$

имеет единственную особую точку $z=0$.

Так как

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2},$$

то в прежних обозначениях получим:

$$|A| = \left| -\frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{|z|^2}; \quad \alpha = -\operatorname{Arg} \left(-\frac{1}{z^2} \right) = 2 \operatorname{Arg} z - \pi.$$

Уравнение семейства линий тока

$$\frac{y}{x^2+y^2} = c, \text{ где } c — \text{постоянная,}$$

или

$$x^2 + y^2 = 2cy,$$

или

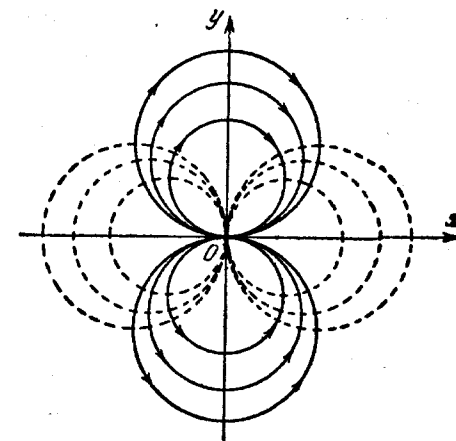
$$x^2 + (y-c)^2 = c^2.$$

Линиями тока (черт. 78) являются окружности с центрами на оси Oy , касающиеся оси Ox . Аналогичные вычисления показывают, что линиями уровня потенциальной функции (на черт. 78 они обозначены пунктиром) являются окружности $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ с центрами на оси Ox , касающиеся оси Oy .

Легко убедиться в том, что жидкость движется по линиям тока в указанном на черт. 78 направлении. Для этого достаточно подсчитать величину угла α между вектором скорости A и положительным направлением оси Ox , например для точек, лежащих на мнимой оси, т.е. для точек z, y которых $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что комплексный потенциал

$$w = \frac{\operatorname{Ln}(z+h) - \operatorname{Ln} z}{h}$$



Черт. 78.

при действительном положительном h определяет течение жидкости с источником в точке $-h$ (см. пример 2), производящим в единицу времени количество жидкости, равное $\frac{2\pi}{h}$, и стоком в начале координат, поглощающим такое же количество жидкости. Так как

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(z+h) - \operatorname{Ln} z}{h} = (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z},$$

то начало координат в течении жидкости, определяемом комплексным потенциалом $w = \frac{1}{z}$, можно рассматривать как точку, в которой совмещены сток и источник одинаковой «бесконечно большой» производительности. Такую точку называют *диполем*¹⁾.

¹⁾ Впрочем, диполь можно рассматривать также, как точку, в которой совмещены две вихревые точки с одинаковыми бесконечно большими, но противоположными по знаку циркуляциями, так как величину h можно считать мнимой (см. пример 3).

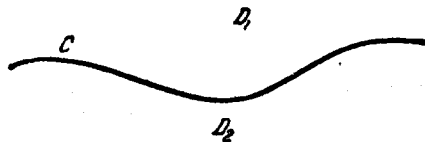
Нетрудно непосредственным вычислением проверить, что поток через любой замкнутый контур, окружающий диполь и не содержащий других особых точек, и циркуляция по такому контуру равны нулю.

§ 4. Задачи на обтекание

В задачах на обтекание требуется определить комплексный потенциал плоско-параллельного поля скоростей безвихревого течения несжимаемой жидкости, обтекающего заданные покоящиеся в жидкости цилиндрические твердые тела, образующие которых перпендикулярны к плоскости векторного поля (можно считать также, что эти цилиндрические тела движутся в покоящейся жидкости в направлении, перпендикулярном к образующим цилиндрических поверхностей).

Очевидно, течение жидкости не определяется одной только формой обтекаемых тел, поэтому для единственности решения задачи на обтекание необходимо, кроме формы обтекаемых тел, задать еще некоторые добавочные условия.

1. Течение в криволинейной полуплоскости. Рассмотрим самонепересекающуюся гладкую кривую C в обе стороны удаляющуюся в бесконечность (это означает, что при движении точки z по кривой C в любую сторону z стремится к бесконечности). Эта кривая разбивает плоскость на две области D_1 и D_2 (черт. 79), называемые криволинейными полуплоскостями.



Черт. 79.

Задача заключается в том, чтобы в одной из этих областей (например, D_1) определить комплексный потенциал поля скоростей безвихревого течения несжимаемой жидкости, в котором отсутствуют источники и стоки, обтекающего кривую C .

Так как в точках кривой C вектор скорости должен быть направлен по касательной к этой кривой, то кривая C должна быть линией тока искомого поля скоростей $v(x, y) = v_0$, где v_0 постоянно.

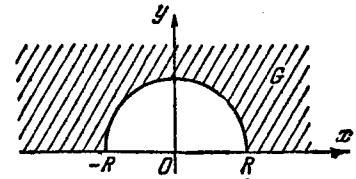
Так как функция тока $v(x, y)$ определяется по своим частным производным:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y(x, y) \text{ и } \frac{\partial v}{\partial y} = A_x(x, y),$$

то она определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, можно считать $v_0 = 0$.

Итак, искомый комплексный потенциал $w = u(x, y) + iv(x, y)$ должен отображать кривую C в прямую $v = 0$, а следовательно, область D_1 должна отображаться в полуплоскость $v > 0$ (или $v < 0$).

Существует (см. стр. 158—159) бесконечное множество аналитических функций, осуществляющих указанное отображение.



Черт. 80.

Чтобы задача стала вполне определенной, необходимы добавочные условия.

В задачах гидродинамики такими условиями обычно являются задание модуля вектора скорости в бесконечности, т. е. задание $|f'(z)|$ при $z = \infty$, и требование $f(\infty) = \infty$.

Рассмотрим в качестве примера безвихревое течение жидкости (без источников и стоков), обтекающей линию, составленную из луча $-\infty < x \leq -R$, верхней полуокружности радиуса R с центром в точке $z = 0$ и луча $R \leq x < \infty$, в области G (черт. 80), расположенной выше этой линии. В соответствии со сказанным выше комплексный потенциал $w = f(z)$ такого течения должен отображать границу области G на действительную ось, а область G — на верхнюю (или нижнюю) полуплоскость. Скорость в бесконечности будем считать заданной и равной числу v_∞ (v_∞ — действительное число, так как, в силу условий задачи, скорость в бесконечности направлена по действительной оси).

Область G ограничена дугой окружности и частью прямой, поэтому с помощью дробно-линейной функции, отображающей одну из общих точек в бесконечно удаленную точку, она отобразится на внутренность угла (прямого, так как углы при отображении сохраняются). Такой функцией является, например, функция

$$t = \frac{z - R}{z + R}, \quad (9)$$

отображающая точку R в точку 0 , а точку $-R$ в точку ∞ . Так как при этом точка $z = Ri$, лежащая на верхней полуокружности, переходит в точку

$$t = \frac{Ri - R}{Ri + R} = i,$$

то полуокружность отображается на положительную часть мнимой оси плоскости t . При движении точки z от точки R (соответствующей точке $t=0$) к точке Ri отображаемая область остается справа, а так как при этом точка t движется по мнимой оси вверх (от $t=0$ к $t=i$), то функция (9) отображает область G на первую четверть плоскости t , а функция

$$T = t^2 = \left(\frac{z-R}{z+R}\right)^2$$

отображает область G на верхнюю полуплоскость. Следовательно, функции, отображающие область G на верхнюю (или нижнюю) полуплоскость, имеют следующий вид (см. стр. 167):

$$\begin{aligned} w &= \frac{aT+b}{cT+d} = \frac{a\left(\frac{z-R}{z+R}\right)^2 + b}{c\left(\frac{z-R}{z+R}\right)^2 + d} = \\ &= \frac{a(z-R)^2 + b(z+R)^2}{c(z-R)^2 + d(z+R)^2} = \frac{(a+b)z^2 + 2(b-a)Rz + (a+b)R^2}{(c+d)z^2 + 2(d-c)Rz + (c+d)R^2}, \end{aligned}$$

где a, b, c, d — действительные постоянные. Так как при $z = \infty$ по условию

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \neq 0,$$

то степень многочлена, стоящего в знаменателе, должна быть ниже степени многочлена, стоящего в числителе. Следовательно, $c+d=0$ (если числитель и знаменатель являются многочленами второй степени относительно z , то $\frac{dw}{dz}$ имеет вид дроби, числитель которой 3-й степени, а знаменатель 4-й степени относительно z и, следовательно, $\frac{dw}{dz} = 0$ при $z = \infty$). Заметим, что при $c+d=0$ условие $f(\infty) = \infty$ будет выполнено, если $a+b \neq 0$.

Итак,

$$w = \frac{(a+b)z^2 + 2(b-a)Rz + (a+b)R^2}{2(d-c)Rz} = \alpha z + \beta + \frac{\alpha R^2}{z},$$

где

$$\alpha = \frac{a+b}{2(d-c)R}; \quad \beta = \frac{b-a}{d-c}.$$

Отсюда

$$\frac{dw}{dz} = \alpha - \frac{\alpha R^2}{z^2},$$

причем, так как $\frac{dw}{dz} = v_\infty$ при $z = \infty$, то $\alpha = v_\infty$.

Если учесть, что комплексный потенциал определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого (так как скорость течения определяется производной комплексного потенциала), то можно считать $\beta = 0$ и окончательно

$$w = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (10)$$

Так как $\frac{dw}{dz} = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$, то модуль вектора скорости определяется равенством

$$|A| = \left| v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) \right|.$$

В точках $z = \pm R$ скорость равна нулю; такие точки называются *критическими*.

Отделив в (10) мнимую часть от действительной, определим функцию тока:

$$u + iv = v_\infty \left(x + iy + \frac{R^2}{x + iy} \right) = v_\infty \left[x + iy + \frac{R^2(x - iy)}{x^2 + y^2} \right],$$

откуда

$$v = y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}.$$

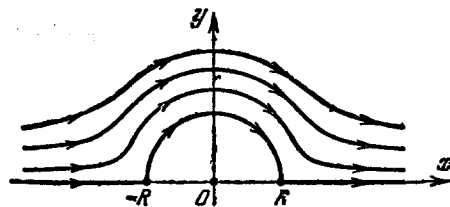
Следовательно, семейство линий тока определяется уравнением

$$y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} = C,$$

или

$$(x^2 + y^2 - R^2)y = C(x^2 + y^2).$$

Линии тока (черт. 81) симметричны относительно оси Oy и имеют асимптоты, параллельные оси Ox .



Черт. 81.

2. Течение в криволинейной полосе. Рассмотрим криволинейную полосу D (черт. 82), ограниченную двумя гладкими кривыми C_1 и C_2 , пересекающимися лишь в бесконечности.

Задача опять заключается в определении в полосе D поля скоростей стационарного течения несжимаемой жидкости, обтекающей кривые C_1 и C_2 , или комплексного потенциала этого поля.

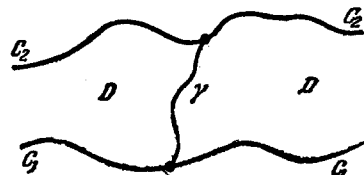
Так как кривые C_1 и C_2 должны быть линиями тока искомого течения жидкости, то комплексный потенциал отображает линии C_1 и C_2 на прямые $v=v_0$ и $v=v_1$. Опять без ограничения общности можно считать $v_0=0$. Следовательно, определение искомого комплексного потенциала сводится к нахождению аналитической функции, отображающей заданную криволинейную полосу D на прямолинейную полосу, ограниченную прямыми $v=0$ и $v=v_1$.

Конечно, для однозначного определения комплексного потенциала необходимы добавочные условия. Такими условиями в гидромеханике обычно являются задание расхода жидкости, т. е. потока N_γ вектора скорости, через кривую γ , соединяющую кривые C_1 и C_2 (черт. 82), и требование ограниченности скорости при $z \rightarrow \infty$.

Заметим, что задание расхода жидкости N_γ определяет значение v_1 . Действительно (см. стр. 222),

$$N_\gamma = \int_\gamma A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx = \int_\gamma dv = v_1 - v_0 = v_1,$$

так как $v_0=0$.



Черт. 82.

Пример. Найти комплексный потенциал течения жидкости в канале, берега которого (черт. 83) имеют форму парабол $x=y^2 - \frac{1}{4}$ и $x=\frac{y^2}{4} - 1$, если расход жидкости равен Q .

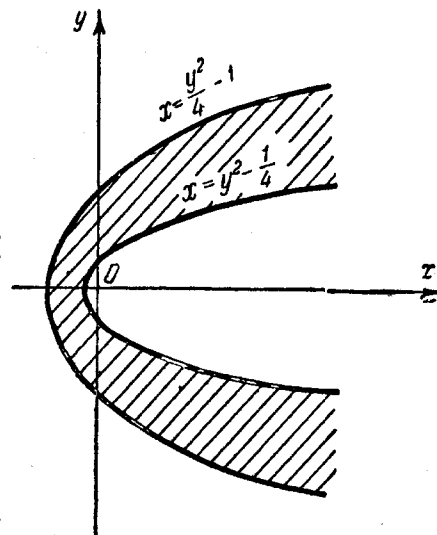
Функция $w = \sqrt{z}$ (см. стр. 22) отображает криволинейную полосу между параболami $x=y^2 - \frac{1}{4}$

и $x=\frac{y^2}{4} - 1$ в полосу между прямыми $v=\frac{1}{2}$ и $v=1$.

Здесь $v_1 - v_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, функция $w = \sqrt{z}$ является комплексным потенциалом течения жидкости в заданном канале, когда расход жидкости равен $\frac{1}{2}$.

Функция $w = 2Q \sqrt{z}$, соответствующая расходу Q , дает решение поставленной задачи.



Черт. 83.

3. Обтекание замкнутого контура. Найдем сначала комплексный потенциал плоско-параллельного течения жидкости, обтекающей круговой цилиндр радиуса R , предполагая, что в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, течение симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через центр сечения цилиндра, а скорость в бесконечности направлена параллельно оси симметрии и равна v_∞ .

