РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Современная математика — студентам и аспирантам

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

3-е издание,
исправленное

НОВОСИБИРСК

Издательство Института математики

2000

УДК 517.98
ББК 22.16
К95

Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. — 3-е изд., испр. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. — xii+336 с. (Современная математика — студентам и аспирантам).

ISBN 5–86134–074–9.

В монографии изложены основные разделы современного функционального анализа. Особое внимание уделено теории банаховых алгебр и функциональному исчислению, теории нётеровых операторов, теории двойственности локально выпуклых пространств, выпуклому анализу, принципам банаховых пространств, теории распределений и ряду смежных вопросов. Около двадцати лет книга служит базой обязательного курса лекций для студентов-математиков Новосибирского государственного университета.

Книга адресована читателю, интересующемуся методами функционального анализа и их приложениями.

Библиогр.: 347.

Ответственный редактор
В. В. Иванов

Редактор серии
Ю. Г. Решетняк

К $\frac{1602080000-03}{Я82(03)-2000}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–074–9

Содержание

Предисловие к первому изданию

Как следует из названия, эта книга посвящена функциональному анализу. Термин «функциональный анализ» был изобретен в самом начале текущего века Ж. Адамаром, известным всем математикам по формуле для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Функциональным анализом стали называть новую ветвь вариационного исчисления, которую интенсивно разрабатывали в то время В. Вольтерра, Ч. Арцела, П. Леви, С. Пинкерле и ряд других представителей французской и итальянской математических школ.

Вклад Ж. Адамара в создание новой дисциплины не сводится, разумеется, к изобретению слова функционал (точнее, к превращению соответствующего прилагательного в имя существительное). Ж. Адамар хорошо понимал роль зарождающегося направления, интенсивно работал, постоянно пропагандировал вновь возникающие проблемы, идеи и методы. В частности, он поставил перед своим учеником М. Фреше задачу построения того, что все теперь называют теорией метрических пространств. В этой же связи уместно отметить, что окрестности, применяемые в функциональном анализе в смысле Адамара — Вольтерра, послужили предтечей известных работ Ф. Хаусдорфа, ознаменовавших оформление общей топологии. Для дальнейшего важно подчеркнуть, что одно из наиболее интересных, трудных и важных направлений классического анализа — вариационное исчисление — стало первым источником функционального анализа.

Вторым источником функционального анализа были исследования, направленные на создание алгебраической теории функциональных уравнений, точнее говоря, на упрощение и формализацию манипулирования «уравнениями в функциях» и, в частности, линейными интегральными уравнениями. Теория таких уравнений, восходящая к Н. Абелю и Ж. Лиувиллю, получила существенное развитие в работах И. Фредгольма, К. Неймана, Ф. Нётера, А. Пуанкаре и др. Труды этих математиков подготовили почву знаменитым исследованиям Д. Гильберта по теории квадратичных форм от бесконечного числа переменных. Идеи Д. Гильберта, развитые Ф. Риссом, Э. Шмидтом и др., непосредственно предшествовали аксиоматическому построению теории гильбертовых пространств, данному Дж. фон Нейманом и М. Стоуном. Возникший раздел математики оказал и продолжает оказывать сильнейшее воздействие на теоретическую физику и прежде всего на квантовую механику. Небезынтересно и поучительно в этой связи отметить, что термин «квант» возник в том же 1900 г., что и термин «функционал».

Третьим важнейшим источником функционального анализа послужили геометрические идеи Г. Минковского. Развитый им аппарат конечномерной геометрии выпуклых тел подготовил тот круг пространственных представлений, в котором осуществляется современное развитие анализа. Идея выпуклости, разработанная Э. Хелли, Г. Ханом, К. Каратеодори, И. Радоном и др., легла впоследствии в основу теории локально выпуклых пространств. В свою очередь, эта теория способствовала распространению метода обобщенных производных, открытого С. Л. Соболевым и коренным образом изменившего аппарат математической физики. В послевоенные годы геометрическая концепция выпуклости завоевала для математики новую сферу приложений — социальные науки и особенно экономику. Исключительную роль при этом сыграло линейное программирование, открытое Л. В. Канторовичем.

Приведенный перечень линий становления функционального анализа схематичен, неполон и приблизителен (так, остались неотмеченными линия принципа суперпозиции Д. Бернулли, линия функций множеств и теории интеграла, линия операционного исчисления, линия исчисления конечных разностей и дробного дифференцирования, линия «общего анализа» и многое другое). Несмотря на это, перечисленные три источника отражают основную, наиболее существенную закономерность — в функциональном анализе осуществлены синтез и развитие идей, представлений и методов классических разделов математики: геометрии, алгебры и анализа. Таким образом, хотя в буквальном смысле слов функциональный анализ —

это анализ функций и функционалов, даже поверхностный взгляд на его историю дает основания сказать, что функциональный анализ — это алгебра, геометрия и анализ функций и функционалов. Более глубокое и развернутое разъяснение понятия «функциональный анализ» дает Советский Энциклопедический Словарь: «Функциональный анализ, один из основных разделов современной математики. Возник в результате взаимного влияния, объединения и обобщения идей и методов многих разделов классического математического анализа. Характеризуется использованием понятий, связанных с различными абстрактными пространствами, такими, как векторное пространство и др. Находит разнообразные применения в современной физике, особенно в квантовой механике» (с. 1449).

Оформление функционального анализа как самостоятельного раздела математики связано с книгой С. Банаха «Теория линейных операций», вышедшей в свет полвека назад. Влияние этой книги на развитие математики огромно — представленные в ней концепции С. Банаха пронизывают всю математику.

Выдающийся вклад в развитие функционального анализа внесли советские ученые И. М. Гельфанд, Л. В. Канторович, М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, Л. А. Люстерник, С. Л. Соболев. Для отечественной школы характерно развитие исследований в области функционального анализа в связи с крупными прикладными проблемами. Эти исследования расширили роль функционального анализа — он стал основным языком приложений математики. Показателен следующий факт. Хотя в 1948 г. само название широко известной статьи Л. В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика», заложившей основы современной теории приближенных методов, воспринималось как парадоксальное, уже в 1974 г., по словам С. Л. Соболева, теорию вычислений стало «так же невозможно себе представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин».

Наряду с постоянным ростом потребностей в методах и представлениях функционального анализа в последнее время наблюдается экспоненциальное накопление фактического материала в рамках самой этой дисциплины. Таким образом, разрыв между современным уровнем анализа и уровнем, зафиксированным в доступной широкому читателю литературе, постоянно увеличивается. Настоящая книга преследует цель преодоления этой негативной тенденции.

Предисловие ко второму изданию

В течение более десятка лет эта книга используется в качестве основы обязательного курса лекций по функциональному анализу в Новосибирском государственном университете. Время подтвердило обоснованность принципов составления монографии. В настоящее издание внесены разделы, трактующие основы теории распределений, добавлены упражнения теоретического характера и существенно обновлен список литературы. Устранены также неточности, указанные мне коллегами.

Пользуюсь случаем поблагодарить всех, кто помог мне в подготовке этой книги. Мой приятный долг особо отметить финансовую поддержку во время подготовки издания со стороны Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Российского фонда фундаментальных исследований, Международного научного фонда и Американского математического общества.

Предисловие к третьему изданию

Настоящее третье издание содержит указатель основных обозначений. В нем исправлены некоторые мелкие неточности, выжившие в двух предыдущих русских вариантах и английском переводе, осуществленном издательством Kluwer Academic Publishers в 1996 г. Надеюсь, что число дефектов, возникших при подготовке нового издания, невелико.

С. Кутателадзе

Глава 1

Экскурс в теорию множеств

1.1. Соответствия

1.1.1. Определение. Пусть A и B — множества и F — подмножество произведения $A \times B$. Тогда F называют *соответствием с областью отправления* A и *областью прибытия* B или, короче, соответствием из A в B.

1.1.2. Определение. Для соответствия $F \subset A \times B$ множество

$$\operatorname{dom} F := D(F) := \{a \in A : \ (\exists\, b \in B)\ (a,\ b) \in F\}$$

называют *областью определения* F, а множество

$$\operatorname{im} F := R(F) := \{b \in B : \ (\exists\, a \in A)\ (a,\ b) \in F\}$$

— *областью значений* или *образом* F.

1.1.3. Примеры.

(1) Если F — соответствие из A в B, то

$$F^{-1} := \{(b,\ a) \in B \times A : \ (a,\ b) \in F\}$$

— соответствие из B в A, называемое *обратным* к F. Ясно, что F обратно к соответствию F^{-1}.

(2) *Отношение* F в A — это соответствие $F \subset A \times A$.

(3) Пусть $F \subset A \times B$. Тогда F называют *однозначным* соответствием, если для каждого $a \in A$ из условий $(a,\ b_1) \in F$ и

$(a,\ b_2) \in F$ вытекает, что $b_1 = b_2$. В частности, если $U \subset A$ и $I_U := \{(a,\ a) \in A^2\ :\ a \in U\}$, то I_U — однозначное соответствие из A в B, о котором говорят и как о *тождественном отношении* или *тождестве* на U. Соответствие $F \subset A \times B$ называют *отображением* множества A в множество B, если F однозначно и $\operatorname{dom} F = A$. Соответствие I_U является отображением только при $A = U$. В этом случае I_U называют *тождественным отображением.* Отображение $F \subset A \times B$ обозначают символом $F : A \to B$. Стоит подчеркнуть, что при этом непременно $\operatorname{dom} F = A$ и в то же время образ $\operatorname{im} F$ может отличаться от B. Равенство $\operatorname{im} F = B$ выделяют словами: «F — *отображение* A *на* B».

Наконец, если соответствие $F^{-1} \subset B \times A$ оказывается однозначным, то исходное отображение $F : A \to B$ называют *взаимно однозначным.*

(4) Вместо отображений иногда говорят о семействах. Точнее, отображение $F : A \to B$ при желании называют *семейством* элементов B и обозначают просто $(b_a)_{a \in A}$, или $a \mapsto b_a\ (a \in A)$, или даже (b_a). Имеется в виду, что $(a,\ b) \in F$ в том и только в том случае, если $b = b_a$. Допуская вольность, не различают семейство и его область значений.

(5) Пусть $F \subset A \times B$ — соответствие и $U \subset A$. Соответствие $F \cap (U \times B) \subset U \times B$ называют *сужением* F на U или *следом* F на U и обозначают $F|_U$. Множество $F(U) := \operatorname{im} F|_U$ называют *образом* множества U при соответствии F. Применяют естественные сокращения. Так, если F — отображение, то для элемента a пишут $F(a) = b$, подразумевая $F(\{a\}) = \{b\}$. Скобки в символе $F(a)$ часто опускают или изображают в ином начертании. Отметьте, наконец, что образ при обратном отображении называют прообразом. Точнее говоря, образ $F^{-1}(U)$ множества U в B при соответствии F^{-1} называют *прообразом* множества U при соответствии F.

1.1.4. Определение. Для $F \subset A \times B$ и $G \subset C \times D$ множество

$$G \circ F := \{(a,\ d) \in A \times D :\ (\exists b)\ (a,\ b) \in F\ \&\ (b,\ d) \in G\}$$

называют *композицией* или *суперпозицией* соответствий F и G. При этом $G \circ F$ рассматривают как соответствие из A в D.

1.1.5. Замечание. Объем понятия суперпозиции, по существу, не уменьшится, если в 1.1.4 заранее считать, что $B = C$.

1.1.6. *Пусть F — соответствие. Тогда $F \circ F^{-1} \supset I_{\operatorname{im} F}$. Более того, $F \circ F^{-1} = I_{\operatorname{im} F}$ в том и только в том случае, если $F|_{\operatorname{dom} F}$ — это отображение.* $\lhd\rhd$

1.1.7. *Пусть $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$ и $U \subset A$. Тогда для соответствия $G \circ F \subset A \times C$ будет $G \circ F(U) = G(F(U))$.* $\lhd\rhd$

1.1.8. *Пусть $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $H \subset C \times D$. Тогда соответствия $H \circ (G \circ F) \subset A \times D$ и $(H \circ G) \circ F \subset A \times D$ совпадают.* $\lhd\rhd$

1.1.9. Замечание. В силу 1.1.8 разумно определен символ $H \circ G \circ F$ и ему подобные выражения.

1.1.10. *Пусть F, G, H — три соответствия. Тогда*

$$H \circ G \circ F = \bigcup_{(b,c) \in G} F^{-1}(b) \times H(c).$$

$\lhd$ $(a,\ d) \in H \circ G \circ F \Leftrightarrow (\exists (b,\ c) \in G)\ (c,\ d) \in H \ \&\ (a,\ b) \in F \Leftrightarrow (\exists\ (b,\ c) \in G)\ a \in F^{-1}(b)\ \&\ d \in H(c)$ $\rhd$

1.1.11. Замечание. Предложение 1.1.10 и выкладка, приведенная в качестве его доказательства, с формальной точки зрения вопиюще некорректны, поскольку основываются на неоговоренной явно или на двусмысленной информации (в частности, на определении 1.1.1). Опыт позволяет считать указанную критику поверхностной. Поэтому в дальнейшем аналогичного рода удобные (а на самом деле и неизбежные) некорректности будут, как правило, использоваться без специальных оговорок и сожалений.

1.1.12. *Для соответствий G и F выполнено*

$$G \circ F = \bigcup_{b \in \operatorname{im} F} F^{-1}(b) \times G(b).$$

$\lhd$ В 1.1.10 полагаем: $H := G$, $G := I_{\operatorname{im} F}$ и $F := F$. $\rhd$

1.2. Упорядоченные множества

1.2.1. Определение. Пусть σ — отношение в множестве X, т. е. $\sigma \subset X^2$. *Рефлексивность* σ означает включение $\sigma \supset I_X$, *транзитивность* — включение $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$, *антисимметричность* — включение $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X$ и, наконец, *симметричность* σ означает равенство $\sigma = \sigma^{-1}$.

1.2.2. Определение. Рефлексивное и транзитивное отношение называют *отношением предпорядка.* Симметричный предпорядок называют *эквивалентностью.* Антисимметричный предпорядок называют *порядком.* Если X — множество, а σ — порядок в X, то пару $(X,\ \sigma)$ называют *упорядоченным множеством* и пишут $x \leq_\sigma y$ вместо $y \in \sigma(x)$. Допускают обычные вольности словоупотребления и написания: само X называют упорядоченным множеством, пишут $x \leq y$ и говорят «x меньше y» или «y больше x» и т. п. Аналогичные соглашения действуют и для *предупорядоченных множеств*, т. е. множеств с отношениями предпорядка. При этом в случае отношения эквивалентности используют знаки типа $\sim_\sigma$ или просто $\sim$.

1.2.3. Примеры.

(1) Тождественное отношение; подмножество X_0 в X с отношением $\sigma_0 := \sigma \cap X_0 \times X_0$.

(2) Если σ — (пред)порядок на X, то σ^{-1} также (пред)порядок на X. При этом отношение σ^{-1} называют *противоположным* к σ (пред)порядком.

(3) Пусть $f : X \to Y$ и τ — отношение в Y. Рассмотрим в X следующее отношение: $f^{-1} \circ \tau \circ f$. В силу 1.1.10

$$f^{-1} \circ \tau \circ f = \bigcup_{(y_1, y_2) \in \tau} f^{-1}(y_1) \times f^{-1}(y_2).$$

Значит, выполнено

$$(x_1,\ x_2) \in f^{-1} \circ \tau \circ f \Leftrightarrow (f(x_1),\ f(x_2)) \in \tau.$$

Таким образом, если τ — это предпорядок, то $f^{-1} \circ \tau \circ f$ тоже предпорядок, называемый *прообразом* τ при отображении f. Ясно, что прообраз эквивалентности является эквивалентностью. В то же время прообраз порядка не обязан быть антисимметричным отношением. В частности, так, как правило, бывает для следующего отношения эквивалентности: $f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ I_Y \circ f$.

(4) Пусть X — произвольное множество и ω — эквивалентность в X. Определим отображение $\varphi : X \to 2^X$ правилом $\varphi(x) := \omega(x)$ (здесь 2^X — это множество подмножеств X, обозначаемое также и $\mathscr{P}(X)$). Пусть $\overline{X} := X/\omega := \operatorname{im} \varphi$ — *фактор-множество.*

Отображение φ, как известно, называют ***каноническим*** (канонической проекцией, факторным отображением и т. п.). Заметим, что φ считают действующим на $\overline{X}$. Множество $\varphi(x)$ называют ***классом эквивалентности*** или ***комножеством*** элемента x. Отметим еще, что

$$\omega = \varphi^{-1} \circ \varphi = \bigcup_{\overline{x} \in \overline{X}} \varphi^{-1}(\overline{x}) \times \varphi^{-1}(\overline{x}).$$

Пусть теперь $f : X \to Y$ — отображение. Тогда f допускает ***снижение*** $\overline{f}$ на $\overline{X}$, т. е. существует отображение $\overline{f} : \overline{X} \to Y$ такое, что $\overline{f} \circ \varphi = f$ в том и только в том случае, если $\omega \subset f^{-1} \circ f$. $\lhd\rhd$

(5) Пусть $(X,\ \sigma)$ и $(Y,\ \tau)$ — два предупорядоченных множества. Отображение $f : X \to Y$ ***возрастает*** (т. е. $x \le_\sigma y \Rightarrow f(x) \le_\tau f(y)$) в том и только в том случае, если $\sigma \subset f^{-1} \circ \tau \circ f$. $\lhd\rhd$

1.2.4. Определение. Пусть $(X,\ \sigma)$ — упорядоченное множество и U — подмножество в X. Элемент $x \in X$ называют ***верхней границей*** U, если $U \subset \sigma^{-1}(x)$. Коротко пишут: $x \ge U$. В частности, $x \ge \varnothing$. Элемент $x \in X$ называют ***нижней границей*** U, если x является верхней границей U в противоположном порядке σ^{-1}. Коротко пишут: $x \le U$. В частности, $x \le \varnothing$.

1.2.5. Замечание. В дальнейшем мы будем допускать вольности при введении понятий, получающихся из данных путем перехода к противоположному (пред)порядку. Отметим также, что определение верхней и нижней границ осмыслено и в предупорядоченных множествах.

1.2.6. Определение. Элемент x называют ***наибольшим*** в множестве U, если $x \ge U$ и $x \in U$. Аналогично определяют ***наименьший*** элемент U.

1.2.7. *Пусть $\pi_\sigma(U)$ — совокупность всех верхних границ подмножества U в упорядоченном множестве $(X,\ \sigma)$. Пусть, далее, $x \in X$ — наибольший элемент U. Тогда, во-первых, x — наименьший элемент $\pi_\sigma(U)$, а во-вторых, $\sigma(x) \cap U = \{x\}$.* $\lhd\rhd$

1.2.8. Замечание. Предложение 1.2.7 является основой двух обобщений понятия наибольшего элемента.

1.2.9. Определение. Элемент x из X называют *точной верхней границей* множества U в X, если x — наименьший элемент множества всех верхних границ U. При этом пишут $x = \sup_X U$ или, короче, $x = \sup U$. Аналогично (при переходе к противоположному порядку) определяют *точную нижнюю границу* множества U — элемент $\inf U$ или, более полно, $\inf_X U$.

1.2.10. Определение. Элемент x упорядоченного множества $(X,\ \sigma)$ называют *максимальным* в подмножестве U множества X, если $\sigma(x) \cap U = \{x\}$. Аналогично определяют *минимальный* элемент множества U.

1.2.11. Замечание. Необходимо отчетливо представлять себе различия и общие черты понятий наибольшего и максимального элементов и точной верхней границы множества. В частности, стоит «экспериментально» удостовериться, что у «типичного» множества нет наибольшего элемента, однако максимальные элементы встречаются.

1.2.12. Определение. Упорядоченное множество X называют *решеткой*, если для любых двух элементов $x_1,\ x_2$ из X существуют их точная верхняя граница $x_1 \vee x_2 := \sup\{x_1,\ x_2\}$ и точная нижняя граница $x_1 \wedge x_2 := \inf\{x_1,\ x_2\}$.

1.2.13. Определение. Упорядоченное множество X называют *полной решеткой*, если любое подмножество X имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы.

1.2.14. *Упорядоченное множество является полной решеткой в том и только в том случае, если любое его подмножество имеет точную верхнюю границу.* $\triangleleft\triangleright$

1.2.15. Определение. Упорядоченное множество $(X,\ \sigma)$ такое, что $X^2 = \sigma^{-1} \circ \sigma$, называют *фильтрованным по возрастанию*. Аналогично определяют *фильтрованное по убыванию* множество. Непустое фильтрованное по возрастанию множество называют *направленным* или, короче, *направлением*.

1.2.16. Определение. Отображение направленного множества в данное множество X называют (*обобщенной*) *последовательностью* или *сетью* в X. Отображения (естественным образом) направленного множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в X называют (счетными) *последовательностями.* (Следуя одной из традиций, полагают $\mathbb{N} := \{1, 2, 3 \dots\}$.)

1.2.17. *Решетка является полной в том и только в том случае, если любое фильтрованное по возрастанию множество в ней имеет точную верхнюю границу.* $\triangleleft\triangleright$

1.2.18. Замечание. Смысл 1.2.17 состоит в том, что для нахождения точной верхней границы любого подмножества в X следует научиться находить такие границы для двухэлементных подмножеств в X и для возрастающих сетей элементов X.

1.2.19. Определение. Пусть (X, σ) — упорядоченное множество и $X^2 = \sigma \cup \sigma^{-1}$. Тогда X называют *линейно упорядоченным* множеством. Если X_0 — непустое линейно упорядоченное подмножество X, то X_0 называют *цепью* в X. Непустое упорядоченное множество называют *индуктивным*, если любая цепь в нем ограничена сверху (т. е. имеет верхнюю границу).

1.2.20. Лемма Куратовского — Цорна. *Индуктивное множество имеет максимальный элемент.*

1.2.21. Замечание. Лемма Куратовского — Цорна служит эквивалентом аксиомы выбора, принимаемой в теории множеств.

1.3. Фильтры

1.3.1. Определение. Пусть X — множество и $\mathscr{B}$ — непустое подмножество непустых элементов 2^X. Множество $\mathscr{B}$ называют *базисом фильтра* (в X), если $\mathscr{B}$ фильтровано по убыванию при введении в множество 2^X подмножеств X отношения порядка по включению.

1.3.2. *Подмножество $\mathscr{B}$ в 2^X является базисом фильтра в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{B} \neq \varnothing,\ \varnothing \notin \mathscr{B}$;

(2) $B_1,\ B_2 \in \mathscr{B} \Rightarrow (\exists\, B \in \mathscr{B})\ B \subset B_1 \cap B_2$.

1.3.3. Определение. Подмножество $\mathscr{F}$ в 2^X называют *фильтром* (в X), если $\mathscr{F}$ представляет собой совокупность надмножеств некоторого базиса фильтра $\mathscr{B}$ (в X), т. е.

$$\mathscr{F} = \operatorname{fil} \mathscr{B} := \{C \in 2^X :\ (\exists\, B \in \mathscr{B})\ B \subset C\}.$$

При этом говорят, что $\mathscr{B}$ — *базис* $\mathscr{F}$ или что $\mathscr{F}$ имеет $\mathscr{B}$ своим базисом и т. п.

1.3.4. *Подмножество* $\mathscr{F}$ *в* 2^X *является фильтром в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{F} \neq \varnothing,\ \varnothing \notin \mathscr{F}$;

(2) $A \in \mathscr{F},\ A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \mathscr{F}$;

(3) $A_1,\ A_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$. $\lhd\rhd$

1.3.5. Примеры.

(1) Пусть $F \subset X \times Y$ — соответствие и $\mathscr{B}$ — фильтрованное по убыванию подмножество 2^X. Положим $F(\mathscr{B}) := \{F(B) : B \in \mathscr{B}\}$. Видно, что $F(\mathscr{B})$ фильтровано по убыванию. Допускают некоторую вольность в обозначениях, считая $F(\mathscr{B}) := \operatorname{fil} F(\mathscr{B})$. Если $\mathscr{F}$ — фильтр в X и $B \cap \operatorname{dom} F \neq \varnothing$ для всякого $B \in \mathscr{F}$, то $F(\mathscr{F})$ — фильтр в Y. Этот фильтр называют *образом фильтра* $\mathscr{F}$ при соответствии F. В частности, если $F : X \to Y$ — отображение и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X, то $F(\mathscr{F})$ — фильтр в Y.

(2) Пусть $(X,\ \sigma)$ — направление. Несомненно, что $\mathscr{B} := \{\sigma(x) :\ x \in X\}$ — это базис фильтра. Если $F : X \to Y$ — некоторая обобщенная последовательность, то фильтр $\operatorname{fil} F(\mathscr{B})$ называют *фильтром хвостов* F.

Пусть $(\overline{X},\ \overline{\sigma})$ и $\overline{F} : \overline{X} \to Y$ — другие направление и сеть элементов Y. Если фильтр хвостов $\overline{F}$ содержит фильтр хвостов F, то $\overline{F}$ называют *подсетью* (*в широком смысле*) сети F. Если же существует подсеть (в широком смысле) $G : \overline{X} \to X$ тождественной сети $(x)_{x \in X}$ элементов направления $(X,\ \sigma)$ такая, что $\overline{F} = F \circ G$, то $\overline{F}$ называют *подсетью* F (иногда говорят: $\overline{F}$ — *подсеть Мура* или *строгая подсеть* F). Каждая подсеть служит подсетью в широком смысле. $\lhd\rhd$

1.3.6. Определение. Пусть $\mathscr{F}(X)$ — совокупность всех фильтров в множестве X. Если $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{F}(X)$ и $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}_2$, то говорят, что $\mathscr{F}_1$ *тоньше* $\mathscr{F}_2$ или $\mathscr{F}_1$ *мажорирует* $\mathscr{F}_2$ (соответственно $\mathscr{F}_2$ *грубее* $\mathscr{F}_1$ или $\mathscr{F}_2$ *минорирует* $\mathscr{F}_1$).

1.3.7. *Множество* $\mathscr{F}(X)$ *с отношением «тоньше» является упорядоченным.* $\lhd\rhd$

1.3.8. *Пусть $\mathscr{N}$ — направление в $\mathscr{F}(X)$. Тогда у $\mathscr{N}$ есть точная верхняя граница $\mathscr{F}_0 := \sup \mathscr{N}$. При этом*

$$\mathscr{F}_0 = \cup\{\mathscr{F} : \ \mathscr{F} \in \mathscr{N}\}.$$

$\triangleleft$ Нужно убедиться только, что $\mathscr{F}_0$ — это фильтр. Ясно, что $\varnothing \notin \mathscr{F}_0$ и, в силу непустоты $\mathscr{N}$, $\mathscr{F}_0 \neq \varnothing$. Если $A \in \mathscr{F}_0$ и $B \supset A$, то, подбирая $\mathscr{F}$ из $\mathscr{N}$, для которого $A \in \mathscr{F}$, заключаем: $B \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$. Если же $A_1, \ A_2 \in \mathscr{F}_0$, то можно найти элемент $\mathscr{F}$ в $\mathscr{N}$ такой, что $A_1, \ A_2 \in \mathscr{F}$, ибо $\mathscr{N}$ — это направление. На основании 1.3.4, $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$. $\triangleright$

1.3.9. Определение. Максимальные элементы в упорядоченном множестве $\mathscr{F}(X)$ всех фильтров в X называют *ультрафильтрами*.

1.3.10. *Каждый фильтр грубее некоторого ультрафильтра.*

$\triangleleft$ Ввиду 1.3.8 множество фильтров, содержащих данный, является индуктивным. Остается сослаться на лемму Куратовского — Цорна 1.2.20. $\triangleright$

1.3.11. *Фильтр $\mathscr{F}$ является ультрафильтром в том и только в том случае, если для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $A \notin \mathscr{F}$ и $B := X \setminus A \notin \mathscr{F}$. Отметим, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Положим $\mathscr{F}_1 := \{C \in 2^X : \ A \cup C \in \mathscr{F}\}$. Тогда $A \notin \mathscr{F} \Rightarrow \varnothing \notin \mathscr{F}_1$ и $B \in \mathscr{F}_1 \Rightarrow \mathscr{F}_1 \neq \varnothing$. Столь же просто проверить 1.3.4 (2) и 1.3.4 (3). Итак, $\mathscr{F}_1$ — фильтр. По построению $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}$. Раз $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$. Получилось противоречие: $B \notin \mathscr{F}$ и $B \in \mathscr{F}$.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{F}(X)$ и $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}$. Если $A \in \mathscr{F}_1$ и $A \notin \mathscr{F}$, то $X \setminus A \in \mathscr{F}$ по условию. Отсюда $X \setminus A \in \mathscr{F}_1$, т. е. $\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathscr{F}_1$, чего быть не может. $\triangleright$

1.3.12. *Если f — отображение из X в Y и $\mathscr{F}$ — ультрафильтр в X, то $f(\mathscr{F})$ — ультрафильтр в Y.* $\triangleleft\triangleright$

1.3.13. *Пусть $\mathscr{X} := \mathscr{X}_{\mathscr{F}_0} := \{\mathscr{F} \in \mathscr{F}(X) : \ \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0\}$ для некоторого $\mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}(X)$. Тогда $\mathscr{X}$ — полная решетка.*

$\triangleleft$ Понятно, что $\mathscr{F}_0$ — наибольший, а $\{X\}$ — наименьший элементы в $\mathscr{X}$. Стало быть, пустое множество в $\mathscr{X}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы: $\sup\varnothing = \inf\mathscr{X} = \{X\}$ и $\inf\varnothing = \sup\mathscr{X} = \mathscr{F}_0$. В силу 1.2.17 и 1.3.8 достаточно установить существование $\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$ для любых $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{X}$. Рассмотрим $\mathscr{F} := \{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathscr{F}_1,\ A_2 \in \mathscr{F}_2\}$. Нет сомнений, что $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_1,\ \mathscr{F} \supset \mathscr{F}_2$. Поэтому для проверки равенства $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$ нужно доказать, что $\mathscr{F}$ — фильтр.

Соотношения $\mathscr{F} \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin \mathscr{F}$ очевидны. Ясно также, что (B_1, $B_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{F}$). Помимо этого, если $C \supset A_1 \cap A_2$, где $A_1 \in \mathscr{F}_1$ и $A_2 \in \mathscr{F}_2$, то $C = \{A_1 \cap A_2\} \cup C = (A_1 \cup C) \cap (A_2 \cup C)$. Поскольку $A_1 \cup C \in \mathscr{F}_1$, а $A_2 \cup C \in \mathscr{F}_2$, выводим: $C \in \mathscr{F}$. Апелляция к 1.3.4 дает требуемое. $\triangleright$

Упражнения

1.1. Привести примеры множеств и не множеств, теоретико-множественных свойств и не теоретико-множественных свойств.

1.2. Может ли отрезок $[0,\ 1]$ быть элементом отрезка $[0,\ 1]$? А отрезок $[0,\ 2]$?

1.3. Найти композиции простейших соответствий и отношений: квадратов, кругов и окружностей с общими и с несовпадающими центрами, шаров в $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ при различных допустимых наборах $M,\ N$.

1.4. Для соответствий $R,\ S,\ T$ установить соотношения:

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1};\quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$
$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T);\quad R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T);$$
$$(R \cap S) \circ T \subset (R \circ T) \cap (S \circ T);\quad R \circ (S \cap T) \subset (R \circ S) \cap (R \circ T).$$

1.5. Пусть $X \subset X \times X$. Доказать, что $X = \varnothing$.

1.6. Выяснить условия разрешимости уравнений $\mathscr{X}A = B$ и $A\mathscr{X} = B$ относительно $\mathscr{X}$ в соответствиях, в функциях.

1.7. Найти число отношений эквивалентности на конечном множестве.

1.8. Будет ли эквивалентностью пересечение эквивалентностей? Объединение эквивалентностей?

1.9. Найти условие коммутативности эквивалентностей (относительно композиции).

1.10. Сколько порядков и предпорядков на двух- и трехэлементном множествах? Предъявить их. Что можно сказать о числе предпорядков на конечном множестве?

1.11. Пусть F — возрастающее, идемпотентное отображение упорядоченного множества X в себя. Допустим, что F мажорирует тождественное отображение: $F \geq I_X$. Такие F называют операторами (абстрактного) *замыкания* или, короче, оболочками. Исследовать свойства неподвижных точек оператора замыкания.

1.12. Пусть $X,\ Y$ — упорядоченные множества и $M(X,\ Y)$ — множество возрастающих отображений X в Y с естественным упорядочением (каким?). Доказать, что

(1) ($M(X,\ Y)$ — решетка) $\Leftrightarrow$ (Y — решетка);
(2) ($M(X,\ Y)$ — полная решетка) $\Leftrightarrow$ (Y — полная решетка).

1.13. Установить, что для упорядоченных множеств $X,\ Y,\ Z$ справедливы следующие утверждения:

(1) $M(X,\ Y \times Z)$ изоморфно $M(X,\ Y) \times M(Y,\ Z)$;
(2) $M(X \times Y,\ Z)$ изоморфно $M(X,\ M(Y,\ Z))$.

1.14. Сколько фильтров на конечном множестве?

1.15. Как устроены точные границы множества фильтров?

1.16. Пусть f отображает X на Y. Доказать, что каждый ультрафильтр в Y есть образ относительно f некоторого ультрафильтра в X.

1.17. Доказать, что каждый ультрафильтр, мажорирующий пересечение двух фильтров, тоньше хотя бы одного из них.

1.18. Доказать, что каждый фильтр представляет собою пересечение содержащих его ультрафильтров.

1.19. Пусть $\mathscr{A}$ — ультрафильтр в $\mathbb{N}$, содержащий дополнения конечных подмножеств. Для $x,\ y \in s := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ положим $x \sim_{\mathscr{A}} y := (\exists A \in \mathscr{A})\ x|_A = y|_A$. Обозначим $*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\sim_{\mathscr{A}}}$. Для $t \in \mathbb{R}$ знак $*t$ символизирует класс, содержащий постоянную последовательность $\overline{t}(n) := t\ (n \in \mathbb{N})$. Доказать, что $*\mathbb{R} \setminus \{*t : t \in \mathbb{R}\} \neq \varnothing$. Ввести в $*\mathbb{R}$ алгебраические и порядковую структуры. Как связаны свойства $\mathbb{R}$ и $*\mathbb{R}$?

Глава 2

Векторные пространства

2.1. Пространства и подпространства

2.1.1. Замечание. В алгебре, в частности, изучают модули над кольцами. *Модуль X над кольцом A* определяют указанием абелевой группы $(X,\ +)$ и представления A в кольце эндоморфизмов X, заданного отображением левого умножения $\cdot : A\times X \to X$. При этом заранее обеспечивают естественное согласование операций сложения и умножения. С учетом сказанного трактуют фразу: «модуль X над кольцом A описывается четверкой $(X,\ A,\ +,\ \cdot)$».

2.1.2. Определение. Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ называют *основными полями*. Для обозначения основного поля используют также символ $\mathbb{F}$. Считают, что поле $\mathbb{R}$ стандартным (и общеизвестным) способом вложено в $\mathbb{C}$.

2.1.3. Определение. Пусть $\mathbb{F}$ — основное поле. Модуль X над полем $\mathbb{F}$ называют *векторным пространством* (над $\mathbb{F}$). Элементы $\mathbb{F}$ называют *скалярами*, а элементы X — *векторами*. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ называют *вещественным векторным пространством*, а векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ — *комплексным векторным пространством*. Употребляют соответствующие развернутые записи: $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$, $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot)$ и $(X,\ \mathbb{C},\ +,\ \cdot)$. Все же, как правило, допускают бо́льшую вольность, отождествляя множество векторов X с отвечающим ему векторным пространством.

2.1.4. Примеры.

(1) Основное поле $\mathbb{F}$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$.

(2) Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство. Рассмотрим набор $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot_*)$, где $\cdot_* : (\lambda,\ x) \mapsto \lambda^* x$ для $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in X$, а λ^* — комплексно сопряженное к λ число. Полученное векторное пространство называют *дуальным* к X и обозначают X_*. При $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ пространство X_* совпадает с X.

(3) Векторное пространство $(X_0,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ называют *подпространством* векторного пространства $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$, если X_0 — это подгруппа в X и умножение на скаляр в X_0 — это сужение на $\mathbb{F} \times X_0$ умножения на скаляр в X. Множество X_0 называют *линейным множеством* в X. Очень удобно, хотя и не вполне корректно, рассматривать линейное множество X_0 как векторное подпространство в X. Более того, нейтральный элемент — нуль группы X — считают подпространством X и обозначают символом 0. Поскольку связь нуля с X явно не отражена, все векторные пространства, включая и основные поля, можно воспринять как зацепленные за один общий нуль.

(4) Пусть $(X_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство векторных пространств над полем $\mathbb{F}$. Пусть, далее, $\mathscr{X} := \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ — *произведение* соответствующих множеств, т. е. совокупность отображений $x : \Xi \to \cup_{\xi \in \Xi} X_\xi$, для которых $x_\xi := x(\xi) \in X_\xi$ при каждом $\xi \in \Xi$ (в подобных ситуациях всегда молчаливо подразумевают, что $\Xi \neq \varnothing$). Наделим $\mathscr{X}$ покоординатными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$(x_1 + x_2)(\xi) := x_1(\xi) + x_2(\xi) \quad (x_1,\ x_2 \in \mathscr{X},\ \xi \in \Xi);$$

$$(\lambda \cdot x)(\xi) := \lambda \cdot x(\xi) \quad (x \in \mathscr{X},\ \lambda \in \mathbb{F},\ \xi \in \Xi)$$

(ниже, как правило, вместо выражений типа $\lambda \cdot x$ будем писать сокращенно: λx и изредка $x\lambda$). Полученное векторное пространство $\mathscr{X}$ над $\mathbb{F}$ называют *произведением семейства векторных пространств* $(X_\xi)_{\xi \in \Xi}$. При $\Xi := \{1, 2, \dots, N\}$ пишут $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N := \mathscr{X}$. В случае, когда $X_\xi = X$ для любого $\xi \in \Xi$, используют обозначение $X^\Xi := \mathscr{X}$. Если к тому же $\Xi := \{1, 2, \dots, N\}$, полагают $X^N := \mathscr{X}$.

(5) Пусть $(X_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство векторных пространств над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим прямую сумму множеств $\mathscr{X}_0 := \sum_{\xi \in \Xi} X_\xi$, т. е. подмножество в произведении $\mathscr{X} := \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$, состоящее из таких элементов x_0, что найдется (вообще говоря, свое для каждого x_0) конечное подмножество Ξ_0 в Ξ такое, что $x_0(\Xi \setminus \Xi_0) \subset 0$. Видно, что $\mathscr{X}_0$ — линейное множество в произведении $\mathscr{X}$. Соответствующее векторное пространство — подпространство произведения векторных пространств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — называют ***прямой суммой семейства векторных пространств*** $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

(6) Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство и задано подпространство $(X_0,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ в X. Положим

$$\sim_{X_0} := \{(x_1,\ x_2) \in X^2 :\ x_1 - x_2 \in X_0\}.$$

Тогда $\sim_{X_0}$ — эквивалентность в X. Пусть $\mathscr{X} := X/{\sim_{X_0}}$ и $\varphi : X \to \mathscr{X}$ — каноническое отображение. Определим в $\mathscr{X}$ операции

$$x_1 + x_2 := \varphi(\varphi^{-1}(x_1) + \varphi^{-1}(x_2)) \quad (x_1,\ x_2 \in \mathscr{X});$$

$$\lambda x := \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \quad (x \in \mathscr{X},\ \lambda \in \mathbb{F}).$$

Здесь, как обычно, для множеств $S_1,\ S_2$ в X, множества Λ в $\mathbb{F}$ и элемента $\lambda \in \mathbb{F}$ считается, что

$$S_1 + S_2 := +\{S_1 \times S_2\};$$

$$\Lambda S_1 := \cdot\ (\Lambda \times S_1); \quad \lambda S_1 := \{\lambda\} S_1.$$

Таким образом в $\mathscr{X}$ введена структура векторного пространства над $\mathbb{F}$. Это пространство называют ***фактор-пространством пространства*** X ***по подпространству*** X_0 и обозначают X/X_0.

2.1.5. *Пусть X — векторное пространство и $\mathrm{Lat}(X)$ — совокупность всех подпространств в X с отношением порядка по включению. Тогда упорядоченное множество $\mathrm{Lat}(X)$ является полной решеткой.*

$\lhd$ Ясно, что $\inf \mathrm{Lat}(X) = 0$ и $\sup \mathrm{Lat}(X) = X$. Помимо этого, пересечение непустого множества подпространств также подпространство. Привлекая 1.2.17, получаем требуемое. $\rhd$

2.1.6. Замечание. Для $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Lat}(X)$ справедливо соотношение $X_1 \vee X_2 = X_1 + X_2$. Столь же несомненно, что для непустого множества $\mathscr{E}$ в $\mathrm{Lat}(X)$ выполнено $\inf \mathscr{E} = \cap\{X_0 :\ X_0 \in \mathscr{E}\}$. Если к тому же $\mathscr{E}$ фильтровано по возрастанию, то $\sup \mathscr{E} = \cup\{X_0 :\ X_0 \in \mathscr{E}\}$. $\lhd\rhd$

2.1.7. Определение. Подпространства X_1 и X_2 данного векторного пространства X ***разлагают*** X ***в*** (***алгебраическую***) ***прямую сумму*** (символическая запись: $X = X_1 \oplus X_2$), если $X_1 \wedge X_2 = 0$ и $X_1 \vee X_2 = X$. При этом X_2 называют (***алгебраическим***) ***дополнением*** X_1, а X_1 — (алгебраическим) дополнением X_2.

2.1.8. *Любое подпространство векторного пространства имеет алгебраическое дополнение.*

$\triangleleft$ Пусть X_1 — подпространство X. Положим

$$\mathscr{E} := \{X_0 \in \mathrm{Lat}(X) : \ X_0 \wedge X_1 = 0\}.$$

Очевидно, $0 \in \mathscr{E}$ и для каждой цепи $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, в силу 2.1.6, $X_1 \wedge \sup \mathscr{E}_0 = 0$, т. е. $\sup \mathscr{E}_0 \in \mathscr{E}$. Таким образом, $\mathscr{E}$ — индуктивно, и на основании 1.2.20 в $\mathscr{E}$ есть максимальный элемент X_2. Если $x \in X \setminus (X_1 + X_2)$, то

$$(X_2 + \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{F}\}) \wedge X_1 = 0.$$

В самом деле, если для некоторых $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2$ выполнено $x_2 + \lambda x = x_1$, то $\lambda x \in X_1 + X_2$ и, стало быть, $\lambda = 0$. Отсюда $x_1 = x_2 = 0$, ибо $X_1 \wedge X_2 = 0$. Следовательно, $X_2 + \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{F}\} = X_2$ в силу максимальности X_2. Последнее означает, что $x = 0$. В то же время явно $x \neq 0$. Окончательно $X_1 \vee X_2 = X_1 + X_2 = X$. $\triangleright$

2.2. Линейные операторы

2.2.1. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства над $\mathbb{F}$. Соответствие $T \subset X \times Y$ называют ***линейным***, если T — линейное множество в произведении векторных пространств $X \times Y$. Отображение $T : X \to Y$, являющееся линейным соответствием, называют ***линейным оператором*** (или просто оператором, если линейность ясна из контекста). Желая отличить такой T от линейных однозначных соответствий $S \subset X \times Y$ с областью определения $\operatorname{dom} S \neq X$, говорят: T — ***всюду определенный*** линейный оператор (из X в Y) и S — линейный оператор из X в Y, или даже S — ***не всюду определенный*** линейный оператор.

2.2.2. *Отображение* $T : X \to Y$ *является линейным оператором в том и только в том случае, если выполнено*

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2 \quad (\lambda_1, \ \lambda_2 \in \mathbb{F}; \ x_1, \ x_2 \in X). \ \triangleleft\triangleright$$

2.2.3. *Множество $\mathscr{L}(X,\ Y)$ всех линейных операторов из X в Y представляет собой векторное пространство — подпространство Y^X.* ◁▷

2.2.4. Определение. Операторы из $\mathscr{L}(X,\ \mathbb{F})$ называют ***линейными функционалами*** на X, а пространство $X^\# := \mathscr{L}(X,\ \mathbb{F})$ — (***алгебраически***) ***сопряженным пространством.*** Линейные функционалы на X_* называют ***$*$-линейными функционалами*** на X. Если хотят подчеркнуть природу основного поля $\mathbb{F}$, то говорят о вещественно линейных функционалах, о комплексно сопряженном пространстве и т. п. Понятно, что при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ термин «$*$-линейный функционал», как правило, не употребляют.

2.2.5. Определение. Линейный оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют (***алгебраическим***) ***изоморфизмом***, если соответствие T^{-1} является линейным оператором из $\mathscr{L}(Y,\ X)$.

2.2.6. Определение. Векторные пространства X и Y называют (***алгебраически***) ***изоморфными*** и пишут $X \simeq Y$, если существует изоморфизм между X и Y.

2.2.7. *Пространства X и Y являются изоморфными в том и только в том случае, если найдутся операторы $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y,\ X)$ такие, что $S \circ T = I_X$ и $T \circ S = I_Y$. При этом выполнено $S = T^{-1}$ и $T = S^{-1}$.* ◁▷

2.2.8. Замечание. Пусть $X,\ Y,\ Z$ — векторные пространства, причем заданы $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$. Бесспорно, что соответствие $S \circ T$ — это элемент $\mathscr{L}(X,\ Z)$. Оператор $S \circ T$ в дальнейшем для простоты будет обозначен символом ST. Отметим здесь же, что композицию $(S,\ T) \mapsto ST$, как правило, считают отображением $\circ : \mathscr{L}(Y,\ Z) \times \mathscr{L}(X,\ Y) \to \mathscr{L}(X,\ Z)$. В частности, если $\mathscr{E} \subset \mathscr{L}(Y,\ Z)$, а $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$, то полагают $\mathscr{E} \circ T := \circ(\mathscr{E} \times \{T\})$.

2.2.9. Примеры.

(1) Если T — линейное соответствие, то T^{-1} также линейное соответствие.

(2) Если X_1 — подпространство векторного пространства X и X_2 — его алгебраическое дополнение, то X_2 изоморфно X/X_1. Действительно, если $\varphi : X \to X/X_1$ — каноническое отображение, то его сужение на X_2, т. е. оператор $x_2 \mapsto \varphi(x_2)$, где $x_2 \in X_2$, осуществляет требуемый изоморфизм. ◁▷

(3) Пусть $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение семейства векторных пространств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Отображение $\Pr_\xi : \mathscr{X} \to X_\xi$, определяемое соотношением $\Pr_\xi x := x_\xi$, называют ***координатным проектором*** (= ***проекцией***). Ясно, что $\Pr_\xi$ — линейный оператор: $\Pr_\xi \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ X_\xi)$. Отметим, что часто этот оператор рассматривают как элемент пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X}) := \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$, имея в виду естественный изоморфизм $\mathscr{X}_\xi$ и X_ξ, где $\mathscr{X}_\xi := \prod_{\eta\in\Xi} \overline{X}_\eta$, а $\overline{X}_\eta := 0$ при $\eta \neq \xi$ и $\overline{X}_\xi := X_\xi$.

(4) Пусть $X := X_1 \oplus X_2$. Поскольку отображение $+^{-1}$ осуществляет изоморфизм X и $X_1 \times X_2$, то определены линейные операторы $P_{X_1} := P_{X_1 || X_2} := \Pr_1 \circ (+^{-1})$, $P_{X_2} := P_{X_2 || X_1} := \Pr_2 \circ (+^{-1})$, действующие из X в X. Оператор P_{X_1} называют ***проектором X на X_1 параллельно X_2***, а P_{X_2} — ***дополнительным проектором*** к P_{X_1}. В свою очередь, P_{X_1} дополнителен к P_{X_2}, а P_{X_2} осуществляет проектирование X на X_2 параллельно X_1. Отметим также, что $P_{X_1} + P_{X_2} = I_X$. Кроме того, $P_{X_1}^2 := P_{X_1} P_{X_1} = P_{X_1}$, т. е. проектор — ***идемпотентный оператор***. Наоборот, любой идемпотентный оператор $P \in \mathscr{L}(X)$ является проектором на $P(X)$ параллельно $P^{-1}(0)$.

Если $T \in \mathscr{L}(X)$, то $P_{X_1} T P_{X_1} = T P_{X_1}$ в том и только в том случае, если $T(X_1) \subset X_1$, т. е. X_1 ***инвариантно относительно*** T. $\triangleleft\triangleright$

Равенство $TP_{X_1} = P_{X_1} T$ справедливо в том и только в том случае, если как X_1, так и дополнение X_2 инвариантны относительно T. В последнем случае говорят, что ***разложение $X = X_1 \oplus X_2$ приводит оператор T***.

Со следом T на X_1 работают как с элементом T_1 пространства $\mathscr{L}(X_1)$. При этом T_1 называют *частью* T в X_1. Если $T_2 \in \mathscr{L}(X_2)$ — часть T в X_2, то оператор T мыслят как матрицу

$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Именно, элемент x из $X_1 \oplus X_2$ рассматривают как «вектор-столбец» с компонентами $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, где $x_1 = \Pr_{X_1} x$, $x_2 = \Pr_{X_2} x$. Умножение матриц проводят обычным способом по закону «строка на столбец», а результат умножения указанной матрицы на вектор-столбец x, т. е. вектор-столбец с компонентами $T_1 x_1$, $T_2 x_2$ (или, что в данном случае то же самое, Tx_1, Tx_2), естественно трактуют как элемент Tx.

Иными словами, T отождествляют с отображением $X_1 \times X_2$ в $X_1 \times X_2$, действующим по правилу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом вводят матричные представления общих операторов $T \in \mathscr{L}(X_1 \oplus X_2,\ Y_1 \oplus Y_2)$. $\lhd\rhd$

(5) Конечное множество $\mathscr{E}$ в X называют ***линейно независимым***, если из условия $\sum_{e\in\mathscr{E}} \lambda_e e = 0$, где $\lambda_e \in \mathbb{F}$ $(e \in \mathscr{E})$, вытекает, что $\lambda_e = 0$ для всех $e \in \mathscr{E}$. Множество $\mathscr{E}$ называют ***линейно независимым***, если любое конечное подмножество $\mathscr{E}$ линейно независимо.

Максимальное по включению линейно независимое множество в X называют ***базисом Гамеля*** (или ***алгебраическим базисом***) в X. Любое линейно независимое множество содержится в некотором базисе Гамеля.

У всех базисов Гамеля в X одинаковая мощность, называемая ***размерностью*** X. Размерность X обозначают $\dim X$.

Каждое векторное пространство X изоморфно прямой сумме семейства $(\mathbb{F})_{\xi\in\Xi}$, где Ξ имеет мощность $\dim X$.

Если X_1 — подпространство X, то размерность X/X_1 называют ***коразмерностью*** X_1 и обозначают $\operatorname{codim} X_1$. Если $X = X_1 \oplus X_2$, то $\operatorname{codim} X_1 = \dim X_2$ и $\dim X = \dim X_1 + \operatorname{codim} X_1$.

2.3. Уравнения в операторах

2.3.1. Определение. Для оператора $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ определяют: $\ker T := T^{-1}(0)$ — ***ядро***, $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{im} T$ — ***коядро***, $\operatorname{coim} T := X/\ker T$ — ***кообраз*** T.

Оператор T называют ***мономорфизмом***, если $\ker T = 0$. Оператор T называют ***эпиморфизмом***, если $\operatorname{im} T = Y$.

2.3.2. *Оператор является изоморфизмом в том и только в том случае, если он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.* $\lhd\rhd$

2.3.3. Замечание. В дальнейшем иногда удобно пользоваться языком ***коммутативных диаграмм***. Научиться им пользоваться можно, разобрав подходящий пример.

Так, фраза «следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_3"'] & Y \arrow[d, "\alpha_2"] \\ V \arrow[r, "\alpha_5"'] \arrow[ur, bend right=90, looseness=2, "\alpha_4"'] & W \end{tikzcd}$$

коммутативна» означает, что $\alpha_1 \in \mathscr{L}(X,\ Y)$, $\alpha_2 \in \mathscr{L}(Y,\ W)$, $\alpha_3 \in \mathscr{L}(X,\ W)$, $\alpha_4 \in \mathscr{L}(V,\ Y)$ и $\alpha_5 \in \mathscr{L}(V,\ W)$, причем $\alpha_2\alpha_1 = \alpha_3$ и $\alpha_5 = \alpha_2\alpha_4$.

2.3.4. Определение. Диаграмму $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ называют *точной* (в члене Y) *последовательностью*, если $\ker S = \operatorname{im} T$. Последовательность $\ldots \to X_{k-1} \to X_k \to X_{k+1} \to \ldots$ называют *точной* в члене X_k, если точна последовательность $X_{k-1} \to X_k \to X_{k+1}$ (наименования операторов опущены). Рассматриваемую последовательность называют *точной*, если она точна в каждом члене (кроме первого и последнего, если таковые, разумеется, есть).

2.3.5. Примеры.

(1) Точная последовательность $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ *полуточна*, т. е. $ST = 0$. Обратное утверждение неверно.

(2) Последовательность $0 \to X \xrightarrow{T} Y$ точна в том и только в том случае, если T — мономорфизм. (Здесь и в дальнейшем запись $0 \to X$ — это, конечно же, еще одно обозначение нуля — единственного элемента пространства $\mathscr{L}(0,\ X)$ (см. 2.1.4 (3)).)

(3) Последовательность $X \xrightarrow{T} Y \to 0$ точна в том и только в том случае, если T — эпиморфизм. (Понятно, что под символом $Y \to 0$ тут снова скрывается нуль — единственный элемент пространства $\mathscr{L}(Y,\ 0)$.)

(4) Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ является изоморфизмом в том и только в том случае, если $0 \to X \xrightarrow{T} Y \to 0$ — это точная последовательность.

(5) Пусть X_0 — подпространство в X. Символом $\iota : X_0 \to X$ обозначим *оператор* (*тождественного*) *вложения*: $\iota x_0 := x_0$ для всех $x_0 \in X_0$. Пусть теперь X/X_0 — фактор-пространство и $\varphi : X \to X/X_0$ — соответствующее каноническое отображение.

Тогда последовательность

$$0 \to X_0 \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\varphi} X/X_0 \to 0$$

является точной. (Знаки ι и φ ниже в подобных случаях, как правило, опущены.) Указанная последовательность в известном смысле уникальна. Именно, рассмотрим произвольную, как говорят, *«короткую»* последовательность

$$0 \to X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z \to 0$$

и допустим, что она точна. Полагая $Y_0 := \operatorname{im} T$, легко построить изоморфизмы α, β, γ так, что получается следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/Y_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Иными словами, короткая точная последовательность — это, по сути дела, то же, что подпространство и фактор-пространство по нему. $\triangleleft\triangleright$

(6) Пусть $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ — оператор. С ним связана точная последовательность

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0,$$

называемая *канонической точной последовательностью* для T.

2.3.6. Определение. Оператор T называют *продолжением* T_0 (пишут $T \supset T_0$), если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] \arrow[dr, "T_0"'] & X \arrow[d, "T"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

т. е. $T_0 = T\iota$, где $\iota : X_0 \to X$ — вложение.

2.3.7. *Пусть X, Y — векторные пространства и X_0 — подпространство в X. Для любого $T_0 \in \mathscr{L}(X_0, Y)$ существует продолжение $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.*

$\lhd$ Предъявим $T := T_0 P_{X_0}$, где P_{X_0} — оператор проектирования на X_0. $\rhd$

2.3.8. ***Теорема о разрешимости уравнения $\mathscr{X}A = B$.*** *Пусть X, Y, Z — векторные пространства; $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $B \in \mathscr{L}(X, Z)$. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & Y \arrow[d, "\mathscr{X}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in \mathscr{L}(Y, Z)$ в том и только в том случае, если $\ker A \subset \ker B$.

$\lhd$ $\Rightarrow$: То, что при $B = \mathscr{X} A$ выполнено $\ker A \subset \ker B$, очевидно.

$\Leftarrow$: Положим $\overline{\mathscr{X}} := B \circ A^{-1}$. Ясно, что для $x \in X$ будет $\overline{\mathscr{X}} \circ A(x) = B \circ (A^{-1} \circ A)x = B(x + \ker A) = Bx$. Проверим, что $\mathscr{X}_0 := \overline{\mathscr{X}}|_{\operatorname{im} A}$ — линейный оператор. Следует проверить только однозначность $\overline{\mathscr{X}}$. Пусть $y \in \operatorname{im} A$ и $z_1,\ z_2 \in \overline{\mathscr{X}}(y)$. Тогда $z_1 = Bx_1,\ z_2 = Bx_2$, а $Ax_1 = Ax_2 = y$. По условию $B(x_1 - x_2) = 0$. Значит, $z_1 = z_2$. Применяя 2.3.7, возьмем какое-либо продолжение $\mathscr{X}$ оператора $\mathscr{X}_0$ на пространство Y. $\rhd$

2.3.9. Замечание. Если в условиях 2.3.8 оператор A — эпиморфизм, то оператор $\mathscr{X}$ единствен. $\lhd\rhd$

2.3.10. *Линейный оператор допускает единственное снижение на свой кообраз.*

$\lhd$ Это следствие 2.3.8 и 2.3.9. $\rhd$

2.3.11. *Линейный оператор T допускает (каноническое) разложение в композицию эпиморфизма φ, изоморфизма $\overline{T}$ и мономорфизма ι, т. е. коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coim} T \arrow[r, "\overline{T}"] & \operatorname{im} T \arrow[d, "\iota"] \\ X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "T"] & Y \end{tikzcd}$$

для единственного оператора $\overline{T}$. $\lhd\rhd$

2.3.12. *Пусть* X *— некоторое векторное пространство и заданы* $f_0,\ f_1,\dots,f_N \in X^{\#}$. *Функционал* f_0 *является линейной комбинацией* $f_1,\dots,f_N$ *в том и только в том случае, если* $\ker f_0 \supset \cap_{j=1}^{N} \ker f_j$.

$\lhd$ Пусть $(f_1,\dots,f_N) : X \to \mathbb{F}^N$ — линейный оператор, заданный соотношением

$$(f_1,\dots,f_N)x := (f_1(x),\dots,f_N(x)).$$

Видно, что $\ker(f_1,\dots,f_N) = \cap_{j=1}^{N} \ker f_j$. Используя теорему 2.3.8 для задачи

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f_1,\dots,f_N)"] \arrow[dr, "f_0"'] & \mathbb{F}^N \arrow[d] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

и учитывая строение пространства $\mathbb{F}^{N\#}$, получаем требуемое. $\rhd$

2.3.13. ***Теорема о разрешимости уравнения*** $\boldsymbol{A\mathscr{X} = B}$**.** *Пусть* $X,\ Y,\ Z$ *— векторные пространства;* $A \in \mathscr{L}(Y,\ X)$, $B \in \mathscr{L}(Z,\ X)$. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "A"'] \\ & Z \arrow[ul, "B"] \arrow[u, "\mathscr{X}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in \mathscr{L}(Z,\ Y)$ *в том и только в том случае, если* $\operatorname{im} A \supset \operatorname{im} B$.

◁ ⇒: $\operatorname{im} B = B(Z) = A(\mathscr{X}(Z)) \subset A(Y) = \operatorname{im} A$.

⇐: Пусть Y_0 — алгебраическое дополнение $\ker A$ в Y и $A_0 := A|_{Y_0}$. Тогда A_0 взаимно однозначно отображает Y_0 на $\operatorname{im} A$. Оператор $\mathscr{X} := A_0^{-1}B$, очевидно, искомый. ▷

2.3.14. Замечание. Если в условиях 2.3.13 оператор A — мономорфизм, то оператор $\mathscr{X}$ единствен. ◁▷

2.3.15. Замечание. Теоремы 2.3.8 и 2.3.13 связаны «формальной двойственностью». Каждая из них получается из другой «обращением стрелок», «перестановкой ядер и образов» и «переходом к противоположному включению».

2.3.16. Лемма о снежинке. *Пусть заданы* $S \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ *и* $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$. *Существуют, и притом единственные, операторы* $\alpha_1, \dots, \alpha_6$, *для которых коммутативна диаграмма*:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & & & & & 0 \arrow[dl] & \\
 & & \ker ST \arrow[rrrr, "\alpha_2"] \arrow[dr] & & & & \ker S \arrow[dl] \arrow[dr, "\alpha_3"] & & \\
0 \arrow[r] & \ker T \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr] \arrow[ddrr, "\alpha_6"'] & & X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "ST"'] & & Y \arrow[rr] \arrow[dl, "S"] & & \operatorname{coker} T \arrow[r] \arrow[ddll, "\alpha_4"] & 0 \\
 & & & & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & \operatorname{coker} S \arrow[dl] & & \operatorname{coker} ST \arrow[ll, "\alpha_5"] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

При этом (выделенная) последовательность

$$
0 \to \ker T \xrightarrow{\alpha_1} \ker ST \xrightarrow{\alpha_2} \ker S \xrightarrow{\alpha_3}
$$
$$
\xrightarrow{\alpha_3} \operatorname{coker} T \xrightarrow{\alpha_4} \operatorname{coker} ST \xrightarrow{\alpha_5} \operatorname{coker} S \to 0
$$

является точной. ◁▷

Упражнения

2.1. Привести примеры векторных пространств, а также и не векторных пространств. Какие конструкции приводят к векторным пространствам?

2.2. Изучить векторные пространства над двухэлементным полем $\mathbb{Z}_2$.

2.3. Описать векторное пространство со счетным базисом Гамеля.

2.4. Доказать существование разрывных решений $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Как представить такие f графически?

2.5. Доказать, что пространство, алгебраически сопряженное к прямой сумме, реализуется как прямое произведение.

2.6. Пусть $X \supset X_0 \supset X_{00}$. Доказать, что X/X_{00} и $(X/X_0)/(X_{00}/X_0)$ — изоморфные пространства.

2.7. Пусть отображение «двойной диез» определено правилом:

$$x^{\#\#} : x^{\#} \mapsto \langle x \,|\, x^{\#} \rangle \quad (x \in X,\ x^{\#} \in X^{\#}).$$

Установить, что это отображение осуществляет вложение векторного пространства X во второе сопряженное пространство $X^{\#\#}$.

2.8. Доказать, что алгебраически рефлексивными являются конечномерные пространства и только они, т. е.

$$^{\#\#}(X) = X^{\#\#} \Leftrightarrow \dim X < +\infty.$$

2.9. Есть ли аналоги базисов Гамеля в общих модулях?

2.10. При каких условиях сумма проекторов будет проектором?

2.11. Пусть T — эндоморфизм некоторого векторного пространства, причем $T^{n-1} \neq 0$ и $T^n = 0$ для какого-то натурального n. Доказать, что операторы $T^0,\ T, \ldots, T^{n-1}$ линейно независимы.

2.12. Описать строение линейных операторов, определенных на прямой сумме пространств и действующих в произведение пространств.

2.13. Найти условия единственности решений следующих уравнений в операторах $\mathscr{X}A = B$ и $A\mathscr{X} = B$ (здесь неизвестным является оператор $\mathscr{X}$).

2.14. Как устроено пространство билинейных операторов?

2.15. Охарактеризовать векторные пространства, возникающие в результате овеществления комплексных векторных пространств.

2.16. Для семейства линейно независимых векторов $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ подыскать такое семейство функционалов $(x_e^{\#})_{e\in\mathscr{E}}$, чтобы выполнялись соотношения:

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 1 \quad (e \in \mathscr{E});$$

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 0 \quad (e,\ e' \in \mathscr{E},\ e \neq e').$$

2.17. Для семейства линейно независимых функционалов $(x_e^{\#})_{e\in\mathscr{E}}$ подыскать такое семейство векторов $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$, чтобы выполнялись соотношения:

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 1 \quad (e \in \mathscr{E});$$

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 0 \quad (e,\ e' \in \mathscr{E},\ e \neq e').$$

2.18. Найти условия совместности системы линейных уравнений и линейных неравенств в вещественных векторных пространствах.

2.19. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & Z \arrow[d, "\delta"'] \\
\overline{W} \arrow[r] & \overline{X} \arrow[r, "\overline{T}"] & \overline{Y} \arrow[r] & \overline{Z}
\end{tikzcd}$$

с точными сторонами, причем α — эпиморфизм, а δ — мономорфизм. Доказать, что $\ker\gamma = T(\ker\beta)$ и $\overline{T}^{-1}(\operatorname{im}\gamma) = \operatorname{im}\beta$.

Глава 3

Выпуклый анализ

3.1. Множества в векторных пространствах

3.1.1. Определение. Пусть Γ — подмножество $\mathbb{F}^2$, а U — подмножество векторного пространства. Множество U называют Γ-*множеством* (и пишут $U \in (\Gamma)$), если выполнено

$$(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma \Rightarrow \lambda_1 U + \lambda_2 U \subset U.$$

3.1.2. Примеры.

(1) Любое множество входит в $(\varnothing)$. (Таким образом, $(\varnothing)$ не является множеством.)

(2) При $\Gamma := \mathbb{F}^2$ непустые Γ-множества это в точности линейные подмножества векторных пространств.

(3) Если $\Gamma := \mathbb{R}^2$, то непустые Γ-множества в векторном пространстве X называют *вещественными подпространствами* в X.

(4) Если $\Gamma := \mathbb{R}^2_+$, то непустые Γ-множества называют *конусами*. Иными словами, непустое множество K является конусом в том и только в том случае, если $K + K \subset K$ и $\alpha K \subset K$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Непустые $\mathbb{R}^2_+ \setminus 0$-множества (иногда) называют *незаостренными конусами*, а непустые $\mathbb{R}_+ \times 0$-множества — *невыпуклыми конусами*. (Здесь и в дальнейшем использовано обычное обозначение $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} :\ t \geq 0\}$.)

(5) Пусть $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{F}^2 :\ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Непустые Γ-множества называют *аффинными многообразиями*. Если X_0

— подпространство в X и $x \in X$, то $x + X_0 := \{x\} + X_0$ — аффинное многообразие в X. Наоборот, если L — аффинное многообразие в X и $x \in L$, то $L - x := L + \{-x\}$ — линейное множество в X. $\triangleleft\triangleright$

(6) Пусть $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{F}^2 :\ |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1\}$. Тогда непустые Γ-множества называют *абсолютно выпуклыми.*

(7) Пусть $\Gamma := \{(\lambda,\ 0) \in \mathbb{F}^2 :\ |\lambda| \leq 1\}$. Тогда Γ-множества называют *уравновешенными* (при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ говорят также о *звездных* множествах; используют и термин «симметричное множество», что не вполне оправдано).

(8) Пусть $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Тогда Γ-множества называют *выпуклыми.*

(9) Если $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\}$, то непустые Γ-множества называют *коническими отрезками.* Множество является коническим отрезком в том и только в том случае, если оно выпукло и содержит нуль. $\triangleleft\triangleright$

(10) Для любого $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$ и произвольного векторного пространства X над $\mathbb{F}$ выполнено $X \in (\Gamma)$. Отметим еще, что в 3.1.2 (1)–3.1.2 (9) множество Γ является Γ-множеством.

3.1.3. *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{E}$ — некоторое семейство Γ-множеств в этом пространстве X. Тогда $\cap\{U :\ U \in \operatorname{im}\mathscr{E}\} \in (\Gamma)$. Если, кроме того, $\operatorname{im}\mathscr{E}$ фильтровано по возрастанию (относительно включения множеств), то $\cup\{U :\ U \in \operatorname{im}\mathscr{E}\} \in (\Gamma)$.* $\triangleleft\triangleright$

3.1.4. Замечание. Предложение 3.1.3, в частности, означает, что совокупность Γ-множеств данного векторного пространства, будучи упорядочена по включению, становится полной решеткой.

3.1.5. *Пусть X и Y — векторные пространства, а $U \subset X$ и $V \subset Y$ — некоторые Γ-множества. Тогда $U \times V \in (\Gamma)$.*

$\triangleleft$ Если одно из множеств U или V пусто, то $U \times V = \varnothing$ и доказывать нечего. Пусть теперь $u_1,\ u_2 \in U$ и $v_1,\ v_2 \in V$, а $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma$. Тогда $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$, а $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \in V$. Значит, $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in U \times V$. $\triangleright$

3.1.6. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства и $T \subset X \times Y$ — соответствие. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$. Если $T \in (\Gamma)$, то T называют Γ-*соответствием.*

3.1.7. Замечание. Если Γ-множества (при фиксированном Γ) носят специальное название, то это название сохраняют и для Γ-соответствий. В этом смысле говорят о *линейных* и *выпуклых соответствиях*, *аффинных отображениях* и т. п. Уместно подчеркнуть особенность терминологии: выпуклая функция одной переменной не является выпуклым соответствием, за исключением тривиальных случаев (см. 3.4.2).

3.1.8. *Пусть $T \subset X \times Y$ — некоторое Γ_1-соответствие, а $U \subset X$ — некоторое Γ_2-множество. Если $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, то $T(U) \in (\Gamma_2)$.*

$\lhd$ Если $y_1,\ y_2 \in T(U)$, то для некоторых $x_1,\ x_2 \in U$ будет $(x_1,\ y_1) \in T$ и $(x_2,\ y_2) \in T$. Для $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma_2$ имеем $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma_1$ и, значит, $\lambda_1(x_1,\ y_1)+\lambda_2(x_2,\ y_2) \in T$. Отсюда следует, что $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \in T(U)$. $\rhd$

3.1.9. *Суперпозиция Γ-соответствий — Γ-соответствие.*

$\lhd$ Пусть $F \subset X \times V$ и $G \subset W \times Y$ и $F,\ G \in (\Gamma)$. Имеем

$$(x_1,\ y_1) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists\, v_1) \quad (x_1,\ v_1) \in F \ \&\ (v_1,\ y_1) \in G;$$

$$(x_2,\ y_2) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists\, v_2) \quad (x_2,\ v_2) \in F \ \&\ (v_2,\ y_2) \in G.$$

«Умножая первую строчку на λ_1, вторую — на λ_2, где $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma$, и складывая результаты», последовательно получаем требуемое. $\rhd$

3.1.10. *Если U, V — подмножества X и U, $V \in (\Gamma)$ для $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$, то для любых $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$ выполнено $\alpha U + \beta V \in (\Gamma)$.*

$\lhd$ Следует сослаться на 3.1.5, 3.1.8 и 3.1.9. $\rhd$

3.1.11. Определение. Пусть X — векторное пространство, Γ — подмножество $\mathbb{F}^2$ и U — подмножество X. Множество

$$H_\Gamma(U) := \cap\{V \subset X :\ V \in (\Gamma),\ V \supset U\}$$

называют Γ-*оболочкой* U.

3.1.12. *Справедливы утверждения:*

(1) $H_\Gamma(U) \in (\Gamma)$;

(2) $H_\Gamma(U)$ — *наименьшее Γ-множество, содержащее U*;

(3) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow H_\Gamma(U_1) \subset H_\Gamma(U_2)$;

(4) $U \in (\Gamma) \Leftrightarrow U = H_\Gamma(U)$;

(5) $H_\Gamma(H_\Gamma(U)) = H_\Gamma(U)$. $\lhd\rhd$

3.1.13. *Имеет место формула Моцкина:*

$$H_\Gamma(U) = \cup\{H_\Gamma(U_0) :\ U_0 \subset U,\ U_0 \text{— конечное подмножество}\}.$$

$\lhd$ Обозначим через V множество, стоящее в правой части формулы Моцкина. Так как $U_0 \subset U$, то, по 3.1.12 (3), $H_\Gamma(U_0) \subset H_\Gamma(U)$, а потому $H_\Gamma(U) \supset V$. В силу 3.1.12 (2) необходимо (и, разумеется, достаточно) проверить, что $V \in (\Gamma)$. Но последнее следует из 3.1.3 и того факта, что $H_\Gamma(U_0) \cup H_\Gamma(U_1) \subset H_\Gamma(U_0 \cup U_1)$. $\rhd$

3.1.14. Замечание. Формула Моцкина показывает, что для описания произвольных Γ-оболочек следует найти лишь Γ-оболочки конечных множеств. Подчеркнем, что при конкретных Γ используют специальные (но естественные) названия для Γ-оболочек. Так, при $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+ :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ говорят о *выпуклых оболочках* и вместо $H_\Gamma(U)$ пишут $\operatorname{co}(U)$. Вместо $H_{\mathbb{F}^2}(U)$ пишут $\mathscr{L}(U)$ или $\operatorname{lin}(U)$, если $U \neq \varnothing$, кроме того, полагают для удобства $\mathscr{L}(\varnothing) := 0$. Множество $\mathscr{L}(U)$ называют *линейной оболочкой* U (и по возможности не путают с *пространством эндоморфизмов* $\mathscr{L}(X)$ векторного пространства X). Аналогично вводят понятия *аффинной оболочки*, *конической оболочки* и т. п. Отметим здесь же, что выпуклая оболочка конечного множества точек составлена из их же *выпуклых комбинаций*, т. е.

$$\operatorname{co}(\{x_1, \dots, x_N\}) = \left\{\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k :\ \lambda_k \geq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_N = 1\right\}. \ \lhd\rhd$$

3.2. Упорядоченные векторные пространства

3.2.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство. Пусть, далее, σ — предпорядок в X. Говорят, что σ *согласован с векторной структурой*, если σ — конус в X^2. В этом случае пространство X называют *упорядоченным векторным пространством.* (Точнее говорить о *предупорядоченном векторном пространстве* $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \sigma)$, сохраняя термин «упорядоченное векторное пространство» для тех ситуаций, когда σ — это отношение порядка.)

3.2.2. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство и σ — соответствующий предпорядок. Тогда $\sigma(0)$ — конус. При этом $\sigma(x) = x + \sigma(0)$ для всякого $x \in X$.*

◁ Множество $\sigma(0)$ — конус в силу 3.1.3. Помимо того, из тождества $(x,\ y) = (x,\ x) + (0,\ y - x)$ выводим $(x,\ y) \in \sigma \Leftrightarrow y - x \in \sigma(0)$. ▷

3.2.3. *Пусть K — конус в векторном пространстве X. Положим*

$$\sigma := \{(x,\ y) \in X^2 :\ y - x \in K\}.$$

Тогда σ — предпорядок, согласованный с векторной структурой, причем K совпадает с конусом положительных элементов $\sigma(0)$. Более того, σ является порядком в том и только в том случае, если $K \cap (-K) = 0$.

◁ Ясно, что $0 \in K \Rightarrow I_X \subset \sigma$ и $K + K \subset K \Rightarrow \sigma \circ \sigma \subset \sigma$. Имеем также представление $\sigma^{-1} = \{(x,\ y) \in X^2 :\ x - y \in K\}$. Значит, $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X \Leftrightarrow K \cap (-K) = 0$. Осталось проверить, что σ — конус. С этой целью возьмем $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in \sigma$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1(y_1 - x_1) + \alpha_2(y_2 - x_2) \in \alpha_1 K + \alpha_2 K \subset K$. ▷

3.2.4. Определение. Заданный конус K называют *упорядочивающим* или *острым*, если $K \cap (-K) = 0$.

3.2.5. Замечание. На основании 3.2.2 и 3.2.3 задание в векторном пространстве структуры предупорядоченного векторного пространства равносильно выделению в нем конуса положительных элементов. Структуру упорядоченного векторного пространства создают выделением острого конуса. В этой связи о (пред)упорядоченном векторном пространстве X часто говорят как о паре $(X,\ X_+)$, где X_+ — конус положительных элементов.

3.2.6. Примеры.

(1) Пространство функций $\mathbb{R}^\Xi$ с конусом $\mathbb{R}^\Xi_+ := (\mathbb{R}_+)^\Xi$ функций, принимающих положительные значения.

(2) Пусть X — упорядоченное векторное пространство с конусом положительных элементов X_+. Если X_0 — подпространство X, то порядок, индуцируемый в X_0 из X, задан конусом $X_0 \cap X_+$. В этом смысле X_0 рассматривают как упорядоченное векторное пространство.

(3) Пусть X и Y — (пред)упорядоченные векторные пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *положительным* (пишут $T \geq 0$), если выполнено $T(X_+) \subset Y_+$. Множество всех положительных операторов образует конус $\mathscr{L}_+(X,\ Y)$. Линейную оболочку

$\mathscr{L}_+(X,\, Y)$ обозначают символом $\mathscr{L}_r(X,\, Y)$. Операторы из $\mathscr{L}_r(X,\, Y)$ называют *регулярными*.

3.2.7. Определение. Упорядоченное векторное пространство называют *векторной решеткой*, если решеткой является упорядоченное множество векторов рассматриваемого пространства.

3.2.8. Определение. Векторную решетку называют *пространством Канторовича* или, короче, *K-пространством*, если любое непустое ограниченное сверху множество в ней имеет точную верхнюю границу.

3.2.9. *В K-пространстве каждое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю границу.*

$\triangleleft$ Пусть $x \leq U$. Тогда $-x \geq -U$. Значит, по 3.2.8 существует $\sup(-U)$. При этом $-x \geq \sup(-U)$. Отсюда очевидно следует, что $-\sup(-U) = \inf U$. $\triangleright$

3.2.10. *В K-пространстве для непустых ограниченных сверху множеств U и V выполнено*

$$\sup(U + V) = \sup U + \sup V.$$

$\triangleleft$ В случае, когда множество U или множество V состоит из одного элемента, требуемое равенство ясно. Общий случай получаем теперь в силу «ассоциативности точных верхних границ». Именно,

$$\sup(U + V) = \sup\{\sup(u + V) :\ u \in U\} =$$

$$= \sup\{u + \sup V :\ u \in U\} = \sup V + \sup\{u :\ u \in U\} =$$

$$= \sup V + \sup U. \ \triangleright$$

3.2.11. Замечание. Вывод предложения 3.2.10 можно считать справедливым в произвольном упорядоченном векторном пространстве при условии, что у исходных множеств имеются точные верхние границы. Аналогично трактуют соотношение: $\sup \lambda U = \lambda \sup U$ для $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3.2.12. Определение. Для элемента x векторной решетки вектор $x_+ := x \vee 0$ называют *положительной частью* x, элемент $x_- := (-x)_+$ — *отрицательной частью*, а $|x| := x \vee (-x)$ — *модулем* x.

3.2.13. *В векторной решетке для любых элементов x и y имеет место тождество*

$$x + y = x \vee y + x \wedge y.$$

$\lhd$ $x + y - x \wedge y = x + y + (-x) \vee (-y) = y \vee x$ $\rhd$

3.2.14. $x = x_+ - x_-$; $|x| = x_+ + x_-$.

$\lhd$ Первое равенство получается из 3.2.13 при $y := 0$. Помимо этого, $|x| = x \vee (-x) = -x + (2x) \vee 0 = -x + 2x_+ = (x_+ - x_-) + 2x_+ = x_+ + x_-$. $\rhd$

3.2.15. *Лемма о сумме промежутков.* *Для положительных элементов x, y в векторной решетке X будет*

$$[0,\ x + y] = [0,\ x] + [0,\ y].$$

(*Как обычно*, $[u,\ v] := \sigma(u) \cap \sigma^{-1}(v)$.)

$\lhd$ Включение $[0,\ x] + [0,\ y] \subset [0,\ x + y]$ несомненно. Если же $0 \le z \le x + y$, то положим $z_1 := z \wedge x$. Видно, что $z_1 \in [0,\ x]$. Пусть теперь $z_2 := z - z_1$. Тогда $z_2 \ge 0$. При этом $z_2 = z - z \wedge x = z + (-z) \vee (-x) = 0 \vee (z - x) \le 0 \vee (x + y - x) = 0 \vee y = y$. $\rhd$

3.2.16. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое K-пространство. Пространство регулярных операторов $\mathscr{L}_r(X,\ Y)$ с конусом $\mathscr{L}_+(X,\ Y)$ положительных операторов является K-пространством.* $\lhd\rhd$

3.3. Продолжение положительных функционалов и операторов

3.3.1. Контрпримеры.

(1) Пусть X — пространство $B([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ ограниченных вещественных функций на $[0,\ 1]$, а $X_0 := C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ — подпространство X, составленное из непрерывных функций. Положим $Y := X_0$ и наделим X_0, X и Y естественными отношениями порядка (ср. 3.2.6 (1) и 3.2.6 (2)). Рассмотрим задачу о продолжении тождественного оператора $T_0 : X_0 \to Y$ до положительного оператора $T \in \mathscr{L}_+(X,\ Y)$. Если бы эта задача имела решение T, то у каждого непустого ограниченного множества $\mathscr{E}$ в X_0 нашлась бы точная верхняя граница $\sup_{X_0} \mathscr{E}$, вычисленная в X_0. Именно, $\sup_{X_0} \mathscr{E} = T \sup_X \mathscr{E}$, где $\sup_X \mathscr{E}$ — точная верхняя граница $\mathscr{E}$ в X. В то же время нет сомнений, что Y не является K-пространством.

(2) Пусть $s := \mathbb{R}^N$ — пространство последовательностей, наделенное естественным порядком. Пусть, далее, c — подпространство в s, составленное из сходящихся последовательностей. Установим, что положительный функционал $f_0 : c \to \mathbb{R}$, определенный соотношением $f_0(x) := \lim x(n)$, не допускает положительного продолжения на s. В самом деле, пусть $f \in s^{\#}$, $f \geq 0$ и $f \supset f_0$. Положим $x_0(n) := n$ и $x_k(n) := k \wedge n$ для $k,\ n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $f_0(x_k) = k$. Помимо этого, $f(x_0) \geq f(x_k) \geq 0$, так как $x_0 \geq x_k \geq 0$. Получили противоречие.

3.3.2. Определение. Подпространство X_0 упорядоченного векторного пространства X с конусом положительных элементов X_+ называют *массивным* (в X), если $X_0 + X_+ = X$.

3.3.3. *Подпространство X_0 массивно в X в том и только в том случае, если для всякого $x \in X$ найдутся элементы $x_0,\ x^0 \in X_0$ такие, что выполнено $x_0 \leq x \leq x^0$.* $\lhd\rhd$

3.3.4. *Теорема Канторовича.* *Пусть X — упорядоченное векторное пространство, X_0 — массивное подпространство в X и Y — некоторое K-пространство. Любой положительный оператор $T_0 \in \mathscr{L}_+(X_0,\ Y)$ допускает положительное продолжение $T \in \mathscr{L}_+(X,\ Y)$.*

$\lhd$ Этап I. Пусть сначала $X := X_0 \oplus X_1$, где X_1 — одномерное подпространство, $X_1 := \{\alpha\overline{x} :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Так как подпространство X_0 массивно и оператор T_0 положителен, то множество $U := \{T_0 x^0 : x^0 \in X_0,\ x^0 \geq \overline{x}\}$ ограничено снизу и, значит, определен элемент $\overline{y} := \inf U$. Положим

$$Tx := \{T_0 x_0 + \alpha\overline{y} :\ x = x_0 + \alpha\overline{x},\ x_0 \in X_0,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, T — однозначное линейное соответствие, причем $T \supset T_0$ и $\operatorname{dom} T = X$. Осталось убедиться в положительности T.