Выберем систему координат так, чтобы начало координат находилось в центре сечения цилиндра, а направление скорости в бесконечности совпадало с положительным направлением оси Ox (черт. 84). Из условий задачи следует, что линия, составленная из отрезка $-\infty < x \leq -R$ действительной оси, верхней полуокружности радиуса R с центром в точке $z=0$ и отрезка $R \leq x < \infty$, должна быть одной из линий тока, и следовательно, дело сводится к задаче, уже решенной

на стр. 233—235. Таким образом, комплексный потенциал в рассматриваемой задаче равен

$$W = v_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (10)$$

Найдем более общее решение задачи. Выше было показано (пример 3 на стр. 228—229), что функция

$$w = i \Gamma \ln z$$

является комплексным потенциалом течения с вихревой точкой в начале координат и циркуляцией, равной -2π . Линиями тока в этом случае являются окружности с центром в начале координат. Для комплексного потенциала

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (11)$$

Черт. 84.

величина циркуляции вокруг вихревой точки в начале координат равна Γ , а скорость в бесконечности равна нулю. Так как цилиндр радиуса R с центром в начале координат обтекается каждым из течений, определяемых комплексными потенциалами (10) и (11), то течение с комплексным потенциалом

$$w = v_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (12)$$

будет также обтекать этот цилиндр. Скорость такого течения в бесконечности параллельна действительной оси и равна v_{∞} , циркуляция вокруг начала координат равна Γ .

Найдем критические точки, т. е. точки, в которых скорость равна нулю:

$$\frac{dw}{dz} = v_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z} = 0,$$

или после преобразований

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i v_{\infty}} z - R^2 = 0, \quad (13)$$

откуда

$$z = \frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty}} i \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2}}. \quad (14)$$

Если $\left| \frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty}} \right| \leq R$, то радикал в правой части последнего равенства принимает действительные значения и в критических точках

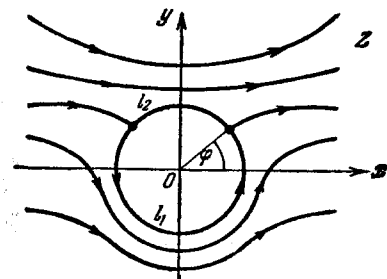
$$|z| = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2} + \left(R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_{\infty}^2} \right)} = R. \quad (15)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае обе критические точки находятся на окружности $|z| = R$, причем, как видно из (14) и (15),

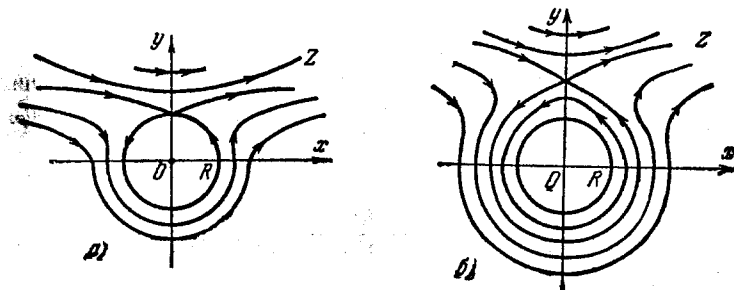
$$\sin \varphi = \frac{\Gamma}{4\pi R v_{\infty}}, \quad (16)$$

где φ — аргумент критической точки (черт. 85). В частности, в случае рассмотренного в начале этого параграфа потока без циркуляции ($\Gamma = 0$) критическими точками являются точки $z = \pm R$.

Критические точки делят окружность $|z| = R$ на две дуги l_1 и l_2 ; в одной из критических точек (точке разветвления) линия тока разветвляется на две: одна идет по дуге l_1 , другая по дуге l_2 ; во второй критической точке (точке схода)



Черт. 85.



Черт. 86.

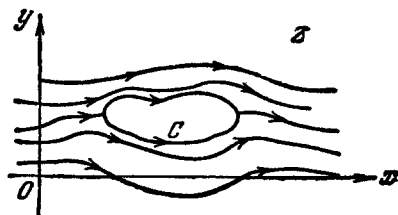
эти линии опять соединяются. Если известны величина и направление скорости в бесконечно удаленной точке, то, как видно из формулы (16), положение точки разветвления (или точки схода) определяет величину циркуляции Γ .

Если $\left| \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \right| = R$, то обе критические точки совпадают (черт. 86, а) и окружность $|z| = R$ становится замкнутой линией тока.

При $\left| \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \right| > R$ равенство (14) принимает вид

$$z = i \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_\infty^2} - R^2} \right),$$

и модуль одного из критических значений больше, чем R . В силу известного свойства корней квадратного уравнения, из (13) следует, что произведение модулей критических значений равно R^2 , поэтому модуль второго критического значения меньше, чем R , и в этом случае вне цилиндра расположена только одна критическая точка. Проходящая через нее замкнутая



Черт. 87.

линия тока отделяет замкнутые линии тока от незамкнутых (черт. 86, б).

Если C — заданный замкнутый контур (черт. 87), а функция $t = \varphi(z)$ отображает внешность контура C взаимно-однозначно и конформно на внешность круга радиуса R с центром в начале координат, то в соответствии с (12) функция

$$w = v_\infty \left[\varphi(z) + \frac{R^2}{\varphi(z)} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \varphi(z) \quad (17)$$

является комплексным потенциалом течения, обтекающего C . С помощью функции $t = \varphi(z)$ линии тока течения, обтекающего в плоскости z контур C , отображаются на линии тока течения, обтекающего в плоскости t круг радиуса R ; точка $t = \infty$ является при этом общей для всех линий тока. потребовав, чтобы $\varphi(\infty) = \infty$, мы получим в плоскости z течение, обладающее тем же свойством. Если потребовать еще, чтобы $\varphi'(\infty) = 1$ ¹⁾, то скорость течения, определяемого комплексным

¹⁾ Аналитическая функция, отображающая одну односвязную область на другую, определяется однозначно (см. стр. 159), если задать в какой-либо точке отображаемой области значение отображающей функции и аргумент ее производной. Поэтому для определения единственной функции $t = \varphi(z)$, отображающей внешность контура C на

потенциалом (17) в бесконечно удаленной точке, окажется равной v_∞ , так как

$$\frac{dw}{dz} \Big|_{z=\infty} = \frac{dw}{dt} \Big|_{t=\infty} \frac{dt}{dz} \Big|_{z=\infty} = v_\infty \cdot 1 = v_\infty.$$

В качестве примера рассмотрим обтекание профилей Жуковского. На стр. 188 было показано, что функция

$$T = z + \sqrt{z^2 - a^2} \quad (18)$$

отображает внешность профиля Жуковского на внешность круга радиуса $R = \sqrt{a^2 + h^2 + d}$ с центром в точке $T_0 = hi + de^{i(\pi - \arctg \frac{h}{a})} = hi - de^{-i \arctg \frac{h}{a}}$ (черт. 88).

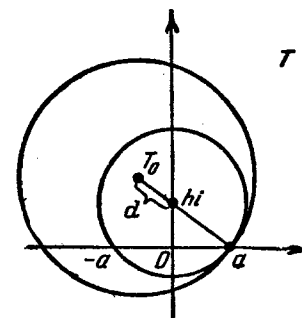
Из (18) имеем:

$$\frac{dT}{dz} = 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

$$\text{и } \frac{dT}{dz} = 2 \text{ при } z = \infty.$$

Следовательно, функция

$$t = \varphi(z) = \frac{1}{2}(z - T_0 + \sqrt{z^2 - a^2}) \quad (19)$$



Черт. 88.

удовлетворяет условиям $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) = 1$ и отображает внешность профиля Жуковского на внешность круга радиуса $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} + d)$ с центром в начале координат. Подставив (19) вместо $\varphi(z)$ в формулу (17), найдем комплексный потенциал течения, обтекающего профиль Жуковского и имеющего в бесконечности скорость v_∞ , направленную по положительному направлению действительной оси. Остается только определить циркуляцию Γ . Для этого воспользуемся условием Чаплыгина, в силу которого при обтекании контура с острием (т. е. с

внешность данного круга $|t| > R$, достаточно, кроме равенства $\varphi(\infty) = \infty$, задать только аргумент числа $\varphi'(\infty)$, например считать этот аргумент равным нулю, т. е. считать $\varphi'(\infty)$ действительным положительным числом. Следовательно, вообще говоря, невозможно найти функцию $\varphi(z)$, осуществляющую требуемое отображение и удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) &= \infty, \\ \varphi'(\infty) &= 1, \end{aligned} \quad (a)$$

если считать радиус круга R в плоскости t заданным, но можно найти такой радиус R , при котором условия (a) будут выполнены. При этом число R в равенстве (17) определяется из условий (a).

точкой, в которой угол между касательными меньше, чем π) точка схода смещается в острие. Так как

$$|a - hi| = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad \arg(a - hi) = -\operatorname{arctg} \frac{h}{a},$$

то

$$a - hi = \sqrt{a^2 + h^2} e^{-i \operatorname{arctg} \frac{h}{a}},$$

и с помощью функции (19) острие профиля Жуковского ($z = a$) отобразится в точку

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{1}{2}(a - T_0) = \frac{1}{2}\left(a - hi + de^{-i \operatorname{arctg} \frac{h}{a}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} + d)e^{-i \operatorname{arctg} \frac{h}{a}}. \end{aligned}$$

Следовательно, аргумент точки схода в плоскости t равен $-\operatorname{arctg} \frac{h}{a}$.

Подставив это значение вместо φ в формулу (16), получим:

$$\Gamma = -4\pi v_\infty R \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{h}{a}\right),$$

а так как

$$R = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} + d)$$

и

$$\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{h}{a}\right) = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

то окончательно

$$\Gamma = -2\pi v_\infty h \left(1 + \frac{d}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right).$$

§ 5. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе

Выведем сначала формулу С. А. Чаплыгина для величины подъемной силы, действующей на крыло самолета. При скоростях, меньших скорости звука, можно, как известно, воздух считать несжимаемой жидкостью. Для удобства предположим, что крыло самолета, профиль C которого изображен на черт. 89¹⁾, покоится, а окружающий его воздух движется. Это движение будем считать установившимся и безвихревым в области G , внешней к контуру C , и на контуре C и

¹⁾ Мы считаем крыло, имеющим форму цилиндра; на черт. 89 дано сечение этого цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующей. Вычисления ведутся для цилиндра единичной высоты.

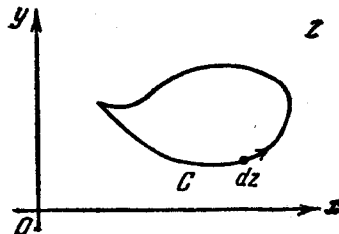
имеющим в бесконечности определенную скорость. Будем считать также, что в области G и на контуре C отсутствуют источники и стоки.

Величина давления вычисляется по формуле Бернулли

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2,$$

где A — постоянная, ρ — плотность и V — величина скорости в рассматриваемой точке. Так как давление перпендикулярно к соответствующему элементу дуги контура C , то вектор, изображающий силу, действующую на элемент дуги контура, будет соответствовать комплексному числу

$$\left(A - \frac{\rho}{2} V^2\right) i dz$$



Черт. 89.

(вектор $i dz$ равен по модулю вектору dz , но перпендикулярен к нему).

Следовательно, комплексное число P , соответствующее вектору силы, действующей на весь контур C , равно

$$P = \int_C \left(A - \frac{\rho}{2} V^2\right) i dz = -\frac{i\rho}{2} \int_C V^2 dz,$$

так как, в силу теоремы Коши,

$$\int_C A dz = 0.$$

Если $f(z)$ — комплексный потенциал рассматриваемого течения, то число $f'(z)$ соответствует вектору скорости в точке z , а число $|f'(z)|$ равно модулю вектора скорости V :

$$V = |f'(z)|.$$

Следовательно,

$$P = -\frac{i\rho}{2} \int_C |f'(z)|^2 dz. \quad (20)$$

Так как во всякой точке контура C скорость направлена по касательной к C , то для точек контура C , обозначив

$$\operatorname{Arg} dz = \alpha,$$

получим:

$$\operatorname{Arg} \overline{f'(z)} = \alpha$$

$$\operatorname{Arg} f'(z) = -\alpha.$$

Отсюда, пользуясь свойствами аргумента, имеем:

$$\operatorname{Arg} \{ [f'(z)]^2 dz \} = -2\alpha + \alpha = -\alpha$$

и

$$\operatorname{Arg} \{ |f'(z)|^2 dz \} = \alpha,$$

так как $|f'(z)|$ — положительное действительное число и его аргумент равен нулю. Таким образом, во всякой точке контура C аргументы величин $[f'(z)]^2 dz$ и $|f'(z)|^2 dz$ отличаются только знаком, а так как модули этих величин одинаковы, то эти величины являются взаимно-сопряженными. Переходя в обеих частях равенства (20) к сопряженным величинам, найдем комплексное число $\bar{P}$, сопряженное числу, изображаемому вектором подъемной силы:

$$\bar{P} = \frac{\rho l}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz.$$

Эта формула носит название *формулы С. А. Чаплыгина*.