Если $x = x_0 + \alpha\overline{x}$ и $x \geq 0$, то при $\alpha = 0$ доказывать нечего. Если же $\alpha > 0$, то $\overline{x} \geq -x_0/\alpha$. Отсюда следует, что $-T_0 x_0/\alpha \leq \overline{y}$, т. е. $Tx \in Y_+$. Аналогично при $\alpha < 0$ имеем $\overline{x} \leq -x_0/\alpha$. Стало быть, $\overline{y} \leq -T_0 x_0/\alpha$ и вновь $Tx = T_0 x_0 + \alpha\overline{y} \in Y_+$.

Этап II. Пусть теперь $\mathscr{E}$ — совокупность таких однозначных линейных соответствий $S \subset X \times Y$, что $S \supset T_0$ и $S(X_+) \subset Y_+$. В силу 3.1.3 при упорядочении по включению $\mathscr{E}$ индуктивно, и по лемме Куратовского — Цорна в $\mathscr{E}$ есть максимальный элемент T.

Если $\overline{x} \in X \setminus \operatorname{dom} T$, то можно применить доказанное на этапе I к случаю $X := \operatorname{dom} T \oplus X_1$, $X_0 := \operatorname{dom} T$, $T_0 := T$ и $X_1 := \{\alpha\overline{x} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Возникает противоречие с максимальностью T. Итак, T — искомое продолжение. $\rhd$

3.3.5. Замечание. При $Y := \mathbb{R}$ о 3.3.4 иногда говорят как о *теореме Крейна — Рутмана.*

3.3.6. Определение. Элемент x из конуса положительных элементов называют *дискретным*, если $[0, \ x] = [0, \ 1]x$.

3.3.7. *Если на пространстве* $(X, \ X_+)$ *имеется дискретный функционал, то* $X = X_+ - X_+$.

$\lhd$ Пусть T — такой функционал и $\mathscr{X} := X_+ - X_+$. Возьмем $f \in X^{\#}$. Достаточно показать, что $\ker f \supset \mathscr{X} \Rightarrow f = 0$. По условию $T + f \in [0, \ T]$, т. е. для некоторого $\alpha \in [0, \ 1]$ будет $T + f = \alpha T$. Если $T|_{\mathscr{X}} = 0$, то $2T \in [0, \ T]$. Отсюда $T = 0$ и $f = 0$. Если же $T(x_0) \neq 0$ для какого-либо $x_0 \in \mathscr{X}$, то $\alpha = 1$ и вновь $f = 0$. $\rhd$

3.3.8. *Теорема Крейна – Рутмана для дискретного функционала.* *Пусть* X *— упорядоченное векторное пространство,* X *— массивное подпространство в* X *и* T_0 *— дискретный функционал на* X_0*. Тогда существует дискретный функционал* T *на* X*, продолжающий* T_0.

$\lhd$ «Подправим» доказательство 3.3.4.

Этап I. Предъявленный функционал T дискретен. В самом деле, при $T' \in [0, \ T]$ для подходящего $\alpha \in [0, \ 1]$ при всех $x_0 \in X_0$ будет $T'(x_0) = \alpha T(x_0)$ и $(T - T')(x_0) = (1 - \alpha)T(x_0)$. Оцениваем:

$$T'(\overline{x}) \leq \inf\{T'(x^0) : \ x^0 \geq \overline{x}, \ x^0 \in X_0\} = \alpha T(\overline{x});$$

$$(T - T')(\overline{x}) \leq \inf\{(T - T')(x^0) : \ x^0 \geq \overline{x}, \ x^0 \in X_0\} = (1 - \alpha)T(\overline{x}).$$

Таким образом, $T' = \alpha T$ и $[0, \ T] \subset [0, \ 1]T$. Противоположное включение справедливо всегда. Итак, функционал T дискретен.

Этап II. Пусть $\mathscr{E}$ — множество, введенное при доказательстве 3.3.4. Рассмотрим множество $\mathscr{E}_d$, состоящее из таких элементов $S \in \mathscr{E}$, что след $S|_{\operatorname{dom} S}$ представляет собой дискретный функционал на пространстве $\operatorname{dom} S$. Следует установить индуктивность $\mathscr{E}_d$. В соответствии с 1.2.19 возьмем цепь $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}_d$. Положим $S := \cup\{S_0 :$

$S_0 \in \mathscr{E}_0\}$. Очевидно, что $S \in \mathscr{E}$. Убедимся в дискретности S, что и завершит доказательство.

Пусть $S' \in (\operatorname{dom} S)^{\#}$ таков, что $0 \le S'(x_0) \le S(x_0)$ для всех $x_0 \in (\operatorname{dom} S)_+$. Если $S(x_0) = 0$ для любого такого x_0, то $S' = 0S$, что и нужно. Если же $S(x_0) \ne 0$ для некоторого $x_0 \in (\operatorname{dom} S)_+$, то выберем $S_0 \in \mathscr{E}_0$ из условия $S_0(x_0) = S(x_0)$. Тогда в силу дискретности S_0 можно записать: $S'(x') = \alpha S(x')$ для всех $x' \in \operatorname{dom} S_0$. При этом $\alpha = S'(x_0)/S(x_0)$, т. е. α не зависит от выбора S_0. Поскольку $\mathscr{E}_0$ — цепь, заключаем: $S' = \alpha S$. ▷

3.4. Выпуклые функции и сублинейные функционалы

3.4.1. Определение. ***Полурасширенной числовой прямой*** $\mathbb{R}^{\cdot}$ называют множество $\mathbb{R}^{\cdot}$ с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. При этом полагают $\alpha(+\infty) := +\infty$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, $+\infty + x := x + (+\infty) := +\infty$ $(x \in \mathbb{R}^{\cdot})$.

3.4.2. Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — некоторое отображение. Множество

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\ t) \in X \times \mathbb{R} :\ t \ge f(x)\}$$

называют ***надграфиком*** f, а множество

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X :\ f(x) < +\infty\}$$

— ***эффективной областью определения*** функции f.

3.4.3. Замечание. Непоследовательность в применении символа $\operatorname{dom} f$ кажущаяся. Именно, эффективная область определения функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ совпадает с областью определения однозначного соответствия $f \cap X \times \mathbb{R}$ из X в $\mathbb{R}$. В этой связи при $\operatorname{dom} f = X$ будем, как и прежде, писать $f : X \to \mathbb{R}$, опуская точку в $\mathbb{R}^{\cdot}$.

3.4.4. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство. Отображение $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют ***выпуклой функцией***, если надграфик $\operatorname{epi} f$ — это выпуклое множество.

3.4.5. *Отображение $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ является выпуклой функцией в том и только в том случае, если имеет место неравенство Йенсена, т. е.*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

как только $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $x_1,\ x_2 \in X$.

$\lhd$ $\Rightarrow$: Если выбраны числа $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и один из векторов x_1, x_2 не входит в $\operatorname{dom} f$, то доказывать нечего — неравенство Йенсена очевидно. Пусть $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} f$. Тогда $(x_1,\ f(x_1)) \in \operatorname{epi} f$ и $(x_2,\ f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$. Стало быть, с учетом 3.1.2 (8), $\alpha_1(x_1,\ f(x_1)) + \alpha_2(x_2,\ f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$.

$\Leftarrow$: Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — функция и $(x_1,\ t_1) \in \operatorname{epi} f,\ (x_2,\ t_2) \in \operatorname{epi} f$, т. е. $t_1 \ge f(x_1)$ и $t_2 \ge f(x_2)$ (в случае $\operatorname{dom} f = \varnothing$ будет $f(x) = +\infty$ $(x \in X)$ и $\operatorname{epi} f = \varnothing$). Привлекая неравенство Йенсена, видим, что для $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ справедливо $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) \in \operatorname{epi} f$. $\rhd$

3.4.6. Определение. Отображение $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *сублинейным функционалом*, если надграфик $\operatorname{epi} p$ — это конус.

3.4.7. *При $\operatorname{dom} p \ne 0$ эквивалентны утверждения:*

(1) *p является сублинейным функционалом;*

(2) *p — выпуклая функция, удовлетворяющая условию положительной однородности: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ при всех $\alpha \ge 0$ и $x \in \operatorname{dom} p$;*

(3) *для любых $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ и $x_1,\ x_2 \in X$ выполнено $p(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 p(x_1) + \alpha_2 p(x_2)$;*

(4) *p — положительно однородный функционал, удовлетворяющий условию субаддитивности: $p(x_1 + x_2) \le p(x_1) + p(x_2)$ для всех $x_1,\ x_2 \in X$.* $\lhd\rhd$

3.4.8. Примеры.

(1) Линейный функционал сублинеен, в то время как аффинный функционал — выпуклая функция.

(2) Пусть U — выпуклое множество в X. Положим

$$\delta(U)(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in U, \\ +\infty, & \text{если } x \notin U. \end{cases}$$

Отображение $\delta(U) : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *индикаторной функцией* множества U. Ясно, что $\delta(U)$ — выпуклая функция. Если U — конус, то

$\delta(U)$ — сублинейный функционал. Если U — аффинное множество, то $\delta(U)$ — аффинный функционал.

(3) Сумма конечного числа выпуклых функций и точная верхняя граница (или верхняя огибающая) семейства выпуклых функций (вычисляемая поточечно, т. е. в $(\mathbb{R}^{\cdot})^X$) суть выпуклые функции. Аналогичные свойства наблюдают у сублинейных функционалов.

(4) Суперпозиция выпуклой функции с *аффинным оператором* (т. е. со всюду определенным однозначным аффинным соответствием) является выпуклой функцией. Суперпозиция сублинейного функционала с линейным оператором — сублинейный функционал.

3.4.9. Определение. Пусть X — векторное пространство, а U и V — два подмножества в X. Говорят, что U *поглощает* V, если найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $V \subset nU$. Множество U называют *поглощающим* (в X), если U поглощает каждую точку в X, т. е. $X = \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nU$.

3.4.10. *Пусть $T \subset X \times Y$ — линейное соответствие, причем $\operatorname{im} T = Y$. Если U поглощающее (в X), то $T(U)$ поглощающее (в Y).*

$\lhd$ $Y = T(X) = T(\cup_{n\in\mathbb{N}}\, nU) = \cup_{n\in\mathbb{N}} T(nU) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nT(U)$ $\rhd$

3.4.11. Определение. Пусть U — подмножество векторного пространства X. Точка x из U принадлежит *ядру* $\operatorname{core} U$ множества U (или *алгебраически внутренняя в* U), если множество $U - x$ — поглощающее в X.

3.4.12. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и $x \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$. Для всякого $h \in X$ существует*

$$f'(x)(h) := \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \inf_{\alpha>0} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}.$$

При этом отображение $f'(x) : h \mapsto f'(x)h$ является сублинейным функционалом $f'(x) : X \to \mathbb{R}$.

$\lhd$ Пусть $\varphi(\alpha) := f(x+\alpha h)$. В силу 3.4.8 (4) отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — это выпуклая функция. При этом $0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}\varphi$. Отображение $\alpha \mapsto (\varphi(\alpha) - \varphi(0))/\alpha \quad (\alpha > 0)$ возрастает и ограничено снизу, т. е. имеется $\varphi'(0)(1)$. По определению $f'(x)(h) = \varphi'(0)(1)$.

Для $\beta > 0$ и $h \in H$ последовательно получаем

$$f'(x)(\beta h) = \inf \frac{f(x + \alpha\beta h) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= \beta \inf \frac{f(x + \alpha\beta h) - f(x)}{\alpha\beta} = \beta f'(x)(h).$$

Кроме того, для $h_1,\ h_2 \in X$ в силу уже установленного

$$f'(x)(h_1 + h_2) = 2 \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{1}{2}\alpha(h_1 + h_2)\right) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= 2 \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}(x + \alpha h_1) + \frac{1}{2}(x + \alpha h_2)\right) - f(x)}{\alpha} \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x + \alpha h_1) - f(x)}{\alpha} + \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x + \alpha h_2) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= f'(x)(h_1) + f'(x)(h_2).$$

Ссылка на 3.4.7 завершает доказательство. $\triangleright$

3.5. Теорема Хана — Банаха

3.5.1. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство, $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и $x \in \operatorname{dom} f$. Множество

$$\partial_x(f) := \{l \in X^{\#} : (\forall\, y \in X) \quad l(y) - l(x) \leq f(y) - f(x)\}$$

называют *субдифференциалом* функции f *в точке* x.

3.5.2. Примеры.

(1) Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — сублинейный функционал. Положим $\partial(p) := \partial_0(p)$. Тогда

$$\partial(p) = \{l \in X^{\#} : (\forall\, x \in X) \quad l(x) \leq p(x)\};$$

$$\partial_x(p) = \{l \in \partial(p) :\ l(x) = p(x)\}.$$

(2) Пусть $l \in X^{\#}$. Тогда $\partial(l) = \partial_x(l) = \{l\}$.

(3) Пусть X_0 — подпространство X. Тогда

$$\partial(\delta(X_0)) = \{l \in X^{\#} : \ \ker l \supset X_0\}.$$

(4) Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и при этом выполнено $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Тогда

$$\partial_x(f) = \partial(f'(x)). \ \ \triangleleft\triangleright$$

3.5.3. *Теорема Хана — Банаха.* *Пусть $T \in \mathscr{L}(X, \ Y)$ — линейный оператор, $f : Y \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция, а точка $x \in X$ такова, что $Tx \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Тогда*

$$\partial_x(f \circ T) = \partial_{Tx}(f) \circ T.$$

$\triangleleft$ На основании 3.4.10 заключаем, что $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Применяя 3.5.2 (4), имеем $\partial_x(f \circ T) = \partial((f \circ T)'(x))$. Помимо этого, для $h \in X$ выполнено

$$(f \circ T)'(x)(h) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{(f \circ T)(x + \alpha h) - (f \circ T)(x)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(Tx + \alpha Th) - f(Tx)}{\alpha} = f'(Tx)(Th).$$

Положим $p := f'(Tx)$. Вновь апеллируя к 3.5.2 (4) и учитывая, что, в силу 3.4.12, p — это сублинейный функционал, выводим:

$$\partial(p) = \partial(f'(Tx)) = \partial_{Tx}(f);$$

$$\partial(p \circ T) = \partial((f \circ T)'(x)) = \partial_x(f \circ T).$$

Таким образом, осталось доказать равенство

$$\partial(p \circ T) = \partial(p) \circ T.$$

Если $l \in \partial(p) \circ T$, т. е. $l = l_1 \circ T$, где $l_1 \in \partial(p)$, то $l_1(y) \leq p(y)$ для любого $y \in Y$. В частности, $l(x) \in l_1(Tx) \leq p(Tx) = p \circ T(x)$ при всех $x \in X$, т. е. $l \in \partial(p \circ T)$. Итак, $\partial(p) \circ T \subset \partial(p \circ T)$.

Пусть теперь $l \in \partial(p \circ T)$. Если $Tx = 0$, то $l(x) \le p(Tx) = p(0) = 0$, т. е. $l(x) \le 0$. То же верно для элемента $-x$. Окончательно $l(x) = 0$. Другими словами, $\ker l \supset \ker T$. Значит, по теореме 2.3.8, $l = l_1 \circ T$ для некоторого $l_1 \in Y^{\#}$. Полагая $Y_0 := T(X)$ и обозначая символом ι вложение Y_0 в Y, видим, что функционал $l_1 \circ \iota$ входит в $\partial(p \circ \iota)$. Если мы покажем, что $\partial(p \circ \iota) \subset \partial(p) \circ \iota$, то для подходящего $l_2 \in \partial(p)$ будет $l_1 \circ \iota = l_2 \circ \iota$. Отсюда $l = l_1 \circ T = l_1 \circ \iota \circ T = l_2 \circ \iota \circ T = l_2 \circ T$, т. е. $l \in \partial(p) \circ T$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы Хана — Банаха следует установить только, что $\partial(p \circ \iota) \subset \partial(p) \circ \iota$.

Возьмем элемент l_0 из $\partial(p \circ \iota)$ и в подпространстве $\mathfrak{Y}_0 := Y_0 \times \mathbb{R}$ пространства $\mathfrak{Y} := Y \times \mathbb{R}$ рассмотрим функционал $T_0 : (y_0,\ t) \mapsto t - l_0(y_0)$. Упорядочим $\mathfrak{Y}$ с помощью конуса $\mathfrak{Y}_+ := \operatorname{epi} p$. Заметим, во-первых, что подпространство $\mathfrak{Y}_0$ является массивным в силу тождества

$$(y,\ t) = (0,\ t - p(y)) + (y,\ p(y)) \quad (y \in Y,\ t \in \mathbb{R}).$$

Во-вторых, при $(y_0,\ t) \in \mathfrak{Y}_0 \cap \mathfrak{Y}_+$, на основании 3.4.2, $t \ge p(y_0)$ и, стало быть, $T_0(y_0,\ t) = t - l_0(y_0) \ge 0$, т. е. T_0 — положительный функционал на $\mathfrak{Y}_0$. По теореме 3.3.4 найдется положительный функционал T на $\mathfrak{Y}$, продолжающий T_0. Положим $l(y) := T(-y,\ 0)$ для $y \in Y$. Ясно, что $l \circ \iota = l_0$. Помимо этого, $T(0,\ t) = T_0(0,\ t) = t$. Следовательно, $0 \le T(y,\ p(y)) = p(y) - l(y)$, т. е. $l \in \partial(p)$. $\rhd$

3.5.4. Замечание. Утверждение теоремы 3.5.3 именуют также ***формулой линейной замены переменной под знаком субдифференциала***, подразумевая бросающуюся в глаза связь со стандартным цепным правилом дифференциального исчисления. Отметим здесь же, что включение $\partial(p \circ \iota) \subset \partial(p) \circ \iota$ часто называют «теоремой Хана — Банаха в аналитической форме» и выражают словами: «линейный функционал, заданный на подпространстве векторного пространства и мажорируемый там сублинейным функционалом, допускает продолжение на все пространство до линейного функционала, мажорируемого исходным сублинейным функционалом».

3.5.5. ***Следствие.*** *Пусть X — векторное пространство, X_0 — подпространство в X и $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал. Имеет место (несимметричная) формула Хана — Банаха:*

$$\partial(p + \delta(X_0)) = \partial(p) + \partial(\delta(X_0)).$$

◁ Включение правой части искомой формулы в ее левую часть очевидно. Для доказательства противоположного включения возьмем $l \in \partial(p + \delta(X_0))$. Тогда $l \circ \iota \in \partial(p \circ \iota)$, где ι — вложение X_0 в X. По 3.5.3, $l \circ \iota \in \partial(p) \circ \iota$, т. е. для подходящего $l_1 \in \partial(p)$ выполнено $l \circ \iota = l_1 \circ \iota$. Положим $l_2 := l - l_1$. Из определения получаем $l_2 \circ \iota = (l - l_1) \circ \iota = l \circ \iota - l_1 \circ \iota = 0$, т. е. $\ker l_2 \supset X_0$. Как отмечено в 3.5.2 (3), это означает, что $l_2 \in \partial(\delta(X_0))$. ▷

3.5.6. *Следствие.* *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — некоторая выпуклая функция и $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Тогда $\partial_x(f) \neq \varnothing$.*

◁ Пусть $p := f'(x)$, а $\iota : 0 \to X$ — вложение. Ясно, что $0 \in \partial(p \circ \iota)$, т. е. $\partial(p \circ \iota) \neq \varnothing$. По 3.5.3, $\partial(p) \neq \varnothing$ (иначе было бы $\varnothing = \partial(p) \circ \iota = \partial(p \circ \iota)$). Осталось привлечь 3.5.2 (4). ▷

3.5.7. *Следствие.* *Пусть $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклые функции и $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{core} \operatorname{dom} f_2$. Тогда*

$$\partial_x(f_1 + f_2) = \partial_x(f_1) + \partial_x(f_2).$$

◁ Пусть $p_1 := f_1'(x)$ и $p_2 := f_2'(x)$. Для $x_1,\ x_2 \in X$ положим $p(x_1,\ x_2) := p_1(x_1) + p_2(x_2)$ и $\iota(x_1) := (x_1,\ x_1)$. Используя 3.5.2 (4) и 3.5.3, последовательно выводим:

$$\partial_x(f_1 + f_2) = \partial(p_1 + p_2) = \partial(p \circ \iota) =$$

$$= \partial(p) \circ \iota = \partial(p_1) + \partial(p_2) = \partial_x(f_1) + \partial_x(f_2). \ \triangleright$$

3.5.8. Замечание. Следствие 3.5.6 иногда называют *теоремой о непустоте субдифференциала.* С одной стороны, ее можно установить непосредственным применением леммы Куратовского — Цорна. С другой стороны, имея следствие 3.5.6, можно доказать, что $\partial(p \circ T) = \partial(p) \circ T$, следующим образом. Положим

$$p_T(y) := \inf\{p(y + Tx) - l(x) :\ x \in X\},$$

где $l \in \partial(p)$ и приняты обозначения из 3.5.3. Ясно, что функционал p_T сублинеен и любой элемент l_1 из $\partial(p_T)$ удовлетворяет соотношению $l = l_1 \circ T$. Итак, непустота субдифференциала и теорема Хана — Банаха в субдифференциальной форме образуют удобный (и не порочный) круг.

3.6. Теорема Крейна — Мильмана для субдифференциалов

3.6.1. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство и $\mathrm{seg} \subset X^2 \times X$ — соответствие, действующее по закону

$$\mathrm{seg}(x_1,\ x_2) := \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 :\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Пусть, далее, V — выпуклое множество в X и seg_V — сужение seg на V^2. Выпуклое множество U, лежащее в V, называют ***крайним*** в V, если $\mathrm{seg}_V^{-1}(U) \subset U^2$. Крайние множества иногда называют ***гранями***. Точку x из V называют ***крайней точкой*** V, если $\{x\}$ — крайнее подмножество V. Множество крайних точек V обозначают символом $\mathrm{ext}(V)$.

3.6.2. *Множество U является крайним в V в том и только в том случае, если из условий $v_1,\ v_2 \in V,\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$ вытекает, что $v_1 \in U$ и $v_2 \in U$.* $\lhd\rhd$

3.6.3. Примеры.

(1) *Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — сублинейный функционал и точка x из X входит в $\mathrm{dom}\, p$. Тогда $\partial_x(p)$ — крайнее подмножество $\partial(p)$.*

$\lhd$ Действительно, если для $\alpha_1,\ \alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ известно, что $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \in \partial_x(p)$ и $l_1,\ l_2 \in \partial(p)$, то $0 = p(x) - (\alpha_1 l_1(x) + \alpha_2 l_2(x)) = \alpha_1(p(x) - l_1(x)) + \alpha_2(p(x) - l_2(x)) \geq 0$. Помимо этого, $p(x) - l_1(x) \geq 0$ и $p(x) - l_2(x) \geq 0$. Следовательно, $l_1 \in \partial_x(p)$ и $l_2 \in \partial_x(p)$. $\rhd$

(2) *Пусть U — крайнее множество в V и, в свою очередь, V — крайнее множество в W. Тогда U — крайнее множество в W.* $\lhd\rhd$

(3) *Пусть X — упорядоченное векторное пространство. Элемент $x \in X_+$ является дискретным в том и только в том случае, если луч $\{\alpha x :\ \ \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ представляет собой крайнее множество в конусе X_+.*

$\lhd$ $\Leftarrow$: Пусть $0 \leq y \leq x$. Тогда $x = 1/2\,(2y) + 1/2\,(2(x - y))$. В силу 3.6.2, $2y = \alpha x$ и $2(x - y) = \beta x$ для некоторых $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+$. Итак, $2x = (\alpha + \beta)x$. Если $x = 0$, то доказывать нечего. Если же $x \neq 0$, то $\alpha/2 \in [0,\ 1]$ и, стало быть, $[0,\ x] \subset [0,\ 1]x$. Обратное включение очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть $[0,\ x] = [0,\ 1]x$ и для чисел $\alpha \ge 0$; $\alpha_1,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и элементов $y_1,\ y_2 \in X_+$ выполнено $\alpha x = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha_1 y_1 \in [0,\ x]$ и $\alpha_2 y_2 \in [0,\ x]$ и, стало быть, y_1 и y_2 лежат на рассматриваемом луче. Если же $\alpha > 0$, то $(\alpha_1/\alpha)y_1 = tx$ при подходящем $t \in [0, 1]$. Наконец, $(\alpha_2/\alpha)y_2 = (1-t)x$. $\rhd$

(4) Пусть U — выпуклое множество. Выпуклое подмножество V множества U называют *шапкой* U, если $U \setminus V$ — выпуклое множество.

Точка x в U является крайней в том и только в том случае, если $\{x\}$ — шапка множества U. $\lhd\rhd$

3.6.4. *Лемма о крайней точке субдифференциала.* *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал и $l \in \partial(p)$. Пусть, далее, $\mathscr{X} := X \times \mathbb{R}$, $\mathscr{X}_+ := \operatorname{epi} p$ и $T_l : (x,\ t) \mapsto t - l(x)$ $(x \in X,\ t \in \mathbb{R})$. Тогда l — крайняя точка $\partial(p)$ в том и только в том случае, если T_l — дискретный функционал.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Возьмем функционал $T' \in \mathscr{X}^{\#}$ такой, что $T' \in [0,\ T_l]$. Положим

$$t_1 := T'(0,\ 1), \quad l_1(x) := T'(-x,\ 0);$$

$$t_2 := (T_l - T')(0,\ 1), \quad l_2(x) := (T_l - T')(-x,\ 0).$$

Ясно, что $t_1 \ge 0,\ t_2 \ge 0,\ t_1 + t_2 = 1$; $l_1 \in \partial(t_1 p)$, $l_2 \in \partial(t_2 p)$ и $l_1 + l_2 = l$. Если $t_1 = 0$, то $l_1 = 0$, т. е. $T' = 0$ и $T' \in [0,\ 1]T_l$. Если же $t_2 = 0$, то $t_1 = 1$, т. е. $T' = T_l$ и вновь $T' \in [0,\ 1]T_l$. Пусть теперь $t_1,\ t_2 > 0$. Тогда $1/t_1\, l_1 \in \partial(p)$ и $1/t_2\, l_2 \in \partial(p)$, причем $l = t_1\,(1/t_1\, l_1) + t_2\,(1/t_2\, l_2)$. Поскольку по условию $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$, из 3.6.2 выводим $l_1 = t_1 l$, т. е. $T' = t_1 T_l$.

$\Leftarrow$: Пусть $l = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2$, где $l_1,\ l_2 \in \partial(p)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Функционалы $T' := \alpha_1 T_{l_1}$ и $T'' := \alpha_2 T_{l_2}$ положительны, причем $T' \in [0,\ T_l]$, ибо $T' + T'' = T_l$. Значит, найдется $\beta \in [0,\ 1]$, для которого $T' = \beta T_l$. Рассматривая точку $(0, 1)$, получаем $\alpha_1 = \beta$. Следовательно, $l_1 = l$. Аналогично $l_2 = l$. $\rhd$

3.6.5. *Теорема Крейна — Мильмана для субдифференциалов.* *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал. Для всякого $x \in X$ найдется крайний функционал $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$ такой, что $l(x) = p(x)$.*

$\triangleleft$ Установим сначала теорему Крейна — Мильмана «в узком смысле», т. е. докажем, что в субдифференциале любого сублинейного функционала p есть крайние точки: $\operatorname{ext}(\partial(p)) \neq \varnothing$.

Введем в пространство $\mathscr{X} := X \times \mathbb{R}$ конус $\mathscr{X}_+ := \operatorname{epi} p$ и выделим подпространство $\mathscr{X}_0 := 0 \times \mathbb{R}$. Заметим, что $\mathscr{X}_+ \cap \mathscr{X}_0 = 0 \times \mathbb{R}_+ = \operatorname{epi} 0$. Применяя 3.6.4 для случая $X := 0$, $l := 0$ и $p := 0$, видим, что T_0 — это дискретный функционал на $\mathscr{X}_0$. Подпространство $\mathscr{X}_0$ в $\mathscr{X}$ массивное (ср. доказательство 3.5.3). Апеллируя к 3.3.8, подыщем дискретное продолжение $T \in \mathscr{X}^{\#}$ функционала T_0. Понятно, что $T = T_l$, где $l(x) := T(-x,\ 0)$ при $x \in X$. Вновь привлекая 3.6.4, приходим к соотношению $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$.

Установим теперь теорему в полном объеме. На основании 3.4.12 и уже доказанного выберем элемент l из $\operatorname{ext}(\partial_x(p'(x)))$. Из 3.5.2 (2) и 3.5.2 (4) вытекает: $l \in \operatorname{ext}(\partial_x(p))$. По 3.6.3 (1), $\partial_x(p)$ — крайнее множество в $\partial(p)$. Таким образом, в силу 3.6.3 (2) функционал l является крайней точкой субдифференциала $\partial(p)$. $\triangleright$

3.6.6. *Следствие.* *Пусть $p_1,\ p_2 : X \to \mathbb{R}$ — сублинейные функционалы. Неравенство $p_1 \geq p_2$ (в $\mathbb{R}^X$) справедливо в том и только в том случае, если $\partial(p_1) \supset \operatorname{ext}(\partial(p_2))$.*

$\triangleleft$ Бесспорно, что $p_1 \geq p_2 \Leftrightarrow \partial(p_1) \supset \partial(p_2)$. Кроме того, по 3.6.5, $p_2(x) = \sup\{l(x) :\ l \in \operatorname{ext}(\partial(p_2))\}$. $\triangleright$

3.7. Теорема Хана — Банаха для полунормы

3.7.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Векторное пространство $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot|_{\mathbb{R}\times X})$ называют *вещественной основой* пространства $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ и обозначают коротко символом $X_{\mathbb{R}}$.

3.7.2. Определение. Пусть X — векторное пространство и $f \in X^{\#}$ — линейный функционал. Положим $\mathbf{Re}\, f : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ $(x \in X)$. Возникающее отображение $\mathbf{Re} : (X^{\#})_{\mathbb{R}} \to (X_{\mathbb{R}})^{\#}$ называют *овеществлением.*

3.7.3. *Овеществление* $\mathbf{Re}$ *— это изоморфизм вещественных векторных пространств $(X^{\#})_{\mathbb{R}}$ и $(X_{\mathbb{R}})^{\#}$.*

$\triangleleft$ Следует разобрать только случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$, ибо при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ оператор $\mathbf{Re}$ — тождественное отображение.

Линейность оператора $\mathbf{Re}$ не вызывает сомнений. Убедимся в том, что $\mathbf{Re}$ — мономорфизм и эпиморфизм одновременно (ср. 2.3.2).

Если $\mathbf{Re}\, f = 0$, то

$$0 = \operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re}(if(x)) =$$

$$= \operatorname{Re}(i(\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x))) = -\operatorname{Im} f(x).$$

Отсюда $f = 0$ и $\mathbf{Re}$ — мономорфизм.

Если теперь $g \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$, то положим $f(x) := g(x) - ig(ix)$. Очевидно, что $f \in \mathscr{L}(X_{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}_{\mathbb{R}})$ и $\operatorname{Re} f(x) = g(x)$ при $x \in X$. Осталось проверить, что $f(ix) = if(x)$, ибо тогда $f \in X^{\#}$. Прямое вычисление $f(ix) = g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$ позволяет заключить, что $\mathbf{Re}$ — эпиморфизм. $\triangleright$

3.7.4. Определение. Оператор $\mathbf{Re}^{-1} : (X_{\mathbb{R}})^{\#} \to (X^{\#})_{\mathbb{R}}$ называют *комплексификатором.*

3.7.5. Замечание. В силу 3.7.3 для комплексного поля скаляров

$$\mathbf{Re}^{-1} g : x \mapsto g(x) - ig(ix) \quad (g \in (X_{\mathbb{R}})^{\#},\ x \in X).$$

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ комплексификатор $\mathbf{Re}^{-1}$ — тождественный оператор.

3.7.6. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Функцию $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *полунормой*, если $\operatorname{dom} p \neq \varnothing$ и для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{F}$ выполнено

$$p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le |\lambda_1| p(x_1) + |\lambda_2| p(x_2).$$

3.7.7. Замечание. Каждая полунорма является сублинейным функционалом (на вещественной основе рассматриваемого пространства).

3.7.8. Определение. Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. Множество

$$|\partial|(p) := \{l \in X^{\#} :\ |l(x)| \le p(x) \text{ при всех } x \in X\}$$

называют *субдифференциалом полунормы* p.

3.7.9. *Лемма о субдифференциале полунормы.* *Для любой полунормы $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ субдифференциалы $|\partial|(p)$ и $\partial(p)$ связаны соотношениями*

$$|\partial|(p) = \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p)); \quad \mathbf{Re}\,(|\partial|(p)) = \partial(p).$$

$\triangleleft$ При $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ очевидно равенство $|\partial|(p) = \partial(p)$. Осталось вспомнить, что в этом случае отображение $\mathbf{Re}$ — тождественное.

Пусть $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. Если $l \in |\partial|(p)$, то $(\mathbf{Re}\,l)(x) = \operatorname{Re} l(x) \le |l(x)| \le p(x)$ для всех $x \in X$, т. е. $\mathbf{Re}\,(|\partial|(p)) \subset \partial(p)$. Пусть теперь $g \in \partial(p)$ и $f := \mathbf{Re}^{-1}g$. Если $f(x) = 0$, то $|f(x)| \le p(x)$. Если же $f(x) \ne 0$, то положим $\theta := |f(x)|/f(x)$. Тогда $|f(x)| = \theta f(x) = f(\theta x) = \operatorname{Re} f(\theta x) = g(\theta x) \le p(\theta x) = |\theta| p(x) = p(x)$, ибо $|\theta| = 1$. Итак, $f \in |\partial|(p)$. $\triangleright$

3.7.10. *Пусть X — векторное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма и X_0 — подпространство в X. Имеет место (несимметричная) формула Хана — Банаха для полунормы*

$$|\partial|(p + \delta(X_0)) = |\partial|(p) + |\partial|(\delta(X_0)).$$

$\triangleleft$ С помощью 3.7.9 и 3.5.5, выводим:

$$|\partial|(p + \delta(X_0)) = \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p + \delta(X_0))) = \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p) + \partial(\delta(X_0))) =$$
$$= \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p)) + \mathbf{Re}^{-1}(\partial(\delta(X_0))) = |\partial|(p) + |\partial|(\delta(X_0)). \ \triangleright$$

3.7.11. *Пусть X, Y — векторные пространства, $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ — линейный оператор и $p : Y \to \mathbb{R}$ — полунорма. Тогда $p \circ T$ — полунорма, причем*

$$|\partial|(p \circ T) = |\partial|(p) \circ T.$$

$\triangleleft$ Привлекая 2.3.8 и 3.7.10, последовательно имеем

$$|\partial|(p \circ T) = |\partial|(p + \delta(\operatorname{im} T)) \circ T = (|\partial|(p) + |\partial|(\delta(\operatorname{im} T))) \circ T =$$
$$= |\partial|(p) \circ T + |\partial|(\delta(\operatorname{im} T)) \circ T = |\partial|(p) \circ T. \ \triangleright$$

3.7.12. Замечание. В случае оператора вложения и комплексного поля скаляров 3.7.11 называют *теоремой Сухомлинова — Боненблюста — Собчика.*

3.7.13. *Теорема Хана — Банаха для полунормы.* *Пусть X — векторное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма и X_0 — подпространство в X. Пусть, далее, l_0 — линейный функционал на X_0, для которого $|l_0(x_0)| \le p(x_0)$ при $x_0 \in X_0$. Тогда существует такой линейный функционал l на X, что $|l(x)| \le p(x)$ для всякого $x \in X$ и, кроме того, $l(x_0) = l_0(x_0)$, как только $x_0 \in X_0$.* $\triangleleft\triangleright$

3.8. Функционал Минковского и отделимость

3.8.1. Определение. Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая (т. е. $\mathbb{R}^{\cdot}$ с присоединенным наименьшим элементом $-\infty$). Если X — произвольное множество и $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — некоторое отображение, то для $t \in \overline{\mathbb{R}}$ полагают

$$\{f \le t\} := \{x \in X : \ f(x) \le t\};$$

$$\{f = t\} := f^{-1}(t);$$

$$\{f < t\} := \{f \le t\} \setminus \{f = t\}.$$

Множества $\{f \le t\}$, $\{f = t\}$, $\{f < t\}$ называют *лебеговыми множествами* f. Помимо этого, множества $\{f = t\}$ называют *множествами уровня*.

3.8.2. *Лемма о задании функции лебеговыми множествами.* *Даны $T \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ — семейство подмножеств X. Существует функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \le t\} \quad (t \in T)$$

в том и только в том случае, если отображение $t \mapsto U_t$ возрастает.

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть T содержит не менее двух элементов s и t (в противном случае нечего доказывать). Если $s < t$, то

$$U_s \subset \{f \le s\} \subset \{f < t\} \subset U_t.$$

$\Leftarrow$: Положим $f(x) := \inf\{t \in T : \ x \in U_t\}$. Тем самым задано отображение $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Если для некоторого $t \in T$ множество $\{f < t\}$ пусто, то $\{f < t\} \subset U_t$. Если же $x \in \{f < t\}$, то $f(x) < +\infty$, а потому найдется элемент $s \in T$, удовлетворяющий соотношениям $x \in U_s$ и $s < t$. Итак, $\{f < t\} \subset U_s \subset U_t$. Помимо этого, если $x \in U_t$, то по определению f будет $f(x) \le t$, т. е. выполнено $U_t \subset \{f \le t\}$. $\rhd$

3.8.3. *Лемма о сравнении функций, заданных лебеговыми множествами.* *Пусть функции $f,\ g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ определены семействами $(U_t)_{t \in T}$ и $(V_t)_{t \in T}$ соответственно:*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \le t\};$$

$$\{g < t\} \subset V_t \subset \{g \leq t\} \quad (t \in T).$$

Пусть, далее, T плотно в $\overline{\mathbb{R}}$ (т. е. $(\forall r,\ t \in \overline{\mathbb{R}},\ r < t)\ (\exists s \in T)\ (r < s < t)$). Неравенство $f \leq g$ (в $\overline{\mathbb{R}}^X$, т. е. $f(x) \leq g(x)$ для $x \in X$) имеет место в том и только в том случае, если

$$t_1,\ t_2 \in T,\ t_1 < t_2 \Rightarrow V_{t_1} \subset U_{t_2}.$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: Следует из включений

$$V_{t_1} \subset \{g \leq t_1\} \subset \{f \leq t_1\} \subset \{f < t_2\} \subset U_{t_2}.$$

$\Leftarrow$: Пусть $g(x) \neq +\infty$ (иначе заведомо $f(x) \leq g(x)$). Для $t \in \mathbb{R}$ такого, что $g(x) < t < +\infty$, выберем $t_1,\ t_2 \in T$ из условий $g(x) < t_1 < t_2 < t$. Имеем

$$x \in \{g < t_1\} \subset V_{t_1} \subset U_{t_2} \subset \{f \leq t_2\} \subset \{f < t\}.$$

Итак, $f(x) < t$. Из-за произвольности t получаем: $f(x) \leq g(x)$. $\rhd$

3.8.4. *Следствие.* *Пусть T плотно в $\overline{\mathbb{R}}$ и семейство $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ возрастает. Существует, и притом единственная, функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, для которой*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\} \quad (t \in T).$$

Для лебеговых множеств f выполнены соотношения

$$\{f < t\} = \cup\ \{U_s :\ s < t,\ s \in T\};$$

$$\{f \leq t\} = \cap\{U_r :\ t < r,\ r \in T\} \quad (t \in \overline{\mathbb{R}}).$$

$\lhd$ Существование и единственность f обеспечены 3.8.2 и 3.8.3. Если $s < t, s \in T$, то $U_s \subset \{f \leq s\} \subset \{f < t\}$. Если же $f(x) < t$, то в силу плотности T найдется $s \in T$ так, что $f(x) < s < t$. Значит, $f \in \{f < s\} \subset U_s$, что доказывает формулу для $\{f < t\}$. Пусть теперь $r > t,\ r \in T$. Тогда $\{f \leq t\} \subset \{f < r\} \subset U_r$. В свою очередь, если $x \in U_r$ для $r \in T,\ r > t$, то будет выполнено $f(x) \leq r$ для всех $r > t$, откуда $f(x) \leq t$. $\rhd$

3.8.5. *Пусть X — векторное пространство и S — некоторый конический отрезок в нем. Для $t \in \mathbb{R}$ положим $U_t := \varnothing$, если $t < 0$, и $U_t := tS$ при $t \geq 0$. Отображение $t \mapsto U_t$ $(t \in \mathbb{R})$ возрастающее.*

$\triangleleft$ Если $0 \leq t_1 < t_2$ и $x \in t_1 S$, то $x \in (t_1/t_2)\, t_2 S$. Значит, $x \in t_2 S$. $\triangleright$

3.8.6. Определение. Функционал $p_S : X \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\{p_S < t\} \subset tS \subset \{p_S \leq t\} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

и $\{p < 0\} = \varnothing$, называют *функционалом Минковского* конического отрезка S. (Существование и единственность этого функционала обеспечивают 3.8.2, 3.8.4 и 3.8.5.) Иными словами,

$$p_S(x) = \inf\{t > 0 : \ x \in tS\} \quad (x \in X).$$

3.8.7. *Теорема о функционале Минковского.* *Функционал Минковского конического отрезка сублинеен и принимает положительные значения. Если, в свою очередь, p — некоторый сублинейный функционал с положительными значениями, то множества $\{p < 1\}$ и $\{p \leq 1\}$ суть конические отрезки. При этом p является функционалом Минковского любого конического отрезка S такого, что $\{p < 1\} \subset S \subset \{p \leq 1\}$.*

$\triangleleft$ Пусть S — некоторый конический отрезок и p_S — его функционал Минковского. Пусть $x \in X$. Неравенство $p_S(x) \geq 0$ очевидно. Возьмем $\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} p_S(\alpha x) = \inf\{t > 0 : \ \alpha x \in tS\} = \inf \left\{ t > 0 : \ x \in \frac{t}{\alpha} S \right\} = \\ = \inf\{\alpha\beta > 0 : \ x \in \beta S, \ \beta > 0\} = \\ = \alpha \inf\{\beta > 0 : \ x \in \beta S\} = \alpha p_S(x). \end{aligned}$$

Для проверки субаддитивности p_S возьмем $x_1, \ x_2 \in X$ и, заметив, что для $t_1, \ t_2 > 0$ выполнено $t_1 S + t_2 S \subset (t_1 + t_2) S$ (ибо имеет место тождество

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 = (t_1 + t_2) \left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} x_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} x_2 \right) \Bigg),$$

последовательно получаем

$$
\begin{gathered}
p_S(x_1+x_2)=\inf\{t>0:\ x_1+x_2\in tS\}\le\\
\le\inf\{t:\ t=t_1+t_2;\ t_1,\ t_2>0,\ x_1\in t_1S,\ x_2\in t_2S\}=\\
=\inf\{t_1>0:\ x_1\in t_1S\}+\inf\{t_2>0:\ x_2\in t_2S\}=p_S(x_1)+p_S(x_2).
\end{gathered}
$$

Пусть теперь $p: X\to\mathbb{R}^{\cdot}$ — произвольный сублинейный функционал с положительными значениями. Пусть $\{p<1\}\subset S\subset\{p\le 1\}$. Положим $V_t:=\{p<t\}, U_t:=tS$ для $t\in\mathbb{R}_+$ и $V_t:=U_t:=\varnothing$ при $t<0$. Ясно, что

$$
\{p_S<t\}\subset U_t\subset\{p_S\le t\};\quad \{p<t\}\subset V_t\subset\{p\le t\}
$$

для $t\in\mathbb{R}$. Если $0\le t_1<t_2$, то $V_{t_1}=\{p<t_1\}=t_1\{p<1\}\subset t_1S=U_{t_1}\subset U_{t_2}$. Кроме того, $U_{t_1}\subset t_1\{p\le 1\}\subset\{p\le t_1\}\subset\{p<t_2\}\subset V_{t_2}$. Значит, в силу 3.8.3 и 3.8.4, $p=p_S$. $\triangleright$

3.8.8. Замечание. Конический отрезок S в X является поглощающим множеством в том и только в том случае, если $\operatorname{dom}p_S=X$. Если же известно, что S абсолютно выпукло, то p_S — полунорма. При этом для любой полунормы p множества $\{p<1\}$ и $\{p\le 1\}$ являются абсолютно выпуклыми. $\triangleleft\triangleright$

3.8.9. Определение. Подпространство H данного векторного пространства X называют *гиперподпространством*, если X/H изоморфно основному полю. Элементы X/H называют *гиперплоскостями* в X (*параллельными* H). Под *гиперплоскостью* в X понимают аффинное многообразие, параллельное какому-либо гиперподпространству X. При необходимости гиперплоскости в вещественной основе $X_{\mathbb{R}}$ пространства X именуют *вещественными гиперплоскостями* в X.

3.8.10. *Гиперплоскости в X суть в точности множества уровня ненулевых элементов из $X^{\#}$.* $\triangleleft\triangleright$

3.8.11. *Теорема отделимости.* *Пусть X — векторное пространство, U — непустое выпуклое множество в X и L — аффинное многообразие в X. Если $L\cap U=\varnothing$, то найдется гиперплоскость H в X такая, что $H\supset L$ и $H\cap\operatorname{core}U=\varnothing$.*

$\lhd$ Не нарушая общности, можно считать, что $\operatorname{core} U \neq \varnothing$ (иначе нечего доказывать) и, более того, что $0 \in \operatorname{core} U$. Возьмем точку $x \in L$ и положим $X_0 := L - x$. Рассмотрим вектор-пространство X/X_0 и соответствующее каноническое отображение $\varphi : X \to X/X_0$. Привлекая 3.1.8 и 3.4.10, видим, что $\varphi(U)$ является поглощающим коническим отрезком. Значит, в силу 3.8.7 и 3.8.8 функционал Минковского $p := p_{\varphi(U)}$ таков, что $\operatorname{dom} p = X/X_0$ и, кроме того,

$$\varphi(\operatorname{core} U) \subset \operatorname{core} \varphi(U) \subset \{p < 1\} \subset \varphi(U).$$

Отсюда, в частности, следует, что $p(\varphi(x)) \geq 1$ либо $\varphi(x) \notin \varphi(U)$.

На основании 3.5.6 имеется функционал $\overline{f}$ из субдифференциала $\partial_x(p \circ \varphi)$. Учитывая теорему Хана — Банаха 3.5.3, выводим

$$\overline{f} \in \partial_x(p \circ \varphi) = \partial_{\varphi(x)}(p) \circ \varphi.$$

Положим $\overline{H} := \{\overline{f} = p \circ \varphi(x)\}$. Ясно, что $\overline{H}$ — это вещественная гиперплоскость в X. То, что $\overline{H} \supset L$, несомненно. Осталось сослаться на 3.5.2 (1), чтобы заключить: $\overline{H} \cap \operatorname{core} U = \varnothing$. Пусть теперь $f := \mathbf{Re}^{-1}\overline{f}$ и $H := \{f = f(x)\}$. Нет сомнений, что $L \subset H \subset \overline{H}$. Таким образом, гиперплоскость H — искомая. $\rhd$

3.8.12. Замечание. В условиях теоремы отделимости 3.8.11 можно считать, что $\operatorname{core} U \cap L = \varnothing$. Отметим здесь же, что теорему 3.8.11 часто называют *теоремой Хана — Банаха в геометрической форме* или же *теоремой Минковского — Асколи — Мазура*.

3.8.13. Определение. Пусть U, V — множества в X и H — вещественная гиперплоскость в X. Говорят, что H *разделяет* U *и* V, если эти множества лежат в разных полупространствах, определяемых H, т. е. если существует представление $H = \{f \leq t\}$, где $f \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$ и $t \in \mathbb{R}$, для которого $V \subset \{f \leq t\}$ и $U \subset \{f \geq t\} := \{-f \leq -t\}$.

3.8.14. ***Теорема отделимости Эйдельгайта.*** *Пусть U и V — непустые выпуклые множества, причем ядро V не пусто и не пересекается с U. Тогда найдется вещественная гиперплоскость, разделяющая U и V и не содержащая точек ядра V.* $\lhd\rhd$

Упражнения

3.1. Установить, что гиперплоскостями служат в точности максимальные по включению аффинные множества, не совпадающие со всем пространством.

3.2. Доказать, что каждое аффинное множество представляет собой пересечение гиперплоскостей.

3.3. Доказать, что в вещественном векторном пространстве дополнение гиперплоскости состоит из двух выпуклых множеств, каждое из которых совпадает со своим ядром. Такие множества именуют открытыми полупространствами. Объединение открытого полупространства с исходной гиперплоскостью называют замкнутым полупространством. Найти способы задания полупространств.

3.4. Найти возможные представления элементов выпуклой оболочки конечного числа точек. Как учесть конечномерность пространства, в котором ведется рассмотрение?

3.5. Для множеств S_1 и S_2 полагают $S = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \lambda S_1 \cap (1-\lambda) S_2$. Доказать, что S выпукло при условии выпуклости S_1 и S_2.

3.6. Вычислить функционалы Минковского полупространства, конуса, выпуклой оболочки объединения и пересечения конических отрезков.

3.7. Пусть $S := \{p + q \le 1\}$, где $p,\ q$ — функционалы Минковского конических отрезков S_p и S_q. Выразить S через S_p и S_q.

3.8. Описать сублинейные функционалы, определенные на $\mathbb{R}^N$.

3.9. Вычислить субдифференциал максимума конечного числа линейных функционалов.

3.10. Пусть $p,\ q$ — сублинейные функционалы, находящиеся в общем положении, т. е. такие, что

$$\operatorname{dom} p - \operatorname{dom} q = \operatorname{dom} q - \operatorname{dom} p.$$

Доказать симметричную формулу Хана — Банаха (ср. 3.5.7)

$$\partial(p + q) = \partial p + \partial q.$$

3.11. Пусть $p,\ q : X \to \mathbb{R}$ — всюду определенные на X сублинейные функционалы. Тогда выполнено равенство

$$\partial(p \vee q) = \operatorname{co}(\partial p \cup \partial q).$$

3.12. Найти функционал Минковского шара с необязательно нулевым центром симметрии в гильбертовом пространстве.

3.13. Симметричную квадратную 2×2-матрицу назовем положительной, если у нее положительные собственные числа. Согласован ли возникающий порядок в пространстве таких матриц с векторной структурой? Определяет ли он структуру пространства Канторовича?

3.14. На каждом ли упорядоченном векторном пространстве можно задать нетривиальный положительный функционал?

3.15. Какими способами $\mathbb{R}^N$ можно превратить в K-пространство?

3.16. При каких условиях заключение теоремы Хана — Банаха в аналитической форме выполнено для не всюду определенного сублинейного функционала?

3.17. Для стандартной нормы в l_∞ найти крайние точки ее субдифференциала.

3.18. Найти возможные обобщения теоремы Хана — Банаха для отображений, действующих в пространства Канторовича.

3.19. Для множества C в пространстве X определить преобразование Хёрмандера $H(C)$ соотношением

$$H(C) = \{(x,\ t) \in X \times \mathbb{R} : x \in tC\}.$$

Изучить свойства преобразования Хёрмандера.

Глава 4

Экскурс в метрические пространства

4.1. Равномерность и топология метрического пространства

4.1.1. Определение. Отображение $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ называют *метрикой* на X, если

(1) $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x,\ y) = d(y,\ x)\ (x,\ y \in X)$;

(3) $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)\ (x,\ y,\ z \in X)$.

Пару $(X,\ d)$ называют *метрическим пространством.* Вещественное число $d(x,\ y)$ обычно именуют *расстоянием* между x и y. Допуская вольность речи, само множество X в этой ситуации также называют метрическим пространством.

4.1.2. *Отображение* $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ *является метрикой в том и только в том случае, если*

(1) $\{d \leq 0\} = I_X$;

(2) $\{d \leq t\} = \{d \leq t\}^{-1}\ (t \in \mathbb{R}_+)$;

(3) $\{d \leq t_1\} \circ \{d \leq t_2\} \subset \{d \leq t_1 + t_2\}\ (t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$.

$\lhd$ Свойства 4.1.2 (1)–4.1.2 (3) суть переформулировки 4.1.1 (1)–4.1.1 (3) соответственно. $\rhd$

4.1.3. Определение. Пусть $(X,\ d)$ — метрическое пространство и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$. Множество $B_\varepsilon := B_{d,\varepsilon} := \{d \leq \varepsilon\}$ называют *замкнутым цилиндром* (порядка ε), а множество $\overset{\circ}{B}_\varepsilon := \overset{\circ}{B}_{d,\varepsilon} := \{d < \varepsilon\}$ —

открытым цилиндром (порядка ε). Образ $B_\varepsilon(x)$ точки x при соответствии B_ε называют *замкнутым шаром* радиуса ε с центром в x. Аналогично множество $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x)$ называют *открытым шаром* радиуса ε с центром x.

4.1.4. *Открытые цилиндры, ра́вно как и замкнутые цилиндры непустого метрического пространства, составляют базисы одного и того же фильтра.* $\triangleleft\triangleright$

4.1.5. Определение. Фильтр, порожденный цилиндрами непустого метрического пространства $(X,\ d)$ в множестве X^2, называют *метрической равномерностью* и обозначают $\mathscr{U}_X$, или $\mathscr{U}_d$, или, наконец, просто $\mathscr{U}$, если нет сомнений, о каком пространстве идет речь. При $X := \varnothing$ полагают $\mathscr{U}_X := \{\varnothing\}$. Элементы равномерности $\mathscr{U}_X$ называют *окружениями* (*диагонали*).

4.1.6. *Пусть $\mathscr{U}$ — метрическая равномерность. Тогда*

(1) $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U})\ (\exists V \in \mathscr{U})\ V \circ V \subset U$;

(4) $\cap\{U :\ U \in \mathscr{U}\} = I_X$. $\triangleleft\triangleright$

4.1.7. Замечание. Свойство 4.1.6 (4), связанное с 4.1.1 (1), часто называют *хаусдорфовостью* $\mathscr{U}$.

4.1.8. *Для пространства X с равномерностью $\mathscr{U}_X$ положим*

$$\tau(x) := \{U(x) :\ U \in \mathscr{U}\}.$$

Тогда $\tau(x)$ — фильтр для каждого $x \in X$. При этом

(1) $\tau(x) \subset \operatorname{fil}\{x\}$;

(2) $(\forall U \in \tau(x))\ (\exists V \in \tau(x)\ \&\ V \subset U)\ (\forall y \in V)\ U \in \tau(y)$. $\triangleleft\triangleright$

4.1.9. Определение. Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ называют *метрической топологией*, а элементы $\tau(x)$ — *окрестностями* точки x. Для обозначения топологии используют также и более полные обозначения: τ_X, $\tau(\mathscr{U})$ и т. п.

4.1.10. Замечание. Замкнутые шары с центром в некоторой точке составляют базис фильтра окрестностей этой точки. То же верно и для открытых шаров. Отметим еще, что у различных точек в X существуют непересекающиеся окрестности. Это свойство, связанное с 4.1.6 (4), называют *хаусдорфовостью* τ_X.

4.1.11. Определение. Множество G в X называют *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки (символически: $G \in \mathrm{Op}(\tau) \Leftrightarrow ((\forall x \in G)\ G \in \tau(x)))$. Множество F в X называют *замкнутым*, если его дополнение открыто (символически: $F \in \mathrm{Cl}(\tau) \Leftrightarrow (X \setminus F \in \mathrm{Op}(\tau)))$.

4.1.12. *Объединение любого семейства и пересечение конечного семейства открытых множеств суть множества открытые. Пересечение любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых множеств суть множества замкнутые.* $\lhd\rhd$

4.1.13. Определение. Для множества U в X полагают

$$\operatorname{int} U := \overset{\circ}{U} := \cup\{G \in \mathrm{Op}(\tau_X) : \ G \subset U\};$$
$$\operatorname{cl} U := \overline{U} := \cap\{F \in \mathrm{Cl}(\tau_X) : \ F \supset U\}.$$

Множество $\operatorname{int} U$ называют *внутренностью* U, а его элементы — *внутренними точками* U. Множество $\operatorname{cl} U$ называют *замыканием* U, а его элементы — *точками прикосновения* U. Внутренность дополнения $X \setminus U$ называют *внешностью* U, а элементы внешности — *внешними точками* U. Точки пространства X, не являющиеся ни внешними, ни внутренними для U, называют *граничными точками* U. Совокупность всех граничных точек U называют *границей* U и обозначают $\operatorname{fr} U$ или ∂U.

4.1.14. *Множество U является окрестностью точки x в том и только в том случае, если x — внутренняя точка U.* $\lhd\rhd$

4.1.15. Замечание. В связи с предложением 4.1.14 множество $\mathrm{Op}(\tau_X)$ также часто называют топологией X, имея в виду, что τ_X однозначно восстанавливается по $\mathrm{Op}(\tau_X)$. Последнее, разумеется, относится и к совокупности $\mathrm{Cl}(\tau_X)$ всех замкнутых множеств в X.

4.1.16. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X. Говорят, что $\mathscr{B}$ *сходится к точке* x из X или что x — это *предел* $\mathscr{B}$ (и пишут: $\mathscr{B} \to x$), если $\operatorname{fil} \mathscr{B}$ тоньше фильтра окрестностей точки x, т. е. $\operatorname{fil} \mathscr{B} \supset \tau(x)$.

4.1.17. Определение. Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это (обобщенная) последовательность в X. Говорят, что рассматриваемая *последовательность сходится к* x (пишут: $x_\xi \to x$), если к x сходится фильтр хвостов этой последовательности. Используют и другие распространенные обозначения и обороты. Например, $x = \lim_\xi x_\xi$ и x — предел (x_ξ), когда ξ пробегает Ξ.

4.1.18. Замечание. Предел фильтра, как и предел обобщенной последовательности, единствен. Этот факт есть другое выражение хаусдорфовости топологии. $\triangleleft\triangleright$

4.1.19. *Для непустого множества U и точки x равносильны следующие утверждения*:

(1) *точка x является точкой прикосновения U*;
(2) *существует фильтр $\mathscr{F}$ такой, что $\mathscr{F} \to x$ и $U \in \mathscr{F}$*;
(3) *существует последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов U, сходящаяся к точке x.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Так как x не является внешней точкой U, то фильтры $\tau(x)$ и $\mathrm{fil}\,\{U\}$ имеют точную верхнюю границу $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $\mathscr{F} \to x$ и $U \in \mathscr{F}$. Превратим $\mathscr{F}$ в направление с помощью порядка, противоположного порядку по включению. Возьмем $x_V \in V \cap U$ для $V \in \mathscr{F}$. Ясно, что $x_V \to x$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть V — замкнутое множество, $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — последовательность элементов V и $x_\xi \to x$. Достаточно показать, что в этом случае $x \in V$. Последнее очевидно, ибо при $x \in X \setminus V$ хотя бы для одного $\xi \in \Xi$ было бы $x_\xi \in X \setminus V$. $\triangleright$

4.1.20. Замечание. В условиях метрического пространства в 4.1.19 (2) можно считать, что фильтр $\mathscr{F}$ имеет счетный базис, а в 4.1.19 (3) — что $\Xi := \mathbb{N}$. Указанное обстоятельство иногда выражают словами: «метрические пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности».

4.2. Непрерывность и равномерная непрерывность

4.2.1. *Пусть $f : X \to Y$ и τ_X, τ_Y — топологии в X и Y соответственно. Эквивалентны утверждения*:

(1) $G \in \operatorname{Op}(\tau_Y) \Rightarrow f^{-1}(G) \in \operatorname{Op}(\tau_X)$;

(2) $F \in \operatorname{Cl}(\tau_Y) \Rightarrow f^{-1}(F) \in \operatorname{Cl}(\tau_X)$;

(3) $f(\tau_X(x)) \supset \tau_Y(f(x))$ *при всех* $x \in X$;

(4) $(x \in X,\ \mathscr{F} \to x) \Rightarrow (f(\mathscr{F}) \to f(x))$ *для фильтра* $\mathscr{F}$;

(5) $f(x_\xi) \to f(x)$, *каковы бы ни были точка* x *и сходящаяся к ней последовательность* (x_ξ).

$\triangleleft$ Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из 4.1.11. Остается проверить, что (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (3): Если $V \in \tau_Y(f(x))$, то $W := \operatorname{int} V \in \operatorname{Op}(\tau_Y)$ и $f(x) \in W$. Отсюда $f^{-1}(W) \in \operatorname{Op}(\tau_X)$ и $x \in f^{-1}(W)$. Иначе говоря, $f^{-1}(W) \in \tau_X(x)$ (см. 4.1.14). Помимо этого, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(W)$ и, следовательно, $f^{-1}(V) \in \tau_X(x)$. Наконец, $V \supset f(f^{-1}(V))$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Если $\mathscr{F} \to x$, то $\operatorname{fil} \mathscr{F} \supset \tau_X(x)$ по определению 4.1.16. Привлекая условие, выводим $f(\mathscr{F}) \supset f(\tau_X(x)) \supset \tau_Y(f(x))$. Повторная апелляция к 4.1.16 дает $f(\mathscr{F}) \to f(x)$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Образ фильтра хвостов последовательности $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ при отображении f грубее фильтра хвостов $(f(x_\xi))_{\xi\in\Xi}$.

(5) $\Rightarrow$ (2): Пусть F — замкнутое подмножество в Y. Если $F = \varnothing$, то $f^{-1}(F)$ также пусто, а потому и замкнуто. Пусть F непусто и x — точка прикосновения $f^{-1}(F)$. Рассмотрим последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек из $f^{-1}(F)$, сходящуюся к x (ее существование обеспечено 4.1.18). Тогда $f(x_\xi) \in F$ и $f(x_\xi) \to f(x)$. Вновь применяя 4.1.18, видим, что $f(x) \in F$ и, стало быть, $x \in f^{-1}(F)$. $\triangleright$

4.2.2. Определение. Отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных утверждений 4.2.1 (1)–4.2.1 (5), (как хорошо известно) называют *непрерывным*. Если при этом 4.2.1 (5) выполнено в фиксированной точке $x \in X$, то говорят, что f *непрерывно в точке* x. Стало быть, f непрерывно на X в том и только в том случае, если f непрерывно в каждой точке X.

4.2.3. *Суперпозиция непрерывных отображений непрерывна.*

$\triangleleft$ Следует трижды применить 4.2.1 (5). $\triangleright$

4.2.4. *Пусть* $f : X \to Y$ *и* $\mathscr{U}_X$, $\mathscr{U}_Y$ *— равномерности в* X *и* Y *соответственно. Эквивалентны утверждения*:

(1) $(\forall V \in \mathscr{U}_Y)\ (\exists U \in \mathscr{U}_X)\ (\forall x,\ y)(x,\ y) \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow (f(x),\ f(y)) \in V$;

(2) $(\forall V \in \mathscr{U}_Y)\ f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X$;

(3) $f^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y$, где $f^{\times} : X^2 \to Y$ *действует по правилу* $f^{\times} : (x,\ y) \mapsto (f(x),\ f(y))$;

(4) $(\forall\, V \in \mathscr{U}_Y)\ f^{\times -1}(V) \in \mathscr{U}_X$, *т. е.* $f^{\times -1}(\mathscr{U}_Y) \subset \mathscr{U}_X$.

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что по 1.1.10 для $U \subset X^2$ и $V \subset Y^2$ выполнено

$$f^{-1} \circ V \circ f = \bigcup_{(v_1, v_2) \in V} f^{-1}(v_1) \times f^{-1}(v_2) =$$
$$= \{(x, y) \in X^2 :\ (f(x),\ f(y)) \in V\} = f^{\times -1}(V);$$
$$f \circ U \circ f^{-1} = \bigcup_{(u_1, u_2) \in U} f(u_1) \times f(u_2) =$$
$$= \{(f(u_1),\ f(u_2)) :\ (u_1,\ u_2) \in U\} = f^{\times}(U).\ \triangleright$$

4.2.5. Определение. Отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных утверждений 4.2.4 (1)–4.2.4 (4), (как хорошо известно) называют ***равномерно непрерывным***.

4.2.6. *Суперпозиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.*

$\triangleleft$ Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и $h := g \circ f : X \to Z$. Ясно, что

$$h^{\times}(x,\ y) = (h(x),\ h(y)) = (g(f(x)),\ g(f(y))) =$$
$$= g^{\times}(f(x),\ f(y)) = g^{\times} \circ f^{\times}(x,\ y)$$

для всех x, y из X. Значит, $h^{\times}(\mathscr{U}_X) = g^{\times}(f^{\times}(\mathscr{U}_X)) \supset g^{\times}(\mathscr{U}_Y) \supset \mathscr{U}_Z$ в силу 4.2.4 (3). Вновь апеллируя к 4.2.4 (3), видим, что h равномерно непрерывно. $\triangleright$

4.2.7. *Равномерно непрерывное отображение непрерывно.* $\triangleleft\triangleright$

4.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — множество отображений из X в Y и $\mathscr{U}_X$, $\mathscr{U}_Y$ — соответствующие равномерности. Множество $\mathscr{E}$ называют ***равностепенно*** (***равномерно***) ***непрерывным***, если

$$(\forall\, V \in \mathscr{U}_Y)\ \bigcap_{f \in \mathscr{E}} f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X.$$

4.2.9. *Равностепенно непрерывное множество отображений состоит из равномерно непрерывных отображений. Конечное множество равномерно непрерывных отображений равностепенно непрерывно.* $\triangleleft\triangleright$

4.3. Полунепрерывность

4.3.1. *Пусть $(X_1,\ d_1)$ и $(X_2,\ d_2)$ — метрические пространства. Пусть, далее, $\mathscr{X} := X_1 \times X_2$. Для $\overline{x} := (x_1,\ x_2)$ и $\overline{y} := (y_1,\ y_2)$ положим*

$$d(\overline{x},\ \overline{y}) := d_1(x_1,\ y_1) + d_2(x_2,\ y_2).$$

Тогда d — метрика на $\mathscr{X}$. При этом для любого $\overline{x} := (x_1,\ x_2) \in \mathscr{X}$ справедливо представление

$$\tau_{\mathscr{X}}(\overline{x}) = \mathrm{fil}\{U_1 \times U_2 :\ U_1 \in \tau_{X_1}(x_1),\ U_2 \in \tau_{X_2}(x_2)\}. \ \triangleleft\triangleright$$

4.3.2. Определение. Топологию $\tau_{\mathscr{X}}$ называют ***произведением топологий*** τ_{X_1} ***и*** τ_{X_2} или ***топологией произведения*** X_1 и X_2 и обозначают $\tau_{X_1} \times \tau_{X_2}$.

4.3.3. Определение. Функцию $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют ***полунепрерывной снизу***, если ее надграфик $\mathrm{epi}\, f$ — замкнутое множество в топологии произведения X и $\mathbb{R}$.

4.3.4. Примеры.

(1) Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу.

(2) Если $f_\xi : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунепрерывная снизу функция для каждого $\xi \in \Xi$, то верхняя огибающая $f(x) := \sup\{f_\xi(x) :\ \xi \in \Xi\}$ $(x \in X)$ также полунепрерывная снизу функция, так как $\mathrm{epi}\, f = \bigcap_{\xi\in\Xi} \mathrm{epi}\, f_\xi$.

4.3.5. *Функция $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ полунепрерывна снизу в том и только в том случае, если выполнено*

$$x \in X \Rightarrow f(x) = \lim_{y\to x} \inf f(y).$$

Здесь, как обычно,

$$\lim_{y\to x} \inf f(y) := \varliminf_{y\to x} f(y) := \sup_{U\in\tau(x)} \inf f(U)$$

— ***нижний предел функции*** f ***в точке*** x (*по фильтру* $\tau(x)$).

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Если $x \notin \mathrm{dom}\, f$, то $(x,\ t) \notin \mathrm{epi}\, f$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. Значит, имеется окрестность U_t точки x, где $\inf f(U_t) > t$. Отсюда вытекает: $\lim_{y\to x} \inf f(y) = +\infty = f(x)$. Если же $x \in \mathrm{dom}\, f$, то $\inf f(V) > -\infty$ для подходящей окрестности V точки x. Выберем $\varepsilon > 0$ и для любой $U \in \tau(x)$, лежащей в V, подыщем точку $x_U \in U$ из условия $\inf f(U) \geq f(x_U) - \varepsilon$. По построению $x_U \in \operatorname{dom} f$ и, кроме того, $x_U \to x$ (при введении естественного порядка в множество окрестностей точки x). Положим $t_U := \inf f(U) + \varepsilon$. Ясно, что $t_U \to t := \liminf_{y \to x} f(y) + \varepsilon$. Поскольку $(x_U,\ t_U) \in \operatorname{epi} f$, то $(x,\ t) \in \operatorname{epi} f$ в силу замкнутости надграфика f. Окончательно

$$\liminf_{y \to x} f(y) + \varepsilon \geq f(x) \geq \liminf_{y \to x} f(y).$$

$\Leftarrow$: Если $(x,\ t) \notin \operatorname{epi} f$, то

$$t < \liminf_{y \to x} f(y) = \sup \inf_{U \in \tau(x)} f(U).$$

Таким образом, $\inf f(U) > t$ для некоторой окрестности U точки x.

Отсюда вытекает, что дополнение $(X \times \mathbb{R}) \setminus \operatorname{epi} f$ открыто. $\triangleright$

4.3.6. Замечание. Свойство, указанное в предложении 4.3.5, можно принять за основу определения полунепрерывности снизу в точке.

4.3.7. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в том и только в том случае, если f и $-f$ полунепрерывны снизу.* $\triangleleft\triangleright$

4.3.8. *Функция $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ полунепрерывна снизу в том и только в том случае, если для всякого $t \in \mathbb{R}$ замкнуто лебегово множество $\{f \leq t\}$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Если $x \notin \{f \leq t\}$, то $t < f(x)$. На основании 4.3.5 в подходящей окрестности U точки x будет $t < \inf f(U)$. Иначе говоря, дополнение $X \setminus \{f \leq t\}$ открыто.

$\Leftarrow$: Пусть для каких-нибудь $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\liminf_{y \to x} f(y) \leq t < f(x)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ из условия $t + \varepsilon < f(x)$ и, используя рассуждения доказательства 4.3.5, для $U \in \tau(x)$ найдем точку x_U из $U \cap \{f \leq \inf f(U) + \varepsilon\}$. Бесспорно, $x_U \in \{f \leq t + \varepsilon\}$ и $x_U \to x$. Приходим к противоречию. $\triangleright$

4.4. Компактность

4.4.1. Определение. Пусть C — множество в X. Множество C называют *компактным*, если для каждого множества $\mathscr{E} \subset \mathrm{Op}(\tau_X)$ такого, что $C \subset \cup\{G : G \in \mathscr{E}\}$, существует конечное подмножество $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, удовлетворяющее соотношению $C \subset \cup\{G : G \in \mathscr{E}_0\}$.

4.4.2. Замечание. Определение 4.4.1 часто выражают словами: «множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие».

4.4.3. *Замкнутое подмножество компактного множества является компактным. Компактное множество замкнуто.* $\triangleleft\triangleright$

4.4.4. Замечание. В связи с 4.4.3 используют понятие *относительно компактного множества*, т. е. множества, замыкание которого компактно.

4.4.5. ***Теорема Вейерштрасса.*** *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

$\triangleleft$ Прообразы множеств из открытого покрытия образа составляют открытое покрытие исходного множества. $\triangleright$

4.4.6. *Полунепрерывная снизу функция принимает на непустом компактном множестве наименьшее значение* (*т. е. образ такого множества имеет наименьший элемент*).

$\triangleleft$ Будем считать, что $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ и X компактно. Пусть $t_0 := \inf f(X)$. Если $t_0 = +\infty$, то доказывать нечего. Если же $t_0 < +\infty$, то положим $T := \{t \in \mathbb{R} : t > t_0\}$. Множество $U_t := \{f \le t\}$ для $t \in T$ непусто и замкнуто. Докажем, что $\cap\{U_t : t \in T\}$ непусто (тогда любой элемент x указанного пересечения — искомый: $f(x) = \inf f(X)$).

Предположим противное. Тогда множество $\{G_t := X \setminus U_t : t \in T\}$ образует открытое покрытие X. Выделяя из него конечное подпокрытие $\{G_t : t \in T_0\}$, выводим: $\cap\{U_t : t \in T_0\} = \varnothing$. Последнее соотношение ложно, поскольку $U_{t_1} \cap U_{t_2} = U_{t_1 \wedge t_2}$ при $t_1,\ t_2 \in T$. $\triangleright$

4.4.7. ***Критерий Бурбаки.*** *Пространство является компактным в том и только в том случае, если каждый ультрафильтр в нем сходится* (*ср.* 9.4.4).

4.4.8. *Произведение компактных пространств компактно.*

$\lhd$ Достаточно дважды применить критерий Бурбаки. $\rhd$

4.4.9. ***Теорема Кантора.*** *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.* $\lhd\rhd$

4.5. Полнота

4.5.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X. Тогда $\{B^2 : B \in \mathscr{B}\}$ — базис фильтра $\mathscr{B}^\times$ в X^2.*

$\lhd$ $(B_1 \times B_1) \cap (B_2 \times B_2) \supset (B_1 \cap B_2) \times (B_1 \cap B_2)$ $\rhd$

4.5.2. Определение. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X и $\mathscr{U}_X$ — равномерность в X. Фильтр $\mathscr{F}$ называют *фильтром Коши*, если $\mathscr{F}^\times \supset \mathscr{U}_X$. Сеть в X называют *сетью Коши* или *фундаментальной сетью*, если фильтр ее хвостов есть фильтр Коши. Аналогичный смысл вкладывают в термин «*фундаментальная последовательность*».

4.5.3. Замечание. Если V — окружение в X^2, а U — множество в X, то говорят, что U *мало порядка* V, если $U^2 \subset V$. В частности, U мало порядка B_ε в том и только в том случае, если *диаметр* $\operatorname{diam} U := \sup(U^2)$ не больше ε. В связи с указанной терминологией определение фильтра Коши выражают словами: «фильтр является фильтром Коши в том и только в том случае, если он содержит сколь угодно малые множества».

4.5.4. *Для метрического пространства эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *каждый фильтр Коши сходится*;
(2) *каждая сеть Коши имеет предел*;
(3) *любая фундаментальная последовательность сходится.*

$\lhd$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны, поэтому установим только импликацию (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $U_n \in \mathscr{F}$ — множество, малое порядка $B_{1/n}$. Положим $V_n := U_1 \cap \ldots \cap U_n$ и возьмем $x_n \in V_n$. Имеем, что $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ и $\operatorname{diam} V_n \le 1/n$. Следовательно, (x_n) — фундаментальная последовательность. Значит, есть предел: $x := \lim x_n$. Покажем, что $\mathscr{F} \to x$. Для этого выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ из условия: $d(x_m,\ x) \le 1/2n$ при $m \ge n_0$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ будет $d(x_p,\ y) \le \operatorname{diam} V_p \le 1/2n$ и

$d(x_p,\ x) \le 1/2n$, если только $p := n_0 \vee 2n$ и $y \in V_p$. Отсюда вытекает, что $y \in V_p \Rightarrow d(x,\ y) \le 1/n$, т. е. $V_p \subset B_{1/n}(x)$. Окончательно заключаем: $\mathscr{F} \supset \tau(x)$. $\rhd$

4.5.5. Определение. Метрическое пространство, удовлетворяющее одному (а потому и любому) из эквивалентных утверждений 4.5.4 (1)–4.5.4 (3), (как хорошо известно) называют *полным*.

4.5.6. ***Критерий Кантора.*** *Метрическое пространство полно в том и только в том случае, если всякое фильтрованное по убыванию непустое семейство его непустых замкнутых подмножеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Если $\mathscr{B}$ — подобное семейство множеств, то, по определению 1.3.1, $\mathscr{B}$ — базис фильтра. По условию $\mathscr{B}$ — базис фильтра Коши, т. е. существует предел: $\mathscr{B} \to x$. Точка x — искомая.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр Коши. Положим $\mathscr{B} := \{\operatorname{cl} V :\ V \in \mathscr{F}\}$. Диаметры множеств из $\mathscr{B}$ стремятся к нулю. Стало быть, найдется точка x такая, что $x \in \operatorname{cl} V$ при каждом $V \in \mathscr{F}$. Ясно, что $\mathscr{F} \to x$. В самом деле, пусть V — множество из $\mathscr{F}$ малое порядка $\varepsilon/2$ и $y \in V$. Для некоторого $y' \in V$ будет $d(x,\ y') \le \varepsilon/2$ и, значит, $d(x,\ y) \le d(x,\ y') + d(y',\ y) \le \varepsilon$, т. е., следовательно, $V \subset B_\varepsilon(x)$ и, значит, $B_\varepsilon(x) \in \mathscr{F}$. $\rhd$

4.5.7. *Метрическое пространство полно в том и только в том случае, если любая последовательность вложенных шаров* $B_{\varepsilon_1}(x_1) \supset \ldots \supset B_{\varepsilon_n}(x_n) \supset B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \supset \ldots$, *радиусы* (ε_n) *которых стремятся к нулю, имеет общую точку.* $\lhd\rhd$

4.5.8. *Образ фильтра Коши при равномерно непрерывном отображении — фильтр Коши.*

$\lhd$ Пусть отображение f действует из пространства X с равномерностью $\mathscr{U}_X$ в пространство Y с равномерностью $\mathscr{U}_Y$. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в X. Если $V \in \mathscr{U}_Y$, то $f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X$ по определению 4.2.5 (см. 4.2.4 (2)). Поскольку $\mathscr{F}$ — фильтр Коши, то при подходящем $U \in \mathscr{F}$ будет $U^2 \subset f^{-1} \circ V \circ f$. Оказывается, что $f(U)$ мало порядка V. В самом деле,

$$f(U)^2 = \bigcup_{(u_1,u_2)\in U^2} f(u_1) \times f(u_2) =$$

$$= f \circ U^2 \circ f^{-1} \subset f \circ (f^{-1} \circ V \circ f) \circ f^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ V \circ (f \circ f^{-1}) \subset U,$$

ибо, на основании 1.1.6, $f \circ f^{-1} = I_{\operatorname{im} f} \subset I_Y$. $\rhd$

4.5.9. *Произведение полных пространств — полно.*

◁ Следует применить 4.5.8 и 4.5.4. ▷

4.5.10. *Пусть X_0 плотно в X (т. е. $\operatorname{cl} X_0 = X$) и $f_0 : X_0 \to Y$ — равномерно непрерывное отображение из X_0 в полное пространство Y. Тогда существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $f : X \to Y$, продолжающее f_0, т. е. такое, что $f|_{X_0} = f_0$.*

◁ Для $x \in X$ фильтр $\mathscr{F}_x := \{U \cap X_0 : \ U \in \tau_X(x)\}$ является фильтром Коши в X_0. Стало быть, из 4.5.8 можно вывести, что $f_0(\mathscr{F}_X)$ — фильтр Коши в Y. В силу полноты Y существует предел $y \in Y$, т. е. $f_0(\mathscr{F}_x) \to y$. Более того, этот предел единствен (ср. 4.1.18). Полагаем $f(x) := y$. Остается провести несложную проверку равномерной непрерывности отображения f. ▷

4.5.11. Определение. Отображение $f : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ называют *изометрией X в $\widehat{X}$* (или *изометрическим вложением*), если $d = \widehat{d} \circ f^{\times}$. Отображение f называют *изометрией X на $\widehat{X}$* (короче, *изометрией*), если f — изометрия X в $\widehat{X}$ и, кроме того, $\operatorname{im} f = \widehat{X}$.

4.5.12. ***Теорема Хаусдорфа о пополнении.*** *Пусть $(X,\ d)$ — метрическое пространство. Тогда существуют полное метрическое пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$ и изометрия $\iota : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ на плотное подпространство в $(\widehat{X},\ \widehat{d})$. Пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$ единственно с точностью до изометрии в том смысле, что любая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & (\widehat{X},\widehat{d}) \arrow[d, "\Psi"] \\
& (\widehat{X}_1,\widehat{d}_1)
\end{tikzcd}$$

где $\iota_1 : (X,\ d) \to (\widehat{X}_1,\ \widehat{d}_1)$ — изометрия X на плотное подпространство полного пространства $(\widehat{X}_1,\ \widehat{d}_1)$, достраивается до коммутативной диаграммы с помощью изометрии $\Psi : (\widehat{X},\ \widehat{d}) \to (\widehat{X}_1,\ \widehat{d}_1)$ пространства $\widehat{X}$ и пространства $\widehat{X}_1$.

◁ Единственность с точностью до изометрии вытекает из 4.5.10. В самом деле, пусть $\Psi_0 := \iota_1 \circ \iota^{-1}$. Тогда Ψ_0 — изометрия плотного подпространства $\iota(X)$ в $\widehat{X}$ на плотное подпространство $\iota_1(X)$ в $\widehat{X}_1$.

Возьмем в качестве Ψ единственное продолжение Ψ_0 на $\widehat{X}$. Следует проверить только, что Ψ действует на $\widehat{X}_1$. Выберем $\widehat{x}_1$ из $\widehat{X}_1$. Этот элемент есть предел последовательности $(\iota_1(x_n))$, где $x_n \in X$. Понятно, что (x_n) фундаментальная. Стало быть, фундаментальна последовательность $(\iota(x_n))$ в $\widehat{X}$. Пусть $\widehat{x} := \lim \iota(x_n)$, $\widehat{x} \in \widehat{X}$. При этом $\Psi(\widehat{x}) = \lim \Psi_0(\iota(x_n)) = \lim \iota_1 \circ \iota^{-1}(\iota(x_n)) = \lim \iota_1(x_n) = \widehat{x}_1$.

Наметим теперь схему доказательства существования $\widehat{X}$. Рассмотрим множество $\mathscr{X}$ всех фундаментальных последовательностей в пространстве X. Определим в $\mathscr{X}$ отношение эквивалентности так: $\overline{x}_1 \sim \overline{x}_2 \Leftrightarrow d(\overline{x}_1(n),\ \overline{x}_2(n)) \to 0$. Пусть $\widehat{X} := \mathscr{X}/\!\sim$ и $\widehat{d}(\varphi(\overline{x}_1), \varphi(\overline{x}_2)) := \lim d(\overline{x}_1(n), \overline{x}_2(n))$, где $\varphi : \mathscr{X} \to \widehat{X}$ — каноническое отображение. Изометрия $\iota : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ строится так: $\iota(x) := \varphi(n \mapsto x\ (n \in \mathbb{N}))$. $\rhd$

4.5.13. Определение. Пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$, фигурирующее в 4.5.12, ра́вно как и любое изометричное ему пространство, называют *пополнением* пространства $(X,\ d)$.