Производная комплексного потенциала является, в силу сделанных предположений, функцией, аналитической вне контура C , и следовательно, может быть разложена в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд Лорана. Если $\bar{V}_\infty$ — число, сопряженное числу, изображаемому вектором скорости в бесконечно удаленной точке, то в окрестности бесконечно удаленной точки имеем:

$$f'(z) = \bar{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (21)$$

Если V_x и V_y — взятые с соответствующими знаками проекции вектора скорости на координатные оси, то

$$f'(z) = V_x - iV_y,$$

и следовательно, для всякого замкнутого контура L в области O имеем в соответствии с правилом вычисления интеграла по комплексному аргументу

$$\begin{aligned} \int_L f'(z) dz &= \int_L (V_x - iV_y) (dx + i dy) = \\ &= \int_L V_x dx + V_y dy + i \int_L V_x dy - V_y dx. \end{aligned}$$

Но, если контур C находится внутри контура L , то ввиду того, что течение вне контура C безвихревое, а источники и стоки отсутствуют, в соответствии с формулами (2) и (4) (стр. 220 и 222) находим.

$$\begin{aligned} \int_L V_x dx + V_y dy &= \int_C V_x dx + V_y dy = \Gamma, \\ \int_L V_x dy - V_y dx &= \int_C V_x dy - V_y dx = N, \end{aligned}$$

где Γ — циркуляция вектора V по контуру C , а N — поток этого вектора через контур C . Следовательно,

$$\int_L f'(z) dz = \Gamma + iN. \quad (22)$$

С другой стороны, если контур L лежит в области сходимости ряда (21), с помощью формулы для вычисления коэффициентов ряда Лорана получим:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L f'(z) dz. \quad (23)$$

В рассматриваемом случае $N=0$, так как вектор скорости направлен по касательной к контуру C , и, сравнивая (22) и (23), находим:

$$c_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

Возведя ряд, стоящий в правой части (21) в квадрат (для этого нужно составить ряд, членами которого являются квадраты членов рассматриваемого ряда и всевозможные удвоенные попарные произведения его членов), будем иметь:

$$[f'(z)]^2 = \bar{V}_\infty^2 + \frac{2\bar{V}_\infty c_{-1}}{z} + \frac{c_{-1}^2 + 2\bar{V}_\infty c_{-2}}{z^2} + \dots^1.$$

Отсюда

$$\int_L [f'(z)]^2 dz = 2\bar{V}_\infty c_{-1} \cdot 2\pi i = 2\bar{V}_\infty \Gamma, \quad (24)$$

причем за путь интегрирования в интеграле, стоящем в левой части этого равенства, можно в соответствии с теоремой Коши выбрать и контур C , так как функция $[f'(z)]^2$ аналитична на контуре C и вне этого контура. Подставляя (24) в формулу Чаплыгина, получим:

$$\bar{P} = \rho i \bar{V}_\infty \Gamma,$$

откуда, переходя к сопряженным величинам, получим известную *теорему Н. Е. Жуковского о подъемной силе*:

$$P = -\rho V_\infty \Gamma. \quad (25)$$

Так как $\rho > 0$, то вектор, изображающий число, стоящее в правой части (25), повернут относительно вектора V_∞ на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, если $\Gamma < 0$ (т. е. если обтекание происходит по часовой стрелке), и на угол $-\frac{\pi}{2}$ (т. е. на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке), если $\Gamma > 0$. Итак, теорема Жуковского может быть сфор-

¹⁾ Нетрудно видеть, что это разложение справедливо в той же окрестности бесконечно удаленной точки, что и разложение (21).

мулирована следующим образом: величина подъемной силы, действующей на обтекаемый контур, равна произведению плотности обтекающей жидкости (или газа), циркуляции и величины скорости течения в бесконечно удаленной точке, направление же подъемной силы можно получить, повернув вектор скорости V_∞ на 90° навстречу циркуляции.

§ 6. Комплексный потенциал в электростатике и термодинамике

Плоское электростатическое поле, т. е. поле вектора напряженности $E = E_x(x, y)i + E_y(x, y)j$, является полем градиента

$$E = -\text{grad } v(x, y),$$

где v — потенциал электростатического поля, и, следовательно, это поле потенциально. Во всех точках, в которых нет зарядов (заряды играют здесь роль источников и стоков в гидродинамике), электростатическое поле соленоидально и для его изучения целесообразно воспользоваться понятием комплексного потенциала. Однако в отличие от гидродинамики в задачах электростатики применяются несколько иные обозначения и иная терминология. Комплексным потенциалом поля E называется функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где

$$dv = -[E_x(x, y)dx + E_y(x, y)dy],$$

а

$$du = -E_y(x, y)dx + E_x(x, y)dy.$$

Функция $u(x, y)$ называется *силовой функцией*, а функция $v(x, y)$, как уже упомянуто выше, — *потенциалом* электростатического поля.

Производная

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -E_y - iE_x = -i[E_x - iE_y],$$

откуда

$$|E| = |f'(z)| \text{ и } \text{Arg } E = -\left[\frac{\pi}{2} + \text{Arg } f'(z)\right].$$

Линии уровня потенциальной функции $v(x, y)$ называются *эквипотенциальными линиями*, а линии уровня силовой функции $u(x, y)$ — *силовыми линиями*.

Циркуляция вектора напряженности E по замкнутому контуру C

$$\Gamma_C = \int_C E_s ds$$

равна работе поля при перемещении единичного заряда по замкнутому контуру и всегда равна нулю.

Поток вектора напряженности через замкнутый контур C

$$N_C = \int_C E_n ds,$$

в силу известной теоремы Гаусса, равен алгебраической сумме расположенных внутри контура C зарядов, умноженной на 2π (рассматривается плоский случай).

Пример 1. Выяснить характер электростатического поля соответствующего комплексному потенциалу $f(z) = i \text{Ln } z$.

Здесь (см. для сравнения стр. 228—229)

$$u = -\text{Arg } z,$$

$$v = \ln |z|.$$

Эквипотенциальными линиями являются окружности

$$|z| = C,$$

силовыми линиями являются лучи

$$\text{Arg } z = C.$$

Найдем модуль и аргумент вектора напряженности:

$$|E| = |f'(z)| = \left| \frac{i}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$$

$$\text{Arg } E = -\left[\frac{\pi}{2} + \text{Arg } \frac{i}{z}\right] = -\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \text{Arg } z\right] = \text{Arg } z - 1$$

Это означает, что вектор напряженности направлен вдоль линии $\text{Arg } z = C$ (вдоль силовой линии) к началу координат.

Единственной особой точкой является точка $z=0$; в ней расположен заряд. Для того чтобы найти величину этого заряда, следует вычислить поток вектора E через замкнутый контур C , однократно обходящий точку $z=0$. Выбрав в качестве такого контура окружность $|z|=r$, получим:

$$E_n = -|E| = -\frac{1}{|z|} = -\frac{1}{r},$$

откуда

$$N_C = -\int_C \frac{1}{r} ds = -2\pi,$$

и, в силу теоремы Гаусса, величина заряда равна $-\frac{2\pi}{2\pi} = -1$. Отсюда следует, что комплексный потенциал, соответствующий заряду $+1$ в точке $z=0$, имеет вид

$$f(z) = -i \operatorname{Ln} z,$$

или

$$f(z) = i \operatorname{Ln} \frac{1}{z}.$$

Пример 2. Выяснить характер электростатического поля, соответствующего комплексному потенциалу

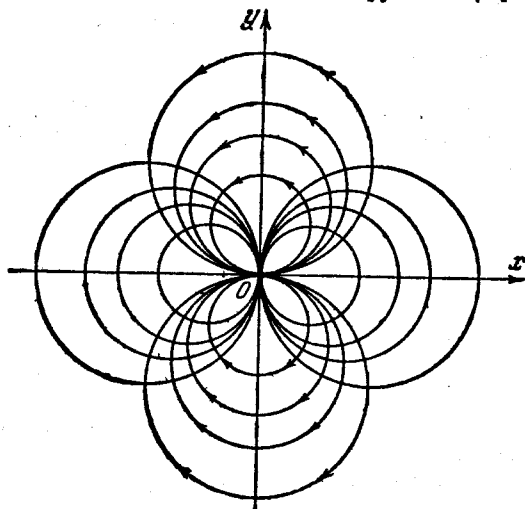
$$f(z) = \frac{i}{z}.$$

Здесь (см. для сравнения стр. 230—231)

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$v = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Эквипотенциальными линиями являются окружности (чер. 90) с цент-



Черт. 90.

рами на оси Ox , касающиеся оси Oy ; силовыми линиями — окружностями с центрами на оси Oy , касающиеся оси Ox . Так как

$$f'(z) = -\frac{i}{z^2},$$

то вектор напряженности определяется равенствами

$$|E| = \frac{1}{|z|^3}, \quad \operatorname{Arg} E = 2 \operatorname{Arg} z.$$

В особой точке $z=0$ расположен диполь. Нетрудно (см. стр. 231) убедиться в том, что рассмотренное электростатическое поле является предельным при $h \rightarrow 0$ для поля, определяемого двумя зарядами: одним — величины $\frac{1}{2h}$, находящимися в точке $z=0$, и другим — величины $-\frac{1}{2h}$ — в точке $z=-h$.

Вместо гидродинамических задач на обтекание в электростатике возникают задачи об определении поля E или его комплексного потенциала в односвязных или многосвязных областях, ограниченных проводниками. Приведем несколько типов таких задач.

а) Определение электростатического поля (или его комплексного потенциала) в области, ограниченной проходящим через бесконечно удаленную точку проводником C , если известны величина и направление вектора E в бесконечности (см. черт. 79, стр. 232).

б) Определение электростатического поля (или его комплексного потенциала) в криволинейной полосе, ограниченной двумя непересекающимися на конечном расстоянии проводниками C_1 и C_2 , в предположении, что разность потенциалов между проводниками задана (см. черт. 82, стр. 236).

в) Определение электростатического поля во внешности замкнутого проводника C , если известны величина и направление вектора E в бесконечности.

г) Определение поля между двумя замкнутыми непересекающимися проводниками, если известна разность потенциалов между ними.

Эти задачи решаются совершенно аналогично соответствующим задачам на обтекание.

Комплексный потенциал в задачах электростатики находится так же, как и в задачах гидромеханики, как функция, отображающая заданную область на стандартную область, соответствующую типу рассматриваемой задачи (полуплоскость, полоса между параллельными прямыми и т. д.).

Пример 3. Найти комплексный потенциал электростатического поля в кольце между двумя проводниками, имеющими форму

окружностей $|z-3|=9$ и $|z-8|=16$. Потенциал первой (внутренней) окружности равен V_0 , потенциал внешней окружности равен V_1 .

Комплексный потенциал электростатического поля в кольце между проводниками, имеющими форму концентрических окружностей с центром в начале координат, имеет, очевидно, вид

$$w = a \ln z,$$

где a — действительная постоянная, так как мнимая часть функции $a \ln z$ равна

$$v(x, y) = a \ln |z|$$

и постоянна вдоль каждой из окружностей кольца.

Если задано отношение между радиусами r_0 и r_1 окружностей и разность между соответствующими потенциалами V_0 и V_1 , то можно определить a :

$$V_0 = a \ln r_0,$$

$$V_1 = a \ln r_1,$$

откуда

$$a = \frac{V_1 - V_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

Итак, функция

$$w = \frac{V_1 - V_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}} i \ln z \quad (26)$$

является комплексным потенциалом электростатического поля в кольце $r_0 < |z| < r_1$, если разность потенциалов между окружностями $|z|=r_1$ и $|z|=r_0$ равна $V_1 - V_0$. Для решения задачи достаточно найти функцию $\zeta = f(z)$, отображающую взаимно-однозначно и конформно кольцо между окружностями $|z-3|=9$ и $|z-8|=16$ на кольцо $r_0 < |\zeta| < r_1$ (причем окружность $|z-3|=9$ должна отображаться в окружность $|\zeta|=r_0$, а окружность $|z-8|=16$ в окружность $|\zeta|=r_1$), и подставить найденную функцию $f(z)$ в (26) вместо z . Функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид (см. пример 4 на стр. 174—175)

$$\zeta = \frac{2e^{i\alpha} z}{z + 24}, \quad (27)$$

причем, как было показано на стр. 175, здесь

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{3}{2}.$$

Функция (27) соответствует, правда, значению $r_1=1$, поэтому при произвольном r_1 следовало бы писать:

$$\zeta = k e^{i\alpha} \frac{2z}{z + 24},$$

где k — некоторая постоянная. Но так как комплексный потенциал (26) определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого, то введение под знак логарифма постоянного множителя k излишне. Можно также отбросить в (27) множитель $2e^{i\alpha}$ и искомым комплексный потенциал записать в виде

$$w = i \frac{V_1 - V_0}{\ln \frac{3}{2}} \ln \frac{z}{z + 24}.$$

В задачах термодинамики часто приходится рассматривать векторное поле

$$A = -k \operatorname{grad} u(x, y, z),$$

или в плоском случае

$$A = -k \operatorname{grad} u(x, y),$$

где u — температура соответственно в точке (x, y, z) или (x, y) , k — коэффициент внутренней теплопроводности, который мы будем считать постоянным. Вектор A называется вектором потока тепла.

При постоянном k векторное поле

$$A = -k \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} (-ku),$$

будучи полем градиента, потенциально. Это поле также и соленоидально во всех точках, в которых нет источников и стоков тепла, потому что стационарный поток тепла через любой замкнутый контур C , ограничивающий некоторую область D , в которой нет источников и стоков тепла, должен быть равен нулю, так как в противном случае количество тепла в области D изменялось бы и, следовательно, изменились бы с течением времени температура u и ее градиент, т. е. поле A не было бы стационарным. Для изучения поля теплового потока также целесообразно использовать понятие комплексного потенциала.

Задачи термодинамики, соответствующие основным задачам на обтекание, формулируются и решаются так же, как и аналогичные задачи электростатики (стр. 249), только, говоря о проводниках, мы должны теперь иметь в виду не проводники электричества, а хорошие проводники тепла, вместо разности потенциалов теперь надо задавать разность температур.

Задачи к главе IX

В задачах 1—4 требуется определить модуль и направление вектора поля A , найти уравнения линий тока и линий уровня потенциальной функции по заданному комплексному потенциалу w .

$$1. w = z^2.$$

$$2. w = z + \frac{1}{z}.$$

$$3. w = (1 + i) \operatorname{Ln} z.$$

$$4. w = \sqrt{z - a} \quad (a - \text{действительное число}).$$

5. Найти циркуляцию Γ по контуру $|z - i| = \frac{3}{2}$ и поток N через этот контур, если комплексным потенциалом является функция

$$\operatorname{Ln} \frac{z}{z^2 + 1}.$$

6. Найти циркуляцию Γ по контуру $|z| = 3$ и поток N через этот контур, если комплексным потенциалом является функция

$$\operatorname{Ln}(z^2 + 4) + 3i \operatorname{Ln} z.$$

ГЛАВА X

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛОГАРИФИЧЕСКИХ ВЫЧЕТОВ
К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Основные понятия теории устойчивости

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

с начальными условиями $y_i(t_0) = y_{i0}$, описывающая некоторый реальный процесс, неизбежно описывает его лишь приближенно, так как и система дифференциальных уравнений составляется при некоторых упрощающих действительные зависимости предположениях, и начальные данные, являющиеся обычно результатом измерения, определяются с некоторой погрешностью. Поэтому обычно только те решения системы (1) могут, хотя бы приближенно, описывать изучаемый процесс, которые при $t \geq t_0$ лишь мало изменяются при малом изменении правых частей уравнений (1) и при малом изменении начальных значений.

Теория устойчивости изучает условия, при которых малые изменения начальных значений или функций f_i приводят лишь к малому изменению решений при $t \geq t_0$. В дальнейшем мы рассмотрим первую из этих задач.

Решение $y_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (1) называется *устойчивым* (точнее, *устойчивым в смысле Ляпунова*), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что все решения

$$y_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

системы (1), для которых

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta, \quad (2)$$

при всех $t > t_0$ удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad (3)$$

т. е. если решения, близкие при $t = t_0$, остаются близкими и для всех значений $t > t_0$.

Решения, не удовлетворяющие этим условиям, называются *неустойчивыми*.

Если решение $y_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) устойчиво и, кроме того, при достаточно малом δ из $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - \varphi_i(t)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

(т. е. если решения, близкие по начальным значениям, неограниченно сближаются с возрастанием t), то решение $y_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) называется *асимптотически устойчивым*.

Как уже было пояснено выше, обычно в приложениях имеют значение только устойчивые решения.

Исследование на устойчивость некоторого решения

$$y_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

системы (1) может быть заменой переменных

$$x_i = y_i - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений

$$\dot{x}_i + \dot{\varphi}_i(t) = f_i(t, x_1 + \varphi_1(t), \dots, x_n + \varphi_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому в дальнейшем речь будет идти только об исследовании на устойчивость решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений

$$\dot{x}_i(t) = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

при этом неравенства (3) и (2), входящие в определение устойчивости, примут вид: $|x_i(t)| < \varepsilon$ при $t > t_0$, если $|x_i(t_0)| < \delta$, а условие (4), входящее в определение асимптотической устойчивости, переходит в

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Нетрудно проверить, что тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) линейной однородной системы дифференциаль-

ных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

асимптотически устойчиво, если все корни *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные действительные части.

Действительно, любое решение системы (5) имеет вид

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^m P_{ij}(t) e^{k_j t} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $P_{ij}(t)$ — некоторые многочлены, степени которых ниже кратности соответствующих корней k_j характеристического уравнения, m — число различных корней характеристического уравнения¹⁾. Если действительные части всех корней k_j характеристического уравнения отрицательны, то не только решения $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), близкие к $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) по начальным значениям, удовлетворяют неравенствам $|x_i(t)| < \varepsilon$ при $t > t_0$ и асимптотически приближаются к решению $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), но даже все без исключения решения

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^m P_{ij}(t) e^{k_j t} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

при достаточно больших t неограниченно приближаются к решению $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В этом случае говорят, что решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) *асимптотически устойчиво в целом*.

Заметим, что в рассматриваемом случае не только решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), но и остальные решения системы (5) асимптотически устойчивы.

Если хотя бы один корень $k_s = p + qi$ характеристического уравнения имеет положительную действительную

¹⁾ См., например, [15].

часть $p > 0$, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$ системы (5) неустойчиво.

Действительно, соответствующее этому корню решение

$$x_i = c \alpha_{is} e^{k_s t} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где c и α_{is} — постоянные, или в действительном виде

$$x_i = c e^{pt} (\beta_{is} \cos qt + \gamma_{is} \sin qt) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где c , β_{is} и γ_{is} — действительные постоянные, при сколь угодно малых значениях произвольной постоянной c , т. е. при сколь угодно малых начальных значениях $|x_i(t_0)|$, с возрастанием t не только не удовлетворяет условию $|x_i(t)| < \epsilon$, но даже неограниченно удаляется от решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Одним из основных методов исследования на устойчивость решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) нелинейной системы является метод исследования на устойчивость по первому приближению. Этот метод заключается в том, что, предполагая все функции f_i дифференцируемыми по всем переменным, начиная со второго, в окрестности точки $x_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) представляют систему

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

в виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + R_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

и, отбрасывая члены R_i , имеющие порядок выше первого относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, исследуют на устойчивость тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) линейной системы уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

называемой системой первого приближения для системы (6).

Если все a_{ij} — постоянные, то система (6) называется стационарной в первом приближении.

Для стационарной в первом приближении системы (6) следующая теорема указывает условия применимости метода исследования по первому приближению:

Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения для системы (6) имеют отрицательные действительные части и функции R_i удовлетворяют условию

$$|R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq N \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2} + \alpha} \quad (7)$$

при $t \geq t_0$ и $|x_i| < \delta$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где $\delta > 0$ и достаточно мало, а α и N — некоторые положительные постоянные, то решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не только системы первого приближения, но и системы (6) асимптотически устойчиво¹⁾.

Если при тех же ограничениях на функции R_i хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не только системы первого приближения, но и системы (6) неустойчиво²⁾.

Эта теорема дает весьма удобный признак асимптотической устойчивости решений широкого класса систем дифференциальных уравнений и очень часто применяется в практических задачах.

Однако вычисление корней характеристического уравнения при $n > 2$, и особенно при $n > 4$, весьма затруднительно, поэтому большое значение имеют различные признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена. Среди таких признаков наряду с признаком Гурвица (см., например, [15]) и признаком Н. Н. Меймана (см. [14]) большое значение имеют признаки, основанные на теории логарифмических вычетов.

§ 2. Признак отрицательности действительных частей всех корней многочлена

Теория логарифмических вычетов, изложенная в гл. VII, § 3, позволяет найти число нулей аналитической функции, расположенных в области, ограниченной некоторым контуром γ ;

¹⁾ Если функции R_i не зависят от t , то условие (7) означает, что все R_i должны иметь порядок выше первого относительно совокупности переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при стремлении всех x_i к нулю.

²⁾ Доказательство этой теоремы можно найти, например, в курсе дифференциальных уравнений В. В. Степанова или в книге И. Г. Макина [7].

в частности, этим методом можно определить число нулей многочлена, расположенных в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, и, потребовав, чтобы это число равнялось нулю, получить условие того, что все корни многочлена имеют отрицательную вещественную часть.

Для получения такого условия можно воспользоваться основной теоремой теории логарифмических вычетов (стр. 141) или, что обычно оказывается более удобным, ее геометрической интерпретацией — принципом аргумента.

Рассмотрим при отображении

$$w = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

образ Γ_w замкнутого контура γ_z , расположенного в плоскости переменного z и состоящего из отрезка I_R мнимой оси $[-iR, iR]$ и расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ дуги C_R полуокружности радиуса R с центром в начале координат (черт. 91).

Если многочлен

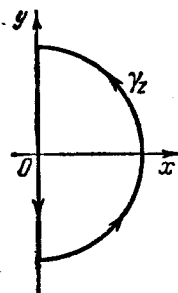
$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (8)$$

не имеет нулей на мнимой оси и если при достаточно большом R число обходов контуром Γ_w начала координат равно нулю или, что то же самое, приращение $\operatorname{Arg} w$ на контуре Γ_w равно нулю, то согласно принципу аргумента в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ нет корней многочлена $f(z)$.

Заметим, что приращение аргумента функции $f(z)$ на полуокружности C_R $\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} f(z)$ при достаточно большом R сколь угодно мало отличается от π , так как

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} f(z) &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) = \\ &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^n + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) = \pi + \alpha, \end{aligned}$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, надо вычислить лишь $\Delta_{I_R} \operatorname{Arg} f(z)$ при достаточно большом R , и если это приращение при $R \rightarrow \infty$ стремится к $-\pi$, то в правой полуплоскости нет нулей многочлена $f(z)$.



Черт. 91.

Пример 1 Выяснить, имеет ли многочлен

$$f(z) = z^5 + z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 1$$

корни с положительными действительными частями.

Находим образ мнимой оси $z = iy$, где y изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, при отображении $w = f(z)$

$$u + iv = (iy)^5 + (iy)^4 + 6(iy)^3 + 5(iy)^2 + 4iy + 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} u &= -y^5 + 6y^4 - 8y^2 + 1, \\ v &= y^5 - 5y^3 + 4y \end{aligned}$$

При достаточно больших значениях y $u < 0$, а $v > 0$, причем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = 0.$$

Нулями функции $v = y(y^4 - 5y^2 + 4)$ являются.

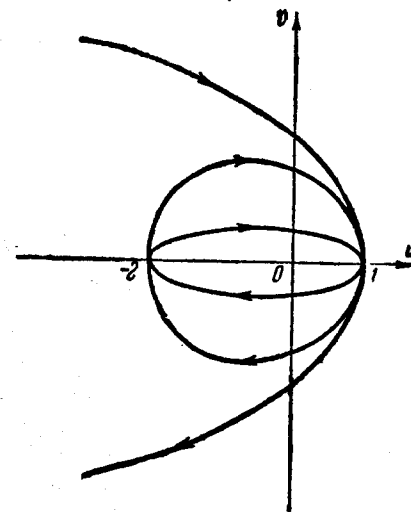
$$y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm 1,$$

$$y_{4,5} = \pm 2.$$

Вычисляем соответствующие значения u

$$u(0) = 1, \quad u(\pm 1) = -2,$$

$$u(\pm 2) = 1.$$



Черт. 92.

Если еще учесть четность функции $u = u(y)$ и нечетность функции $v = v(y)$, то уже можно дать довольно грубый, но достаточный для вычисления $\Delta_{I_R} \operatorname{Arg} f(z)$ набросок образа мнимой оси (черт. 92).

Образ мнимой оси трижды обходит начало координат в отрицательном направлении. Следовательно,

$$\lim \Delta_{I_R} \operatorname{Arg} f(z) = -6\pi$$

и число нулей в правой полуплоскости

$$N = \lim_{R \rightarrow \infty} (\Delta_{I_R} \operatorname{Arg} f(z) + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} f(z)) = -6\pi + 6\pi = 0.$$

Рассматриваемый многочлен не имеет нулей с положительной вещественной частью.

§ 3. Исследование на устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Явления с последствием часто описываются *дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом*. Особенно часто такие уравнения встречаются в задачах теории регулирования.

Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом первого порядка и первой степени имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), \dots, x(t - \tau_n(t))), \quad (9)$$

где запаздывания $\tau_k(t) \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим сначала для упрощения изложения случай лишь одного постоянного запаздывания τ :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)). \quad (10)$$

Обычно требуется определить непрерывное решение $x = x(t)$

при $t \geq t_0$ уравнения (10), совпадающее при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ с заданной непрерывной функцией $\varphi(t)$, называемой *начальной функцией*. Эта задача имеет единственное решение, если функция f непрерывна и имеет ограниченную производную по второму аргументу в окрестности точки $t = t_0$, $x(t_0) = \varphi(t_0)$, $x(t_0 - \tau) = \varphi(t_0 - \tau)$.

Решение $x(t)$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что каждая непрерывная начальная функция $\varphi(t)$, для которой на начальном множестве $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ выполнено неравенство $|\varphi(t) - \varphi(t)| < \delta$, определяет решение $x(t)$, для всех $t \geq t_0$ удовлетворяющее неравенству

$$|x(t) - x(t)| < \varepsilon,$$

т. е. в случае устойчивости близкие по начальным функциям решения остаются близкими при всех значениях $t \geq t_0$.

Если решение $x(t)$ устойчиво и, кроме того, при достаточно малом δ из $|\varphi(t) - \varphi(t)| < \delta$ на начальном множестве следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x(t)) = 0,$$

то решение $x(t)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Если решение не удовлетворяет указанному выше определению устойчивости, то оно называется *неустойчивым*.

Аналогично определяются устойчивость, неустойчивость и асимптотическая устойчивость для решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и для решений уравнений n -го порядка, которые почти всегда могут быть заменены системой уравнений первого порядка¹⁾.

Заменой переменных $y = x - x(t)$ можно свести исследование на устойчивость решения $x(t)$ к исследованию на устойчивость решения $y(t) \equiv 0$, поэтому в дальнейшем мы будем исследовать на устойчивость лишь решения, тождественно равные нулю.

Частные решения линейных однородных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами, с одним или несколькими постоянными запаздываниями, могут быть найдены в виде

$$x(t) = e^{kt}. \quad (11)$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = 0. \quad (12)$$

Подставляя (11) в уравнение (12) и сокращая на e^{kt} , получим так называемое *характеристическое уравнение*

$$k + a + be^{-k\tau} = 0. \quad (13)$$

Аналитическая во всей плоскости функция переменной k , стоящая в левой части уравнения (13), называемая *характеристическим квазиполиномом*, имеет бесконечное множество нулей

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$$

Каждому корню k_i уравнения (13) соответствует частное решение $e^{k_i t}$ уравнения (12). В силу линейности и однородности уравнения (12) линейная комбинация

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{k_i t} \quad (14)$$

¹⁾ Подробнее об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом см. [15].

частных решений с произвольными постоянными коэффициентами c_i также является решением уравнения (12). Если при некотором выборе постоянных ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{k_i t}$$

сходится и допускает почленное дифференцирование, то сумма этого ряда также является решением уравнения (12).

При действительных коэффициентах a и b уравнения (12) комплексным сопряженным корням $k_s = p_s + iq_s$, $k_{s+1} = p_s - iq_s$ уравнения (13) соответствуют два действительных решения, являющихся соответственно мнимой и действительной частями решения

$$e^{k_s t} = e^{p_s t} (\cos q_s t + i \sin q_s t).$$

Если некоторые корни уравнения (13) кратны, то корням k_i кратности α_i соответствуют частные решения уравнения (12) вида

$$e^{k_i t}, t e^{k_i t}, t^2 e^{k_i t}, \dots, t^{\alpha_i - 1} e^{k_i t}.$$

Можно доказать, что если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (12) асимптотически устойчиво. Если же хотя бы один из этих корней имеет положительную действительную часть, то решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (12) неустойчиво.

Эта теорема справедлива и для линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами и с одним или несколькими постоянными запаздываниями, а также для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянными запаздываниями.

Справедлива также следующая теорема о возможности исследования на устойчивость по первому приближению, аналогичная теореме, изложенной в предыдущем параграфе (см. стр. 256—257).

Если все корни характеристического уравнения

$$k + a + b e^{-k\tau} = 0 \quad (13)$$

имеют отрицательные действительные части, то асимптотически устойчиво не только тривиальное решение

$x(t) \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = 0, \quad (12)$$

но и решение $x(t) \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = a_1(t)x(t) + b_1(t)x(t - \tau) + R(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (15)$$

где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_1(t) = 0,$$

$$|R(t, x, y)| \leq N(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2} + \alpha}$$

при $t \geq t_0$, если $|x|$ и $|y|$ достаточно малы, а N и α — некоторые положительные постоянные.

Если же хотя бы один корень k_s характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, то решения $x \equiv 0$ не только уравнения (12), но и (15) неустойчивы.