4.5.14. Определение. Множество X_0 в $(X,\ d)$ называют *полным*, если полным является пространство $(X_0,\ d|_{X_0^2})$ — подпространство $(X,\ d)$.

4.5.15. *Замкнутое подмножество полного пространства является полным. Полное множество замкнуто.* $\lhd\rhd$

4.5.16. *Пусть X_0 — подпространство некоторого полного метрического пространства X. Тогда пополнение X_0 изометрично замыканию X_0 в X.*

$\lhd$ Пусть $\widehat{X} := \operatorname{cl} X_0$ и $\iota : X_0 \to \widehat{X}$ — тождественное вложение. Ясно, что ι — изометрия на плотное подпространство. При этом $\widehat{X}$ полно в силу 4.5.15. Осталось сослаться на 4.5.12. $\rhd$

4.6. Компактность и полнота

4.6.1. *Компактное пространство полно.* $\lhd\rhd$

4.6.2. Определение. Пусть U — множество в X и $V \in \mathscr{U}_X$. Множество E в X называют *V-сетью* для U, если $U \subset V(E)$.

4.6.3. Определение. Множество называют *вполне ограниченным*, если для каждого V из $\mathscr{U}_X$ у него имеется конечная V-сеть.

4.6.4. *Если для любого V из $\mathscr{U}_X$ у множества U в X есть вполне ограниченная V-сеть, то U — вполне ограниченное множество.*

$\triangleleft$ Пусть $V \in \mathscr{U}_X$ и $W \in \mathscr{U}_X$ таково, что $W \circ W \subset V$. Возьмем вполне ограниченную W-сеть F для U, т. е. $U \subset W(F)$. Поскольку F вполне ограничено, то найдется конечная W-сеть E для F, т. е. $F \subset W(E)$. Окончательно

$$U \subset W(F) \subset W(W(E)) = W \circ W(E) \subset V(E),$$

т. е. E — конечная V-сеть для U. $\triangleright$

4.6.5. *Множество U в X является вполне ограниченным в том и только в том случае, если для всякого V из $\mathscr{U}_X$ найдется конечное семейство $U_1, \dots, U_n$ подмножеств U такое, что $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ и каждое из множеств $U_1, \dots, U_n$ мало порядка V.* $\triangleleft\triangleright$

4.6.6. Замечание. Факт, отмеченный 4.6.5, выражают словами: «множество вполне ограничено тогда и только тогда, когда у него есть конечные покрытия сколь угодно малыми множествами».

4.6.7. *Критерий Хаусдорфа.* *Множество является компактным тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.* $\triangleleft\triangleright$

4.6.8. *Пусть $C(X,\ \mathbb{F})$ — пространство непрерывных функций на компакте X со значениями в основном поле $\mathbb{F}$ и с метрикой Чебышёва*

$$d(f,\ g) := \sup_{x \in X} d_{\mathbb{F}}(f(x),\ g(x)) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \quad (f,\ g \in C(X,\ \mathbb{F})).$$

Для $\theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$ положим

$$U_\theta := \left\{(f,\ g) \in C(X,\ \mathbb{F})^2 :\ g \circ f^{-1} \subset \theta\right\}.$$

Тогда $\mathscr{U}_d = \operatorname{fil}\{U_\theta :\ \theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}\}$. $\triangleleft\triangleright$

4.6.9. *Пространство $C(X,\ \mathbb{F})$ полно.* $\triangleleft\triangleright$

4.6.10. *Теорема Асколи — Арцела.* *Множество $\mathscr{E}$ в $C(X,\ \mathbb{F})$ относительно компактно в том и только в том случае, если $\mathscr{E}$ равностепенно непрерывно и множество $\cup\{g(X) :\ g \in \mathscr{E}\}$ вполне ограничено в пространстве $\mathbb{F}$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: То, что $\cup\{g(X) : \ g \in \mathscr{E}\}$ — это вполне ограниченное множество, не вызывает сомнений. Для проверки равностепенной непрерывности $\mathscr{E}$ возьмем $\theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$ и подберем симметричное окружение θ' из условия $\theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta$. По критерию Хаусдорфа найдется конечная $U_{\theta'}$-сеть $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$. Рассмотрим окружение $U \in \mathscr{U}_X$, заданное соотношением

$$U := \bigcap_{f \in \mathscr{E}'} f^{-1} \circ \theta' \circ f$$

(ср. 4.2.9). Для произвольных $g \in \mathscr{E}$ и $f \in \mathscr{E}'$ таких, что $g \circ f^{-1} \subset \theta'$, выполнено

$$\theta' = \theta'^{-1} \supset (g \circ f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ g^{-1} = f \circ g^{-1}.$$

Помимо этого, из свойств композиции соответствий и из 4.6.8 вытекает

$$g^{\times}(U) = g \circ U \circ g^{-1} \subset g \circ (f^{-1} \circ \theta' \circ f) \circ g^{-1} \subset$$

$$\subset (g \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ (f \circ g^{-1}) \subset \theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta.$$

Вместе с произвольностью g последнее означает, что $\mathscr{E}$ равностепенно непрерывно.

$\Leftarrow$: На основании 4.5.15, 4.6.7, 4.6.8 и 4.6.9 достаточно для каждого $\theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$ построить конечную U_θ-сеть в $\mathscr{E}$. Подыщем $\theta' \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$, для которого $\theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta$, и найдем открытое симметричное окружение $U \in \mathscr{U}_X$, чтобы было

$$U \subset \bigcap_{g \in \mathscr{E}} g^{-1} \circ \theta' \circ g$$

(существование U обеспечено равностепенной непрерывностью $\mathscr{E}$).

Ясно, что семейство $\{U(x) : \ x \in X\}$ образует открытое покрытие X. Используя компактность X, укажем конечное подпокрытие $\{U(x_0) : \ x_0 \in X_0\}$. В частности, с учетом 1.1.10

$$I_X \subset \bigcup_{x_0 \in X_0} U(x_0) \times U(x_0) =$$

$$= \bigcup_{(x_0, x_0) \in I_{X_0}} U^{-1}(x_0) \times U(x_0) = U \circ I_{X_0} \circ U.$$

Множество $\{g|_{X_0} : \ g \in \mathscr{E}\}$ вполне ограничено в $\mathbb{F}^{X_0}$. Стало быть, в этом множестве есть конечная θ'-сеть. Точнее говоря, имеется конечное множество $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$, обладающее тем свойством, что для каждого $g \in \mathscr{E}$ при подходящем $f \in \mathscr{E}'$ справедливо

$$g \circ I_{X_0} \circ f^{-1} \subset \theta'.$$

Применяя полученные оценки, последовательно выводим

$$g \circ f^{-1} = g \circ I_X \circ f^{-1} \subset g \circ (U \circ I_{X_0} \circ U) \circ f^{-1} \subset$$

$$\subset g \circ (g^{-1} \circ \theta' \circ g) \circ I_{X_0} \circ (f^{-1} \circ \theta' \circ f) \circ f^{-1} =$$

$$= (g \circ g^{-1}) \circ \theta' \circ (g \circ I_{X_0} \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ (f \circ f^{-1}) =$$

$$= I_{\operatorname{im} g} \circ \theta' \circ (g \circ I_{X_0} \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ I_{\operatorname{im} f} \subset$$

$$\subset \theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta.$$

Таким образом, в силу 4.6.8, $\mathscr{E}'$ — это конечная U_θ-сеть для $\mathscr{E}$. $\triangleright$

4.6.11. Замечание. Полезным утверждением является перевод доказательства теоремы Асколи — Арцела на язык «ε-δ». Вот необходимый словарь: «θ, U_θ — это ε», «θ' — это $\varepsilon/3$», а «δ — это U». Столь же полезно (и поучительно) найти обобщения теоремы Асколи — Арцела для отображений, действующих в произвольные пространства.

4.7. Бэровские пространства

4.7.1. Определение. Множество U принято называть ***разреженным*** или ***нигде не плотным***, если в его замыкании нет внутренних точек, т. е. $\operatorname{int}\operatorname{cl} U = \varnothing$. Множество U называют ***тощим*** (или ***множеством первой категории***), если U содержится в объединении (не более чем) счетного числа разреженных множеств, т. е. $U \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $\operatorname{int}\operatorname{cl} U_n = \varnothing$. ***Нетощие*** множества, т. е. множества, не являющиеся тощими, называют также ***множествами второй категории***.

4.7.2. Определение. Пространство называют ***бэровским***, если любое его непустое открытое множество нетощее.

4.7.3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) X — *бэровское пространство*;

(2) *объединение счетного числа замкнутых разреженных множеств не имеет внутренних точек*;

(3) *пересечение счетного числа любых всюду плотных (т. е. плотных в X) открытых множеств является всюду плотным*;

(4) *дополнение любого тощего множества всюду плотно.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $U := \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $U_n = \operatorname{cl} U_n$, причем $\operatorname{int} U_n = \varnothing$. Тогда U — тощее множество. Так как $\operatorname{int} U \subset U$ и $\operatorname{int} U$ — открытое множество, то $\operatorname{int} U$, являясь тощим множеством, обязательно пусто в силу бэровости X.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $U := \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, где G_n открыто и $\operatorname{cl} G_n = X$. Тогда $X \setminus U = X \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus G_n)$. При этом $X \setminus G_n$ замкнуто и $\operatorname{int}(X \setminus G_n) = \varnothing$ (ибо $\operatorname{cl} G_n = X$). Стало быть, $\operatorname{int}(X \setminus U) = \varnothing$. Последнее означает, что у U пустая внешность, т. е. U всюду плотно.

(3) $\Rightarrow$ (4): Пусть U тощее в X, т. е. $U \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ и $\operatorname{int} \operatorname{cl} U_n = \varnothing$. Можно считать, что $U_n = \operatorname{cl} U_n$. Тогда $G_n := X \setminus U_n$ открыто и всюду плотно. По условию $\cap_{n\in\mathbb{N}} G_n = X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ всюду плотно. При этом указанное множество содержится в $X \setminus U$ и, значит, множество $X \setminus U$ всюду плотно.

(4) $\Rightarrow$ (1): Если U — непустое открытое множество в X, то $X \setminus U$ не является всюду плотным. Следовательно, U нетощее. $\rhd$

4.7.4. Замечание. В связи с 4.7.3 (4) отметим, что дополнения тощих множеств (иногда) называют ***вычетами*** или ***остаточными множествами***. Вычеты в бэровском пространстве — нетощие множества.

4.7.5. ***Теорема Осгуда.*** *Пусть X — бэровское пространство и $(f_\xi : X \to \mathbb{R})_{\xi\in\Xi}$ — семейство полунепрерывных снизу функций, причем $\sup\{f_\xi(x) :\ \xi \in \Xi\} < +\infty$ для каждого $x \in X$. Тогда всякое непустое открытое множество G в X содержит непустое открытое подмножество G_0, на котором семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ равномерно ограничено сверху, т. е. выполнено $\sup_{x\in G_0} \sup\,\{f_\xi(x) :\ \xi \in \Xi\} \le +\infty$.* $\lhd\rhd$

4.7.6. ***Теорема Бэра.*** *Полное метрическое пространство — бэровское.*

$\lhd$ Пусть G — непустое открытое множество и $x_0 \in G$. Допустим, что G тощее, т. е. $G \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, где $\operatorname{int} U_n = \varnothing$ и $U_n = \operatorname{cl} U_n$. Найдем

$\varepsilon_0 > 0$ из условия $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G$. Ясно, что U_1 не содержит целиком шар $B_{\varepsilon_0/2}(x_0)$, т. е. имеется $x_1 \in B_{\varepsilon_0/2}(x_0) \setminus U_1$. В силу замкнутости U_1 можно подыскать ε_1 так, что $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0/2$ и $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap U_1 = \varnothing$. Проверим, что $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset B_{\varepsilon_0}(x_0)$. Действительно, если $d(x_1,\ y_1) \le \varepsilon_1$, то $d(y_1,\ x_0) \le d(y_1,\ x_1) + d(x_1,\ x_0) \le \varepsilon_1 + \varepsilon_0/2$, ибо $d(x_1,\ x_0) \le \varepsilon_0/2$. Шар $B_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ не лежит целиком в U_2. Поэтому существуют $x_2 \in B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \setminus U_2$ и $0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1/2$ такие, что $B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap U_2 = \varnothing$. Видно, что вновь $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1)$. Продолжая начатый процесс по индукции, получим последовательность шаров $B_{\varepsilon_0}(x_0) \supset B_{\varepsilon_1}(x_1) \supset B_{\varepsilon_2}(x_2) \supset \dots$, причем $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n/2$ и $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_n = \varnothing$. На основании 4.5.6 у построенных шаров есть общая точка $x := \lim x_n$. При этом, конечно же, $x \ne \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ и, стало быть, $x \notin G$. С другой стороны, $x \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G$. Получили противоречие. $\triangleright$

4.7.7. Замечание. Теорему Бэра часто используют как «чистую теорему существования».

В качестве классической иллюстрации рассмотрим вопрос о существовании непрерывных нигде не дифференцируемых функций. Для $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и $x \in [0,1)$ положим

$$D_+ f(x) := \liminf_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$D^+ f(x) := \limsup_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Элементы $D_+ f(x)$ и $D^+ f(x)$ из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ называют ***нижней правой*** и соответственно ***верхней правой производной Дини*** функции f в точке x.

Пусть D — это множество таких функций $f \in C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$, что для некоторой точки $x \in [0,\ 1)$ элементы $D_+ f(x)$ и $D^+ f(x)$ входят в $\mathbb{R}$, т. е. конечны. Тогда D — тощее множество. Значит, функции, не имеющие производной ни в одной точке из $(0,\ 1)$, всюду плотны в $C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$. В то же время конкретные примеры таких функций дались не просто. Вот наиболее известные из них:

$$\textit{функция Ван дер Вардена} \ — \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle\langle 4^n x\rangle\rangle}{4^n}$$

(здесь $\langle\langle x\rangle\rangle := (x - [x]) \wedge (1 + [x] - x)$ — расстояние до ближайшего к x целого числа),

$$\textit{функция Римана} \ \text{—}\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\,(n^2 \pi x)$$

и, наконец, исторически первая

$$\textit{функция Вейерштрасса} \ \text{—}\ \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\,(a^n \pi x)$$

(здесь a — нечетное положительное целое, $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$).

4.8. Теорема Жордана и простые картины

4.8.1. Замечание. В топологии, в частности, устанавливают глубокие и тонкие факты о метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$. Ниже приведены используемые в дальнейшем те из этих фактов, роль которых известна, например, из комплексного анализа.

4.8.2. Определение. Гомеоморфный (= взаимно однозначный и взаимно непрерывный) образ отрезка называют (*жордановой*) *дугой*. Гомеоморфный образ окружности называют *простой* (*жордановой*) *петлей*. Естественный смысл вкладывают в понятия типа «гладкая дуга» и т. п.

4.8.3. ***Теорема Жордана.*** *Пусть γ — простая петля в плоскости $\mathbb{R}^2$. Существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что*

$$G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma;\ \gamma = \partial G_1 = \partial G_2.\ \lhd\rhd$$

4.8.4. Замечание. Одно из множеств G_1 и G_2, фигурирующих в 4.8.3, ограничено. Помимо этого, каждое из них *связно*, т. е. непредставимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств. В этой связи теорему Жордана часто выражают так: «простая петля разрезает плоскость на две области и является их общей границей».

4.8.5. Определение. Пусть $D,\ D_1,\dots,D_n$ — замкнутые круги (= замкнутые шары) на плоскости, причем $D_m \cap D_k = \varnothing$ при $m \neq k$ и $D_1,\dots,D_n \subset \operatorname{int} D$. Множество

$$D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int} D_k$$

называют ***резным диском.*** Всякое множество в плоскости, диффеоморфное (= «гладко гомеоморфное») некоторому резному диску, называют ***связным элементарным компактом.*** Объединение непустого конечного семейства попарно не пересекающихся связных элементарных компактов называют ***элементарным компактом.***

4.8.6. Замечание. Граница ∂F элементарного компакта F состоит из конечного числа непересекающихся гладких простых петель. При этом вложение F в (ориентированную) плоскость $\mathbb{R}^2$ индуцирует в F структуру (ориентированного) многообразия с (ориентированным) краем ∂F. Отметим здесь же, что в силу 4.8.3 имеет смысл говорить о положительной ориентации гладкой петли, подразумевая ориентацию края компактной части плоскости, ограниченной этой петлей.

4.8.7. *Пусть K — компактное подмножество плоскости и G — непустое открытое множество, содержащее K. Тогда существует элементарный компакт F такой, что*

$$K \subset \operatorname{int} F \subset F \subset G. \ \lhd\rhd$$

4.8.8. Определение. Множество F, наличие которого отмечено в 4.8.7, называют ***простой картиной*** для пары $(K,\ G)$.

Упражнения

4.1. Привести примеры метрических пространств. Выяснить, какими способами можно получать новые метрические пространства.

4.2. Каким должен быть фильтр в X^2, совпадающий с некоторой метрической равномерностью в X?

4.3. Пусть S — пространство измеримых функций на $[0,\ 1]$ с метрикой

$$d(f,\ g) := \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\,dt \quad (f,\ g \in S)$$

(подразумевается некоторая естественная факторизация — какая именно?). Выяснить смысл сходимости в этом пространстве.

4.4. Для $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ полагают

$$d(\alpha,\ \beta) = 1/\min\ \{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq \beta_k\}.$$

Проверить, что d — метрика и что пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел.

4.5. Можно ли метризовать поточечную сходимость последовательностей? А функций?

4.6. Как следует ввести разумную метрику в счетное произведение метрических пространств? В произвольное произведение метрических пространств?

4.7. Выяснить, какие классы функций описываются ошибочными определениями непрерывности и равномерной непрерывности.

4.8. Для непустых компактных подмножеств A и B пространства $\mathbb{R}^N$ положим

$$d(A,\ B) := \left(\sup_{x \in A}\ \inf_{y \in B}\ |x - y|\right) \vee \left(\sup_{y \in B}\ \inf_{x \in A}\ |x - y|\right).$$

Установить, что d — метрика. Ее называют метрикой Хаусдорфа. Каков смысл сходимости в этой метрике?

4.9. Доказать, что непустые выпуклые компактные подмножества выпуклого компакта в $\mathbb{R}^N$ составляют компакт относительно метрики Хаусдорфа. Какова связь этого утверждения с теоремой Арцела — Асколи?

4.10. Доказать, что каждая полунепрерывная снизу функция на $\mathbb{R}^N$ есть верхняя огибающая некоторого семейства непрерывных функций.

4.11. Выяснить связи между непрерывными и замкнутыми (как множества в произведении) отображениями метрических пространств.

4.12. Выяснить, когда непрерывное отображение метрического пространства в полное метрическое пространство допускает распространение на пополнение исходного пространства.

4.13. Описать компактные множества в произведении метрических пространств.

4.14. Пусть $(Y,\ d)$ — полное метрическое пространство. Отображение $F : Y \to Y$ называют расширяющимся, если $d(F(x),\ F(y)) \geq \beta d(x,\ y)$ для некоторого $\beta > 1$ и $x,\ y \in Y$. Пусть расширяющееся отображение $F : Y \to Y$ действует на Y. Доказать, что F взаимно однозначно и обладает единственной неподвижной точкой.

4.15. Доказать, что компакт не отображается изометрично на свою собственную часть.

4.16. Установить нормальность произвольного метрического пространства.

4.17. При каких условиях счетное подмножество полного метрического пространства является нетощим?

4.18. Можно ли охарактеризовать равномерную непрерывность в терминах сходящихся последовательностей?

4.19. На каких метрических пространствах любая непрерывная вещественная функция достигает точные границы множества своих значений? Ограничена?

Глава 5

Мультинормированные и банаховы пространства

5.1. Полунормы и мультинормы

5.1.1. *Пусть X — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$ и $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. Тогда*

(1) $\operatorname{dom} p$ *— подпространство в X;*

(2) $p(x) \geq 0$ *для всех $x \in X$;*

(3) *ядро полунормы* $\ker p := \{p = 0\}$ *— подпространство X;*

(4) *множества* $\overset{\circ}{B}_p := \{p < 1\}$ *и* $B_p := \{p \leq 1\}$ *абсолютно выпуклые, причем p является функционалом Минковского любого абсолютно выпуклого множества B такого, что* $\overset{\circ}{B}_p \subset B \subset B_p$*;*

(5) $X = \operatorname{dom} p$ *в том и только в том случае, если* $\overset{\circ}{B}_p$ *— поглощающее множество.*

$\lhd$ Если $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} p$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{F}$, то ввиду 3.7.6 имеем

$$p(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq |\alpha_1| p(x_1) + |\alpha_2| p(x_2) < +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Значит, (1) верно. Допустим, что (2) не верно, т. е. для некоторого $x \in X$ справедливо $p(x) < 0$. Тогда $0 \leq p(x) + p(-x) < p(-x) = p(x) < 0$. Получается противоречие. Утверждение (3) немедленно следует из (2) и субаддитивности p. Справедливость (4) и (5) частично уже отмечалась (ср. 3.8.8). Оставшаяся неотмеченной часть обосновывается теоремой о функционале Минковского. $\rhd$

5.1.2. *Пусть $p,\ q : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — две полунормы. Неравенство $p \le q$ (в множестве $(\mathbb{R}^{\cdot})^X$) имеет место в том и только в том случае, если $B_p \supset B_q$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Ясно, что $\{q \le 1\} \subset \{p \le 1\}$.

$\Leftarrow$: Имеем, по 5.1.1 (4), $p = p_{B_p}$ и $q = p_{B_q}$. Возьмем $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $t_1 < t_2$. Если $t_1 < 0$, то $\{q \le t_1\} = \varnothing$ и, стало быть, $\{q \le t_1\} \subset \{p \le t_2\}$. Если же $t_1 \ge 0$, то $t_1 B_q \subset t_1 B_p \subset t_2 B_p$. Значит, в силу 3.8.3, $p \le q$. $\rhd$

5.1.3. *Пусть X, Y — векторные пространства, $T \subset X \times Y$ — линейное соответствие и $p : Y \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. Пусть, далее, $p_T(x) := \inf p \circ T(x)$ для $x \in X$. Тогда $p_T : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма, множество $B_T := T^{-1}(B_p)$ абсолютно выпукло, причем $p_T = p_{B_T}$.*

$\lhd$ Для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{F}$ имеем

$$\begin{gathered} p_T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \inf p(T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \le \\ \le \inf p(\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)) \le \\ \le \inf(|\alpha_1| p(T(x_1)) + |\alpha_2| p(T(x_2))) = \\ = |\alpha_1| p_T(x_1) + |\alpha_2| p_T(x_2), \end{gathered}$$

т. е. p_T — полунорма.

То, что множество B_T абсолютно выпукло, следует из 5.1.1 (4) и 3.1.8. Если $x \in B_T$, то для некоторого $y \in B_p$ выполнено $(x,\ y) \in T$. Отсюда $p_T(x) \le p(y) \le 1$, т. е. $B_T \subset B_{p_T}$. Если, в свою очередь, $x \in \overset{\circ}{B}_{p_T}$, то $p_T(x) = \inf\{p(y) :\ (x,\ y) \in T\} < 1$. Значит, найдется $y \in T(x)$ такой, что $p(y) < 1$. Стало быть, $x \in T^{-1}(\overset{\circ}{B}_p) \subset T^{-1}(B_p) = B_T$. Итак, $\overset{\circ}{B}_{p_T} \subset B_T \subset B_{p_T}$. Привлекая 5.1.1 (4), видим: $p_{B_T} = p_T$. $\rhd$

5.1.4. Определение. Полунорму p_T, построенную в 5.1.3, называют ***прообразом полунормы*** p при соответствии T.

5.1.5. Определение. Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма (в силу 3.4.3 эта запись означает, что $\operatorname{dom} p = X$). Пару $(X,\ p)$ называют ***полунормированным пространством.*** Часто, допуская обычную вольность, само X называют полунормированным пространством.

5.1.6. Определение. Непустое множество всюду определенных полунорм (в $\mathbb{R}^X$) называют ***мультинормой*** и обозначают $\mathfrak{M}_X$ или просто $\mathfrak{M}$, если ясно, о каком пространстве X идет речь. Пару $(X,\ \mathfrak{M}_X)$, ра́вно как и исходное X, называют ***мультинормированным пространством.***

5.1.7. *Множество полунорм $\mathfrak{M}$ в $(\mathbb{R}^{\cdot})^X$ является мультинормой в том и только в том случае, если $(X,\ p)$ является полунормированным пространством для всякого $p \in \mathfrak{M}$.* $\triangleleft\triangleright$

5.1.8. Определение. Мультинорму $\mathfrak{M}_X$ называют ***хаусдорфовой*** (или ***отделимой***), если для любого $x \in X,\ x \neq 0$, существует полунорма $p \in \mathfrak{M}_X$ такая, что $p(x) \neq 0$. В этом случае X называют ***хаусдорфовым*** (или ***отделимым***) ***мультинормированным пространством.***

5.1.9. Определение. Хаусдорфову мультинорму, состоящую из одного элемента, называют ***нормой.*** Единственный элемент нормы в X (как хорошо известно) также называют ***нормой*** в X и обозначают $\|\cdot\|$ или (реже) $\|\cdot\|_X$, и даже $\|\cdot\mid X\|$, если есть необходимость в указании на пространство X. Пару $(X,\ \|\cdot\|)$ называют ***нормированным пространством.*** Как правило, так же называют и X.

5.1.10. Примеры.

(1) Полунормированное пространство $(X,\ p)$ рассматривается как мультинормированное пространство $(X,\ \{p\})$. То же относится к нормированному пространству.

(2) Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех (всюду определенных) полунорм на пространстве X. Тогда $\mathfrak{M}$ — хаусдорфова мультинорма, которую называют ***сильнейшей мультинормой*** в X.

(3) Пусть $(Y,\ \mathfrak{N})$ — мультинормированное пространство и $T \subset X \times Y$ — линейное соответствие, причем $\operatorname{dom} T = X$. В силу 3.4.10 и 5.1.1 (5) для $p \in \mathfrak{N}$ полунорма p_T всюду определена и, стало быть, $\mathfrak{M} := \{p_T :\ \ p \in \mathfrak{N}\}$ — мультинорма в X. Мультинорму $\mathfrak{N}$ называют ***прообразом мультинормы*** $\mathfrak{N}$ при соответствии T и (иногда) обозначают $\mathfrak{N}_T$. Отметим, что если $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$, то $\mathfrak{M} = \{p \circ T :\ p \in \mathfrak{N}\}$. В связи с этим используют естественное обозначение $\mathfrak{N} \circ T := \mathfrak{M}$. Особо выделим случай, когда X — это подпространство Y_0 в Y и T — тождественное вложение $T := \iota : Y_0 \to Y$. В такой ситуации Y_0, как правило, рассматривают как мультинормированное пространство с мультинормой $\mathfrak{N} \circ \iota$. Более того, некорректно используют фразу «$\mathfrak{N}$ — мультинорма в Y_0». Эту некорректность использовать очень удобно.

(4) Основное поле $\mathbb{F}$ наделено, как известно, нормой $|\cdot| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$. Пусть X — векторное пространство и $f \in X^{\#}$. Так как $f : X \to \mathbb{F}$, то определен прообраз нормы в основном поле: $p_f(x) := |f(x)|$ $(x \in X)$. Если теперь $\mathscr{X}$ — некоторое подпространство в $X^{\#}$, то мультинорму $\sigma(X,\ \mathscr{X}) := \{p_f :\ f \in \mathscr{X}\}$ называют ***слабой мультинормой*** в X, наведенной $\mathscr{X}$.

(5) Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство, X_0 — подпространство в X и $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. Линейное соответствие φ^{-1} определено на всем пространстве X/X_0. Значит, имеется полунорма $p_{\varphi^{-1}}$, которую называют ***фактор-полунормой*** p по подпространству X_0 и обозначают p_{X/X_0}. Пространство $(X/X_0,\ p_{X/X_0})$ называют ***фактор-пространством*** пространства $(X,\ p)$ по подпространству X_0. Определение фактор-пространства общего мультинормированного пространства связано с некоторой тонкостью и введено в 5.3.11.

(6) Пусть X — векторное пространство и $\mathfrak{M} \subset (\mathbb{R}^{\cdot})^X$ — множество полунорм на этом пространстве. В этой ситуации можно говорить об $\mathfrak{M}$ как о мультинорме на пространстве $X_0 := \cap\{\operatorname{dom} p : p \in \mathfrak{M}\}$. Более точно, подразумевая мультинормированное пространство $(X_0,\ \{p_\iota : p \in \mathfrak{M}\})$, где ι — тождественное вложение X_0 в X, употребляют выражения: «$\mathfrak{M}$ — мультинорма» или «рассмотрим (мультинормированное) пространство, порожденное $\mathfrak{M}$». Вот типичный образец: «семейство полунорм

$$\left\{p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| :\ \alpha,\ \beta \text{ — мультииндексы}\right\}$$

задает (мультинормированное) пространство бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций на $\mathbb{R}^N$» (такие функции часто называют ***умеренными***, ср. 10.11.6).

(7) Пусть $(X,\ \|\cdot\|)$ и $(Y,\ \|\cdot\|)$ — нормированные пространства (над одним основным полем $\mathbb{F}$). Для $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ рассмотрим «***операторную норму***», т. е. величину

$$\|T\| := \sup\ \{\|Tx\| :\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

(Здесь и в дальнейшем в аналогичных случаях принято считать, что $0/0 := 0$.)

Видно, что $\|\cdot\| : \mathscr{L}(X,\ Y) \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. В самом деле, положив $B_X := \{\|\cdot\|_X \leq 1\}$, для $T_1,\ T_2 \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{F}$ имеем

$$\|\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2\| = \sup \|\cdot\|_{\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2}(B_X) =$$

$$= \sup \|\cdot\|((\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(B_X)) \leq \sup \|\alpha_1 T_1(B_X) + \alpha_2 T_2(B_X)\| \leq$$

$$\leq |\alpha_1| \sup \|\cdot\|_{T_1}(B_X) + |\alpha_2| \sup \|\cdot\|_{T_2}(B_X) =$$

$$= |\alpha_1|\, \|T_1\| + |\alpha_2|\, \|T_2\|.$$

Подпространство $B(X,\ Y)$, являющееся эффективной областью определения введенной полунормы, называют *пространством ограниченных операторов*, а его элементы — *ограниченными операторами*. Ясно, что векторное пространство $B(X,\ Y)$ нормировано (операторной нормой). Отметим, что оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ ограничен в том и только в том случае, если для него справедливо *нормативное неравенство*, т. е. если найдется строго положительное число K такое, что

$$\|Tx\|_Y \leq K\, \|x\|_X \quad (x \in X).$$

При этом $\|T\|$ есть точная нижняя граница чисел K, фигурирующих в нормативном неравенстве. ◁▷

(8) Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{F}$ и $\|\cdot\|$ — норма в X. Пусть, далее, $X' := B(X,\ \mathbb{F})$ — *сопряженное пространство*, т. е. векторное пространство ограниченных функционалов f с «*сопряженной нормой*»:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| :\ \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Рассмотрим пространство $X'' := (X')' := B(X',\ \mathbb{F})$ — *второе сопряженное* к X пространство. Для элементов $x \in X$ и $f \in X'$ положим

$$x'' := \iota(x) : f \mapsto f(x).$$

Несомненно, что $\iota(x) \in (X')^{\#} = \mathscr{L}(X',\ \mathbb{F})$. Помимо этого,

$$\|x''\| = \|\iota(x)\| = \sup\ \{|\iota(x)(f)| :\ \|f\|_{X'} \leq 1\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : \ |f(x)| \le \|x\|_X \ (x \in X)\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : \ f \in |\partial|(\|\cdot\|_X)\} = \|x\|_X.$$

Последнее равенство следует, например, из теоремы 3.6.5 и леммы 3.7.9. Таким образом, $\iota(x) \in X''$ для каждого $x \in X$. Понятно, что оператор $\iota : X \to X''$, действующий по правилу $\iota : x \mapsto \iota(x)$, является линейным и ограниченным, при этом ι — мономорфизм и $\|\iota x\| = \|x\|$ для всех $x \in X$. Оператор ι называют *каноническим вложением* X во второе сопряженное пространство или, более образно, *двойным штрихованием*. Более того, как правило, элементы x и $x'' := \iota x$ не различают, т. е. X рассматривают как подпространство X''. Нормированное пространство X называют *рефлексивным*, если X совпадает с X'' (при указанном вложении). Рефлексивные пространства обладают многими достоинствами. Очевидно, однако, что не все пространства рефлексивны. Так, к сожалению, не рефлексивно пространство $C([0,\ 1],\ \mathbb{F})$. $\triangleleft\triangleright$

5.1.11. Замечание. Построения, проведенные в 5.1.10 (8), показывают известную симметрию (или «двойственность») между X и X'. В этой связи для обозначения действия элемента $x \in X$ на элемент $f \in X'$ (или действия f на x) используют запись $(x,\ f) := \langle x \,|\, f\rangle := f(x)$. Для достижения наибольшего единообразия элементы X' обозначают символами типа x', т. е. $\langle x \,|\, x'\rangle = (x,\ x') = x'(x)$.

5.2. Равномерность и топология мультинормированного пространства

5.2.1. *Пусть* $(X,\ p)$ *— полунормированное пространство. Возьмем* $x_1,\ x_2 \in X$ *и положим* $d_p(x_1,\ x_2) := p(x_1 - x_2)$*. Тогда*

(1) $d_p(X^2) \subset \mathbb{R}_+,\ \{d \le 0\} \supset I_X$;

(2) $\{d_p \le t\} = \{d_p \le t\}^{-1},\ \{d_p \le t\} = t\{d_p \le 1\}$ $(t \in \mathbb{R}_+ \setminus 0)$;

(3) $\{d_p \le t_1\} \circ \{d_p \le t_2\} \subset \{d_p \le t_1 + t_2\}$ $(t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$;

(4) $\{d_p \le t_1\} \cap \{d_p \le t_2\} \supset \{d_p \le t_1 \wedge t_2\}$ $(t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$;

(5) p *— норма* $\Leftrightarrow$ d_p *— метрика.* $\triangleleft\triangleright$

5.2.2. Определение. Фильтр $\mathscr{U}_p := \mathrm{fil}\,\{\{d_p \le t\} :\ t \in \mathbb{R}_+ \setminus 0\}$ называют *равномерностью пространства* $(X,\ p)$.

5.2.3. *Пусть* $\mathscr{U}_p$ *— равномерность полунормированного пространства. Тогда*

(1) $\mathscr{U}_p \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U}_p \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}_p$;

(3) $(\forall\, U \in \mathscr{U}_p)\ (\exists\, V \in \mathscr{U}_p)\ V \circ V \subset U$. ◁▷

5.2.4. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство. Фильтр $\mathscr{U} := \sup\{\mathscr{U}_p : p \in \mathfrak{M}\}$ называют *равномерностью* пространства X (используют также обозначения $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, $\mathscr{U}_X$ и т. п.). (Это определение корректно в силу 5.2.3 (1) и 1.3.13.)

5.2.5. *Пусть* $(X,\ \mathfrak{M})$ *— мультинормированное пространство и* $\mathscr{U}$ *— соответствующая равномерность. Тогда*

(1) $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U})\ (\exists V \in \mathscr{U})\ V \circ V \subset U$.

◁ Проверим (3). Если $U \in \mathscr{U}$, то по 1.2.18 и 1.3.8 найдутся полунормы $p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M}$ такие, что $U = \mathscr{U}_{\{p_1,\dots,p_n\}} = \mathscr{U}_{p_1} \vee \ldots \vee \mathscr{U}_{p_n}$. Привлекая 1.3.13, подыщем множества $U_k \in \mathscr{U}_{p_k}$ из условия $U \supset U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Используя 5.2.3 (3), выберем $V_k \in \mathscr{U}_{p_k}$, для которых $V_k \circ V_k \subset U_k$. Ясно, что

$$(V_1 \cap \ldots \cap V_n) \circ (V_1 \cap \ldots \cap V_n) \subset V_1 \circ V_1 \cap \ldots \cap V_n \circ V_n \subset$$

$$\subset U_1 \cap \ldots \cap U_n.$$

Помимо этого, $V_1 \cap \ldots \cap V_n \in \mathscr{U}_{p_1} \vee \ldots \vee \mathscr{U}_{p_n} \subset \mathscr{U}$. ▷

5.2.6. *Мультинорма* $\mathfrak{M}$ *в* X *хаусдорфова в том и только в том случае, если равномерность* $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ *тоже хаусдорфова, т. е.* $\cap\{V : V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\} = I_X$.

◁ $\Rightarrow$: Пусть $(x,\ y) \notin I_X$, т. е. $x \neq y$. Тогда для некоторой полунормы $p \in \mathfrak{M}$ будет $p(x-y) > 0$. Значит, $(x,\ y) \notin \{d_p \leq 1/2\, p(x-y)\}$. Но последнее множество входит в $\mathscr{U}_p$, а потому и в $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. Итак, $X^2 \setminus I_X \subset X^2 \setminus \cap\{V : V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\}$. Помимо этого, $I_X \subset \cap\{V : V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\}$.

$\Leftarrow$: Пусть $p(x) = 0$ при всех $p \in \mathfrak{M}$. Тогда $(x,\ 0) \in V$ для любого $V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ и, стало быть, $(x,\ 0) \in I_X$ по условию. Следовательно, $x = 0$. ▷

5.2.7. *Для пространства X с равномерностью $\mathscr{U}_X$ положим*

$$\tau(x) := \{U(x) : U \in \mathscr{U}_X\} \quad (x \in X).$$

Тогда $\tau(x)$ — фильтр для каждого $x \in X$. При этом

(1) $\tau(x) \subset \operatorname{fil}\{x\}$;

(2) $(\forall U \in \tau(x))\ (\exists V \in \tau(x)\ \&\ V \subset U)\ (\forall y \in V)\ V \in \tau(y)$.

$\lhd$ Очевидно (ср. 4.1.8). $\rhd$

5.2.8. Определение. Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ называют *топологией* рассматриваемого мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$, а элементы фильтра $\tau(x)$ — *окрестностями* точки x. Для обозначения топологии используют также более детальные символы: τ_X, $\tau_{\mathfrak{M}}$, $\tau(\mathscr{U}_{\mathfrak{M}})$ и т. п.

5.2.9. *Для любого $x \in X$ выполнено*

$$\tau_X(x) = \sup\{\tau_p(x) : p \in \mathfrak{M}_X\}. \ \lhd\rhd$$

5.2.10. *Пусть X — мультинормированное пространство. Тогда для $x \in X$ имеет место соотношение*

$$U \in \tau(x) \Leftrightarrow U - x \in \tau_X(0).$$

$\lhd$ В силу 5.2.9 и 1.3.13 можно ограничиться случаем полунормированного пространства (X, p). При этом для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо представление $\{d_p \leq \varepsilon\}(x) = \varepsilon B_p + x$, где $B_p := \{p \leq 1\}$. В самом деле, если $p(y-x) \leq \varepsilon$, то $y = \varepsilon(\varepsilon^{-1}(y-x)) + x$ и $\varepsilon^{-1}(y-x) \in B_p$. В свою очередь, если $y \in \varepsilon B_p + x$, то $p(y-x) = \inf\{t > 0 : y - x \in tB_p\} \leq \varepsilon$. $\rhd$

5.2.11. Замечание. Из доказательства 5.2.10 видно, сколь важную роль играет шар единичного радиуса с центром в нуле (полу)нормированного пространства (X, p). В этой связи за ним закреплены название «*единичный шар пространства X*» и обозначения B_p, B_X и т. п.

5.2.12. *Мультинорма $\mathfrak{M}_X$ хаусдорфова в том и только в том случае, если хаусдорфова топология τ_X, т. е. если для любых различных x_1, x_2 из X найдутся окрестности $U_1 \in \tau_X(x_1)$ и $U_2 \in \tau_X(x_2)$ такие, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $x_1 \neq x_2$ и для $p \in \mathfrak{M}_X$ выполнено $\varepsilon := p(x_1 - x_2) > 0$. Положим $U_1 := x_1 + \varepsilon/3\, B_p$, $U_2 := x_2 + \varepsilon/3\, B_p$. По 5.2.10, $U_k \in \tau_X(x_k)$. Убедимся, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. В самом деле, если $y \in U_1 \cap U_2$, то $p(x_1 - y) \le \varepsilon/3$ и $p(x_2 - y) \le \varepsilon/3$. Отсюда $p(x_1 - x_2) \le 2\varepsilon/3 < \varepsilon = p(x_1 - x_2)$, чего быть не может.

$\Leftarrow$: Если $(x_1,\ x_2) \in \cap\{V :\ V \in \mathscr{U}_X\}$, то $x_2 \in \cap\{V(x_1) :\ V \in \mathscr{U}_X\}$. Поэтому $x_1 = x_2$ и, стало быть, на основании 5.2.6 мультинорма $\mathfrak{M}_X$ хаусдорфова. $\rhd$

5.2.13. Замечание. Наличие в мультинормированном пространстве равномерности и соответствующей топологии позволяет, очевидно, использовать такие понятия, как равномерная непрерывность, полнота, непрерывность, открытость и замкнутость и т. п.

5.2.14. *Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство и X_0 — подпространство в X. Фактор-пространство $(X/X_0,\ p_{X/X_0})$ хаусдорфово в том и только в том случае, если X_0 — замкнутое множество.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $x \notin X_0$. Тогда $\varphi(x) \neq 0$, где, как обычно, $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. По условию будет $0 \neq \varepsilon := p_{X/X_0}(\varphi(x)) = p_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) = \inf\{p(x + x_0) :\ x_0 \in X_0\}$. Значит, шар $x + \varepsilon/2\, B_p$ не пересекается с X_0, т. е. x — внешняя точка X_0. Итак, X_0 замкнуто.

$\Leftarrow$: Пусть $\overline{x}$ — ненулевая точка фактор-пространства X/X_0 и $\overline{x} = \varphi(x)$ для подходящего элемента x из пространства X. Если $p_{X/X_0}(\overline{x}) = 0$, то $0 = \inf\{p(x - x_0) :\ x_0 \in X_0\}$, т. е. имеется последовательность (x_n) в X_0, для которой $x_n \to x$. Следовательно, по 4.1.19, $x \in X_0$ и $\overline{x} = 0$. Получили противоречие. $\rhd$

5.2.15. *Замыкание Γ-множества — Γ-множество.*

$\lhd$ Пусть $U \in (\Gamma)$ и $U \neq \varnothing$ (иначе все ясно). В силу 4.1.9 для точек $x,\ y \in \operatorname{cl} U$ найдутся сети (x_γ), (y_γ) элементов U такие, что $x_\gamma \to x$, $y_\gamma \to y$. Если $(\alpha,\ \beta) \in \Gamma$, то $\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma \in U$. Вновь привлекая 4.1.19, выводим $\alpha x + \beta y = \lim(\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma) \in \operatorname{cl} U$. $\rhd$

5.3. Сравнение мультинорм

5.3.1. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две мультинормы в векторном пространстве. Говорят, что $\mathfrak{M}$ *сильнее* $\mathfrak{N}$, и пишут $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$, если $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} \supset \mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$. Если одновременно $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, то говорят, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *эквивалентны*, и пишут $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

5.3.2. *Теорема о сравнении мультинорм.* *Для мультинорм* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *в векторном пространстве* X *эквивалентны утверждения*:

(1) $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$;

(2) *для всякого* $x \in X$ *выполнено* $\tau_{\mathfrak{M}}(x) \supset \tau_{\mathfrak{N}}(x)$;

(3) $\tau_{\mathfrak{M}}(0) \supset \tau_{\mathfrak{N}}(0)$;

(4) $(\forall\, q \in \mathfrak{N})\ (\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M})$
$(\exists\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}_+ \setminus 0)\ B_q \supset \varepsilon_1 B_{p_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_n B_{p_n}$;

(5) $(\forall\, q \in \mathfrak{N})\ (\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M})\ (\exists\, t > 0)\ q \le t(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$
(*порядок взят из* K*-пространства* $\mathbb{R}^X$).

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4): Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (5): Используя теорему о функционале Минковского (ср. 5.1.2), имеем

$$q \le p_{B_{p_1/\varepsilon_1}} \vee \ldots \vee p_{B_{p_n/\varepsilon_n}} =$$
$$= \left(\frac{1}{\varepsilon_1} p_1\right) \vee \ldots \vee \left(\frac{1}{\varepsilon_n} p_n\right) \le \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee \frac{1}{\varepsilon_n}\right) p_1 \vee \ldots \vee p_n.$$

(5) $\Rightarrow$ (1): Достаточно проверить, что $\mathfrak{M} \succ \{q\}$ для полунормы $q \in \mathfrak{N}$. Если $V \in \mathscr{U}_q$, то $V \supset \{d_q \le \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. По условию

$$\{d_q \le \varepsilon\} \supset \left\{d_{p_1} \le \frac{\varepsilon}{t}\right\} \cap \ldots \cap \left\{d_{p_n} \le \frac{\varepsilon}{t}\right\}$$

для подходящих $p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M}$ и $t > 0$. Множество, стоящее в правой части последнего включения, — элемент $\mathscr{U}_{p_1} \vee \ldots \vee \mathscr{U}_{p_n} = \mathscr{U}_{\{p_1, \dots, p_n\}} \subset \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. Значит, V также входит в $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. $\rhd$

5.3.3. Определение. Пусть $p,\ q : X \to \mathbb{R}$ — две полунормы в X. Говорят, что p *сильнее* q, и пишут $p \succ q$, если $\{p\} \succ \{q\}$. Аналогично трактуют *эквивалентность* полунорм $p \sim q$.

5.3.4. $p \succ q \Leftrightarrow (\exists\, t > 0)\ q \le tp \Leftrightarrow (\exists\, t \ge 0)\ B_q \supset tB_p$;

$$p \sim q \Leftrightarrow (\exists\, t_1,\ t_2 > 0)\ t_2 p \le q \le t_1 p \Leftrightarrow (\exists\, t_1,\ t_2 > 0)\ t_1 B_p \subset B_q \subset t_2 B_p.$$

$\lhd$ Следует из 5.3.2 и 5.1.2. $\rhd$

5.3.5. *Теорема Рисса.* *Пусть* $p,\ q : \mathbb{F}^N \to \mathbb{R}$ — *полунормы на конечномерном пространстве* $\mathbb{F}^N$. *Тогда* $p \succ q \Leftrightarrow \ker p \subset \ker q$. $\lhd\rhd$

5.3.6. *Следствие.* *Любые две нормы на конечномерном пространстве эквивалентны.* $\lhd\rhd$

5.3.7. *Пусть* $(X,\ \mathfrak{M})$ *и* $(Y,\ \mathfrak{N})$ — *мультинормированные пространства и* $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — *линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $\mathfrak{N} \circ T \prec \mathfrak{M}$;

(2) $T^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y,\ T^{\times -1}(\mathscr{U}_Y) \subset \mathscr{U}_X$;

(3) $x \in X \Rightarrow T(\tau_X(x)) \supset \tau_Y(Tx)$;

(4) $T(\tau_X(0)) \supset \tau_Y(0),\ \tau_X(0) \supset T^{-1}(\tau_Y(0))$;

(5) $(\forall\, q \in \mathfrak{N})\ (\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M})\ q \circ T \prec p_1 \vee \dots \vee p_n$. $\triangleleft\triangleright$

5.3.8. *Пусть* $(X,\ \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y,\ \|\cdot\|_Y)$ — *нормированные пространства и* $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — *линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) T *ограничен* (*т. е.* $T \in B(X,\ Y)$);

(2) $\|\cdot\|_X \succ \|\cdot\|_Y \circ T$;

(3) T *равномерно непрерывен*;

(4) T *непрерывен*;

(5) T *непрерывен в нуле*.

$\triangleleft$ Все сказанное — частный случай 5.3.7. $\triangleright$

5.3.9. Замечание. Предложение 5.3.7 показывает, что бывает удобно рассматривать вместо исходной мультинормы $\mathfrak{M}$ какую-либо эквивалентную ей фильтрованную по возрастанию (относительно отношения $\geq$ или $\succ$) мультинорму. В качестве такой можно взять мультинорму $\overline{\mathfrak{M}} := \{\sup \mathfrak{M}_0 :\ \mathfrak{M}_0$ — непустое конечное подмножество $\mathfrak{M}\}$. В то же время при рассмотрении нефильтрованных мультинорм необходима известная осторожность.

5.3.10. Контрпример. Пусть $X := \mathbb{F}^{\,\Xi}$ и X_0 состоит из постоянных отображений $X_0 := \mathbb{F}\mathbf{1}$, где $\mathbf{1} : \xi \mapsto 1\ (\xi \in \Xi)$. Положим $\mathfrak{M} := \{p_\xi :\ \ \xi \in \Xi\}$, где $p_\xi(x) := |x(\xi)|\ (x \in \mathbb{F}^{\Xi})$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ — мультинорма в X. Пусть теперь $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. Несомненно, что $\mathfrak{M}_{\varphi^{-1}}$ состоит только из нуля. В то же время мультинорма $\overline{\mathfrak{M}}_{\varphi^{-1}}$ хаусдорфова.

5.3.11. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство и X_0 — подпространство в X. Мультинорму $\overline{\mathfrak{M}}_{\varphi^{-1}}$, где $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение, называют ***фактор-мультинормой*** и обозначают $\mathfrak{M}_{X/X_0}$. Пространство $(X/X_0,\ \mathfrak{M}_{X/X_0})$

называют *фактор-пространством* пространства X по подпространству X_0.

5.3.12. *Фактор-пространство X/X_0 хаусдорфово в том и только в том случае, если X_0 замкнуто.* $\triangleleft\triangleright$

5.4. Метризуемые и нормируемые пространства

5.4.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство. Назовем $(X,\ \mathfrak{M})$ *метризуемым*, если существует такая метрика d на X, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_d$. Если на X существует норма, эквивалентная исходной мультинорме $\mathfrak{M}$, то X называют *нормируемым*. Если же на X существует счетная мультинорма, эквивалентная исходной, то X называют *счетнонормируемым*.

5.4.2. ***Критерий метризуемости.*** *Мультинормированное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно счетнонормируемо и хаусдорфово.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_d$. Переходя, если нужно, к мультинорме $\overline{\mathfrak{M}}$, будем считать, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такие полунорму $p_n \in \mathfrak{M}$ и число $t_n > 0$, для которых $\{d \le 1/n\} \supset \{d_{p_n} \le t_n\}$. Положим $\mathfrak{N} := \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Несомненно, что $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$. Если $V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, то $V \supset \{d \le 1/n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ по определению метрической равномерности. Значит, по построению $V \in \mathscr{U}_{p_n} \subset \mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$, т. е. $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Хаусдорфовость $\mathscr{U}_d$ отмечена в 4.1.7. Привлекая 5.2.6, видим, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ и $\mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$ хаусдорфовы.

$\Leftarrow$: Переходя, если нужно, к эквивалентной мультинорме, будем считать, что пространство счетнонормировано и хаусдорфово: $\mathfrak{M} := \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathfrak{M}$ — хаусдорфова мультинорма.

Для $x_1,\ x_2 \in X$ положим

$$d(x_1,\ x_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_1 - x_2)}{1 + p_k(x_1 - x_2)}$$

(ряд в правой части этой формулы мажорируется сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$, так что определение d корректно).

Проверим, что d — это метрика. Достаточно убедиться лишь в справедливости неравенства треугольника. Прежде всего, положим $\alpha(t) := t(1+t)^{-1}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$. Ясно, что $\alpha'(t) = (1+t)^{-2} > 0$.

Стало быть, функция α возрастает. При этом α субаддитивна:

$$\alpha(t_1+t_2) = (t_1+t_2)(1+t_1+t_2)^{-1} =$$
$$= t_1(1+t_1+t_2)^{-1} + t_2(1+t_1+t_2)^{-1} \le t_1(1+t_1)^{-1} + t_2(1+t_2)^{-1} =$$
$$= \alpha(t_1) + \alpha(t_2).$$

Значит, для $x,\ y,\ z \in X$ выполнено

$$d(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\alpha(p_k(x-y)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\alpha(p_k(x-z)+p_k(z-y)) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(\alpha(p_k(x-z)+\alpha(p_k(z-y))) = d(x,\ z) + d(z,\ y).$$

Осталось установить совпадение $\mathscr{U}_d$ и $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$.

Проверим сначала, что $\mathscr{U}_d \subset \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. Возьмем цилиндр $\{d \le \varepsilon\}$, и пусть $(x,\ y) \in \{d_{p_1} \le t\} \cap \ldots \cap \{d_{p_n} \le t\}$. Тогда с учетом монотонности α получаем

$$d(x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} \le$$
$$\le \frac{t}{1+t}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \le \frac{t}{1+t} + \frac{1}{2^n}.$$

Так как $t(1+t)^{-1} + 2^{-n}$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$ и $t \to 0$, для подходящих t и n будет $(x,\ y) \in \{d \le \varepsilon\}$. Значит, $\{d \le \varepsilon\} \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, что и нужно.

Установим теперь, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} \subset \mathscr{U}_d$. Для этого следует при данных $p_n \in \mathfrak{M}$ и $t > 0$ подыскать $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\{d_{p_n} \le t\} \supset \{d \le \varepsilon\}$. Очевидно, можно взять

$$\varepsilon := \frac{1}{2^n}\frac{t}{1+t},$$

поскольку из соотношений

$$\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \le d(x,\ y) \le \varepsilon = \frac{1}{2^n}\frac{t}{1+t}$$

для любых $x,\ y$ вытекает, что $p_n(x-y) \le t$. $\triangleright$

5.4.3. Определение. Множество V в мультинормированном пространстве $(X,\ \mathfrak{M})$ называют *ограниченным*, если $\sup p(V) < +\infty$ при всех $p \in \mathfrak{M}$, т. е. если числовое множество $p(V)$ ограничено сверху в $\mathbb{R}$ для каждой полунормы p из $\mathfrak{M}$.

5.4.4. *Для множества V в $(X,\ \mathfrak{M})$ эквивалентны утверждения:*

(1) *V — ограничено;*

(2) *для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в V и последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{F}$ такой, что $\lambda_n \to 0$, выполнено $\lambda_n x_n \to 0$ (т. е. $p(\lambda_n x_n) \to 0$ для всякой полунормы $p \in \mathfrak{M}$);*

(3) *V поглощается каждой окрестностью нуля.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): $p(\lambda_n x_n) \le |\lambda_n| p(x_n) \le |\lambda_n| \sup p(V) \to 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $U \in \tau_X(0)$ и не верно, что U поглощает V. По определению 3.4.9 это значит, что $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, x_n \in V)\ x_n \notin nU$. Таким образом, $1/n\, x_n \notin U$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $(1/n\, x_n)$ не стремится к нулю.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть $p \in \mathfrak{M}$. Найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $V \subset nB_p$. Ясно, что $\sup p(V) \le \sup p(nB_p) = n < +\infty$. $\rhd$

5.4.5. ***Критерий Колмогорова.*** *Мультинормированное пространство нормируемо в том и только в том случае, если оно хаусдорфово и имеет ограниченную окрестность нуля.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: Пусть V — ограниченная окрестность нуля. Не нарушая общности, можно считать, что $V = B_p$ для некоторой полунормы p из исходной мультинормы $\mathfrak{M}$. Несомненно, что $p \prec \mathfrak{M}$. Если теперь $U \in \tau_{\mathfrak{M}}(0)$, то $nU \supset V$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $U \in \tau_p(0)$. Привлекая теорему 5.3.2, видим, что $p \succ \mathfrak{M}$. Таким образом, $p \sim \mathfrak{M}$ и, стало быть, в силу 5.2.12, p также хаусдорфова полунорма. Последнее означает, что p — норма. $\rhd$

5.4.6. Замечание. Попутно в 5.4.5 установлено, что наличие ограниченной окрестности нуля в мультинормированном пространстве равносильно его полунормируемости.

5.5. Банаховы пространства

5.5.1. Определение. Полное нормированное пространство называют *банаховым*.

5.5.2. Замечание. Непосредственным расширением класса банаховых пространств служат полные метризуемые мультинормированные пространства — *пространства Фреше*. Можно сказать, что пространства Фреше составляют наименьший класс, содержащий банаховы пространства и замкнутый относительно образования счетных произведений. $\triangleleft\triangleright$

5.5.3. *Нормированное пространство является банаховым в том и только в том случае, если любой абсолютно* (= *нормально*) *сходящийся ряд в нем сходится.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < +\infty$ для некоторой счетной последовательности (x_n). Тогда последовательность частичных сумм $s_n := x_1 + \ldots + x_n$ фундаментальна, ибо при $m > k$ справедливы соотношения

$$\|s_m - s_k\| = \left\|\sum_{n=k+1}^{m} x_n\right\| \le \sum_{n=k+1}^{m}\|x_n\| \to 0.$$

$\Leftarrow$: Пусть (x_n) — счетная фундаментальная последовательность. Выберем возрастающую последовательность $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такую, чтобы было $\|x_n - x_m\| \le 2^{-k}$ при $n,\ m \ge n_k$. Тогда ряд $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \ldots$ абсолютно сходится к некоторой сумме x, т. е. $x_{n_k} \to x$. Видно, что одновременно с этим $x_n \to x$. $\triangleright$

5.5.4. *Пусть X — банахово пространство и X_0 — замкнутое подпространство в X. Тогда фактор-пространство X/X_0 банахово.*

$\triangleleft$ Пусть $\varphi : X \to \mathscr{X} := X/X_0$ — соответствующее каноническое отображение. Несомненно, что для каждого элемента $\overline{x} \in \mathscr{X}$ существует элемент $x \in \varphi^{-1}(\overline{x})$ такой, что $2\|\overline{x}\| \ge \|x\| \ge \|\overline{x}\|$. Значит, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{x}_n$, абсолютно сходящегося в $\mathscr{X}$, можно выбрать $x_n \in \varphi^{-1}(\overline{x}_n)$, обеспечив сходимость ряда норм $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$. На основании 5.5.3 имеется сумма $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Пусть $\overline{x} := \varphi(x)$. Тогда

$$\left\|\overline{x} - \sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k\right\| \le \left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \to 0.$$

Вновь апеллируя к 5.5.3, выводим, что $\mathscr{X}$ банахово. $\triangleright$

5.5.5. Замечание. Понятно, что 5.5.3 можно перенести на полунормированные пространства. В частности, *если $(X,\ p)$ — полное полунормированное пространство, то фактор-пространство $X/\ker p$ банахово.* $\triangleleft\triangleright$

5.5.6. Теорема. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $X \neq 0$. Пространство ограниченных операторов $B(X,\ Y)$ является банаховым в том и только в том случае, если Y банахово.*

$\lhd$ $\Leftarrow$: Пусть (T_n) — последовательность Коши в $B(X,\ Y)$. По нормативному неравенству для всех $x \in X$ выполнено $\|T_m x - T_k x\| \leq \|T_m - T_k\|\,\|x\| \to 0$, т. е. $(T_n x)$ — фундаментальная последовательность в Y. Таким образом, есть предел $Tx := \lim T_n x$. Бесспорно, что возникающее отображение T — линейный оператор. В силу оценки $|\|T_m\| - \|T_k\|| \leq \|T_m - T_k\|$ последовательность $(\|T_n\|)$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, потому и ограничена, т. е. $\sup_n \|T_n\| < +\infty$. Отсюда, переходя к пределу в неравенстве $\|T_n x\| \leq \sup_n \|T_n\|\,\|x\|$, получаем: $\|T\| < +\infty$. Осталось проверить, что $\|T_n - T\| \to 0$. Возьмем для заданного $\varepsilon > 0$ номер n_0 так, чтобы было $\|T_m - T_n\| \leq \varepsilon/2$ при $m,\ n \geq n_0$. Помимо этого, для $x \in B_X$ подберем $m \geq n_0$, для которого $\|T_m x - Tx\| \leq \varepsilon/2$. Тогда $\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_m x\| + \|T_m x - Tx\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_m x - Tx\| \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Значит, $\|T_n - T\| = \sup\{\|T_n x - Tx\| :\ x \in B_X\} \leq \varepsilon$ при достаточно больших n.

$\Rightarrow$: Пусть (y_n) — последовательность Коши в Y. По условию существует элемент $x \in X$ с нормой $\|x\| = 1$. Привлекая 3.5.6 и 3.5.2 (1), подыщем элемент $x' \in |\partial|(\|\cdot\|)$, для которого $(x,\ x') = \|x\| = 1$. Очевидно, что одномерный оператор $T_n := x' \otimes y_n : x \mapsto (x,\ x')y_n$ входит в $B(X,\ Y)$, ибо $\|T_n\| = \|x'\|\,\|y_n\|$. Значит, $\|T_m - T_k\| = \|x' \otimes (y_m - y_k)\| = \|x'\|\,\|y_m - y_k\| = \|y_m - y_k\|$, т. е. (T_n) — фундаментальная последовательность в $B(X,\ Y)$. Обозначим $T := \lim T_n$. Тогда $\|Tx - T_n x\| = \|Tx - y_n\| \leq \|T - T_n\|\,\|x\| \to 0$. Иначе говоря, Tx — предел (y_n) в Y. $\rhd$

5.5.7. Следствие. *Сопряженное пространство (с сопряженной нормой) банахово.* $\lhd\rhd$

5.5.8. Следствие. *Пусть X — нормированное пространство, $\iota :\ X \to X''$ — двойное штрихование, осуществляющее каноническое вложение X во второе сопряженное пространство X''. Тогда замыкание $\operatorname{cl} \iota(X)$ — пополнение X.*

$\lhd$ В силу 5.5.7, X'' — банахово пространство. По 5.1.10 (8) отображение ι — это изометрия X в X''. Осталось сослаться на 4.5.16. $\rhd$

5.5.9. Примеры.

(1) «Абстрактные» примеры: основное поле, замкнутое подпространство банахова пространства, произведение банаховых пространств, 5.5.4–5.5.8.

(2) Пусть $\mathscr{E}$ — непустое множество. Для $x \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ положим $\|x\|_\infty := \sup |x(\mathscr{E})|$. Пространство $l_\infty(\mathscr{E}) := l_\infty(\mathscr{E}, \mathbb{F}) := \operatorname{dom} \|\cdot\|_\infty$ называют ***пространством ограниченных функций на*** $\mathscr{E}$. Используют и такие обозначения: $B(\mathscr{E})$ или $B(\mathscr{E}, \mathbb{F})$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ полагают $m := l_\infty := l_\infty(\mathscr{E})$.

(3) Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в $\mathscr{E}$. По определению считают $x \in c(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \Leftrightarrow (x \in l_\infty(\mathscr{E})$ и $x(\mathscr{F})$ — фильтр Коши в $\mathbb{F})$.

В случае, когда $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ и $\mathscr{F}$ — фильтр дополнений конечных множеств в $\mathbb{N}$, пишут $c := c(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ и говорят о ***пространстве сходящихся последовательностей***. В $c(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ рассматривают подпространство $c_0(\mathscr{E}, \mathscr{F}) := \{x \in c(\mathscr{E}, \mathscr{F}) : \ x(\mathscr{F}) \to 0\}$.

Если $\mathscr{F}$ — фильтр дополнений конечных множеств в бесконечном $\mathscr{E}$, то применяют сокращенную запись $c_0(\mathscr{E}) := c_0(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ и говорят о ***пространстве функций, исчезающих на бесконечности***. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут просто $c_0 := c_0(\mathscr{E})$. Пространство c_0 называют ***пространством сходящихся к нулю последовательностей***. Следует помнить, что все эти пространства без особых оговорок наделяют нормой, взятой из соответствующего пространства $l_\infty(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

(4) Пусть $S := (\mathscr{E}, X, \int)$ — система с интегрированием. Таким образом, X — векторная решетка в $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$, причем решеточные операции в X и $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$ совпадают, а $\int : X \to \mathbb{R}$ — ***(пред)интеграл***, т. е. $\int \in X_+^{\#}$ и $\int x_n \downarrow 0$, как только $x_n \in X$ и $x_n(e) \downarrow 0$ для $e \in \mathscr{E}$. Пусть, далее, $f \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ — измеримое (относительно S) отображение (можно, как это обычно и принято, говорить о почти везде конечных почти везде определенных измеримых функциях).

Положим $\mathscr{N}_p(f) := (\int |f|^p)^{1/p}$ для $p \geq 1$, где $\int$ — соответствующее лебегово расширение исходного интеграла $\int$ (использование единого символа — традиционная вольность).

Элементы $\operatorname{dom} \mathscr{N}_1$ называют ***интегрируемыми*** или ***суммируемыми*** функциями.

Интегрируемость $f \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ равносильна интегрируемости ее вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f \in \mathbb{R}^{\mathscr{E}}$. Для полноты напомним, что $\mathscr{N}_1(f) = N(f)$, где

$$N(g) :=$$

$$:= \inf\left\{\sup\int x_n : (x_n) \subset X,\ x_n \le x_{n+1},\ (\forall\, e \in \mathscr{E})\ |g(e)| = \lim_n\ x_n(e)\right\}$$

для произвольной $g \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$. При $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ясно, что $\operatorname{dom}\mathscr{N}_1$ представляет замыкание X в полунормированном пространстве $(\operatorname{dom} N,\ N)$.

Имеет место неравенство Гёльдера

$$\mathscr{N}_1(fg) \le \mathscr{N}_p(f)\mathscr{N}_{p'}(g) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ p > 1\right).$$

$\triangleleft$ Это неравенство есть следствие *неравенства Юнга*:

$$xy - \frac{x^p}{p} \le \frac{y^{p'}}{p'} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}_+),$$

примененного к $|f|/\mathscr{N}_p(f)$ и $|g|/\mathscr{N}_{p'}(g)$ в случае, когда $\mathscr{N}_p(f)$ и $\mathscr{N}_{p'}(g)$ не равны нулю одновременно. При $\mathscr{N}_p(f)\mathscr{N}_{p'}(g) = 0$ неравенство Гёльдера несомненно. $\triangleright$

Множество $\mathscr{L}_p := \operatorname{dom}\mathscr{N}_p$ *является векторным пространством.*

$$\triangleleft\ |f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le 2^p(|f|\vee|g|)^p = 2^p(|f|^p\vee|g|^p) \le 2^p(|f|^p+|g|^p)\ \triangleright$$

Функция $\mathscr{N}_p$ — *полунорма, ибо для нее справедливо неравенство Минковского*

$$\mathscr{N}_p(f+g) \le \mathscr{N}_p(f) + \mathscr{N}_p(g).$$

$\triangleleft$ При $p = 1$ неравенство Минковского несомненно. При $p > 1$ неравенство Минковского следует из представления

$$\mathscr{N}_p(f) = \sup\{\mathscr{N}_1(fg)/\mathscr{N}_{p'}(g) :\ 0 < \mathscr{N}_{p'}(g) < +\infty\} \quad (f \in \mathscr{L}_p),$$

в правой части которого стоит верхняя огибающая семейства полунорм.

Для доказательства нужного представления в силу неравенства Гёльдера достаточно заметить, что при $\mathscr{N}_p(f) > 0$ для $g := |f|^{p/p'}$ выполнено $g \in \mathscr{L}_{p'}$ и, кроме того, $\mathscr{N}_p(f) = \mathscr{N}_1(fg)/\mathscr{N}_{p'}(g)$.

В самом деле, $\mathscr{N}_1(fg) = \int |f|^{p/p'+1} = \mathscr{N}_p(f)^p$, ибо $p/p' + 1 = p\,(1 - 1/p) + 1 = p$. Помимо этого, $\mathscr{N}_{p'}(g)^{p'} = \int |g|^{p'} = \int |f|^p = \mathscr{N}_p(f)^p$, так что $\mathscr{N}_{p'}(g) = \mathscr{N}_p(f)^{p/p'}$. Окончательно получаем

$$\mathscr{N}_1(fg)/\mathscr{N}_{p'}(g) = \mathscr{N}_p(f)^p/\mathscr{N}_p(f)^{p/p'} =$$
$$= \mathscr{N}_p(f)^{p-p/p'} = \mathscr{N}_p(f)^{p(1-1/p')} = \mathscr{N}_p(f),$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

Элементы $\operatorname{dom}\mathscr{N}_1$ называют *интегрируемыми* или *суммируемыми* функциями. Интегрируемость $f \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ равносильна интегрируемости вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f,\ \operatorname{Im} f \in \mathbb{R}^{\mathscr{E}}$. Ради полноты, напомним, что

$$N(g) :=$$
$$:= \inf\left\{\sup_n \int x_n :\ (x_n) \subset X,\ x_n \le x_{n+1},\ (\forall\, e \in \mathscr{E})\ |g(e)| \le \lim_n x_n(e)\right\}$$

для произвольного $g \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$. Если $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, то $\operatorname{dom}\mathscr{N}_1$, очевидно, представляет собой замыкание X в нормированном пространстве $(\operatorname{dom} N,\ N)$.

Фактор-пространство $\mathscr{L}_p/\ker\mathscr{N}_p$, наделенное соответствующей фактор-нормой $\|\cdot\|_p$, называют *пространством функций, суммируемых* (*вместе*) *с p-той степенью*, или пространством p-суммируемых функций и обозначают L_p. Конечно, используют и более развернутые символы типа $L_p(S)$, $L_p(\mathscr{E},\ X,\ \int)$ и т. п.

Наконец, если система с интегрируемостью S возникает из рассмотрения ступенчатых измеримых функций на *пространстве с мерой* $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mu)$, то пишут $L_p(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mu)$, $L_p(\Omega,\ \mu)$ и даже $L_p(\mu)$, где остальные параметры рассматриваемой ситуации ясны из контекста.

Теорема Рисса — Фишера. *Пространство L_p является банаховым.*

$\lhd$ Наметим доказательство. Возьмем какой-либо абсолютно сходящийся ряд $t := \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_p(f_k)$, где $f_k \in \mathscr{L}_p$. Положим $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ и $s_n := \sum_{k=1}^{n} |f_k|$. Видно, что последовательность (s_n) состоит из положительных функций и является возрастающей. Это же верно для последовательности (s_n^p). Более того, $\int s_n^p \le t^p < +\infty$. По теореме Леви о монотонной сходимости почти для каждого $e \in \mathscr{E}$ предел $g(e) := \lim s_n^p(e)$ конечен и можно считать, что возникающая функция g лежит в $\mathscr{L}_1$. Полагая $h(e) := g^{1/p}(e)$, видим, что $h \in \mathscr{L}_p$ и $s_n(e) \to h(e)$ почти при всех $e \in \mathscr{E}$. Из неравенств $|\sigma_n| \le s_n \le h$ вытекает, что почти для любого $e \in \mathscr{E}$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(e)$. Для суммы $f_0(e)$ будет $|f_0(e)| \le h(e)$, и, стало быть, можно считать, что $f_0 \in \mathscr{L}_p$. Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости (= о предельном переходе), заключаем: $\mathscr{N}_p(\sigma_n - f_0) = \left(\int |\sigma_n - f_0|^p\right)^{1/p} \to 0$. Итак, абсолютно сходящийся ряд в полунормированном пространстве $(\mathscr{L}_p,\ \mathscr{N}_p)$ сходится. Остается сослаться на 5.5.3–5.5.5. $\triangleright$

Если система S — это «обычное суммирование» на $\mathscr{E}$, т. е. в случае, когда $X := \sum_{e \in \mathscr{E}} \mathbb{R}$ — прямая сумма основных полей $\mathbb{R}$ и $\int x := \sum_{e \in \mathscr{E}} x(e)$, пространство L_p состоит из *семейств, суммируемых с p-той степенью*. Это пространство обозначают $l_p(\mathscr{E})$. При этом $\|x\|_p := \left(\sum_{e \in \mathscr{E}} |x(e)|^p\right)^{1/p}$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут просто l_p и говорят о *пространстве последовательностей, суммируемых с p-той степенью.*

(5) Пространство L_∞ определяют на основе следующей конструкции. Пусть X — упорядоченное векторное пространство и $e \in X_+$ — положительный элемент. *Полунормой p_e, ассоциированной с e*, называют функционал Минковского промежутка $[-e,\ e]$, т. е.

$$p_e(x) := \inf\{t > 0 :\ -te \le x \le te\}.$$

Пространство X_e, совпадающее с эффективной областью определения $\operatorname{dom} p_e$, называют *пространством ограниченных по отношению к e элементов*, а сам элемент e — *сильной единицей* в X_e. Элементы ядра $\ker p_e$ называют *неархимедовыми* (по отношению к e).

Фактор-пространство $X_e / \ker p_e$ наделяют фактор-полунормой и называют *нормированным пространством ограниченных элементов, порожденным e (в X)*. Так, пространство $C(Q,\ \mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на непустом компакте Q есть нормированное пространство ограниченных элементов, порожденное функцией $\mathbf{1} := \mathbf{1}_Q :\ q \mapsto 1\ (q \in Q)$ (в себе). В пространстве $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$ та же функция $\mathbf{1}$ порождает пространство $l_\infty(\mathscr{E})$.

Для системы с интегрированием $S := \left(\mathscr{E},\ X,\ \int\right)$ в предположении измеримости $\mathbf{1}$ рассматривают пространство таких измеримых функций из $\mathscr{E}$ в $\mathbb{F}$, что

$$\mathscr{N}_\infty(f) := \inf\{t > 0 : \ |f| \le t\mathbf{1}\} < +\infty,$$

где $\le$ означает «меньше почти везде». Это пространство называют пространством *существенно ограниченных функций* и обозначают $\mathscr{L}_\infty$.

Фактор-пространство $\mathscr{L}_\infty / \ker \mathscr{N}_\infty$ обозначают L_∞, а норму в нем — $\|\cdot\|_\infty$. Элементы L_∞, допуская вольность речи, называют (как и элементы $\mathscr{L}_\infty$) существенно ограниченными функциями. Пространство L_∞ является банаховым. $\triangleleft\triangleright$

Пространству L_∞, так же, как и пространствам $C(Q,\ \mathbb{F}), l_p(\mathscr{E})$, $c_0(\mathscr{E})$, c, l_p, L_p $(p \ge 1)$, присвоено название «классическое банахово пространство». В последнее время к числу классических относят также *пространства Линденштраусса*, т. е. пространства, сопряженные к которым изометричны L_1 (относительно какой-нибудь системы с интегрированием). Можно показать, что банахово пространство X является классическим в том и только в том случае, если сопряженное пространство X' изометрично одному из пространств L_p при $p \ge 1$.

(6) Пусть $S := \left(\mathscr{E},\ X,\ \int\right)$ — система с интегрированием и $p \ge 1$. Допустим, что для каждого $e \in \mathscr{E}$ имеется банахово пространство $(Y_e,\ \|\cdot\|_{Y_e})$. Возьмем любой элемент $f \in \prod_{e \in \mathscr{E}} Y_e$ и положим $|\!|\!| f |\!|\!| :\ e \mapsto \|f(e)\|_{Y_e}$. Пусть, далее, $N_p(f) := \inf\{\mathscr{N}_p(g) :\ g \in \mathscr{L}_p,\ g \ge |\!|\!| f |\!|\!|\}$. Ясно, что $\operatorname{dom} N_p$ — векторное пространство с полунормой N_p. Фактор-пространство $\operatorname{dom} N_p / \ker N_p$ с соответствующей нормой $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_p$ называют *суммой семейства* $(Y_e)_{e \in \mathscr{E}}$ *по типу* p (точнее, по типу L_p в системе с интегрированием S).

Сумма по типу p семейства пространств — банахово пространство.

$\triangleleft$ Пусть $\sum_{k=1}^\infty N_p(f_k) < +\infty$. Тогда последовательность частичных сумм $(s_n := \sum_{k=1}^n |\!|\!| f_k |\!|\!|)$ сходится к некоторой почти везде конечной положительной функции g и $N_p(g) < +\infty$. Отсюда видно, что почти для каждого $e \in \mathscr{E}$ сходится последовательность $(s_n(e))$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^\infty \|f_k(e)\|_{Y_e}$. Из-за полноты Y_e получаем, что ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(e)$ сходится к некоторой сумме $f_0(e)$ в Y_e почти при любом $e \in \mathscr{E}$. Поскольку $\|f_0(e)\|_{Y_e} \le g(e)$ почти при всех $e \in \mathscr{E}$, можно считать, что $f_0 \in \operatorname{dom} N_p$. Наконец, $N_p\left(\sum_{k=1}^n f_k - f_0\right) \le \sum_{k=n+1}^\infty N_p(f_k) \to 0$. $\triangleright$

В случае $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ и «обычного суммирования» сумму $\mathfrak{Y}$ последовательности банаховых пространств $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ часто обозначают

$$\mathfrak{Y} := (Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots)_p,$$

где p — тип суммирования. Элемент $\overline{y}$ пространства $\mathfrak{Y}$ — это последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $y_n \in Y_n$ и

$$|\!|\!|\overline{y}|\!|\!|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_n\|^p_{Y_n} \right)^{1/p} < +\infty.$$

В случае, когда $Y_e := \mathfrak{X}$ при любом $e \in \mathscr{E}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторое банахово пространство над $\mathbb{F}$, полагают $\mathscr{F}_p := \operatorname{dom} N_p$ и $F_p := \mathscr{F}_p / \ker N_p$. Элементы полученных пространств называют *векторными полями* или *$\mathfrak{X}$-значными функциями* на $\mathscr{E}$ (с нормами, суммируемыми с p-той степенью). Несомненно, что пространство F_p является банаховым. В то же время если в исходной системе с интегрированием есть неизмеримое множество, то пространство F_p содержит чересчур много элементов (так, для обычной лебеговой системы с интегрированием $F_p \neq L_p$). В этой связи в пространстве $\mathscr{F}_p$ выделяют функции с конечными множествами значений, каждое из которых принимается на измеримом множестве. Такие элементы, рáвно как и отвечающие им классы в F_p, называют *простыми*, *конечнозначными*, *ступенчатыми* или *размещенными функциями*. Замыкание множества простых функций в F_p обозначают L_p (более развернуто: $L_p(\mathfrak{X})$, $L_p(S, \mathfrak{X})$, $L_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $L_p(\Omega, \mu)$ и т. п.) и называют *пространством $\mathfrak{X}$-значных функций, суммируемых с p-той степенью*, или же пространством p-суммируемых $\mathfrak{X}$-значных функций. Ясно, что $L_p(\mathfrak{X})$ — банахово пространство.

Проиллюстрируем одно из достоинств этих пространств в случае $p = 1$. Заметим прежде всего, что простую функцию f можно записать в виде «конечной комбинации характеристических функций»:

$$f = \sum_{x \in \operatorname{im} f} \chi_{f^{-1}(x)} x,$$

где множество $f^{-1}(x)$ измеримо при $x \in \operatorname{im} f$. Более того,

$$\int |\!|\!|f|\!|\!| = \int \sum_{x \in \operatorname{im} f} \|\chi_{f^{-1}(x)} x\| =$$

$$= \int \sum_{x \in \operatorname{im} f} \chi_{f^{-1}(x)} \|x\| = \sum_{x \in \operatorname{im} f} \|x\| \int \chi_{f^{-1}(x)} < +\infty.$$

Каждой простой функции f сопоставим элемент в $\mathfrak{X}$ по правилу:

$$\int f := \sum_{x \in \operatorname{im} f} \int \chi_{f^{-1}(x)} x.$$

Проверка показывает, что возникающий интеграл $\int$, определенный на подпространстве простых функций, линеен. Более того, он ограничен, ибо

$$\left\| \int f \right\| = \left\| \sum_{x \in \operatorname{im} f} \int \chi_{f^{-1}(x)} x \right\| \leq \sum_{x \in \operatorname{im} f} \int \chi_{f^{-1}(x)} \|x\| =$$

$$= \int \sum_{x \in \operatorname{im} f} \|x\| \chi_{f^{-1}(x)} = \int |\!|\!| f |\!|\!|.$$

В силу 4.5.10 и 5.3.8 оператор $\int$ допускает единственное продолжение до элемента пространства $B(L_1(\mathfrak{X}),\ \mathfrak{X})$. Этот элемент обозначают тем же символом $\int$ (или $\int_{\mathscr{E}}$ и т. п.) и называют *интегралом Бохнера.*

(7) В случае «обычного суммирования» приняты те же соглашения, что и в скалярной теории. Именно, вместо интегралов суммируемых функций говорят о *суммах суммируемых семейств* и используют соответствующие стандартные знаки. При этом бесконечномерность порождает свои проблемы.

Пусть (x_n) — семейство элементов банахова пространства. Его суммируемость означает суммируемость (в смысле интеграла Бохнера) числового семейства $(\|x_n\|)$, т. е. абсолютную сходимость (x_n). Тем самым среди (x_n) лишь счетное число ненулевых элементов и (x_n) можно считать (счетной) последовательностью. При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ (= ряд $x_1 + x_2 + \ldots$ абсолютно сходится). С учетом 5.5.3 для суммы ряда $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ выполнено: $x = \lim_\theta s_\theta$, где $s_\theta := \sum_{n \in \theta} x_n$ — (соответствующая θ) частичная сумма, а θ пробегает направление конечных подмножеств $\mathbb{N}$. В последней ситуации x изредка называют *неупорядоченной суммой* ряда (x_n), а последовательность (x_n) — *неупорядоченно суммируемой* к x (пишут: $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$). В этих терминах заключаем: суммируемость влечет неупорядоченную суммируемость (к той же сумме). При $\dim X < +\infty$ верно и обратное утверждение (= теорема Римана о рядах). Общий случай разъясняет следующий глубокий факт.

Теорема Дворецкого — Роджерса. *В каждом бесконечномерном банаховом пространстве X для любой последовательности положительных чисел (t_n) такой, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 < +\infty$, существует неупорядоченно суммируемая последовательность элементов (x_n), у которой $\|x_n\| = t_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

В этой связи для семейства элементов произвольного мультинормированного пространства $(X,\ \mathfrak{M})$ принимают следующую терминологию. Говорят, что *семейство* $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ *суммируемо* или *безусловно суммируемо* (к сумме x) и пишут $x := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e$ при условии, что x является пределом в $(X,\ \mathfrak{M})$ соответствующей сети частичных сумм (s_θ), где θ — конечное подмножество $\mathscr{E}$, т. е. $s_\theta \to x$ в $(X,\ \mathfrak{M})$. Если для каждого p существует сумма $\sum_{e\in\mathscr{E}} p(x_e)$, то говорят, что семейство $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ *абсолютно суммируемо* (или, что более правильно, *фундаментально суммируемо*, или даже *абсолютно фундаментально*).