Аналогичная теорема справедлива и для линейных однородных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами и с постоянными запаздываниями, а также для систем таких уравнений.

Итак, вопрос об устойчивости решений широкого класса дифференциальных уравнений связан с расположением нулей некоторых аналитических функций — левых частей соответствующих характеристических уравнений.

Если дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом n -го порядка имеет лишь одно запаздывание, то характеристическое уравнение имеет вид

$$P(k) + Q(k)e^{-k\tau} = 0, \quad (16)$$

где степень полинома $P(k)$ выше степени полинома $Q(k)$. В дальнейшем переменное k будем обозначать буквой z и, следовательно, характеристическое уравнение (16) перепишем в виде

$$P(z) + Q(z)e^{-z\tau} = 0. \quad (17)$$

Левая часть этого характеристического уравнения также называется характеристическим квазиполиномом.

Как и в предыдущем параграфе, применим принцип аргумента. Предполагая, что аналитическая функция

$$P(z) + Q(z)e^{-z} \quad (18)$$

не имеет нулей на мнимой оси, рассмотрим образ Γ_w при отображении $w = P(z) + Q(z)e^{-z}$ замкнутого контура γ_z , состоящего из отрезка мнимой оси $(-iR, iR)$ и полуокружности $|z|=R$, $\operatorname{Re} z > 0$ (см. черт. 91, стр. 258).

Если при однократном обходе контура γ_z в положительном направлении, его образ Γ_w обходит начало координат в положительном направлении N раз, то внутри контура γ_z находится N нулей функции (18) (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность). Если при $R \rightarrow \infty$ число N остается равным нулю, то в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ не содержится нулей характеристического квазиполинома $P(z) + Q(z)e^{-z}$ и, следовательно, действительные части всех нулей этого квазиполинома отрицательны.

Построить контур Γ_w иногда довольно трудно, поэтому обычно указанный метод применяется в несколько видоизмененной форме, а именно, вместо функции $f(z) = P(z) + Q(z)e^{-z}$ рассматривают функцию

$$\frac{f(z)}{P(z)} = 1 - \frac{Q(z)}{P(z)} e^{-z},$$

нули-которой совпадают с нулями функции $f(z)$ (если $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих нулей) и которая имеет полюсами нули многочлена $P(z)$.

Обозначим $w_z(z) = -\frac{Q(z)}{P(z)} e^{-z}$. Предельное положение при $R \rightarrow \infty$ образа контура γ_z при отображении $w_z(z)$ называется *амплитудно-фазовой характеристикой*. Так как

$$\frac{f(z)}{P(z)} = 1 - w_z(z),$$

то нулям функции $\frac{f(z)}{P(z)}$ соответствуют точки, в которых $w_z(z) = 1$. Поэтому, применяя принцип аргумента к функции $w_z(z)$, мы должны подсчитать число обходов амплитудно-фазовой характеристики не точки $z=0$, а точки $z=1$. Число обходов амплитудно-фазовой характеристикой точки $z=1$ будет равно разности $N-P$ между числом N нулей (с учетом их кратности) квазиполинома $P(z) + Q(z)e^{-z} = 0$, распо-

ложенных в правой полуплоскости, и числом P там же расположенных полюсов функции $w_z(z)$ (также с учетом их кратности). Для того чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы $N=0$, т. е. чтобы число обходов амплитудно-фазовой характеристикой точки $z=1$ равнялось $-P$.

Еще раз напомним, что при этом предполагается, что на мнимой оси нет нулей функции $P(z) + Q(z)e^{-z}$ и что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих нулей, причем оба эти условия сравнительно легко проверяемы. Заметим, что при отображении $w_z(z)$ образ полуокружности, входящей в контур γ_z при $R \rightarrow \infty$, стягивается в точку $z=0$ (степень полинома $P(z)$ выше степени полинома $Q(z)$) и, следовательно, надо строить лишь образ мнимой оси, проходимой в отрицательном направлении.

При построении амплитудно-фазовой характеристики удобно вначале строить так называемую *предельную характеристику*, являющуюся предельным положением образа контура γ_z при $R \rightarrow \infty$ при отображении $w_0(z) = -\frac{Q(z)}{P(z)}$.

Для построения образа мнимой оси при отображении

$$w_z(z) = -\frac{Q(z)}{P(z)} e^{-z} = w_0(z) e^{-z}$$

или

$$w_z(iy) = w_0(iy) e^{-iy},$$

уже зная предельную характеристику, достаточно учесть влияние множителя e^{-iy} , поворачивающего (без изменения модуля) радиус-вектор точки предельной характеристики, соответствующей значению y , на угол $-y$. Заметим, что при построении амплитудно-фазовой характеристики особое внимание надо уделить точкам предельной характеристики, лежащим на окружности $|z|=1$, так как именно эти точки при повороте на угол $-y$ могут попасть в точку $z=1$.

В качестве примера найдем область асимптотической устойчивости в пространстве действительных коэффициентов a и b ¹⁾ тривиального решения $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0. \quad (12)$$

¹⁾ Пространством коэффициентов в данном случае будет плоскость, координатами точек которой являются числа a и b .

Характеристическое уравнение имеет вид $z + a + be^{-\tau z} = 0$. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} w_{\tau}(z) &= -\frac{be^{-\tau z}}{z+a}, \\ w_0(z) &= -\frac{b}{z+a}. \end{aligned} \quad (19)$$

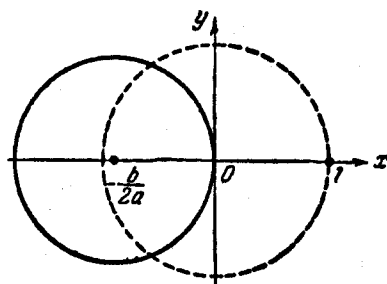
Предельной характеристикой является образ мнимой оси при дробно-линейном отображении (19). Пользуясь свойствами дробно-линейной функции (см. § 4 гл. VIII), читатель легко обнаружит, что это отображение преобразует мнимую ось в окружность радиуса $\left|\frac{b}{2a}\right|$ с центром в

точке $z = -\frac{b}{2a}$, уравнение которой имеет вид

$$\left|z + \frac{b}{2a}\right| = \frac{|b|}{2|a|}. \quad (20)$$

(черт. 93).

Предположим, что $a > 0$; тогда функция $w_{\tau}(z)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости и если $|b| < a$, то ни при каком повороте точек окружности (20), вызванном наличием множителя $e^{-\tau y}$ в выражении $w_{\tau}(iy) = w_0(iy)e^{-\tau y}$, амплитудно-фазовая характеристика не будет охватывать точки $z = 1$ и, следовательно, все нули квазиполинома $z + a + be^{-\tau z}$ расположены в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. При $|b| > a > 0$ (черт. 94) для некоторых значений τ точки предельной характеристики, лежащие одновременно и на окружности $|z| = 1$, изображенной на чертеже пунктиром, могут перейти в точку $z = 1$. Наименьшее из таких значений τ при заданных a и b



Черт. 94.

будет значением, при переходе через которое решение $x \equiv 0$ уравнения (12) теряет устойчивость, так как при переходе через это значение $\tau = \tau_0$ амплитудно-фазовая характеристика начинает охватывать точку $z = 1$.

Нетрудно было бы подсчитать значение τ_0 , однако в этом нет необходимости, как нет необходимости и в исследовании этим методом случая $a < 0$, так как, зная уже часть области асимптотической устойчивости $|b| < a$ (черт. 95), мы можем уточнить ее границу, находя в плоскости параметров a и b линии, которые при фиксированном τ соответствуют чисто мнимым или равным нулю корням характеристического уравнения.

Действительно, корни характеристического уравнения

$$z_i = z_i(a, b, \tau),$$

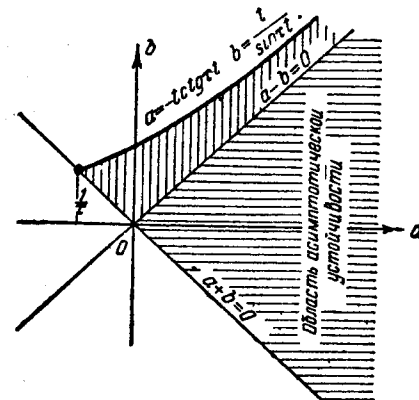
где $\tau > 0$, являются непрерывными функциями параметров a, b и τ и, следовательно, если считать τ фиксированным, то потеря устойчивости решения $x \equiv 0$ при перемещении точки из найденной выше области асимптотической устойчивости по любому пути в плоскости a, b может произойти лишь при перемене знака у действительной части хотя бы одного корня характеристического уравнения, т. е. при переходе при заданном τ через точку (a, b) , соответствующую лежащему на мнимой оси корню характеристического уравнения. Уравнение $z + a + be^{-\tau z} = 0$ имеет равный нулю корень лишь при $a + b = 0$ и имеет чисто мнимые корни $z = iy$, если уравнение

$$iy + a + be^{-\tau y} = 0$$

или

$$a + iy + b(\cos \tau y - i \sin \tau y) = 0$$

имеет действительные корни y , следовательно, если действи-



Черт. 95.

тельные корни имеет также система уравнений

$$\begin{aligned} a + b \cos \tau y &= 0, \\ y - b \sin \tau y &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$b = \frac{y}{\sin \tau y}, \quad a = -\frac{y \cos \tau y}{\sin \tau y}, \quad (21)$$

При $0 \leq y \leq \frac{\pi}{\tau}$ получаем ближайшую к уже найденной части области устойчивости ветвь кривой (21), которая вместе с прямой $a + b = 0$ и ограничивает область асимптотической устойчивости (см. черт. 95)¹⁾.

Заметим, что в области $a > 0$, $|b| < a$, заштрихованной на черт. 95 горизонтальной штриховкой, решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво при любом τ . Область устойчивости, обладающая таким свойством, называется *областью абсолютной асимптотической устойчивости*.

В рассматриваемом случае теорема Руше (см. стр. 143) дает возможность еще проще провести исследование.

Действительно, рассматривая на том же контуре γ_z функции

$$f(z) = z + a \quad \text{и} \quad \varphi(z) = be^{-\tau z},$$

заметим, что при $|a| > |b|$ и при достаточно большом радиусе R полуокружности эти функции f и φ удовлетворяют условиям теоремы Руше, т. е. на контуре γ_z

$$|z + a| > |be^{-\tau z}| \quad \text{или} \quad |z + a| > |b|e^{-\tau x}, \quad (22)$$

где $z = x + iy$.

В самом деле, на дуге полуокружности достаточно большого радиуса R справедливость неравенства (22) очевидна, так как $x > 0$, а на мнимой оси $|z + a| \geq |a|$, $|be^{-\tau z}| = |b|$ и, следовательно, при $|a| > |b|$ $|z + a| > |be^{-\tau z}|$. При $a > 0$ функция $f(z) = z + a$ не имеет ни одного нуля внутри контура γ_z , следовательно, по теореме Руше нет нулей в области, ограниченной контуром γ_z , и у функции $z + a + be^{-\tau z}$.

Итак, часть области асимптотической устойчивости решения $x \equiv 0$ уравнения (12) найдена: $a > 0$ и $|b| < a$, а уточ-

¹⁾ Конечно, из приведенного рассуждения не следует, что мы нашли всю область асимптотической устойчивости, однако в этом можно было бы убедиться, продолжая исследование амплитудно-фазовым методом.

нить границы этой области асимптотической устойчивости можно так же, как это сделано выше.

Заметим, что если $|a| > |b|$, но $a < 0$, то из теоремы Руше следует неустойчивость решения $x \equiv 0$ уравнения (12) при любом τ .

Задачи к главе X

1. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t) = \dot{x}^2(t) - 3x^2(t).$$

2. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) + x(t) = 0.$$

3. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t) + x^2(t), \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) - \sin y(t) + y^2(t). \end{aligned}$$

4. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + x(t) = x^2(t) \sin t - \dot{x}^2(t) \cos t.$$

В задачах 5—8 величины a , b и τ постоянные, $\tau > 0$.

5. Найти область устойчивости при изменении коэффициентов a и b решения $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t - \tau) = 0.$$

6. Найти область устойчивости при изменении коэффициентов a и b решения $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t - \tau) + bx(t - \tau) = 0.$$

7. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x}(t) + 2x(t) + x(t - \tau) - x^2(t - \tau) + e^{-t}x(t) = 0.$$

8. Имеет ли тривиальное решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t - \tau) + bx(t - \tau) = 0$$

область абсолютной устойчивости.

Например: а) если $u(t) = 1$, то при $\sigma > 0$

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p};$$

б) если $u(t) = t$, то при $\sigma > 0$

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt,$$

и, интегрируя по частям, получим:

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2};$$

в) если $u(t) = t^n$, где n — целое положительное число, то, считая $\sigma > 0$, получим:

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt,$$

и, интегрируя по частям n раз, будем иметь $\bar{u}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$;

г) если $u(t) = e^{at}$, то

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt,$$

и при $\sigma > a$ получим:

$$\bar{u}(p) = -\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

Функция $u(t)$ в (1) называется *оригиналом*, а $\bar{u}(p)$ — *изображением*.

В дальнейшем будем считать, что оригинал $u(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $u(t)$ является кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функцией (т. е. $u(t)$ и $u'(t)$ на каждом конечном отрезке имеют не более конечного числа точек разрыва и притом только первого рода);

2) $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

3) с возрастанием t модуль функции $u(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции; точнее, $|u(t)| \leq M e^{st}$, где M и s — постоянные.

ГЛАВА XI

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Преобразование Лапласа и его основные свойства

В основе операционных методов решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами или аналогичных уравнений в частных производных лежит следующая идея: вначале определяется не искомое решение u дифференциального уравнения, а функция $\bar{u}$, являющаяся результатом некоторого преобразования решения u , причем преобразование выбирают с таким расчетом, чтобы функцию $\bar{u}$ можно было найти значительно проще, чем u ; определив $\bar{u}$, находят с помощью обратного преобразования искомое решение u .

Аналогичная идея применяется и в элементарной математике при переходе от чисел к их логарифмам, после чего вместо действий умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня выполняют более простые действия над логарифмами чисел, а затем по вычисленным логарифмам находят искомые числа.

В качестве преобразования, позволяющего реализовать указанную выше идею, в операционном исчислении обычно применяется преобразование Лапласа, при котором функция $u(t)$ преобразуется в функцию

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt, \quad (1)$$

где t — действительное переменное, а $p = \sigma + i\omega$ — комплексное переменное.

Условие 3) обеспечивает абсолютную сходимость интеграла

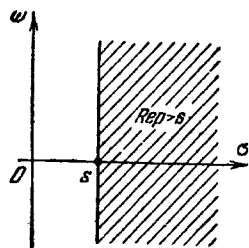
$$\int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt,$$

где $p = \sigma + i\omega$ при $\sigma > s$, т. е. для всех точек p , лежащих правее прямой $\operatorname{Re} p = s$ (черт. 96). Действительно, если $\sigma > s$, то

$$\int_0^{\infty} |e^{-pt} u(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-s)t} dt = -\frac{Me^{-(\sigma-s)t}}{\sigma-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma-s}.$$

В дальнейшем всюду предполагается, что $\sigma > s$.

Условие 2) не накладывает никаких ограничений на значения оригинала $u(t)$ на полупрямой $0 \leq t < \infty$, которые только и оказывают влияние на вид функции $\bar{u}(p)$.



Черт. 96.

Заметим, что в прикладных задачах решение дифференциального уравнения обычно требуется определить, лишь начиная с некоторого начального момента $t = t_0$, причем без существенного ограничения общности можно считать $t_0 = 0$.

Докажем несколько основных свойств преобразования Лапласа.

1) $cu(t) \rightarrow c\bar{u}(p)$, где c — постоянная, а знак $\rightarrow$ обозначает переход от

оригинала к изображению.

Доказательство.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} cu(t) dt = c \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = c\bar{u}(p).$$

$$2) u_1(t) + u_2(t) \rightarrow \bar{u}_1(p) + \bar{u}_2(p).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} [u_1(t) + u_2(t)] dt &= \int_0^{\infty} e^{-pt} u_1(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-pt} u_2(t) dt = \bar{u}_1(p) + \bar{u}_2(p). \end{aligned}$$

Следствие свойств 1) и 2):

$$\sum_{j=1}^n c_j u_j(t) \rightarrow \sum_{j=1}^n c_j \bar{u}_j(p),$$

где c_j — произвольные постоянные.

3) $u'(t) \rightarrow p\bar{u}(p) - u(0)$. В частности, если $u(0) = 0$, то дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на p .

Доказательство. Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} u'(t) dt = e^{-pt} u(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = p\bar{u}(p) - u(0),$$

так как при $\operatorname{Re} p = \sigma > s \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} u(t) = 0$.

Применяя свойство 3) два раза (или два раза интегрируя по частям $\int_0^{\infty} e^{-pt} u''(t) dt$), получим:

$$u''(t) \rightarrow p^2 \bar{u}(p) - pu(0) - u'(0).$$

Применяя свойство 3) n раз, будем иметь:

$$u^{(n)}(t) \rightarrow p^n \bar{u}(p) - p^{n-1} u(0) - p^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0).$$

$$4) \int_0^t u(t) dt \rightarrow \frac{\bar{u}(p)}{p}.$$

Доказательство. Обозначим $\int_0^t u(t) dt = v(t)$; тогда

$$\bar{v}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(t) dt$$

и, интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \bar{v}(p) &= -\frac{e^{-pt}}{p} v(t) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} v'(t) dt = \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = \frac{\bar{u}(p)}{p}. \end{aligned}$$

так как легко обнаружить, что

$$\frac{e^{-pt}}{p} v(t) \Big|_0^{\infty} = 0.$$

Действительно, $v(0) = 0$ и

$$|v(t)| \leq \int_0^t M e^{st} dt = M \frac{e^{st} - 1}{s} \leq \frac{M e^{st}}{s}$$

при $s \neq 0$ (если $s = 0$, то $|v(t)| \leq Mt$), где M — постоянная (см. условие 3) стр. 271). Следовательно, если $s \neq 0$, то

$$|e^{-pt} v(t)| \leq \frac{M}{s} e^{(s-\sigma)t},$$

и так как $\sigma > s$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{s} e^{(s-\sigma)t} = 0$.

Читатель без труда проверит справедливость доказанного свойства при $s = 0$.

Итак, интегрированию оригинала соответствует деление изображения на p .

$$5) u(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} \bar{u}(p),$$

где постоянная $\tau > 0$.

Доказательство.

$$u(t - \tau) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t - \tau) dt;$$

полагая $t - \tau = t_1$, получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} u(t - \tau) dt = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(t_1 + \tau)} u(t_1) dt_1,$$

и, принимая во внимание, что $u(t_1) \equiv 0$ при $t_1 < 0$, окончательно будем иметь:

$$u(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt_1} u(t_1) dt_1 = e^{-p\tau} \bar{u}(p).$$

Итак, сдвигу графика функции $u(t)$ в направлении оси Ot на отрезок τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$.

$$6) u(at) \rightarrow \frac{1}{a} \bar{u}\left(\frac{p}{a}\right), a > 0.$$

Доказательство.

$$u(at) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} u(at) dt;$$

полагая $at = t_1$, получим:

$$u(at) \rightarrow \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a} t_1} u(t_1) dt_1 = \frac{1}{a} \bar{u}\left(\frac{p}{a}\right).$$

$$7) e^{at} u(t) \rightarrow \bar{u}(p - a) \text{ при } \operatorname{Re}(p - a) > s.$$

Доказательство.

$$e^{at} u(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} u(t) dt = \bar{u}(p - a).$$

Непосредственное вычисление изображений различных часто встречающихся функций-оригиналов и применение более сложных приемов дают возможность составить приводимую ниже таблицу, с помощью которой во многих обычно встречающихся в приложениях случаях легко осуществляется переход от функций-оригиналов к их изображениям и обратный переход от изображений к оригиналам.

Таблица изображений и оригиналов

№	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^{n+1}}$, n — целое положительное число.	$\frac{t^n}{n!}$
3	$\frac{1}{p^{\alpha+1}}$, где $\operatorname{Re} \alpha > -1$	$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ ¹⁾
4	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
5	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$, n — целое положительное число.	$\frac{t^n}{n!} e^{at}$
6	$\frac{1}{(p-a)^{\alpha+1}}$, $\operatorname{Re} \alpha > -1$	$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{at}$
7	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$

¹⁾ Определение гамма-функции Эйлера $\Gamma(p)$ читатель может найти в [12]. Там же указаны простейшие свойства функции $\Gamma(p)$.

№	Изображение	Оригинал
8	$\frac{1}{(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)}$	$\frac{(a_2-a_3)e^{a_1t} + (a_3-a_1)e^{a_2t} + (a_1-a_2)e^{a_3t}}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)}$
9	$\frac{1}{p^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
10	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
11	$\frac{1}{(p-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$
12	$\frac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
13	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
14	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \sin at}{2a}$
15	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{1 - \cos at}{a^2}$
16	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$
17	$\frac{p}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^3} \sin \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{at}{\sqrt{2}}$
18	$\frac{p^3}{p^4 + a^4}$	$\cos \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{at}{\sqrt{2}}$
19	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
20	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
21	$\frac{1}{p(1+\sqrt{p})}$	$1 + e^t \Phi(\sqrt{t}-1)^{1)}$
22	$\frac{\sqrt{p}}{p(1+\sqrt{p})}$	$e^t(1 - \Phi(\sqrt{t}))$
23	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}}$	$J_0(at)$

$$^1) \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

²⁾ С определением и описанием простейших свойств функций Бесселя $J_n(x)$ читатель может познакомиться по книге [12].

№	Изображение	Оригинал
24	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}}$	$J_0(at)$
25	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^{n+\frac{1}{2}}}, n > -\frac{1}{2}$	$\frac{2^n n! t^n J_n(at)}{a^n (2n)!}$
26	$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$	$\frac{1 - e^{-t}}{t}$
27	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{\cos a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$
28	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{p^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{2 \sin a\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi t}}$
29	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}, a \geq 0$	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$
30	$e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{ae^{-\frac{a^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}^{\frac{3}{2}}}$
31	$\frac{e^{pa}}{p} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{4}}$
32	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}, a > 0$	$1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
33	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{p}$	$J_0(a\sqrt{t})$
34	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{p^{n+1}}, n > -1$	$\frac{2^n t^{\frac{n}{2}} J_n(at)}{a^n}$

Более полную таблицу читатель может найти в [4].

Если переход от оригинала к изображению или обратный переход от изображения к оригиналу не удается осуществить с помощью таблицы, то для перехода от оригинала к изображению пользуются непосредственно формулой (1) (стр.

а для обратного перехода от изображения к оригиналу — *формулой обращения интеграла Лапласа*:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \bar{u}(p) dp, \quad \sigma_0 \geq s, \quad (2)$$

где символ $\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty}$ в правой части обозначает, что в качестве пути интегрирования взята прямая $\operatorname{Re} p = \sigma_0$, параллельная мнимой оси, точнее,

$$\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} \bar{u}(p) dp = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma_0 - i\omega}^{\sigma_0 + i\omega} e^{pt} \bar{u}(p) dp.$$

Доказательство формулы обращения, требующее знакомства с теорией интеграла Фурье, мы опускаем, отсылая интересующих этим вопросом читателей к [8].

При доказательстве формулы обращения одновременно устанавливается и единственность построения оригинала по изображению.

Вычисление по формуле (2) обычно требует применения теории вычетов и осуществляется методами гл. VII, причем во многих случаях это вычисление оказывается весьма сложным, поэтому большое значение имеют теоремы, дающие возможность представить некоторые функции $\bar{u}(p)$ в виде суммы более простых слагаемых и тем самым, в силу свойства 2) (стр. 272), упростить задачу перехода от изображения $\bar{u}(p)$ к оригиналу. В частности, часто удобно пользоваться следующими двумя теоремами о разложении.

Теорема о разложении рациональной дроби

В курсе интегрального исчисления при интегрировании рациональных дробей доказывается, что правильная несократимая рациональная дробь $\frac{P(p)}{Q(p)}$ может быть представлена в виде суммы элементарных дробей вида $\frac{A_{ks}}{(p-p_k)^s}$:

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{\alpha_k} \frac{A_{ks}}{(p-p_k)^s}, \quad (3)$$

где p_k — действительные или комплексные корни многочлена $Q(p)$, α_k — кратность корня p_k , A_{ks} — постоянные величины; m — число различных корней многочлена $Q(p)$.

Для каждого слагаемого правой части оригинал легко находится (см. пример в), стр. 271 и свойство 7), стр. 275 или №№ 4 и 5' таблицы стр. 275).

Опираясь на теорию вычетов, можно указать очень простой способ вычисления коэффициентов A_{ks} в том случае, когда *все корни p_k простые* и, следовательно, разложение (3) имеет вид

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p-p_k}. \quad (4)$$

Действительно, разлагая функцию $\frac{P(p)}{Q(p)}$ в ряд Лорана в окрестности полюса первого порядка p_k , получим:

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A_k}{p-p_k} + c_0 + c_1(p-p_k) + \dots + c_n(p-p_k)^n + \dots,$$

так как для всех слагаемых суммы (4), кроме $\frac{A_k}{p-p_k}$, точка p_k не является особой точкой, и поэтому их разложение в ряд Лорана содержит лишь правильную часть.

Следовательно, A_k является вычетом функции $\frac{P(p)}{Q(p)}$ относительно полюса p_k и может быть найдено методами § 2 гл. VII:

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{P(p)(p-p_k)}{Q(p)}$$

или

$$A_k = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\bar{u}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)(p-p_k)}$$

и

$$u(t) = \sum_{k=1}^m \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Теорема о разложении по отрицательным степеням p

Если аналитическая в окрестности бесконечно удаленной точки функция $\bar{u}(p)$ имеет в бесконечности нуль, то разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\bar{u}(p) = \frac{c_{-1}}{p} + \frac{c_{-2}}{p^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{p^n} + \dots,$$

и так как оригиналом для общего члена этого ряда $\frac{c_{-n}}{p^n}$ является $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (см. пример в), стр. 271 или 2, стр. 275), то естественно ожидать, что оригиналом для функции

$$\bar{u}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{p^n} \quad (5)$$

является сумма ряда

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (6)$$

Сумма ряда (6) действительно будет оригиналом функции $\bar{u}(p)$, если ряд (6) равномерно сходится при $0 \leq t < \infty$, так как в этом случае, умножая (6) на $e^{-pt} dt$ и почленно интегрируя ряд в правой части уравнения в пределах от 0 до ∞ , получим (5).

§ 2. Интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Для интегрирования линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (7)$$

($f(t)$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3), стр. 271) с начальными условиями

$$x^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, (n-1))$$

совершаем над левой и правой частями равенства (7) пре-

образование Лапласа и, опираясь на свойства 1), 2), 3) (стр. 272—273), получим:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \bar{x}(p) = \bar{f}(p),$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{Q(p)}, \quad \text{где } Q(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Пользуясь таблицами или формулой обращения, а иногда предварительно преобразовав функцию $\frac{\bar{f}(p)}{Q(p)}$ (например, с помощью теоремы о разложении), находим по изображению $\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{Q(p)}$ оригинал $x(t)$, который и является искомым решением при $t > 0$.