Пусть в заключение $\mathfrak{Y}$ — еще одно банахово пространство и $T \in B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y})$. Оператор T естественным способом распространяют до оператора из $L_1(\mathfrak{X})$ в $L_1(\mathfrak{Y})$, полагая для простой $\mathfrak{X}$-значной функции f, что $Tf : e \mapsto Tf(e)$ при $e \in \mathscr{E}$. Тогда для $f \in L_1(\mathfrak{X})$ будет $Tf \in L_1(\mathfrak{Y})$ и $\int_{\mathscr{E}} Tf = T\int_{\mathscr{E}} f$. Последний факт выражают словами: «интеграл Бохнера коммутирует с ограниченными операторами». $\triangleleft\triangleright$

5.6. Алгебра ограниченных операторов

5.6.1. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, а $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ — линейные операторы. Тогда $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$, т. е. операторная норма является субмультипликативной.*

$\triangleleft$ В силу нормативных неравенств для $x \in X$ выполнено

$$\|STx\| \le \|S\|\ \|Tx\| \le \|S\|\ \|T\|\,\|x\|.\ \triangleright$$

5.6.2. Замечание. В алгебре, в частности, изучают (ассоциативные) *алгебры* над $\mathbb{F}$. Так называют векторное пространство A над $\mathbb{F}$, в котором имеется (ассоциативное) умножение элементов $\circ : (a,\ b) \mapsto ab$ $(a,\ b \in A)$. Предполагается, что умножение $\circ$ дистрибутивно относительно сложения (т. е. $(A,\ +,\ \circ)$ — это (ассоциативное) *кольцо*) и, кроме того, что операция $\circ$ *согласована с умножением на скаляр* в том смысле, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ при всех $a,\ b \in A$

и $\lambda \in \mathbb{F}$. Иными словами, в более развернутом виде алгебра — это набор $(A,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot,\ \circ)$. В то же время, как и в других аналогичных ситуациях, говорят просто об алгебре A.

5.6.3. Определение. *Нормированная алгебра* (над основным полем) — это ассоциативная алгебра (над этим полем), наделенная субмультипликативной нормой. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

5.6.4. *Пусть $B(X) := B(X,\ X)$ — пространство ограниченных эндоморфизмов нормированного пространства X. Пространство $B(X)$ с операцией суперпозиции операторов в качестве умножения и с операторной нормой представляет собой нормированную алгебру. При $X \neq 0$ в $B(X)$ есть единичный элемент I_X и $\|I_X\| = 1$. Алгебра $B(X)$ является банаховой в том и только в том случае, если X — банахово пространство.*

$\lhd$ Если $X = 0$, то все очевидно. Если же $X \neq 0$, то нужно воспользоваться 5.5.6. $\rhd$

5.6.5. Замечание. В связи с 5.6.4 за элементом λI_X, где $\lambda \in \mathbb{F}$, удобно закрепить тот же самый символ λ. (В частности, $1 = I_0 = 0!$) При $X \neq 0$ описанную процедуру можно мыслить как отождествление основного поля $\mathbb{F}$ и одномерного подпространства $\mathbb{F}I_X$.

5.6.6. Определение. Пусть X — нормированное пространство и $T \in B(X)$. Число $r(T) := \inf\left\{\|T^n\|^{1/n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ называют *спектральным радиусом* T. (Естественность этого термина станет ясной несколько позже (ср. 8.1.12).)

5.6.7. $r(T) \leq \|T\|$.

$\lhd$ Действительно, в силу 5.6.1, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. $\rhd$

5.6.8. *Справедлива формула Гельфанда*

$$r(T) = \lim \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

$\lhd$ Пусть $\varepsilon > 0$ и $s \in \mathbb{N}$ таковы, что $\|T^s\| \leq (r(T) + \varepsilon)^s$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в случае $n \geq s$ имеется представление $n = k(n)s + l(n)$, где $k(n),\ l(n) \in \mathbb{N}$ и $0 \leq l(n) \leq s - 1$. Значит,

$$\|T^n\| = \|T^{k(n)s}T^{l(n)}\| \leq \|T^s\|^{k(n)}\,\|T^{l(n)}\| \leq$$

$$\leq \left(1 \vee \|T\| \vee \ldots \vee \|T^{s-1}\|\right) \|T^s\|^{k(n)} = M \, \|T^s\|^{k(n)}.$$

Следовательно,

$$r(T) \leq \|T^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} \|T^s\|^{k(n)/n} \leq$$

$$\leq M^{1/n} (r(T)+\varepsilon)^{k(n)s/n} = M^{1/n} (r(T)+\varepsilon)^{(n-l(n))/n}.$$

Так как $M^{1/n} \to 1$ и $(n-l(n))/n \to 1$, то $r(T) \leq \limsup \|T^n\|^{1/n} \leq r(T)+\varepsilon$. Соотношение $\liminf \|T^n\|^{1/n} \geq r(T)$ очевидно. В силу произвольности ε получаем требуемое. $\rhd$

5.6.9. *Теорема о сходимости ряда Неймана.* *Пусть X — банахово пространство и $T \in B(X)$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *ряд Неймана $1+T+T^2+\ldots$ сходится в операторной норме пространства $B(X)$;*

(2) *$\|T^k\| < 1$ для некоторого k из $\mathbb{N}$;*

(3) *$r(T) < 1$.*

При выполнении одного из условий (1)–(3) *будет* $\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (1-T)^{-1}$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Если ряд Неймана сходится, то общий член (T^k) стремится к нулю.

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1): На основании 5.6.8 при подходящем $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ будет $r(T) \leq \|T^k\|^{1/k} \leq r(T)+\varepsilon < 1$. Иными словами, хвост ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|$ мажорирован сходящимся рядом. Учитывая полноту $B(X)$ и критерий 5.5.3, заключаем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ сходится в пространстве $B(X)$.

Пусть теперь $S := \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ и $S_n := \sum_{k=0}^{n} T^k$. Тогда

$$S(1-T) = \lim S_n(1-T) = \lim \left(1+T+\ldots+T^n\right)(1-T) =$$

$$= \lim (1-T^{n+1}) = 1;$$

$$(1-T)S = \lim (1-T)S_n = \lim (1-T)(1+T+\ldots+T^n) =$$

$$= \lim \left(1-T^{n+1}\right) = 1,$$

ибо $T^n \to 0$. Итак, в силу 2.2.7, $S = (1-T)^{-1}$. $\rhd$

5.6.10. *Следствие.* *Если $\|T\| < 1$, то оператор $(1 - T)$ (непрерывно) обратим (= имеет ограниченный обратный), т. е. обратное соответствие — ограниченный линейный оператор. При этом $\|(1 - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$.*

$\lhd$ Ряд Неймана сходится, причем

$$\|(1 - T)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = (1 - \|T\|)^{-1}. \ \rhd$$

5.6.11. *Следствие.* *Если $\|1 - T\| < 1$, то T обратим и*

$$\|1 - T^{-1}\| \leq \frac{\|1 - T\|}{1 - \|1 - T\|}.$$

$\lhd$ По теореме 5.6.9,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - T)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - T)^k = (1 - (1 - T))^{-1} = T^{-1}.$$

Отсюда выводим:

$$\|T^{-1} - 1\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (1 - T)^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(1 - T)^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1 - T\|^k. \ \rhd$$

5.6.12. *Теорема Банаха об обратимых операторах.* *Пусть X и Y — банаховы пространства. Множество (непрерывно) обратимых операторов открыто. При этом операция обращения оператора $T \mapsto T^{-1}$ является непрерывным отображением.*

$\lhd$ Пусть операторы $S,\ T \in B(X,\ Y)$ таковы, что $T^{-1} \in B(Y,\ X)$ и, кроме того, $\|T^{-1}\|\,\|S - T\| \leq 1/2$. Рассмотрим оператор $T^{-1}S \in B(X)$. Имеем

$$\|1 - T^{-1}S\| = \|T^{-1}T - T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T - S\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

В силу 5.6.11, $(T^{-1}S)^{-1}$ — это элемент $B(X)$.

Положим $R := (T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$. Ясно, что $R \in B(Y,\ X)$ и, кроме того,

$$R = S^{-1}(T^{-1})^{-1}T^{-1} = S^{-1}.$$

Помимо этого,

$$\|S^{-1}\| - \|T^{-1}\| \leq \|S^{-1} - T^{-1}\| =$$

$$= \|S^{-1}(T - S)T^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\| \, \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{2}\|S^{-1}\|.$$

Отсюда $\|S^{-1}\| \leq 2\|T^{-1}\|$. Окончательно

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\| \, \|T^{-1}\| \leq 2\|T^{-1}\|^2 \|T - S\|. \ \triangleright$$

5.6.13. Определение. Пусть X — банахово пространство над $\mathbb{F}$ и $T \in B(X)$. Скаляр $\lambda \in \mathbb{F}$ называют *регулярным* или *резольвентным значением* T, если $(\lambda - T)^{-1} \in B(X)$. При этом полагают $R(T,\ \lambda) := (\lambda - T)^{-1}$ и называют оператор $R(T,\ \lambda)$ *резольвентой* (оператора T в точке λ). Множество резольвентных значений обозначают $\operatorname{res}(T)$. Отображение $\lambda \mapsto R(T,\ \lambda)$ из $\operatorname{res}(T)$ в $B(X)$ также называют *резольвентой* оператора T. Множество $\mathbb{F} \setminus \operatorname{res}(T)$ называют *спектром* T и обозначают $\operatorname{Sp}(T)$ или $\sigma(T)$. Элементы спектра называют *спектральными значениями*.

5.6.14. Замечание. Если $X = 0$, то спектр единственного оператора $T = 0 \in B(X)$ равен пустому множеству. В этой связи в спектральном анализе молчаливо предполагают, что $X \neq 0$. В случае $X \neq 0$ при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ спектр также бывает пустым, а при $\mathbb{F} := \mathbb{C}$ — не бывает (ср. 8.1.11). $\triangleleft\triangleright$

5.6.15. *Множество* $\operatorname{res}(T)$ *открыто, причем если* $\lambda_0 \in \operatorname{res}(T)$, *то в некоторой окрестности* λ_0 *выполнено*

$$R(T,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \lambda_0)^k R(T,\ \lambda_0)^{k+1}.$$

Если $|\lambda| > \|T\|$, *то* $\lambda \in \operatorname{res}(T)$ *и имеет место разложение*

$$R(T,\ \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k},$$

причем $\|R(T,\ \lambda)\| \to 0$ *при* $|\lambda| \to +\infty$.

$\lhd$ Поскольку $\|(\lambda - T) - (\lambda_0 - T)\| = |\lambda - \lambda_0|$, то открытость множества $\mathrm{res}(T)$ следует из 5.6.12. Кроме того,

$$\lambda - T = (\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - T) = (\lambda_0 - T)R(T,\ \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - T) =$$

$$= (\lambda_0 - T)((\lambda - \lambda_0)R(T,\ \lambda_0) + 1) = (\lambda_0 - T)(1 - ((-1)(\lambda - \lambda_0)R(T,\ \lambda_0))).$$

Значит, в подходящей окрестности точки λ_0 в силу 5.6.9 будет

$$R(T,\ \lambda) = (\lambda - T)^{-1} =$$

$$= (1 - ((-1)(\lambda - \lambda_0)R(T,\ \lambda_0)))^{-1}(\lambda_0 - T)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \lambda_0)^k R(T,\ \lambda_0)^{k+1}.$$

На основании 5.6.9 при $|\lambda| > \|T\|$ имеется оператор $(1 - T/\lambda)^{-1}$, представляющий собой сумму ряда Неймана, т. е.

$$R(T,\ \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k}.$$

Очевидно

$$\|R(T,\ \lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|}. \ \rhd$$

5.6.16. *Спектр любого ограниченного оператора T компактен.*

5.6.17. Замечание. Полезно помнить, что неравенство $|\lambda| > r(T)$ представляет собой необходимое и достаточное условие сходимости ряда Лорана $R(T,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k/\lambda^{k+1}$, дающего разложение резольвенты в окрестности бесконечно удаленной точки (см. также 8.1.12).

5.6.18. *Оператор S коммутирует с оператором T в том и только в том случае, если S коммутирует с резольвентой T.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: $ST = TS \Rightarrow S(\lambda - T) = \lambda S - ST = \lambda S - TS = (\lambda - T)S \Rightarrow R(T,\ \lambda)S(\lambda - T) = S \Rightarrow R(T,\ \lambda)S = S\,R(T,\ \lambda)$ $(\lambda \in \mathrm{res}(T))$.

$\Leftarrow$: $SR(T,\ \lambda_0) = R(T,\ \lambda_0)S \Rightarrow S = R(T,\ \lambda_0)S(\lambda_0 - T) \Rightarrow (\lambda_0 - T)S = S(\lambda_0 - T) \Rightarrow TS = ST$. $\rhd$

5.6.19. *Если* $\lambda,\ \mu \in \operatorname{res}(T)$, *то имеет место первое резольвентное уравнение* (= *тождество Гильберта*)

$$R(T,\ \lambda) - R(T,\ \mu) = (\mu - \lambda)R(T,\ \mu)R(T,\ \lambda).$$

$\lhd$ «Умножая тождество $\mu - \lambda = (\mu - T) - (\lambda - T)$ сначала на $R(T,\ \lambda)$ справа, а затем на $R(T,\ \mu)$ слева», последовательно приходим к требуемому. $\rhd$

5.6.20. *Если* $\lambda,\ \mu \in \operatorname{res}(T)$, *то* $R(T,\ \lambda)R(T,\ \mu) = R(T,\ \mu) \circ R(T,\ \lambda)$. $\lhd\rhd$

5.6.21. *Для* $\lambda \in \operatorname{res}(T)$ *выполнено*

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(T,\ \lambda) = (-1)^k k!\, R(T,\ \lambda)^{k+1}. \ \lhd\rhd$$

5.6.22. *Теорема о спектре произведения.* *Спектры* $\operatorname{Sp}(ST)$ *и* $\operatorname{Sp}(TS)$ *могут отличаться лишь нулем.*

$\lhd$ Достаточно установить, что $1 \notin \operatorname{Sp}(ST) \Rightarrow 1 \notin \operatorname{Sp}(TS)$. В самом деле, тогда при $\lambda \notin \operatorname{Sp}(ST)$ и $\lambda \neq 0$ будет

$$1 \notin \frac{1}{\lambda}\operatorname{Sp}(ST) \Rightarrow 1 \notin \operatorname{Sp}\left(\frac{1}{\lambda}ST\right) \Rightarrow 1 \notin \operatorname{Sp}\left(\frac{1}{\lambda}TS\right) \Rightarrow \lambda \notin \operatorname{Sp}(TS).$$

Итак, рассмотрим случай $1 \notin \operatorname{Sp}(ST)$. Формальные разложения типа ряда Неймана —

$$(1 - ST)^{-1} \sim 1 + ST + (ST)(ST) + (ST)(ST)(ST) + \dots,$$

$$T(1 - ST)^{-1}S \sim TS + TSTS + TSTSTS + \dots \sim (1 - TS)^{-1} - 1$$

— наводят на мысль, что справедливо представление

$$(1 - TS)^{-1} = 1 + T(1 - ST)^{-1}S$$

(которое обеспечит соотношение $1 \notin \mathrm{Sp}(TS)$). Следующие прямые выкладки:

$$\begin{gathered}(1 + T(1 - ST)^{-1}S)(1 - TS) = \\ = 1 + T(1 - ST)^{-1}S - TS + T(1 - ST)^{-1}(-ST)S = \\ = 1 + T(1 - ST)^{-1}S - TS + T(1 - ST)^{-1}(1 - ST - 1)S = \\ = 1 + T(1 - ST)^{-1}S - TS + TS - T(1 - ST)^{-1}S = 1;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(1 - TS)(1 + T(1 - ST)^{-1}S) = \\ = 1 - TS + T(1 - ST)^{-1}S + T(-ST)(1 - ST)^{-1}S = \\ = 1 - TS + T(1 - ST)^{-1}S + T(1 - ST - 1)(1 - ST)^{-1}S = \\ = 1 - TS + T(1 - ST)^{-1}S + TS - T(1 - ST)^{-1}S = 1\end{gathered}$$

доказывают искомое представление, а вместе с тем и теорему. $\triangleright$

Упражнения

5.1. Доказать, что нормированное пространство конечномерно в том и только в том случае, если любой линейный функционал на нем ограничен.

5.2. Проверить, что в каждом векторном пространстве можно определить норму.

5.3. Установить, что векторное пространство конечномерно в том и только в том случае, если все нормы в нем эквивалентны.

5.4. Доказать, что отделимые мультиметрики задают одну и ту же топологию конечномерного пространства.

5.5. Каждую ли норму в $\mathbb{R}^N$ можно использовать для нормировки произведения N нормированных пространств?

5.6. Выяснить условия непрерывности конечномерного оператора, действующего в мультинормированных пространствах.

5.7. Описать операторные нормы в пространстве квадратных матриц. Когда такие нормы сравнимы?

5.8. Найти расстояние между гиперплоскостями в нормированном пространстве.

5.9. Выяснить общий вид непрерывных линейных функционалов в классических пространствах.

5.10. Изучить вопрос о рефлексивности классических банаховых пространств.

5.11. Выяснить взаиморасположение пространств l_p и l_q, L_p и L_q. Когда дополнение одного из элементов каждой пары плотно в оставшемся?

5.12. Найти спектр и резольвенту оператора Вольтерра, проектора, одномерного оператора.

5.13. Построить оператор, спектр которого — наперед заданный непустой компакт в $\mathbb{C}$.

5.14. Доказать, что тождественный оператор (в ненулевом пространстве) не может быть коммутатором двух эндоморфизмов.

5.15. Как определить спектр оператора в мультинормированном пространстве?

5.16. Каждое ли банахово пространство над $\mathbb{F}$ допускает изометрическое вложение в пространство $C(Q,\ \mathbb{F})$, где Q — компактное пространство?

5.17. Выяснить, в каких случаях $L_p(X)' = L_{p'}(X')$, где X — банахово пространство.

5.18. Пусть (X_n) — последовательность нормированных пространств и

$$X_0 := \left\{ x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : \|x_n\|_{X_n} \to 0 \right\}$$

— их сумма по типу c_0 (с нормой $\|x\| := \sup\{\, \|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, взятой из суммы по типу l_∞). Доказать, что X_0 сепарабельно в том и только в том случае, когда сепарабельно каждое из пространств X_n.

5.19. Доказать, что пространство $C^{(p)}[0,\ 1]$ представляет собой сумму конечномерного подпространства и пространства, изоморфного $C[0,\ 1]$.

Глава 6

Гильбертовы пространства

6.1. Эрмитовы формы и скалярные произведения

6.1.1. Определение. Пусть H — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$. Отображение $f : H^2 \to \mathbb{F}$ называют *эрмитовой формой*, если

(1) отображение $f(\cdot\,,\ y) : x \mapsto f(x,\ y)$ лежит в $H^{\#}$ для всех $y \in Y$;

(2) $f(x,\ y) = f(y,\ x)^*$ при любых $x,\ y \in H$, где $\lambda \mapsto \lambda^*$ — естественная инволюция в $\mathbb{F}$, т. е. переход к комплексно сопряженному числу.

6.1.2. Замечание. Как видно, для эрмитовой формы f при каждом $x \in H$ отображение $f(x,\ \cdot\,) : y \mapsto (x,\ y)$ лежит в $H_*^{\#}$, где H_* — дуальное к H векторное пространство (см. 2.1.4 (2)).

Таким образом, при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ эрмитова форма *билинейна*, т. е. линейна по каждому аргументу, а при $\mathbb{F} := \mathbb{C}$ — *полуторалинейна*, т. е. линейна по первому аргументу и $*$-линейна по второму.

6.1.3. *Для каждой эрмитовой формы f выполнено поляризационное тождество*:

$$f(x+y,\ x+y) - f(x-y,\ x-y) = 4\,\mathrm{Re}\, f(x,\ y) \quad (x,\ y \in H).$$

$$\triangleleft \quad -\begin{array}{l} f(x+y,\ x+y) = f(x,\ x) + f(x,\ y) + f(y,\ x) + f(y,\ y) \\ \underline{f(x-y,\ x-y) = f(x,\ x) - f(x,\ y) - f(y,\ x) + f(y,\ y)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2(f(x,\ y) + f(y,\ x)) \end{array} \quad \triangleright$$

6.1.4. Определение. Эрмитову форму f называют ***положительной***, или ***скалярным произведением***, если $f(x,\ x) \geq 0$ для любого $x \in H$. При этом пишут: $(x,\ y) := \langle x \,|\, y\rangle := f(x,\ y)$ $(x,\ y \in H)$. Скалярное произведение называют ***невырожденным***, если $(x,\ x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $(x \in H)$.

6.1.5. *Имеет место неравенство Коши — Буняковского*

$$|(x,\ y)|^2 \leq (x,\ x)(y,\ y) \quad (x,\ y \in H).$$

$\lhd$ Если $(x,\ x) = (y,\ y) = 0$, то $0 \leq (x + ty,\ x + ty) = t(x,\ y)^* + t^*(x,\ y)$. Выбирая $t := -(x,\ y)$, получаем $-2|(x,\ y)|^2 \geq 0$, т. е. в этом случае нужное установлено.

Если, к примеру, $(y,\ y) \neq 0$, то ввиду оценки

$$0 \leq (x + ty,\ x + ty) = (x,\ x) + 2t\,\mathrm{Re}(x,\ y) + t^2(y,\ y) \quad (t \in \mathbb{R})$$

заключаем: $\mathrm{Re}(x,\ y)^2 \leq (x,\ x)(y,\ y)$.

Если $(x,\ y) = 0$, то доказывать нечего. Если же $(x,\ y) \neq 0$, то положим $\theta := |(x,\ y)|\,(x,\ y)^{-1}$ и $\overline{x} := \theta x$. Тогда $|\theta| = 1$ и, кроме того,

$$(\overline{x},\ \overline{x}) = (\theta x,\ \theta x) = \theta\theta^*(x,\ x) = |\theta|^2(x,\ x) = (x,\ x);$$

$$|(x,\ y)| = \theta(x,\ y) = (\theta x,\ y) = (\overline{x},\ y) = \mathrm{Re}(\overline{x},\ y).$$

Таким образом, $|(x,\ y)|^2 = \mathrm{Re}(\overline{x},\ y)^2 \leq (x,\ x)(y,\ y)$. $\rhd$

6.1.6. *Если* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *— скалярное произведение на* H, *то отображение* $\|\cdot\| : x \mapsto (x,\ x)^{1/2}$ *— полунорма на* H.

$\lhd$ Следует проверить только неравенство треугольника. Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\|x + y\|^2 = (x,\ x) + (y,\ y) + 2\,\mathrm{Re}(x,\ y) \leq$$

$$\leq (x,\ x) + (y,\ y) + 2\|x\|\ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \ \rhd$$

6.1.7. Определение. Пространство H со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$ и соответствующей полунормой $\|\cdot\|$ называют ***предгильбертовым.*** Предгильбертово пространство H называют ***гильбертовым***, если полунормированное пространство $(H,\ \|\cdot\|)$ банахово.

6.1.8. *В предгильбертовом пространстве H справедлив закон параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x,\ y \in H)$$

— сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

$\lhd$ $\|x+y\|^2 = (x+y,\ x+y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,\ y) + \|y\|^2;$
$\|x-y\|^2 = (x-y,\ x-y) = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x,\ y) + \|y\|^2$ $\rhd$

6.1.9. *Теорема фон Неймана — Йордана.* *Если в полунормированном пространстве $(H,\ \|\cdot\|)$ справедлив закон параллелограмма, то H — предгильбертово пространство, т. е. найдется, и притом единственное, скалярное произведение $(\cdot\,,\,\cdot)$ в H такое, что $\|x\| = (x,\ x)^{1/2}$ для всех $x \in H$.*

$\lhd$ Рассмотрим вещественную основу $H_{\mathbb{R}}$ пространства H и для $x,\ y \in H_{\mathbb{R}}$ положим

$$(x,\ y)_{\mathbb{R}} := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Применяя закон параллелограмма, для отображения $(\cdot\,,\ y)_{\mathbb{R}}$ последовательно выводим

$$(x_1,\ y)_{\mathbb{R}} + (x_2,\ y)_{\mathbb{R}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2\right) - \left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2\right) - \left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\|(x_1+y)+(x_2+y)\|^2 + \|x_1-x_2\|^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\|(x_1-y)+(x_2-y)\|^2 + \|x_1-x_2\|^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\|x_1+x_2+2y\|^2 - \frac{1}{2}\|x_1+x_2-2y\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|(x_1+x_2)/2+y\|^2 - \|(x_1-x_2)/2-y\|^2\right) =$$

$$= 2\,((x_1+x_2)/2,\ y)_{\mathbb{R}}\,.$$

В частности, при $x_2 := 0$ будет $(x_2,\ y)_{\mathbb{R}} = 0$, т. е. $1/2(x_1,\ y)_{\mathbb{R}} = (1/2\,x_1,\ y)_{\mathbb{R}}$. Соответственно при $x_1 := 2x_1$ и $x_2 := 2x_2$ имеем

$$(x_1+x_2,\ y)_{\mathbb{R}} = (x_1,\ y)_{\mathbb{R}} + (x_2,\ y)_{\mathbb{R}}.$$

В силу очевидной непрерывности отображения $(\cdot\,,\ y)_{\mathbb{R}}$ можно сделать вывод, что $(\cdot\,,\ y)_{\mathbb{R}} \in (H_{\mathbb{R}})^{\#}$. Положим

$$(x,\ y) := \mathbf{Re}^{-1}((\cdot\,,\ y)_{\mathbb{R}})(x),$$

где $\mathbf{Re}^{-1}$ — комплексификатор (см. 3.7.5).

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ ясно, что $(x,\ y) = (x,\ y)_{\mathbb{R}} = (y,\ x)$ и $(x,\ x) = \|x\|^2$, т. е. доказывать нечего. Если же $\mathbb{F} := \mathbb{C}$, то

$$(x,\ y) = (x,\ y)_{\mathbb{R}} - i(ix,\ y)_{\mathbb{R}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$(y,\ x) = (y,\ x)_{\mathbb{R}} - i(iy,\ x)_{\mathbb{R}} = (x,\ y)_{\mathbb{R}} - i(x,\ iy)_{\mathbb{R}} =$$

$$= (x,\ y)_{\mathbb{R}} + i(ix,\ y)_{\mathbb{R}} = (x,\ y)^*,$$

поскольку

$$(x,\ iy)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|i|\ \|y-ix\|^2 - |-i|\ \|ix+y\|^2\right) = -(ix,\ y)_{\mathbb{R}}.$$

Помимо этого,

$$(x,\ x) = (x,\ x)_{\mathbb{R}} - i(ix,\ x)_{\mathbb{R}} =$$

$$= \|x^2\| - \frac{i}{4}\left(\|ix+x\|^2 - \|ix-x\|^2\right) =$$

$$= \|x\|^2\left(1 - \frac{i}{4}\left(|1+i|^2 - |1-i|^2\right)\right) = \|x\|^2.$$

Утверждение об единственности следует из 6.1.3. $\triangleright$

6.1.10. Примеры.

(1) Примером гильбертова пространства служит пространство L_2 (относительно какой-нибудь системы с интегрированием). При этом скалярное произведение вводят так: $(f,\ g) := \int fg^*$ для $f,\ g \in L^2$. В частности, для $l_2(\mathscr{E})$ получаем $(x,\ y) := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e y_e^*$ при $x,\ y \in l_2(\mathscr{E})$.

(2) Пусть H — предгильбертово пространство и $(\cdot\,,\,\cdot) : H^2 \to \mathbb{F}$ — скалярное произведение в H. Ясно, что вещественная основа $H_{\mathbb{R}}$ со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)_{\mathbb{R}} : (x,\ y) \mapsto \operatorname{Re}(x,\ y)$ является предгильбертовым пространством, причем норма элемента в H не зависит от того, вычисляют ее в H или в $H_{\mathbb{R}}$. Предгильбертово пространство $(H_{\mathbb{R}},\ (\cdot\,,\,\cdot)_{\mathbb{R}})$ называют *овеществлением* пространства $(H,\ (\cdot\,,\,\cdot))$. В свою очередь, если вещественная основа некоторого полунормированного пространства является предгильбертовым пространством, то процесс комплексификации приводит к естественной предгильбертовой структуре в исходном пространстве.

(3) Пусть H — предгильбертово пространство и H_* — дуальное к H векторное пространство. Для $x,\ y \in H_*$ положим $(x,\ y)_* := (x,\ y)^*$. Ясно, что $(\cdot\,,\,\cdot)_*$ — скалярное произведение в H_*. Полученное предгильбертово пространство называют *дуальным* к H и сохраняют за ним обозначение H_*.

(4) Пусть H — предгильбертово пространство и $H_0 := \ker\|\cdot\|$ — ядро полунормы $\|\cdot\|$ в H. Привлекая неравенство Коши — Буняковского, теорему 2.3.8 и 6.1.10 (3), видим, что в фактор-пространстве H/H_0 естественным образом возникает скалярное произведение: если $\overline{x}_1 := \varphi(x_1)$ и $\overline{x}_2 := \varphi(x_2)$, где $x_1,\ x_2 \in H$ и $\varphi : H \to H/H_0$ — каноническое отображение, то $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2) := (x_1,\ x_2)$. При этом предгильбертово пространство H/H_0 можно рассматривать как фактор-пространство полунормированного пространства $(H,\ \|\cdot\|)$ по ядру полунормы $\|\cdot\|$. Таким образом, H/H_0 — хаусдорфово пространство, которое называют хаусдорфовым предгильбертовым пространством, *ассоциированным с* H. Пополняя нормированное пространство H/H_0, получаем гильбертово пространство (например, в силу теоремы фон Неймана — Йордана). Построенное гильбертово пространство называют *ассоциированным* с исходным предгильбертовым пространством.

(5) Пусть $(H_e)_{e\in\mathscr{E}}$ — некоторое семейство гильбертовых пространств и H — сумма этого семейства по типу 2, т. е. $h \in H$ в том и только в том случае, если $h := (h_e)_{e\in\mathscr{E}}$, где $h_e \in H_e$ для $e \in \mathscr{E}$, и при этом

$$\|h\| := \left(\sum_{e\in\mathscr{E}} \|h_e\|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

В силу 5.5.9 (6), H — банахово пространство. Для элементов $f,\ g \in H$, применяя последовательно закон параллелограмма, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{e\in\mathscr{E}} \|f_e+g_e\|^2 + \sum_{e\in\mathscr{E}} \|f_e-g_e\|^2\right) =$$

$$= \sum_{e\in\mathscr{E}} \frac{1}{2}\left(\|f_e+g_e\|^2 + \|f_e-g_e\|^2\right) =$$

$$= \sum_{e\in\mathscr{E}} \left(\|f_e\|^2 + \|g_e\|^2\right) = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

так что, по теореме фон Неймана — Йордана, H — это гильбертово пространство. Пространство H называют *гильбертовой суммой* семейства гильбертовых пространств $(H_e)_{e\in\mathscr{E}}$ и обозначают $\oplus_{e\in\mathscr{E}} H_e$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут также $H := H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$.

(6) *Пусть H — гильбертово пространство и S — некоторая система с интегрированием. Пространство $L_2(S,\ H)$, составленное из H-значных функций, суммируемых с квадратом, является гильбертовым.* ◁▷

6.2. Ортопроекторы

6.2.1. *Пусть U — выпуклое подмножество некоторого шарового слоя $(r+\varepsilon)B_H \setminus rB_H$, где $0 < \varepsilon \le r$, в гильбертовом пространстве H. Имеет место следующая оценка диаметра:* $\operatorname{diam} U \le \sqrt{12r\varepsilon}$.

◁ Для $x,\ y \in U$, учитывая, что $1/2(x+y) \in U$, и привлекая закон параллелограмма, выводим

$$\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - 4\,\|(x+y)/2\|^2 \le$$

$$\leq 4(r+\varepsilon)^2 - 4r^2 = 8r\varepsilon + 4\varepsilon^2 \leq 12r\varepsilon. \ \triangleright$$

6.2.2. *Теорема Леви о проекции.* *Пусть U — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H и $x \in H \setminus U$. Тогда существует, и притом единственный, элемент $u_0 \in U$ такой, что*

$$\|x - u_0\| = \inf\{\|x - u\| : \ u \in U\}.$$

$\triangleleft$ Положим $U_\varepsilon := \{u \in U : \ \|x - u\| \leq \inf \|U - x\| + \varepsilon\}$. В силу 6.2.1 семейство $(U_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ образует базис фильтра Коши в U. $\triangleright$

6.2.3. Определение. Элемент u_0, фигурирующий в 6.2.2, называют *наилучшим приближением* x в множестве U или *проекцией* x на множество U.

6.2.4. *Пусть H_0 — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H и $x \in H \setminus H_0$. Элемент $x_0 \in H_0$ является проекцией x на H_0 в том и только в том случае, если $(x - x_0, \ h_0) = 0$ для каждого $h_0 \in H_0$.*

$\triangleleft$ Достаточно рассмотреть овеществление $(H_0)_\mathbb{R}$ пространства H_0. На $(H_0)_\mathbb{R}$ определена выпуклая функция $f(h_0) := (h_0 - x, \ h_0 - x)$. При этом $x_0 \in H_0$ служит проекцией x на H_0 тогда и только тогда, когда $0 \in \partial_{x_0}(f)$. В связи с 3.5.2 (4) последнее вхождение означает, что $(x - x_0, \ h_0) = 0$ при любом $h_0 \in H_0$, ибо $f'(x_0) = 2(x_0 - x, \cdot)$. $\triangleright$

6.2.5. Определение. Элементы $x, \ y \in H$ называют *ортогональными* и пишут $x \perp y$, если $(x, \ y) = 0$. Символом $U^\perp$ обозначают совокупность элементов, ортогональных ко всем точкам данного множества U, т. е. $U^\perp := \{y \in H : \ x \in U \Rightarrow x \perp y\}$. Множество $U^\perp$ называют *ортогональным дополнением* множества U.

6.2.6. *Пусть H_0 — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H. Тогда его ортогональное дополнение $H_0^\perp$ — замкнутое подпространство, причем $H = H_0 \oplus H_0^\perp$.*

$\triangleleft$ Замкнутость $H_0^\perp$ в H очевидна. Ясно также, что $H_0 \wedge H_0^\perp = H_0 \cap H_0^\perp = 0$. Осталось проверить, что $H_0 \vee H_0^\perp = H_0 + H_0^\perp = H$. Возьмем элемент $h \in H \setminus H_0$. На основании 6.2.2 существует проекция $h_0 \in H_0$, а, в силу 6.2.4, $h - h_0 \in H_0^\perp$. Итак, $h = h_0 + (h - h_0) \in H_0 + H_0^\perp$. $\triangleright$

6.2.7. Определение. Проектор на замкнутое подпространство H_0 параллельно $H_0^\perp$ называют *ортопроектором* на H_0 и обозначают P_{H_0}.

6.2.8. *Лемма Пифагора.* $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. $\lhd\rhd$

6.2.9. *Следствие.* *Норма ортопроектора не превосходит единицы:* $H \neq 0,\ H_0 \neq 0 \Rightarrow \|P_{H_0}\| = 1$. $\lhd\rhd$

6.2.10. *Теорема об ортопроекторе.* *Для каждого оператора* $P \in \mathscr{L}(H)$ *такого, что* $P^2 = P$, *эквивалентны утверждения:*

(1) P — *ортопроектор на* $H_0 := \operatorname{im} P$;
(2) $\|h\| \le 1 \Rightarrow \|Ph\| \le 1$;
(3) $(Px,\ P^d y) = 0$, *где* $P^d := I_H - P$ *и* $x,\ y \in H$;
(4) $(Px,\ y) = (x,\ Py)$ *при* $x,\ y \in H$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Отмечено в 6.2.9.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $H_1 := \ker P = \operatorname{im} P^d$. Возьмем $x \in H_1^\perp$. Поскольку $x = Px + P^d x$ и $x \perp P^d x$, то $\|x\|^2 \ge \|Px\|^2 = (x - P^d x,\ x - P^d x) = (x,\ x) - 2\operatorname{Re}(x,\ P^d x) + (P^d x,\ P^d x) = \|x\|^2 + \|P^d x\|^2$. Отсюда $P^d x = 0$, т. е. $x \in \operatorname{im} P$. Из соотношений $H_1 = \ker P$ и $H_1^\perp \subset \operatorname{im} P$ с учетом 6.2.6 выводим: $H_1^\perp = \operatorname{im} P = H_0$. Итак, $(Px, P^d y) = 0$ для любых $x, y \in H$, ибо $Px \in H_0$, а $P^d y \in H_1$.

(3) $\Rightarrow$ (4): $(Px,\ y) = (Px,\ Py + P^d y) = (Px,\ Py) = (Px,\ Py) + (P^d x,\ Py) = (x,\ Py)$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Проверим сначала, что H_0 — замкнутое подпространство. Пусть $h_0 := \lim h_n$ и $h_n \in H_0$, т. е. $Ph_n = h_n$. При любом $x \in H$ из непрерывности функционалов $(\cdot,\ x)$ и $(\cdot,\ Px)$ последовательно вытекает

$$(h_0,\ x) = \lim\,(h_n,\ x) = \lim\,(Ph_n,\ x) = \lim\,(h_n,\ Px) = (Ph_0,\ x).$$

Отсюда $(h_0 - Ph_0,\ h_0 - Ph_0) = 0$, т. е. $h_0 \in \operatorname{im} P$.

Теперь для произвольных $x \in H$ и $h_0 \in H_0$ выводим $(x - Px,\ h_0) = (x - Px,\ Ph_0) = (P(x - Px),\ h_0) = (Px - P^2 x,\ h_0) = (Px - Px,\ h_0) = 0$. Таким образом, привлекая 6.2.4, получаем $Px = P_{H_0} x$. $\rhd$

6.2.11. *Пусть* $P_1,\ P_2$ — *ортопроекторы, причем* $P_1 P_2 = 0$. *Тогда* $P_2 P_1 = 0$.

$\lhd$ $P_1 P_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{im} P_2 \subset \ker P_1 \Rightarrow \operatorname{im} P_1 = (\ker P_1)^\perp \subset (\operatorname{im} P_2)^\perp = \ker P_2 \Rightarrow P_2 P_1 = 0$ $\rhd$

6.2.12. Определение. Ортопроекторы P_1 и P_2 называют *ортогональными* (и пишут $P_1 \perp P_2$ или $P_2 \perp P_1$), если $P_1 P_2 = 0$.

6.2.13. ***Теорема.*** *Пусть $P_1, \dots, P_n$ — ортопроекторы. Оператор $P := P_1 + \ldots + P_n$ является ортопроектором в том и только в том случае, если $P_l \perp P_m$ при $l \neq m$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Заметим прежде всего, что для каждого ортопроектора P_0 по теореме 6.2.10 выполнено $\|P_0 x\|^2 = (P_0 x,\ P_0 x) = (P_0^2 x,\ x) = (P_0 x,\ x)$. Следовательно, при $x \in H$ и $l \neq m$ справедливо

$$\|P_l x\|^2 + \|P_m x\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_k x,\ x) = (Px,\ x) = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2.$$

В частности, полагая $x := P_l x$, получаем

$$\|P_l x\|^2 + \|P_m P_l x\|^2 \leq \|P_l x\|^2 \Rightarrow \|P_m P_l\| = 0.$$

$\Leftarrow$: Прямой подсчет показывает, что P — идемпотентный оператор. В самом деле,

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k \right)^2 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} P_l P_m = \sum_{k=1}^{n} P_k^2 = P.$$

Помимо этого, в силу 6.2.10 (4), $(P_k x,\ y) = (x,\ P_k y)$ и, стало быть, $(Px,\ y) = (x,\ Py)$. Осталось вновь сослаться на 6.2.10 (4). $\rhd$

6.2.14. Замечание. Теорему 6.2.13 называют *критерием ортогональности конечного множества ортопроекторов.*

6.3. Гильбертов базис

6.3.1. Определение. Семейство $(x_e)_{e \in \mathscr{E}}$ элементов некоторого гильбертова пространства H называют *ортогональным*, если $e_1 \neq e_2 \Rightarrow x_{e_1} \perp x_{e_2}$. Соответственно множество $\mathscr{E}$ в гильбертовом пространстве H называют ортогональным, если ортогонально семейство $(e)_{e \in \mathscr{E}}$.

6.3.2. *Теорема Пифагора.* *Ортогональное семейство $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ элементов гильбертова пространства (безусловно) суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемо числовое семейство $(\|x_e\|^2)_{e\in\mathscr{E}}$. При этом*

$$\left\|\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e\right\|^2 = \sum_{e\in\mathscr{E}} \|x_e\|^2.$$

$\lhd$ Пусть $s_\theta := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e$, где θ — конечное подмножество $\mathscr{E}$. На основании 6.2.8, $\|s_\theta\|^2 = \sum_{e\in\theta} \|x_e\|^2$. Значит, для конечного множества θ', содержащего θ, выполнено

$$\|s_{\theta'} - s_\theta\|^2 = \|s_{\theta'\setminus\theta}\|^2 = \sum_{e\in\theta'\setminus\theta} \|x_e\|^2.$$

Иными словами, фундаментальность сети (s_θ) равносильна фундаментальности сети частичных сумм семейства $(\|x_e\|^2)_{e\in\mathscr{E}}$. Привлекая 5.5.3, получаем требуемое. $\rhd$

6.3.3. *Теорема о суммировании ортопроекторов.* *Пусть $(P_e)_{e\in\mathscr{E}}$ — семейство попарно ортогональных ортопроекторов в гильбертовом пространстве H. Тогда для каждого $x \in H$ (безусловно) суммируемо семейство $(P_e x)_{e\in\mathscr{E}}$. При этом оператор $Px := \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x$ является ортопроектором на подпространство*

$$\mathscr{H} := \left\{\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e :\ x_e \in H_e := \operatorname{im} P_e,\ \sum_{e\in\mathscr{E}} \|x_e\|^2 < +\infty\right\}.$$

$\lhd$ Для конечного подмножества θ в $\mathscr{E}$ положим $s_\theta := \sum_{e\in\theta} P_e$. По теореме 6.2.13, s_θ — это ортопроектор. Поэтому, с учетом 6.2.8, $\|s_\theta x\|^2 = \sum_{e\in\theta} \|P_e x\|^2 \leq \|x\|^2$ при каждом $x \in H$. Следовательно, семейство $(\|P_e x\|^2)_{e\in\mathscr{E}}$ суммируемо (сеть частичных сумм возрастает и ограничена). По теореме Пифагора имеется сумма $Px := \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x$, т. е. $Px = \lim_\theta s_\theta x$.

Отсюда $P^2 x = \lim_\theta s_\theta P x = \lim_\theta s_\theta \lim_{\theta'} s_{\theta'} x = \lim_\theta \lim_{\theta'} s_\theta s_{\theta'} x = \lim_\theta \lim_{\theta'} s_{\theta\cap\theta'} x = \lim_\theta s_\theta x = Px$. Окончательно $\|Px\| = \|\lim_\theta s_\theta x\| = \lim_\theta \|s_\theta x\| \leq \|x\|$ и, кроме того, $P^2 = P$. Апеллируя к 6.2.10, заключаем, что P — ортопроектор на $\operatorname{im} P$.

Если $x \in \operatorname{im} P$, т. е. $Px = x$, то $x = \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x$ и по теореме Пифагора $\sum_{e\in\mathscr{E}} \|P_e x\|^2 = \|x\|^2 = \|Px\|^2 < +\infty$. Поскольку $P_e x \in$

H_e $(e \in \mathscr{E})$, то $x \in \mathscr{H}$. Если же $x_e \in H_e$ и $\sum_{e\in\mathscr{E}} \|x_e\|^2 < +\infty$, то для $x := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e$ (существование следует из все той же теоремы Пифагора) будет $x = \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e = \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x_e = Px$, т. е. $x \in \operatorname{im} P$. Итак, $\operatorname{im} P = \mathscr{H}$. $\triangleright$

6.3.4. Замечание. Приведенную теорему можно трактовать как утверждение об изоморфизме $\mathscr{H}$ с гильбертовой суммой семейства $(H_e)_{e\in\mathscr{E}}$. Нужное отождествление при этом осуществляет, как видно, интеграл Бохнера, представляющий в данном случае процесс суммирования.

6.3.5. Замечание. Пусть $h \in H$ — нормированный элемент: $\|h\| = 1$. Пусть, далее, $H_0 := \mathbb{F}h$ — одномерное подпространство в H, натянутое на h_0. Для каждого элемента $x \in H$ и произвольного скаляра $\lambda \in \mathbb{F}$ справедливо

$$(x - (x,\ h)h,\ \lambda h) = \lambda^*((x,\ h) - (x,\ h))(h,\ h) = 0.$$

Значит, по предложению 6.2.4, $P_{H_0} = (\cdot\,,\ h) \otimes h$. Для обозначения этого ортопроектора удобно использовать символ $\langle h\rangle$. Итак, $\langle h\rangle$: $x \mapsto (x,\ h)h$ $(x \in H)$.

6.3.6. Определение. Семейство элементов гильбертова пространства называют ***ортонормальным*** (или ***ортонормированным***), если, во-первых, это семейство ортогонально, а во-вторых, если нормы входящих в него векторов равны единице. Аналогично определяют ортонормальные множества.

6.3.7. *Для любого ортонормального множества $\mathscr{E}$ в H и произвольного элемента $x \in H$ семейство $(\langle e\rangle x)_{e\in\mathscr{E}}$ (безусловно) суммируемо. При этом имеет место неравенство Бесселя*:

$$\|x\|^2 \ge \sum_{e\in\mathscr{E}} |(x,\ e)|^2.$$

$\triangleleft$ Достаточно сослаться на теорему о суммировании ортопроекторов, ибо

$$\|x\|^2 \ge \left\|\sum_{e\in\mathscr{E}} \langle e\rangle x\right\|^2 = \left\|\sum_{e\in\mathscr{E}} (x,\ e)e\right\|^2 = \sum_{e\in\mathscr{E}} \|(x,\ e)e\|^2 . \ \triangleright$$

6.3.8. Определение. Ортонормальное множество $\mathscr{E}$ в гильбертовом пространстве H называют ***гильбертовым базисом*** (в H), если для всякого $x \in H$ выполнено $x = \sum_{e\in\mathscr{E}} \langle e \rangle x$. Ортонормальное семейство элементов гильбертова пространства называют гильбертовым базисом, если область значений этого семейства является гильбертовым базисом.

6.3.9. *Ортонормальное множество $\mathscr{E}$ является гильбертовым базисом в H в том и только в том случае, если линейная оболочка $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ плотна в H.* $\triangleleft\triangleright$

6.3.10. Определение. Говорят, что множество $\mathscr{E}$ удовлетворяет ***условию Стеклова***, если $\mathscr{E}^\perp = 0$.

6.3.11. *Теорема Стеклова.* *Ортонормальное множество является гильбертовым базисом в том и только в том случае, если оно удовлетворяет условию Стеклова.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $h \in \mathscr{E}^\perp$. Тогда $h = \sum_{e\in\mathscr{E}} \langle e \rangle h = \sum_{e\in\mathscr{E}} (h,\ e)e = \sum_{e\in\mathscr{E}} 0 = 0$.

$\Leftarrow$: Для $x \in H$, в силу 6.3.3 и 6.2.4, $x - \sum_{e\in\mathscr{E}} \langle e \rangle x \in \mathscr{E}^\perp$. $\triangleright$

6.3.12. *Теорема.* *В каждом гильбертовом пространстве есть гильбертов базис.*

$\triangleleft$ По лемме Куратовского — Цорна в гильбертовом пространстве H имеется максимальное по включению ортонормальное множество $\mathscr{E}$. Если есть $h \in H \setminus H_0$, где $H_0 := \operatorname{cl} \mathscr{L}(\mathscr{E})$, то элемент $h_1 := h - P_{H_0} h$ ортогонален любому элементу из $\mathscr{E}$ и, значит, при $H \neq 0$ будет $\mathscr{E} \cup \{\|h_1\|^{-1} h_1\} = \mathscr{E}$. Получили противоречие. В случае $H = 0$ доказывать нечего. $\triangleright$

6.3.13. Замечание. Можно показать, что у двух гильбертовых базисов одного и того же гильбертова пространства H одна и та же мощность. Эту мощность называют ***гильбертовой размерностью*** H.

6.3.14. Замечание. Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — счетная последовательность линейно независимых элементов гильбертова пространства H. Положим еще $x_0 := 0$, $e_0 := 0$, и пусть

$$y_n := x_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_k \rangle x_n, \quad e_n := \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Видно, что $(y_n,\ e_k) = 0$ для $0 \le k \le n-1$ (например, из 6.2.13). Столь же несомненно, что $y_n \neq 0$, ввиду бесконечномерности H. Про ортонормальную последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ говорят, что она получена *процессом ортогонализации*, или *процессом Грама — Шмидта*, из последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Привлекая процесс ортогонализации, нетрудно показать, что в гильбертовом пространстве есть счетный гильбертов базис в том и только в том случае, если в нем имеется счетное всюду плотное множество, т. е. если это пространство *сепарабельно*. $\triangleleft\triangleright$

6.3.15. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — гильбертов базис в пространстве H и $x \in H$. Числовое семейство $\widehat{x} := (\widehat{x}_e)_{e\in\mathscr{E}}$ в $\mathbb{F}^{\mathscr{E}}$, заданное соотношением $\widehat{x}_e := (x,\ e)$, называют *преобразованием Фурье* элемента x (относительно гильбертова базиса $\mathscr{E}$).

6.3.16. *Теорема Рисса — Фишера об изоморфизме.* *Пусть $\mathscr{E}$ — гильбертов базис в H. Преобразование Фурье $\mathscr{F} : x \mapsto \widehat{x}$ (относительно базиса $\mathscr{E}$) есть изометрический изоморфизм H на $l_2(\mathscr{E})$. Обратное преобразование — суммирование Фурье $\mathscr{F}^{-1} : l_2(\mathscr{E}) \to H$ — действует по правилу $\mathscr{F}^{-1}(x) := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e e$ для $x := (x_e)_{e\in\mathscr{E}} \in l_2(\mathscr{E})$. При этом для любых $x,\ y \in H$ имеет место равенство Парсеваля*

$$(x,\ y) = \sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e \widehat{y}_e^{\,*}.$$

$\triangleleft$ По теореме Пифагора преобразование Фурье действует в $l_2(\mathscr{E})$. По теореме 6.3.3, $\widehat{\ }$ — это эпиморфизм. По теореме Стеклова, $\widehat{\ }$ — мономорфизм. То, что $\mathscr{F}^{-1}\widehat{x} = x$ для $x \in H$ и $\widehat{\mathscr{F}^{-1}(x)} = x$ для $x \in l_2(\mathscr{E})$, несомненно. Равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{e\in\mathscr{E}} \|\widehat{x}\|^2 = \|\widehat{x}_e\|_2^2 \quad (x \in H)$$

следует из теоремы Пифагора. При этом

$$(x,\ y) = \left(\sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e e,\ \sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{y}_e e\right) = \sum_{e,e'\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e \widehat{y}_{e'}^{\,*}(e,\ e') = \sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e \widehat{y}_e^{\,*}. \ \triangleright$$

6.3.17. Замечание. Равенства Парсеваля показывают, что преобразование Фурье сохраняет скалярные произведения. Таким образом, это преобразование — *унитарный оператор* или *гильбертов*

изоморфизм, т. е. изоморфизм, сохраняющий скалярные произведения. В этой связи теорему Рисса — Фишера иногда называют теоремой о «гильбертовом изоморфизме гильбертовых пространств (одной гильбертовой размерности)».

6.4. Эрмитово сопряженный оператор

6.4.1. *Теорема Рисса о штриховании.* *Пусть H — гильбертово пространство. Для $x \in H$ положим $x' := (\cdot\,,\ x)$. Тогда отображение штрихования $x \mapsto x'$ осуществляет изометрический изоморфизм H_* на H'.*

$\lhd$ Ясно, что $x = 0 \Rightarrow x' = 0$. Если же $x \neq 0$, то

$$\|y'\|_{H'} = \sup_{\|y\| \le 1} |(y,\ x)| \le \sup_{\|y\| \le 1} \|y\|\ \|x\| \le \|x\|;$$

$$\|x'\|_{H'} = \sup_{\|y\| \le 1} |(y,\ x)| \ge |(x/\|x\|,\ x)| = \|x\|.$$

Таким образом, $x \mapsto x'$ — изометрия H_* в H'. Проверим, что это отображение является эпиморфизмом.

Пусть $l \in H'$ и $H_0 := \ker l \neq H$ (если таких l нет, то доказывать нечего). Выберем элемент $\|e\| = 1$ такой, что $e \in H_0^\perp$, и положим $\operatorname{grad} l := l(e)^* e$. Если $x \in H_0$, то

$$(\operatorname{grad} l)'(x) = (x,\ \operatorname{grad} l) = (x,\ l(e)^* e) = l(e)^{**}(x,\ e) = 0.$$

Следовательно, для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$ и всех $x \in H$ в силу 2.3.12 выполнено $(\operatorname{grad} l)'(x) = \alpha l(x)$. В частности, при $x := e$ получаем

$$(\operatorname{grad} l)'(e) = (e,\ \operatorname{grad} l) = l(e)(e,\ e) = \alpha l(e),$$

т. е. $\alpha = 1$. $\rhd$

6.4.2. Замечание. Из теоремы Рисса следует, что сопряженное пространство H' обладает естественной структурой гильбертова пространства и отображение штрихования $x \mapsto x'$ осуществляет гильбертов изоморфизм H_* на H'. Обратным отображением при этом служит построенное в доказательстве *градиентное отображение* $l \mapsto \operatorname{grad} l$. В этой связи 6.4.1 называют теоремой «об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».

6.4.3. *Гильбертово пространство рефлексивно.*

$\lhd$ Пусть $\iota : H \to H''$ — двойное штрихование, т. е. каноническое вложение H во второе сопряженное пространство H'', определенное соотношением $x''(l) = \iota(x)(l) = l(x)$, где $x \in H$ и $l \in H'$ (см. 5.1.10 (8)). Проверим, что ι — эпиморфизм. Пусть $f \in H''$. Рассмотрим отображение $y \mapsto f(y')$ для $y \in H$. Ясно, что это отображение — линейный функционал над H_* и, стало быть, по теореме Рисса найдется элемент $x \in H = H_{**}$ такой, что $(y,\ x)_* = (x,\ y) = f(y')$ для каждого $y \in H$. Имеем $\iota(x)(y') = y'(x) = (x,\ y) = f(y')$ при всех $y \in H$. Так как по теореме Рисса $y \mapsto y'$ — отображение на H', получаем $\iota(x) = f$. $\rhd$

6.4.4. *Пусть $H_1,\ H_2$ — произвольные гильбертовы пространства и $T \in B(H_1,\ H_2)$. Тогда существует, и притом единственное, отображение $T^* : H_2 \to H_1$ такое, что для любых $x \in H_1,\ y \in H_2$ выполнено*

$$(Tx,\ y) = (x,\ T^*y).$$

При этом $T^* \in B(H_2,\ H_1)$ и $\|T^*\| = \|T\|$.

$\lhd$ Пусть $y \in H_2$. Отображение $x \mapsto (Tx,\ y)$ есть композиция $y' \circ T$, т. е. представляет собой непрерывный линейный функционал на H_1. По теореме Рисса имеется в точности один элемент $x \in H_1$, для которого $x' = y' \circ T$. Полагаем $T^*y := x$. Ясно, что $T^* \in \mathscr{L}(H_2,\ H_1)$. Помимо этого, привлекая неравенство Коши — Буняковского и нормативное неравенство, выводим

$$|(T^*y,\ T^*y)| = |(TT^*y,\ y)| \le \|TT^*y\|\ \|y\| \le \|T\|\ \|T^*y\|\ \|y\|.$$

Значит, $\|T^*y\| \le \|T\|\ \|y\|$ для всех $y \in H_2$, т. е. $\|T^*\| \le \|T\|$. В то же время $T = T^{**} := (T^*)^*$, т. е. $\|T\| = \|T^{**}\| \le \|T^*\|$. $\rhd$

6.4.5. Определение. Оператор $T^* \in B(H_2,\ H_1)$, построенный в 6.4.4, называют *эрмитово сопряженным* к $T \in B(H_1,\ H_2)$.

6.4.6. *Пусть $H_1,\ H_2$ — гильбертовы пространства и, кроме того, $S,\ T \in B(H_1,\ H_2)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда*

(1) $T^{**} = T$;

(2) $(S + T)^* = S^* + T^*$;

(3) $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$;

(4) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

$\lhd$ (1)–(3) — очевидные свойства. Если же $\|x\| \le 1$, то

$$\|Tx\|^2 = (Tx,\ Tx) = |(Tx,\ Tx)| = |(T^*Tx,\ x)| \le$$

$$\le \|T^*Tx\|\ \|x\| \le \|T^*T\|.$$

Кроме того, в силу субмультипликативности операторной нормы и предложения 6.4.4, $\|T^*T\| \le \|T^*\|\ \|T\| = \|T\|^2$, что доказывает (4). $\rhd$

6.4.7. *Пусть $H_1,\ H_2,\ H_3$ — три гильбертовых пространства, и заданы $T \in B(H_1,\ H_2)$ и $S \in B(H_2,\ H_3)$. Тогда $(ST)^* = T^*S^*$.*

$\lhd$ $(STx,\ z) = (Tx,\ S^*z) = (x,\ T^*S^*z) \quad (x \in H_1,\ z \in H_3)$ $\rhd$

6.4.8. Определение. Рассмотрим простейшую — элементарную — диаграмму $H_1 \xrightarrow{T} H_2$. Диаграмму $H_1 \xleftarrow{T^*} H_2$ называют *эрмитово сопряженной* к исходной. Если в произвольной диаграмме, составленной из ограниченных линейных отображений гильбертовых пространств, каждая элементарная поддиаграмма заменена на эрмитово сопряженную, то возникшую диаграмму называют *эрмитово сопряженной* к исходной.

6.4.9. ***Принцип эрмитова сопряжения диаграмм.*** *Диаграмма коммутативна в том и только в том случае, если коммутативна эрмитово сопряженная к ней диаграмма.*

$\lhd$ Следует из 6.4.7 и 6.4.6 (1). $\rhd$

6.4.10. ***Следствие.*** *Пусть $T \in B(H_1,\ H_2)$ и $T^* \in B(H_2,\ H_1)$. Оператор T обратим в том и только в том случае, если обратим T^*. При этом $T^{*-1} = T^{-1*}$.* $\lhd\rhd$

6.4.11. ***Следствие.*** *Для $T \in B(H)$ верно $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \Leftrightarrow \lambda^* \in \mathrm{Sp}(T^*)$.* $\lhd\rhd$

6.4.12. ***Принцип эрмитова сопряжения последовательностей*** (ср. 7.6.13). *Последовательность*

$$\ldots \longrightarrow H_{k-1} \xrightarrow{T_k} H_k \xrightarrow{T_{k+1}} H_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

точна в том и только в том случае, если точна эрмитово сопряженная последовательность

$$\ldots \longleftarrow H_{k-1} \xleftarrow{T_k^*} H_k \xleftarrow{T_{k+1}^*} H_{k+1} \longleftarrow \ldots . \ \lhd\rhd$$

6.4.13. Определение. ***Инволютивной алгеброй*** или ***$*$-алгеброй*** (над основным полем $\mathbb{F}$) называют алгебру A ***с инволюцией*** $*$, т. е. с отображением $a \mapsto a^*$ в A таким, что

(1) $a^{**} = a \ (a \in A)$;

(2) $(a+b)^* = a^* + b^* \ (a,\ b \in A)$;

(3) $(\lambda a)^* = \lambda^* a^* \ (\lambda \in \mathbb{F},\ a \in A)$;

(4) $(ab)^* = b^* a^* \ (a,\ b \in A)$.

Банахову алгебру A с инволюцией $*$, для которой $\|a^*a\| = \|a\|^2$ при всех $a \in A$, называют ***C^*-алгеброй.***

6.4.14. *Пространство $B(H)$ эндоморфизмов гильбертова пространства H представляет собой C^*-алгебру (относительно операций произведения операторов и перехода к эрмитово сопряженному оператору в качестве инволюции).* $\lhd\rhd$

6.5. Эрмитовы операторы

6.5.1. Определение. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ и $T \in B(H)$. Оператор T называют ***эрмитовым*** (или ***самосопряженным***), если $T = T^*$.

6.5.2. ***Теорема Рэлея.*** *Для эрмитова оператора T имеет место равенство*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx,\ x)|.$$

$\lhd$ Пусть $t := \sup\{|(Tx,\ x)| :\ \|x\| \le 1\}$. Ясно, что $|(Tx,\ x)| \le \|Tx\|\ \|x\| \le \|T\|$, как только $\|x\| \le 1$. Стало быть, $t \le \|T\|$.

Так как $T = T^*$, то $(Tx,\ y) = (x,\ Ty) = (Ty,\ x)^* = (y,\ Tx)^*$, т. е. $(x,\ y) \mapsto (Tx,\ y)$ — эрмитова форма. Значит, в силу 6.1.3 и 6.1.8

$$4\,\mathrm{Re}(Tx,\ y) = (T(x+y),\ x+y) - (T(x-y),\ x-y) \le$$
$$\le t(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2t(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Если $Tx = 0$, то явно $\|Tx\| \le t$. Пусть $Tx \ne 0$. Тогда при $\|x\| \le 1$ для $y := \|Tx\|^{-1}Tx$ будет

$$\|Tx\| = \|Tx\| \left(\frac{Tx}{\|Tx\|},\ \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) =$$
$$= (Tx,\ y) = \mathrm{Re}(Tx,\ y) \le \frac{1}{2}\ t\left(\|x\|^2 + \|Tx/\|Tx\|\ \|^2\right) \le t,$$

т. е. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| :\ \|x\| \le 1\} \le t$. $\rhd$

6.5.3. Замечание. Как отмечено в доказательстве 6.5.2, каждый эрмитов оператор T в гильбертовом пространстве H порождает эрмитову форму $f_T(x,\ y) := (Tx,\ y)$. Пусть, в свою очередь, f — эрмитова форма, причем для каждого $y \in H$ функционал $f(\cdot,\ y)$ непрерывен. Тогда в силу теоремы Рисса найдется элемент Ty из H такой, что $f(\cdot,\ y) = (Ty)'$. Очевидно, $T \in \mathscr{L}(H)$ и $(x,\ Ty) = f(x,\ y) = f(y,\ x)^* = (y,\ Tx)^* = (Tx,\ y)$. Можно убедиться, что в этом случае $T \in B(H)$ и $T = T^*$. Кроме того, $f = f_T$. Таким образом, в определении 6.5.1 условие $T \in B(H)$ можно заменить условием $T \in \mathscr{L}(H)$ (теорема Хеллингера — Тёплица, см. 7.4.7).

6.5.4. ***Критерий Вейля.*** *Число λ лежит в спектре эрмитова оператора T в том и только в том случае, если*

$$\inf_{\|x\|=1} \|\lambda x - Tx\| = 0.$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $t := \inf\{\|\lambda x - Tx\| :\ x \in H,\ \|x\| = 1\} > 0$. Установим, что $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$. Для каждого $x \in H$ выполнено $\|\lambda x - Tx\| \geq t\|x\|$. Стало быть, во-первых, $(\lambda - T)$ — мономорфизм, во-вторых, $H_0 := \mathrm{im}(\lambda - T)$ — замкнутое подпространство (ибо $\|(\lambda - T)x_m - (\lambda - T)x_k\| \geq t\|x_m - x_k\|$, т. е. «прообраз последовательности Коши фундаментален») и, наконец, в-третьих, $(\lambda - T)^{-1} \in B(H)$, как только $H = H_0$ (в такой ситуации $\|R(T,\ \lambda)\| \leq t^{-1}$). Допустим, вопреки доказываемому, что $H \neq H_0$. Тогда существует $y \in H_0^{\perp}$, для которого $\|y\| = 1$. При всех $x \in H$ будет $0 = (\lambda x - Tx,\ y) = (x,\ \lambda^* y - Ty)$, т. е. $\lambda^* y = Ty$. Далее, $\lambda^* = (Ty,\ y)/(y,\ y)$ и из эрмитовости T выводим $\lambda^* \in \mathbb{R}$. Отсюда $\lambda^* = \lambda$ и $y \in \ker(\lambda - T)$. Получили противоречие: $1 = \|y\| = \|0\| = 0$.

$\Leftarrow$: Если $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$, то имеется резольвента $R(T,\ \lambda) \in B(H)$. Поэтому $\inf\{\|\lambda x - Tx\| :\ \|x\| = 1\} \geq \|R(T,\ \lambda)\|^{-1}$. $\rhd$

6.5.5. ***Теорема о границах спектра.*** *Пусть T — эрмитов оператор в гильбертовом пространстве. Положим*

$$m_T := \inf_{\|x\|=1} (Tx,\ x), \quad M_T := \sup_{\|x\|=1} (Tx,\ x).$$

Тогда $\mathrm{Sp}(T) \subset [m_T,\ M_T]$ *и* $m_T,\ M_T \in \mathrm{Sp}(T)$.

$\lhd$ Учитывая эрмитовость оператора $T - \operatorname{Re}\lambda$ в рассматриваемом пространстве H, из тождества

$$\|\lambda x - Tx\|^2 = |\operatorname{Im}\lambda|^2\|x\|^2 + \|Tx - \operatorname{Re}\lambda x\|^2$$

на основании 6.5.4 получаем включение $\operatorname{Sp}(T) \subset \mathbb{R}$. Если $\lambda < m_T$, то для элемента $x \in H$ с единичной нормой $\|x\| = 1$ по неравенству Коши — Буняковского 6.1.5

$$\|\lambda x - Tx\| = \|\lambda x - Tx\|\ \|x\| \geq |(\lambda x - Tx,\ x)| =$$

$$= |\lambda - (Tx,\ x)| = (Tx,\ x) - \lambda \geq m_T - \lambda > 0.$$

Апелляция к 6.5.4 дает: $\lambda \in \operatorname{res}(T)$. Если же $\lambda > M_T$, то аналогичным образом

$$\|\lambda x - Tx\| \geq |(\lambda x - Tx,\ x)| = |\lambda - (Tx,\ x)| = \lambda - (Tx,\ x) \geq \lambda - M_T > 0.$$

Вновь $\lambda \in \operatorname{res}(T)$. Окончательно $\operatorname{Sp}(T) \subset [m_T,\ M_T]$.

Поскольку $(Tx,\ x) \in \mathbb{R}$ при $x \in H$, то в силу 6.5.2

$$\|T\| = \sup\{|(Tx,\ x)| :\ \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{(Tx,\ x) \vee (-(Tx,\ x)) :\ \|x\| \leq 1\} = M_T \vee (-m_T).$$

Допустим сначала, что $\lambda := \|T\| = M_T$. Если $\|x\| = 1$, то

$$\|\lambda x - Tx\|^2 = \lambda^2 - 2\lambda(Tx,\ x) + \|Tx\|^2 \leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|(Tx,\ x).$$

Иначе говоря, справедлива оценка

$$\inf_{\|x\|=1} \|\lambda x - Tx\|^2 \leq 2\|T\| \inf_{\|x\|=1} (\|T\| - (Tx,\ x)) = 0.$$

Привлекая 6.5.4, заключаем: $\lambda \in \operatorname{Sp}(T)$.

Рассмотрим теперь оператор $S := T - m_T$. Ясно, что $M_S = M_T - m_T \geq 0$ и $m_S = m_T - m_T = 0$. Таким образом, $\|S\| = M_S$ и по уже доказанному $M_S \in \operatorname{Sp}(S)$. Отсюда следует, что M_T входит в $\operatorname{Sp}(T)$, ибо $T = S + m_T$, а $M_T = M_S + m_T$. Осталось заметить, что $m_T = -M_{-T}$ и $\operatorname{Sp}(T) = -\operatorname{Sp}(-T)$. $\rhd$

6.5.6. *Следствие.* *Норма эрмитова оператора равна радиусу его спектра (и спектральному радиусу).* $\lhd\rhd$

6.5.7. *Следствие.* *Эрмитов оператор является нулевым в том и только в том случае, если у него нулевой спектр.* $\lhd\rhd$

6.6. Компактные эрмитовы операторы

6.6.1. Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют ***компактным*** (при этом пишут $T \in \mathscr{K}(X,\ Y)$), если образ $T(B_X)$ единичного шара B_X в X относительно компактен в Y.

6.6.2. Замечание. Подробное исследование компактных операторов в банаховых пространствах составляет содержание теории Рисса — Шаудера. Эта теория рассмотрена в гл. 8.

6.6.3. *Пусть T — компактный эрмитов оператор. Если $0 \neq \lambda \in \mathrm{Sp}(T)$, то λ — собственное число T, т. е. $\ker(\lambda - T) \neq 0$.*

$\lhd$ По критерию Вейля для некоторой последовательности (x_n) такой, что $\|x_n\| = 1$, выполнено $\lambda x_n - Tx_n \to 0$. Не нарушая общности, будем считать, что последовательность (Tx_n) сходится к $y := \lim Tx_n$. Тогда из тождества $\lambda x_n = (\lambda x_n - Tx_n) + Tx_n$ получаем, что существует предел (λx_n) и $y = \lim \lambda x_n$. Следовательно, $Ty = T(\lim \lambda x_n) = \lambda \lim Tx_n = \lambda y$. Так как $\|y\| = |\lambda|$, заключаем, что y — собственный вектор T. $\rhd$

6.6.4. *Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2$ — различные собственные числа эрмитова оператора T, а $x_1,\ x_2$ — отвечающие λ_1 и λ_2 соответственно собственные векторы* (т. е. $x_s \in \ker(\lambda_s - T),\ s := 1,\ 2$). *Тогда x_1 и x_2 ортогональны.*

$$\lhd\ (x_1,\ x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(Tx_1,\ x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(x_1,\ Tx_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_1,\ x_2)\ \rhd$$

6.6.5. *Для всякого $\varepsilon > 0$ вне промежутка $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ может лежать лишь конечное число собственных чисел компактного эрмитова оператора.*

$\lhd$ Пусть $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных собственных чисел T, причем $|\lambda_n| > \varepsilon$. Пусть, далее, x_n — собственный вектор, отвечающий λ_n и такой, что $\|x_n\| = 1$. В силу 6.6.4 имеем $(x_k,\ x_m) = 0$ при $m \neq k$. Значит,

$$\|Tx_m - Tx_k\|^2 = \|Tx_m\|^2 + \|Tx_k\|^2 = \lambda_m^2 + \lambda_k^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

т. е. последовательность $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не является относительно компактной. Получили противоречие с компактностью T. $\rhd$

6.6.6. *Лемма о разбиении спектра.* *Пусть T — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H и $0 \ne \lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Положим $H_\lambda := \ker(\lambda - T)$. Тогда H_λ конечномерно и разложение $H = H_\lambda \oplus H_\lambda^\perp$ приводит T. При этом имеет место матричное представление*

$$T \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T_\lambda \end{pmatrix},$$

где оператор T_λ — часть T в $H_\lambda^\perp$ — эрмитов и компактен, причем $\mathrm{Sp}(T_\lambda) = \mathrm{Sp}(T) \setminus \{\lambda\}$.

$\lhd$ Подпространство H_λ конечномерно ввиду компактности T. Помимо этого, H_λ инвариантно относительно T. Значит, ортогональное дополнение $H_\lambda^\perp$ подпространства H_λ — инвариантное подпространство $T^*(=T)$, ибо выполнено $(\forall\, x \in H_\lambda)(x,\ h) = 0 \Rightarrow (\forall\, x \in H_\lambda)(T^*h,\ x) = (h,\ Tx) = 0$.

Часть оператора T в H_λ — это явно λ. Компактность и эрмитовость части T_λ оператора T в $H_\lambda^\perp$ несомненны. Столь же очевидно, что при $\mu \ne \lambda$ оператор

$$\mu - T \sim \begin{pmatrix} \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \mu - T_\lambda \end{pmatrix}$$

обратим в том и только в том случае, если обратим $\mu - T_\lambda$. Ясно также, что λ не является собственным числом T_λ. $\rhd$

6.6.7. *Теорема Гильберта — Шмидта.* *Пусть H — гильбертово пространство и T — компактный эрмитов оператор в H. Пусть, далее, P_λ — ортопроектор на* $\ker(\lambda - T)$ *для* $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. *Тогда выполнено*

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} \lambda P_\lambda.$$

$\lhd$ Привлекая нужное число раз 6.5.6 и 6.6.6, для любого конечного подмножества θ в $\mathrm{Sp}(T)$ получаем

$$\left\| T - \sum_{\lambda \in \theta} \lambda P_\lambda \right\| = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in (\mathrm{Sp}(T) \cup 0) \setminus \theta\}.$$

Остается сослаться на 6.6.5. $\rhd$

6.6.8. Замечание. Теорема Гильберта — Шмидта содержит новую информацию по сравнению с конечномерным случаем по сути дела лишь тогда, когда оператор T «бесконечномерен», т. е. имеет бесконечномерный образ или, что то же самое, если $H_0^{\perp}$ — бесконечномерное пространство ($H_0 := \ker T$). Действительно, если оператор T конечномерен, т. е. имеет конечномерный образ, то подпространство $H_0^{\perp}$ изоморфно этому образу и, стало быть,

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k' \otimes e_k,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — ненулевые точки спектра T, «взятые с учетом кратности», а $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормальный базис в $H_0^{\perp}$, выбранный должным образом.

Теорема Гильберта — Шмидта показывает, что с точностью до замены суммы рядом бесконечномерные компактные эрмитовы операторы устроены так же, как и конечномерные. В самом деле, при $\lambda \neq \mu$, где $\lambda,\ \mu$ — ненулевые точки спектра T, собственные подпространства H_λ и H_μ конечномерны и ортогональны. При этом гильбертова сумма $\oplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(T)\setminus 0} H_\lambda$ равна $H_0^{\perp} = \operatorname{cl} \operatorname{im} T$, ибо $H_0 = (\operatorname{im} T)^{\perp}$. Строя «по порядку» базисы в конечномерных пространствах H_λ (перенумеровывая собственные числа «в порядке убывания модулей и с учетом кратности», т. е. полагая $\lambda_1 := \lambda_2 := \ldots := \lambda_{\dim H_{\lambda_1}} := \lambda_1;\ \lambda_{\dim H_{\lambda_1}+1} := \ldots := \lambda_{\dim H_{\lambda_1} + \dim H_{\lambda_2}} := \lambda_2$ и т. д.), получаем разложение $H = H_0 \oplus H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2} \oplus \ldots$ и представление

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k' \otimes e_k,$$

где ряд суммируется в операторной норме. ◁▷

6.6.9. ***Теорема об общем виде компактного оператора.*** *Пусть $T \in \mathscr{K}(H_1,\ H_2)$ — бесконечномерный компактный оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. Существуют ортонормальные семейства $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в H_1, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в H_2 и семейство чисел $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}_+ \setminus 0$, $\mu_k \downarrow 0$, для которых справедливо представление*

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k' \otimes f_k.$$

$\lhd$ Положим $S := T^*T$. Понятно, что $S \in B(H_1)$ и S компактен. Помимо этого, $(Sx,\ x) = (T^*Tx,\ x) = (Tx,\ Tx) = \|Tx\|^2$. Значит, в силу 6.4.6, S эрмитов и $H_0 := \ker S = \ker T$. Отметим также, что $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ по теореме 6.5.5.

Пусть $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормальный базис в $H_0^{\perp}$ из собственных векторов S и $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — соответствующая убывающая последовательность положительных собственных значений $\lambda_k > 0,\ k \in \mathbb{N}$ (ср. 6.6.8). Тогда элемент $x \in H_1$ можно разложить в ряд Фурье

$$x - P_{H_0}x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)e_k.$$

Таким образом, учитывая, что $TP_{H_0} = 0$, и полагая $\mu_k := \sqrt{\lambda_k}$ и $f_k := \mu_k^{-1}Te_k$, получаем

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)Te_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)\frac{\mu_k}{\mu_k}Te_k = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x,\ e_k)f_k.$$

Семейство $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ортонормально, ибо

$$(f_n,\ f_m) = \left(\frac{Te_n}{\mu_n},\ \frac{Te_m}{\mu_m}\right) = \frac{1}{\mu_n\mu_m}(Te_n,\ Te_m) =$$

$$= \frac{1}{\mu_n\mu_m}(T^*Te_n,\ e_m) = \frac{1}{\mu_n\mu_m}(Se_n,\ e_m) =$$

$$= \frac{1}{\mu_n,\ \mu_m}(\lambda_n e_n,\ e_m) = \frac{\mu_n}{\mu_m}(e_n,\ e_m).$$

Привлекая теперь последовательно теорему Пифагора и неравенство Бесселя, выводим:

$$\left\|\left(T - \sum_{k=1}^{n}\mu_k e_k' \otimes f_k\right)x\right\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu_k(x,\ e_k)f_k\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\mu_k^2|(x,\ e_k)|^2 \le \lambda_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|(x,\ e_k)|^2 \le \lambda_{n+1}\|x\|^2.$$

Окончательно, учитывая соотношение $\lambda_k \downarrow 0$, имеем

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} \mu_k e'_k \otimes f_k \right\| \le \mu_{n+1} \to 0. \ \triangleright$$

6.6.10. Замечание. Теорема 6.6.9 означает, в частности, что компактные операторы (и только они) суть точки прикосновения множества конечномерных операторов. Этот факт выражают еще и так: «гильбертово пространство обладает свойством аппроксимации».

Упражнения

6.1. Найти крайние точки шара гильбертова пространства.

6.2. Выяснить, какие из классических банаховых пространств гильбертовы, а какие — нет.

6.3. Будет ли гильбертовым фактор-пространство гильбертова пространства?

6.4. Каждое ли банахово пространство вкладывается в гильбертово пространство?

6.5. Может ли быть гильбертовым пространство ограниченных эндоморфизмов гильбертова пространства?

6.6. Описать второе ортогональное дополнение к множеству.

6.7. Доказать, что ни один гильбертов базис бесконечномерного гильбертова пространства не является базисом Гамеля.

6.8. Построить на отрезке наилучшее приближение в метрике L_2 полинома степени $n+1$ полиномами степени не выше n.

6.9. Доказать, что $x \perp y$ в том и только в том случае, если $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ и $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

6.10. Для ограниченного оператора T установить соотношения

$$(\ker T)^{\perp} = \operatorname{cl} \operatorname{im} T^*, \quad (\operatorname{im} T)^{\perp} = \ker T^*.$$

6.11. Выяснить связи между эрмитовыми формами и эрмитовыми операторами.

6.12. Найти эрмитово сопряженные операторы к операторам сдвига, умножения, к конечномерному оператору.

6.13. Доказать, что оператор в гильбертовом пространстве компактен в том и только в том случае, если компактен эрмитово сопряженный к нему оператор. Как связаны соответствующие канонические представления этих операторов?

6.14. Пусть известно, что оператор T — изометрия. Будет ли изометрией оператор T^*?

6.15. Частичная изометрия — это оператор, являющийся изометрией на ортогональном дополнении своего ядра. Как устроен эрмитово сопряженный к частичной изометрии оператор?

6.16. Каковы крайние точки единичного шара в пространстве эндоморфизмов гильбертова пространства?

6.17. Доказать, что при сужении на шар слабая топология сепарабельного гильбертова пространства становится метризуемой.

6.18. Доказать, что идемпотент оператора P в гильбертовом пространстве является ортопроектором в том и только в том случае, если P коммутирует с P^*.

6.19. Пусть $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ — бесконечная матрица такая, что $a_{kl} \geq 0$ для всех $k,\ l$ и, кроме того, имеются также p_k и $\beta,\ \gamma > 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}p_k \leq \beta p_l; \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}p_l \leq \gamma p_k \quad (k,\ l \in \mathbb{N}).$$

Тогда существует оператор $T \in B(l_2)$ такой, что $(e_k,\ e_l) = a_{kl}$ и $\|T\| = \sqrt{\beta\gamma}$ (где e_k — канонический базис в l_2, составленный характеристическими функциями точек из $\mathbb{N}$).

Глава 7

Принципы банаховых пространств

7.1. Основной принцип Банаха

7.1.1. *Лемма о топологическом строении выпуклого множества.* *Пусть U — выпуклое множество с непустой внутренностью в (мульти)нормированном пространстве*: $\operatorname{int} U \neq \varnothing$. *Тогда*

(1) $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow \alpha \operatorname{cl} \ U + (1-\alpha) \operatorname{int} U \subset \operatorname{int} U$;

(2) $\operatorname{core} U = \operatorname{int} U$;

(3) $\operatorname{cl} U = \operatorname{cl} \operatorname{int} U$;

(4) $\operatorname{int} \operatorname{cl} U = \operatorname{int} U$.

$\triangleleft$ (1) Для $u_0 \in \operatorname{int} U$ в силу 5.2.10 множество $\operatorname{int} U - u_0$ — открытая окрестность нуля. Отсюда при $0 \leq \alpha < 1$ получаем

$$\alpha \operatorname{cl} U \subset \operatorname{cl} \alpha U \subset \alpha U + (1-\alpha)(\operatorname{int} U - u_0) =$$

$$= \alpha U + (1-\alpha) \operatorname{int} U - (1-\alpha) u_0 \subset$$

$$\subset \alpha U + (1-\alpha) U - (1-\alpha) u_0 \subset U - (1-\alpha) u_0.$$

Таким образом, $(1-\alpha) u_0 + \alpha \operatorname{cl} U \subset U$ и, стало быть, U содержит $(1-\alpha) \operatorname{int} U + \alpha \operatorname{cl} U$. Последнее множество открыто, ибо представляет собой результат сложения $\alpha \operatorname{cl} U$ с открытым множеством $(1-\alpha) \operatorname{int} U$.

(2) Несомненно, что $\operatorname{int} U \subset \operatorname{core} U$. Если же $u_0 \in \operatorname{int} U$ и $u \in \operatorname{core} U$, то для некоторых $u_1 \in U$ и $0 < \alpha < 1$ будет $u = \alpha u_0 + (1-\alpha) u_1$. Поскольку $u_1 \in \operatorname{cl} U$, на основании (1) заключаем: $u \in \operatorname{int} U$.

(3) Понятно, что $\operatorname{cl}\operatorname{int} U \subset \operatorname{cl} U$, ибо $\operatorname{int} U \subset U$. Если, в свою очередь, $u \in \operatorname{cl} U$, то, выбрав $u_0 \in \operatorname{int} U$ и положив $u_\alpha := \alpha u_0 + (1-\alpha)u$, видим: $u_\alpha \to u$ при $\alpha \to 0$ и $u_\alpha \in \operatorname{int} U$, когда $0 < \alpha < 1$. Итак, по построению $u \in \operatorname{cl}\operatorname{int} U$.

(4) Из включений $\operatorname{int} U \subset U \subset \operatorname{cl} U$ вытекает, что $\operatorname{int} U \subset \operatorname{int}\operatorname{cl} U$. Если теперь $u \in \operatorname{int}\operatorname{cl} U$, то, в силу (2), $u \in \operatorname{core}\operatorname{cl} U$. Значит, вновь выделяя $u_0 \in \operatorname{int} U$, подыщем $u_1 \in \operatorname{cl} U$ и $0 < \alpha < 1$, для которых $u = \alpha u_0 + (1-\alpha)u_1$. Привлекая (1), окончательно выводим: $u \in \operatorname{int} U$. $\rhd$

7.1.2. Замечание. В случае конечномерности рассматриваемого пространства условие $\operatorname{int} U \neq \varnothing$ в пунктах 7.1.1 (2) и 7.1.1 (4) можно опустить. В бесконечномерной ситуации наличие внутренней точки, как показывают многочисленные примеры, — это существенное требование. В частности, так обстоит дело при $U := B_{c_0} \cap X$, где c_0 — пространство сходящихся к нулю последовательностей, а X — подпространство финитных последовательностей в c_0, т. е. прямая сумма счетного числа экземпляров основного поля. В самом деле, бесспорно, $\operatorname{core} U = \varnothing$ и в то же время $\operatorname{cl} U = B_{c_0}$. $\lhd\rhd$

7.1.3. Определение. Множество U в (мульти)нормированном пространстве X называют *идеально выпуклым*, если U выдерживает образование *счетных выпуклых комбинаций*. Точнее говоря, U идеально выпукло, если, каковы бы ни были последовательности $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ и $u_n \in U$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ сходится в X к элементу u, выполнено $u \in U$.

7.1.4. Примеры.

(1) *Параллельный (на вектор u_0) перенос $x \mapsto x + u_0$ «сохраняет» идеальную выпуклость.*

(2) *Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло.*

(3) *Открытое выпуклое множество идеально выпукло.*

$\lhd$ В самом деле, пусть U открыто и выпукло. Если $U = \varnothing$, то доказывать нечего. Если же $U \neq \varnothing$, то по 7.1.4 (1) можно считать, что $0 \in U$ и, значит, $U = \{p_U < 1\}$, где p_U — функционал Минковского множества U. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательности в U и в $\mathbb{R}_+$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ и элемент $u := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ не попал в U. В силу 7.1.4 (2), u лежит в $\operatorname{cl} U = \{p_U \leq 1\}$ и, стало быть, $p_U(u) = 1$. С другой стороны, ясно, что $p_U(u) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_U(u_n) \leq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ (ср. 7.2.1). Итак, $0 =$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_n p_U(u_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1 - p_U(u_n))$. Отсюда $\alpha_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. $\rhd$

(4) *Пересечение произвольного семейства идеально выпуклых множеств идеально выпукло.*

(5) *Выпуклое подмножество конечномерного пространства идеально выпукло.* $\lhd\rhd$

7.1.5. ***Основной принцип Банаха.*** *В банаховом пространстве идеально выпуклое множество с поглощающим замыканием является окрестностью нуля.*

$\lhd$ Пусть U — такое множество. По условию для рассматриваемого банахова пространства X выполнено $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathrm{cl}\,U$. По теореме Бэра X — нетощее множество и, стало быть, найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $\mathrm{int}\,n\,\mathrm{cl}\,U \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\,U = 1/n\ \mathrm{int}\,n\,\mathrm{cl}\,U \neq \varnothing$. Нам известно, что $0 \in \mathrm{core}\,\mathrm{cl}\,U$. Значит, на основании 7.1.1 заключаем: $0 \in \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\,U$. Иными словами, существует $\delta > 0$ такое, что $\mathrm{cl}\,U \supset \delta B_X$. Следовательно, имеет место соотношение:

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \mathrm{cl}\,\frac{1}{\varepsilon}U \supset \frac{\delta}{\varepsilon}B_X.$$

С помощью приведенной импликации проверим, что $U \supset \delta/2\,B_X$.

Пусть $x_0 \in \delta/2\,B_X$. Полагая $\varepsilon := 2$, выберем $y_1 \in 1/\varepsilon\,U$ из условия $\|y_1 - x_0\| \leq 1/2\varepsilon\,\delta$. Получаем элемент $u_1 \in U$, для которого $\|1/2\,u_1 - x_0\| \leq 1/2\varepsilon\,\delta = 1/4\,\delta$.

Полагая теперь $x_0 := -1/2\,u_1 + x_0$ и $\varepsilon := 4$ и применяя предыдущие рассуждения, обнаруживаем элемент $u_2 \in U$ такой, что $\|1/4\,u_2 + 1/2\,u_1 - x_0\| \leq 1/2\varepsilon\,\delta = 1/8\,\delta$. Продолжая приведенный процесс по индукции, строим последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в U, обладающую тем свойством, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n\,u_n$ сходится к x_0. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$ и множество U идеально выпукло, выводим: $x_0 \in U$. $\rhd$

7.1.6. *В банаховом пространстве у идеально выпуклого множества совпадают ядро, внутренность, ядро замыкания и внутренность замыкания.*

$\lhd$ Ясно, что $\mathrm{int}\,U \subset \mathrm{core}\,U \subset \mathrm{core}\,\mathrm{cl}\,U$. Если $u \in \mathrm{core}\,\mathrm{cl}\,U$, то $\mathrm{cl}(U - u) = \mathrm{cl}\,U - u$ — поглощающее множество. При параллельном переносе идеально выпуклое множество перейдет в идеально выпуклое множество (см. 7.1.4 (1)). Значит, $U - u$ — окрестность нуля по основному принципу Банаха 7.1.5. В силу 5.2.10, u входит в $\operatorname{int} U$. Итак, $\operatorname{int} U = \operatorname{core} U = \operatorname{core} \operatorname{cl} U$. Привлекая 7.1.1, имеем $\operatorname{int} \operatorname{cl} U = \operatorname{int} U$. $\triangleright$

7.1.7. *Ядро и внутренность замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве совпадают.*

$\triangleleft$ Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло. $\triangleright$

7.1.8. Замечание. Анализ 7.1.5 показывает, что условие банаховости в 7.1.7 использовано не в полной мере. Существуют примеры неполных нормированных пространств, в которых ядро и внутренность у любого замкнутого выпуклого множества совпадают. Пространства, обладающие указанным свойством, называют *бочечными*. Понятие бочечности, как видно, имеет смысл и в мультинормированных пространствах. Известны широкие классы бочечных мультинормированных пространств. В частности, таковы пространства Фреше.

7.1.9. Контрпример. *В каждом бесконечномерном банаховом пространстве существуют абсолютно выпуклые поглощающие, но не идеально выпуклые множества.*

$\triangleleft$ Используя, например, базис Гамеля, возьмем разрывный линейный функционал f. Тогда множество $\{|f| \leq 1\}$ — искомое. $\triangleright$

7.2. Принципы ограниченности

7.2.1. *Пусть* $p : X \to \mathbb{R}$ — *сублинейный функционал на нормированном пространстве* $(X, \ \|\cdot\|)$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) p *равномерно непрерывен*;
(2) p *непрерывен*;
(3) p *непрерывен в нуле*;
(4) $\{p \leq 1\}$ — *окрестность нуля*;
(5) $\|p\| := \sup\{|p(x)| : \ \|x\| \leq 1\} < +\infty$, *т. е.* p *ограничен.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

(4) $\Rightarrow$ (5): Найдется $t > 0$, для которого $t^{-1}B_X \subset \{p \leq 1\}$. Поэтому при $\|x\| \leq 1$ будет $p(x) \leq t$. Кроме того, из неравенства $-p(-x) \leq p(x)$ вытекает, что и $-p(x) \leq t$ при $x \in B_X$. Окончательно $\|p\| \leq t < +\infty$.

(5) $\Rightarrow$ (1): Из субаддитивности p для $x,\ y \in X$ получаем

$$p(x) - p(y) \le p(x-y); \quad p(y) - p(x) \le p(y-x).$$

Отсюда $|p(x) - p(y)| \le p(x-y) \vee p(y-x) \le \|p\|\ \|x-y\|$. $\triangleright$

7.2.2. *Теорема Гельфанда.* *Полунепрерывный снизу сублинейный функционал, определенный на банаховом пространстве, непрерывен.*

$\triangleleft$ Пусть p — такой функционал. Тогда множество $\{p \le 1\}$ замкнуто (см. 4.3.8). Поскольку $\operatorname{dom} p$ — это все пространство, то, по 3.8.8, $\{p \le 1\}$ — поглощающее множество. По основному принципу Банаха $\{p \le 1\}$ — окрестность нуля. Осталось применить 7.2.1. $\triangleright$

7.2.3. Замечание. Теорему Гельфанда можно более развернуто формулировать следующим образом: «если X — банахово пространство, то эквивалентные условия 7.2.1 (1)–7.2.1 (5) равносильны высказыванию: p полунепрерывен снизу». Отметим здесь же, что требование $\operatorname{dom} p = X$ можно несколько ослабить и считать, что $\operatorname{dom} p$ — нетощее линейное множество, не предполагая при этом полноты X.

7.2.4. *Принцип равностепенной непрерывности.* *Пусть X — банахово пространство и Y — (полу)нормированное пространство. Для любого непустого множества $\mathscr{E}$ непрерывных линейных операторов из X в Y эквивалентны утверждения:*

(1) *$\mathscr{E}$ поточечно ограничено, т. е. для всякого $x \in X$ ограничено в Y множество $\{Tx :\ T \in \mathscr{E}\}$;*

(2) *$\mathscr{E}$ равностепенно непрерывно.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Положим $q(x) := \sup\{p(Tx)\ :\ T \in \mathscr{E}\}$, где p — полунорма в Y. Несомненно, что q — полунепрерывный снизу сублинейный функционал и, стало быть, по теореме Гельфанда $\|q\| < +\infty$, т. е. $p(T(x-y)) \le \|q\|\ \|x-y\|$ при всех $T \in \mathscr{E}$. Значит, $T^{\times -1}(\{d_p \le \varepsilon\}) \subset \{d_{\|\cdot\|} \le \varepsilon/\|q\|\}$ для каждого $T \in \mathscr{E}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Последнее означает равностепенную непрерывность $\mathscr{E}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Очевидно. $\triangleright$

7.2.5. *Принцип равномерной ограниченности.* *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Для* *любого непустого семейства* $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *ограниченных операторов эквивалентны утверждения*:

(1) $x \in X \Rightarrow \sup_{\xi\in\Xi} \|T_\xi x\| < +\infty$;

(2) $\sup_{\xi\in\Xi} \|T_\xi\| < +\infty$.

$\lhd$ Достаточно заметить, что 7.2.5 (2) — это другая запись 7.2.4 (2). $\rhd$

7.2.6. *Пусть* X *— банахово пространство и* U *— множество в* X'. *Тогда эквивалентны утверждения*:

(1) *множество* U *ограничено в* X';

(2) *для каждого* $x \in X$ *числовое множество* $\{\langle x \mid x'\rangle : x' \in U\}$ *ограничено в* $\mathbb{F}$.

$\lhd$ Это частный случай 7.2.5. $\rhd$

7.2.7. *Пусть* X *— нормированное пространство и* U *— множество в* X. *Тогда эквивалентны утверждения*:

(1) *множество* U *ограничено в пространстве* X;

(2) *для каждого* $x' \in X'$ *числовое множество* $\{\langle x \mid x'\rangle : x \in U\}$ *ограничено в* $\mathbb{F}$.

$\lhd$ Следует проверить только (2) $\Rightarrow$ (1). Поскольку X' — банахово пространство (см. 5.5.7), а X изометрически вложено в X'' с помощью двойного штрихования (см. 5.1.10 (8)), то требуемое вытекает из 7.2.6. $\rhd$

7.2.8. Замечание. Высказывание 7.2.7 (2) можно переформулировать таким образом: «множество U ограничено в пространстве $(X,\ \sigma(X,\ X'))$» или же, в связи с 5.1.10 (4), так: «множество U слабо ограничено». Двойственность предложений 7.2.6 и 7.2.7 будет полностью вскрыта в 10.4.6.

7.2.9. *Теорема Банаха — Штейнгауза.* *Пусть* X, Y *— банаховы пространства и* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T_n \in B(X,\ Y)$, *— последовательность ограниченных операторов. Положим* $E := \{x \in X : \ \exists \lim T_n x\}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $E = X$;

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ *и* E *плотно в* X.

При выполнении эквивалентных условий (1), (2) *отображение* $T_0 : X \to Y$, *определенное соотношением* $T_0 x := \lim T_n x$, *представляет собой ограниченный линейный оператор и* $\|T_0\| \le \liminf\ \|T_n\|$.

$\lhd$ Если $E = X$, то, конечно же, $\mathrm{cl}\, E = X$. Кроме того, для каждого $x \in X$ последовательность $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в Y (ибо она сходится). Значит, по принципу равномерной ограниченности $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ и (1) $\Rightarrow$ (2) доказано.

Если выполнено (2) и $x \in X$, то для $\overline{x} \in E$ и $m,\ k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\|T_m x - T_k x\| = \|T_m x - T_m \overline{x} + T_m \overline{x} - T_k \overline{x} + T_k \overline{x} - T_k x\| \leq$$

$$\leq \|T_m x - T_m \overline{x}\| + \|T_m \overline{x} - T_k \overline{x}\| + \|T_k \overline{x} - T_k x\| \leq$$

$$\leq \|T_m\|\ \|x - \overline{x}\| + \|T_m \overline{x} - T_k \overline{x}\| + \|T_k\|\ \|\overline{x} - x\| \leq$$

$$\leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\ \|x - \overline{x}\| + \|T_m \overline{x} - T_k \overline{x}\|.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем, во-первых, элемент $\overline{x} \in E$, для которого $2 \sup_n \|T_n\|\, \|x - \overline{x}\| \leq \varepsilon/2$, а во-вторых, $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\|T_m \overline{x} - T_k \overline{x}\| \leq \varepsilon/2$ при $m,\ k \geq n$. В силу уже установленного $\|T_m x - T_k x\| \leq \varepsilon$, т. е. $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в Y. Поскольку Y — банахово пространство, заключаем: $x \in E$. Итак, (2) $\Rightarrow$ (1) доказано.

Осталось отметить, что для каждого $x \in X$ верно

$$\|T_0 x\| = \lim \|T_n x\| \leq \liminf\ \|T_n\|\ \|x\|,$$

ибо норма — непрерывная функция. $\rhd$

7.2.10. Замечание. В условиях теоремы Банаха — Штейнгауза из справедливости одного из эквивалентных утверждений 7.2.9 (1) и 7.2.9 (2) можно сделать вывод, что последовательность (T_n) сходится к T_0 равномерно на компактных подмножествах X. Иными словами, для всякого (непустого) компакта Q в X выполнено

$$\sup_{x\in Q}\ \|T_n x - T_0 x\| \to 0.$$

$\lhd$ В самом деле, по теореме Гельфанда сублинейный функционал $p_n(x) := \sup\{\|T_m x - T_0 x\|\ :\ \ m \geq n\}$ непрерывен. При этом $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$ и $p_n(x) \to 0$ для каждого $x \in X$. Значит, требуемое вытекает из *теоремы Дини*: «убывающая последовательность непрерывных вещественных функций, поточечно сходящаяся на компакте к непрерывной функции, сходится к этой функции равномерно». $\rhd$

7.2.11. *Принцип фиксации особенности.* *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Если $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность операторов из $B(X,\ Y)$ и $\sup_n\ \|T_n\| = +\infty$, то найдется точка $x \in X$, для которой выполнено $\sup_n \|T_n x\| = +\infty$. Множество таких «фиксирующих особенность» точек — вычет.*

$\triangleleft$ Первая часть утверждения содержится в принципе равномерной ограниченности. Вторая часть требует ссылок на 7.2.3 и 4.7.4. $\triangleright$

7.2.12. *Принцип сгущения особенностей.* *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Если $(T_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ — семейство в $B(X,\ Y)$ такое, что $\sup_n \|T_{n,m}\| = +\infty$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, то существует точка $x \in X$, для которой $\sup_n \|T_{n,m}x\| = +\infty$ при всех $m \in \mathbb{N}$.* $\triangleleft\triangleright$

7.3. Принцип идеального соответствия

7.3.1. *Пусть X и Y — векторные пространства. Соответствие $F \subset X\times Y$ выпукло в том и только в том случае, если для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место включение*

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \supset \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2).$$

$\triangleleft$ $\Leftarrow$: Если $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in F$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то $\alpha_1 y + \alpha_2 y_2 \in F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, поскольку $y_1 \in F(x_1)$ и $y_2 \in F(x_2)$.

$\Rightarrow$: Если x_1 или x_2 не входит в $\operatorname{dom} F$, то доказывать нечего. Если же $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} F$ и $y_1 \in F(x_1),\ y_2 \in F(x_2)$, то $\alpha_1(x_1,\ y_1) + \alpha_2(x_2,\ y_2) \in F$ при $\alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (см. 3.1.2 (8)). $\triangleright$

7.3.2. Замечание. Пусть X, Y — банаховы пространства. Ясно, что в пространстве $X \times Y$ удается многими способами задать норму так, чтобы соответствующая топология совпадала с произведением топологий τ_X и τ_Y. Например, можно положить $\|(x,\ y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$, т. е. ввести в $X \times Y$ норму как в сумму пространств X и Y по типу 1. Отметим здесь же, что понятие «идеально выпуклое множество» имеет линейно топологический характер, т. е. выделяемый этим понятием класс объектов не зависит от способа задания топологии (в частности, не меняется при переходе к эквивалентной (мульти)норме). В этой связи корректным является следующее определение.

7.3.3. Определение. Соответствие $F \subset X \times Y$, где X и Y — банаховы пространства, называют ***идеально выпуклым***, или, короче, ***идеальным***, если F — идеально выпуклое множество.

7.3.4. *Лемма об идеальном соответствии.* *Образ ограниченного идеально выпуклого множества при идеальном соответствии — идеально выпуклое множество.*

◁ Пусть $F \subset X \times Y$ — рассматриваемое соответствие и U — ограниченное идеально выпуклое множество в X. Если $U \cap \operatorname{dom} F = \varnothing$, то $F(U) = \varnothing$ и доказывать ничего не надо. Пусть теперь $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F(U)$, т. е. $y_n \in F(x_n)$, где $x_n \in U$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть, наконец, (α_n) — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ и, кроме того, в Y существует сумма ряда $y := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$. Несомненно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup \|U\| = \sup \|U\| < +\infty$$

ввиду ограниченности U. Поскольку X полно, то на основании 5.5.3 в X есть элемент $x := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Следовательно, в пространстве $X \times Y$ выполнено

$$(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n,\ y_n).$$

Используя последовательно идеальную выпуклость F и U, выводим: $(x,\ y) \in F$ и $x \in U$. Стало быть, $y \in F(U)$. ▷

7.3.5. *Принцип идеального соответствия.* *Пусть X и Y — банаховы пространства, $F \subset X \times Y$ — идеальное соответствие и $(x,\ y) \in F$. Соответствие F отображает окрестности точки x на окрестности точки y в том и только в том случае, если $y \in \operatorname{core} F(X)$.*

◁ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: С учетом 7.1.4 можно считать: $x = 0$ и $y = 0$. Поскольку каждая окрестность нуля U содержит εB_X для некоторого $\varepsilon > 0$, достаточно рассмотреть случай $U := B_X$. Так как U — ограниченное множество, на основании 7.3.4, $F(U)$ идеально выпукло. Для завершения доказательства можно проверить, что $F(U)$ — поглощающее множество и сослаться на 7.1.6.

Возьмем произвольный элемент $\overline{y} \in Y$. Раз известно, что $0 \in \operatorname{core} F(X)$, то найдется $\alpha \in \mathbb{R}_+$, для которого $\alpha\overline{y} \in F(X)$. Иначе говоря, для подходящего $\overline{x} \in X$ справедливо $\alpha\overline{y} \in F(X)$. Если $\|\overline{x}\| \leq 1$, то доказывать нечего. Если же $\|\overline{x}\| > 1$, то $\lambda := \|\overline{x}\|^{-1} < 1$. Отсюда, привлекая 7.3.1, выводим:

$$\begin{aligned}&\alpha\lambda\overline{y} = (1-\lambda)0 + \lambda\alpha\overline{y} \in (1-\lambda)F(0) + \lambda F(\overline{x}) \subset \\ &\subset F((1-\lambda)0 + \lambda\overline{x}) = F(\lambda\overline{x}) \subset F(B_X) = F(U).\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\|\lambda\overline{x}\| = 1$, т. е. $\lambda\overline{x} \in B_X$. $\triangleright$

7.3.6. Замечание. Свойство F, описываемое в 7.3.5, именуют *открытостью F в точке* $(x,\ y)$.

7.3.7. Замечание. Говоря формально, принцип идеального соответствия слабее основного принципа Банаха 7.1.5. Тем не менее соответствующий зазор невелик и легко устраним. Именно заключение 7.3.5 останется верным, если считать, что $y \in \operatorname{core} \operatorname{cl} F(X)$, потребовав дополнительно идеальной выпуклости $F(X)$. Последнее требование не слишком обременительно и в силу 7.3.4 заведомо выполнено, если эффективное множество $\operatorname{dom} F$ ограничено. Указанная незначительная модификация 7.3.5 содержит 7.1.5 в качестве частного случая. В этой связи 7.3.5 обычно называют *основным принципом Банаха для соответствий*.

7.3.8. Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — соответствие. Соответствие F называют *замкнутым*, если F — замкнутое множество.

7.3.9. Замечание. По понятным причинам о замкнутом соответствии часто говорят как о соответствии с «замкнутым графиком».

7.3.10. *Соответствие F замкнуто в том и только в том случае, если для любых последовательностей (x_n) в X и (y_n) в Y таких, что $x_n \in \operatorname{dom} F$, $y_n \in F(x_n)$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, выполнено $x \in \operatorname{dom} F$ и $y \in F(x)$.* $\triangleleft\triangleright$

7.3.11. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — замкнутое выпуклое соответствие. Пусть, далее, $(x,\ y) \in F$ и $y \in \operatorname{core} \operatorname{im} F$. Соответствие F отображает окрестности точки x на окрестности точки y.*

$\triangleleft$ Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло, так что всё содержится в 7.3.5. $\triangleright$

7.3.12. Определение. Соответствие $F \subset X \times Y$ называют *открытым*, если образ открытого множества в X — открытое множество в Y.

7.3.13. *Принцип открытости.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — идеальное соответствие, причем $\operatorname{im} F$ — открытое множество. Тогда F — открытое соответствие.*

$\lhd$ Пусть U — открытое множество в X. Если $y \in F(U)$, то найдется $x \in U$, для которого $(x,\ y) \in F$. Ясно, что $y \in \operatorname{core} \operatorname{im} F$. Поскольку выполнены условия 7.3.5, то $F(U)$ — окрестность y, ибо U — окрестность x. Последнее означает, что $F(U)$ — открытое множество. $\rhd$

7.4. Теоремы о гомоморфизме и замкнутом графике

7.4.1. Определение. Оператор T из $\mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *гомоморфизмом*, если $T \in B(X,\ Y)$ и T — открытое соответствие.

7.4.2. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и T — гомоморфизм из X в Y. Тогда $\operatorname{im} T = Y$ и Y — банахово пространство.*

$\lhd$ То, что $\operatorname{im} T = Y$, очевидно. Если заранее известно, что T — мономорфизм, то выполнено $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y,\ X)$. Из-за открытости T оператор T^{-1} входит в $B(Y,\ X)$, что обеспечивает полноту Y (прообраз последовательности Коши — последовательность Коши в прообразе). В общем случае рассмотрим кообраз $\operatorname{coim} T := X/\ker T$, наделенный фактор-нормой. На основании 5.5.4, $\operatorname{coim} T$ — банахово пространство. Кроме того, в силу 2.3.11 имеется единственное снижение $\overline{T}$ оператора T на $\operatorname{coim} T$. Учитывая определение фактор-нормы и 5.1.3, заключаем, что оператор $\overline{T}$ — гомоморфизм. Мономорфизмом этот оператор является по построению. Осталось заметить, что $\operatorname{im} \overline{T} = \operatorname{im} T = Y$. $\rhd$

7.4.3. Замечание. Относительно снижения $\overline{T} : \operatorname{coim} T \to Y$ оператора T можно утверждать, что $\|T\| = \|\overline{T}\|$. $\lhd\rhd$

7.4.4. *Теорема Банаха о гомоморфизме.* *Ограниченный эпиморфизм одного банахова пространства на другое является гомоморфизмом.*

$\lhd$ Пусть $T \in B(X,\ Y)$ и $\operatorname{im} T = Y$. Применяя принцип открытости к соответствию T, получаем требуемое. $\rhd$

7.4.5. *Теорема Банаха об изоморфизме.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in B(X,\ Y)$. Если T — изоморфизм векторных пространств X и Y, т. е. $\ker T = 0$ и $\operatorname{im} T = Y$, то $T^{-1} \in B(Y,\ X)$.*

$\lhd$ Частный случай 7.4.4. $\rhd$

7.4.6. Замечание. Коротко теорему 7.4.5 формулируют так: «непрерывный изоморфизм банаховых пространств является топологическим изоморфизмом». Отметим здесь же, что эту теорему иногда называют «принципом корректности» и выражают словами: «если уравнение $Tx = y$, где $T \in B(X,\ Y)$, а X, Y — банаховы пространства, однозначно разрешимо при любой правой части, то решение x непрерывно зависит от правой части y».

7.4.7. *Теорема Банаха о замкнутом графике.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — замкнутый линейный оператор. Тогда T непрерывен.*

$\lhd$ Соответствие T^{-1} идеально, и $T^{-1}(Y) = X$. $\rhd$

7.4.8. *Следствие.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и задан $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $T \in B(X,\ Y)$;

(2) *для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X и $x \in X$ таких, что $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$, где $y \in Y$, выполнено $y = Tx$.*

$\lhd$ (2) есть переформулировка замкнутости T. $\rhd$

7.4.9. Определение. Подпространство X_1 банахова пространства X называют *дополняемым* (реже — *топологически дополняемым*), если X_1 замкнуто и, кроме того, найдется замкнутое подпространство X_2 такое, что $X = X_1 \oplus X_2$ (т. е. $X_1 \wedge X_2 = 0$, $X_1 \vee X_2 = X$).

7.4.10. *Принцип дополняемости.* *Для подпространства X_1 банахова пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *X_1 дополняемо;*

(2) *X_1 есть область значений ограниченного проектора, т. е. найдется $P \in B(X)$ такой, что $P^2 = P$ и $\operatorname{im} P = X_1$.*

◁ (1) ⇒ (2): Пусть P — проектор X на X_1 параллельно X_2 (см. 2.2.9 (4)). Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в X и $x_n \to x$, а $Px_n \to y$. Ясно, что $Px_n \in X_1$ для $n \in \mathbb{N}$. В силу замкнутости X_1, по 4.1.19, $y \in X_1$. Аналогично из условия $(x_n - Px_n \in X_2$ для $n \in \mathbb{N})$ вытекает, что $x - y \in X_2$. Значит, $P(x-y) = 0$. Помимо этого, $y = Py$, т. е. $y = Px$. Остается сослаться на 7.4.8.

(2) ⇒ (1): Следует проверить только, что $X_1 = \operatorname{im} P$ замкнуто. Возьмем последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X_1 такую, что $x_n \to x$ в X. Тогда $Px_n \to Px$ ввиду ограниченности P. Имеем $Px_n = x_n$, ибо $x_n \in \operatorname{im} P$, а P идемпотентен. Окончательно $x = Px$, т. е. $x \in X_1$, что и нужно. ▷

7.4.11. Примеры.

(1) *Конечномерное подпространство дополняемо.* ◁▷

(2) *Пространство c_0 не дополняемо в l_∞.*

◁ Для простоты будем работать с $X := l_\infty(\mathbb{Q})$ и $Y := c_0(\mathbb{Q})$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Для $t \in \mathbb{R}$ подберем последовательность попарно различных отличных от t рациональных чисел $(\bar{t}_n)$ такую, что $\bar{t}_n \to t$. Пусть $Q_t := \{\bar{t}_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Подчеркнем, что $Q_{t'} \cap Q_{t''}$ — конечное множество при $t' \neq t''$.

Пусть χ_t — класс, содержащий характеристическую функцию Q_t в фактор-пространстве X/Y и $V := \{\chi_t :\ t \in R\}$. Поскольку $\chi_{t'} \neq \chi_{t''}$ при $t' \neq t''$, множество V несчетно.

Возьмем $f \in (X/Y)'$ и положим $V_f := \{v \in V :\ f(v) \neq 0\}$. Видно, что $V_f = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_f(n)$, где $V_f(n) := \{v \in V :\ |f(v)| \geq 1/n\}$. Если $m \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_m \in V_f(n)$ попарно различные, $v_1, \dots, v_m \in V_f(n)$ и $\alpha_k := |f(v_k)|/f(v_k)$, то для $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ будет $\|x\| \leq 1$ и $\|f\| \geq |f(x)| = |\sum_{k=1}^m \alpha_k f(v_k)| = |\sum_{k=1}^m |f(v_k)|| \geq m/n$. Таким образом, $V_f(n)$ — конечное множество.

Следовательно, V_f счетно. Отсюда следует, что для каждого счетного множества $F \subset (X/Y)'$ существует элемент $v \in V$, для которого $(\forall\, f \in F)\ f(v) = 0$.

В то же время счетный набор координатных проекций $\delta_q : x \mapsto x(q) \quad (q \in \mathbb{Q})$ тотален на $l_\infty(\mathbb{Q})$, т. е. $(\forall\, q \in \mathbb{Q}) \quad \delta_q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ при $x \in l_\infty(\mathbb{Q})$. Осталось сопоставить сделанные наблюдения. ▷

(3) Каждое замкнутое подпространство гильбертова пространства дополняемо (по 6.2.6). Оказывается, что если в некотором банаховом пространстве X таком, что $\dim X \geq 3$, каждое замкнутое подпространство — область значений некоторого проектора P и $\|P\| \leq 1$, то X изометрично гильбертову пространству (= теорема Какутани). Более глубок следующий факт:

Теорема Линденштраусса — Цафрири. *Любое банахово пространство, в котором каждое замкнутое подпространство дополняемо, (линейно и топологически) изоморфно гильбертову пространству.*

7.4.12. ***Теорема Сарда об уравнении $\mathscr{X}A = B$.*** *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства; $A \in B(X,\ Y)$, $B \in B(Y,\ Z)$. Пусть, далее, $\operatorname{im} A$ — дополняемое подпространство в Y. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & Y \arrow[d, "\mathscr{X}"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in B(Y,\ Z)$ в том и только в том случае, если $\ker A \subset \ker B$.

$\lhd$ Следует проверить только $\Leftarrow$. При этом в случае $\operatorname{im} A = Y$ единственный оператор $\mathscr{X}_0 \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ такой, что $\mathscr{X}_0 A = B$, непрерывен. В самом деле, для открытого множества U в Z имеем $\mathscr{X}_0^{-1}(U) = A(B^{-1}(U))$. Множество $B^{-1}(U)$ открыто в силу ограниченности B, и $A(B^{-1}(U))$ открыто по теореме Банаха о гомоморфизме. В общем случае следует построить $\mathscr{X}_0 \in B(\operatorname{im} A,\ Z)$ и в качестве $\mathscr{X}$ взять $\mathscr{X}_0 P$, где P — какой-нибудь непрерывный проектор Y на $\operatorname{im} A$. Существование этого проектора обеспечивает принцип дополняемости. $\rhd$

7.4.13. Замечание. Полнота Z в доказательстве теоремы Сарда не использована.

7.4.14. ***Теорема Филлипса об уравнении $A\mathscr{X} = B$.*** *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in B(Y,\ X)$, $B \in B(Z,\ X)$. Пусть, далее, $\ker A$ — дополняемое подпространство в Y.*

Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "A"'] \\
& Z \arrow[ul, "B"] \arrow[u, "\mathscr{X}"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in B(Z,\ Y)$ *в том и только в том случае, если* $\operatorname{im} A \supset \operatorname{im} B$.

$\lhd$ Вновь следует проверить только $\Leftarrow$. Воспользуемся определением дополняемости и представим Y в виде прямой суммы $\ker A$ и Y_0, где Y_0 — замкнутое подпространство. По 5.5.9 (1), Y_0 представляет собой банахово пространство. Рассмотрим след A_0 оператора A на Y_0. Несомненно, что $\operatorname{im} A_0 = \operatorname{im} A \supset \operatorname{im} B$. Значит, по 2.3.13 и 2.3.14 уравнение $A_0\mathscr{X}_0 = B$ имеет, и притом единственное, решение $\mathscr{X}_0 := A_0^{-1}B$. Нам достаточно доказать, что оператор $\mathscr{X}_0$, являющийся элементом пространства $\mathscr{L}(Z,\ Y_0)$, ограничен.

Оператор $\mathscr{X}_0$ замкнут. В самом деле (ср. 7.4.8), если $z_n \to z$ и $A_0^{-1}Bz_n \to y$, то $Bz_n \to Bz$, поскольку B ограничен. Кроме того, в силу непрерывности A_0 соответствие $A_0^{-1} \subset X \times Y_0$ замкнуто, и, стало быть, по 7.3.10 справедливо равенство $y = A_0^{-1}Bz$. $\rhd$

7.4.15. Замечание. Полнота X в доказательстве теоремы Филлипса не использована.

7.4.16. Замечание. Теоремы Сарда и Филлипса находятся в «формальной двойственности», т. е. могут быть получены одна из другой с помощью обращения стрелок и включений и замены ядер образами (ср. 2.3.15).

7.4.17. *Принцип двух норм.* *Пусть векторное пространство полно относительно каждой из двух сравнимых между собой норм. Тогда эти нормы эквивалентны.*

$\lhd$ Пусть для определенности $\|\cdot\|_2 \succ \|\cdot\|_1$ в пространстве X. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
(X, \|\cdot\|_1) & (X, \|\cdot\|_2) \arrow[l, "I_X"'] \\
 & (X, \|\cdot\|_1) \arrow[ul, "I_X"] \arrow[u, "\mathscr{X}"']
\end{tikzcd}
$$

По теореме Филлипса некоторый непрерывный оператор $\mathscr{X}$ превращает эту диаграмму в коммутативную. Но такой оператор единствен — это I_X. $\triangleright$

7.4.18. *Принцип нормы графика.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ замкнут. Определим норму графика $\|x\|_{\mathrm{gr}\ T} := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ для $x \in X$. Тогда выполнено $\|\cdot\|_{\mathrm{gr}\ T} \sim \|\cdot\|_X$.*

$\triangleleft$ Следует заметить, что $(X,\ \|\cdot\|_{\mathrm{gr}\ T})$ — полное пространство. Помимо этого, $\|\cdot\|_{\mathrm{gr}\ T} \geq \|\cdot\|_X$. Осталось сослаться на принцип двух норм. $\triangleright$

7.4.19. Определение. Нормированное пространство X называют *банаховым образом*, если X служит образом некоторого ограниченного оператора, определенного на каком-либо банаховом пространстве.

7.4.20. Критерий Като. *Пусть X — банахово пространство и $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Lat}(X)$. Подпространства X_1 и X_2 замкнуты в том и только в том случае, если каждое из них является банаховым образом.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следствие принципа дополняемости.

$\Leftarrow$: Пусть Z — какой-либо банахов образ, т. е. для некоторого банахова пространства Y и $T \in B(Y, Z)$ выполнено: $Z = T(Y)$. Переходя, если нужно, к снижению на кообраз, можно считать, что T — изоморфизм. Обозначим $\|z\|_0 := \|T^{-1}z\|_Y$. Ясно, что $(Z,\ \|\cdot\|_0)$ — банахово пространство и $\|z\| = \|TT^{-1}z\| \leq \|T\|\|T^{-1}z\| = \|T\|\|z\|_0$, т. е. $\|\cdot\|_0 \succ \|\cdot\|_Z$. Применяя описанную конструкцию к X_1 и X_2, приходим к банаховым пространствам $(X_1,\ \|\cdot\|_1)$ и $(X_2,\ \|\cdot\|_2)$. При этом $\|\cdot\|_k \succ \|\cdot\|_X$ на X_k при $k := 1, 2$.

Для $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ положим $\|x_1 + x_2\|_0 := \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$. Тем самым в X возникает норма $\|\cdot\|$ более сильная, чем исходная $\|\cdot\|_X$. По построению $(X,\ \|\cdot\|_0)$ — банахово пространство. Осталось сослаться на 7.4.17. $\triangleright$

7.5. Принцип автоматической непрерывности

7.5.1. *Критерий непрерывности выпуклой функции.* *Рассмотрим выпуклую функцию $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ в (мульти)нормированном пространстве X. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $U := \operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$ *и* $f|_U$ *— непрерывная функция*;

(2) *существует непустое открытое множество V такое, что выполнено* $\sup f(V) < +\infty$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ясно, что $U \neq \varnothing$. Привлекая 7.1.1, легко убеждаемся в том, что у каждой точки $u \in U$ имеется окрестность W, в которой f ограничена сверху, т. е. $t := \sup f(W) < +\infty$. Не нарушая общности, можно считать, что $u := 0$, $f(u) := 0$ и что W — это абсолютно выпуклое множество. В силу выпуклости f для всякого $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такого, что $\alpha \leq 1$, и произвольного $v \in W$ справедливы соотношения:

$$f(\alpha v) = f(\alpha v + (1-\alpha)0) \leq \alpha f(v) + (1-\alpha) f(0) = \alpha f(v);$$

$$f(\alpha v) + \alpha f(-v) \geq f(\alpha v) + f(\alpha(-v)) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} f(\alpha v) + \frac{1}{2} f(-\alpha v)\right) \geq 2 f(0) = 0.$$

Таким образом, выполнено $|f(\alpha W)| \leq \alpha t$, откуда и вытекает непрерывность f в точке $u := 0$. $\rhd$

7.5.2. *Следствие.* *Если $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ и f непрерывна в точке x, то субдифференциал $\partial_x(f)$ содержит только непрерывные функционалы.*

$\lhd$ Если $l \in \partial_x(f)$, то $(\forall \overline{x} \in X)\ l(\overline{x}) \leq l(x) + f(\overline{x}) - f(x)$ и, стало быть, l ограничен сверху на некоторой окрестности точки x. Следовательно, l непрерывен в этой точке по 7.5.1. Привлекая 5.3.7, убеждаемся, что l непрерывен. $\rhd$

7.5.3. *Следствие.* *Каждая выпуклая функция в конечномерном пространстве непрерывна во внутренности своей эффективной области определения.* $\lhd\rhd$

7.5.4. Определение. Функцию $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *идеально выпуклой*, если ее надграфик $\operatorname{epi} f$ — идеальное соответствие.

7.5.5. *Принцип автоматической непрерывности.* *Каждая идеально выпуклая функция в банаховом пространстве непрерывна на ядре своей эффективной области определения.*

$\triangleleft$ Пусть f — такая функция. Если $\operatorname{core}\operatorname{dom} f = \varnothing$, то доказывать нечего. Если же $x \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$, то положим $t := f(x)$ и $F := (\operatorname{epi}\ f)^{-1} \subset \mathbb{R} \times X$. Применяя принцип идеального соответствия, найдем $\delta > 0$ из условия $F(t + B_{\mathbb{R}}) \supset x + \delta B_X$. Отсюда, в частности, вытекает оценка $f(x + \delta B_X) \le t + 1$. На основании 7.5.1, f непрерывна на $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Поскольку к тому же $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$, то, по лемме 7.1.1, $\operatorname{core}\operatorname{dom} f = \operatorname{int}\operatorname{dom} f$. $\triangleright$

7.5.6. Замечание. Используя 7.3.6, можно показать, что идеально выпуклая функция f, определенная на множестве с непустым ядром в банаховом пространстве, является *локально липшицевой* на $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Иными словами, для всякой точки $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ найдутся, во-первых, число $L > 0$, а во-вторых, окрестность U этой точки, для которых $\|f(x) - f(x_0)\| \le L\|x - x_0\|$, как только $x \in U$. $\triangleleft\triangleright$

7.5.7. *Следствие.* *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — идеально выпуклая функция в банаховом пространстве X и $x \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$. Тогда производная по направлениям $f'(x)$ — непрерывный сублинейный функционал и $\partial_x(f) \subset X'$.*

$\triangleleft$ Нужно дважды воспользоваться принципом автоматической непрерывности. $\triangleright$

7.5.8. Замечание. В связи с 7.5.7 при изучении банаховых пространств в субдифференциал любой функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ в точке x включают только подходящие непрерывные функционалы на X, т. е. полагают

$$\partial_x(f) := \partial_x(f) \cap X'.$$

Аналогичным образом поступают и в (мульти)нормированных пространствах. Если необходимо отличить «старый» (более широкий) субдифференциал, лежащий в $X^{\#}$, от «нового» (более узкого) субдифференциала в X', первый называют *алгебраическим*, а второй — *топологическим*. Указанные в 7.5.2 и 7.5.7 факты в этом смысле часто называют *принципом совпадения алгебраического и топологического субдифференциалов*. Отметим, наконец, что по подобным же причинам в случае, когда $f := p$ — полунорма в X, считают: $|\partial|(p) := |\partial|(p) \cap X'$.

7.5.9. *Теорема Хана — Банаха для банаховых пространств.* *Пусть $f : Y \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — идеально выпуклая функция на банаховом пространстве Y. Пусть, далее, X — нормированное пространство и $T \in B(X,\ Y)$. Если точка $x \in X$ такова, что $Tx \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$, то*

$$\partial_x(f \circ T) = \partial_{Tx}(f) \circ T.$$

$\triangleleft$ Правая часть доказываемой формулы включена в ее левую часть по очевидным обстоятельствам. Если же l из X' лежит в $\partial_x(f \circ T)$, то по теореме Хана — Банаха 3.5.3 можно подыскать элемент l_1 из алгебраического субдифференциала f в точке Tx, удовлетворяющий соотношению $l = l_1 \circ T$. Осталось заметить, что, в силу 7.5.7, l_1 является элементом Y' и, стало быть, элементом топологического субдифференциала $\partial_{Tx}(f)$. $\triangleright$

7.5.10. *Теорема Хана — Банаха для непрерывной полунормы.* *Пусть $X,\ Y$ — нормированные пространства, $T \in B(X,\ Y)$ и $p : Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная полунорма. Тогда*

$$|\partial|(p \circ T) = |\partial|(p) \circ T.$$

$\triangleleft$ Если $l \in |\partial|\ (p \circ T)$, то $l = l_1 \circ T$ для некоторого l_1 из алгебраического субдифференциала полунормы p (см. 3.7.11). Из 7.5.2 вытекает, что l_1 непрерывен. Итак, $|\partial|(p \circ T) \subset |\partial|\ (p) \circ T$. Обратное включение бесспорно. $\triangleright$

7.5.11. *Принцип непрерывного продолжения.* *Пусть X_0 — подпространство в X и l_0 — непрерывный линейный функционал на X_0. Тогда существует непрерывный линейный функционал l на X, продолжающий l_0. (При этом можно считать,что $\|l\| = \|l_0\|$.)*

$\triangleleft$ Возьмем $p := \|l_0\|\ \|\cdot\|$, и пусть $\iota : X_0 \to X$ — тождественное вложение. С учетом 7.5.10 будет $l_0 \in |\partial|\ (p \circ \iota) = |\partial|\ (p) \circ \iota = \|l_0\|\ |\partial|(\|\cdot\|) \circ \iota$. Осталось заметить, что $|\partial|\ (\|\cdot\|_X) = B_{X'}$. $\triangleright$

7.5.12. *Теорема отделимости в топологическом варианте.* *Пусть U — выпуклое множество с непустой внутренностью в пространстве X. Если L — аффинное многообразие в X и $L \cap \operatorname{int} U = \varnothing$, то существует замкнутая гиперплоскость H в X, для которой $H \supset L$ и $H \cap \operatorname{int} U = \varnothing$.* $\triangleleft\triangleright$

7.5.13. Замечание. При применении 7.5.12 полезно иметь в виду, что замкнутые гиперплоскости суть в точности множества уровня ненулевых непрерывных линейных функционалов. $\lhd\rhd$

7.5.14. ***Следствие.*** *Пусть X_0 — подпространство в X. Тогда*

$$\operatorname{cl} X_0 = \cap\{\ker f : \ f \in X', \ \ker f \supset X_0\}.$$

$\lhd$ Ясно, что $(f \in X', \ \ker f \supset X_0) \Rightarrow \ker f \supset \operatorname{cl} X_0$. Если же $x_0 \notin \operatorname{cl} X_0$, то найдется открытая выпуклая окрестность x_0, не содержащая точек $\operatorname{cl} X_0$. На основании 7.5.12 и 7.5.13 имеется функционал $f_0 \in (X_{\mathbb{R}})'$ такой, что $\ker f_0 \supset \operatorname{cl} X_0$ и $f_0(x_0) = 1$. Из свойств комплексификатора выводим, что функционал $\mathbf{Re}^{-1} f_0$ обращается в нуль на X_0 и не равен нулю в точке x_0. Несомненно также, что этот функционал непрерывен. $\rhd$

7.6. Принципы штрихования

7.6.1. *Пусть X, Y — (мульти)нормированные векторные пространства (над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$) и X', Y' — сопряженные пространства. Пусть, далее, T — непрерывный линейный оператор из X в Y. Для $y' \in Y'$ выполнено $y' \circ T \in X'$ и отображение $y' \mapsto y' \circ T$ — линейный оператор.* $\lhd\rhd$

7.6.2. Определение. Оператор $T' : Y' \to X'$, построенный в 7.6.1, называют *сопряженным* к оператору $T : X \to Y$.

7.6.3. ***Теорема.*** *Отображение штрихования $T \mapsto T'$ осуществляет линейную изометрию пространства $B(X, \ Y)$ в пространство $B(Y', \ X')$.*

$\lhd$ То, что отображение штрихования — линейный оператор из $B(X, \ Y)$ в $\mathscr{L}(Y', \ X')$, очевидно. Помимо этого, раз $\|y\| = \sup\{|l(y) : l \in |\partial|(\|\cdot\|)\}$, то

$$\|T'\| = \sup\{\|T'y'\| : \ \|y'\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{|y'(Tx)| : \ \|y'\| \leq 1, \ \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| \leq 1\} = \|T\|,$$

что и нужно. $\rhd$

7.6.4. Примеры.

(1) Пусть X, Y — гильбертовы пространства, и задан $T \in B(X,\ Y)$. Отметим прежде всего, что в очевидном смысле $T \in B(X,\ Y) \Leftrightarrow T \in B(X_*,\ Y_*)$. Обозначим теперь через $(\cdot)'_X : X_* \to X'$ штрихование в X, т. е. $x \mapsto x' := (\,\cdot\,,\, x)$ и $(\cdot)'_Y : Y_* \to Y'$ — штрихование в Y, т. е. $y \mapsto y' := (\,\cdot\,,\, y)$.

Связь эрмитово сопряженного оператора $T^* \in B(Y,\ X)$ и сопряженного $T' \in B(Y',\ X')$ задается коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} X_* & \xleftarrow{T^*} & Y_* \\ (\cdot)'_X \downarrow & & \downarrow (\cdot)'_Y \\ X' & \xleftarrow{T'} & Y' \end{array}$$

◁ В самом деле, надо убедиться, что для $y \in Y$ выполнено $T'y' = (T^*y)'$. Для $x \in X$ по определению имеем

$$T'y'(x) = y'(Tx) = (Tx,\ y) = (x,\ T^*y) = (T^*y)'(x).$$

В силу произвольности x получаем требуемое. ▷

(2) *Пусть $\iota : X_0 \to X$ — вложение X_0 в X. Тогда $\iota' : X \to X'_0$, причем $\iota'(x')(x_0) = x'(x_0)$ для всех $x_0 \in X_0$ и $x' \in X'$ и ι' — эпиморфизм, т. е. $X' \xrightarrow{\iota'} X'_0 \to 0$ — точная последовательность.* ◁▷

7.6.5. Определение. Пусть дана некоторая элементарная диаграмма $X \xrightarrow{T} Y$. Диаграмму $Y' \xrightarrow{T'} X'$ называют *полученной штрихованием* исходной диаграммы или *сопряженной* диаграммой. Если в произвольной диаграмме, составленной из ограниченных линейных отображений банаховых пространств, произведено штрихование всех элементарных поддиаграмм, то возникшую диаграмму называют *сопряженной* к исходной или полученной из исходной с помощью штрихования.

7.6.6. *Лемма о двойном штриховании.* *Пусть $X'' \xrightarrow{T''} Y''$ — диаграмма, полученная двойным штрихованием диаграммы $X \xrightarrow{T} Y$. Тогда коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ '' \downarrow & & \downarrow '' \\ X'' & \xrightarrow{T''} & Y'' \end{array}$$

где $'' : X \to X''$ *и* $'' : Y \to Y''$ *— соответствующие двойные штрихования — канонические вложения* X *в* X'' *и* Y *в* Y'' (см. 5.1.10 (8)).

$\lhd$ Пусть $x \in X$. Нужно показать, что $T''x'' = (Tx)''$. Возьмем $y' \in Y'$. Тогда

$$T''x''(y') = x''(T'y') = T'y'(x) = y'(Tx) = (Tx)''(y').$$

В силу произвольности $y' \in Y'$ имеем требуемое. $\rhd$

7.6.7. *Принцип штрихования диаграмм.* *Диаграмма коммутативна в том и только в том случае, если коммутативна сопряженная диаграмма.*

$\lhd$ Достаточно убедиться, что треугольники

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & Y \arrow[dl, "S"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "T'"] & & Y' \\ & Z' \arrow[ul, "R'"] \arrow[ur, "S'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны или нет одновременно. Так как $R = ST \Rightarrow R' = (ST)' = T'S'$, то коммутативность левого треугольника влечет коммутативность правого. Если же правый треугольник коммутативен, то по уже доказанному $R'' = S''T''$. Привлекая 7.6.6, имеем $(Rx)'' = R''x'' = S''T''x'' = S''(T''x'') = S''(Tx)'' = (STx)''$ для всех $x \in X$. Значит, $R = ST$. $\rhd$

7.6.8. Определение. Пусть X_0 — подпространство в X, а $\mathscr{X}_0$ — подпространство в X'. Положим

$$X_0^{\perp} := \{f \in X' : \ \ker f \supset X_0\} \ = |\partial|(\delta(X_0));$$

$$^{\perp}\mathscr{X}_0 := \{x \in X : \ f \in \mathscr{X}_0 \Rightarrow f(x) = 0\} = \cap \{\ker f : \ f \in \mathscr{X}_0\}.$$

Подпространство $X_0^{\perp}$ называют (***прямой***) ***полярой*** X_0, а подпространство $^{\perp}\mathscr{X}_0$ — (***обратной***) ***полярой*** $\mathscr{X}_0$. Используют также менее точный термин «аннулятор».

7.6.9. Определение. Пусть X, Y — банаховы пространства. Оператор $T \in B(X, Y)$ называют ***нормально разрешимым***, если $\operatorname{im} T$ — замкнутое подпространство.

7.6.10. *Оператор $T \in B(X,\ Y)$ нормально разрешим в том и только в том случае, если T, рассматриваемый как оператор из X в $\operatorname{im} T$, является гомоморфизмом.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Теорема Банаха о гомоморфизме.

$\Leftarrow$: Следует сослаться на 7.4.2. $\rhd$

7.6.11. *Лемма о полярах.* *Пусть $T \in B(X,\ Y)$. Тогда*

(1) $(\operatorname{im} T)^{\perp} = \ker(T')$;

(2) *если T нормально разрешим, то*

$$\operatorname{im} T = {}^{\perp}\ker(T'), \quad (\ker T)^{\perp} = \operatorname{im}(T').$$

$\lhd$ (1) $y' \in \ker(T') \Leftrightarrow T'y' = 0 \Leftrightarrow (\forall\, x \in X)\ T'y'(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall\, x \in X)\ y'(Tx) = 0 \Leftrightarrow y' \in (\operatorname{im} T)^{\perp}$.

(2) Равенство $\operatorname{cl}\operatorname{im} T = {}^{\perp}\ker(T')$ составляет содержание 7.5.13. Помимо этого, по условию $\operatorname{im} T$ замкнуто.

Если $x' = T'y'$ и $Tx = 0$, то $x'(x) = T'y'(x) = y'(Tx) = 0$, т. е. $x' \in (\ker T)^{\perp}$. Значит, $\operatorname{im}(T') \subset (\ker T)^{\perp}$. Пусть теперь $x' \in (\ker T)^{\perp}$. Считая, что оператор T действует в $\operatorname{im} T$, по теореме Сарда, примененной к левой части диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & \operatorname{im} T & \longrightarrow & Y \\ & x' \searrow & \downarrow y_0' & \swarrow y' & \\ & & \mathbb{F} & & \end{array}$$

найдем $y_0' \in (\operatorname{im} T)'$, для которого $y_0' \circ T = x'$. По принципу непрерывного продолжения существует $y' \in Y'$ такой, что $y' \supset y_0'$. Стало быть, $x' = T'y'$, т. е. $x' \in \operatorname{im}(T')$. $\rhd$

7.6.12. *Теорема Хаусдорфа.* *Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда оператор $T \in B(X,\ Y)$ нормально разрешим в том и только в том случае, если нормально разрешим оператор $T' \in B(Y',\ X')$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: В силу 7.6.11 (2), $\operatorname{im}(T') = (\ker T)^{\perp}$. Подпространство $(\ker T)^{\perp}$, очевидно, является замкнутым.

$\Leftarrow$: Пусть сначала $\operatorname{cl}\operatorname{im} T = Y$. Ясно, что $0 = Y^{\perp} = (\operatorname{cl}\operatorname{im}\ T)^{\perp} = (\operatorname{im} T)^{\perp} = \ker(T')$ в силу 7.6.11. По теореме Банаха об изоморфизме можно подыскать $S \in B(\operatorname{im}(T'),\ Y')$, для которого $ST' = I_{Y'}$. Случай $r := \|S\| = 0$ тривиален. Поэтому можно считать, что $\|T'y'\| \geq 1/r\, q\|y'\|$ при всех $y' \in Y'$.

Убедимся в том, что $\operatorname{cl} T(B_X) \supset 1/2r\, B_Y$. Если это проделано, то ввиду идеальной выпуклости $T(B_X)$ выполнено включение $T(B_X) \supset 1/4r\, B_Y$. Следовательно, T — гомоморфизм.

Пусть $y \notin \operatorname{cl} T(B_X)$. Можно утверждать, что y не лежит и в некотором открытом выпуклом множестве, содержащем $T(B_X)$. Переходя, если нужно, к вещественным основам пространств X и Y, будем считать, что $\mathbb{F} := \mathbb{R}$. Применим теорему отделимости 7.5.12 и найдем ненулевой $y' \in Y'$ такой, что

$$\|y'\|\, \|y\| \geq y'(y) \geq \sup_{\|x\| \leq 1} y'(Tx) = \|T'y'\| \geq \frac{1}{r}\|y'\|.$$

Отсюда $\|y\| \geq 1/r > 1/2r$. Таким образом, требуемое включение установлено и оператор T в наших предположениях нормально разрешим.

Рассмотрим теперь общий случай. Положим $Y_0 := \operatorname{cl} \operatorname{im} T$, и пусть $\iota : Y_0 \to Y$ — тождественное вложение. Тогда $T = \iota\overline{T}$, где $\overline{T} : X \to Y_0$ — оператор, действующий по правилу $\overline{T}x = Tx$ для $x \in X$. Кроме того, $\operatorname{im}(T') = \operatorname{im}(\overline{T}'\iota') = \overline{T}'(\operatorname{im}(\iota')) = \overline{T}'(Y_0')$, ибо $\iota'(Y') = Y_0'$ (см. 7.6.4 (2)). Итак, $\overline{T}'$ — нормально разрешимый оператор. Стало быть, по уже доказанному $\overline{T}$ нормально разрешим. Осталось заметить, что $\operatorname{im} T = \operatorname{im} \overline{T}$. $\triangleright$

7.6.13. *Принцип штрихования последовательностей.* *Последовательность*

$$\ldots \longrightarrow X_{k-1} \xrightarrow{T_k} X_k \xrightarrow{T_{k+1}} X_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

точна в том и только в том случае, если точна сопряженная последовательность

$$\ldots \longleftarrow X'_{k-1} \xleftarrow{T'_k} X'_k \xleftarrow{T'_{k+1}} X'_{k+1} \longleftarrow \ldots .$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Так как $\operatorname{im} T_{k+1} = \ker T_{k+2}$, то T_{k+1} нормально разрешим. Привлекая лемму о полярах, имеем

$$\ker(T'_k) = (\operatorname{im} T_k)^\perp = (\ker T_{k+1})^\perp = \operatorname{im}(T'_{k+1}).$$

$\Leftarrow$: По теореме Хаусдорфа T_{k+1} нормально разрешим. Вновь апеллируя к 7.6.11 (2), выводим

$$(\operatorname{im} T_k)^{\perp} = \ker(T_k') = \operatorname{im}(T_{k+1}') = (\ker T_{k+1})^{\perp}.$$

Поскольку T_k нормально разрешим по теореме 7.6.12, то $\operatorname{im} T_k$ — замкнутое подпространство. Привлекая 7.5.14, получаем

$$\operatorname{im} T^k = {}^{\perp}((\operatorname{im} T_k)^{\perp}) = {}^{\perp}((\ker T_{k+1})^{\perp}) = \ker T_{k+1}.$$

Здесь учтено, что $\ker T_{k+1}$ — это тоже замкнутое подпространство. $\rhd$

7.6.14. *Следствие.* *Для каждого нормально разрешимого оператора T имеют место следующие изоморфизмы* $(\ker T)' \simeq \operatorname{coker}(T')$ *и* $(\operatorname{coker} T)' \simeq \ker(T')$.

$\lhd$ В силу 2.3.5 (6) последовательность

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0$$

точна. Из 7.6.13 выводим, что последовательность

$$0 \to (\operatorname{coker} T)' \to Y' \xrightarrow{T'} X' \to (\ker T)' \to 0$$

точна. $\rhd$

7.6.15. *Следствие.* T *— изоморфизм* $\Leftrightarrow$ T' *— изоморфизм.* $\lhd\rhd$

7.6.16. *Следствие.* $\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{Sp}(T')$. $\lhd\rhd$

Упражнения

7.1. Выяснить, какие линейные операторы идеальны.

7.2. Установить, что раздельно непрерывная билинейная форма на банаховом пространстве непрерывна по совокупности переменных.

7.3. Будет ли равномерно ограниченным на шаре семейство полунепрерывных снизу сублинейных функционалов на банаховом пространстве?

7.4. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T : X \to Y$. Доказать, что для некоторого $t \in \mathbb{R}$ будет $\|Tx\|_Y \geq t\|x\|_X$ в том и только в том случае, если $\ker T = 0$ и $\operatorname{im} T$ — полное множество.

7.5. Выяснить условия нормальной разрешимости оператора умножения на функцию в пространстве непрерывных на компакте функций.

7.6. Пусть T — ограниченный эпиморфизм банахова пространства X на $l_1(\mathscr{E})$. Установить дополняемость $\ker T$.

7.7. Установить, что равномерно замкнутое подпространство в $C([a,\ b])$, составленное из непрерывно дифференцируемых функций — элементов $C^{(1)}([a,\ b])$, конечномерно.

7.8. Пусть X и Y — различные банаховы пространства, причем X непрерывно вложено в Y. Установить, что X является тощим множеством в Y.

7.9. Пусть $X_1,\ X_2$ — ненулевые замкнутые подпространства банахова пространства, причем $X_1 \cap X_2 = 0$. Доказать, что сумма $X_1 + X_2$ замкнута в том и только в том случае, если следующая величина

$$\inf\ \{\|x_1 - x_2\|/\|x_1\| :\ x_1 \neq 0,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

строго положительна.

7.10. Пусть (a_{mn}) — счетная двойная последовательность, обладающая тем свойством, что имеется последовательность $(x^{(m)})$ элементов l_1, для которой ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n^{(m)}$ не сходятся (абсолютно). Доказать, что найдется последовательность x из l_1, для которой ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n$ не сходятся (абсолютно) при всех $m \in \mathbb{N}$.

7.11. Пусть T — оператор в гильбертовом пространстве H такой, что равенство $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid Ty\rangle$ имеет место для всех $x,\ y \in H$. Установить ограниченность T.

7.12. Пусть замкнутый конус X^+ в банаховом пространстве X является воспроизводящим: $X = X^+ - X^+$. Доказать, что найдется константа $t > 0$ такая, что для любого $x \in X$ и представления $x = x_1 - x_2$, где $x_1,\ x_2 \in X^+$, выполнено: $\|x_1\| \leq t\|x\|,\ \|x_2\| \leq t\|x\|$.

7.13. Пусть полунепрерывные снизу сублинейные функционалы $p,\ q$ в банаховом пространстве X таковы, что конусы $\operatorname{dom} p$ и $\operatorname{dom} q$ замкнуты и подпространство $\operatorname{dom} p - \operatorname{dom} q = \operatorname{dom} q - \operatorname{dom} p$ дополняемо в X. Доказать, что для топологических субдифференциалов выполнено (ср. упражнение 3.10)

$$\partial(p + q) = \partial p + \partial q.$$

7.14. Пусть p — непрерывный сублинейный функционал, определенный на нормированном пространстве X, и T — непрерывный эндоморфизм X. Допустим, что сопряженный оператор T' переводит в себя субдифференциал ∂p. Установить, что ∂p содержит неподвижную точку T'.

7.15. Для функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ на нормированном пространстве X положим

$$f^*(x') := \sup\{\langle x \mid x'\rangle - f(x) :\ x \in \operatorname{dom} f\} \quad (x' \in X');$$

$$f^{**}(x) := \sup\{\langle x \mid x'\rangle - f^*(x') :\ x' \in \operatorname{dom}(f^*)\} \quad (x \in X).$$

Выяснить, при каких условиях на f выполнено $f = f^{**}$.

7.16. Установить, что l_∞ дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве.

7.17. Банахово пространство X называют примарным, если любое его бесконечномерное дополняемое подпространство изоморфно X. Убедиться, что c_0 и l_p $(1 \le p \le +\infty)$ примарны.

7.18. Пусть X и Y — банаховы пространства и оператор $T \in B(X,\ Y)$ таков, что $\operatorname{im} T$ — нетощее множество. Тогда T нормально разрешим.

7.19. Пусть X_0 — замкнутое подпространство нормированного пространства X, причем X_0 и X/X_0 — банаховы пространства. Тогда X также банахово пространство.

Глава 8

Операторы в банаховых пространствах

8.1. Голоморфные функции и контурные интегралы

8.1.1. Определение. Пусть X — банахово пространство. Подмножество Λ шара $B_{X'}$ в сопряженном пространстве X' называют ***нормирующим*** (для X), если для каждого элемента x из X выполнено $\|x\| = \sup\{|l(x)| :\ l \in \Lambda\}$. Если, помимо этого, для всякого U в X такого, что $\sup\{|l(u)| :\ u \in U\} < +\infty$ при $l \in \Lambda$, справедливо $\sup \|U\| < +\infty$, то Λ называют ***вполне нормирующим*** множеством.

8.1.2. Примеры.

(1) Шар $B_{X'}$ — вполне нормирующее множество в силу 5.1.10 (8) и 7.2.7.

(2) Если Λ_0 — (вполне) нормирующее множество и $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset B_{X'}$, то Λ_1 также (вполне) нормирующее множество.

(3) Множество крайних точек $\operatorname{ext}(B_{X'})$ является нормирующим по теореме Крейна — Мильмана для субдифференциалов 3.6.5 и несомненного равенства $B_{X'} = |\partial|(\|\cdot\|_X)$, которое уже неоднократно было использовано. Однако вполне нормирующим это множество быть не обязано (так, в частности, обстоит дело в пространстве $C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$). $\triangleleft\triangleright$

(4) Пусть $X,\ Y$ — банаховы пространства (над одним и тем же полем $\mathbb{F}$) и Λ_Y — нормирующее множество для Y. Положим

$$\Lambda_B := \{\delta_{(y',x)} :\ y' \in \Lambda_Y,\ x \in B_X\},$$

где $\delta_{(y',x)}(T) := y'(Tx)$ для $y' \in Y,\ x \in X$ и $T \in B(X,\ Y)$. Ясно, что

$$|\delta_{(y',x)}(T)| = |y'(Tx)| \le \|y'\|\ \|Tx\| \le \|y'\|\ \|T\|\ \|x\|,$$

т. е. $\delta_{(y',x)} \in B(X,\ Y)'$. Помимо этого, для $T \in B(X,\ Y)$ выполнено

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| :\ \|x\| \le 1\} = \sup\{|y'(Tx)| :\ y' \in \Lambda_Y,\ \|x\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{|\delta_{(y',x)}(T)| :\ \delta_{(y',x)} \in \Lambda_B\}.$$

Таким образом, Λ_B — нормирующее множество (для $B(X,\ Y)$). Если при этом Λ_Y — вполне нормирующее множество, то Λ_B также вполне нормирующее множество. В самом деле, если U таково, что числовое множество $\{|y'(Tx)|\ :\ T \in U\}$ ограничено при любых $x \in B_X$ и $y' \in \Lambda_Y$, то по условию множество $\{Tx\ :\ T \in U\}$ ограничено в Y для всякого $x \in X$. В силу принципа равномерной ограниченности 7.2.5 это означает, что $\sup \|U\| < +\infty$.

8.1.3. *Теорема Данфорда — Хилле.* *Пусть X — комплексное банахово пространство и Λ — вполне нормирующее множество для X. Пусть, далее, $f : \mathscr{D} \to X$ — отображение подмножества $\mathscr{D}$ в $\mathbb{C}$ в пространство X, причем $\mathscr{D}$ открыто (в $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$). Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *для каждого $z_0 \in \mathscr{D}$ существует предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};$$

(2) *для каждых $z_0 \in \mathscr{D}$ и $l \in \Lambda$ существует предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{l \circ f(z) - l \circ f(z_0)}{z - z_0},$$

т. е. функция $l \circ f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ голоморфна при $l \in \Lambda$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1): Простоты ради будем считать, что $z_0 = 0$ и $f(z_0) = 0$. Рассмотрим шар радиуса 2ε, целиком лежащий в $\mathscr{D}$, т. е. $2\varepsilon\mathbb{D} \subset \mathscr{D}$, где $\mathbb{D} := B_{\mathbb{C}}$. Как принято в комплексном анализе, будем считать круг $\varepsilon\mathbb{D}$ (ориентированным) компактным многообразием с краем $\varepsilon\mathbb{T}$,

где $\mathbb{T}$ — (должным образом ориентированная) единичная окружность $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. При $z_1, \ z_2 \in \varepsilon\mathbb{D} \setminus 0$ для голоморфной функции $l \circ f$ (функционал l лежит в Λ) имеют место представления интегралом Коши:

$$\frac{l \circ f(z_k)}{z_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2\varepsilon\mathbb{T}} \frac{l \circ f(z)}{z(z - z_k)} dz \quad (k := 1, \ 2).$$

Значит, при $z_1 \neq z_2$, учитывая, что для $z \in 2\varepsilon\mathbb{T}$ выполнено $|z - z_k| \geq \varepsilon$ $(k := 1, \ 2)$, а также что функция $l \circ f$ непрерывна в $\mathscr{D}$, получаем

$$\left| l \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{f(z_1)}{z_1} - \frac{f(z_2)}{z_2} \right) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{z_1 - z_2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2\varepsilon\mathbb{T}} l \circ f(z) \left(\frac{1}{z(z - z_1)} - \frac{1}{z(z - z_2)} \right) dz \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{2\varepsilon\mathbb{T}} l \circ f(z) \frac{1}{z(z - z_1)(z - z_2)} dz \right| \leq$$

$$\leq M \sup_{z \in 2\varepsilon\mathbb{T}} |l \circ f(z)| < +\infty$$

для подходящего $M > 0$. Поскольку Λ — вполне нормирующее множество, заключаем:

$$\sup_{\substack{z_1 \neq z_2; z_1, z_2 \neq 0 \\ |z_1| \leq \varepsilon, |z_2| \leq \varepsilon}} \frac{1}{|z_1 - z_2|} \ \left\| \frac{f(z_1)}{z_1} - \frac{f(z_2)}{z_2} \right\| < +\infty.$$

Последнее неравенство обеспечивает существование нужного предела. $\triangleright$

8.1.4. Определение. Отображение $f : \mathscr{D} \to X$, удовлетворяющее 8.1.3 (1) (или, что то же самое, 8.1.3 (2) для какого-либо вполне нормирующего множества Λ), называют ***голоморфным***.

8.1.5. Замечание. Иногда используют излишне детальную терминологию. Именно, если f удовлетворяет 8.1.3 (1), то f называют *сильно голоморфной* функцией. В случае, если для f выполнено 8.1.3 (2) при $\Lambda := B_{X'}$, говорят о *слабой голоморфности* f. В условиях 8.1.3 (2) и 8.1.2 (4), т. е. при $f : \mathscr{D} \to B(X,\ Y)$, $\Lambda_Y := B_{Y'}$ и соответствующем $\Lambda := \Lambda_B$, говорят о *слабо операторно голоморфных* функциях. Учитывая приведенную терминологию, теорему Данфорда — Хилле часто называют *теоремой о голоморфности* и выражают словами: «слабо голоморфная функция сильно голоморфна».

8.1.6. Замечание. В дальнейшем удобно использовать интегралы простейших гладких X-значных форм $f(z)dz$ по простейшим ориентированным многообразиям — по краям элементарных компактов в плоскости (см. 4.8.5), составленным из конечного числа непересекающихся простых петель. В такие интегралы вкладывают очевидный смысл. Именно, для петли γ выбирают подходящую (гладкую) параметризацию $\Psi : \mathbb{T} \to \gamma$ (с учетом ориентации) и полагают

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz := \int\limits_{\mathbb{T}} f \circ \Psi d\Psi,$$

где последний интеграл понимают, например, как подходящий интеграл Бохнера (см. 5.5.9 (6)). Несомненна корректность этого определения, т. е. существование нужного интеграла Бохнера и его независимость от выбора параметризации Ψ.

8.1.7. *Теорема Коши — Винера.* *Пусть $\mathscr{D}$ — непустое открытое подмножество плоскости и $f : \mathscr{D} \to X$ — голоморфное отображение в банахово пространство X. Пусть, далее, F — простая картина для пары $(\varnothing,\ \mathscr{D})$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial F} f(z)dz = 0.$$

При этом для $z_0 \in \operatorname{int} F$ выполнено

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

◁ В силу 8.1.3 необходимые интегралы Бохнера существуют. Требуемые равенства, очевидно, следуют из справедливости их скалярных версий, составляющих содержание классической теоремы Коши, сказанного в 8.1.2 (1) и отмеченной в 5.5.9 (6) перестановочности интегралов Бохнера с ограниченными функционалами. ▷

8.1.8. Замечание. Теорема Коши — Винера позволяет по хорошо известным образцам выводить для X-значных голоморфных функций аналоги теорем классического комплексного анализа.

8.1.9. *Теорема о разложении Тейлора.* *Пусть $f : \mathscr{D} \to X$ — голоморфная функция и $z_0 \in \mathscr{D}$. В любом круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ таком, что $\operatorname{cl} U$ лежит в $\mathscr{D}$, имеет место разложение Тейлора (в равномерно сходящийся степенной ряд)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n вычисляют по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0).$$

◁ Доказательство основано на стандартном разложении ядра $u \mapsto (u - z)^{-1}$ в формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U'} \frac{f(u)}{u - z} du \quad (z \in \operatorname{cl} U)$$

по степеням $z - z_0$, т. е.

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}\right)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}.$$

Последний ряд сходится равномерно по $u \in \partial U'$. (Здесь $U' = U + q\mathbb{D}$ для какого-либо $q > 0$, такого что $\operatorname{cl} U' \subset \mathscr{D}$.) Учитывая, что

$\sup \|f(\partial U')\| < +\infty$, и производя интегрирование, приходим к требуемому представлению $f(z)$ при $z \in \mathrm{cl}\, U$. Применяя доказанное к U' и привлекая 8.1.7, видим, что исследуемый степенной ряд сходится в каждой точке U'. Отсюда вытекает его равномерная сходимость на компактных подмножествах U', а потому и на U. $\triangleright$

8.1.10. ***Теорема Лиувилля.*** *Если функция $f : \mathbb{C} \to X$ голоморфна и $\sup \|f(\mathbb{C})\| < +\infty$, то f — постоянное отображение.*

$\triangleleft$ Для $\varepsilon > 0$, рассматривая диск $\varepsilon\mathbb{D}$ и учитывая 8.1.9, имеем

$$\|c_n\| \leq \sup_{z \in \varepsilon\mathbb{T}} \|f(z)\| \cdot \varepsilon^{-n} \leq \sup \|f(\mathbb{C})\| \cdot \varepsilon^{-n}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Таким образом, $c_n = 0$ для $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

8.1.11. *Каждый ограниченный эндоморфизм ненулевого комплексного банахова пространства имеет непустой спектр.*

$\triangleleft$ Пусть T — такой эндоморфизм. Если $\mathrm{Sp}(T) = \varnothing$, то резольвента $R(T, \cdot\,)$ голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$, например, по 5.6.21. Кроме того, на основании 5.6.15, $\|R(T,\ \lambda)\| \to 0$ при $|\lambda| \to +\infty$. В силу 8.1.10 заключаем, что $R(T, \cdot\,) = 0$. В то же время, привлекая 5.6.15, видим, что при $|\lambda| > \|T\|$ выполнено $R(T,\ \lambda)(\lambda - T) = 1$. Получается противоречие. $\triangleright$

8.1.12. *Имеет место формула Бёрлинга — Гельфанда:*

$$r(T) = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$$

для любого оператора $T \in B(X)$, где X — комплексное банахово пространство, т. е. спектральный радиус оператора совпадает с радиусом его спектра.

$\triangleleft$ То, что спектральный радиус $r(T)$ больше радиуса спектра, отмечено в 5.6.16. Таким образом, при $r(T) = 0$ доказывать ничего не надо. Пусть теперь $r(T) > 0$. Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ так, что $|\lambda| > \sup\{|\mu| :\ \mu \in \mathrm{Sp}(T)\}$. Тогда круг радиуса $|\lambda|^{-1}$ целиком лежит в области голоморфности функции (см. 5.6.15)

$$f(z) := \begin{cases} R\ (T,\ z^{-1}),\ z \neq 0,\ z^{-1} \in \mathrm{res}(T), \\ 0,\ z = 0. \end{cases}$$

Привлекая 8.1.9 и 5.6.17, заключаем, что $|\lambda|^{-1} < r(T)^{-1}$. Следовательно, $|\lambda| > r(T)$. $\triangleright$

8.1.13. *Пусть K — непустой компакт в $\mathbb{C}$ и $H(K)$ — множество голоморфных в окрестности K функций, т. е. $(f \in H(K) \Leftrightarrow f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, $\operatorname{dom} f \supset K)$. Для $f_1,\ f_2 \in H(K)$ положим $f_1 \sim f_2$, если существует открытое подмножество $\mathscr{D}$ в $\operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ такое, что $K \subset \mathscr{D}$ и $f_1|_{\mathscr{D}} = f_2|_{\mathscr{D}}$. Тогда $\sim$ является отношением эквивалентности в $H(K)$.* ◁▷

8.1.14. Определение. В условиях 8.1.13 положим $\mathscr{H}(K) := H(K)/{\sim}$. Элемент $\overline{f} \in \mathscr{H}(K)$, содержащий функцию $f \in H(K)$, называют *ростком* f на компакте K.

8.1.15. *Пусть $\overline{f},\ \overline{g} \in \mathscr{H}(K)$. Пусть, кроме того, выделены $f_1,\ f_2 \in \overline{f},\ g_1,\ g_2 \in \overline{g}$. Положим*

$$x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} g_1 \Rightarrow \varphi_1(x) := f_1(x) + g_1(x),$$

$$x \in \operatorname{dom} f_2 \cap \operatorname{dom} g_2 \Rightarrow \varphi_2(x) := f_2(x) + g_2(x).$$

Тогда $\varphi_1,\ \varphi_2 \in H(K)$, причем $\overline{\varphi_1} = \overline{\varphi_2}$.

◁ Выбрав открытые множества $K \subset \mathscr{D}_1 \subset \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ и $K \subset \mathscr{D}_2 \subset \operatorname{dom} g_1 \cap \operatorname{dom} g_2$, в которых совпадают f_1 и f_2 и соответственно g_1 и g_2, видим, что в $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ совпадают φ_1 и φ_2. ▷

8.1.16. Определение. Класс, введенный в 8.1.15, называют *суммой ростков* $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2}$ и обозначают $\overline{f_1} + \overline{f_2}$. Аналогично вводят *произведение ростков* и *умножение ростка на комплексное число*.

8.1.17. *$\mathscr{H}(K)$ с операциями, введенными в 8.1.16, является алгеброй.* ◁▷

8.1.18. Определение. Возникающую алгебру $\mathscr{H}(K)$ называют *алгеброй ростков голоморфных функций* на компакте K.

8.1.19. *Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$, а $R : \mathbb{C} \setminus K \to X$ — голоморфная функция со значениями в банаховом пространстве X. Пусть, далее, $\overline{f} \in \mathscr{H}(K)$ и $f_1,\ f_2 \in \overline{f}$. Если F_1 — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f_1)$, а F_2 — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f_2)$, то*

$$\int\limits_{\partial F_1} f_1(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_2} f_2(z)R(z)dz.$$

$\lhd$ Пусть $K \subset \mathscr{D} \subset \operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2$, где $\mathscr{D}$ открыто и $f_1|_{\mathscr{D}} = f_2|_{\mathscr{D}}$. Возьмем простую картину $K \subset F \subset \mathscr{D}$. Учитывая голоморфность функции $f_1 R$ на $\operatorname{dom} f_1 \setminus K$ и голоморфность $f_2 R$ на $\operatorname{dom} f_2 \setminus K$, выводим равенства

$$\int\limits_{\partial F} f_1(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_1} f_1(z)R(z)dz,$$

$$\int\limits_{\partial F} f_2(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_2} f_2(z)R(z)dz$$

(из нетривиального факта справедливости их скалярных аналогов). Ввиду совпадения f_1 и f_2 на $\mathscr{D}$ имеем требуемое. $\rhd$

8.1.20. Определение. Фиксируя $h \in \mathscr{H}(K)$, в условиях 8.1.19 ***контурным интегралом*** h с ядром R называют элемент

$$\oint h(z)R(z)dz := \int\limits_{\partial F} f(z)R(z)dz,$$

где $h = \overline{f}$ и F — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f)$.

8.1.21. Замечание. Обозначение $h(z)$ в 8.1.20 неслучайно. Оно объясняется тем, что для каждой точки $z \in K$ и любых двух представителей $f_1,\ f_2$ ростка h выполнено $w := f_1(z) = f_2(z)$. В этой связи об элементе w говорят как о ***значении ростка*** h ***в точке*** z и пишут $h(z) = w$. Отметим здесь же, что в 8.1.20 функцию R можно считать заданной лишь в $U \setminus K$, где $\operatorname{int} U \supset K$.

8.2. Голоморфное функциональное исчисление

8.2.1. Определение. Пусть X — (ненулевое) комплексное банахово пространство и T — ограниченный ***эндоморфизм*** X, т. е. $T \in B(X)$. Для $h \in \mathscr{H}(\operatorname{Sp}(T))$ контурный интеграл с ядром $R(T,\cdot)$ — резольвентой оператора T — обозначают

$$\mathscr{R}_T h := \frac{1}{2\pi i} \oint h(z)R(T,\ z)dz$$

и называют ***интегралом Рисса — Данфорда*** (ростка h). Если f — функция, голоморфная в окрестности $\mathrm{Sp}(T)$, то полагают $f(T) := \mathscr{R}_T f := \mathscr{R}_T \overline{f}$. Используют также более образные обозначения типа

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - T} dz.$$

8.2.2. Замечание. В алгебре, в частности, изучают различные представления математических объектов. Нам удобно пользоваться некоторыми элементарными понятиями теории представлений наиболее «алгебраических» объектов — алгебр. Вспомним простейшие из них.

Пусть A_1, A_2 — две алгебры (над одним и тем же полем). ***Морфизмом*** A_1 в A_2 или ***представлением*** алгебры A_1 в алгебре A_2 (реже говорят «в алгебру A_2») называют ***мультипликативный линейный оператор*** $\mathfrak{R}$, т. е. отображение $\mathfrak{R} \in \mathscr{L}(A_1, A_2)$ такое, что $\mathfrak{R}(ab) = \mathfrak{R}(a)\mathfrak{R}(b)$ для всех a, $b \in A_1$. Представление $\mathfrak{R}$ называют ***точным***, если $\ker \mathfrak{R} = 0$. Наличие точного представления $\mathfrak{R} : A_1 \to A_2$ позволяет рассматривать A_1 как подалгебру A_2.

Если A_2 является (под)алгеброй эндоморфизмов $\mathscr{L}(X)$ некоторого векторного пространства X (над тем же полем), то о морфизме A_1 в A_2 говорят как о (линейном) ***представлении*** A_1 в ***пространстве*** X или об ***операторном представлении*** A_1. Пространство X называют в этом случае ***пространством представления*** алгебры A_1.

Если в пространстве X представления $\mathfrak{R}$ алгебры A есть подпространство X_1, инвариантное относительно всех операторов $\mathfrak{R}(a)$ при $a \in A$, то естественным образом возникает представление $\mathfrak{R}_1 : A \to \mathscr{L}(X_1)$, действующее по правилу $\mathfrak{R}_1(a)x_1 = \mathfrak{R}(a)x_1$ для $x_1 \in X_1$ и $a \in A$, называемое ***подпредставлением*** $\mathfrak{R}$ (порожденным X_1). Если $X = X_1 \oplus X_2$ и это разложение приводит каждый оператор $\mathfrak{R}(a)$ для $a \in A$, то говорят, что ***представление*** $\mathfrak{R}$ ***приведено к прямой сумме (под)представлений*** $\mathfrak{R}_1$ ***и*** $\mathfrak{R}_2$ (порожденных X_1 и X_2 соответственно). Отметим важность задачи изучения произвольных ***неприводимых представлений*** (= представлений, не содержащих нетривиальных подпредставлений).

8.2.3. *Теорема Гельфанда — Данфорда.* *Интеграл Рисса — Данфорда $\mathscr{R}_T$ служит представлением алгебры ростков голоморфных функций на спектре оператора T в пространстве X — области* *определения оператора* T. *При этом если* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (*в окрестности* $\mathrm{Sp}(T)$), *то* $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$ (*суммирование ведется относительно операторной нормы в* $B(X)$).