Если искомое решение уравнения (7) должно удовлетворять начальным условиям

$$x^{(k)}(0) = x_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, (n-1)),$$

то, применяя к (7) преобразование Лапласа, получим:

$$(p^n \bar{x}(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)}) + \\ + a_1 (p^{n-1} \bar{x}(p) - p^{n-2} x_0 - \dots - x_0^{(n-2)}) + \dots \\ \dots + a_n \bar{x}(p) = \bar{f}(p),$$

или

$$Q(p) \bar{x}(p) = \bar{f}(p) + \varphi(p),$$

где $\varphi(p)$ — известная целая рациональная функция p , откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p) + \varphi(p)}{Q(p)},$$

и, находя по изображению оригинал, получим искомое решение $x(t)$.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 2e^{2t},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Переходя к изображению, получим:

$$(p^2 - 3p + 2) \bar{x}(p) = \frac{2}{p-3}.$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Разлагая на элементарные дроби (при этом удобно применить теорему о разложении рациональной дроби — см. стр. 278—279), получим:

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3}.$$

Принимая во внимание, что $e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}$, найдем искомое решение:

$$x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}.$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 4x(t) = t^2 e^{2t}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Переходя к изображению и принимая во внимание формулы

$$\frac{t^n}{n!} \rightarrow \frac{1}{p^{n+1}} \text{ и } u(t) e^{at} \rightarrow \bar{u}(p-a) \quad (8)$$

(см. стр. 271 и 275), получим:

$$(p^2 - 4p + 4) \bar{x}(p) = \frac{3!}{(p-2)^4},$$

откуда $\bar{x}(p) = \frac{3!}{(p-2)^4}$, и, пользуясь теми же двумя формулами (8)

или табличной формулой 5 (стр. 275), найдем:

$$x(t) = \frac{t^3 e^{2t}}{20}.$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$\dot{x}(t) + x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}.$$

Пользуясь свойством 3) (стр. 273) и формулой 9 (стр. 276), переходим к изображению и получаем:

$$(p^2 + 1) \bar{x}(p) + \frac{1}{2} = \frac{1}{p^2 + 1},$$

откуда

$$\bar{x}(p) = -\frac{1}{2} \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Пользуясь формулой 13 (стр. 276), получим:

$$x(t) = -\frac{t \cos t}{2}.$$

Тем же методом можно интегрировать системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 4. Проинтегрировать систему уравнений

$$\dot{x}(t) + x(t) - y(t) = e^t, \quad y(t) + 3x(t) - 2y(t) = 2e^t, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Переходя к изображению, получим:

$$(p+1)\bar{x}(p) - \bar{y}(p) = \frac{1}{p-1} + 1,$$

$$3\bar{x}(p) + (p-2)\bar{y}(p) = \frac{2}{p-1} + 1.$$

Решая эту систему линейных уравнений, получим:

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p-1}, \quad \bar{y}(p) = \frac{1}{p-1},$$

откуда

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t.$$

§ 3. Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Как уже упоминалось на стр. 260, многие процессы с последствием, и в частности многие задачи теории регулирования, описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами. Особенно часто в приложениях приходится интегрировать линейные дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами, с постоянными коэффициентами и с постоянными запаздываниями:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^s \sum_{k=0}^{n-1} a_{ki} x^{(k)}(t - \tau_i) = f(t), \quad (9)$$

где a_{ki} и τ_i — постоянные, причем

$$0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s,$$

или системы таких уравнений.

Предполагая, что искомое решение $x(t)$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3) (стр. 271) и что $x^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, (n-1)$), переходим в равенстве (9) к изображению, пользуясь при этом свойствами 1), 2), 3), 5) (стр. 272—274):

$$\left(p^n + \sum_{i=0}^s \sum_{k=0}^{n-1} a_{ki} p^k e^{-p\tau_i} \right) \bar{x}(p) = \bar{f}(p),$$

¹⁾ Это условие и условие 2) стр. 271 означают, что начальная функция $\varphi(t) = 0$ (см. стр. 260 или подробнее [15]).

или

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{p^n + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-1} a_{ki} p^k e^{-p\tau_i}}. \quad (10)$$

Переходя с помощью таблиц или формулы обращения к оригиналу, получим искомое решение $x(t)$.

Заметим, что переход от изображения к оригиналу в рассматриваемом случае обычно сопряжен с некоторыми затруднениями ввиду довольно сложного вида знаменателя в (10), поэтому операционный метод часто применяют в комбинации с «методом шагов» (см. [15]).

§ 4. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в частных производных

Общая схема интегрирования методами операционного исчисления линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, например уравнений вида

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{23} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{33} u = f(t, x), \quad (11)$$

с некоторыми начальными и граничными условиями сводится к следующему: считая, что искомое решение $u(x, t)$ по переменному t удовлетворяет наложенным на оригинал условиям (см. стр. 271), умножаем тождество (11) на $e^{-pt} dt$ и интегрируем по t в пределах от 0 до ∞ , т. е. переходим в равенстве (11) к изображениям по переменному t , при этом уравнение в частных производных (11) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение. Переходя к изображению в граничных условиях, получим граничные условия для решения обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего изображение. Интегрируя полученное обыкновенное уравнение операционными или иными методами, получим изображение $\bar{u}(x, p)$ искомого решения и с помощью таблиц или формулы обращения находим искомое решение.

Пример 1. Найти при $x > 0$ и $t > 0$ решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = u_0 \quad (13)$$

в начальном условии

$$u(x, 0) = 0. \quad (13')$$

При этом мы решаем задачу о распределении температуры $u(x, t)$ в полубесконечном однородном стержне, если начальная температура стержня равна нулю, а на границе стержня все время поддерживается постоянная температура u_0 .

Переходя в уравнении (12) к изображениям и принимая при этом во внимание начальное условие (13'), получим:

$$a^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - p \bar{u} = 0. \quad (14)$$

Переход к изображению в граничном условии (13) дает

$$\bar{u}(0, p) = \frac{u_0}{p}. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (14), получим:

$$\bar{u}(x, p) = c_1 e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} + c_2 e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

Произвольные постоянные определяются из условия (15) и из вытекающего из физического смысла задачи требования ограниченности решения $u(x, t)$, а следовательно и $\bar{u}(x, p)$, при $x \rightarrow \infty$. Из этих условий получим: $c_2 = 0$, $c_1 = \frac{u_0}{p}$ и, следовательно,

$$\bar{u}(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

Пользуясь формулой 32 (стр. 277), находим искомое решение:

$$u(x, t) = u_0 \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right) = u_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

При интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных с двумя или большим числом независимых переменных во многих случаях целесообразно совершать преобразование Лапласа не по одному, а по нескольким переменным.

Подробнее о применении операционных методов к интегрированию дифференциальных уравнений см. [6], [VII], [VIII].

§ 5. Разложение изображения в асимптотический ряд

В прикладных задачах часто требуется хотя бы приближенно определить значение некоторой функции $f(t)$ при больших значениях аргумента. Такие задачи возникают, например, при изучении установившихся режимов.

В этих случаях стараются представить функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \varphi(t) + R(t), \quad (16)$$

где $R(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\varphi(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ или если $R(t)$ стремится к нулю быстрее, чем $\varphi(t)$, то можно для больших значений t приближенно заменить функцию $f(t)$ функцией $\varphi(t)$, причем такая замена будет тем более точной, чем быстрее стремится $R(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Если t комплексное переменное и речь идет о вычислении значений аналитической в бесконечности функции $f(t)$ при больших по модулю значениях t , то представление функции $f(t)$ в виде (16) может быть получено, например, путем разложения функции $f(t)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$f(t) = c_0 + \frac{c_{-1}}{t} + \frac{c_{-2}}{t^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{t^n} + \dots = \left(c_0 + \frac{c_{-1}}{t} + \frac{c_{-2}}{t^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{t^n} \right) + R_n(t), \quad (17)$$

где $R_n(t) = \frac{c_{-(n+1)}}{t^{n+1}} + \frac{c_{-(n+2)}}{t^{n+2}} + \dots$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, причем порядок стремления к нулю остатка ряда $R_n(t)$ не ниже $\frac{1}{t^{n+1}}$, так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{n+1} R_n(t) = c_{-(n+1)}.$$

Следовательно, для больших по модулю значений t можно приближенно заменять функцию $f(t)$ несколькими членами ее лорановского разложения (17).

Удобный способ получения таких так называемых асимптотических представлений функций дает методы операционного исчисления.

Рассмотрим изображение

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt$$

и в предположении, что $u(t)$ имеет производные до $n+1$ -го порядка, удовлетворяющие условиям, наложенным на функцию-оригинал (см. стр. 271), проинтегрируем правую часть по частям $n-1$ раз:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \frac{u(0)}{p} + \frac{u'(0)}{p^2} + \dots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{p^n} + \\ &+ \frac{1}{p^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} u^{(n)}(t) dt = \frac{u(0)}{p} + \frac{u'(0)}{p^2} + \dots \\ &\dots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{p^n} + r_n(p). \end{aligned}$$

Докажем, что

$$|r_n(p)| \leq \frac{A_n}{|p|^{n+1}},$$

где A_n — некоторая постоянная.

Действительно,

$$r_n(p) = \frac{1}{p^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} u^{(n)}(t) dt = \frac{u^{(n)}(0)}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-pt} u^{(n+1)}(t) dt,$$

и так как по предположению

$$|u^{(n+1)}(t)| < M_{n+1} e^{st},$$

где M_{n+1} — постоянная при фиксированном n , то при $\sigma = \operatorname{Re} p \geq s_0 > s$

$$|r_n(p)| \leq \frac{|u^{(n)}(0)|}{|p|^{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{|p|^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-s)t} dt \leq \frac{A_n}{|p|^{n+1}},$$

где A_n — постоянная.

Следовательно, изображение $\bar{u}(p)$ представлено в виде

$$\bar{u}(p) = \frac{u(0)}{p} + \frac{u'(0)}{p^2} + \dots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{p^n} + r_n(p), \quad (18)$$

где $|r_n(p)| \leq \frac{A_n}{|p|^{n+1}}$.

Если функция обладает производными сколь угодно высокого порядка, удовлетворяющими условиям, наложенным на функцию-оригинал, то вместо (18) можно написать для функ-

ции $\bar{u}(p)$ разложение в так называемый *асимптотический ряд*:

$$\bar{u}(p) \sim \frac{u(0)}{p} + \frac{u'(0)}{p^2} + \dots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{p^n} + \dots \quad (19)$$

При разложении в асимптотический ряд вместо знака равенства пишут знак $\sim$, так как ряд, стоящий в правой части (19), может быть даже расходящимся, т. е. $r_n(p)$ в (18) может не только не стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, но может даже неограниченно возрастать по модулю ввиду возможности быстрого стремления A_n к бесконечности. Однако при фиксированном n $r_n(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$, причем $r_n(p)$ стремится к нулю быстрее, чем остальные слагаемые в правой части (18), и, следовательно, при больших по модулю значениях p можно приближенно заменять функцию $\bar{u}(p)$ суммой нескольких начальных членов ее асимптотического ряда (19).

Заметим, что ряд (19), вообще говоря, не является рядом Лорана функции $\bar{u}(p)$, так как для возможности разложения функции $\bar{u}(p)$ в асимптотический ряд (19) не требовалось, например, чтобы бесконечно удаленная точка была правильной или изолированной особой точкой функции $\bar{u}(p)$.

Пример 1. Разложить в асимптотический ряд функцию

$$\bar{u}(p) = e^{p^2} \int_p^\infty e^{-x^2} dx. \quad (20)$$

Принимая во внимание, что оригиналом функции (20) является функция

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

(см. 31, стр. 277), согласно (19) будем иметь:

$$e^{p^2} \int_p^\infty e^{-x^2} dx \sim \frac{1}{2p} - \frac{1}{2^2 p^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 p^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 p^7} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} p^{2n+1}} + \dots,$$

или

$$\int_p^\infty e^{-x^2} dx \sim e^{-p^2} \left[\frac{1}{2p} - \frac{1}{2^2 p^3} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} p^{2n+1}} + \dots \right]. \quad (21)$$

Представив интеграл $\int_0^p e^{-t^2} dt$ в виде разности

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt - \int_p^\infty e^{-t^2} dt$$

и принимая во внимание, что

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

можно из (21) получить асимптотическое разложение

$$\Phi(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-t^2} dt \sim$$

$$\sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-p^2} \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2^2 p^3} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} p^{2n+1}} + \dots \right).$$

Пример 2. Разложить в асимптотический ряд функцию $\sin \frac{1}{t}$.

Рассматриваемая функция является аналитической в бесконечно-сти. Следовательно, асимптотический ряд можно получить путем разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\sin \frac{1}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)! t^{2n+1}} + \dots$$

Задачи к главе XI

Проинтегрировать дифференциальные уравнения при $t \geq 0$.

- $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
- $\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x + x = 6e^{-t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0.$
- $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 12e^{2t}, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 6.$
- $\ddot{x} + 4x = 3 \sin t + 10 \cos 3t, \quad x(0) = -2, \quad \dot{x}(0) = 3.$
- $\ddot{x} - x = 4 \sin t + 5 \cos 2t, \quad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = -2.$
- $\ddot{x} + x = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 2e^t \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $\ddot{x} + 9x = 30 \operatorname{ch} t, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2y = 10e^{2t} \\ y - 2x + y = 7e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$

- Разложить в асимптотический ряд функцию $e^{-\frac{1}{t^2}}$.
- Разложить в асимптотический ряд функцию $\cos \frac{1}{t}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава I

1. а) $3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$; б) $1 \cdot \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$;
 в) $2 (\cos 0 + i \sin 0)$; г) $2 (\cos \pi + i \sin \pi)$;
 д) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;
 е) $\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{4}\pi \right) \right]$;
 ж) $2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$;
 з) $2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$;
 и) $\sqrt{29} \left(\cos \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right)$;
 к) $\sqrt{29} \left[\cos \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) + i \sin \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) \right]$;
 л) $\sqrt{29} \left[\cos \left(-\operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) + i \sin \left(-\operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) \right]$;
 м) $\sqrt{29} \left[\cos \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) \right]$.

2. а) Вне круга радиуса 5 с центром в начале координат; б) внутри круга радиуса 3 с центром в точке i ; в) вне круга радиуса 2 с центром в точке $-2i$ и на окружности этого круга; г) на окружности круга радиуса 5 с центром в точке $3+4i$; д) направо от прямой $x=3$; е) ниже прямой $y=2$ и на самой этой прямой; ж) на эллипсе с фокусами в точках -2 и 2 и большой полуосью $\frac{5}{2}$; з) внутри левой ветви гиперболы с фокусами в точках -2 и 2 и действительной полуосью $\frac{3}{2}$; и) на дуге $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = a^4$; к) на гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$; л) на перпендикуляре к отрезку, соединяющему точки i и -2 , восстановленному из

середины этого отрезка; м) на прямой $x = \frac{5}{2}$ и слева от нее; н) внутри угла между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, выходящими из начала координат; о) на луче, выходящем из точки i под углом $\frac{\pi}{4}$ к положительному направлению действительной оси; п) внутри угла между лучами, выходящими из точки $-2i$ и образующими с положительным направлением действительной оси углы, равные соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$.

4. а) $-i$; б) $-i$; в) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; г) $-16(\sqrt{3}+i)$; д) -8 .

5. а) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $-i$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, $-\sqrt[3]{2}i$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$;
 в) 1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, i , $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, -1 , $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; г) $\sqrt[4]{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \frac{7\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$;
 д) $2+i$, $-2-i$; е) $\sqrt{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$.

Глава II

1. а) $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$; б) $u^2 + v^2 = 1$; в) $v = -u$; г) $v = 0$;
 д) $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$; е) $u = \frac{1}{2}$.
 2. а) Прямая $y = x$; б) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) гипербола $y = \frac{1}{x}$;
 г) ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$, лежащая в первой четверти ($x > 0$, $y > 0$).

Глава III

1. а) $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$; б) $-\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$;
 в) $\ln 5 - i \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + (2k+1)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
 Указание. Главное значение аргумента числа $-3+4i$ равно $\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.
 2. а) $-i$; б) $-ei$; в) $e^2(\cos 1 + i \sin 1)$; г) $ie^{(2i-\frac{1}{2})\pi}$;

- д) $e^{(2k - \frac{1}{4})\pi} \left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right)$;
 е) $e^{2k\pi i} (\cos \ln 3 + i \sin \ln 3)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
 4. а) $\frac{i}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$; б) $\frac{1}{2} \left[\left(e + \frac{1}{e} \right) \cos 1 - i \left(e - \frac{1}{e} \right) \sin 1 \right]$;
 в) $\frac{\sin 4 + i \operatorname{sh} 2}{2(\cos^2 1 + \operatorname{sh}^2 1)}$; г) $\cos 1$; д) $i \sin 1 \operatorname{ch} 2 - \cos 1 \operatorname{sh} 2$;
 е) $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$ или $\operatorname{ch} y \sin x + i \operatorname{sh} y \cos x$;
 ж) $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$ или $\operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x$.
 6. а) $\left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2})$; б) $2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$,
 $(2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$; в) $2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{2} - i \left[\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$, $(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{2} - i \left[\ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$; г) $k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$; д) $k\pi + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{i}{4} \ln 5$;
 е) $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) i$; ж) $(2k+1)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Глава IV

2. а) $z^2 + C$; б) $z^2 + 2z + C$; в) $\frac{1}{z} + C$; г) $\frac{1}{z} + 2iz + C$; д) $-2ie^z + C$.
 3. а) $\frac{1}{z+1} + C$; б) $z^2 + 3iz + C$; в) $\ln z + C$; г) $ze^z + (1+i)z + C$.
 4. а) Углы поворота 0 и 0, коэффициенты растяжения 2 и 3;
 б) углы поворота 0 и 0, коэффициенты растяжения 1 и $\frac{3}{4}$; в) углы поворота π и 0, коэффициенты растяжения $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{16}$; г) углы поворота $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, коэффициенты растяжения $2\sqrt{2}$ и 6; д) углы поворота $-\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{5\pi}{6}$, коэффициенты растяжения 4 и 12.
 5. а) Сжимается внутренность круга $|z| < \frac{1}{2}$, растягивается внешность круга $|z| > \frac{1}{2}$; б) сжимается внешность круга $|z| > 1$, растягивается внутренность круга $|z| < 1$; в) сжимается внутренность круга $|z+1| < \frac{1}{2}$, растягивается внешность круга $|z+1| > \frac{1}{2}$;

г) сжимается левая полуплоскость $x < 0$, растягивается правая полуплоскость $x > 0$; д) сжимается внешность круга $|z-1| > 1$, растягивается внутренность круга $|z-1| < 1$.

Глава V

1. а) $\frac{2+i}{2}$; б) $2 + \frac{i}{2}$. 2. а) 1; б) 2. 3. а) $-8\pi i$; б) 0.
 4. $\pi \left(e - \frac{1}{e} \right)$. 5. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{3}$. 6. а) $\frac{\pi}{54}$; б) $-\frac{\pi}{54}$. 7. $\frac{\pi i}{3e^2}$.
 8. а) $\frac{3\pi i}{8}$; б) $-\frac{3\pi i}{8}$; в) 0.

Глава VI

1. а) 2; б) 1; в) ∞ ; г) 0; д) e ; е) 1. 4. $e^{\frac{2k\pi i}{m}} \left[1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \frac{(z-1)^3}{3!} + \dots \right]$, где $k=0, 1, 2, \dots, m-1$. Радиус сходимости равен 1.
 5. $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$; $z + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 5 \cdot 2!} z^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 7 \cdot 3!} z^7 + \dots$. Радиус сходимости равен 1 в обоих случаях.
 6. а) $e \left(1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \dots \right)$, $r=1$;
 б) $\sin 1 + \cos 1 \cdot z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1 \right) z^2 + \left(\frac{5}{6} \cos 1 - \sin 1 \right) z^3 + \dots$, $r=1$;
 в) $\ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \dots$, $r=\pi$.
 7. а) $\frac{1}{(a-b)b} \left(1 + \frac{z}{b} + \frac{z^2}{b^2} + \dots \right) + \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \dots \right)$;
 б) $\frac{1}{z^2} + \frac{a^2 - b^2}{(a-b)z^3} + \frac{a^3 - b^3}{(a-b)z^4} + \dots + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{(a-b)z^n} + \dots$;
 в) $-\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{z-a}{(a-b)^3} - \frac{(z-a)^2}{(a-b)^4} + \dots + \frac{1}{(a-b)(z-a)}$.
 8. $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6z^3} - \frac{1}{2z^4} - \dots$, область сходимости $|z| > 1$.
 9. а) Полюсы 1-го порядка $z=0$ и $z=-1$, полюс 3-го порядка $z=1$; б) полюсы 3-го порядка $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$; в) полюсы 1-го по-

рядка $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); г) полюсы 2-го порядка $z = \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); д) существенно особая точка $z = 2i$; е) существенно особая точка $z = -i$; ж) полюсы 1-го порядка $z = 1 + \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $z = 1$ — предельная точка для полюсов; з) $z = 1 + \frac{2k+1}{2}\pi$ — полюсы 1-го порядка, $z = 1$ — устранимая особая точка; и) $z = 0$ — устранимая особая точка; к) $z = 0$ — полюс 3-го порядка.

10. а) Устранимая особая точка; б) устранимая особая точка (нуль 3-го порядка); в) существенно особая точка; г) существенно особая точка; д) полюс 3-го порядка; е) полюс 2-го порядка; ж) устранимая особая точка; з) устранимая особая точка; и) существенно особая точка.

11. а) Нет; б) да. 12. а) Да; б) нет.

Глава VII

1. а) 5; б) $\frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right)$; в) $-\frac{3i}{16}$ (относительно точки i) и $\frac{3i}{16}$ (относительно точки $-i$); г) $(-1)^{n+1} \frac{(n+2)(n+3)\dots(2n-1) \cdot 2n}{(n-1)!}$; д) $-\frac{i}{4}$ (относительно точки i) и $\frac{i}{4}$ (относительно точки $-i$); е) 1 (относительно точки 0) и $-\frac{1}{2}$ (относительно каждой из точек ± 1); ж) -1 (относительно каждой из точек $(2k+1)\frac{\pi}{2}$); з) 0 (относительно каждой из точек $k\pi$); и) -1 (относительно каждой из точек $k\pi$) ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

2. а) 1; б) 0; в) 1. 3. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 4. $-\frac{\pi i}{2}$.

5. а) 0;

б) $(-1)^{n-1} \frac{2\pi(2n-2)!i}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$; в) 0.

6. а) $\pi\sqrt{2}$;

б) $\frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}$; в) $\frac{\pi}{2a}$ ($a > 0$); г) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$ ($a > 0, b > 0$);

д) $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-1)^3}}$; е) $\frac{\pi}{3e^3}$; ж) $\frac{\pi}{4e^4} (4 \cos 2 + 2 \sin 2)$; з) $\pi (2 \sin 2 - 3 \cos 3)$;

и) $\frac{\pi}{5} (\cos 1 - e^{-2})$.

7. а) 0; б) 4; в) 1.

Глава VIII

1. $w = \frac{z-i}{(2+i)-(1+2i)z}$. 2. $w = \frac{i-z}{z+i}$. 3. а) $w = \frac{2z-1}{2-z}$;
б) $w = i \frac{2z-1}{2-z}$; в) $w = -iz$.
4¹⁾. а) $w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i} \right)^3$;
б) $w = \left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)} \right]^4$; в) $w = i \left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}+i} \right)^{3/2}$ для области I,
 $w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i} \right)^3$ для области II, $w = \left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i} \right)^3$ для
области III, $w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i} \right)^{3/2}$ для области IV; г) $w =$
 $= \left(\frac{z^4+16}{z^4-16} \right)^2$; д) $w = -\left(\frac{z^{3/2}+\sqrt[3]{4}}{z^{3/2}-\sqrt[3]{4}} \right)^2$; е) $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$;
ж) $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{z+1+i}}$; з) $w = \sqrt{z^2+a^2}$; и) $w = \sqrt{1-\left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2}$;
к) $w = \left(\frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}} \right)^2$; л) $w = e^{2\pi i \frac{z}{z-2}}$; м) $w = e^{\pi i \frac{z}{z-1}}$;
н) $w = e^{\frac{2}{3}\pi i \frac{z-4}{z-2}}$; о) $w = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$; п) $w = \left(\frac{e^{-\frac{\pi z}{a}}-1}{e^{-\frac{\pi z}{a}}+1} \right)^2$.

5. На верхнюю полуплоскость.

6. На внутренность единичного круга.

Глава IX

Модуль вектора в точке z :

1. $2|z|$. 2. $\frac{|z^2-1|}{|z|^2}$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{|z|}$. 4. $\frac{1}{2\sqrt{|z-a|}}$.

Угол между вектором в точке z и положительным направлением действительной оси:

1. $-\operatorname{Arg} z$. 2. $2\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg}(z^2-1)$. 3. $\operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{4}$. 4. $\frac{1}{2} \operatorname{Arg}(z-a)$.

¹⁾ В каждом ответе указана лишь одна из функций, удовлетворяющих условию задачи.

Уравнения линий тока

1. $xu = c$. 2. $y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = c$, в полярных координатах

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi = c. \quad 3. \rho = ce^{-\varphi}. \quad 4. \rho = \frac{c}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

если полярная система координат выбрана так, что полюс находится в точке $z = a$, а направление полярной оси совпадает с положительным направлением действительной оси.

Уравнения линий уровня потенциальной функции

1. $x^2 - y^2 = c$. 2. $x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = c$, в полярных координатах

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi = c; \quad 3. \rho = ce^{\varphi}. \quad 4. \rho = \frac{c}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

если полярная система координат выбрана так же, как при определении линий тока (см. выше).

5. $\Gamma = 0$; $N = 0$.

6. $\Gamma = -6\pi$; $N = 4\pi$.

Глава X

1. Решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

2. Решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

3. Решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчиво.

4. Решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

5. Область асимптотической устойчивости ограничена прямой

$$b = 0 \text{ и кривой } a = t \operatorname{tg} \tau t, \quad b = \frac{t^2}{\cos \tau t}, \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2\tau}.$$

6. Область асимптотической устойчивости ограничена прямой

$$b = 0 \text{ и кривой } a = t \sin \tau t, \quad b = t^2 \cos \tau t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\tau}.$$

7. Решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

8. Не имеет. См. пример 6.

Глава XI

$$1. x = \frac{t^4 e^t}{12}. \quad 2. x = t^2 e^{-t}. \quad 3. x = 2e^{2t}. \quad 4. x = \sin t + \sin 2t - 2 \cos 3t.$$

$$5. x = -2 \sin t - \cos 2t. \quad 6. x = \frac{t \sin t}{2}. \quad 7. x = te^t \sin t. \quad 8. x = 3 \operatorname{ch} t.$$

$$9. x = e^{2t}, y = 3e^{2t}. \quad 10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! t^{2n}}. \quad 11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! t^{2n}}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Бермант, Курс математического анализа, т. I, Гостехиздат, 1957.
2. А. Ф. Бермант, Курс математического анализа, т. II, Гостехиздат, 1957.
3. И. А. Гольдфайн, Элементы векторного исчисления, Гостехиздат, 1948.
4. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, 1951.
5. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1952.
6. Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.
7. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
8. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1951.
9. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1954.
10. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, Гостехиздат, 1958.
11. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I, Гостехиздат, 1957.
12. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, Гостехиздат, 1957.
13. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.
14. Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, Труды матем. института им. В. А. Стеклова, XXVI, Изд. АН СССР, 1949.
15. Л. Э. Эльсгольц, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1954.
16. Л. Э. Эльсгольц, Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1958.

**ГРИГОРИЙ ЛЬВОВИЧ ЛУНЦ
ЛЕВ ЭРНЕСТОВИЧ ЭЛЬСГОЛЬЦ**

**ФУНКЦИИ
КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО**

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Главный редактор *Ю. А. Сандулов*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Выпускающие *Н. К. Белякова, А. В. Яковлев*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.000996.02.01.
от 13.02.2001 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru

193012, Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, 277,
издательство: тел.: (812)262-11-78;
pbl@lpbl.spb.ru (издательский отдел),

производственный отдел: тел.: (812)262-24-95;
print@lpbl.spb.ru (производственный отдел),

склад № 1: факс: (812)267-27-92, 267-13-68;
trade@lpbl.spb.ru (торговый отдел),

193029, пр. Елизарова, 1,
склад № 2: (812)265-00-88, 567-54-93, 567-14-45;
root@lanpbl.spb.ru

Филиал в Москве:
Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 5,
тел.: (095)919-96-00, 787-59-47, 787-59-48

Филиал в Краснодаре:
350072, Краснодар, ул. Зиповская, 7, тел.: (8612)62-97-73.

Сдано в набор 23.10.99. Подписано в печать 10.02.2002.
Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108¹/₃₂.
Уч.-изд. л. 15,18. Усл. п. л. 15,37. Тираж 5000 экз.
Заказ № 66.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГИПК «Лениздат» (типография им. Володарского)
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 59.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- I. А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, Гостехиздат, 1957.
- II. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1951.
- III. Б. А. Фукс и Б. В. Шабат, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Физико-математическая библиотека инженера, Гостехиздат, 1949.
- IV. М. А. Лаврентьев, Конформное отображение, Физико-математическая библиотека инженера, Гостехиздат, 1946.
- V. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1954.
- VI. В. И. Крылов и Л. В. Канторович, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1952.
- VII. М. И. Канторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Физико-математическая библиотека инженера, Гостехиздат, 1949.
- VIII. А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Физико-математическая библиотека инженера, Гостехиздат, 1950.