$\lhd$ То, что $\mathscr{R}_T$ — линейный оператор, несомненно. Установим мультипликативность $\mathscr{R}_T$. Для этого возьмем $\overline{f_1},\ \overline{f_2} \in \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T))$ и выберем простые картины $F_1,\ F_2$ такие, что $\mathrm{Sp}(T) \subset \operatorname{int} F_1 \subset F_1 \subset \operatorname{int} F_2 \subset F_2 \subset \mathscr{D}$, причем функции $f_1 \in \overline{f_1},\ f_2 \in \overline{f_2}$ являются голоморфными на $\mathscr{D}$.

Привлекая очевидные свойства интеграла Бохнера, классическую теорему Коши и тождество Гильберта 5.6.19, последовательно получаем

$$\mathscr{R}_T\overline{f_1} \circ \mathscr{R}_T\overline{f_2} = f_1(T)f_2(T) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1} \frac{f_1(z_1)}{z_1 - T}dz_1 \circ \int\limits_{\partial F_2} \frac{f_2(z_2)}{z_2 - T}dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_2}\left(\int\limits_{\partial F_1} f_1(z_1)R(T,\ z_1)dz_1\right) f_2(z_2)R(T,\ z_2)dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1}\int\limits_{\partial F_2} f_1(z_1)f_2(z_2)R(T,\ z_1)R(T,\ z_2)dz_2dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1}\int\limits_{\partial F_2} f_1(z_1)f_2(z_2)\frac{R(T,\ z_1) - R(T,\ z_2)}{z_2 - z_1}dz_2dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1} f_1(z_1)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_2}\frac{f_2(z_2)}{z_2 - z_1}dz_2\right) R(T,\ z_1)dz_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_2} f_2(z_2)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1}\frac{f_1(z_1)}{z_2 - z_1}dz_1\right) R(T,\ z_2)dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f_1(z_1)f_2(z_1)R(T,\ z_1)dz_1 - 0 = f_1f_2(T) = \mathscr{R}_T(\overline{f_1}\,\overline{f_2}).$$

Выберем окружность $\gamma := \varepsilon\mathbb{T}$, лежащую как в $\mathrm{res}(T)$, так и внутри круга сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Учитывая 5.6.16 и 5.5.9 (6), имеем

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f(z) z^{-n-1} T^n dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) T^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$$

в силу 8.1.9. $\triangleright$

8.2.4. Замечание. Теорему 8.2.3 часто называют *основной теоремой голоморфного функционального исчисления.*

8.2.5. Теорема об отображении спектра. *Для любой функции $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$, голоморфной в окрестности спектра оператора T из $B(X)$, выполнено*

$$f(\mathrm{Sp}(T)) = \mathrm{Sp}(f(T)).$$

$\triangleleft$ Пусть сначала дано, что $\lambda \in \mathrm{Sp}(f(T))$ и $f^{-1}(\lambda) \cap \mathrm{Sp}(T) = \varnothing$. Для точки $z \in (\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\lambda)) \cap \mathrm{dom}\, f$ положим $g(z) := (\lambda - f(z))^{-1}$. Тогда g — голоморфная функция в окрестности $\mathrm{Sp}(T)$, причем $\overline{g}(\overline{\lambda} - \overline{f}) = (\overline{\lambda} - \overline{f})\overline{g} = \overline{\mathbf{1}_{\mathbb{C}}}$. Привлекая 8.2.3, видим, что $\lambda \in \mathrm{res}(f(T))$. Последнее противоречит условию. Значит, $f^{-1}(\lambda) \cap \mathrm{Sp}(T) \neq \varnothing$, т. е. $\mathrm{Sp}(f(T)) \subset f(\mathrm{Sp}(T))$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Положим

$$\lambda \neq z \Rightarrow g(z) := \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z}; \quad g(\lambda) := f'(\lambda).$$

Понятно, что g — голоморфная функция (особенность «устранена»). Из 8.2.3 получаем

$$g(T)(\lambda - T) = (\lambda - T) g(T) = f(\lambda) - f(T).$$

Значит, если $f(\lambda) \in \mathrm{res}(f(T))$, то оператор $R(f(T),\ f(\lambda)) g(T)$ является обратным к $\lambda - T$. Иными словами, $\lambda \in \mathrm{res}(T)$, что неверно. Итак, $f(\lambda) \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(f(T)) = \mathrm{Sp}(f(T))$, т. е. $f(\mathrm{Sp}(T)) \subset \mathrm{Sp}(f(T))$. $\triangleright$

8.2.6. *Пусть K — непустой компакт; $g : \operatorname{dom} g \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, причем $\operatorname{dom} g \supset K$. Для $f \in H(g(K))$ положим $\mathring{g}(\overline{f}) := f \circ g$. Тогда $\mathring{g}$ — представление алгебры $\mathscr{H}(g(K))$ в алгебре $\mathscr{H}(K)$.* $\triangleleft\triangleright$

8.2.7. *Теорема Данфорда.* *Для всякой функции $g : \operatorname{dom} g \to \mathbb{C}$, голоморфной в окрестности $\operatorname{dom} g$ спектра $\mathrm{Sp}(T)$ оператора $T \in B(X)$, коммутативна следующая диаграмма представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[dr, "\mathscr{R}_T"'] & \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(g(T))) \arrow[l, "\mathring{g}"'] \arrow[d, "\mathscr{R}_{g(T)}"] \\
& B(X)
\end{tikzcd}
$$

$\triangleleft$ Пусть $\overline{f} \in \mathscr{H}(g(\mathrm{Sp}(T)))$ и $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ таковы, что $f \in \overline{f}$ и $\mathscr{D} \supset g(\mathrm{Sp}(T)) = \mathrm{Sp}(g(T))$. Пусть F_1 — простая картина для пары $(\mathrm{Sp}(g(T)),\ \mathscr{D})$ и F_2 — простая картина для пары $(\mathrm{Sp}(T),\ g^{-1}(\operatorname{int} F_1))$. Ясно, что при этом $g(\partial F_2) \subset \operatorname{int} F_1$ и, кроме того, функция $z_2 \mapsto (z_1 - g(z_2))^{-1}$ определена и голоморфна в $\operatorname{int} F_2$ для $z_1 \in \partial F_1$. Таким образом, по 8.2.3

$$R(g(T),\ z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_2} \frac{R(T,\ z_2)}{z_1 - g(z_2)} dz_2 \quad (z_1 \in \partial F_1).$$

Учитывая это соотношение, последовательно имеем

$$\mathscr{R}_{g(T)} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - g(T)} dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_1} f(z_1) \left(\int\limits_{\partial F_2} \frac{R(T,\ z_2)}{z_1 - g(z_2)} dz_2 \right) dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_2} \left(\int\limits_{\partial F_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - g(z_2)} dz_1 \right) R(T,\ z_2) dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_2} f(g(z_2)) R(T,\ z_2) dz_2 = \mathscr{R}_T \overset{\circ}{g}(\overline{f})$$

(так как $g(z_2) \in \operatorname{int} F_1$ для $z_2 \in \partial F_2$ по построению, то на основании классической теоремы Коши

$$f(g(z_2)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - g(z_2)} dz_1. \ \triangleright$$

8.2.8. Замечание. Теорему Данфорда весьма часто называют *теоремой о сложной функции* и символически записывают так: $f \circ g(T) = f(g(T))$ для $f \in H(g(\mathrm{Sp}(T)))$.

8.2.9. Определение. Подмножество σ в $\mathrm{Sp}(T)$ называют *спектральным множеством* или *изолированной частью спектра* T, если как σ, так и его дополнение $\sigma' := \mathrm{Sp}\ (T) \setminus \sigma$ являются замкнутыми множествами.

8.2.10. *Пусть σ — спектральное множество и $\varkappa_\sigma$ — это (какая-нибудь) функция, равная единице в некоторой открытой окрестности σ и нулю в некоторой открытой окрестности σ'. Пусть, далее,*

$$P_\sigma := \varkappa_\sigma(T) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varkappa_\sigma(z)}{z - T} dz.$$

Тогда P_σ — проектор в X и (замкнутое) подпространство $X_\sigma := \operatorname{im} P_\sigma$ инвариантно относительно T.

$\triangleleft$ Поскольку $\varkappa_\sigma^2 = \varkappa_\sigma$, то, по 8.2.3, $\varkappa_\sigma(T)^2 = \varkappa_\sigma(T)$. Помимо этого, $T = \mathscr{R}_T I_{\mathbb{C}}$, где $I_{\mathbb{C}} : z \mapsto z$, откуда $TP_\sigma = P_\sigma T$ (ибо $\overline{I_{\mathbb{C}}}\,\overline{\varkappa_\sigma} = \overline{\varkappa_\sigma}\,\overline{I_{\mathbb{C}}}$). Значит, в силу 2.2.9 (4), X_σ инвариантно относительно T. $\triangleright$

8.2.11. Определение. Оператор P_σ из 8.2.10 называют *проектором Рисса* или же *спектральным проектором*, отвечающим спектральному множеству σ.

8.2.12. *Теорема о разбиении спектра.* *Пусть σ — спектральное множество оператора T из $B(X)$. Тогда имеет место разложение X в прямую сумму инвариантных подпространств $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$, приводящее T к матричному виду*

$$T \sim \begin{pmatrix} T_\sigma & 0 \\ 0 & T_{\sigma'} \end{pmatrix},$$

где часть T_σ оператора T в X_σ и часть $T_{\sigma'}$ оператора T в $X_{\sigma'}$ таковы, что

$$\mathrm{Sp}(T_\sigma) = \sigma, \quad \mathrm{Sp}(T_{\sigma'}) = \sigma'.$$

$\lhd$ Поскольку $\overline{\varkappa_\sigma} + \overline{\varkappa_{\sigma'}} = \overline{\varkappa_{\mathrm{Sp}(T)}} = \overline{\mathbf{1}_\mathbb{C}}$, то ввиду 8.2.3 и 8.2.10 следует установить только утверждение о спектре T_σ.

Из 8.2.5 и 8.2.3 получаем

$$\sigma \cup 0 = \varkappa_\sigma I_\mathbb{C}(\mathrm{Sp}(T)) = \mathrm{Sp}\ (\varkappa_\sigma I_\mathbb{C}(T)) = \mathrm{Sp}\ (\mathscr{R}_T(\varkappa_\sigma I_\mathbb{C})) =$$

$$= \mathrm{Sp}(\mathscr{R}_T \varkappa_\sigma \circ \mathscr{R}_T I_\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(P_\sigma T).$$

При этом в матричном виде

$$P_\sigma T \sim \begin{pmatrix} T_\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть λ — ненулевое комплексное число. Тогда

$$\lambda - P_\sigma T \sim \begin{pmatrix} \lambda - T_\sigma & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

т. е. оператор $\lambda - P_\sigma T$ необратим в том и только в том случае, если необратим оператор $\lambda - T_\sigma$. Итак, $\mathrm{Sp}(T_\sigma) \setminus 0 \subset \mathrm{Sp}(P_\sigma T) \setminus 0 = (\sigma \cup 0) \setminus 0 \subset \sigma$.

Допустим, что $0 \in \mathrm{Sp}(T_\sigma)$ и $0 \notin \sigma$. Выберем открытые непересекающиеся множества $\mathscr{D}_\sigma$ и $\mathscr{D}_{\sigma'}$ так, что $\sigma \subset \mathscr{D}_\sigma$, $0 \notin \mathscr{D}_\sigma$ и $\sigma' \subset \mathscr{D}_{\sigma'}$, и положим

$$z \in \mathscr{D}_\sigma \Rightarrow h(z) := \frac{1}{z};$$

$$z \in \mathscr{D}_{\sigma'} \Rightarrow h(z) := 0.$$

По 8.2.3, $h(T)T = Th(T) = P_\sigma$. Более того, раз $\overline{h}\,\overline{\varkappa_\sigma} = \overline{\varkappa_\sigma}\,\overline{h}$, то разложение $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ приводит $h(T)$ и для части $h(T)_\sigma$ оператора $h(T)$ в X_σ верно $h(T)_\sigma T_\sigma = T_\sigma h(T)_\sigma = 1$. Таким образом, T_σ обратим, т. е. $0 \notin \mathrm{Sp}(T_\sigma)$. Получили противоречие, означающее, что $0 \in \sigma$. Иными словами, выполнено $\mathrm{Sp}(T_\sigma) \subset \sigma$.

Заметим теперь, что $\mathrm{res}(T) = \mathrm{res}(T_\sigma) \cap \mathrm{res}(T_{\sigma'})$. Значит, по уже доказанному

$$\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(T) = \mathbb{C} \setminus (\mathrm{res}(T_\sigma) \cap \mathrm{res}(T_{\sigma'})) =$$

$$= (\mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(T_\sigma)) \cup (\mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(T_{\sigma'})) = \mathrm{Sp}(T_\sigma) \cup \mathrm{Sp}(T_{\sigma'}) \subset \sigma \cup \sigma' = \mathrm{Sp}(T).$$

Учитывая, что $\sigma \cap \sigma' = \varnothing$, получаем требуемое. $\rhd$

8.2.13. *Теорема о разложении интеграла Рисса — Данфорда.* *Пусть σ — спектральное множество оператора $T \in B(X)$. Разложение $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ приводит представление $\mathscr{R}_T$ алгебры $\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T))$ в X к прямой сумме представлений $\mathscr{R}_\sigma$ и $\mathscr{R}_{\sigma'}$. При этом коммутативны следующие диаграммы представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[r, "\overline{\varkappa_\sigma}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_\sigma"'] & \mathscr{H}(\sigma) \arrow[d, "\mathscr{R}_{T_\sigma}"] \\
& B(X_\sigma)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[r, "\overline{\varkappa_{\sigma'}}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\sigma'}"'] & \mathscr{H}(\sigma') \arrow[d, "\mathscr{R}_{T_{\sigma'}}"] \\
& B(X_{\sigma'})
\end{tikzcd}
$$

Здесь $\overline{\varkappa_\sigma}(\overline{f}) := \overline{\varkappa_\sigma f}$, $\overline{\varkappa_{\sigma'}}(\overline{f}) := \overline{\varkappa_{\sigma'} f}$ для $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$ — представления, порожденные сужениями f на σ и σ' соответственно. $\triangleleft\triangleright$

8.3. Идеал компактных операторов и проблема аппроксимации

8.3.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Для линейного оператора $K \in \mathscr{L}(X, Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *оператор K компактен: $K \in \mathscr{K}(X, Y)$;*

(2) *существуют окрестность нуля U в X и компактное множество V в Y такие, что $K(U) \subset V$;*

(3) *образ при отображении K любого ограниченного множества в X относительно компактен в Y;*

(4) *образ любого ограниченного в X множества (при отображении K) вполне ограничен в Y;*

(5) *для каждой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек единичного шара B_X последовательность $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержит некоторую фундаментальную подпоследовательность.* $\triangleleft\triangleright$

8.3.2. *Теорема.* *Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда*

(1) *$\mathscr{K}(X, Y)$ — замкнутое подпространство $B(X, Y)$;*

(2) *для любых банаховых пространств W и Z выполнено*

$$B(Y, Z) \circ \mathscr{K}(X, Y) \circ B(W, X) \subset \mathscr{K}(W, Z),$$

т. е. если $S \in B(W,\ X)$, $T \in B(Y,\ Z)$, а $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$, то $TKS \in \mathscr{K}(W,\ Z)$;

(3) *$I_{\mathbb{F}} \in \mathscr{K}(\mathbb{F}) := \mathscr{K}(\mathbb{F},\ \mathbb{F})$ для основного поля $\mathbb{F}$.*

$\lhd$ То, что $\mathscr{K}(X,\ Y)$ — подпространство $B(X,\ Y)$, следует из 8.3.1. Если $K_n \in \mathscr{K}(X,\ Y)$ и $K_n \to K$, то для $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n имеем $\|Kx - K_n x\| \le \|K - K_n\|\ \|x\| \le \varepsilon$, как только $x \in B_X$. Таким образом, $K_n(B_X)$ служит *ε-сетью* ($= B_\varepsilon$-сетью) для $K(B_X)$. Остается сослаться на 4.6.4, чтобы закончить доказательство замкнутости $\mathscr{K}(X,\ Y)$. Прочие утверждения теоремы ясны. $\rhd$

8.3.3. Замечание. Теорему 8.3.2 часто выражают следующими словами: «класс всех компактных операторов представляет собой *операторный идеал*». При этом имеют в виду очевидную аналогию тому, что $\mathscr{K}(X) := \mathscr{K}(X,\ X)$ представляет собой (двусторонний замкнутый) идеал в алгебре $B(X)$, т. е. $\mathscr{K}(X) \circ B(X) \subset \mathscr{K}(X)$ и $B(X) \circ \mathscr{K}(X) \subset \mathscr{K}(X)$.

8.3.4. *Теорема Калкина.* *Идеалы 0, $\mathscr{K}(l_2)$, $B(l_2)$ составляют полный перечень замкнутых двусторонних идеалов алгебры $B(l_2)$ ограниченных эндоморфизмов гильбертова пространства l_2.*

8.3.5. Замечание. В связи с 8.3.4 ясно, что определенную роль в теории операторов должна играть алгебра $B(X)/\mathscr{K}(X)$, называемая *алгеброй Калкина* (в X). Эту роль отчасти можно видеть в 8.5.

8.3.6. Определение. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *конечномерным*, если $T \in B(X,\ Y)$ и $\operatorname{im} T$ — конечномерное подпространство. При этом пишут $T \in F(X,\ Y)$.

8.3.7. *Конечномерные операторы составляют линейную оболочку множества ограниченных одномерных операторов*:

$$T \in F(X,\ Y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists\, x'_1, \dots, x'_n \in X',\ y_1, \dots, y_n \in Y)\ T = \sum_{k=1}^{n} x'_k \otimes y_k. \ \ \lhd\rhd$$

8.3.8. Определение. Пусть Q — (непустой) компакт в X. Для $T \in B(X,\ Y)$ положим

$$\|T\|_Q := \sup \|T(Q)\|.$$

Совокупность всех полунорм вида $\|\cdot\|_Q$ в $B(X,\ Y)$ называют *мультинормой Аренса* в $B(X,\ Y)$ и обозначают $\varkappa_{B(X,Y)}$. Соответствующую топологию называют *топологией равномерной сходимости на компактах.*

8.3.9. *Теорема Гротендика.* *Пусть X — банахово пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для каждых $\varepsilon > 0$ и компактного множества Q в X найдется оператор $T \in F(X) := F(X,\ X)$ такой, что $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in Q$;*

(2) *для любого банахова пространства W подпространство $F(W,\ X)$ плотно в $B(W,\ X)$ относительно мультинормы Аренса $\varkappa_{B(W,X)}$;*

(3) *для любого банахова пространства Y подпространство $F(X,\ Y)$ плотно в $B(X,\ Y)$ относительно мультинормы Аренса $\varkappa_{B(X,Y)}$.*

$\triangleleft$ Ясно, что (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1). Поэтому установим, что (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2): Если $T \in B(W,\ X)$ и $\varnothing \neq Q \subset W$ — компакт в W, то, по теореме Вейерштрасса 4.4.5, $T(Q)$ — компакт в X и, стало быть, для $\varepsilon > 0$ по условию существует оператор $T_0 \in F(X)$ такой, что $\|T_0 - I_X\|_{T(Q)} = \|T_0T - T\|_Q \leq \varepsilon$. Несомненно, что $T_0T \in F(W,\ X)$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Пусть $T \in B(X,\ Y)$. Если $T = 0$, то доказывать ничего не надо. Пусть $T \neq 0$, $\varepsilon > 0$ и Q — непустой компакт в X. По условию существует оператор $T_0 \in F(X)$ такой, что $\|T_0 - I_X\|_Q \leq \varepsilon\|T\|^{-1}$. Тогда $\|TT_0 - T\|_Q \leq \|T\|\ \|T_0 - I_X\|_Q \leq \varepsilon$. Кроме того, $TT_0 \in F(X,\ Y)$. $\triangleright$

8.3.10. Определение. Банахово пространство, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 8.3.9 (1)–8.3.9 (3), называют обладающим *свойством аппроксимации.*

8.3.11. *Критерий Гротендика.* *Банахово пространство X обладает свойством аппроксимации в том и только в том случае, если для каждого банахова пространства W выполнено $\operatorname{cl} F(W,\ X) = \mathscr{K}(W,\ X)$, где замыкание вычислено относительно операторной нормы.*

8.3.12. Замечание. Долго считали (и, разумеется, не могли доказать), что все банаховы пространства обладают свойством аппроксимации. Поэтому найденный П. Энфло на основе тонких рассуждений пример банахова пространства без свойства аппроксимации был воспринят в конце 70-х годов как сенсационный. В настоящее время известны многие контрпримеры такого рода.

8.3.13. Контрпример Шанковского. *Пространство $B(l_2)$ не обладает свойством аппроксимации.*

8.3.14. Контрпримеры Дэви — Фигеля — Шанковского. *Пространства l_p при $p \neq 2$ и c_0 имеют замкнутые подпространства, не обладающие свойством аппроксимации.*

8.4. Теория Рисса — Шаудера

8.4.1. ***Лемма об ε-перпендикуляре.*** *Пусть X_0 — замкнутое подпространство банахова пространства X и $X \neq X_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ в X имеется ε-перпендикуляр к X_0, т. е. такой элемент $x_\varepsilon \in X$, что $\|x_\varepsilon\| = 1$ и $d(x_\varepsilon,\ X_0) := \inf\ d_{\|\cdot\|}(\{x_\varepsilon\} \times X_0) \geq 1 - \varepsilon$.*

$\lhd$ Пусть $1 > \varepsilon$ и $x \in X \setminus X_0$. Понятно, что $d := d(x,\ X_0) > 0$. В подпространстве X_0 подыщем x', для которого $\|x - x'\| \leq d/(1-\varepsilon)$ (это возможно, ибо $d/(1-\varepsilon) > d$). Положим $x_\varepsilon := (x - x')\|x - x'\|^{-1}$. Тогда $\|x_\varepsilon\| = 1$. Наконец, для $x_0 \in X_0$ выполнено

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| = \left\| x_0 - \frac{x - x'}{\|x - x'\|} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|x' - x\|}\, \|(\|x - x'\| x_0 + x') - x\| \geq \frac{d(x,\ X_0)}{\|x' - x\|} \geq 1 - \varepsilon. \ \rhd$$

8.4.2. ***Критерий Рисса.*** *Пусть X — банахово пространство. Тождественный оператор в X компактен в том и только в том случае, если X конечномерно.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь стрелка $\Rightarrow$. Если известно, что X не является конечномерным пространством, то в X можно указать последовательность конечномерных подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ такую, что $X_{n+1} \neq X_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. На основании 8.4.1 существует последовательность (x_n), для которой $x_{n+1} \in X_{n+1},\ \|x_{n+1}\| = 1$ и $d(x_{n+1},\ X_n) \geq 1/2$, т. е. последовательность $1/2$-перпендикуляров к X_n в X_{n+1}. Ясно, что $d(x_m,\ x_k) \geq 1/2$ для $m \neq k$. Иными словами, последовательность (x_n) не содержит фундаментальной подпоследовательности. Значит, по 8.3.1 оператор I_X не является компактным. $\rhd$

8.4.3. *Пусть $T \in \mathscr{K}(X,\ Y)$, где $X,\ Y$ — банаховы пространства. Оператор T нормально разрешим в том и только в том случае, если T конечномерен.*

$\vartriangleleft$ Нуждается в проверке лишь импликация $\Rightarrow$.

Пусть $Y_0 := \operatorname{im} T$ — замкнутое подпространство в Y. По теореме Банаха о гомоморфизме 7.4.4 образ единичного шара $T(B_X)$ — окрестность нуля в Y_0. Кроме того, в силу компактности T множество $T(B_X)$ относительно компактно в Y_0. Остается применить 8.4.2 к Y_0. $\vartriangleright$

8.4.4. *Пусть X — банахово пространство и $K \in \mathscr{K}(X)$. Тогда оператор $1 - K$ нормально разрешим.*

$\vartriangleleft$ Положим $T := 1 - K$. Пусть $X_1 := \ker T$. Несомненно, что X_1 конечномерно по 8.4.2. В соответствии с 7.4.11 (1) конечномерное подпространство дополняемо. Обозначим X_2 топологическое дополнение X_1. Учитывая, что X_2 — банахово пространство и равенство $T(X) = T(X_2)$, следует установить, что для некоторого $t > 0$ выполнено $\|Tx\| \geq t\|x\|$ для всех $x \in X_2$. В противном случае найдется последовательность (x_n) таких элементов, что $\|x_n\| = 1,\ x_n \in X_2$ и $Tx_n \to 0$. Используя компактность K, можно считать, что (Kx_n) сходится. Положим $y := \lim Kx_n$. Тогда последовательность (x_n) сходится к y, ибо $y = \lim(Tx_n + Kx_n) = \lim x_n$. При этом $Ty = \lim Tx_n = 0$, т. е. $y \in X_1$. Кроме того, несомненно, $y \in X_2$. Итак, $y \in X_1 \cap X_2$, т. е. $y = 0$. Получили противоречие ($\|y\| = \lim \|x_n\| = 1$). $\vartriangleright$

8.4.5. *Для всякого $\varepsilon > 0$ вне круга радиуса ε с центром в нуле может лежать лишь конечное множество собственных чисел компактного оператора.*

$\vartriangleleft$ Допустим, что вопреки утверждаемому есть последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных собственных чисел оператора K, таких что $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, $0 \neq x_n \in \ker(\lambda_n - K)$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_n. Установим прежде всего, что множество $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ линейно независимо. В самом деле, пусть уже известно, что линейно независимо множество $\{x_1, \dots, x_n\}$. Предположим, что $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$. Тогда $0 = (\lambda_{n+1} - K)x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\lambda_{n+1} - \lambda_k)x_k$. Следовательно, $\alpha_k = 0$ для $k := 1, \dots, n$. Отсюда вытекает заведомо ложное равенство $x_{n+1} = 0$.

Положим $X_n := \mathscr{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$. По определению $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, причем, как уже доказано, $X_{n+1} \neq X_n$ для $n \in \mathbb{N}$. В силу 8.4.1 имеется последовательность $(\overline{x}_n)$ такая, что $\overline{x}_{n+1} \in X_{n+1}$, $\|\overline{x}_{n+1}\| = 1$ и $d(\overline{x}_{n+1},\ X_n) \geq 1/2$. При $m > k$ прямой подсчет показывает, что $z := (\lambda_{m+1} - K)\overline{x}_{m+1} \in X_m$ и $z + K\overline{x}_k \in X_m + X_k \subset X_m$. Значит,

$$\|K\overline{x}_{m+1} - K\overline{x}_k\| = \| - \lambda_{m+1}\overline{x}_{m+1} + K\overline{x}_{m+1} + \lambda_{m+1}\overline{x}_{m+1} - K\overline{x}_k\| =$$

$$= \|\lambda_{m+1}\overline{x}_{m+1} - (z + K\overline{x}_k)\| \geq |\lambda_{m+1}| d(\overline{x}_{m+1},\ X_m) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Иными словами, последовательность $(K\overline{x}_n)$ не содержит фундаментальной подпоследовательности. $\triangleright$

8.4.6. *Теорема Шаудера.* *Пусть X, Y — банаховы пространства (над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$). Тогда*

$$K \in \mathscr{K}(X,\ Y) \Leftrightarrow K' \in \mathscr{K}(Y',\ X').$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Заметим прежде всего, что отображение сужения $x' \mapsto x'|_{B_X}$ осуществляет изометрию X' в $l_\infty(B_X)$. Поэтому для установления относительной компактности $K'(B_{Y'})$ следует доказать относительную компактность множества $V := \{K'y'|_{B_X} :\ \ y' \in B_{Y'}\}$. Ввиду того, что для $x \in B_X$ и $y' \in B_{Y'}$ выполнено $K'y'|_{B_X}(x) = y' \circ K|_{B_X}(x) = y'(Kx)$, рассмотрим компакт $Q := \operatorname{cl} K(B_X)$ и отображение $\overset{\circ}{K} : C(Q,\ \mathbb{F}) \to l_\infty(B_X)$, определенное соотношением $\overset{\circ}{K}g : x \mapsto g(Kx)$. Несомненно, что оператор $\overset{\circ}{K}$ ограничен, а следовательно, и непрерывен. Пусть теперь $S := \{y'|_Q :\ \ y' \in B_{Y'}\}$. Ясно, что S — равностепенно непрерывное и в то же время ограниченное подмножество $C(Q,\ \mathbb{F})$. Значит, по теореме Асколи — Арцела 4.6.10, S относительно компактно. По теореме Вейерштрасса 4.4.5 заключаем, что относительно компактно множество $\overset{\circ}{K}(S)$. Осталось заметить, что для $y' \in B_{Y'}$ выполнено $\overset{\circ}{K}y'|_Q = K'y'|_{B_X}$, т. е. $\overset{\circ}{K}(S) = V$.

$\Leftarrow$: Если $K' \in \mathscr{K}(Y',\ X')$, то по уже доказанному выполняется $K'' \in \mathscr{K}(X'',\ Y'')$. В силу леммы о двойном штриховании 7.6.6, $K''|_X = K$. Отсюда вытекает, что оператор K компактный. $\triangleright$

8.4.7. *Ненулевые точки спектра компактного оператора изолированы (т. е. всякая такая точка составляет спектральное множество).*

$\triangleleft$ Учитывая 8.4.4 и принцип штрихования последовательностей 7.6.13, видим, что любая ненулевая точка спектра компактного оператора является либо его собственным числом, либо собственным числом сопряженного оператора. Привлекая 8.4.5 и 8.4.6, заключаем, что вне круга ненулевого радиуса может лежать лишь конечное число точек спектра рассматриваемого оператора. $\triangleright$

8.4.8. *Теорема Рисса — Шаудера.* *Спектр компактного оператора, заданного в бесконечномерном пространстве, содержит нуль. Ненулевые точки спектра — собственные числа, каждому из которых отвечает конечномерное собственное подпространство. При этом вне любого круга ненулевого радиуса с центром в нуле лежит конечное множество точек спектра рассматриваемого оператора.*

$\triangleleft$ Для оператора $K \in \mathscr{K}(X)$ следует установить только импликацию

$$0 \neq \lambda \in \operatorname{Sp}(K) \Rightarrow \ker(\lambda - K) \neq 0.$$

Разберем сначала случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. Отметим, что $\{\lambda\}$ — спектральное множество. Полагая $g(z) := 1/z$ в некоторой окрестности λ и $g(z) := 0$ для z в подходящей окрестности $\{\lambda\}'$, видим: $\overline{\varkappa_{\{\lambda\}}} = \overline{g}\overline{I_{\mathbb{C}}}$. Стало быть, на основании 8.2.3 и 8.2.10, $P_{\{\lambda\}} = \overline{g}(K)K$. В силу 8.3.2 (2), $P_{\{\lambda\}} \in \mathscr{K}(X)$. Из 8.4.3 вытекает, что $\operatorname{im} P_{\{\lambda\}}$ — конечномерное пространство. Осталось привлечь теорему о разбиении спектра 8.2.12.

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ следует провести процесс *«комплексификации»*. Именно, нужно рассмотреть в пространстве X^2 умножение на элемент $\mathbb{C}$, порожденное правилом $i(x,\ y) := (-y,\ x)$. Полученное комплексное векторное пространство обозначают $X \oplus iX$. В пространстве $X \oplus iX$ следует ввести оператор $\overline{K}(x,\ y) := (Kx,\ Ky)$. Наделяя $X \oplus iX$ подходящей нормой (ср. 7.3.2), видим, что оператор $\overline{K}$ компактен, причем $\lambda \in \operatorname{Sp}(\overline{K})$. Значит, λ — собственное число $\overline{K}$ по уже доказанному. Отсюда вытекает, что λ — собственное число оператора K. $\triangleright$

8.4.9. *Теорема.* *Пусть X — комплексное банахово пространство, а $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, обращающаяся в нуль лишь в нуле и такая, что для некоторого $T \in B(X)$ выполнено $f(T) \in \mathscr{K}(X)$. Тогда любая отличная от нуля точка λ спектра T изолирована и проектор Рисса $P_{\{\lambda\}}$ компактен.*

◁ Допустим противное, т. е. пусть найдется последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных точек $\operatorname{Sp}(T)$ такая, что $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (в частности, X бесконечномерно). Тогда $f(\lambda_n) \to f(\lambda)$, причем $f(\lambda) \neq 0$ по условию. По теореме об отображении спектра 8.2.5, $\operatorname{Sp}(f(T)) = f(\operatorname{Sp}(T))$. Таким образом, по 8.4.8 для всех достаточно больших n выполнено $f(\lambda_n) = f(\lambda)$. Отсюда вытекает, что $f(z) = f(\lambda)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и, стало быть, $f(T) = f(\lambda)$. По критерию 8.4.2 в этом случае X конечномерно. Получили противоречие, означающее, что λ — изолированная точка $\operatorname{Sp}(T)$. Полагая $g(z) := f(z)^{-1}$ в некоторой не содержащей нуля окрестности λ, имеем, что $\overline{g}\,\overline{f} = \overline{\varkappa_{\{\lambda\}}}$. Следовательно, по теореме Гельфанда — Данфорда 8.2.3, $P_{\{\lambda\}} = g(T)f(T)$, т. е. в силу 8.3.2 (2) проектор Рисса $P_{\{\lambda\}}$ компактен. ▷

8.4.10. Замечание. Теорему 8.4.9 иногда называют «обобщенной теоремой Рисса — Шаудера».

8.5. Нётеровы и фредгольмовы операторы

8.5.1. Определение. Пусть X, Y — банаховы пространства (над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$). Оператор $T \in B(X, Y)$ называют ***нётеровым*** и пишут $T \in \mathscr{N}(X, Y)$, если его ядро $\ker T := T^{-1}(0)$ и коядро $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{im} T$ конечномерны, т. е. если конечны величины

$$\alpha(T) := \dim \ker T; \quad \beta(T) := \dim \operatorname{coker} T.$$

Целое число $\operatorname{ind} T := \alpha(T) - \beta(T)$ называют ***индексом*** оператора T.

8.5.2. Определение. Нётеров оператор нулевого индекса называют ***фредгольмовым.***

8.5.3. *Каждый нётеров оператор нормально разрешим.*

◁ Следует из критерия Като 7.4.20. ▷

8.5.4. *Для оператора $T \in B(X, Y)$ выполнено*

$$T \in \mathscr{N}(X, Y) \Leftrightarrow T' \in \mathscr{N}(Y', X').$$

При этом $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} T'$.

◁ В силу 2.3.5 (6), 8.5.3, 5.5.4 и принципа штрихования 7.6.13 следующие пары сопряженных последовательностей:

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0;$$

$$0 \leftarrow (\ker T)' \leftarrow X' \xleftarrow{T'} Y' \leftarrow (\operatorname{coker} T)' \leftarrow 0;$$

$$0 \rightarrow \ker(T') \rightarrow Y' \xrightarrow{T'} X' \rightarrow \operatorname{coker}(T') \rightarrow 0;$$

$$0 \leftarrow (\ker(T'))' \leftarrow Y \xleftarrow{T} X \leftarrow (\operatorname{coker}(T'))' \leftarrow 0$$

одновременно точны. При этом $\alpha(T) = \beta(T')$ и $\beta(T) = \alpha(T')$ (ср. 7.6.14). $\rhd$

8.5.5. *Оператор фредгольмов в том и только в том случае, если фредгольмов сопряженный к нему оператор.*

$\lhd$ Это частный случай 8.5.4. $\rhd$

8.5.6. *Альтернатива Фредгольма.* *Для фредгольмова оператора T имеет место одна из следующих двух взаимоисключающих возможностей.*

(1) *Однородное уравнение $Tx = 0$ имеет только нулевое решение. Однородное сопряженное уравнение $T'y' = 0$ имеет только нулевое решение. Неоднородное уравнение $Tx = y$ имеет, и притом единственное, решение при любой правой части. Неоднородное сопряженное уравнение $T'y' = x'$ имеет, и притом единственное, решение при любой правой части.*

(2) *Однородное уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевое решение. Однородное сопряженное уравнение $T'y' = 0$ имеет ненулевое решение. Однородное уравнение $Tx = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $x_1, \dots, x_n$. Однородное сопряженное уравнение $T'y' = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $y'_1, \dots, y'_n$. Неоднородное уравнение $Tx = y$ разрешимо в том и только в том случае, если $y'_1(y) = \ldots = y'_n(y) = 0$. При этом общее решение x есть сумма частного решения x_0 неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, т. е. имеет вид*

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad (\lambda_k \in \mathbb{F}).$$

Неоднородное сопряженное уравнение $T'y' = x'$ разрешимо в том и только в том случае, если $x'(x_1) = \ldots = x'(x_n) = 0$. При этом общее решение y' есть сумма частного решения y'_0 неоднородного сопряженного уравнения и общего решения однородного сопряженного уравнения, т. е. имеет вид

$$y' = y'_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k y'_k \quad (\mu_k \in \mathbb{F}).$$

$\lhd$ Переформулировка 8.5.5 с учетом леммы о полярах 7.6.11. $\rhd$

8.5.7. Примеры.

(1) Если T обратим, то T фредгольмов.

(2) Пусть $T \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^n,\ \mathbb{F}^m)$. Пусть $\operatorname{rank} T := \dim \operatorname{im} T$ — *ранг* T. Тогда $\alpha(T) = n - \operatorname{rank} T$; $\beta(T) = m - \operatorname{rank} T$. Следовательно, $T \in \mathscr{N}(\mathbb{F}^n,\ \mathbb{F}^m)$ и $\operatorname{ind} T = n - m$.

(3) Пусть $X = X_1 \oplus X_2$ и $T \in B(X)$. Допустим, что указанное разложение X в прямую сумму приводит T к матричному виду

$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Несомненно, что T нётеров тогда и только тогда, когда нётеровы его части. При этом $\alpha(T) = \alpha(T_1) + \alpha(T_2)$, $\beta(T) = \beta(T_1) + \beta(T_2)$, т. е. $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} T_2$. $\lhd\rhd$

8.5.8. *Теорема Фредгольма.* *Пусть $K \in \mathscr{K}(X)$. Оператор $1 - K$ фредгольмов.*

$\lhd$ В самом деле, разберем сначала случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. Если $1 \notin \operatorname{Sp}(K)$, то $1 - K$ обратим и $\operatorname{ind}(1 - K) = 0$. Если же $1 \in \operatorname{Sp}(K)$, то в силу теоремы Рисса — Шаудера 8.4.8 и теоремы о разбиении спектра 8.2.12 найдется разложение $X = X_1 \oplus X_2$ такое, что X_1 конечномерно, $1 \notin \operatorname{Sp}(K_2)$, где K_2 — часть K в X_2, при этом

$$1 - K \sim \begin{pmatrix} 1 - K_1 & 0 \\ 0 & 1 - K_2 \end{pmatrix}.$$

По 8.5.7 (2), $\operatorname{ind}(1 - K_1) = 0$. По 8.5.7 (3) выполнено $\operatorname{ind}(1 - K) = \operatorname{ind}(1 - K_1) + \operatorname{ind}(1 - K_2) = 0$.

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ проведем процесс «комплексификации» так же, как и в доказательстве 8.4.8. Именно, в пространстве $X \oplus iX$ рассмотрим оператор $\overline{K}(x,\ y) := (Kx,\ Ky)$. По уже установленному $\operatorname{ind}(1 - \overline{K}) = 0$. Остается заметить, что с учетом различия $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ выполнено $\alpha(1-K) = \alpha(1-\overline{K})$ и $\beta(1-K) = \beta(1-\overline{K})$. Окончательно $\operatorname{ind}(1 - K) = 0$. $\rhd$

8.5.9. Определение. Пусть задан $T \in B(X,\ Y)$. Оператор $L \in B(Y,\ X)$ называют *левым регуляризатором* T, если $LT - 1 \in \mathscr{K}(X)$. Оператор $R \in B(Y,\ X)$ называют *правым регуляризатором* T, если $TR - 1 \in \mathscr{K}(Y)$. Оператор $S \in B(Y,\ X)$ называют *почти обратным* к $T \in B(X,\ Y)$, если S является одновременно левым и правым регуляризатором T. Если у оператора T есть почти обратный, то T называют *почти обратимым*.

8.5.10. *Пусть L и R — соответственно левый и правый регуляризаторы T. Тогда $L - R \in \mathscr{K}(Y,\ X)$.*

$$\lhd\ LT = 1 + K_X\ (K_X \in \mathscr{K}(X)) \Rightarrow LTR = R + K_X R;$$
$$TR = 1 + K_Y\ (K_Y \in \mathscr{K}(Y)) \Rightarrow LTR = L + LK_Y \quad \rhd$$

8.5.11. *Если L — левый регуляризатор T и $K \in \mathscr{K}(Y,\ X)$, то $L + K$ также левый регуляризатор T.*

$$\lhd\ \ (L + K)T - 1 = (LT - 1) + KT \in \mathscr{K}(X)\ \ \rhd$$

8.5.12. *Оператор почти обратим в том и только в том случае, если у него есть правый и левый регуляризаторы.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь импликация $\Leftarrow$. Пусть $L,\ R$ — соответственно левый и правый регуляризаторы T. По 8.5.10, $K := L - R \in \mathscr{K}(Y,\ X)$. Значит, по 8.5.11, $R = L - K$ — левый регуляризатор T. Итак, R — почти обратный к T. $\rhd$

8.5.13. Замечание. Из приведенного видно, что при $X = Y$ оператор S является почти обратным для T в том и только в том случае, если $\varphi(S)\varphi(T) = \varphi(T)\varphi(S) = 1$, где $\varphi : B(X) \to B(X)/\mathscr{K}(X)$ — каноническое отображение в алгебру Калкина. Иными словами, левые регуляризаторы — это прообразы левых обратных в алгебре Калкина и т. п.

8.5.14. *Критерий Нётера.* *Оператор является нётеровым в том и только в том случае, если он почти обратим.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. Привлекая принцип дополняемости 7.4.10, рассмотрим разложения $X = \ker T \oplus X_1$ и $Y = \operatorname{im} T \oplus Y_1$ и конечномерные проекторы $P \in B(X)$ на $\ker T$ параллельно X_1 и $Q \in B(Y)$ на Y_1 параллельно $\operatorname{im} T$. Ясно, что сужение $T_1 := T|_{X_1}$ — обратимый оператор $T_1 : X_1 \to \operatorname{im} T$. Положим $S := T_1^{-1}(1 - Q)$. Оператор S можно считать элементом пространства $B(Y,\ X)$. При этом несомненно, что $ST + P = 1$ и $TS + Q = 1$.

$\Leftarrow$: Пусть S — почти обратный к T, т. е. $ST = 1 + K_X$ и $TS = 1 + K_Y$ для подходящих компактных операторов K_X и K_Y. Значит, $\ker T \subset \ker(1+K_X)$, т. е. $\ker T$ конечномерно в силу конечномерности $\ker(1 + K_X)$, обеспеченной 8.5.8. Помимо этого, $\operatorname{im} T \supset \operatorname{im}(1 + K_Y)$, т. е. из-за фредгольмовости $1 + K_Y$ образ T имеет конечную коразмерность. $\rhd$

8.5.15. *Следствие.* *Если $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ и $S \in B(Y,\ X)$ — почти обратный для T, то $S \in \mathscr{N}(Y,\ X)$.* $\lhd\rhd$

8.5.16. *Следствие.* *Произведение нётеровых операторов — это нётеров оператор.*

$\lhd$ Суперпозиция почти обратных операторов (в должном порядке) — почти обратный оператор к суперпозиции. $\rhd$

8.5.17. *Пусть задана точная последовательность*

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_{n-1} \to X_n \to 0$$

конечномерных векторных пространств. Тогда имеет место тождество Эйлера

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim X_k = 0.$$

$\lhd$ При $n = 1$ точность последовательности $0 \to X_1 \to 0$ означает, что $X_1 = 0$, а при $n = 2$ точность $0 \to X_1 \to X_2 \to 0$ эквивалентна изоморфности X_1 и X_2 (см. 2.3.5 (4)). Таким образом, тождество Эйлера при $n := 1,\ 2$ несомненно.

Допустим теперь, что для $m \le n - 1$, где $n > 2$, требуемое уже установлено. Точную последовательность

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_{n-2} \xrightarrow{T_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} X_n \to 0$$

можно сузить до точной последовательности

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_{n-2} \xrightarrow{T_{n-2}} \ker T_{n-1} \to 0.$$

По допущению выполнено

$$\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \dim X_k + (-1)^{n-1} \dim\ker T_{n-1} = 0.$$

Помимо этого, поскольку T_{n-1} является эпиморфизмом, имеем

$$\dim X_{n-1} = \dim\ker T_{n-1} + \dim X_n.$$

Окончательно получаем

$$0 = \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \dim X_k + (-1)^{n-1}(\dim X_{n-1} - \dim X_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \dim X_k. \ \rhd$$

8.5.18. *Теорема Аткинсона.* *Индекс произведения нётеровых операторов равен сумме индексов сомножителей.*

$\lhd$ Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ и $S \in \mathscr{N}(Y,\ Z)$. В силу 8.5.16, $ST \in \mathscr{N}(X,\ Z)$. Привлекая лемму о снежинке 2.3.16, имеем точную последовательность конечномерных пространств

$$0 \to \ker T \to \ker ST \to \ker S \to \operatorname{coker} T \to \operatorname{coker} ST \to \operatorname{coker} S \to 0.$$

На основании 8.5.17

$$\alpha(T) - \alpha(ST) + \alpha(S) - \beta(T) + \beta(ST) - \beta(S) = 0,$$

откуда $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$. $\rhd$

8.5.19. *Следствие.* *Пусть T — нётеров и S — почти обратный к T. Тогда* $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} S$.

$\lhd$ $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(1 + K)$ для некоторого компактного оператора K. По теореме 8.5.8, $1 + K$ — фредгольмов оператор. $\rhd$

8.5.20. *Теорема о компактных возмущениях.* *Нётеровость и индекс сохраняются при компактных возмущениях: если даны* $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ *и* $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$, *то* $T + K \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ *и* $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.

$\lhd$ Пусть S — почти обратный к T, т. е. для $K_X \in \mathscr{K}(X)$ и $K_Y \in \mathscr{K}(Y)$ выполнено

$$ST = 1 + K_X; \quad TS = 1 + K_Y$$

(существование S обеспечивает 8.5.14). Ясно, что

$$S(T + K) = ST + SK = 1 + K_X + SK \in 1 + \mathscr{K}(X);$$

$$(T + K)S = TS + KS = 1 + K_Y + KS \in 1 + \mathscr{K}(Y),$$

т. е. S — почти обратный к $T+K$. В силу 8.5.14, $T+K \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. При этом из 8.5.19 следуют равенства $\operatorname{ind}(T+K) = -\operatorname{ind} S$ и $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} S$. $\rhd$

8.5.21. *Теорема об ограниченных возмущениях.* *Нётеровость и индекс сохраняются при достаточно малых ограниченных возмущениях: множество* $\mathscr{N}(X,\ Y)$ *открыто в пространстве ограниченных операторов, причем индекс* $\operatorname{ind} : \mathscr{N}(X,\ Y) \to \mathbb{Z}$ *— непрерывная функция.*

$\lhd$ Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. По 8.5.14 найдутся операторы $S \in B(Y,\ X), K_X \in \mathscr{K}(X)$ и $K_Y \in \mathscr{K}(Y)$ такие, что

$$ST = 1 + K_X; \quad TS = 1 + K_Y.$$

Если $S = 0$, то пространства X и Y конечномерны по критерию Рисса 8.4.2, т. е. доказывать нечего — достаточно сослаться на 8.5.7 (2). Если же $S \neq 0$, то при всех $V \in B(X,\ Y)$, для которых $\|V\| < 1/\|S\|$, из неравенства 5.6.1 вытекает: $\|SV\| < 1$ и $\|VS\| < 1$. Значит, в силу 5.6.10 операторы $1 + SV$ и $1 + VS$ обратимы в $B(X)$ и в $B(Y)$ соответственно.

Имеем

$$(1 + SV)^{-1}S(T + V) = (1 + SV)^{-1}(1 + K_X + SV) =$$

$$= 1 + (1 + SV)^{-1}K_X \in 1 + \mathscr{K}(X),$$

т. е. $(1+SV)^{-1}S$ — левый регуляризатор $T+V$. Аналогично проверяется, что $S(1+VS)^{-1}$ — правый регуляризатор $T+V$. В самом деле,

$$(T+V)S(1+VS)^{-1} = (1+K_Y+VS)(1+VS)^{-1} =$$

$$= 1 + K_Y(1+VS)^{-1} \in 1 + \mathscr{K}(Y).$$

По 8.5.12, $T+V$ почти обратим. На основании 8.5.14, $T+V \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. Этим доказана открытость $\mathscr{N}(X,\ Y)$. Учитывая, что регуляризаторы нётерова оператора почти обратны к нему (ср. 8.5.12), из 8.5.19 и 8.5.18 получаем

$$\operatorname{ind}(T+V) = -\operatorname{ind}((1+SV)^{-1}S) =$$

$$= -\operatorname{ind}(1+SV)^{-1} - \operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$$

(ибо $(1+SV)^{-1}$ фредгольмов по 8.5.7 (1)). Последнее и означает непрерывность индекса. ▷

8.5.22. *Критерий Никольского.* *Оператор фредгольмов в том и только в том случае, если он представляет собой сумму обратимого и компактного операторов.*

◁ $\Rightarrow$: Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ и $\operatorname{ind} T = 0$. Рассмотрим разложения в прямые суммы банаховых пространств $X = X_1 \oplus \ker T$ и $Y = \operatorname{im} T \oplus Y_1$. Несомненно, что оператор T_1 — след оператора T на X_1 — осуществляет изоморфизм X_1 и $\operatorname{im} T$. Помимо этого, в силу 8.5.5, $\dim Y_1 = \beta(T) = \alpha(T)$, т. е. существует естественный изоморфизм $\mathrm{Id} : \ker T \to Y_1$. Таким образом, T допускает матричное представление

$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

$\Leftarrow$: Если $T := S + K$, где $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$ и $S^{-1} \in B(Y,\ X)$, то, по 8.5.20 и 8.5.7 (1), $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(S+K) = \operatorname{ind} S = 0$. ▷

8.5.23. Замечание. Пусть $\operatorname{Inv}(X,\ Y)$ — множество обратимых операторов из X в Y (это множество открыто по теореме Банаха об обратимых операторах 5.6.12). Обозначим $\mathscr{F}(X,\ Y)$ множество всех фредгольмовых операторов, действующих из X в Y. Критерий Никольского теперь можно переписать в следующей форме:

$$\mathscr{F}(X,\ Y) = \mathrm{Inv}(X,\ Y) + \mathscr{K}(X,\ Y).$$

Как видно из доказательства 8.5.22, можно утверждать также, что

$$\mathscr{F}(X,\ Y) = \mathrm{Inv}(X,\ Y) + F(X,\ Y),$$

где, как обычно, $F(X,\ Y)$ — подпространство конечномерных операторов в пространстве $B(X,\ Y)$. $\lhd\rhd$

Упражнения

8.1. Изучить интеграл Рисса — Данфорда в конечномерном пространстве.

8.2. Описать ядро интеграла Рисса — Данфорда.

8.3. Пусть (f_n) — функции, голоморфные в окрестности U спектра оператора T. Доказать, что из равномерной сходимости (f_n) к нулю на U вытекает сходимость $(f_n(T))$ к нулю в операторной норме.

8.4. Пусть σ — изолированная часть спектра оператора T. Допустим, что часть $\sigma' := \mathrm{Sp}(T) \setminus \sigma$ отделяется от σ окружностью с центром в a и радиусом r таким образом, что $\sigma \subset \{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| < r\}$. Доказать, что для проектора Рисса P_σ выполнено

$$P_\sigma = \lim_n\,(1 - z^{-n}(T-a)^n)^{-1};$$

$$x \in \mathrm{im}(P_\sigma) \Leftrightarrow \limsup_n \|(a-T)^n x\|^{\frac{1}{n}} < r.$$

8.5. Выяснить, при каких условиях компактен проектор.

8.6. Доказать, что каждое замкнутое подпространство, содержащееся в области значения компактного оператора в банаховом пространстве, конечномерно.

8.7. Доказать, что линейный оператор переводит каждое замкнутое линейное подпространство в замкнутое множество в том и только в том случае, если этот оператор нормально разрешим и его ядро конечномерно или коконечномерно (имеет конечномерное алгебраическое дополнение).

8.8. Пусть $1 \leq p < r < +\infty$. Доказать, что каждый ограниченный оператор из l_r в l_p и из c_0 в l_p является компактным.

8.9. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Для оператора T из $B(H)$ и гильбертова базиса (e_n) норму Гильберта — Шмидта определяют соотношением

$$\|T\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

(Проверить корректность!) Операторы с конечной нормой Гильберта — Шмидта называют *операторами Гильберта — Шмидта*. Установить, что оператор T является оператором Гильберта — Шмидта в том и только в том случае, если он компактен и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$, где (λ_n) — собственные числа оператора $(T^*T)^{1/2}$.

8.10. Пусть T — некоторый эндоморфизм. Тогда

$$\operatorname{im}(T^0) \supset \operatorname{im}(T^1) \supset \operatorname{im}(T^2) \supset \dots .$$

Если существует номер n такой, что $\operatorname{im}(T^n) = \operatorname{im}(T^{n+1})$, то говорят, что T имеет *конечный спуск*. Наименьший номер n начала стабилизации называют спуском T и обозначают $d(T)$. Аналогично для ядер

$$\ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \ker(T^2) \subset \dots$$

вводят понятие *подъема* и обозначение $a(T)$. Установить, что у оператора T с конечными спуском и подъемом величины $a(T)$ и $d(T)$ совпадают.

8.11. Оператор T называют *оператором Рисса — Шаудера*, если T нётеров и имеет конечные спуск и подъем. Доказать, что оператор T является оператором Рисса — Шаудера в том и только в том случае, если его можно представить в виде $T = U + V$, где U обратим, V конечномерен (или компактен) и коммутирует с U.

8.12. Пусть T — ограниченный эндоморфизм банахова пространства X с конечными спуском и подъемом $r := a(T) = d(T)$. Доказать, что подпространства $\operatorname{im}(T^r)$ и $\ker(T^r)$ замкнуты, разложение

$$X = \ker(T^r) \oplus \operatorname{im}(T^r)$$

приводит T и след оператора T на $\operatorname{im}(T^r)$ обратим.

8.13. Пусть T — нормально разрешимый оператор. Если конечна одна из величин

$$\alpha(T) := \dim \ker T, \quad \beta(T) := \dim \operatorname{coker} T,$$

то T называют *полуфредгольмовым* (реже *полунётеровым*). Положим

$$\Phi_+(X) := \{T \in B(X) : \ \operatorname{im}\ T \in \operatorname{Cl}(X),\ \alpha(T) < +\infty\};$$

$$\Phi_-(X) := \{T \in B(X) : \ \operatorname{im} T \in \operatorname{Cl}(X),\ \beta(T) < +\infty\}.$$

Доказать, что

$$T \in \Phi_+(X) \Leftrightarrow T' \in \Phi_-(X');$$
$$T \in \Phi_-(X) \Leftrightarrow T' \in \Phi_+(X').$$

8.14. Пусть T — ограниченный эндоморфизм. Доказать, что T входит в $\Phi_+(X)$ в том и только в том случае, если для любого ограниченного, но не вполне ограниченного множества U его образ $T(U)$ не будет вполне ограниченным множеством в X.

8.15. Ограниченный эндоморфизм T банахова пространства называют *оператором Рисса*, если для каждого комплексного ненулевого λ оператор $(\lambda - T)$ нётеров. Доказать, что T является оператором Рисса в том и только в том случае, если для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ выполнено:

(а) оператор $(\lambda - T)$ имеет конечные спуск и подъем;
(б) ядро $(\lambda - T)^k$ конечномерно для каждого $k \in \mathbb{N}$;
(в) образ $(\lambda - T)^k$ имеет конечный дефект при $k \in \mathbb{N}$,

и, кроме того, ненулевые точки спектра T являются собственными числами, а нуль служит единственно возможной точкой накопления спектра T (= вне каждого круга с центром в нуле лежит конечное число точек спектра).

8.16. Установить изометрические изоморфизмы: $(X/Y)' \simeq Y^{\perp}$ и $X'/Y^{\perp} \simeq Y'$ для таких банаховых пространств X и Y, что Y вложено в X.

8.17. Доказать, что для нормального оператора T в гильбертовом пространстве и голоморфной функции $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$ оператор $f(T)$ нормален.

8.18. Убедиться, что непрерывный эндоморфизм гильбертова пространства является оператором Рисса в том и только в том случае, если он представляет собой сумму компактного и квазинильпотентного операторов (квазинильпотентность означает тривиальность спектрального радиуса).

8.19. Пусть A, B — два фредгольмовых оператора в $B(X,\ Y)$. Если $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$, то имеется жорданова дуга, соединяющая A и B в пространстве $B(X,\ Y)$.

Глава 9

Экскурс в общую топологию

9.1. Предтопологии и топологии

9.1.1. Определение. Пусть X — некоторое множество. Отображение $\tau : X \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ называют *предтопологией* на X, если

(1) $x \in X \Rightarrow \tau(x)$ — фильтр в X;

(2) $x \in X \Rightarrow \tau(x) \subset \mathrm{fil}\{x\}$.

Элементы $\tau(x)$ называют (*пред*)*окрестностями* x. Пару $(X,\ \tau)$ (а часто и множество X) называют *предтопологическим пространством.*

9.1.2. Определение. Пусть $\mathscr{T}(X)$ — совокупность всех предтопологий на X. Если $\tau_1,\ \tau_2 \in \mathscr{T}(X)$, то говорят, что τ_1 *сильнее* τ_2 (и пишут $\tau_1 \geq \tau_2$) при выполнении условия: $x \in X \Rightarrow \tau_1(x) \supset \tau_2(x)$.

9.1.3. *Множество $\mathscr{T}(X)$ с отношением «сильнее» представляет собой полную решетку.*

$\lhd$ Если $X = \varnothing$, то $\mathscr{T}(X) = \{\varnothing\}$ и доказывать ничего не надо. Если же $X \neq \varnothing$, то следует сослаться на 1.3.13. $\rhd$

9.1.4. Определение. Множество G в X называют *открытым*, если оно является (пред)окрестностью каждой своей точки (символически: $G \in \mathrm{Op}(\tau) \Leftrightarrow (\forall\, x \in G)(G \in \tau(x))$). Множество F в X называют *замкнутым*, если его дополнение открыто (символически: $F \in \mathrm{Cl}(\tau) \Leftrightarrow X \setminus F \in \mathrm{Op}(\tau)$).

9.1.5. *Объединение любого семейства и пересечение конечного семейства открытых множеств суть множества открытые. Пересече-*

ние любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых множеств суть множества замкнутые. $\triangleleft\triangleright$

9.1.6. *Пусть $(X,\ \tau)$ — предтопологическое пространство. Если $x \in X$, то положим*

$$U \in t(\tau)(x) \Leftrightarrow (\exists V \in \operatorname{Op}(\tau)) \quad x \in V \ \&\ U \supset V.$$

Отображение $t(\tau) : x \mapsto t(\tau)(x)$ — предтопология на X. $\triangleleft\triangleright$

9.1.7. Определение. Предтопологию τ на X называют *топологией*, если $\tau = t(\tau)$. Пару $(X,\ \tau)$ (а часто и множество X) в этом случае называют *топологическим пространством*. Множество всех топологий на X обозначают символом $\mathrm{T}(X)$.

9.1.8. Примеры.

(1) Метрическая топология.

(2) Топология мультинормированного пространства.

(3) Пусть $\tau_\circ := \inf \mathscr{T}(X)$. Ясно, что $\tau_\circ(x) = \{X\}$ для $x \in X$. Значит, $\operatorname{Op}(\tau_\circ) = \{\varnothing,\ X\}$ и, следовательно, $\tau_\circ = t(\tau_\circ)$, т. е. $\tau_\circ$ — топология. Эту топологию называют *тривиальной* или *антидискретной*.

(4) Пусть $\tau^\circ := \sup \mathscr{T}(X)$. Ясно, что $\tau^\circ(x) = \operatorname{fil}\{x\}$ для $x \in X$. Значит, $\operatorname{Op}(\tau^\circ) = 2^X$ и, следовательно, $\tau^\circ = t(\tau^\circ)$, т. е. τ° — топология. Эту топологию называют *дискретной*.

(5) *Пусть* Op *— совокупность подмножеств в X, выдерживающая образование объединения любого и пересечения конечного семейств. Тогда существует, и притом единственная, топология τ на X такая, что* $\operatorname{Op}(\tau) = \operatorname{Op}$.

$\triangleleft$ Положим $\tau(x) := \operatorname{fil}\{V \in \operatorname{Op} :\ x \in V\}$ для $x \in X$ (в случае $X = \varnothing$ доказывать нечего). Отметим, что $\tau(x) \neq \varnothing$ в силу того, что пересечение пустого семейства совпадает с X (ср.: $\inf \varnothing = +\infty$). Из построения выводим, что $t(\tau) = \tau$ и при этом $\operatorname{Op} \subset \operatorname{Op}(\tau)$. Если же $G \in \operatorname{Op}(\tau)$, то $G = \cup\{V :\ V \in \operatorname{Op},\ V \subset G\}$ и, стало быть, $G \in \operatorname{Op}$ по условию. Утверждение об единственности не вызывает сомнений. $\triangleright$

9.1.9. *Пусть отображение $t : \mathscr{T}(X) \to \mathscr{T}(X)$ определено правилом $t : \tau \mapsto t(\tau)$. Тогда*

(1) $\operatorname{im} t = \mathrm{T}(X)$, *т. е.* $\tau \in \mathscr{T}(X) \Rightarrow t(\tau) \in \mathrm{T}(X)$;

(2) $\tau_1 \le \tau_2 \Rightarrow t(\tau_1) \le t(\tau_2)$ $(\tau_1,\ \tau_2 \in \mathscr{T}(X))$;
(3) $t \circ t = t$;
(4) $\tau \in \mathscr{T}(X) \Rightarrow t(\tau) \le \tau$;
(5) $\mathrm{Op}(\tau) = \mathrm{Op}(t(\tau))$ $(\tau \in \mathscr{T}(X))$.

$\triangleleft$ Включение $\mathrm{Op}(\tau) \supset \mathrm{Op}(t(\tau))$ справедливо потому, что быть открытым множеством относительно τ легче. Обратное включение $\mathrm{Op}(\tau) \subset \mathrm{Op}(t(\tau))$ следует из определения $t(\tau)$. Равенство $\mathrm{Op}(\tau) = \mathrm{Op}(t(\tau))$ делает все очевидным. $\triangleright$

9.1.10. *Предтопология τ является топологией в X в том и только в том случае, если для $x \in X$ выполнено*

$$(\forall U \in \tau(x))(\exists V \in \tau(x)\ \&\ V \subset U)\ (\forall y)(y \in V \Rightarrow V \in \tau(y)).$$

$\triangleleft$ Вытекает из 9.1.9 (5). $\triangleright$

9.1.11. *Пусть $\tau_1,\ \tau_2 \in \mathrm{T}(X)$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $\tau_1 \ge \tau_2$;
(2) $\mathrm{Op}(\tau_1) \supset \mathrm{Op}(\tau_2)$;
(3) $\mathrm{Cl}(\tau_1) \supset \mathrm{Cl}(\tau_2)$. $\triangleleft\triangleright$

9.1.12. Замечание. Как видно из 9.1.8 (5) и 9.1.11, топология пространства однозначно определена совокупностью всех своих открытых множеств. Поэтому множество $\mathrm{Op}(\tau)$ также называют *топологией* пространства X. В частности, совокупность открытых множеств предтопологического пространства $(X,\ \tau)$ определяет в X структуру топологического пространства $(X,\ t(\tau))$ с тем же запасом открытых множеств. В этой связи топологию $t(\tau)$ обычно называют *топологией, ассоциированной с предтопологией* τ.

9.1.13. *Теорема.* *Множество $\mathrm{T}(X)$ топологий на X с отношением «сильнее» представляет собой полную решетку. При этом для любого множества $\mathscr{E}$ в $\mathrm{T}(X)$ выполнено*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}.$$

$\triangleleft$ Имеем

$$t(\sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}) \ge \sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} t(\mathscr{E}) \ge \sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E} \ge t(\sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}).$$

Таким образом, $\tau := \sup_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}$ входит в $\mathrm{T}(X)$. Ясно, что $\tau \ge \mathscr{E}$. Помимо этого, если $\tau_0 \ge \mathscr{E}$ и $\tau_0 \in \mathrm{T}(X)$, то $\tau_0 \ge \tau$ и, стало быть, $\tau = \sup_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}$. Осталось сослаться на 1.2.14. $\triangleright$

9.1.14. Замечание. Для точной нижней границы явная формула сложнее:

$$\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E} = t(\inf_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}).$$

В то же время, если в соответствии с 9.1.12 топологии заданы указанием систем открытых множеств, то ситуация упрощается:

$$U \in \mathrm{Op}(\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}) \Leftrightarrow (\forall\, \tau \in \mathscr{E})\ \ U \in \mathrm{Op}(\tau).$$

Иными словами,

$$\mathrm{Op}(\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}) = \bigcap_{\tau \in \mathscr{E}} \mathrm{Op}(\tau).$$

В этой связи часто говорят и о *пересечении топологий* (а не только об их точной нижней границе). ◁▷

9.2. Непрерывность

9.2.1. Замечание. Наличие топологии в пространстве, очевидно, позволяет говорить о таких вещах, как внутренность и замыкание множеств, сходимость фильтров и обобщенных последовательностей и т. п. Этим обстоятельством мы уже пользовались при знакомстве с мультинормированными пространствами. Отметим полноты ради, что в топологическом пространстве справедливы следующие аналоги 4.1.19 и 4.2.1.

9.2.2. *Теорема Биркгофа.* *Для непустого множества и точки топологического пространства эквивалентны утверждения*:

(1) *данная точка есть точка прикосновения множества*;

(2) *существует некоторый фильтр, содержащий множество и сходящийся к данной точке*;

(3) *существует обобщенная последовательность элементов множества, сходящаяся к данной точке.* ◁▷

9.2.3. *Для отображения f одного топологического пространства в другое эквивалентны утверждения*:

(1) *прообраз открытого множества открыт*;

(2) *прообраз замкнутого множества замкнут*;

(3) *образ фильтра окрестностей произвольной точки x тоньше чем фильтр окрестностей точки $f(x)$*;

(4) *для произвольной точки x каждый фильтр, сходящийся к x, отображение f переводит в фильтр, сходящийся к $f(x)$;*

(5) *обобщенные последовательности, сходящиеся к произвольной точке x, отображение f переводит в обобщенные последовательности, сходящиеся к $f(x)$.* $\triangleleft\triangleright$

9.2.4. Определение. Отображение, действующее из одного топологического пространства в другое, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 9.2.3 (1)–9.2.3 (5), называют *непрерывным*.

9.2.5. Замечание. Если $f : (X,\ \tau_X) \to (Y,\ \tau_Y)$ и 9.2.3 (5) выполнено для фиксированной точки $x \in X$, то иногда говорят, что f *непрерывно в точке* x (ср. 4.2.2). Нужно видеть, что отличие понятия непрерывности в точке от общего понятия непрерывности условно. Именно, если положить $\tau_x(x) := \tau_X(x)$ и $\tau_x(\overline{x}) := \mathrm{fil}\,\{\overline{x}\}$ для $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \neq x$, то непрерывность f в точке x (относительно топологии τ_X в X) равносильна непрерывности $f : (X,\ \tau_x) \to (Y,\ \tau_Y)$ (в каждой точке пространства X с топологией τ_x). $\triangleleft\triangleright$

9.2.6. *Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{T}(X)$. Тогда $\tau_1 \geq \tau_2$ в том и только в том случае, если $I_X : (X,\ \tau_1) \to (X,\ \tau_2)$ непрерывно.* $\triangleleft\triangleright$

9.2.7. *Пусть $f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega)$ — непрерывное отображение и $\tau_1 \in \mathrm{T}(X)$ и $\omega_1 \in \mathrm{T}(Y)$ таковы, что $\tau_1 \geq \tau$ и $\omega \geq \omega_1$. Тогда $f : (X,\ \tau_1) \to (Y,\ \omega_1)$ непрерывно.*

$\triangleleft$ Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{f} & (Y,\omega) \\ I_X \uparrow & & \downarrow I_Y \\ (X,\tau_1) & \xrightarrow{f} & (Y,\omega_1) \end{array}$$

Осталось отметить, что суперпозиция непрерывных отображений непрерывна. $\triangleright$

9.2.8. ***Теорема о прообразе топологии.*** *Пусть $f : X \to (Y,\ \omega)$. Положим*

$$T_0 := \{\tau \in \mathrm{T}(X) :\ f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega) \text{ непрерывно}\}.$$

Тогда топология $f^{-1}(\omega) := \inf T_0$ входит в T_0.

$\triangleleft$ Из 9.2.3 (1) вытекает

$$\tau \in T_0 \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow f^{-1}(\omega(f(x))) \subset \tau(x)).$$

Пусть $\overline{\tau}(x) := f^{-1}(\omega(f(x)))$. Несомненно, что $t(\overline{\tau}) = \overline{\tau}$. Помимо этого, $f(\overline{\tau}(x)) = f(f^{-1}(\omega(f(x)))) \supset \omega(f(x))$, т. е. $\overline{\tau} \in T_0$ по 9.2.3 (3). Таким образом, выполнено: $f^{-1}(\omega) = \overline{\tau}$. $\triangleright$

9.2.9. Определение. Топологию $f^{-1}(\omega)$ называют *прообразом топологии* ω при отображении f.

9.2.10. Замечание. Теорему 9.2.8 часто выражают словами: «прообраз топологии при данном отображении — это слабейшая топология в области определения, в которой отображение непрерывно». При этом, как видно, например, из 9.1.14, открытые множества в прообразе топологии — это прообразы открытых множеств. В частности, $(x_\xi \to x$ в $f^{-1}(\omega)) \Leftrightarrow (f(x_\xi) \to f(x)$ в $\omega)$; аналогично $(\mathscr{F} \to x$ в $f^{-1}(\omega)) \Leftrightarrow (f(\mathscr{F}) \to f(x)$ в $\omega)$ для фильтра $\mathscr{F}$. $\triangleleft\triangleright$

9.2.11. *Теорема об образе топологии.* *Пусть $f : (X,\ \tau) \to Y$. Положим $\Omega_0 := \{\omega \in \mathrm{T}(Y) :\ f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega)$ непрерывно$\}$. Тогда топология $f(\tau) := \sup \Omega_0$ входит в Ω_0.*

$\triangleleft$ В силу 9.1.13 для $y \in Y$ выполнено

$$f(\tau)(y) = (\sup\nolimits_{\mathrm{T}(Y)} \Omega_0)(y) = (\sup\nolimits_{\mathscr{F}(Y)} \Omega_0)(y) = \sup\{\omega(y) :\ \omega \in \Omega_0\}.$$

На основании 9.2.3 (3)

$$\omega \in \Omega_0 \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow f(\tau(x)) \supset \omega(f(x))).$$

Сопоставляя приведенные формулы, видим, что $f(\tau) \in \Omega_0$. $\triangleright$

9.2.12. Определение. Топологию $f(\tau)$ называют *образом топологии* τ при отображении f.

9.2.13. Замечание. Теорему 9.2.11 часто выражают словами: «образ топологии при данном отображении — это сильнейшая топология в области прибытия, в которой отображение непрерывно».

9.2.14. *Теорема.* *Пусть $(f_\xi : X \to (Y_\xi,\ \omega_\xi))_{\xi \in \Xi}$ — семейство отображений. Пусть, далее, $\tau := \sup_{\xi \in \Xi} f_\xi^{-1}(\omega_\xi)$. Тогда τ — слабейшая (= наименьшая) топология в X, в которой непрерывны все отображения f_ξ $(\xi \in \Xi)$.*

◁ Привлекая 9.2.8, имеем

$$(f_\xi : (X,\ \overline{\tau}) \to (Y_\xi,\ \omega_\xi) \text{ непрерывно}) \ \Leftrightarrow\ \overline{\tau} \geq f_\xi^{-1}(\omega_\xi).\ \triangleright$$

9.2.15. *Теорема.* *Пусть* $(f_\xi : (X_\xi,\ \tau_\xi) \to Y)_{\xi\in\Xi}$ — *семейство отображений. Пусть, далее,* $\omega := \inf_{\xi\in\Xi} f_\xi(\tau_\xi)$. *Тогда* ω — *сильнейшая (= наибольшая) топология в* Y, *в которой непрерывны все отображения* f_ξ $(\xi \in \Xi)$.

◁ Апеллируя к 9.2.11, заключаем:

$$(f_\xi : (X_\xi,\ \tau_\xi) \to (Y,\ \overline{\omega}) \text{ непрерывно}) \ \Leftrightarrow\ \overline{\omega} \leq f_\xi(\tau_\xi).\ \triangleright$$

9.2.16. Замечание. Утверждения 9.2.14 и 9.2.15 часто называют *теоремами о задании топологии* требованием непрерывности семейства отображений.

9.2.17. Примеры.

(1) Пусть $(X,\ \tau)$ — топологическое пространство и X_0 — подмножество в X. Обозначим $\iota : X_0 \to X$ вложение X_0 в X. Пусть $\tau_0 := \iota^{-1}(\tau)$. Топологию τ_0 называют *индуцированной* (τ в X_0), а пространство $(X_0,\ \tau_0)$ — *подпространством* $(X,\ \tau)$.

(2) Пусть $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это семейство топологических пространств. Пусть, далее, $\mathfrak{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение семейства множеств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Положим $\tau := \sup_{\xi\in\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi)$, где $\mathrm{Pr}_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ — координатный проектор, $\mathrm{Pr}_\xi\, x = x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Топологию τ называют *топологией произведения*, или *произведением топологий* $(\tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$, или *тихоновской топологией*. Пространство $(\mathfrak{X},\ \tau)$ называют *тихоновским произведением* рассматриваемых топологических пространств. В частности, если $X_\xi := [0,\ 1]$ для всех $\xi \in \Xi$, то $\mathfrak{X} := [0,\ 1]^\Xi$ (с тихоновской топологией) называют *тихоновским кубом*. При $\Xi := \mathbb{N}$ говорят о *гильбертовом кирпиче*.

9.3. Типы топологических пространств

9.3.1. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *одноточечные множества замкнуты*;

(2) *пересечение всех окрестностей каждой точки пространства состоит только из этой точки*;

(3) *у каждой из любых двух точек пространства есть окрестность, не содержащая другой точки.*

$\lhd$ Для доказательства достаточно заметить, что

$$y \in \mathrm{cl}\{x\} \Leftrightarrow (\forall V \in \tau(y)) \quad x \in V \Leftrightarrow x \in \cap\{V :\ V \in \tau(y)\},$$

где x, y — точки топологического пространства $(X,\ \tau)$. $\rhd$

9.3.2. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 9.3.1 (1)–9.3.1 (3), называют *отделимым* или T_1-*пространством.* Топологию T_1-пространства называют *отделимой* (реже — T_1-*топологией*, еще реже — *достижимой* топологией).

9.3.3. Замечание. Часто образно говорят: «T_1-пространство — это пространство с замкнутыми точками».

9.3.4. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *каждый фильтр имеет не более одного предела*;

(2) *пересечение всех замкнутых окрестностей произвольной точки пространства состоит только из этой точки*;

(3) *у любых двух точек пространства имеются непересекающиеся окрестности.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Если $y \in \cap_{U \in \tau(x)} \mathrm{cl}\, U$, то для всякого $V \in \tau(y)$ будет, что $U \cap V \neq \varnothing$, как только $U \in \tau(x)$. Таким образом, есть точная верхняя граница $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \tau(y)$. Несомненно, $\mathscr{F} \to x$ и $\mathscr{F} \to y$. По условию имеем $x = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $x,\ y \in X,\ x \neq y$ (если таких точек нет, то либо $X = \varnothing$, либо X состоит из одной точки и доказывать ничего не надо). Найдется окрестность $U \in \tau(x)$ такая, что $U = \mathrm{cl}\, U$ и $y \neq U$. Значит, дополнение V множества U до X открыто. Помимо этого, $U \cap V = \varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X. Если $\mathscr{F} \to x$ и $\mathscr{F} \to y$, то $\mathscr{F} \supset \tau(x)$ и $\mathscr{F} \supset \tau(y)$. Стало быть, для $U \in \tau(x)$ и $V \in \tau(y)$ выполнено $U \cap V \neq \varnothing$. Последнее означает, что $x = y$. $\rhd$

9.3.5. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а потому и любому) из эквивалентных условий 9.3.4 (1)–9.3.4 (3), называют *хаусдорфовым* или T_2-*пространством.* Естественный смысл вкладывают в термин «хаусдорфова топология».

9.3.6. Замечание. Часто образно говорят: «T_2-пространство — это пространство, в котором предел единствен».

9.3.7. Определение. Пусть U, V — множества в топологическом пространстве. Говорят, что V — ***окрестность*** U, если $\operatorname{int} V \supset U$.

9.3.8. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *пересечение всех замкнутых окрестностей произвольного замкнутого множества состоит только из элементов этого множества;*

(2) *фильтр окрестностей произвольной точки имеет базис, состоящий из замкнутых множеств;*

(3) *у любой точки и у любого замкнутого множества, не содержащего этой точки, имеются непересекающиеся окрестности.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Если $x \in X$ и $U \in \tau(x)$, то $V := X \setminus \operatorname{int} U$ замкнуто и $x \notin V$. По условию найдется множество $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$, для которого $x \notin F$ и $\operatorname{int} F \supset V$. Положим $G := X \setminus F$. Ясно, что $G \in \tau(x)$. При этом $G \subset X \setminus \operatorname{int} F = \operatorname{cl}(X \setminus \operatorname{int} F) \subset X \setminus V \subset \operatorname{int} U \subset U$. Следовательно, $\operatorname{cl} G \subset U$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Если $x \in X$ и $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$, причем $x \notin F$, то $X \setminus F \in \tau(x)$. Стало быть, имеется окрестность $U = \operatorname{cl} U \in \tau(x)$, содержащаяся в $X \setminus F$. Таким образом, $X \setminus U$ — окрестность F, не пересекающаяся с U.

(3) $\Rightarrow$ (1): Если $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$ и $\operatorname{int} G \supset F \Rightarrow y \in \operatorname{cl} G$, то для каждого $U \in \tau(y)$ и всякой окрестности G множества F выполнено $U \cap G \neq \varnothing$. Последнее означает, что $y \in F$. $\rhd$

9.3.9. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 9.3.8 (1)–9.3.8 (3), называют ***T_3-пространством.*** Отделимое T_3-пространство называют ***регулярным.***

9.3.10. ***Малая лемма Урысона.*** *Для топологического пространства эквивалентны утверждения:*

(1) *фильтр окрестностей каждого непустого замкнутого множества имеет базис, состоящий из замкнутых множеств;*

(2) *у произвольных двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся окрестности.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть F_1, F_2 — замкнутые множества пространства X, причем $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Пусть $G := X \setminus F_1$. Очевидно, G открыто и $G \supset F_2$. Если $F_2 = \varnothing$, то доказывать ничего не надо. Значит, можно считать, что $F_2 \neq \varnothing$. Тогда найдется замкнутое множество V_2 такое, что $G \supset V_2 \supset \operatorname{int} V_2 \supset F_2$. Положим $V_1 := X \setminus V_2$. Ясно, что V_1 открыто, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. При этом $V_1 \supset X \setminus G = X \setminus (X \setminus F_1) = F_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $F = \operatorname{cl} F$, $G = \operatorname{int} G$ и $G \supset F$. Положим $F_1 := X \setminus G$. Тогда $F_1 = \operatorname{cl} F_1$ и, стало быть, имеются открытые множества U и U_1, для которых $U \cap U_1 = \varnothing$, причем $F \subset U$ и $F_1 \subset U_1$. Наконец, $\operatorname{cl} U \subset X \setminus U_1 \subset X \setminus F_1 = G$. $\rhd$

9.3.11. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а тогда и другому) из эквивалентных условий 9.3.10 (1), 9.3.10 (2), называют *T_4-пространством*. Отделимое T_4-пространство называют *нормальным*.

9.3.12. Лемма о непрерывности функции, заданной лебеговыми множествами. *Пусть множество T плотно в $\overline{\mathbb{R}}$ и $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ — семейство подмножеств топологического пространства X. Существует, и притом единственная, непрерывная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \le t\} \quad (t \in T)$$

в том и только в том случае, если

$$t,\ s \in T,\ t < s \Rightarrow \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s.$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: При $t < s$ ввиду замкнутости $\{f \le t\}$ и открытости $\{f < s\}$ справедливы включения

$$\operatorname{cl} U_t \subset \{f \le t\} \subset \{f < s\} \subset \operatorname{int} U_s.$$

$\Leftarrow$: Так как $U_t \subset \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s \subset U_s$ при $t < s$, то семейство $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ возрастает. Поэтому существование f следует из 3.8.2 (а единственность — из 3.8.4). Рассмотрим семейства $t \mapsto V_t := \operatorname{cl} U_t$ и $t \mapsto W_t := \operatorname{int} U_t$. Эти семейства возрастают. Значит, вновь применяя 3.8.2, найдем функции $g,\ h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такие, что для всех $t \in T$ выполнено

$$\{g < t\} \subset V_t \subset \{g \le t\}, \quad \{h < t\} \subset W_t \subset \{h \le t\}.$$

Если $t,\ s \in T,\ t < s$, то ввиду 3.8.3

$$W_t = \operatorname{int} U_t \subset U_t \subset U_s \Rightarrow f \le h;$$
$$V_t = \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s = W_s \Rightarrow h \le g;$$
$$U_t \subset U_s \subset \operatorname{cl} U_s = V_s \Rightarrow g \le f.$$

Окончательно $f = g = h$. Учитывая 3.8.4 и 9.1.5, для $t \in \overline{\mathbb{R}}$ имеем

$$\{f < t\} = \{h < t\} = \cup\{W_s :\ s < t,\ s \in T\} \in \operatorname{Op}(\tau_X);$$
$$\{f \le t\} = \{g \le t\} = \cap\{V_s :\ t < s,\ s \in T\} \in \operatorname{Cl}(\tau_X).$$

Указанные вхождения очевидно обеспечивают непрерывность f. $\triangleright$

9.3.13. *Большая лемма Урысона.* *Пусть X — некоторое T_4-пространство. Пусть, далее, F — замкнутое множество в X и G — его окрестность. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in F$ и $f(x) = 1$ при $x \notin G$.*

$\triangleleft$ Положим $U_t := \varnothing$ при $t < 0$ и $U_t := X$ при $t > 1$. Следует определить U_t для точек из множества $\overline{T}$ «двоично-рациональных точек отрезка $[0,\ 1]$», т. е. $\overline{T} := \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, где $T_n := \{k2^{-n+1} : k := 0,\ 1, \dots, 2^{n-1}\}$, так, чтобы для семейства $t \mapsto U_t$ $(t \in T := \overline{T} \cup (\overline{\mathbb{R}} \setminus [0,\ 1]))$ были выполнены условия 9.3.12. Соответствующее построение проведем по индукции.

Если $t \in T_1$, т. е. $t \in \{0,\ 1\}$, то полагаем $U_0 := F$, $U_1 := G$. Допустим теперь, что для $t \in T_n$ при $n \ge 1$ множество U_t построено, причем $\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s$, как только $t,\ s \in T_n$ и $t < s$. Возьмем $t \in T_{n+1}$ и найдем ближайшие к t точки в T_n, т. е.

$$t_l := \sup\{s \in T_n :\ s \le t\};$$
$$t_r := \inf\{s \in T_n :\ t \le s\}.$$

Если $t = t_l$ или $t = t_r$, то U_t уже есть. Если же $t \ne t_l$ и $t \ne t_r$, то $t_l < t < t_r$ и по предположению $\operatorname{cl} U_{t_l} \subset \operatorname{int} U_{t_r}$. В силу 9.3.11 имеется замкнутое множество U_t такое, что

$$\operatorname{cl} U_{t_l} \subset \operatorname{int} U_t \subset U_t = \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_{t_r}.$$

Осталось показать, что возникающее семейство удовлетворяет требуемым условиям.

Итак, пусть $t,\ s \in T_{n+1}$, причем $t < s$. Если $t_r = s_l$, то при $s > s_l$ по построению

$$\mathrm{cl}\, U_t \subset \mathrm{cl}\, U_{t_r} = \mathrm{cl}\, U_{s_l} \subset \mathrm{int}\, U_s.$$

Аналогично при $t < t_r = s_l$ выполнено

$$\mathrm{cl}\, U_t \subset \mathrm{int}\, U_{t_r} = \inf U_{s_l} \subset \mathrm{int}\, U_s.$$

Если же $t_r < s_l$, то, учитывая сделанное допущение, выводим

$$\mathrm{cl}\, U_t \subset \mathrm{cl}\, U_{t_r} \subset \mathrm{int}\, U_{s_l} \subset \mathrm{int}\, U_s,$$

что и нужно. $\triangleright$

9.3.14. *Теорема Урысона.* *Топологическое пространство X является T_4-пространством в том и только в том случае, если каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества $F_1,\ F_2$ в X, найдется непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для $x \in F_1$ и $f(x) = 1$ для $x \in F_2$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следует применить 9.3.13 при $F := F_1$ и $G := X \setminus F_2$.

$\Leftarrow$: Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и F_1, F_2 замкнуты, то множества $G_1 := \{f < 1/2\}$ и $G_2 := \{f > 1/2\}$ для соответствующей функции f открыты и не пересекаются; $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$. $\triangleright$

9.3.15. Определение. Топологическое пространство X *называют $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством*, если для произвольной точки $x \in X$ и замкнутого множества F, не содержащего x, имеется непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 1$ и $y \in F \Rightarrow f(y) = 0$. Отделимое $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство называют *тихоновским* или *вполне регулярным*.

9.3.16. *Нормальное пространство является тихоновским.*

$\triangleleft$ Следствие 9.3.1 и 9.3.14. $\triangleright$

9.4. Компактность

9.4.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в топологическом пространстве и $\mathrm{cl}\, \mathscr{B} := \cap\{\mathrm{cl}\, B :\ B \in \mathscr{B}\}$ — множество его точек прикосновения. Тогда*

(1) $\mathrm{cl}\, \mathscr{B} = \mathrm{cl}\, \mathrm{fil}\, \mathscr{B}$;

(2) $\mathscr{B} \to x \Rightarrow x \in \mathrm{cl}\, \mathscr{B}$;

(3) *($\mathscr{B}$ — ультрафильтр, $x \in \mathrm{cl}\, \mathscr{B}$) $\Rightarrow \mathscr{B} \to x$.*

$\lhd$ Следует проверить только (3), так как справедливость (1) и (2) ясна. Для $U \in \tau(x)$ и $B \in \mathscr{B}$ выполнено $U \cap B \neq \varnothing$. Иначе говоря, есть фильтр $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \mathscr{B}$. Ясно, что $\mathscr{F} \to x$. Помимо этого, $\mathscr{F} = \mathscr{B}$, ибо $\mathscr{B}$ — ультрафильтр. $\rhd$

9.4.2. Определение. Множество принято называть *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие (ср. 4.4.1).

9.4.3. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство и C — множество в X. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *множество C компактно*;

(2) *если базис фильтра $\mathscr{B}$ не имеет в C точек прикосновения, то найдется $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \cap C = \varnothing$*;

(3) *каждый базис фильтра, содержащий C, имеет в C точку прикосновения*;

(4) *каждый ультрафильтр, содержащий C, имеет в C предел.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Раз $\operatorname{cl}\mathscr{B} \cap C = \varnothing$, то $C \subset X \setminus \operatorname{cl}\mathscr{B}$. Итак,

$$C \subset X \setminus \cap\{\operatorname{cl} B : \ B \in \mathscr{B}\} = \cup\{X \setminus \operatorname{cl} B : \ B \in \mathscr{B}\}.$$

Значит, можно выделить конечное множество $\mathscr{B}_0$ в $\mathscr{B}$, для которого

$$C \subset \cup\{X \setminus \operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\} = X \setminus \cap\{\operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\}.$$

Пусть $B \in \mathscr{B}$ таково, что $B \subset \cap\{B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\} \subset \cap\{\operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\}$. Тогда

$$C \cap B \subset C \cap (\cap\{\operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\}) = \varnothing.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Если $C = \varnothing$, то доказывать ничего не надо. Если же $C \neq \varnothing$, то для $B \in \mathscr{B}$ по условию $B \cap C \neq \varnothing$, ибо $C \in \mathscr{B}$. Таким образом, $\operatorname{cl}\mathscr{B} \cap C \neq \varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Следует привлечь 9.4.1.

(4) $\Rightarrow$ (1): Можно считать, что $C \neq \varnothing$ (иначе нечего доказывать).

Допустим, что C некомпактно. Тогда найдется множество $\mathscr{E}$ открытых множеств такое, что $C \subset \cup\{G : \ G \in \mathscr{E}\}$, и в то же время для любого конечного подмножества $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ не верно, что $C \subset \cup\{G : G \in \mathscr{E}_0\}$. Положим

$$\mathscr{B} := \left\{ \bigcap_{G \in \mathscr{E}_0} X \setminus G : \ \mathscr{E}_0 \text{ — конечное подмножество } \mathscr{E} \right\}.$$

Ясно, что $\mathscr{B}$ — базис фильтра. Помимо этого,

$$\begin{gathered} \operatorname{cl} \mathscr{B} = \cap\{\operatorname{cl} B : \ B \in \mathscr{B}\} = \cap\{X \setminus G : \ G \in \mathscr{E}\} = \\ = X \setminus \cup\{G : \ G \in \mathscr{E}\} \subset X \setminus C. \end{gathered}$$

Пусть теперь $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{B}$ (его существование гарантировано 1.3.10). Так как по допущению каждое множество из $\mathscr{B}$ содержит некоторые точки из C, можно обеспечить, что $C \in \mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F} \to x$ для некоторого $x \in C$ и, стало быть, по 9.4.1 (2), $\operatorname{cl} \mathscr{F} \cap C \neq \varnothing$. В то же время $\operatorname{cl} \mathscr{F} \subset \operatorname{cl} \mathscr{B}$. Получили противоречие. $\triangleright$

9.4.4. Замечание. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (4) в теореме 9.4.3 называют *критерием Бурбаки* и выражают при $X = C$ словами: «пространство компактно в том и только в том случае, если каждый ультрафильтр в нем сходится» (ср. 4.4.7).

Ультрасетью называют сеть, фильтр хвостов которой является ультрафильтром. Критерий Бурбаки можно высказать так: «компактность равносильна сходимости ультрасетей». На языке сетей можно получить и иные полезные признаки компактности. Например, «пространство компактно в том и только в том случае, если любая сеть его имеет сходящуюся подсеть».

9.4.5. ***Теорема Вейерштрасса.*** *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен* (ср. 4.4.5). $\triangleleft\triangleright$

9.4.6. *Пусть X_0 — подпространство топологического пространства X и C — подмножество X_0. Тогда C компактно в X_0 в том и только в том случае, если C компактно в X.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следует из 9.4.5 и 9.2.17 (1).

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X_0. Пусть, далее, $V := \operatorname{cl}_{X_0} \mathscr{B}$ — множество точек прикосновения $\mathscr{B}$, найденное в X_0. Допустим, что $V \cap C = \varnothing$. Так как $\mathscr{B}$ — это базис фильтра и в X, то имеет смысл говорить о множестве точек прикосновения $W := \mathrm{cl}_X \mathscr{B}$, найденном в X. Ясно, что $V = W \cap X_0$ и, значит, $W \cap C = \varnothing$. Из-за компактности C в X на основании 9.4.3 можно найти $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \cap C = \varnothing$. Вновь привлекая 9.4.3, видим, что C компактно в X_0. $\triangleright$

9.4.7. Замечание. Предложение 9.4.6 часто выражают словами: «компактность — это абсолютное понятие», т. е. свойство множества быть компактным зависит только от индуцированной в него топологии, а не от объемлющего пространства. В этой связи обычно ограничиваются рассмотрением *компактных пространств*, т. е. множеств, «компактных в себе».

9.4.8. *Теорема Тихонова.* *Тихоновское произведение компактных пространств компактно.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathfrak{X} := \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ — произведение рассматриваемого семейства. Если хотя бы одно из X_ξ пусто, то $\mathfrak{X} = \varnothing$ и доказывать нечего. Пусть $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ и $\mathscr{F}$ — ультрафильтр в $\mathfrak{X}$. По 1.3.12 при каждом $\xi \in \Xi$ для координатного проектора $\mathrm{Pr}_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ выполнено, что $\mathrm{Pr}_\xi(\mathscr{F})$ — ультрафильтр в X_ξ. Значит, в силу 9.4.3 найдется $x_\xi \in X_\xi$, для которого $\mathrm{Pr}_\xi(\mathscr{F}) \to x_\xi$. Пусть $x : \xi \mapsto x_\xi$. Понятно, что $\mathscr{F} \to x$ (ср. 9.2.10). Еще раз апеллируя к 9.4.3, выводим, что $\mathfrak{X}$ компактно. $\triangleright$

9.4.9. *Замкнутое подмножества компактного пространства компактно.*

$\triangleleft$ Пусть X компактно и $C \in \mathrm{Cl}(X)$. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр в X и $C \in \mathscr{F}$. По теореме 9.4.3 в X имеется предел: $\mathscr{F} \to x$. По теореме Биркгофа 9.2.2, $x \in \mathrm{cl}\, C = C$. Вновь привлекая 9.4.3, заключаем, что C компактно. $\triangleright$

9.4.10. *Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто.*

$\triangleleft$ Пусть C компактно в хаусдорфовом X. Если $C = \varnothing$, то доказывать нечего. Пусть $C \neq \varnothing$ и $x \in \mathrm{cl}\, C$. В силу 9.2.2 найдется фильтр $\mathscr{F}_0$ такой, что $C \in \mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_0 \to x$. Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}_0$. Тогда $\mathscr{F} \to x$ и $C \in \mathscr{F}$. На основании 9.4.3 у $\mathscr{F}$ есть предел в C. Но по 9.3.4 этот предел единствен. Значит, $x \in C$. $\triangleright$

9.4.11. *Пусть $f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega)$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, причем $f(X) = Y$. Если τ — компактная топология, а ω — хаусдорфова топология, то f — гомеоморфизм.*

$\triangleleft$ Следует установить, что f^{-1} непрерывно. Для этого необходимо убедиться, что $F \in \mathrm{Cl}(\tau) \Rightarrow f(F) \in \mathrm{Cl}(\omega)$. Возьмем $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$. Тогда F компактно в силу 9.4.9. Применяя последовательно 9.4.5 и 9.4.10, видим, что $f(F)$ замкнуто. $\triangleright$

9.4.12. *Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии на одном множестве X. Если пространство $(X,\ \tau_1)$ компактно, а $(X,\ \tau_2)$ хаусдорфово и $\tau_1 \geq \tau_2$, то $\tau_1 = \tau_2$.* $\triangleleft\triangleright$

9.4.13. Замечание. Утверждение 9.4.12 часто выражают словами «компактная топология минимальна».

9.4.14. ***Теорема.*** *Хаусдорфово компактное пространство нормально.*

$\triangleleft$ Пусть X — рассматриваемое пространство и $\mathscr{B}$ — какой-нибудь базис фильтра в X. Пусть, далее, U — окрестность $\mathrm{cl}\,\mathscr{B}$. Ясно, что $X \setminus \mathrm{int}\,U$ компактно (см. 9.4.9), причем $\mathrm{cl}\,\mathscr{B} \cap (X \setminus \mathrm{int}\,U) = \varnothing$. По теореме 9.4.3 найдется $B \in \mathscr{B}$ такое, что $B \cap (X \setminus \mathrm{int}\,U) = \varnothing$, т. е. $B \subset U$. Полагая, если нужно, $\mathscr{B} := \{\mathrm{cl}\,B : \ B \in \mathscr{B}\}$, можно утверждать, что $\mathrm{cl}\,B \subset U$.

Пусть для начала $x \in X$ и $\mathscr{B} := \tau(x)$. В силу 9.3.4, $\mathrm{cl}\,\mathscr{B} = \{x\}$ и, значит, фильтр $\tau(x)$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств. Стало быть, X регулярно.

Пусть теперь F — непустое замкнутое множество в X. В качестве $\mathscr{B}$ возьмем фильтр окрестностей F. По 9.3.8, $\mathrm{cl}\,\mathscr{B} = F$, и по уже установленному $\mathscr{B}$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств. В соответствии с 9.3.9, X — нормальное пространство. $\triangleright$

9.4.15. ***Следствие.*** *С точностью до гомеоморфизма хаусдорфовы компактные пространства суть замкнутые подмножества тихоновских кубов.*

$\triangleleft$ То, что замкнутое подмножество тихоновского куба компактно, следует из 9.4.8 и 9.4.9. Хаусдорфовость куба, а потому и его подпространств бесспорна.

Пусть X — некоторое компактное хаусдорфово пространство. Пусть еще Q — совокупность непрерывных функций из X в $[0,\ 1]$. Определим отображение $\Psi : X \to [0,\ 1]^Q$ правилом $\Psi(x)(f) := f(x)$, где $x \in X$ и $f \in Q$. Из 9.4.14 и 9.3.14 выводим, что Ψ взаимно однозначно отображает X на $\Psi(X)$. Помимо этого, Ψ непрерывно. Осталось применить 9.4.11. $\triangleright$

9.4.16. Замечание. Следствие 9.4.15 представляет собой часть более общего утверждения. Именно, тихоновские пространства суть (с точностью до гомеоморфизма) подпространства тихоновских кубов. $\triangleleft\triangleright$

9.4.17. Замечание. Хаусдорфовы компактные пространства, как правило, называют более коротко — ***компактами*** (ср. 4.5 и 4.6).

9.4.18. *Лемма Дьедонне.* *Пусть F — это замкнутое подмножество, а $G_1, \dots, G_n$ — открытые подмножества нормального топологического пространства, причем $F \subset G_1 \cup \ldots \cup G_n$. Найдутся замкнутые множества $F_1, \dots, F_n$ такие, что $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ и $F_k \subset G_k$ $(k := 1, \dots, n)$.*

$\triangleleft$ Достаточно рассмотреть случай $n := 2$. При $k := 1, 2$ множество $U_k := F \setminus G_k$ замкнуто и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. С учетом 9.3.10 имеются открытые V_1 и V_2, для которых $U_1 \subset V_1$, $U_2 \subset V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Положим $F_k := F \setminus V_k$. Ясно, что F_k замкнуто и $F_k \subset F \setminus U_k = F \setminus (F \setminus G_k) \subset G_k$ для $k := 1, 2$. При этом $F_1 \cup F_2 = F \setminus (V_1 \cup V_2) = F$. $\triangleright$

9.4.19. Замечание. По 9.3.14 заключаем, что в условиях 9.4.18 для рассматриваемого пространства X найдутся непрерывные функции $h_1, \dots, h_n : X \to [0,\ 1]$ такие, что $h_k|_{G'_k} = 0$ и $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$ для точек x из некоторой окрестности F. (Как обычно, $G'_k := X \setminus G_k$.)

9.4.20. Определение. Топологию, в которой каждая точка обладает компактной окрестностью, называют ***локально компактной***. ***Локально компактным пространством*** называют множество, снабженное локально компактной хаусдорфовой топологией.

9.4.21. *Топологическое пространство локально компактно в том и только в том случае, если оно гомеоморфно проколотому компакту (= компакту с выколотой точкой), т. е. дополнению одноточечного подмножества компакта.*

$\triangleleft$ $\Leftarrow$: С учетом теоремы Вейерштрасса 9.4.5 достаточно заметить, что каждая точка проколотого компакта обладает замкнутой (в силу регулярности компакта) окрестностью. Осталось привлечь утверждения 9.4.9 и 9.4.6.

$\Rightarrow$: Поместим исходное пространство X в $X^{\boldsymbol{\cdot}} := X \cup \{\infty\}$, присоединив к X взятую со стороны точку ∞. Базис окрестностей ∞ составим из дополнений в $X^{\boldsymbol{\cdot}}$ компактных подмножеств в X. Окрестностями точки из X в $X^{\boldsymbol{\cdot}}$ объявим надмножества ее окрестностей в X. Если $\mathfrak{A}$ — ультрафильтр в $X^{\boldsymbol{\cdot}}$ и K — компакт в X, то $\mathfrak{A}$ сходится к точке из K, как только $K \in \mathfrak{A}$. Если же в $\mathfrak{A}$ лежит дополнение любого компакта $K \subset X$, то $\mathfrak{A}$ сходится к ∞. $\triangleright$

9.4.22. Замечание. Если локально компактное пространство X не компактно, то пространство $X^{\boldsymbol{\cdot}}$, фигурирующее в 9.4.20, называют *одноточечной* или *александровской компактификацией* X.

9.5. Равномерные и мультиметрические пространства

9.5.1. Определение. Пусть X — непустое множество и $\mathscr{U}_X$ — фильтр в X^2. Фильтр $\mathscr{U}_X$ называют *равномерностью* в X, если

(1) $\mathscr{U}_X \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U}_X \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}_X$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U}_X)(\exists V \in \mathscr{U}_X)\ V \circ V \subset U$.

Равномерностью пустого множества X называют $\mathscr{U}_X := \{\varnothing\}$. Пару $(X,\ \mathscr{U}_X)$ (а часто и множество X) называют *равномерным пространством.*

9.5.2. *Для равномерного пространства $(X,\ \mathscr{U}_X)$ положим*

$$x \in X \Rightarrow \tau(x) := \{U(x) :\ U \in \mathscr{U}_X\}.$$

Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ — топология на X.

$\triangleleft$ То, что τ — это предтопология, ясно. Если $W \in \tau(x)$, то $W = U(x)$ для некоторого $U \in \mathscr{U}_X$. Выберем $V \in \mathscr{U}_X$ так, чтобы $V \circ V \subset U$. Если $y \in V(x)$, то $V(y) \subset V(V(x)) = V \circ V(x) \subset U(x) \subset W$. Иными словами, множество W является окрестностью y для всякого $y \in V(x)$. Следовательно, множество $V(x)$ лежит во внутренности $\operatorname{int} W$. Значит, $\operatorname{int} W$ — окрестность x. Осталось привлечь 9.1.6. $\triangleright$

9.5.3. Определение. Топологию τ, фигурирующую в 9.5.2, называют топологией равномерного пространства $(X,\ \mathscr{U}_X)$ или *равномерной топологией* и обозначают $\tau(\mathscr{U}_X)$, τ_X и т. п.

9.5.4. Определение. Топологическое пространство $(X,\ \tau)$ называют ***равномеризуемым***, если существует равномерность $\mathscr{U}$ в X такая, что τ совпадает с равномерной топологией $\tau(\mathscr{U})$.

9.5.5. Примеры.

(1) Метрические пространства (со своими топологиями) равномеризуемы (своими равномерностями).

(2) Мультинормированные пространства (со своими топологиями) равномеризуемы (своими равномерностями).

(3) Пусть $f : X \to (Y,\ \mathscr{U}_Y)$ и $f^{-1}(\mathscr{U}_Y) := f^{\times -1}(\mathscr{U}_Y)$, где, как обычно, $f^{\times}(x_1,\ x_2) := (f(x_1),\ f(x_2))$ для $(x_1,\ x_2) \in X^2$. Ясно, что $f^{-1}(\mathscr{U}_Y)$ — равномерность в X. При этом

$$\tau(f^{-1}(\mathscr{U}_Y)) = f^{-1}(\tau(\mathscr{U}_Y)).$$

Равномерность $f^{-1}(\mathscr{U}_Y)$ называют ***прообразом равномерности*** $\mathscr{U}_Y$ ***при отображении*** f. Таким образом, прообраз равномерной топологии равномеризуем.

(4) Пусть $(X_\xi, \mathscr{U}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это некоторое семейство равномерных пространств. Пусть, далее, $\mathfrak{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение этого семейства. Положим $\mathscr{U}_{\mathfrak{X}} := \sup_{\xi\in\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{U}_\xi)$. Равномерность $\mathscr{U}_{\mathfrak{X}}$ называют ***тихоновской***. Нет сомнений, что равномерная топология $\tau(\mathscr{U}_{\mathfrak{X}})$ — это тихоновская топология произведения $(X_\xi, \tau(\mathscr{U}_\xi))_{\xi\in\Xi}$. $\lhd\rhd$

(5) *Хаусдорфово компактное пространство равномеризуемо, и притом единственным образом.*

$\lhd$ В силу 9.4.15 такое пространство X можно рассматривать как подпространство тихоновского куба. Из 9.5.5 (3) и 9.5.5 (4) следует равномеризуемость X. Поскольку, как видно, каждое окружение диагонали в равномерном пространстве содержит замкнутое окружение, то из компактности множества I_X вытекает, что всякая его окрестность входит в $\mathscr{U}_X$. С другой стороны, любое окружение всегда окрестность диагонали. $\rhd$

(6) Пусть X, Y — непустые множества, $\mathscr{U}_Y$ — равномерность в Y и $\mathscr{B}$ — фильтрованное по возрастанию подмножество 2^X. Для $B \in \mathscr{B}$ и $\theta \in \mathscr{U}_Y$ положим

$$U_{B,\theta} := \{(f,\ g) \in Y^X \times Y^X :\ g \circ I_B \circ f^{-1} \subset \theta\}.$$

Тогда $\mathscr{U} := \operatorname{fil}\{U_{B,\theta} :\ B \in \mathscr{B},\ \theta \in \mathscr{U}_Y\}$ — равномерность в Y^X, имеющая неизящное (но точное) название: «равномерность равномерной сходимости на множествах из $\mathscr{B}$». Такова, например, равномерность мультинормы Аренса (см. 8.3.8). В случае, если $\mathscr{B}$ есть совокупность конечных подмножеств X, то $\mathscr{U}$ совпадает с тихоновской равномерностью в Y^X. Эту равномерность в данной ситуации называют *слабой*, а соответствующую топологию — *топологией поточечной сходимости* (реже — *простой сходимости*). Если же $\mathscr{B}$ состоит из единственного элемента — из $\{X\}$, то равномерность $\mathscr{U}$ называют *сильной*, а соответствующую топологию $\tau(\mathscr{U})$ в Y^X — *топологией равномерной сходимости.*

9.5.6. Замечание. Ясно, что в равномерных (и равномеризуемых) пространствах имеют смысл такие понятия, как равномерная непрерывность, малость данного порядка, полнота и т. п. В этих пространствах, как видно, сохранены аналоги 4.2.4–4.2.9, 4.5.8, 4.5.9, 4.6.1–4.6.7. Полезными упражнениями являются осмысливание возможности пополнения равномерного пространства, доказательство критерия Хаусдорфа, анализ доказательства теоремы Асколи — Арцела и т. п.

9.5.7. Определение. Пусть X — множество, $\mathbb{R}^{\cdot}_{+} := \{x \in \mathbb{R}^{\cdot} :\ x \geq 0\}$. Отображение $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ называют *полуметрикой* или *отклонением* на X, если

(1) $d(x,\ x) = 0\ (x \in X)$;

(2) $d(x,\ y) = d(y,\ x)\ (x,\ y \in X)$;

(3) $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)\ (x,\ y,\ z \in X)$.

Пару $(X,\ d)$ называют *полуметрическим пространством.*

9.5.8. *Для полуметрического пространства $(X,\ d)$ положим*

$$\mathscr{U}_d := \operatorname{fil}\{\{d \leq \varepsilon\} :\ \varepsilon > 0\}.$$

Тогда $\mathscr{U}_d$ — равномерность. $\triangleleft\triangleright$

9.5.9. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — (непустое) множество полуметрик на X. Тогда пару $(X,\ \mathfrak{M})$ называют *мультиметрическим пространством*, а множество $\mathfrak{M}$ — *мультиметрикой. Равномерность мультиметрического пространства* определяют соотношением

$$\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} := \sup\{\mathscr{U}_d :\ d \in \mathfrak{M}\}.$$

9.5.10. Определение. Равномерное пространство принято называть *мультиметризуемым*, если его равномерность совпадает с равномерностью некоторого мультиметрического пространства. По аналогии определяют и мультиметризуемые топологические пространства.

9.5.11. *Пусть X, Y, Z — множества, T — плотное подмножество $\overline{\mathbb{R}}$ и $(U_t)_{t\in T}$, $(V_t)_{t\in T}$ — возрастающие семейства множеств, лежащих соответственно в $X \times Z$ и в $Z \times Y$. Тогда существуют, и притом единственные, функции*

$$f : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}, \quad g : Z \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad h : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$$

такие, что

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\}, \quad \{g < t\} \subset V_t \subset \{g \leq t\},$$
$$\{h < t\} \subset U_t \circ V_t \subset \{h \leq t\} \quad (t \in T).$$

При этом имеет место представление

$$h(x,\ y) = \inf\{f(x,\ z) \vee g(z,\ y) :\ z \in Z\}.$$

$\lhd$ Существование требуемых функций обеспечено 3.8.2. Единственность — 3.8.4. Представление функции h через f и g бесспорно. $\rhd$

9.5.12. Определение. Пусть $f : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Z \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Функцию h, заданную с помощью 9.5.11, называют $\vee$-*конволюцией* f и g и обозначают

$$f \,\square_{\vee}\, g(x,\ y) := \inf\{f(x,\ z) \vee g(z,\ y) :\ z \in Z\}.$$

Аналогично определяют $+$-*конволюцию* f и g по правилу

$$f \,\square_{+}\, g(x,\ y) := \inf\{f(x,\ z) + g(z,\ y) :\ z \in Z\}.$$

9.5.13. Определение. Отображение $f : X^2 \to \mathbb{R}_+^{\cdot}$ называют K-*ультраметрикой* ($K \in \mathbb{R},\ K \geq 1$), если

(1) $f(x,\ x) = 0$ $(x \in X)$;
(2) $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ $(x,\ y \in X)$;
(3) $\frac{1}{K} f(x, u) \leq f(x, y) \vee f(y, z) \vee f(z, u)$ $(x, y, z, u \in X)$.

9.5.14. Замечание. Условие 9.5.13 (3) иногда называют (сильным) *ультраметрическим неравенством.* Это неравенство можно в силу 9.5.12 переписать в виде $K^{-1}f \leq f \,\Box_{\vee}\, f \,\Box_{\vee} f$.

9.5.15. *Лемма о 2-ультраметрике.* *Для каждой 2-ультраметрики $f : X^2 \to \mathbb{R}_+^{\cdot}$ существует полуметрика d такая, что $1/2f \leq d \leq f$.*

$\lhd$ Пусть $f_1 := f$; $f_{n+1} := f_n \Box_+ f$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда

$$f_{n+1}(x,\ y) \leq f_n(x,\ y) + f(y,\ y) = f_n(x,\ y) \quad (x,\ y \in X).$$

Таким образом, (f_n) — убывающая последовательность. Положим

$$d(x,\ y) := \lim f_n(x,\ y) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x,\ y).$$

Поскольку для $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$d(x,\ y) \leq f_{2n}(x,\ y) = f_n \Box_+ f_n(x,\ y) \leq f_n(x,\ z) + f_n(z,\ y),$$

то $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)$. Справедливость 9.5.7 (1) и 9.5.7 (2) несомненна.

Осталось установить, что $1/2\, f \leq d$. Для этого убедимся, что $f_n \geq 1/2\, f$ для $n \in \mathbb{N}$.

При $n := 1, 2$ требуемые неравенства очевидны. Допустим теперь, что $f \geq f_1 \geq \ldots \geq f_n \geq 1/2\, f$ и в то же время $f_{n+1}(x,\ y) < 1/2\, f(x,\ y)$ для некоторых $(x,\ y) \in X^2$ и $n \geq 2$. По построению при подходящих $z_1, \ldots, z_n \in X$ будет

$$t := f(x,\ z_1) + f(z_1,\ z_2) + \ldots + f(z_{n-1},\ z_n) + \\ + f(z_n, y) < \frac{1}{2} f(x,\ y).$$

Если $f(x,\ z_1) \geq t/2$, то $t/2 \geq f(z_1,\ z_2) + \ldots + f(z_n,\ y) \geq 1/2\, f(z_1,\ y)$. Получаем, что $t \geq f(x,\ z_1)$ и $t \geq f(z_1,\ y)$. На основании 9.5.13 (3), $1/2\, f(x,\ y) \leq f(x,\ z_1) \vee f(z_1,\ y) \leq t$. Отсюда вытекает ложное соотношение: $1/2\, f(x,\ y) > t \geq 1/2\, f(x,\ y)$.

Итак, $f(x,\ z_1) < t/2$. Найдем $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, для которого

$$f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_{m-1},\ z_m) < \frac{t}{2};$$

$$f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_m,\ z_{m+1}) \geq \frac{t}{2}.$$

Это осуществимо, ибо гипотеза $m = n$ влечет неверное неравенство $f(z_n,\ y) \geq t/2$. (В самом деле, было бы $t/2 \geq f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_{n-1},\ z_n) \geq 1/2\, f(x,\ z_n)$ и поэтому $1/2\, f(x,\ y) > t \geq f(x,\ z^n) \vee f(z_n,\ y) \geq 1/2\, f(x,\ y)$.)

Имеем

$$f(z_{m+1}, z_{m+2}) + \ldots + f(z_{n-1},\ z_n) + f(z_n,\ y) < \frac{t}{2}.$$

Привлекая индукционное предположение, заключаем:

$$\begin{gathered} f(x,\ z_m) \leq 2(f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_{m-1},\ z_m)) \leq t; \\ f(z_m,\ z_{m+1}) \leq t; \\ f(z_{m+1},\ y) \leq 2(f(z_{m+1},\ z_{m+2}) + \ldots + f(z_n,\ y)) \leq t. \end{gathered}$$

Следовательно, в силу определения 2-ультраметрики

$$\frac{1}{2} f(x,\ y) \leq f(x,\ z_m) \vee f(z_m,\ z_{m+1}) \vee f(z_{m+1},\ y) \leq t < \frac{1}{2} f(x,\ y).$$

Получили противоречие, завершающее доказательство. $\triangleright$

9.5.16. *Теорема.* *Каждое равномерное пространство мультиметризуемо.*

$\triangleleft$ Пусть $(X,\ \mathscr{U}_X)$ — рассматриваемое равномерное пространство. Возьмем $V \in \mathscr{U}_X$. Положим $V_1 := V \cap V^{-1}$. Если теперь $V_n \in \mathscr{U}_X$, то найдем симметричное окружение $\overline{V} = \overline{V}^{-1}$, $\overline{V} \in \mathscr{U}_X$ такое, что $\overline{V} \circ \overline{V} \circ \overline{V} \subset V_n$. Полагаем $V_{n+1} := \overline{V}$. Так как по построению $V_n \supset V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \supset V_{n+1} \circ I_X \circ I_X \supset V_{n+1}$, то $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — убывающее семейство.

Для $t \in \mathbb{R}$ зададим множество U_t соотношением

$$U_t := \begin{cases} \varnothing, & t < 0, \\ I_X, & t = 0, \\ V_{\inf\{n \in \mathbb{N}\,:\, t \geq 2^{-n}\}}, & 0 < t < 1, \\ V_1, & t = 1, \\ X^2, & t > 1. \end{cases}$$

По определению $t \mapsto U_t$ $(t \in \mathbb{R})$ — возрастающее семейство. Рассмотрим единственную функцию $f : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющую соотношениям (ср. 3.8.2, 3.8.4)

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Если $W_t := U_{2t}$ для $t \in \mathbb{R}$, то при $s < t$ будет

$$U_s \circ U_s \circ U_s \subset W_t.$$

Следовательно, в силу 3.8.3 и 9.2.1 отображение f является 2-ультраметрикой.

Привлекая 9.5.15, найдем полуметрику d_V такую, что $1/2\, f \leq d_V \leq f$. Ясно, что $\mathscr{U}_{d_V} = \mathrm{fil}\,\{V_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Несомненно также, что для мультиметрики $\mathfrak{M} := \{d_V :\ V \in \mathscr{U}_X\}$ выполнено $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_X$. $\triangleright$

9.5.17. *Следствие.* *Пространство является равномеризуемым в том и только в том случае, если оно $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство.* $\triangleleft\triangleright$

9.5.18. *Следствие.* *Тихоновские пространства суть отделимые мультиметрические пространства.* $\triangleleft\triangleright$

9.6. Покрытия и разбиения единицы

9.6.1. Определение. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ — два *покрытия* множества U в X, т. е. $\mathscr{E}$, $\mathscr{F} \subset 2^X$ и $U \subset (\cup\mathscr{E}) \cap (\cup\mathscr{F})$. Говорят, что $\mathscr{E}$ *вписано* в $\mathscr{F}$ или $\mathscr{E}$ *измельчает* $\mathscr{F}$, если каждое множество из $\mathscr{E}$ попадает в один из элементов $\mathscr{F}$, т. е. $(\forall\, E \in \mathscr{E})\ (\exists\, F \in \mathscr{F})\ E \subset F$.

9.6.2. Определение. Покрытие $\mathscr{E}$ множества X называют *локально конечным* (относительно топологии τ в X), если у каждой точки из X имеется окрестность (в смысле τ), пересекающаяся лишь с конечным числом элементов $\mathscr{E}$. Такое покрытие в случае дискретной топологии называют *точечно конечным.* Наконец, если X рассматривают с предварительно выделенной топологией τ, то под локальной конечностью его покрытия по умолчанию понимают связанный с τ вариант.

9.6.3. *Лемма Лефшеца.* *Пусть $\mathscr{E}$ — точечно конечное открытое покрытие нормального пространства X. Существует такое открытое покрытие $\{G_E :\ E \in \mathscr{E}\}$, что $\mathrm{cl}\, G_E \subset E$ при всех $E \in \mathscr{E}$.*

$\triangleleft$ Составим множество S из отображений $s : \mathscr{E} \to \mathrm{Op}(X)$, для которых $\cup s(\mathscr{E}) = X$ и при $E \in \mathscr{E}$ будет $s(E) = E$ или $\mathrm{cl}\, s(E) \subset E$. Для подобных функций s_1, s_2 полагают: $s_1 \le s_2 := (\forall\, E \in \mathscr{E})\ (s_1(E) \ne E \Rightarrow s_2(E) = s_1(E))$. Видно, что $(S, \le)$ — упорядоченное множество, причем $I_{\mathscr{E}} \in S$. Установим индуктивность S.

Для цепи S_0 в S положим $s_0(E) := \cap\{s(E) :\ s \in S_0\}$ $(E \in \mathscr{E})$. Если $s_0(E) = E$, то $s(E) = E$ при всех $s \in S_0$. Если же $s_0(E) \ne E$, то $s_0(E) = \cap\{s(E) :\ s(E) \ne E,\ s \in S_0\}$.

С учетом линейности порядка в S_0 выводим: $s_0(E) = s(E)$ для $s \in S_0$ таких, что $s(E) \ne E$. Отсюда $s_0(\mathscr{E}) \subset \mathrm{Op}(X)$ и $s_0 \ge S_0$. Осталось удостовериться, что s_0 — покрытие X (и, стало быть, $s_0 \in S$). По условию точечной конечности для $x \in X$ имеются $E_1, \dots, E_n$ в $\mathscr{E}$ такие, что $x \in E_1 \cap \ldots \cap E_n$ и $x \notin E$ для иных E в $\mathscr{E}$. Если $s(E_k) = E_k$ для какого-либо из k, то доказывать нечего — $x \in \cup s_0(\mathscr{E})$. В случае, когда при каждом k будет $s_0(E_k) \ne E_k$, найдутся $s_1, \dots, s_n \in S_0$ из условия $s_k(E_k) \ne E_k$ $(k := 1, 2, \dots, n)$. Раз S_0 — цепь, можно считать, что $s_n \ge \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. При этом $x \in s_n(\overline{E}) \subset \overline{E}$ для подходящего $\overline{E} \in \mathscr{E}$. Ясно, что $\overline{E} \in \{E_1, \dots, E_n\}$ (ибо $x \notin E$ для других E). Раз $s_0(\overline{E}) = s_n(\overline{E})$, то $x \in s_0(\overline{E})$.

По лемме Куратовского — Цорна 1.2.20 в S есть максимальный элемент $\bar{s}$. Возьмем $E \in \mathscr{E}$. Если $F := X \setminus \cup \bar{s}(\mathscr{E} \setminus \{E\})$, то F замкнуто и $\bar{s}(E)$ — окрестность F. На основании 9.3.10 при подходящем $G \in \mathrm{Op}(X)$ будет $F \subset G \subset \mathrm{cl}\, G \subset \bar{s}(E)$. Положим $s(E) := G$ и $s(\overline{E}) := \bar{s}(\overline{E})$ для $\overline{E} \ne E$ $(\overline{E} \in \mathscr{E})$. Ясно, что $s \in S$. Если $\bar{s}(E) = E$, то $s \ge \bar{s}$ и, значит, $s = \bar{s}$. При этом $\bar{s}(E) \subset \mathrm{cl}\, G \subset \bar{s}(E) = E$, т. е. $\mathrm{cl}\, \bar{s}(E) \subset E$. Если же $\bar{s}(E) \ne E$, то $\mathrm{cl}\, \bar{s}(E) \subset E$ по определению. Итак, $\bar{s}$ — искомое покрытие. $\triangleright$

9.6.4. Определение. Пусть f — *скалярная* (= *числовая*) функция на топологическом пространстве X, т. е. $f : X \to \mathbb{F}$. Множество $\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}\{x \in X :\ f(x) \ne 0\}$ называют *носителем* f. Если $\mathrm{supp}(f)$ — компактное множество, то f называют *финитной функцией*. Иногда полагают $\mathrm{spt}\,(f) := \mathrm{supp}(f)$.

9.6.5. *Пусть $(f_e)_{e \in \mathscr{E}}$ — некоторое семейство скалярных функций на X и $\bar{\mathscr{E}} := \{\mathrm{supp}(f_e) :\ e \in \mathscr{E}\}$ — семейство их носителей. Если $\bar{\mathscr{E}}$ — точечно конечное покрытие U, то семейство $(f_e)_{e \in \mathscr{E}}$ поточечно суммируемо. Если к тому же $\bar{\mathscr{E}}$ локально конечно, а $(f_e)_{e \in \mathscr{E}}$ непрерывны, то сумма $\sum_{e \in \mathscr{E}} f_e$ также непрерывна.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что в подходящей окрестности точки из U лишь конечное число функций семейства $(f_e)_{e\in\mathscr{E}}$ не обращается в нуль. $\rhd$

9.6.6. Определение. Семейство функций $(f : X \to [0,\ 1])_{f\in F}$ представляет ***разбиение единицы*** на множестве U в X, если носители элементов этого семейства составляют точечно конечное покрытие U, и при этом $\sum_{f\in F} f(x) = 1$ для всех $x \in U$. Пустое семейство функций в подобном контексте считают суммируемым к единице. Естественным образом трактуют термин «***непрерывное разбиение единицы***» и его аналоги.

9.6.7. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — покрытие множества U в топологическом пространстве, а F — непрерывное разбиение единицы на U. Если семейство носителей $\{\operatorname{supp}(f) :\ f \in F\}$ вписано в $\mathscr{E}$, то F называют ***разбиением единицы, подчиненным*** $\mathscr{E}$. Наличие такого F для $\mathscr{E}$ выражают словами: «$\mathscr{E}$ ***допускает непрерывное разбиение единицы***».

9.6.8. *Каждое локально конечное открытое покрытие нормального пространства допускает разбиение единицы.*

$\lhd$ По теореме Лефшеца 9.6.3 в рассматриваемое покрытие $\{U_\xi :\ \xi \in \Xi\}$ можно вписать открытое покрытие $\{V_\xi :\ \xi \in \Xi\}$, для которого $\operatorname{cl} V_\xi \subset U_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. По теореме Урысона 9.3.14 имеется непрерывная функция $g_\xi : X \to [0,\ 1]$ такая, что $g_\xi(x) = 1$ при $x \in V_\xi$ и $g_\xi(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_\xi$. Значит, $\operatorname{supp}(g_\xi) \subset U_\xi$. На основании 9.6.5 семейство $(g_\xi)_{\xi\in\Xi}$ поточечно суммируемо к непрерывной функции g. При этом $g(x) > 0$ для всех $x \in X$ по построению. Полагаем $f_\xi := g_\xi/g$ $(\xi \in \Xi)$. Семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — искомое. $\rhd$

9.6.9. Определение. Топологическое пространство называют ***паракомпактным***, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

9.6.10. Замечание. Теория паракомпактности содержит глубокие и нетривиальные факты.

9.6.11. ***Теорема.*** *Метрические пространства паракомпактны.*

9.6.12. ***Теорема.*** *Хаусдорфово топологическое пространство паракомпактно в том и только в том случае, если каждое его открытое покрытие допускает непрерывное разбиение единицы.*

9.6.13. Замечание. Метрическое пространство $\mathbb{R}^N$ обладает рядом дополнительных структур, обеспечивающих запас квалифицированных — *гладких* (= бесконечно дифференцируемых) — функций (ср. 4.8.1).

9.6.14. Определение. *Усредняющим ядром* в $\mathbb{R}^N$ принято называть любую вещественную гладкую функцию a с единичным (лебеговым) интегралом и такую, что $a(x) > 0$ при $|x| < 1$ и $a(x) = 0$ для $|x| \geq 1$. При этом $\operatorname{supp}(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| \leq 1\}$ — единичный евклидов шар $\mathbb{B} := B_{\mathbb{R}^N}$.

9.6.15. Определение. *Дельтообразной последовательностью* называют такое семейство вещественных (гладких) функций $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, что, во-первых, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\sup|\operatorname{supp}(b_\varepsilon)|) = 0$ и, во-вторых, $\int_{\mathbb{R}^N} b_\varepsilon(x)\,dx = 1$ $(\varepsilon > 0)$. Используют также термины *δ-последовательность* и *δ-образная последовательность*. Часто ограничиваются счетными последовательностями.

9.6.16. Пример. Популярное усредняющее ядро — это функция $a(x) := t\exp(-(|x|^2-1)^{-1})$, доопределенная нулем вне шара $\operatorname{int}\mathbb{B}$, где константа t задана условием $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\,dx = 1$. Всякое усредняющее ядро порождает дельтообразную последовательность $a_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N}a(x/\varepsilon)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$.

9.6.17. Определение. Пусть $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, т. е. f — некоторая *локально интегрируемая* (= интегрируемая при сужении на любой компакт) функция. Для каждой финитной интегрируемой функции g определяют *свёртку* $f * g$ соотношением

$$f * g(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

9.6.18. Замечание. Роль усредняющих ядер и дельтообразных последовательностей $(a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ проясняется анализом *процесса сглаживания* $f \mapsto (f * a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ функции $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и его последствий (ср. 10.10.7 (5)).

9.6.19. *Справедливы утверждения*:

(1) *для каждого компактного множества K из пространства $\mathbb{R}^N$ и какой-либо его окрестности U существует* *срезыватель (= срезывающая функция) $\psi := \psi_{K,U}$, т. е. такое гладкое отображение $\psi : \mathbb{R}^N \to [0,\ 1]$, что $K \subset \operatorname{int}\{\psi = 1\}$ и $\operatorname{supp}(\psi) \subset U$;*

(2) *пусть $U_1, \dots, U_n \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$, причем $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ — окрестность компакта K. Существуют гладкие функции $\psi_1, \dots, \psi_n : \mathbb{R}^N \to [0,\ 1]$, удовлетворяющие условиям $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset U_k$ и $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) = 1$ для x из некоторой окрестности K.*

$\lhd$ (1) Пусть $\varepsilon := d(K,\ \mathbb{R}^N \backslash U) := \inf\{|x-y| :\ x \in K,\ y \notin U\}$. Ясно, что $\varepsilon > 0$. Для $\beta > 0$ обозначим χ_β характеристическую функцию множества $K + \varepsilon\mathbb{B}$. Возьмем дельтообразную последовательность положительных функций $(b_\gamma)_{\gamma > 0}$ и положим $\psi := \chi_\beta * b_\gamma$. При $\overline{\gamma} \leq \beta$, $\beta + \overline{\gamma} \leq \varepsilon$, где $\overline{\gamma} := \sup|\operatorname{supp}(b_\gamma)|$, функция ψ — искомая.

(2) По лемме Дьедонне 9.4.18 имеются замкнутые $F_k \subset U_k$, составляющие покрытие K. Положим $K_k := F_k \cap K$ и рассмотрим срезыватели $\psi_k := \psi_{K_k, U_k}$. Функции $\psi_k / \sum_{k=1}^n \psi_k$ $(k := 1, \dots, n)$, определенные на $\{\sum_{k=1}^n \psi_k > 0\}$, после распространения нулем на $\{\sum_{k=1}^n \psi_k = 0\}$ и умножения на срезыватель подходящей окрестности K становятся искомыми. $\rhd$

9.6.20. Теорема о разбиении единицы в $\mathbb{R}^N$. *Пусть $\mathscr{E}$ — семейство открытых множеств в $\mathbb{R}^N$ и $\Omega := \cup\mathscr{E}$. Существует счетное разбиение единицы, составленное гладкими финитными функциями на $\mathbb{R}^N$ и подчиненное покрытию $\mathscr{E}$ множества Ω.*

$\lhd$ Впишем в $\mathscr{E}$ такое счетное локально конечное покрытие A из компактных множеств, что семейство $(\overline{\alpha} := \operatorname{int}\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ также образует открытое покрытие Ω. Подберем открытое покрытие $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ из условия $\operatorname{cl} V_\alpha \subset \overline{\alpha}$ при $\alpha \in \mathrm{A}$. На основании 9.6.19 (1) имеются срезыватели $\overline{\psi}_\alpha := \psi_{\operatorname{cl} V_\alpha, \overline{\alpha}}$. Полагая $\psi_\alpha(x) := \overline{\psi}_\alpha(x) / \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \overline{\psi}_\alpha(x)$ при $x \in \Omega$ и $\psi_\alpha(x) := 0$ для $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, приходим к требуемому разбиению. $\rhd$

9.6.21. Замечание. Стоит подчеркнуть, что построенное разбиение единицы $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ обладает тем свойством, что для каждого компакта K, лежащего в Ω, имеются конечное подмножество A_0 в A и окрестность U компакта K такие, что $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}_0} \psi_\alpha(x) = 1$ для всех $x \in U$ (ср. 9.3.17, 9.6.19 (2)).

Упражнения

9.1. Привести примеры предтопологических и топологических пространств и конструкции, к ним приводящие.

9.2. Можно ли задать топологию, указывая сходящиеся фильтры или последовательности?

9.3. Установить взаимные связи между топологиями и предпорядками на конечном множестве.

9.4. Описать топологические пространства, в которых объединение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Каковы непрерывные отображения таких пространств?

9.5. Пусть $(f_\xi : X \to (Y_\xi,\ \tau_\xi))_{\xi\in\Xi}$ — семейство отображений. Топологию σ в X назовем допустимой (в данной ситуации), если для любого топологического пространства $(Z,\ \omega)$ и произвольного отображения $g : Z \to X$ выполнено утверждение: $g : (Z,\ \omega) \to (X,\ \sigma)$ непрерывно в том и только в том случае, если непрерывно отображение $f_\xi \circ g$ $(\xi \in \Xi)$. Доказать, что слабейшая топология X, в которой непрерывны все f_ξ $(\xi \in \Xi)$, представляет собой сильнейшую допустимую (в данной ситуации) топологию.

9.6. Пусть $(f_\xi : (X_\xi,\ \sigma_\xi) \to Y)_{\xi\in\Xi}$ — семейство отображений. Топологию τ в Y назовем допустимой (в данной ситуации), если для любого топологического пространства $(Z,\ \omega)$ и произвольного отображения $g : Y \to Z$ выполнено утверждение: $g : (Y,\ \tau) \to (Z,\ \omega)$ непрерывно в том и только в том случае, если непрерывно отображение $g \circ f_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Доказать, что сильнейшая топология в Y, в которой непрерывны все f_ξ $(\xi \in \Xi)$, представляет собой слабейшую допустимую (в данной ситуации) топологию.

9.7. Доказать, что в тихоновском произведении произвольных топологических пространств замыкание произведения множеств, лежащих в сомножителях, есть произведение замыканий:

$$\operatorname{cl}\left(\prod_{\xi\in\Xi} A_\xi\right) = \prod_{\xi\in\Xi} \operatorname{cl} A_\xi .$$

9.8. Проверить, что тихоновское произведение хаусдорфово в том и только в том случае, если хаусдорфов каждый сомножитель.

9.9. Установить критерии компактности множеств в классических банаховых пространствах.

9.10. Хаусдорфово пространство X называют H-замкнутым, если X замкнуто в любом объемлющем X хаусдорфовом пространстве. Доказать, что регулярное H-замкнутое пространство компактно.

9.11. Изучить возможности компактификации топологического пространства.

9.12. Доказать, что тихоновское произведение несчетного числа прямых не является нормальным пространством.

9.13. Доказать, что каждая непрерывная функция на произведении компактных пространств в очевидном смысле (каком?) зависит от не более чем счетного числа координат.

9.14. Пусть A — компактное, а B — замкнутое множества в равномерном пространстве, причем $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что для некоторого окружения V будет $V(A) \cap V(B) = \varnothing$.

9.15. Доказать, что пополнение (в соответствующем смысле) произведения равномерных пространств изоморфно произведению пополнений сомножителей.

9.16. Множество в отделимом равномерном пространстве назовем предкомпактным, если его пополнение компактно. Доказать, что множество является предкомпактным в том и только в том случае, если оно вполне ограничено.

9.17. Какие топологические пространства метризуемы?

9.18. Для равнометризуемого пространства описать сильнейшую равномерность, задающую исходную топологию.

9.19. Убедиться, что произведение паракомпактного и компактного пространств паракомпактно. Сохраняется ли паракомпактность при общих произведениях?

Глава 10

Двойственность и ее приложения

10.1. Векторные топологии

10.1.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$. Топологию τ в X называют *согласованной со структурой векторного пространства* или, короче, *векторной топологией*, если непрерывны следующие отображения:

$$+ : (X \times X,\ \tau \times \tau) \to (X,\ \tau),$$
$$\cdot : (\mathbb{F} \times X,\ \tau_{\mathbb{F}} \times \tau) \to (X,\ \tau).$$

О пространстве $(X,\ \tau)$ в этом случае говорят как о *топологическом векторном пространстве.*

10.1.2. *Пусть τ_X — векторная топология. Отображения*

$$x \mapsto x + x_0, \quad x \mapsto \alpha x \quad (x_0 \in X,\ \alpha \in \mathbb{F} \setminus 0)$$

суть гомеоморфизмы $(X,\ \tau_X)$. $\triangleleft\triangleright$

10.1.3. Замечание. Несомненно, что векторная топология τ в пространстве X обладает следующим свойством «линейности»:

$$\tau(\alpha x + \beta y) = \alpha\tau(x) + \beta\tau(y) \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{F} \setminus 0;\ x,\ y \in X),$$

где в соответствии с общими соглашениями (ср. 1.3.5 (1))

$$U_{\alpha x + \beta y} \in \alpha\tau(x) + \beta\tau(y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, U_x \in \tau(x)\ \&\ U_y \in \tau(y))\ \alpha U_x + \beta U_y \subset U_{\alpha x + \beta y}.$$

В этой связи векторную топологию часто называют *линейной*, а топологическое векторное пространство — *линейным топологическим пространством*. Эту терминологию следует употреблять лишь понимая, что топология может обладать свойством «линейности», но не быть линейной. Такова, например, дискретная топология ненулевого векторного пространства.

10.1.4. *Теорема о строении векторной топологии.* *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{N}$ — фильтр в X. Существует векторная топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$, в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$;
(2) *$\mathscr{N}$ состоит из поглощающих множеств;*
(3) *$\mathscr{N}$ имеет базис из уравновешенных множеств. При этом $\tau(x) = x + \mathscr{N}$ для всех $x \in X$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть τ — векторная топология и $\mathscr{N} = \tau(0)$. Из 10.1.2 получаем, что $\tau(x) = x + \mathscr{N}$ для $x \in X$. Ясно также, что (1) есть другая запись непрерывности сложения в нуле (пространства X^2). Условие (2) можно записать в виде $\tau_{\mathbb{F}}(0)x \supset \mathscr{N}$ для каждого $x \in X$, т. е. как условие непрерывности отображений $\alpha \mapsto \alpha x$ в нуле (пространства $\mathbb{R}$) при каждом фиксированном x из X. Условие (3) с учетом (2), в свою очередь, можно записать в виде $\tau_{\mathbb{F}}(0)\mathscr{N} = \mathscr{N}$, т. е. как условие непрерывности умножения на скаляр в нуле (пространства $\mathbb{F} \times X$).

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{N}$ — фильтр, удовлетворяющий (1)–(3). Видно, что $\mathscr{N} \subset \operatorname{fil}\{0\}$. Положим $\tau(x) := x + \mathscr{N}$. Тогда τ — предтопология. Из определения τ и (1) вытекает, что τ — топология, причем сдвиги непрерывны, а сложение непрерывно в нуле. Таким образом, сложение непрерывно в каждой точке X^2. Справедливость (2) и (3) означает, что отображение $(\lambda,\ x) \mapsto \lambda x$ непрерывно в нуле по совокупности переменных и непрерывно в нуле по первому переменному при фиксированном втором. В силу тождества

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

осталось установить непрерывность этого отображения в нуле по второму переменному при фиксированном первом. Иными словами, нужно установить, что $\lambda\mathscr{N} \supset \mathscr{N}$ для $\lambda \in \mathbb{F}$. Для проверки найдем $n \in \mathbb{N}$, для которого $|\lambda| \le n$. Пусть $V \in \mathscr{N}$ и $W \in \mathscr{N}$ таковы, что W уравновешено и $W_1 + \ldots + W_n \subset V$, где $W_k := W$. Тогда $\lambda W = n\,(\lambda/n\,W) \subset nW \subset W_1 + \ldots + W_n \subset V$. $\triangleright$

10.1.5. *Теорема.* *Множество* $\mathrm{VT}(X)$ *всех векторных топологий на* X *является полной решеткой. При этом для любого множества* $\mathscr{E}$ *в* $\mathrm{VT}(X)$ *выполнено*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{VT}(X)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}.$$

$\triangleleft$ Пусть $\overline{\tau} := \sup_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}$. Так как для $\tau \in \mathscr{E}$ сдвиг $x \mapsto x + x_0$ есть гомеоморфизм $(X,\ \tau)$ на $(X,\ \tau)$, то это отображение — гомеоморфизм $(X,\ \overline{\tau})$ на $(X,\ \overline{\tau})$. Привлекая 9.1.13, убеждаемся в том, что для фильтра $\overline{\tau}(0)$ выполнены условия 10.1.4 (1)–10.1.4 (3), поскольку они выполнены для фильтров $\tau(0)$ при $\tau \in \mathscr{E}$. Остается сослаться на 1.2.14. $\triangleright$

10.1.6. *Теорема о прообразе векторной топологии.* *Прообраз векторной топологии при линейном отображении — векторная топология.*

$\triangleleft$ Пусть $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $\omega \in \mathrm{VT}(Y)$. Положим $\tau := T^{-1}(\omega)$. Если $x_\gamma \to x$ и $y_\gamma \to y$ в $(X,\ \tau)$, то, в силу 9.2.8, $Tx_\gamma \to Tx$, $Ty_\gamma \to Ty$ и, стало быть, $T(x_\gamma + y_\gamma) \to T(x + y)$. Последнее в силу 9.2.10 означает, что $x_\gamma + y_\gamma \to x + y$ в $(X,\ \tau)$. Таким образом, $\tau(x) = x + \tau(0)$ для всех $x \in X$ и, кроме того, $\tau(0) + \tau(0) = \tau(0)$. Применяя к линейному соответствию T^{-1} последовательно предложения 3.4.10 и 3.1.8, получаем, что фильтр $\tau(0) = T^{-1}(\omega(0))$ состоит из поглощающих множеств и имеет базис из уравновешенных множеств, так как по 10.1.4 такими свойствами обладает фильтр $\omega(0)$. Вновь привлекая 10.1.4, заключаем: $\tau \in \mathrm{VT}(X)$. $\triangleright$

10.1.7. *Произведение векторных топологий — векторная топология.*

$\triangleleft$ Следует из 10.1.5 и 10.1.6. $\triangleright$

10.1.8. Определение. Пусть A, B — множества в векторном пространстве. Говорят, что A является *B-устойчивым*, если $A + B \subset A$.

10.1.9. *Для каждой векторной топологии τ на X существует, и притом единственная, равномерность $\mathscr{U}_\tau$, имеющая базис из I_X-устойчивых множеств и такая, что $\tau = \tau(\mathscr{U}_\tau)$.*

$\lhd$ Для $U \in \tau(0)$ положим $V_U := \{(x,\ y) \in X^2 :\ \ y - x \in U\}$. Отметим очевидные свойства:

$$I_X \subset V_U; \quad V_U + I_X = V_U; \quad (V_U)^{-1} = V_{-U};$$
$$V_{U_1 \cap U_2} \subset V_{U_1} \cap V_{U_2}; \quad V_{U_1} \circ V_{U_2} \subset V_{U_1 + U_2}$$

для любых U, U_1, $U_2 \in \tau(0)$. Привлекая 10.1.4, выводим, что

$$\mathscr{U}_\tau := \operatorname{fil}\{V_U :\ U \in \tau(0)\}$$

— это равномерность, причем $\tau = \tau(\mathscr{U}_\tau)$. Несомненно также, что $\mathscr{U}_\tau$ имеет базис из I_X-устойчивых множеств.

Если теперь $\mathscr{U}$ еще одна равномерность такая, что $\tau(\mathscr{U}) = \tau$, и W — некоторое I_X-устойчивое окружение $\mathscr{U}$, то $W = V_{W(0)}$. Отсюда и вытекает требуемая единственность. $\rhd$

10.1.10. Определение. Пусть $(X,\ \tau)$ — топологическое векторное пространство. Равномерность $\mathscr{U}_\tau$, построенную в 10.1.9, называют *равномерностью рассматриваемого пространства* X.

10.1.11. Замечание. В дальнейшем при рассмотрении топологических векторных пространств будем считать их наделенными соответствующими равномерностями.

10.2. Локально выпуклые топологии

10.2.1. Определение. Векторную топологию принято называть *локально выпуклой*, если фильтр окрестностей каждой точки имеет базис, состоящий из выпуклых множеств.

10.2.2. ***Теорема о строении локально выпуклой топологии.*** *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{N}$ — фильтр в X. Существует локально выпуклая топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$, в том и только в том случае, если*

(1) $\frac{1}{2}\mathscr{N} = \mathscr{N}$;
(2) *$\mathscr{N}$ имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых поглощающих множеств.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: В силу 10.1.2 отображение $x \mapsto 2x$ — гомеоморфизм. Это и означает, что $1/2\,\mathscr{N} = \mathscr{N}$. Возьмем теперь $U \in \mathscr{N}$. По условию имеется выпуклое множество $V \in \mathscr{N}$ такое, что $V \subset U$. Применяя 10.1.4, найдем уравновешенное множество W, для которого $W \subset V$. Привлекая формулу Моцкина 3.1.13 и 3.1.14, убеждаемся в том, что выпуклая оболочка $\mathrm{co}(W)$ абсолютно выпукла. При этом $W \subset \mathrm{co}(W) \subset V \subset U$.

$\Leftarrow$: Абсолютно выпуклое множество уравновешено. Значит, $\mathscr{N}$ удовлетворяет 10.1.4 (2), 10.1.4 (3). Если $V \in \mathscr{N}$ и W выпукло, $W \in \mathscr{N}$ и $W \subset V$, то $1/2\,W \in \mathscr{N}$. Помимо этого, $1/2\,W + 1/2\,W \subset W \subset V$ из-за выпуклости W. Последнее означает, что $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$. Остается сослаться на 10.1.4. $\rhd$

10.2.3. *Следствие.* *Множество* $\mathrm{LCT}\,(X)$ *всех локально выпуклых топологий на* X *представляет собой полную решетку. При этом для любого множества* $\mathscr{E}$ *в* $\mathrm{LCT}\,(X)$ *выполнено*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{LCT}\,(X)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}. \quad \lhd\rhd$$

10.2.4. *Следствие.* *Прообраз локально выпуклой топологии при линейном отображении — локально выпуклая топология.* $\lhd\rhd$

10.2.5. *Следствие.* *Произведение локально выпуклых топологий — локально выпуклая топология.* $\lhd\rhd$

10.2.6. *Топология мультинормированного пространства является локально выпуклой.* $\lhd\rhd$

10.2.7. Определение. Пусть τ — локально выпуклая топология на X. Множество всех всюду определенных непрерывных полунорм на X называют *зеркалом* (реже *спектром*) топологии τ и обозначают $\mathfrak{M}_\tau$. Мультинормированное пространство $(X,\ \mathfrak{M}_\tau)$ называют *ассоциированным* с $(X,\ \tau)$.

10.2.8. *Теорема.* *Локально выпуклая топология совпадает с топологией ассоциированного мультинормированного пространства.*

$\lhd$ Пусть τ — рассматриваемая локально выпуклая топология в X и $\omega := \tau(\mathfrak{M}_\tau)$ — топология ассоциированного пространства $(X,\ \mathfrak{M}_\tau)$. Возьмем $V \in \tau(0)$. В силу 10.2.2 найдется абсолютно выпуклая окрестность нуля $B \in \tau(0)$ такая, что $B \subset V$. На основании 3.8.7

$$\{p_B < 1\} \subset B \subset \{p_B \le 1\}.$$

Очевидно, что p_B — непрерывный функционал (ср. 7.5.1), т. е. $p_B \in \mathfrak{M}_\tau$ и, стало быть, $\{p_B < 1\} \in \omega(0)$. Следовательно, $V \in \omega(0)$. Таким образом, привлекая 5.2.10, имеем $\omega(x) = x + \omega(0) \supset x + \tau(0) = \tau(x)$, т. е. $\omega \geq \tau$. Помимо этого, $\tau \geq \omega$ по определению. $\triangleright$

10.2.9. Определение. Векторное пространство, наделенное отделимой локально выпуклой топологией, называют *локально выпуклым пространством.*

10.2.10. Замечание. Теорему 10.2.8 в несколько суженном виде часто формулируют словами: «понятие локально выпуклого пространства и понятие отделимого мультинормированного пространства равнообъемны».

В этой связи при изучении локально выпуклых пространств используют по мере надобности терминологию, связанную с ассоциативным мультинормированным пространством (ср. 5.2.13).

10.2.11. Определение. Пусть τ — локально выпуклая топология в X. Символом $(X,\ \tau)'$ (или, короче, X') обозначают подпространство $X^{\#}$, состоящее из непрерывных линейных функционалов. Пространство $(X,\ \tau)'$ называют *сопряженным* (или *τ-сопряженным*) к $(X,\ \tau)$.

10.2.12. $(X,\ \tau)' = \cup\{|\partial|(p) :\ p \in \mathfrak{M}_\tau\}$. $\triangleleft\triangleright$

10.2.13. ***Теорема.*** *Отображение штрихования $\tau \mapsto (X,\ \tau)'$, действующее из $\mathrm{LCT}\,(X)$ в $\mathrm{Lat}(X^{\#})$, сохраняет точные верхние границы, т. е. для любого множества $\mathscr{E}$ в $\mathrm{LCT}\,(X)$ выполнено*

$$(X,\ \sup \mathscr{E})' = \sup\{(X,\ \tau)' :\ \tau \in \mathscr{E}\}.$$

$\triangleleft$ Если $\mathscr{E} = \varnothing$, то $\sup \mathscr{E}$ — это тривиальная топология τ_0 в X и, стало быть, $(X,\ \tau_0)' = 0 = \inf \mathrm{Lat}(X^{\#}) = \sup_{\mathrm{Lat}(X^{\#})} \varnothing$. В силу 9.2.7 отображение штрихования возрастает. Учитывая 2.1.5, для непустого $\mathscr{E}$ имеем

$$(X,\ \sup \mathscr{E})' \geq \sup\{(X,\ \tau)' :\ \tau \in \mathscr{E}\}.$$

Если $f \in (X,\ \sup \mathscr{E})'$, то ввиду 10.2.12 и 9.1.13 существуют топологии $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathscr{E}$ такие, что $f \in (X,\ \tau_1 \vee \ldots \vee \tau_n)'$. С помощью 10.2.12 и 5.3.7 найдем $p_1 \in \mathfrak{M}_{\tau_1}, \dots, p_n \in \mathfrak{M}_{\tau_n}$, для которых $f \in |\partial|(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$. Привлекая 3.5.7 и 3.7.9, убеждаемся, что $|\partial|(p_1 + \ldots + p_n) = |\partial|(p_1) + \ldots + |\partial|(p_n)$. Окончательно

$$f \in (X,\ \tau_1)' + \ldots + (X,\ \tau_n)' = (X,\ \tau_1)' \vee \ldots \vee (X,\ \tau_n)'. \ \triangleright$$

10.3. Двойственность векторных пространств

10.3.1. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$. Пусть, далее, задана *билинейная форма* (или, как иногда говорят, *бракетирование*) $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ из $X \times Y$ в $\mathbb{F}$, т. е. отображение, линейное по каждому переменному. Для $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$\begin{aligned} &\langle x| : y \mapsto \langle x\,|\,y\rangle, \quad \langle\,\cdot\,| : X \to \mathbb{F}^Y, \quad \langle X| \subset Y^{\#}; \\ &|y\rangle : x \mapsto \langle x\,|\,y\rangle, \quad |\,\cdot\,\rangle : Y \to \mathbb{F}^X, \quad |Y\rangle \subset X^{\#}. \end{aligned}$$

Возникающие отображения $\langle\cdot\,|$ и $|\,\cdot\rangle$ называют соответственно *бра-отображением* и *кет-отображением*. Аналогично функционалы из $\langle X\,|$ называют *бра-функционалами*, а из $|\,Y\rangle$ — *кет-функционалами*.

10.3.2. *Бра-отображение и кет-отображение — линейные операторы.* $\triangleleft\triangleright$

10.3.3. Определение. Бракетирование X и Y называют *двойственностью*, если бра-отображение и кет-отображение суть мономорфизмы. В этом случае говорят, что X и Y приведены в двойственность, или составляют двойственную пару, или что Y двойственно к X и т. п., и пишут $X \leftrightarrow Y$. Бра-отображение и кет-отображение называют в этой ситуации *дуализациями*.

10.3.4. Примеры.

(1) Пусть $X \leftrightarrow Y$ и $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ — соответствующая двойственность. Для $(y,\ x) \in Y \times X$ положим $\langle y\,|\,x\rangle := \langle x\,|\,y\rangle$. Видно, что возникшее бракетирование — это двойственность Y и X. При этом дуализации в исходной и во вновь возникшей двойственностях одни и те же. В этой связи указанные двойственности, как правило, не различают (ср. 10.3.3). Таким образом, можно сказать, что Y двойственно к X в том и только в том случае, если X двойственно к Y. Отметим здесь же, что отображение $\langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re}\langle x\,|\,y\rangle$ приводит в двойственность вещественные основы $X_{\mathbb{R}}$ и $Y_{\mathbb{R}}$. Допуская вольность, для обозначения возникающей двойственности $X_{\mathbb{R}} \leftrightarrow Y_{\mathbb{R}}$ изредка используют прежнее обозначение, т. е. полагают $\langle x\,|\,y\rangle := \langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$, имея в виду, что x и y принадлежат вещественным основам рассматриваемых пространств.

(2) Пусть H — гильбертово пространство. Скалярное произведение приводит в двойственность H и H_*. Отображение штрихования при этом совпадает с кет-отображением.

(3) Пусть $(X,\ \tau)$ — локально выпуклое пространство и X' — сопряженное пространство. Бракетирование $(x,\ x') \mapsto x'(x)$ приводит X и X' в двойственность.

(4) Пусть X — векторное пространство и, как обычно, $X^{\#} := \mathscr{L}(X,\ \mathbb{F})$ — сопряженное пространство. Ясно, что отображение $(x,\ x^{\#}) \mapsto x^{\#}(x)$ приводит эти пространства в двойственность.

10.3.5. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$. Прообраз в X тихоновской топологии в $\mathbb{F}^Y$ при бра-отображении называют *бра-топологией* или *слабой топологией в* X, наведенной двойственностью с Y, и обозначают $\sigma(X,\ Y)$. Бра-топологию $\sigma(X,\ Y)$ для двойственности $Y \leftrightarrow X$ называют *кет-топологией* для двойственности $X \leftrightarrow Y$ или *слабой топологией в* Y, наведенной двойственностью с X.

10.3.6. *Бра-топология — это слабейшая топология, в которой непрерывны все кет-функционалы. Кет-топология — это слабейшая топология, в которой непрерывны все бра-функционалы.*

$\lhd$ $x_\gamma \to x$ (в $\sigma(X,\ Y)$) $\Leftrightarrow$ $\langle x_\gamma \to \langle x\,|$ (в $\mathbb{F}^Y$) $\Leftrightarrow$ $(\forall\, y \in Y)$ $\langle x_\gamma\,|(y) \to \langle x\,|(y)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall\, y \in Y)$ $\langle x_\gamma\,|\,y\rangle \to \langle x\,|\,y\rangle$ $\Leftrightarrow$ $(\forall\, y \in Y)$ $|\,y\rangle(x_\gamma) \to |\,y\rangle(x)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall\, y \in Y)$ $x_\gamma \to x$ (в $|\,y\rangle^{-1}(\tau_{\mathbb{F}})$) $\rhd$

10.3.7. Замечание. Обозначение $\sigma(X,\ Y)$, как видно, согласовано с обозначением слабой мультинормы 5.1.10 (4). Именно $\sigma(X,\ Y)$ есть топология мультинормы $\{|\langle\cdot\,|\,y\rangle| :\ y \in Y\}$. Аналогично $\sigma(Y,\ X)$ есть топология мультинормы $\{|\langle x\,|\,\cdot\rangle| :\ x \in X\}$. $\lhd\rhd$

10.3.8. *Пространства* $(X,\ \sigma(X,\ Y))$ *и* $(Y,\ \sigma(Y,\ X))$ *локально выпуклы.*

$\lhd$ Следует из 10.2.4 и 10.2.5. $\rhd$

10.3.9. *Теорема о дуализациях.* *Дуализации суть изоморфизмы двойственных пространств на соответствующие слабо сопряженные пространства.*

$\lhd$ Пусть $X \leftrightarrow Y$. Нужно установить точность последовательностей

$$0 \to X \xrightarrow{\langle\cdot|} (Y,\ \sigma(Y,\ X))' \to 0,$$

$$0 \to Y \xrightarrow{|\cdot\rangle} (X,\ \sigma(X,\ Y))' \to 0.$$

Поскольку кет-отображение для двойственности $X \leftrightarrow Y$ есть бра-отображение для двойственности $Y \leftrightarrow X$, достаточно проверить точность первой последовательности. Бра-отображение — мономорфизм по определению 10.3.3. Помимо этого, из 10.2.13 и 10.3.6 вытекает, что

$$(Y,\ \sigma(Y,\ X))' = (Y,\ \sup\{\langle\, x\,|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}):\ x \in X\})' =$$
$$= \sup\{(Y,\ \langle\, x\,|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))':\ x \in X\} =$$
$$= \mathscr{L}(\{(Y,\ f^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))':\ f \in \langle X|\}) = \langle X|,$$

так как по 5.3.7 и 2.3.12 выполнено

$$(Y,\ f^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))' = \{\lambda f:\ \lambda \in \mathbb{F}\} \quad (f \in Y^{\#}).\ \rhd$$

10.3.10. Замечание. Теорему 10.3.9 часто называют «теоремой об общем виде слабо непрерывного функционала». В этом проявляется удобное общее правило — добавлять слово «слабо» при использовании объектов и свойств, связанных со слабыми топологиями. Отметим здесь же, что в силу 10.3.9 пример 10.3.4 (3) исчерпывает, по сути дела, все возможные двойственности. В этой связи в соответствии с 5.1.11 в дальнейшем (как и прежде) часто использовано обозначение $(x,\ y) := \langle x\,|\,y\rangle$, поскольку это не должно привести к недоразумениям. По тем же причинам не различают двойственное и слабо сопряженное пространства. Другими словами, при рассмотрении фиксированной двойственности $X \leftrightarrow Y$ иногда не отличают X от $(Y,\ \sigma(Y,\ X))'$, а Y от $(X,\ \sigma(X,\ Y))'$, что позволяет применять записи $X' = Y$ и $Y' = X$.

10.4. Топологии, согласованные с двойственностью

10.4.1. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$ и τ — локально выпуклая топология в X. Говорят, что τ *согласована с двойственностью*, если $(X,\ \tau)' = |\,Y\rangle$. Говорят, что локально выпуклая топология ω в Y согласована с двойственностью ($X \leftrightarrow Y$, если ω согласована с двойственностью $Y \leftrightarrow X$, т. е.) при выполнении равенства $(Y,\ \omega)' = \langle X|$.

10.4.2. *Слабые топологии согласованы с наводящей их двойственностью.*

$\lhd$ Следует из 10.3.9. $\rhd$

10.4.3. *Пусть $\tau(X,\ Y)$ — точная верхняя граница множества всех локально выпуклых топологий в X, согласованных с двойственностью. Тогда топология $\tau(X,\ Y)$ также согласована с двойственностью.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{E}$ — множество таких топологий. По теореме 10.2.13

$$(X,\ \tau(X,\ Y))' = (X,\ \sup \mathscr{E})' =$$
$$= \sup\{(X,\ \tau)' :\ \tau \in \mathscr{E}\} = \sup\{|\,Y\rangle :\ \tau \in \mathscr{E}\} = |\,Y\rangle,$$

ибо $\mathscr{E}$ не пусто по 10.4.2. $\rhd$

10.4.4. Определение. Топологию $\tau(X,\ Y)$, фигурирующую в предложении 10.4.3, т. е. сильнейшую локально выпуклую топологию в X, согласованную с двойственностью $X \leftrightarrow Y$, называют *топологией Макки* (в X, наведенной двойственностью $X \leftrightarrow Y$).

10.4.5. ***Теорема Макки — Аренса.*** *Локально выпуклая топология τ в X согласована с двойственностью $X \leftrightarrow Y$ в том и только в том случае, если*

$$\sigma(X,\ Y) \le \tau \le \tau(X,\ Y).$$

$\lhd$ По 10.2.13 отображение $\tau \mapsto (X,\ \tau)'$ сохраняет точные верхние границы и, следовательно, возрастает. Таким образом, для τ, лежащей в рассматриваемом промежутке топологий, на основании 10.4.2 и 10.4.3 справедливо

$$|\,Y\rangle = (X,\ \sigma(X,\ Y)) \subset (X,\ \tau)' \subset (X,\ \tau(X,\ Y))' = |\,Y\rangle.$$

Оставшаяся часть теоремы очевидна. $\rhd$

10.4.6. ***Теорема Макки.*** *Ограниченные множества во всех топологиях, согласованных с двойственностью, одни и те же.*

$\lhd$ При усилении топологии количество ограниченных множеств уменьшается. Поэтому ввиду 10.4.5 нужно убедиться лишь в том, что если множество U слабо ограничено в X (= ограничено в бра-топологии), то U ограничено в топологии Макки.

Возьмем полунорму p из зеркала топологии Макки и покажем, что $p(U)$ ограничено в $\mathbb{R}$. Положим $X_0 := X/\ker p$ и $p_0 := p_{X/\ker p}$. Учитывая 5.2.14, видим, что p_0 — это норма. Пусть $\varphi : X \to X_0$ — каноническое отображение. Бесспорно, что множество $\varphi(U)$ слабо ограничено в $(X_0,\ p_0)$. Из 7.2.7 вытекает, что $\varphi(U)$ ограничено по норме p_0. Поскольку $p_0 \circ \varphi = p$, то U ограничено в $(X,\ p)$. $\rhd$

10.4.7. *Следствие.* *Пусть X — нормированное пространство. Топология Макки $\tau(X,\ X')$ совпадает с исходной топологией, порожденной нормой в пространстве X.*

$\triangleleft$ Достаточно сослаться на критерий Колмогорова 5.4.5, по которому топология $\tau(X,\ X')$, содержащая исходную топологию, нормируема, и привлечь предложение 5.3.4. $\triangleright$

10.4.8. *Теорема строгой отделимости.* *Пусть $(X,\ \tau)$ — локально выпуклое пространство, K и V — непустые выпуклые множества в X, причем K компактно, V замкнуто и $K \cap V = \varnothing$. Тогда существует функционал $f \in (X,\ \tau)'$ такой, что*

$$\sup \operatorname{Re} f(K) < \inf \operatorname{Re} f(V).$$

$\triangleleft$ Локально выпуклое пространство, конечно же, регулярно. Отсюда с учетом компактности K следует, что для подходящей выпуклой окрестности нуля W множество $U := K + W$ не пересекается с V (достаточно рассмотреть базисы, порожденные множествами вида $K + \overline{W}$ и $V + \overline{W}$, где $\overline{W}$ — замкнутая окрестность нуля). На основании 3.1.10 заключаем, что U выпукло. Помимо этого, $K \subset \operatorname{int} U = \operatorname{core} U$. По теореме отделимости Эйдельгайта 3.8.14 найдется функционал $l \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$, обладающий тем свойством, что гиперплоскость $\{l = 1\}$ в $X_{\mathbb{R}}$ разделяет V и U и не содержит точек ядра U. Очевидно, что l ограничен сверху на W и, стало быть, $l \in (X_{\mathbb{R}}, \tau)'$ по критерию 7.5.1. Если $f := \mathbf{Re}^{-1} l$, то, в связи с 3.7.5, $f \in (X,\ \tau)'$. Ясно, что функционал f — искомый. $\triangleright$

10.4.9. *Теорема Мазура.* *Выпуклые замкнутые множества во всех согласованных с двойственностью топологиях одни и те же.*

$\triangleleft$ При усилении топологии количество замкнутых множеств увеличивается. Значит, ввиду 10.4.5 нужно убедиться лишь в том, что если U выпукло и замкнуто в топологии Макки, то U слабо замкнуто. Последнее несомненно, ибо, по теореме 10.4.8, U есть пересечение слабо замкнутых множеств типа $\{\mathbf{Re}\, f \le t\}$, где f — (слабо) непрерывный линейный функционал, а $t \in \mathbb{R}$. $\triangleright$

10.5. Поляры

10.5.1. Определение. Пусть X, Y — некоторые множества и $F \subset X \times Y$ — соответствие. Для множеств U в X и V в Y полагают

$$\pi(U) := \pi_F(U) := \{y \in Y : \ F^{-1}(y) \supset U\};$$
$$\pi^{-1}(V) := \pi_F^{-1}(V) := \{x \in X : \ F(u) \supset V\}.$$

При этом $\pi(U)$ называют (***прямой***) ***полярой*** U, а множество $\pi^{-1}(V)$ — (***обратной***) ***полярой*** V.

10.5.2. *Имеют место утверждения*:

(1) $\pi(u) := \pi(\{u\}) = F(u), \ \pi(U) = \cap_{u \in U} \pi(u)$;
(2) $\pi(\cup_{\xi \in \Xi} U_\xi) = \cap_{\xi \in \Xi} \pi(U_\xi)$;
(3) $\pi_F^{-1}(V) = \pi_{F^{-1}}(V)$;
(4) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \pi(U_1) \supset \pi(U_2)$;
(5) $U \times V \subset F \Rightarrow V \subset \pi(U), \ U \subset \pi^{-1}(V)$;
(6) $U \subset \pi^{-1}(\pi(U))$. $\lhd\rhd$

10.5.3. ***Критерий Акилова.*** *Множество U в X является полярой некоторого множества в Y в том и только в том случае, если для каждого $x \in X \setminus U$ найдется $y \in Y$, для которого*

$$U \subset \pi^{-1}(y), \quad x \notin \pi^{-1}(y).$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: Если $U = \pi^{-1}(V)$, то будет $U = \cap_{v \in V} \pi^{-1}(v)$ на основании 10.5.2 (1).

$\Leftarrow$: Включение $U \subset \pi^{-1}(y)$ означает, что $y \in \pi(U)$. Итак, по условию $U = \cap_{y \in \pi(U)} \pi^{-1}(y) = \pi^{-1}(\pi(U))$. $\rhd$

10.5.4. ***Следствие.*** *Множество $\pi^{-1}(\pi(U))$ — это наименьшая (по включению) поляра, содержащая множество U.* $\lhd\rhd$

10.5.5. Определение. Множество $\pi_F^{-1}(\pi_F(U))$ называют ***биполярой*** множества U (относительно соответствия F).

10.5.6. Примеры.

(1) Пусть $(X, \ \sigma)$ — упорядоченное множество, а U — подмножество X. Тогда $\pi_\sigma(U)$ — это совокупность всех верхних границ U (ср. 1.2.7).

(2) Пусть $(H, \ (\cdot\,, \cdot)_H)$ — гильбертово пространство и $F := \{(x, \ y) \in H^2 : \ (x, \ y)_H = 0\}$. Тогда для всех U в H выполнено $\pi(U) = \pi^{-1}(U) = U^\perp$. Биполяра U в этом случае совпадает с замыканием линейной оболочки U.

(3) Пусть X — нормированное пространство и X' — сопряженное пространство. Пусть $F := \{(x,\ x') :\ x'(x) = 0\}$. Тогда $\pi(X_0) = X_0^{\perp}$ и $\pi^{-1}(\mathscr{X}_0) = {}^{\perp}\mathscr{X}_0$ для подпространства X_0 в X и подпространства $\mathscr{X}_0$ в X' (см. 7.6.8). При этом $\pi^{-1}(\pi(X_0)) = \operatorname{cl} X_0$ в силу 7.5.14.

10.5.7. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$. Положим

$$\operatorname{pol} := \{(x,\ y) \in X \times Y :\ \operatorname{Re}\langle x \,|\, y\rangle \le 1\};$$
$$\operatorname{abs}\operatorname{pol} := \{(x,\ y) \in X \times Y :\ |\langle x \,|\, y\rangle| \le 1\}.$$

Для прямой и обратной поляр относительно соответствия pol используют единое название «поляры» и обозначения $\pi(U)$ и $\pi(V)$; в случае соответствия abs pol говорят об ***абсолютных полярах*** и пишут U° и V° (для $U \subset X$ и $V \subset Y$).

10.5.8. *Теорема о биполяре.* *Биполяра $\pi^2(U) := \pi(\pi(U))$ — это наименьший слабо замкнутый конический отрезок, содержащий множество U.*

◁ Следует из 10.4.8 и критерия Акилова. ▷

10.5.9. *Теорема об абсолютной биполяре.* *Абсолютная биполяра $U^{\circ\circ} := (U^\circ)^\circ$ — это наименьшее слабо замкнутое абсолютно выпуклое множество, содержащее множество U.*

◁ Достаточно заметить, что поляра уравновешенного множества совпадает с его абсолютной полярой, и применить 10.5.8. ▷

10.6. Слабо компактные выпуклые множества

10.6.1. *Пусть X — вещественное локально выпуклое пространство и $p : X \to \mathbb{R}$ — непрерывный сублинейный функционал на X. Тогда (топологический) субдифференциал $\partial(p)$ компактен в топологии $\sigma(X', X)$.*

◁ Положим $Q := \prod_{x \in X} [-p(-x),\ p(x)]$ и наделим Q тихоновской топологией. Ясно, что $\partial(p) \subset Q$ и тихоновская топология в Q индуцирует в $\partial(p)$ ту же топологию, что и $\sigma(X',\ X)$. Несомненно, что множество $\partial(p)$ замкнуто в Q из-за непрерывности p. Учитывая теперь теорему Тихонова 9.4.8 и 9.4.9, заключаем, что $\partial(p)$ является $\sigma(X',\ X)$-компактным множеством. ▷

10.6.2. *Субдифференциал любой непрерывной полунормы слабо компактен.* $\lhd\rhd$

10.6.3. ***Теорема о строении субдифференциала.*** *Пусть X — вещественное векторное пространство. Множество U в $X^{\#}$ является субдифференциалом (всюду определенного и притом единственного) сублинейного функционала $s_U : X \to \mathbb{R}$ в том и только в том случае, если U непусто, выпукло и $\sigma(X^{\#},\ X)$-компактно.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $U = \partial(s_U)$ для некоторого s_U. Единственность s_U обеспечена 3.6.6. В связи с 10.2.12 понятно, что зеркало топологии Макки $\tau(X,\ X^{\#})$ — это сильнейшая мультинорма в X (см. 5.1.10 (2)). Отсюда выводим, что функционал s_U непрерывен в $\tau(X,\ X^{\#})$. На основании 10.6.1 множество U компактно в $\sigma(X^{\#},\ X)$. Выпуклость и непустота U очевидны.

$\Leftarrow$: Положим $s_U(x) := \sup\{l(x) :\ \ l \in U\}$. Бесспорно, что s_U — сублинейный функционал и $\operatorname{dom} s_U = X$. По определению $U \subset \partial(s_U)$. Если же $l \in \partial(s_U)$ и $l \notin U$, то по теореме строгой отделимости 10.4.8 и теореме о дуализациях 10.3.9 для некоторого $x \in X$ будет $s_U(x) < l(x)$. Получаем противоречие. $\rhd$

10.6.4. Определение. Сублинейный функционал s_U, построенный в теореме 10.6.3, называют *опорной функцией* множества U.

10.6.5. ***Теорема Крейна — Мильмана.*** *Каждое компактное выпуклое множество в локально выпуклом пространстве является замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.*

$\lhd$ Пусть U — такое множество в пространстве X. Можно считать, что пространство X — вещественное и что $U \neq \varnothing$. В силу 9.4.12, U компактно в топологии $\sigma(X,\ X')$. Поскольку $\sigma(X,\ X')$ индуцируется в X топологией $\sigma(X'^{\#},\ X')$ в $X'^{\#}$, то $U = \partial(s_U)$. Здесь (см. 10.6.3) $s_U : X' \to \mathbb{R}$ действует по правилу $s_U(x') := \sup x'(U)$. По теореме Крейна — Мильмана для субдифференциалов 3.6.5 множество крайних точек $\operatorname{ext}(U)$ не пусто. Замыкание выпуклой оболочки множества $\operatorname{ext}(U)$ является субдифференциалом по теореме 10.6.3. Кроме того, это множество имеет s_U своей опорной функцией и, стало быть, совпадает с U (ср. 3.6.6). $\rhd$

10.6.6. *Пусть $X \leftrightarrow Y$ и S — конический отрезок в X. Пусть, далее, p_S — функционал Минковского S. Поляра $\pi(S)$ служит прообразом при кет-отображении (алгебраического) субдифференциала*

$\partial(p_S)$, *т. е.*

$$\pi(S) = |\,\partial(p_S)\,\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}.$$

Если S — абсолютно выпуклое множество, то абсолютная поляра S° является прообразом при кет-отображении (*алгебраического*) *субдифференциала полунормы $|\partial|(p_S)$, т. е.*

$$S^\circ = |\,|\partial|(p_S)\,\rangle^{-1}.$$

$\lhd$ Если $y \in Y_{\mathbb{R}}$ таков, что $y \in |\,\partial(p_S)\,\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$, то $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$ входит в $\partial(p_S)$. Значит, для $x \in S$ выполнено $\operatorname{Re}\langle x\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} = |\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \le p_S(x) \le 1$, ибо $S \subset \{p_S \le 1\}$ по теореме о функционале Минковского 3.8.7. Следовательно, $y \in \pi(S)$.

Если, в свою очередь, $y \in \pi(S)$, то элемент $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$ входит в $\partial(p_S)$. В самом деле, для любого элемента x из $X_{\mathbb{R}}$ при $\alpha > p_S(x)$ имеем $1 > p_S(\alpha^{-1}x)$, т. е. $\alpha^{-1}x \in \{p_S < 1\} \subset S$. Отсюда $\langle \alpha^{-1}x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\langle \alpha^{-1}x\,|\,y\rangle = \alpha^{-1}\operatorname{Re}\langle x\,|\,y\rangle \le 1$. Окончательно получаем $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \le \alpha$. Из-за произвольности выбора α последнее неравенство означает, что $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \le p_S(x)$. Иначе говоря, $y \in |\,\partial(p_s)\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$. Тем самым равенство $\pi(S) = |\,\partial(p_S)\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$ установлено. Оставшаяся часть утверждения следует из свойств комплексификатора 3.7.3 и 3.7.9. $\rhd$

10.6.7. *Теорема Алаоглу — Бурбаки.* *Поляра окрестности нуля любой согласованной с двойственностью топологии является слабо компактным выпуклым множеством.*

$\lhd$ Пусть U — окрестность нуля в пространстве X и $\pi(U)$ — поляра U (в двойственности $X \leftrightarrow X'$). Так как $U \supset \{p \le 1\}$ для некоторой непрерывной полунормы p, на основании 10.5.2 (4), $\pi(U) \subset \pi(\{p \le 1\}) = \pi(B_p) = B_p^\circ$. Привлекая 10.6.6 и учитывая, что p есть функционал Минковского B_p, видим, что $\pi(U) \subset |\partial|(p)$. В силу 10.6.2 топологический субдифференциал полунормы $|\partial|(p)$ является $\sigma(X', X)$-компактным. По определению $\pi(U)$ — слабо замкнутое множество. Остается сослаться на 9.4.9, чтобы убедиться в $\sigma(X', X)$-компактности $\pi(U)$. Выпуклость $\pi(U)$ несомненна. $\rhd$

10.7. Рефлексивные пространства

10.7.1. *Критерий Какутани.* *Нормированное пространство рефлексивно в том и только в том случае, если единичный шар в нем слабо компактен.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть X рефлексивно, т. е. $''(X) = X''$. Иными словами, образ X при двойном штриховании совпадает с X''. Так как шар $B_{X''}$ — это поляра шара $B_{X'}$ при двойственности $X'' \leftrightarrow X'$, то $B_{X''}$ — это $\sigma(X'', X')$-компактное множество по теореме Алаоглу — Бурбаки 10.6.7. Остается эаметить, что $B_{X''}$ есть (образ при двойном штриховании) B_X, а $\sigma(X, X')$ есть (прообраз при двойном штриховании) $\sigma(X'', X')$.

$\Leftarrow$: Рассмотрим двойственность $X'' \leftrightarrow X'$. По определению шар $B_{X''}$ представляет собой биполяру B_X (точнее говоря, биполяру множества $(B_X)''$). Привлекая теорему об абсолютной биполяре 10.5.9 и учитывая, что слабая топология $\sigma(X, X')$ индуцирована в X топологией $\sigma(X'', X')$, заключаем, что $B_{X''} = B_X$ (из-за бесспорной абсолютной выпуклости и замкнутости этого множества, обеспеченной условием его компактности). Таким образом, X рефлексивно. $\rhd$

10.7.2. *Следствие.* *Нормированное пространство будет рефлексивным в том и только в том случае, если любое ограниченное замкнутое выпуклое множество в нем слабо компактно.* $\lhd\rhd$

10.7.3. *Следствие.* *Каждое замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.*

$\lhd$ По теореме Мазура 10.4.9 рассматриваемое подпространство, а потому и шар в нем слабо замкнуты. Стало быть, достаточно дважды применить критерий Какутани. $\rhd$

10.7.4. *Теорема Петтиса.* *Банахово пространство и сопряженное к нему пространство рефлексивны* (*или не рефлексивны*) *одновременно.*

$\lhd$ Если X рефлексивно, то $\sigma(X', X)$ совпадает с $\sigma(X', X'')$, стало быть, учитывая теорему Алаоглу — Бурбаки 10.6.7, заключаем, что $B_{X'}$ — это $\sigma(X', X'')$-компактное множество. Значит, X' рефлексивно. Если же рефлексивно X', то по уже доказанному рефлексивно X''. Но X, будучи банаховым пространством, является замкнутым подпространством X''. Итак, X рефлексивно в силу 10.7.3. $\rhd$

10.7.5. *Теорема Джеймса.* *Банахово пространство рефлексивно в том и только в том случае, если любой непрерывный* (*вещественно*) *линейный функционал принимает наибольшее значение на единичном шаре этого пространства.*

10.8. Пространство $C(Q,\ \mathbb{R})$

10.8.1. Замечание. Всюду в текущем параграфе Q — непустой компакт (= непустое компактное хаусдорфово пространство), а $C(Q,\ \mathbb{R})$ — это множество непрерывных вещественных функций на Q. Множество $C(Q,\ \mathbb{R})$ без особых на то указаний рассматривают с естественными «поточечными» алгебраическими операциями и отношением порядка, а также с топологией нормы $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$, отвечающей метрике Чебышёва (см. 4.6.8). В этом смысле трактуют высказывания: «$C(Q,\ \mathbb{R})$ — это векторная решетка», «$C(Q,\ \mathbb{R})$ — это банахова алгебра» и им подобные. Если в $C(Q,\ \mathbb{R})$ вводят какие-либо иные структуры, то это обязательно оговаривают явно.

10.8.2. Определение. Подмножество L в $C(Q,\ \mathbb{R})$ называют ***подрешеткой***, если для $f_1,\ f_2 \in L$ выполнено $f_1 \vee f_2 \in L$, $f_1 \wedge f_2 \in L$, где, как обычно,

$$f_1 \vee f_2(q) := f_1(q) \vee f_2(q),$$
$$f_1 \wedge f_2(q) := f_1(q) \wedge f_2(q) \quad (q \in Q).$$

10.8.3. Замечание. Следует иметь в виду, что быть подрешеткой в пространстве $C(Q,\ \mathbb{R})$ — это больше, чем быть решеткой относительно порядка, индуцированного из $C(Q,\ \mathbb{R})$.

10.8.4. Примеры.

(1) $\varnothing$; $C(Q,\ \mathbb{R})$; замыкание подрешетки.

(2) Пересечение любого множества подрешеток — снова подрешетка.

(3) Пусть L — некоторая подрешетка и Q_0 — подмножество Q. Положим

$$L_{Q_0} := \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ (\exists\, g \in L)\ g(q) = f(q) \quad (q \in Q_0)\}.$$

Тогда L_{Q_0} — подрешетка. При этом $L \subset L_{Q_0}$.

(4) Пусть Q_0 — компактное подмножество Q. Для подрешетки L в $C(Q,\ \mathbb{R})$ положим

$$L\big|_{Q_0} := \big\{ f\big|_{Q_0} :\ f \in L \big\}.$$

Таким образом, выполнено

$$L_{Q_0} = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ f\big|_{Q_0} \in L\big|_{Q_0}\}.$$

Ясно, что $L\big|_{Q_0}$ — подрешетка в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$. Если при этом L — *векторная подрешетка* в $C(Q,\ \mathbb{R})$, т. е. векторное подпространство и одновременно подрешетка $C(Q,\ \mathbb{R})$, то $L\big|_{Q_0}$ — векторная подрешетка в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$ (разумеется, если $Q_0 \neq \varnothing$).

(5) Пусть $Q := \{1,\ 2\}$. Тогда $C(Q,\ \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$. Любая ненулевая векторная подрешетка в $\mathbb{R}^2$ задается в виде

$$\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2\}$$

для некоторых $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$.

(6) Пусть L — векторная подрешетка $C(Q,\ \mathbb{R})$. Если $q \in Q$, то возникает альтернатива: либо $L_{\{q\}} = C(Q,\ \mathbb{R})$, либо $L_{\{q\}} = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ f(q) = 0\}$. Если же $q_1,\ q_2$ — две различные точки Q и $L\big|_{\{q_1,q_2\}} \neq 0$, то в силу 10.8.4 (5) найдутся числа $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$L_{\{q_1,q_2\}} = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ \alpha_1 f(q_1) = \alpha_2 f(q_2)\}. \ \triangleleft\triangleright$$

10.8.5. *Пусть L — подрешетка в пространстве $C(Q,\ \mathbb{R})$. Функция $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ входит в замыкание L в том и только в том случае, если для любых $\varepsilon > 0$ и $(x,\ y) \in Q^2$ существует функция $\overline{f} := f_{x,y,\varepsilon} \in L$, удовлетворяющая условиям*

$$\overline{f}(x) - f(x) < \varepsilon, \quad \overline{f}(y) - f(y) > -\varepsilon.$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: На основании 3.2.10 и 3.2.11 можно считать, что $f = 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $x \in Q$ и рассмотрим функцию $g_y := f_{x,y,\varepsilon} \in L$. Пусть $V_y := \{q \in Q :\ g_y(q) > -\varepsilon\}$. Тогда V_y — открытое множество и $y \in V_y$. В силу компактности Q найдутся $y_1, \dots, y_n \in Q$, для которых $Q = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Положим $f_x := g_{y_1} \vee \dots \vee g_{y_n}$. Ясно, что $f_x \in L$. Помимо этого, $f_x(x) < \varepsilon$ и $f_x(y) > -\varepsilon$ при всех $y \in Q$. Пусть теперь $U_x := \{q \in Q :\ f_x(q) < \varepsilon\}$. Множество U_x открыто и $x \in U_x$. Вновь используя компактность Q, подыщем $x_1, \dots, x_m \in Q$ такие, что $Q = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$. Положим, наконец, $l := f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_m}$. Несомненно, что $l \in L$ и $\|l\| < \varepsilon$. $\triangleright$

10.8.6. Замечание. Предложение 10.8.5 называют *обобщенной теоремой Дини* (ср. 7.2.10).

10.8.7. ***Лемма Какутани.*** *Для любой подрешетки* L *в* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *выполнено*

$$\operatorname{cl} L = \bigcap_{(q_1,q_2)\in Q^2} \operatorname{cl}\left(L_{\{q_1,q_2\}}\right).$$

$\lhd$ Включение $\operatorname{cl} L$ в $\operatorname{cl}\big(L_{\{q_1,q_2\}}\big)$ для каждого $(q_1,\ q_2) \in Q^2$ бесспорно. Если же $f \in \operatorname{cl}\big(L_{\{q_1,q_2\}}\big)$ при всех таких $q_1,\ q_2$, то, в силу предложения 10.8.5, $f \in \operatorname{cl} L$. $\rhd$

10.8.8. ***Следствие.*** *Для любой векторной подрешетки* L *в пространстве* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *справедливо представление*

$$\operatorname{cl} L = \bigcap_{(q_1,q_2)\in Q^2} L_{\{q_1,q_2\}}.$$

$\lhd$ В данном случае множество $L_{\{q_1,q_2\}}$ замкнуто. $\rhd$

10.8.9. Определение. Говорят, что множество U в $\mathbb{F}^Q$ *разделяет точки* Q, если для любых точек $q_1,\ q_2 \in Q$ таких, что $q_1 \neq q_2$, существует функция $u \in U$, принимающая различные значения в этих точках: $u(q_1) \neq u(q_2)$.

10.8.10. ***Теорема Стоуна.*** *Содержащая постоянные функции, разделяющая точки векторная подрешетка в пространстве* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *плотна в* $C(Q,\ \mathbb{R})$.

$\lhd$ Если L — рассматриваемая подрешетка, то

$$L_{\{q_1,q_2\}} = C(Q,\ \mathbb{R})_{\{q_1,q_2\}}$$

для всякой пары $(q_1,\ q_2) \in Q^2$ (см. 10.8.4 (6)). Осталось привлечь 10.8.8. $\rhd$

10.8.11. *Пусть* $\mu \in C(Q,\ \mathbb{R})'$. *Положим*

$$\mathscr{N}(\mu) := \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ [0,\ |f|] \subset \ker \mu\}.$$

Тогда существует, и притом единственное, замкнутое подмножество $\operatorname{supp}(\mu)$ *в* Q *такое, что*

$$f \in \mathscr{N}(\mu) \Leftrightarrow f\big|_{\operatorname{supp}(\mu)} = 0.$$

$\lhd$ По лемме о сумме промежутков 3.2.15

$$[0,\ |f|] + [0,\ |g|] = [0,\ |f| + |g|].$$

Таким образом, $f,\ g \in \mathscr{N}(\mu) \Rightarrow |f| + |g| \in \mathscr{N}(\mu)$. Поскольку $\mathscr{N}(\mu)$ — ***порядковый идеал***, т. е. $(f \in \mathscr{N}(\mu)\ \&\ 0 \le |g| \le |f| \Rightarrow g \in \mathscr{N}(\mu))$, заключаем, что $\mathscr{N}(\mu)$ — это векторное подпространство. Более того, $\mathscr{N}(\mu)$ замкнуто. В самом деле, пусть $f_n \ge 0$, $f_n \to f$ и $f_n \in \mathscr{N}(\mu)$. Тогда для $g \in [0,\ f]$ выполнено $g \wedge f_n \to g$ и $g \wedge f_n \in [0,\ f_n]$. Отсюда следует, что $\mu(g) = 0$, т. е. $f \in \mathscr{N}(\mu)$.

В силу 10.8.8, учитывая, что $\mathscr{N}(\mu)$ — порядковый идеал, имеем

$$\mathscr{N}(\mu) = \bigcap_{q \in Q} \mathscr{N}(\mu)_{\{q\}}.$$

Определим множество $\operatorname{supp}(\mu)$ следующим образом:

$$q \in \operatorname{supp}(\mu) \Leftrightarrow \mathscr{N}(\mu)_{\{q\}} \ne C(Q,\ \mathbb{R}) \Leftrightarrow (f \in \mathscr{N}(\mu) \Rightarrow f(q) = 0).$$

Несомненно, что $\operatorname{supp}(\mu)$ — замкнутое множество. При этом справедливы соотношения

$$\mathscr{N}(\mu) = \bigcap_{q \in \operatorname{supp}(\mu)} \mathscr{N}(\mu)_{\{q\}} =$$
$$= \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ f\big|_{\operatorname{supp}(\mu)} = 0\}.$$

Утверждение об единственности вытекает из нормальности Q (см. 9.4.14) и теоремы Урысона 9.3.14. $\rhd$

10.8.12. Определение. Множество $\operatorname{supp}(\mu)$, фигурирующее в предложении 10.8.11, называют ***носителем*** μ (ср. 10.9.4 (5)).

10.8.13. Замечание. Если функционал μ положителен, то

$$\mathscr{N}(\mu) = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ \mu(|f|) = 0\}.$$

Следовательно, если при этом $\mu(fg) = 0$ для всех $g \in C(Q,\ \mathbb{R})$, то $f\big|_{\operatorname{supp}(\mu)} = 0$. Аналогично $\operatorname{supp}(\mu) = \varnothing \Leftrightarrow \mathscr{N}(\mu) = C(Q,\ \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$\mu = 0$. Таким образом, обращаться с носителями положительных функционалов удобнее.

Пусть F — замкнутое подмножество Q. Говорят, что F *несёт* μ или что в $X \setminus F$ *нет* μ, если для всякой непрерывной функции f, у которой $\operatorname{supp}(f) \subset Q \setminus F$, выполнено $\mu(|f|) = 0$. Носитель $\operatorname{supp}(\mu)$ несёт μ, при этом любое несущее μ замкнутое множество в Q содержит $\operatorname{supp}(\mu)$. Иными словами, носитель μ — это дополнение наибольшего открытого множества, в котором нет μ (ср. 10.10.5 (6)).

Полезно уяснить, что в силу 3.2.14 и 3.2.15 с каждым ограниченным функционалом μ можно связать положительные (а потому и ограниченные) функционалы $\mu_+,\ \mu_-,\ |\mu|$, определенные для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})_+$ очевидными равенствами:

$$\mu_+(f) = \sup \mu[0,\ f]; \quad \mu_-(f) = -\inf \mu[0,\ f]; \quad |\mu| = \mu_+ + \mu_-.$$

Более того, $C(Q,\ \mathbb{R})'$ является K-пространством (ср. 3.2.16). $\lhd\rhd$

10.8.14. *Носители* μ *и* $|\mu|$ *совпадают.*

$\lhd$ По определению $\mathscr{N}(\mu) = \mathscr{N}(|\mu|)$. $\rhd$

10.8.15. *Пусть* $0 \le a \le \mathbf{1}$ *и* $a\mu : f \mapsto \mu(af)$ *при* $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ *и* $\mu \in C(Q,\ \mathbb{R})'$. *Тогда* $|a\mu| = a|\mu|$.

$\lhd$ Для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})_+$ есть оценка

$$\begin{aligned}(a\mu)_+(f) = \sup\{\mu(ag) :\ 0 \le g \le f\} \le \sup \mu[0,\ af] = \\ = \mu_+(af) = a\mu_+(f).\end{aligned}$$

Помимо этого,

$$\mu_+ = (a\mu + (\mathbf{1} - a)\mu)_+ \le (a\mu)_+ + ((\mathbf{1} - a)\mu)_+ \le a\mu_+ + (\mathbf{1} - a)\mu_+ = \mu_+.$$

Значит, $(a\mu)_+ = a\mu_+$, откуда и вытекает требуемое. $\rhd$

10.8.16. *Лемма де Бранжа.* *Пусть* A *— содержащая постоянные функции подалгебра* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *и* $\mu \in \operatorname{ext}(A^\perp \cap B_{C(Q,\,\mathbb{R})'})$. *Тогда сужение любой функции из* A *на носитель* μ *— постоянная функция.*

$\lhd$ Если $\mu = 0$, то $\operatorname{supp}(\mu) = \varnothing$ и доказывать ничего не надо. Если же $\mu \ne 0$, то, конечно, $\|\mu\| = \mathbf{1}$. Возьмем $a \in A$. Поскольку подалгебра A содержит постоянные функции, достаточно рассмотреть случай, когда $0 \le a \le \mathbf{1}$ и при этом

$$q \in \operatorname{supp}(\mu) \Rightarrow 0 < a(q) < \mathbf{1}.$$

Положим $\mu_1 := a\mu$ и $\mu_2 := (\mathbf{1} - a)\mu$. Ясно, что $\mu_1 + \mu_2 = \mu$, причем функционалы μ_1 и μ_2 ненулевые. Более того,

$$\|\mu\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\| =$$

$$= \sup_{\|f\|\leq\mathbf{1}} \mu(af) + \sup_{\|g\|\leq\mathbf{1}} \mu((\mathbf{1}-a)g) = \sup_{\|f\|\leq\mathbf{1}, \|g\|\leq\mathbf{1}} \mu(af + (\mathbf{1}-a)g) \leq \|\mu\|,$$

ибо очевидным образом выполнено

$$aB_{C(Q,\,\mathbb{R})} + (\mathbf{1} - a)B_{C(Q,\,\mathbb{R})} \subset B_{C(Q,\,\mathbb{R})}.$$

Итак, $\|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$. Следовательно, из представления

$$\mu = \|\mu_1\| \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} + \|\mu_2\| \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|},$$

учитывая, что $\mu_1,\ \mu_2 \in A^\perp$, заключаем: $\mu_1 = \|\mu_1\|\mu$. В силу 10.8.15, $a|\mu| = |a\mu| = |\mu_1| = \|\mu_1\|\,|\mu|$. Значит, $|\mu|((a - \|\mu_1\|\mathbf{1})g) = 0$ для всех $g \in C(Q,\ \mathbb{R})$. Используя 10.8.13 и 10.8.14, выводим, что функция a постоянна на носителе μ. $\triangleright$

10.8.17. *Теорема Стоуна — Вейерштрасса.* *Каждая содержащая постоянные функции и разделяющая точки подалгебра $C(Q,\ \mathbb{R})$ плотна в алгебре $C(Q,\ \mathbb{R})$.*

$\triangleleft$ По теореме об абсолютной биполяре 10.5.9 в случае, если рассматриваемая подалгебра A не плотна в $C(Q,\ \mathbb{R})$, подпространство $A^\perp$ (оно же — A°) в $C(Q,\ \mathbb{R})'$ ненулевое.

Привлекая теорему Алаоглу — Бурбаки 10.6.7, видим, что $A^\perp \cap B_{C(Q,\mathbb{R})'}$ — это непустое абсолютно выпуклое слабо компактное множество, а потому на основании теоремы Крейна — Мильмана 10.6.5 в нем имеется крайняя точка μ.

Несомненно, что μ — ненулевой функционал. В то же время по лемме де Бранжа носитель μ не может содержать двух различных точек, ибо A разделяет точки Q. Носитель μ не является одноточечным множеством, поскольку μ обращается в нуль на постоянных функциях. Стало быть, $\operatorname{supp}(\mu)$ — это пустое множество. Последнее означает (см. 10.8.13), что μ — нулевой функционал. Получили противоречие, показывающее, что подпространство A плотно в $C(Q,\ \mathbb{R})$. $\triangleright$

10.8.18. *Следствие.* *Замыкание любой подалгебры в* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *— векторная подрешетка в* $C(Q,\ \mathbb{R})$.

$\lhd$ По теореме Стоуна — Вейерштрасса можно подыскать многочлен p_n такой, что при всех $t \in [-1,\ 1]$ будет

$$|p_n(t) - |t|\,| \le \frac{1}{2n}.$$

Тогда $|p_n(0)| \le 1/2n$. Поэтому для многочлена

$$\overline{p}_n(t) := p_n(t) - p_n(0)$$

выполнено $|\overline{p}_n(t) - |t|\,| \le 1/n$ при $-1 \le t \le 1$. По построению у $\overline{p}_n$ нет свободного члена. Если теперь функция a лежит в подалгебре A в $C(Q,\ \mathbb{R})$ и $\|a\| \le 1$, то

$$|\overline{p}_n(a(q)) - |a(q)|\,| \le \frac{1}{n} \quad (q \in Q).$$

При этом элемент $q \mapsto \overline{p}_n(a(q))$, конечно же, содержится в A. $\rhd$

10.8.19. Замечание. Следствие 10.8.18 (вместе с 10.8.8) дает полное описание всех замкнутых подалгебр в $C(Q,\ \mathbb{R})$. В свою очередь, как видно из доказательства, 10.8.18 легко установить, непосредственно предъявляя какую-либо последовательность многочленов, равномерно сходящуюся к функции $t \mapsto |t|$ на отрезке $[-1,\ 1]$. Вывести 10.8.17, опираясь на 10.8.18, не составляет труда.

10.8.20. *Теорема Титце — Урысона.* *Пусть* Q_0 *— компактное подмножество* Q *и* $f_0 \in C(Q_0,\ \mathbb{R})$. *Тогда существует функция* $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ *такая, что* $f\big|_{Q_0} = f_0$.

$\lhd$ Пусть $Q_0 \ne \varnothing$ (иначе нечего доказывать). Рассмотрим вложение $\iota : Q_0 \to Q$ и возникающий ограниченный линейный оператор $\overset{\circ}{\iota} : C(Q,\ \mathbb{R}) \to C(Q_0,\ \mathbb{R})$, действующий по правилу $\overset{\circ}{\iota} f := f \circ \iota$. Требуется установить, что $\overset{\circ}{\iota}$ — эпиморфизм. Поскольку несомненно, что $\operatorname{im} \overset{\circ}{\iota}$ — это разделяющая точки, содержащая постоянные функции подалгебра $C(Q_0,\ \mathbb{R})$, в силу 10.8.17 достаточно (и, разумеется, необходимо) проверить, что $\operatorname{im} \overset{\circ}{\iota}$ — замкнутое подпространство.

Рассмотрим снижение $\bar\iota$ оператора $\mathring\iota$ на собственный кообраз $\operatorname{coim}\mathring\iota := C(Q,\ \mathbb{R})/\ker\mathring\iota$ и соответствующее каноническое отображение φ. Для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ положим

$$g := (f \wedge \sup|f(Q_0)|\mathbf{1}) \vee (-\sup|f(Q_0)|\mathbf{1}).$$

По определению $f\big|_{Q_0} = g\big|_{Q_0}$, т. е. $\overline{f} := \varphi(f) = \varphi(g)$. Значит, $\|g\| \geq \|\overline{f}\|$. Помимо этого,

$$\begin{gathered}
\|\overline{f}\| = \inf\bigl\{\|h\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ \mathring\iota(h-f) = 0\bigr\} = \\
= \inf\bigl\{\|h\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ h\big|_{Q_0} = f\big|_{Q_0}\bigr\} \geq \\
\geq \inf\bigl\{\|h\big|_{Q_0}\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ h\big|_{Q_0} = f\big|_{Q_0}\bigr\} = \\
= \sup|f(Q_0)| = \|g\| \geq \|\overline{f}\|.
\end{gathered}$$

Таким образом, выполнено

$$\begin{gathered}
\|\bar\iota\overline{f}\| = \|\mathring\iota g\| = \|\mathring\iota g\|_{C(Q_0,\mathbb{R})} = \\
= \|g \circ \iota\|_{C(Q_0,\mathbb{R})} = \sup|g(Q_0)| = \|g\| = \|\overline{f}\|,
\end{gathered}$$

т. е. $\bar\iota$ — изометрия. Применяя последовательно 5.5.4 и 4.5.15, выводим сначала, что $\operatorname{coim}\mathring\iota$ — банахово пространство, а затем — что $\operatorname{im}\bar\iota$ замкнуто в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$. Осталось заметить, что $\operatorname{im}\mathring\iota = \operatorname{im}\bar\iota$. $\triangleright$

10.9. Меры Радона

10.9.1. Определение. Пусть Ω — локально компактное топологическое пространство. Полагают $K(\Omega) := K(\Omega,\ \mathbb{F}) := \{f \in C(\Omega,\ \mathbb{F}) :\ \operatorname{supp}(f)$ — компакт$\}$. Если Q — компакт в Ω, то считают $K(Q) := K_\Omega(Q) := \{f \in K(\Omega) :\ \operatorname{supp}(f) \subset Q\}$. Пространство $K(Q)$ наделяют нормой $\|\cdot\|_\infty$. При $E \in \operatorname{Op}(\Omega)$ полагают $K(E) := \cup\{K(Q) :\ Q \Subset E\}$. (Запись $Q \Subset E$ для подмножества E в Ω означает, что Q компактно и Q лежит во внутренности E, вычисленной в пространстве Ω.)

10.9.2. *Справедливы утверждения*:

(1) *для* $Q \Subset \Omega$ *и* $f \in C(Q,\ \mathbb{F})$ *верно*

$$f\big|_{\partial Q} = 0 \Leftrightarrow \Bigl(\bigl(\exists\, g \in K(Q)\ g\big|_Q = f\bigr)\Bigr).$$

При этом $K(Q)$ — *банахово пространство*;

(2) *пусть* $Q,\ Q_1,\ Q_2$ — *компактные множества и* $Q \Subset Q_1 \times Q_2$. *Линейная оболочка в* $C(Q,\ \mathbb{F})$ *следов на* Q *функций вида* $u_1 \cdot u_2(q_1,\ q_2) := u_1 \otimes u_2(q_1,\ q_2) := u_1(q_1)u_2(q_2)$ *для* $u_s \in K(Q_s)$ *плотна в* $C(Q,\ \mathbb{F})$;

(3) *если* Ω — *компакт, то* $K(\Omega) = C(\Omega,\ \mathbb{F})$. *Пусть* Ω *не компактно. Тогда при естественном вложении в* $C(\Omega^{\cdot},\ \mathbb{F})$, *где* $\Omega^{\cdot} := \Omega \cup \{\infty\}$ — *александровская компактификация* Ω, *пространство* $K(\Omega)$ *плотно в гиперплоскости* $\{f \in C(\Omega^{\cdot},\ \mathbb{F}) :\ f(\infty) = 0\}$;

(4) *отображение* $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega) \mapsto K(E) \in \mathrm{Lat}\,(K(\Omega))$ *сохраняет точные верхние границы*;

(5) *для* $E',\ E'' \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ *точна следующая последовательность*:

$$0 \to K(E' \cap E'') \xrightarrow{\iota_{(E',E'')}} K(E') \times K(E'') \xrightarrow{\sigma_{(E',E'')}} K(E' \cup E'') \to 0,$$

где $\iota_{(E',E'')} f := (f,\ -f)$, $\sigma_{(E',E'')}(f,\ g) := f + g$.

$\triangleleft$ (1) Граница ∂Q — это и граница внешности $\mathrm{int}(\Omega \setminus Q)$.

(2) Исследуемое множество — подалгебра. Заключение следует из 9.3.13 и 10.8.17 (ср. 11.8.2).

(3) Можно считать, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Учитывая, что $K(\Omega)$ — порядковый идеал, в силу 10.8.8 заключаем требуемое (ибо $K(\Omega)$ разделяет точки $\Omega^{\cdot}$) (ср. 10.8.11).

(4) Ясно, что $K(\sup \varnothing) = K(\varnothing) = 0$. Если $\mathscr{E} \subset \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $\mathscr{E}$ фильтровано по возрастанию, то для $f \in K(\cup\mathscr{E})$ будет: $\mathrm{supp}(f) \subset E$ для некоторого $E \in \mathscr{E}$ (в силу компактности $\mathrm{supp}(f)$). Отсюда $K(\cup\mathscr{E}) = \cup\{K(E) :\ E \in \mathscr{E}\}$. Пусть, наконец, $E_1, \dots, E_n \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $f \in K(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$. В соответствии с 9.4.18 имеются $\psi_k \in K(E_k)$ такие, что $\sum_{k=1}^n \psi_k = \mathbf{1}$. При этом $f = \sum_{k=1}^n \psi_k f$ и $\mathrm{supp}(f\psi_k) \subset E_k$ $(k := 1, \dots, n)$.

(5) немедленно следует из (4). $\triangleright$

10.9.3. Определение. Функционал $\mu \in K(\Omega,\ \mathbb{F})^{\#}$ называют ***мерой*** (более полно, $\mathbb{F}$-***мерой***) ***Радона*** на Ω и пишут $\mu \in \mathscr{M}(\Omega) := \mathscr{M}(\Omega,\ \mathbb{F})$, если $\mu\big|_{K(Q)} \in K(Q)'$, как только $Q \Subset \Omega$. Используют обозначения

$$\int_\Omega f\,d\mu := \int f\,d\mu := \int f(x)\,d\mu(x) := \mu(f) \quad (f \in K(\Omega)).$$

Величину $\mu(f)$ называют *интегралом* f *по мере* μ. В этой связи меру μ именуют *интегралом.*

10.9.4. Примеры.

(1) Для $q \in \Omega$ *мера Дирака* $\delta_q : f \mapsto f(q)$ $(f \in K(\Omega))$ служит мерой Радона. Ее часто обозначают символом δ_q и называют *дельта-функцией в точке* q.

Пусть Ω дополнительно наделено структурой группы, причем обращение $q \in \Omega \mapsto q^{-1} \in \Omega$ и групповое умножение $(s,\ t) \in \Omega \times \Omega \mapsto st \in \Omega$ непрерывны, т. е. Ω — *локально компактная группа.* Символом δ обозначают δ_e, где e — единица Ω. Для абелевых (коммутативных) групп используется также символика, связанная со сложением.

В $K(\Omega)$ для $a \in \Omega$ имеются *операторы* (*левого и правого*) *сдвигов*

$$({}_a\tau f)(q) := {}_af(q) := f(a^{-1}q),$$
$$(\tau_a f)(q) := f_a(q) := f(qa^{-1})$$

$(f \in K(\Omega),\ q \in \Omega)$ (сдвигается f в $\Omega \times \mathbb{F}$). Ясно, что ${}_a\tau,\ \tau_a \in \mathscr{L}(K(\Omega))$. Важным и глубоким обстоятельством является наличие нетривиальной инвариантной относительно левых (соответственно, правых) сдвигов меры из $\mathscr{M}(\Omega,\ \mathbb{R})$. (Лево)инвариантные меры Радона пропорциональны. (Каждую) ненулевую (левоинвариантную) положительную меру Радона называют (*левой*) *мерой Хаара* (реже *интегралом Хаара*). В случае правых сдвигов используют термин (*правая*) *мера Хаара.* Для абелевых групп всегда говорят о *мерах Хаара.* В пространстве $\mathbb{R}^N$ такой мерой служит обычная *мера Лебега.* В связи с этим для обозначения общих мер Хаара и интегралов по ним используют символику, аналогичную принятой для меры Лебега. В частности, условие левоинвариантности записывают в виде

$$\int_\Omega f(a^{-1}x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx \quad (f \in K(\Omega),\ a \in \Omega).$$

(2) Пусть $M(\Omega) := (K(\Omega),\ \|\cdot\|_\infty)'$. Элементы $M(\Omega)$ называют *конечными* или *ограниченными мерами Радона.* Ясно, что ограниченные меры взяты из пространства $C(\Omega^{\boldsymbol{\cdot}},\ \mathbb{F})'$ (см. 10.9.2 (2)).

(3) Для $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ полагают $\mu^*(f) = \mu(f^*)^*$, где $f^*(q) := f(q)^*$ для $q \in \Omega$ и $f \in K(\Omega)$. Меру μ^* называют *эрмитово сопряженной к* μ. Различие μ^* и μ возникает лишь при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Если $\mu = \mu^*$, то говорят о *вещественной* $\mathbb{C}$-мере. Ясно, что $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1, μ_2 — единственным образом определенные вещественные $\mathbb{C}$-меры. В свою очередь, вещественная $\mathbb{C}$-мера порождается двумя $\mathbb{R}$-*мерами* (*вещественными мерами из* $\mathscr{M}(\Omega,\ \mathbb{R})$), ибо $K(\Omega,\ \mathbb{C})$ — это комплексификация $K(\Omega,\ \mathbb{R}) \oplus iK(\Omega,\ \mathbb{R})$. Вещественные $\mathbb{R}$-меры, очевидно, составляют K-пространство. При этом интеграл по мере служит (пред)интегралом и возникает возможность без особых оговорок рассматривать соответствующие лебеговы расширения и связанные с ними пространства суммируемых (в том числе векторнозначных) функций (ср. 5.5.9 (4), 5.5.9 (5)).

С каждой мерой Радона μ связывают положительную меру $|\mu|$, определенную для $f \in K(\Omega,\ \mathbb{R})$, $f \geq 0$, соотношением

$$|\mu|(f) := \sup\{|\mu(g)| :\ g \in K(\Omega,\ \mathbb{F}),\ |g| \leq f\}.$$

Часто под словом меры понимают положительные меры, прочие меры в этом случае называют *зарядами*.

Меры μ и ν называют *дизъюнктными* или *независимыми*, если $|\mu| \wedge |\nu| = 0$. Меру ν называют *абсолютно непрерывной относительно* μ, если ν не зависит от мер, независимых от μ. Такую меру ν можно задать в виде $\nu = f\mu$, где $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mu)$ и мера $f\mu$ (*с плотностью* f *относительно* μ) действует по правилу $(f\mu)(g) := \mu(fg)$ $(g \in K(\Omega))$ (= *теорема Радона — Никодима*).

(4) Если $\Omega' \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, то определено *сужение* $\mu_{\Omega'} := \mu\big|_{K(\Omega')}$. *Оператор ограничения* $\mu \mapsto \mu_{\Omega'}$ из $\mathscr{M}(\Omega)$ в $\mathscr{M}(\Omega')$ удовлетворяет *условию согласования*: для $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ и $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ верно $\mu_{\Omega''} = (\mu_{\Omega'})_{\Omega''}$. Эту ситуацию выражают словами: отображение $\mathscr{M} : E \in \mathrm{Op}\,(\Omega) \mapsto \mathscr{M}(E)$ и оператор ограничения (= *функтор* $\mathscr{M}$) задают *предпучок* (векторных пространств). Полезно убедиться, что отображение ограничения мер Радона не обязано быть эпиморфизмом.

(5) Пусть $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$. Говорят, что в E *нет* μ или что $\Omega \setminus E$ *несёт* μ, если $\mu_E = 0$. На основании 10.9.2 (4) существует наименьшее замкнутое множество $\mathrm{supp}(\mu)$, несущее μ, —

носитель меры μ. Устанавливается, что $\operatorname{supp}(\mu) = \operatorname{supp}(|\mu|)$. Введенное определение согласовано с 10.8.12. Мера Дирака δ_q — единственная с точностью до множителя мера Радона с носителем $\{q\}$.

(6) Пусть Ω_k — локально компактное пространство и $\mu_k \in \mathscr{M}(\Omega_k)$ $(k := 1, 2)$. На произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ существует, и притом единственная, мера μ такая, что для $u_k \in K(\Omega_k)$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} u_1(x) u_2(y)\, d\mu(x, y) = \int\limits_{\Omega_1} u_1(x)\, d\mu_1(x) \int\limits_{\Omega_2} u_2(y)\, d\mu_2(y).$$

Используют обозначения $\mu_1 \times \mu_2 := \mu_1 \otimes \mu_2 := \mu$. Привлекая 10.9.2 (4), видим, что для $f \in K(\Omega_1 \times \Omega_2)$ значение $\mu_1 \times \mu_2(f)$ можно вычислить повторным интегрированием (= *теорема Фубини для мер*).

(7) Пусть G — локально компактная группа и заданы $\mu,\ \nu \in M(G)$. Для $f \in K(G)$ функция $\dot{f}(s,\ t) := f(st)$ непрерывна и $|(\mu \times \nu)(\dot{f})| \le \|\mu\|\, \|\nu\|\, \|f\|_\infty$. Тем самым определена мера Радона $\mu * \nu(f) := (\mu \times \nu)(\dot{f})$ $(f \in K(G))$, называемая *свёрткой* μ *и* ν. Используя векторные интегралы, получаем представления:

$$\mu * \nu = \int\limits_{G \times G} \delta_s * \delta_t\, d\mu(s) d\nu(t) =$$

$$= \int\limits_G \delta_s * \nu\, d\mu(s) = \int\limits_G \mu * \delta_t\, d\nu(t).$$

Пространство ограниченных мер относительно свёртки представляет собой банахову алгебру — *свёрточную алгебру* $M(G)$. Эта алгебра коммутативна в том и только в том случае, когда G — абелева группа. В названном случае пространство $L_1(G)$, построенное относительно меры Хаара m, также обладает естественной структурой свёрточной алгебры (подалгебры $M(G)$). Ее называют *групповой алгеброй* G. Таким образом, для $f,\ g \in L_1(G)$ определения свёрток функций и мер согласованы (ср. 9.6.17): $(f*g)dm = fdm*gdm$. Аналогично определяют *свёртку* $\mu \in M(G)$ *и* $f \in L_1(G)$ соотношением $(\mu * f)dm := \mu * (fdm)$, т. е. как плотность свёртки относительно меры Хаара. При этом, в частности,

$$f * g = \int\limits_G \sigma_x * g f(x)\, dm(x) = \int\limits_G \tau_x(g) f(x)\, dm(x).$$

Теорема Венделя. *Пусть $T \in B(L_1(G))$. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

(i) *существует мера $\mu \in M(G)$ такая, что $Tf = \mu * f$ при $f \in L_1(G)$;*

(ii) *T перестановочен со сдвигами: $T\tau_a = \tau_a T$ для $a \in G$, где τ_a — единственное ограниченное продолжение оператора сдвига с $K(G)$ на $L_1(G)$;*

(iii) *$T(f * g) = (Tf) * g$ при $f,\ g \in L_1(G)$;*

(iv) *$T(f * \nu) = (Tf) * \nu$ для $\nu \in M(G)$, $f \in L_1(G)$.*

10.9.5. Определение. Пространства $K(\Omega)$ и $\mathscr{M}(\Omega)$ приведены в двойственность (индуцированную двойственностью $K(\Omega) \leftrightarrow K(\Omega)^{\#}$). При этом пространство $\mathscr{M}(\Omega)$ наделяют локально выпуклой топологией $\sigma(\mathscr{M}(\Omega),\ K(\Omega))$, которую обычно называют *широкой*. Пространство $K(\Omega)$ в свою очередь снабжают топологией Макки $\tau_{K(\Omega)} := \tau(K(\Omega),\ \mathscr{M}(\Omega))$ (поэтому, в частности, $(K(\Omega),\ \tau_{K(\Omega)})' = \mathscr{M}(\Omega)$). Пространство ограниченных мер $M(\Omega)$ рассматривают, как правило, с сопряженной нормой: $\|\mu\| := \sup\{|\mu(f)| :\ \|f\|_\infty \leq 1,\ f \in K(\Omega)\}$ $(\mu \in M(\Omega))$.

10.9.6. *Топология $\tau_{K(\Omega)}$ — сильнейшая из таких локально выпуклых топологий, что вложение $K(Q)$ в $K(\Omega)$ непрерывно при всех Q, для которых $Q \Subset \Omega$ (т. е. $\tau_{K(\Omega)}$ — топология индуктивного предела* (ср. 9.2.15)).

$\lhd$ Если τ — топология индуктивного предела и $\mu \in (K(\Omega),\ \tau)'$, то по определению $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, ибо $\mu \circ \iota_{K(Q)}$ непрерывно при $Q \Subset \Omega$. В свою очередь, для $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ множество $V_Q := \{f \in K(Q) : |\mu(f)| \leq 1\}$ — окрестность нуля в $K(Q)$. Учитывая определение τ, видим, что $\cup\{V_Q :\ Q \Subset \Omega\} = \{f \in K(\Omega) :\ |\mu(f)| \leq 1\}$ — окрестность нуля в τ. Стало быть, $\mu \in (K(\Omega),\ \tau)'$ и τ согласована с двойственностью. Поэтому $\tau \leq \tau_{K(\Omega)}$.

С другой стороны, если p — полунорма из зеркала топологии Макки, то p — опорная функция субдифференциала в $\mathscr{M}(\Omega)$. Следовательно, ее сужение $q := p \circ \iota_{K(Q)}$ на $K(Q)$ во всяком случае полунепрерывно снизу. По теореме Гельфанда 7.2.2 (из-за бочечности $K(Q)$) полунорма q непрерывна. Значит, вложение $\iota_{K(Q)} : K(Q) \to (K(\Omega),\ \tau_{K(\Omega)})$ непрерывно и $\tau \geq \tau_{K(\Omega)}$ по определению индуктивного предела. $\rhd$

10.9.7. *Множество A в $K(\mathbb{R}^N)$ ограничено (в топологии индуктивного предела), если* $\sup \|A\|_\infty < +\infty$ *и, кроме того, носители элементов A лежат в общем компакте.*

$\triangleleft$ Пусть вопреки доказываемому для $Q \Subset \mathbb{R}^N$ не верно, что $A \subset K(Q)$. Иначе говоря, пусть для $n \in \mathbb{N}$ имеются $q_n \in \mathbb{R}^N$ и $a_n \in A$, для которых $a_n(q_n) \neq 0$ и $|q_n| > n$. Взяв $B := \{n|a_n(q_n)|^{-1}\delta_{q_n} : \ n \in \mathbb{N}\}$, видим, что это множество мер Радона широко ограничено и, стало быть, полунорма $p(f) := \sup\{|\mu|(|f|) : \ \mu \in B\}$ непрерывна. При этом $p(a_n) \geq n|a_n(q_n)|^{-1}\delta_{q_n}(|a_n|) = n$, что противоречит ограниченности A. $\triangleright$

10.9.8. Замечание. Пусть $(f_n) \subset K(\mathbb{R}^N)$. Пишут $f_n \twoheadrightarrow_K 0$, если $(\exists\, Q \Subset \mathbb{R}^N)(\forall\, n)\ \operatorname{supp}(f_n) \subset Q \,\&\, \|f_n\|_\infty \to 0$. Из 10.9.7 немедленно следует, что $\mu \in K(\mathbb{R}^N)^\#$ *является мерой Радона, если* $\mu(f_n) \to 0$, *как только* $f_n \twoheadrightarrow_K 0$. Отметим также, что это сохраняется для любого локально компактного Ω, *счетного в бесконечности*, т. е. представляющего собой объединение счетного семейства компактных пространств.

10.9.9. Замечание. На $\mathbb{R}$ существуют последовательности вещественных положительных многочленов (p_n) такие, что меры $p_n dx$ широко сходятся к δ при $n \to +\infty$. Рассматривая произведения мер, приходим к таким полиномам P_n на пространстве $\mathbb{R}^N$, что $P_n dx$ широко сходятся к δ (здесь, как обычно, $dx := dx_1 \times \ldots \times dx_N$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^N$).

Пусть теперь $f \in K(\mathbb{R}^N)$ и f принадлежит классу $C^{(m)}$ в некоторой окрестности компакта Q (т. е. имеет там соответствующие непрерывные производные). Рассматривая свёртки $(f * P_n)$, видим, что это последовательность многочленов, равномерно аппроксимирующая на Q как f, так и ее производные до порядка m включительно.

Возможность подобной регуляризации принято называть *обобщенной теоремой Вейерштрасса* в $\mathbb{R}^N$ (ср 10.10.2 (4)).

10.9.10. ***Теорема о локальном задании меры.*** *Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие Ω и $(\mu_E)_{E\in\mathscr{E}}$ — семейство мер Радона: $\mu_E \in \mathscr{M}(E)$, причем для любой пары $(E',\ E'')$ элементов $\mathscr{E}$ сужения мер $\mu_{E'}$ и $\mu_{E''}$ на $E' \cap E''$ совпадают. Тогда существует, и притом единственная, мера μ на Ω, сужение которой на E равно μ_E для любого $E \in \mathscr{E}$.*

$\triangleleft$ Привлекая 10.9.2 (5), построим последовательность

$$\sum_{\substack{\{E',E''\}\\ E',E''\in\mathscr{E},E'\neq E''}} K(E'\cap E'') \xrightarrow{\iota} \sum_{E\in\mathscr{E}} K(E) \xrightarrow{\sigma} K(\Omega)\to 0,$$

где ι порождено суммированием «координатных» вложений $\iota_{(E',E'')}$, а σ — обычное сложение. Прямые суммы по общему правилу топологизированы как индуктивные пределы (ср. 10.9.6).

Убедимся в точности построенной последовательности. Поскольку выполнено $K(\Omega)=\cup_{Q\Subset\Omega}K(Q)$, с учетом 10.9.2 (4), можно ограничиться случаем конечного покрытия и установить точность во втором члене.

Итак, пусть для покрытий из n элементов $\{E_1,\dots,E_n\}$ $(n\geq 2)$ доказано, что точна последовательность

$$K_n \xrightarrow{\iota_n} \prod_{k=1}^{n} K(E_k) \xrightarrow{\sigma_n} K(E_1\cup\ldots\cup E_n)\to 0,$$

где ι_n — «сужение» ι на K_n, а отображение σ_n — суммирование и

$$K_n := \prod_{\substack{k<l\\ k,l\in\{1,\dots,n\}}} K(E_k\cap E_l).$$

По допущению $\operatorname{im}\iota_n=\ker\sigma_n$. Если $\sigma_{n+1}(\widetilde{f},\ f_{n+1})=0$, где $\widetilde{f}:=(f_1,\dots,f_n)$, то $\sigma_n\widetilde{f}=-f_{n+1}$ и $f_{n+1}\in K((E_1\cup\ldots\cup E_n)\cap E_{n+1})$.

На основании эпиморфности σ_n, обеспеченной 10.9.2 (5), существуют $\theta_k\in K(E_k\cap E_{n+1})$ такие, что для $\theta:=(\theta_1,\dots,\theta_n)$ будет $\sigma_n\theta=-f_{n+1}$. Отсюда $(\widetilde{f}-\theta)\in\ker\sigma_n$ и по допущению можно подобрать $\varkappa\in K_n$, для которого $\iota_n\varkappa=\widetilde{f}-\theta$. Ясно, что

$$K_{n+1}=K_n\times\prod_{k=1}^{n}K(E_k\cap E_{n+1})$$

(с точностью до изоморфизма), $\overline{\varkappa}:=(\varkappa,\ \theta_1,\dots,\theta_n)\in K_{n+1}$ и $\iota_{n+1}\overline{\varkappa}=(\widetilde{f},\ f_{n+1})$.

Переходя к сопряженной диаграмме (ср. 7.6.13), имеем точную последовательность

$$0\to\mathscr{M}(\Omega)\xrightarrow{\sigma'}\prod_{E\in\mathscr{E}}\mathscr{M}(E)\xrightarrow{\iota'}\prod_{\substack{\{E',E''\}\\ E',E''\in\mathscr{E},E'\neq E''}}\mathscr{M}(E'\cap E'').$$

Это и требовалось установить. $\triangleright$

10.9.11. Замечание. В топологии предпучки, допускающие такую возможность локального задания своих элементов, называют *пучками*. В этой связи утверждение 10.9.10 выражают словами: предпучок мер Радона $\Omega \mapsto \mathscr{M}(\Omega)$ — это *пучок* или, более категорично, *функтор* $\mathscr{M}$ — *пучок* (ср. 10.9.4 (4)).

10.10. Пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$

10.10.1. Определение. *Основной* или *пробной* называют финитную гладкую функцию $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{F}$. При этом пишут $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) := \mathscr{D}(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{F})$. Для $Q \Subset \mathbb{R}^N$ и $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ полагают $\mathscr{D}(Q) := \left\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) :\ \operatorname{supp}(f) \subset Q\right\}$ и $\mathscr{D}(\Omega) := \cup\{\mathscr{D}(Q) :\ Q \Subset \Omega\}$.

10.10.2. *Справедливы утверждения*:

(1) $\mathscr{D}(Q) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{int} Q = \varnothing$;

(2) *пусть* $Q \Subset \mathbb{R}^N$ *и*

$$\|f\|_{n,Q} := \sum_{|\alpha|\le n} \|\partial^\alpha f\|_{C(Q)} :=$$
$$:= \sum_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^N \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_N\le n}} \sup |(\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n} f)(Q)|$$

для гладкой (в окрестности Q*) функции* f *(как обычно,* $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$*). Мультинорма* $\mathfrak{M}_Q := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N}\}$ *превращает* $\mathscr{D}(Q)$ *в пространство Фреше*;

(3) *пространство гладких функций* $C_\infty(\Omega) := \mathscr{E}(\Omega)$ *на* $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ *с мультинормой* $\mathfrak{M}_\Omega := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N},\ Q \Subset \Omega\}$ — *пространство Фреше. При этом* $\mathscr{D}(\Omega)$ *плотно в* $C_\infty(\Omega)$;

(4) *пусть* $Q_1 \Subset \mathbb{R}^N$, $Q_2 \Subset \mathbb{R}^M$ *и* $Q \Subset Q_1 \times Q_2$. *Линейная оболочка в* $\mathscr{D}(Q)$ *следов на* Q *функций вида* $f_1 f_2(q_1,\ q_2) := f_1 \otimes f_2(q_1,\ q_2) := f_1(q_1)f_2(q_2)$, *где* $q_k \in Q_k$, $f_k \in \mathscr{D}(Q_k)$, *плотна в* $\mathscr{D}(Q)$;

(5) *отображение* $E \in \operatorname{Op}(\Omega) \mapsto \mathscr{D}(E) \in \operatorname{Lat}(\mathscr{D}(\Omega))$ *сохраняет точные верхние границы*:

$$\mathscr{D}(E' \cap E'') = \mathscr{D}(E') \cap \mathscr{D}(E''),$$
$$\mathscr{D}(E' \cup E'') = \mathscr{D}(E') + \mathscr{D}(E'');$$
$$\mathscr{D}(\cup\mathscr{E}) = \mathscr{L}(\cup\{\mathscr{D}(E) :\ E \in \mathscr{E}\}) \quad (\mathscr{E} \subset \operatorname{Op}(\Omega)).$$

При этом точной является следующая последовательность (*ср.* 10.9.2 (5)):

$$0 \to \mathscr{D}(E' \cap E'') \xrightarrow{\iota_{(E', E'')}} \mathscr{D}(E') \times \mathscr{D}(E'') \xrightarrow{\sigma_{(E', E'')}} \mathscr{D}(E' \cup E'') \to 0.$$

$\triangleleft$ (1) и (2) очевидны.

(3) Выбираем последовательность $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$, для которой $Q_m \Subset \Omega$, $Q_m \Subset Q_{m+1}$, $\cup_{m\in\mathbb{N}} Q_m = \Omega$. При этом мультинорма $\{\|\cdot\|_{n,Q_m} : n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$ счетна и эквивалентна $\mathfrak{M}_\Omega$. Ссылка на 5.4.2 обосновывает метризуемость. Полнота сомнений не вызывает. Для установления плотности $\mathscr{D}(\Omega)$ в $C_\infty(\Omega)$ рассмотрим множество *срезывателей* $\mathrm{Tr}\,(\Omega) := \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) :\ 0 \le \psi \le \mathbf{1}\}$. Превращаем $\mathrm{Tr}\,(\Omega)$ в *направление*, полагая $\psi_1 \le \psi_2 \Leftrightarrow \mathrm{supp}(\psi_1) \subset \mathrm{int}\{\psi_2 = 1\}$. Ясно, что для $f \in C_\infty(\Omega)$ сеть $(\psi f)_{\psi\in\mathrm{Tr}\,(\Omega)}$ аппроксимирует f нужным образом.

(4) Пусть $a(q',\ q'') := a'(q')a''(q'')$, где a', a'' — усредняющие ядра в $\mathbb{R}^N$ и в $\mathbb{R}^M$ соответственно, а $q' \in \mathbb{R}^N$ и $q'' \in \mathbb{R}^M$. Для $f \in \mathscr{D}(Q)$, $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ подберем χ из условия $\|f - f * a_\chi\|_{m,Q} \le \varepsilon/2$. Учитывая равностепенную непрерывность семейства $\mathscr{F} := \{\partial^\alpha f(q)\tau_q(a_\chi) : |\alpha| \le m,\ q \in Q_1 \times Q_2\}$, найдем конечные множества $\Delta' \subset Q_1$, $\Delta'' \subset Q_2$ так, чтобы интеграл каждой функции из $\mathscr{F}$ с точностью до $1/2\,(N+1)^{-m}\varepsilon$ аппроксимировался суммой Римана, отвечающей точкам из $\Delta' \times \Delta''$. Возникающая при этом функция $\overline{f}$ из $\mathscr{D}(Q)$ требуемая, т. е. $\|f - \overline{f}\|_{m,Q} \le \varepsilon$.

(5) устанавливают как 10.9.2 (4) с заменой 9.4.18 на 9.6.19 (2). $\triangleright$

10.10.3. Замечание. Для проверки 10.10.2 (4) можно применить обобщенную теорему Вейерштрасса, соединенную со срезыванием, обеспечивающим финитность конструируемых приближений.

10.10.4. Определение. Функционал $u \in \mathscr{D}(\Omega,\ \mathbb{F})^\#$ называют ***обобщенной функцией*** или ***распределением*** (иногда добавляют ссылку на природу поля $\mathbb{F}$) и пишут $u \in \mathscr{D}'(\Omega) := \mathscr{D}'(\Omega,\ \mathbb{F})$, если $u\,|_{\mathscr{D}(Q)} \in \mathscr{D}'(Q) := \mathscr{D}'$, как только $Q \Subset \Omega$. Используют обычные обозначения $\langle u,\ f\rangle := \langle f\,|\,u\rangle := u(f)$, а иногда и наиболее выразительный единый символ

$$\int f(x)u(x)\,dx := u(f) \quad (f \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

10.10.5. Примеры.

(1) Пусть $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ — некоторая локально интегрируемая функция. Тогда отображение

$$u_g(f) := \int f(x)g(x)\,dx \quad (f \in \mathscr{D}(\Omega))$$

задает распределение u_g. Обобщенные функции такого вида называют *регулярными*. Для обозначения регулярной обобщенной функции u_g используют более удобный символ g. В этой связи, в частности, пишут: $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ и $u_g = |\, g\rangle$.

(2) Каждая мера Радона — распределение. Всякое *положительное распределение* u (т. е. такое, что $f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0$) задано положительной мерой.

(3) Говорят, что распределение u *обладает порядком не выше* m, если для любого $Q \Subset \mathbb{R}^N$ существует число t_Q такое, что

$$|u(f)| \leq t_Q \|f\|_{m,Q} \quad (f \in \mathscr{D}(Q)).$$

Естественным образом вводят понятия *порядка распределения* и *распределения конечного порядка*. Разумеется, не каждое распределение обязано иметь конечный порядок.

(4) Пусть α — мультииндекс: $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ и u — распределение: $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ полагают $(\partial^\alpha u)(f) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha f)$. Возникающее распределение $\partial^\alpha u$ называют *производной* u (порядка α). Говорят также об *обобщенном дифференцировании*, о *производных в смысле теории распределения* и т. п., применяя обычные символы.

Производная (ненулевого порядка) меры Дирака — это не мера. В то же время $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ служит производной *функции Хевисайда* $\delta^{(-1)} := H$, где $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция $\mathbb{R}_+$. Если производная (регулярной) обобщенной функции u — регулярное распределение u_g, то g называют *производной* u *в смысле Соболева*. Для основной функции такая производная совпадает с обычной.

(5) Для $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ полагают $u^*(f) := u(f^*)^*$. Возникающее распределение u^* называют (*эрмитово*) *сопряженным к* u. Наличие инволюции $*$ позволяет, как обычно (ср. 10.9.3 (3)), говорить о *вещественных распределениях* и о порождении с их помощью *комплексных обобщенных функций*.

(6) Пусть $E \in \operatorname{Op}(\Omega)$ и $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{D}(E)$, очевидно, определен скаляр $u(f)$. Тем самым возникает распределение $u_E \in \mathscr{D}'(E)$, называемое *сужением* u *на* E. Очевидно, что функтор $\mathscr{D}$ — это предпучок.

При $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $E \in \operatorname{Op}(\Omega)$ говорят, что в E *нет* u, если $u_E = 0$. В силу 10.10.4 (5), распределения u нет и в объединении тех открытых подмножеств в Ω, в которых u отсутствует. Дополнение (до $\mathbb{R}^N$) наибольшего открытого множества, в котором нет u, называют *носителем* u и обозначают $\operatorname{supp}(u)$. Отметим, что $\operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subset \operatorname{supp}(u)$. Кроме того, распределение с компактным носителем имеет конечный порядок.

(7) Пусть $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $f \in C_\infty(\Omega)$. Для $g \in \mathscr{D}(\Omega)$ будет $fg \in \mathscr{D}(\Omega)$. Полагают $(fu)(g) := u(fg)$. Возникающее распределение fu называют *произведением* f *на* u. Пусть теперь $\operatorname{Tr}(\Omega)$ — направление срезывателей. Если существует предел $\lim_{\psi \in \operatorname{Tr}(\Omega)} u(f\psi)$, то говорят, что u *применимо к функции* f. Ясно, что распределение u с компактным носителем применимо к любой функции из $C_\infty(\Omega)$. При этом $u \in \mathscr{E}'(\Omega) := C_\infty(\Omega)'$. В свою очередь, каждый элемент $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ (см. 10.10.2 (3)), очевидно, однозначно определяет распределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ с компактным носителем.

Если $f \in C_\infty(\Omega)$ и $\partial^\alpha f\big|_{\operatorname{supp}(u)} = 0$ при всех α, для которых $|\alpha| \le m$, где u — распределение с компактным носителем порядка не выше m, то, как можно удостовериться, $u(f) = 0$. В частности, отсюда следует, что точечный носитель имеют только линейные комбинации меры Дирака и ее производных. $\triangleleft\triangleright$

(8) Пусть $\Omega_1,\ \Omega_2 \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ и $u_k \in \mathscr{D}'(\Omega_k)$. На произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ существует, и притом единственное, распределение u такое, что для $f_k \in \mathscr{D}(\Omega_k)$ выполнено $u(f_1 f_2) = u_1(f_1)u_2(f_2)$. Это распределение обозначают $u_1 \times u_2$ или же $u_1 \otimes u_2$. Привлекая 10.10.2 (4), видим, что для $f \in \mathscr{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ значение $u(f)$ можно найти последовательным применением u_1 и u_2. Точнее говоря,

$$\begin{aligned} u(f) &= u_2(y \in \Omega_2 \mapsto u_1(f(\cdot,\ y))) = \\ &= u_1(x \in \Omega_1 \mapsto u_2(f(x,\ \cdot))). \end{aligned}$$

В более образных обозначениях имеем *теорему Фубини для распределений*:

$$\iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,\ y)(u_1 \times u_2)(x,\ y)\, dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(x,\ y) u_1(x)\, dx \right) u_2(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(x,\ y) u_2(y)\, dy \right) u_1(x)\, dx.$$

Полезно отметить, что

$$\operatorname{supp}(u_1 \times u_2) = \operatorname{supp}(u_1) \times \operatorname{supp}(u_2).$$

(9) Пусть $u,\ v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ положим $\overset{+}{f} := f \circ +$. Ясно, что $\overset{+}{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Говорят, что распределения u и v ***свёртываемы***, ***конволютивны*** или ***сворачиваемы***, если ***произведение*** $u \times v$ применимо к любой функции $\overset{+}{f} \subset C_\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Легко видеть (ср. 10.10.10), что возникающий линейный функционал $f \mapsto (u \times v)(\overset{+}{f})$ $(f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$ является распределением. Его называют ***свёрткой*** u ***и*** v и обозначают $u * v$. Несомненно, что свёртки функций (см. 9.6.17) и мер на $\mathbb{R}^N$ (см. 10.9.4 (7)) представляют частные случаи свёртки распределений. В некоторых множествах любая пара распределений сворачиваема. Например, ***пространство*** $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$ ***распределений с компактными носителями*** с операцией свёртки в качестве умножения представляет собой (ассоциативную, коммутативную) алгебру с единицей — дельта-функцией δ. При этом $\partial^\alpha u = \partial^\alpha \delta * u$, $\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$. Кроме того, имеет место замечательное равенство (= ***теорема Лионса о носителях***):

$$\operatorname{co}(\operatorname{supp}(u * v)) = \operatorname{co}(\operatorname{supp}(u)) + \operatorname{co}(\operatorname{supp}(v)).$$

Подчеркнем, что попарная сворачиваемость распределений не обеспечивает, вообще говоря, ассоциативности свёртки ($(\mathbf{1} * \delta') * \delta^{(-1)} = 0$ и $\mathbf{1} * (\delta' * \delta^{(-1)}) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} := \mathbf{1}_\mathbb{R}$).

Каждое распределение u сворачиваемо с основной функцией f до регулярного распределения $(u * f)(x) = u(\tau_x(f\tilde{\ }))$, где $f\tilde{\ } := \widetilde{f}$ — ***отражение*** f, т. е. $f\tilde{\ }(x) := f(-x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Оператор $u* : f \mapsto u * f$ действует из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, непрерывен и перестановочен со сдвигами: $(u*)\tau_x = \tau_x u*$ для $x \in \mathbb{R}^N$. Легко видеть, что названные свойства характеристические, т. е. если оператор T из $\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}^N),\ C_\infty(\mathbb{R}^N))$ непрерывен и перестановочен со сдвигами, то существует, и притом единственное, распределение u такое, что $T = u*$ — именно $u(f) := (T'\delta)(\widetilde{f})$ для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ (ср. с теоремой Венделя).

10.10.6. Определение. Пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$ считают приведенными в двойственность (индуцированную двойственностью $\mathscr{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathscr{D}(\Omega)^{\#}$). При этом пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$ наделяют *топологией пространства распределений* — $\sigma(\mathscr{D}'(\Omega),\ \mathscr{D}(\Omega))$, а $\mathscr{D}(\Omega)$ — *топологией пространства основных функций* — топологией Макки $\tau_{\mathscr{D}} := \tau_{\mathscr{D}(\Omega)} := \tau(\mathscr{D}(\Omega),\ \mathscr{D}'(\Omega))$.

10.10.7. *Пусть* $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$. *Тогда*

(1) *топология* $\tau_{\mathscr{D}}$ *— сильнейшая из таких локально выпуклых топологий, что вложение* $\mathscr{D}(Q)$ *в* $\mathscr{D}(\Omega)$ *непрерывно при* $Q \Subset \Omega$ *(т. е.* $\tau_{\mathscr{D}}$ *— топология индуктивного предела);*

(2) *множество* A *в* $\mathscr{D}(\Omega)$ *ограничено в том и только в том случае, если для некоторого* $Q \Subset \Omega$ *множество* A *попадает в* $\mathscr{D}(Q)$ *и ограничено в* $\mathscr{D}(Q)$;

(3) *последовательность* (f_n) *сходится к* f *в* $(\mathscr{D}(\Omega),\ \tau_{\mathscr{D}})$ *в том и только в том случае, если имеется компакт* $Q \Subset \Omega$ *такой, что* $\operatorname{supp}(f_n) \subset Q$, $\operatorname{supp}(f) \subset Q$ *и* $(\partial^\alpha f_n)$ *равномерно на* Q *сходится к* f *для всех мультииндексов* α *(символически:* $f_n \twoheadrightarrow f$*);*

(4) *оператор* $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\Omega),\ Y)$, *где* Y *— локально выпуклое пространство, непрерывен в том и только в том случае, если* $Tf_n \to 0$, *как только* $f_n \twoheadrightarrow 0$;

(5) *каждая дельтообразная последовательность* (b_n) *служит (свёрточной) аппроксимативной единицей как в* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, *так и в* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, *т. е. для* $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *и* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ *верно:* $b_n * f \twoheadrightarrow f$ *(в* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$*) и* $b_n * u \to u$ *(в* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$*).*

$\triangleleft$ (1) устанавливается как 10.9.6, а (2) — по аналогии с 10.9.7 с учетом представления Ω в виде объединения $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, где $Q_n \Subset Q_{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$.

(3) Следует заметить, что сходящаяся последовательность ограничена, а затем привлечь 10.10.7 (2) (ср. 10.9.8).

(4) В силу 10.10.7 (1) непрерывность T равносильна непрерывности сужений $T\big|_{\mathscr{D}(Q)}$ для $Q \Subset \Omega$. В силу 10.10.2 (2) пространство $\mathscr{D}(Q)$ метризуемо. Осталось сослаться на 10.10.7 (3).

(5) Ясно, что носители $\operatorname{supp}(b_n * f)$ лежат в некоторой компактной окрестности $\operatorname{supp}(f)$. Помимо этого, для $g \in C(\mathbb{R}^N)$ очевидно, что $b_n * g \to g$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^N$. Применяя последнее утверждение к $\partial^\alpha f$ и учитывая (3), видим: $b_n * f \twoheadrightarrow f$.

С учетом 10.10.6 (8) для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$u(\widetilde{f}) = (u * f)(0) = \lim_n (u * (b_n * f))(0) =$$
$$= \lim_n ((u * b_n) * f)(0) = \lim_n (b_n * u)(\widetilde{f}). \ \triangleright$$

10.10.8. Замечание. В связи с 10.10.7 (3) для $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ часто выделяют пространство $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega) := C_0^{(m)}(\Omega)$, составленное из финитных функций f, все производные которых $\partial^\alpha f$ при $|\alpha| \leq m$ непрерывны. Пространство $\mathscr{D}^{(m)}(Q) := \{f \in \mathscr{D}^{(m)}(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \subset Q\}$ для $Q \Subset \Omega$ снабжают нормой $\|\cdot\|_{m,Q}$, превращая его в банахово. При этом $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$ наделяют топологией индуктивного предела. Таким образом, $\mathscr{D}^{(0)}(\Omega) = K(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\Omega) = \cap_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$. Сходимость в $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$ последовательности (f_n) к нулю означает равномерную сходимость с производными до порядка m на $Q \Subset \Omega$, где $\operatorname{supp}(f_n) \subset Q$ для всех достаточно больших n. Подчеркнем, что $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)'$ составлено ***распределениями порядка не выше*** m. Соответственно

$$\mathscr{D}'_F(\Omega) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^{(m)}(\Omega)'$$

— ***пространство всех обобщенных функций, имеющих конечный порядок.***

10.10.9. *Пусть* $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$. *Тогда*

(1) *пространство* $\mathscr{D}(\Omega)$ *бочечно, т. е. каждое абсолютно выпуклое замкнутое поглощающее множество (= бочка) в нем — окрестность нуля;*

(2) *любое ограниченное замкнутое подмножество* $\mathscr{D}(\Omega)$ *компактно, т. е.* $\mathscr{D}(\Omega)$ *— монтелево пространство;*

(3) *всякое абсолютно выпуклое множество в* $\mathscr{D}(\Omega)$, *поглощающее каждое ограниченное множество, является окрестностью нуля, т. е.* $\mathscr{D}(\Omega)$ — *борнологическое пространство*;

(4) *основные функции плотны в пространстве обобщенных функций.*

$\triangleleft$ (1) Бочка V в $\mathscr{D}(\Omega)$ такова, что $V_Q := V \cap \mathscr{D}(Q)$ — бочка в $\mathscr{D}(Q)$ при $Q \Subset \Omega$. Стало быть, V_Q — окрестность нуля в $\mathscr{D}(Q)$ (см. 7.1.8).

(2) Такое множество лежит в $\mathscr{D}(Q)$ для некоторого $Q \Subset \Omega$ в силу предложения 10.10.7 (2). На основании 10.10.2 (2), $\mathscr{D}(Q)$ метризуемо. Учитывая 4.6.10 и 4.6.11, последовательно приходим к требуемому.

(3) следует из борнологичности $\mathscr{D}(Q)$ при $Q \Subset \Omega$.

(4) Пусть $g \in |\,\mathscr{D}(\Omega)\rangle^\circ$, где указанная поляра вычисляется для двойственности $\mathscr{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$. Ясно, что для $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ выполнено $u_f(g) = 0$, т. е. $\int g(x)f(x)\,dx = 0$. Итак, $g = 0$. Остается сослаться на 10.5.9. $\triangleright$

10.10.10. *Теорема Шварца.* *Пусть* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — *последовательность распределений и для каждого* $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ *имеется сумма*

$$u(f) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(f).$$

Тогда u — *распределение, причем*

$$\partial^\alpha u = \sum_{k=1}^{\infty} \partial^\alpha u_k$$

для всякого мультииндекса α.

$\triangleleft$ Непрерывность u обеспечена 10.10.9 (1). Помимо этого, при $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ по определению (см. 10.10.5 (4))

$$\partial^\alpha u(f) =$$

$$= u\left((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\left((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \partial^\alpha u_k(f). \ \triangleright$$

10.10.11. *Теорема.* *Функтор* $\mathscr{D}'$ — *пучок.*

$\triangleleft$ Очевидно (ср. 10.9.10 и 10.9.11). $\triangleright$

10.10.12. замечание. Возможность задания распределения локальными данными, т. е. ***принцип локализации для обобщенных функций***, констатированный 10.10.11, допускает уточнение ввиду паракомпактности $\mathbb{R}^N$. Именно, если $\mathscr{E}$ — открытое покрытие Ω и $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ — распределение с локальными данными $(u_E)_{E\in\mathscr{E}}$, то можно взять подчиненное $\mathscr{E}$ счетное (локально конечное) разбиение единицы $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Видно, что $u = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k u_k$, где $u_k := u_{E_k}$ и $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

10.10.13. *Теорема.* *Обобщенная функция u на Ω порядка не выше m допускает представление в виде суммы производных мер Радона*:

$$u = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_\alpha,$$

где $\mu_\alpha \in \mathscr{M}(\Omega)$.

$\lhd$ Пусть сначала u обладает компактным носителем $\operatorname{supp}(u)$ и $Q \Subset \Omega$ — компактная окрестность $\operatorname{supp}(u)$. По условию (ср. 10.10.5 (7) и 10.10.8)

$$|u(f)| \le t \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{D}(Q))$$

при некотором $t \ge 0$.

Привлекая 3.5.7 и 3.5.3, с учетом 10.9.4 (2) имеем

$$u = t \sum_{|\alpha|\le m} \nu_\alpha \circ \partial^\alpha = t \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \nu_\alpha$$

для подходящего семейства $(\nu_\alpha)_{|\alpha|\le m}$, где $\nu_\alpha \in |\partial|(\|\cdot\|_\infty)$.

Переходя теперь к общему случаю, рассмотрим некоторое разбиение единицы $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, образованное такими $\psi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$, что окрестности Q_k носителей $\operatorname{supp}(\psi_k)$ составляют локально конечное покрытие Ω (см. 10.10.12). Для распределений $(\psi_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ на основании уже доказанного имеем

$$\psi_k u = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_{k,\alpha},$$

где $\mu_{k,\alpha}$ — меры Радона на Ω, причем $\operatorname{supp}(\mu_{k,\alpha}) \subset Q_k$.

Привлекая теорему Шварца 10.10.10, сразу видим, что определена сумма

$$\mu_\alpha(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\alpha}(f)$$

для $f \in K(\Omega)$ и возникающее распределение μ_α — мера Радона. Вновь апеллируя к 10.10.10, получаем:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha \mu_{k,\alpha} = \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\alpha} \right) = \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha \mu_\alpha.$$

Это и требовалось. $\triangleright$

10.10.14. Замечание. Утверждение 10.10.13 часто называют *теоремой об общем виде распределений.* Она допускает разнообразные обобщения и уточнения. Например, можно убедиться, что мера Радона с компактным носителем служит обобщенной производной (подходящего порядка) некоторой непрерывной функции, что позволяет локально рассматривать любую обобщенную функцию как результат обобщенного дифференцирования обычной функции.

10.11. Преобразование Фурье умеренных распределений

10.11.1. *Пусть χ — ненулевой функционал, заданный на пространстве $L_1(\mathbb{R}^N) := L_1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *χ — характер групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N), *)$, т. е. $\chi \ne 0$, $\chi \in L_1(\mathbb{R}^N)'$ и*

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g) \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$$

(символически: $\chi \in \mathrm{X}(L_1(\mathbb{R}^N))$, ср. 11.6.4);

(2) *существует, и притом единственный, вектор $t \in \mathbb{R}^N$ такой, что для каждого $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ выполнено*

$$\chi(f) = \widehat{f}(t) := (f * e_t)(0) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{i(x,t)}\, dx.$$

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\chi(f)\chi(g) \ne 0$. Если $x \in \mathbb{R}^N$, то

$$\chi(\delta_x * f * g) = \chi(\delta_x * f)\chi(g) = \chi(\delta_x * g)\chi(f).$$

Положим $\psi(x) := \chi(f)^{-1}\chi(\delta_x * f)$. Тем самым корректно определено непрерывное отображение $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. При этом для $x,\ y \in \mathbb{R}^N$ будет

$$\begin{gathered}\psi(x+y) = \\ = \chi(f*g)^{-1}\chi(\delta_{x+y} * (f*g)) = \\ = \chi(f)^{-1}\chi(g)^{-1} \cdot \chi(\delta_x * f * \delta_y * g) = \\ = \chi(f)^{-1}\chi(\delta_x * f)\chi(g)^{-1}\chi(\delta_y * g) = \\ = \psi(x)\psi(y),\end{gathered}$$

т. е. ψ — групповой (унитарный) характер: $\psi \in \mathrm{X}(\mathbb{R}^N)$. Анализ показывает, что $\psi = e_t$ для некоторого (очевидно, единственного) $t \in \mathbb{R}^N$. При этом с учетом свойств интеграла Бохнера

$$\begin{gathered}\chi(f)\chi(g) = \chi(f*g) = \chi\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} (\delta_x * g) f(x)\,dx\right) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi(\delta_x * g) f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\chi(g)\psi(x)\,dx = \\ = \chi(g)\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\psi(x)\,dx.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\chi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\psi(x)\,dx \quad (f \in L_1(\mathbb{R}^N)).$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Рассматривая f, g и $f*g$ как распределения, для $t \in \mathbb{R}^N$ выводим:

$$\begin{gathered}\widehat{f*g}(t) = u_{f*g}(e_t) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)g(y)e_t(x+y)\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e_t(x)\,dx \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)e_t(y)\,dy = \\ = u_f(e_t)u_g(e_t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t). \ \triangleright\end{gathered}$$

10.11.2. Замечание. Проведенные рассуждения в существенном сохраняются для любой локально компактной абелевой группы G. Характеры групповой алгебры из $\mathrm{X}(L_1(G))$ однозначно связаны с (*унитарными*) *групповыми характерами* G, т. е. с непрерывными отображениями $\psi : G \to \mathbb{C}$, для которых

$$|\psi(x)| = 1, \quad \psi(x+y) = \psi(x)\psi(y) \quad (x,\ y \in G).$$

Относительно поточечного умножения множество $\widehat{G} := \mathrm{X}(G)$ таких характеров представляет коммутативную группу. Поскольку по теореме Алаоглу — Бурбаки $\mathrm{X}(L_1(G))$ локально компактно в слабой топологии $\sigma((L_1(G))',\ L_1(G))$, то $\widehat{G}$ можно рассматривать как локально компактную абелеву группу. Ее называют *группой характеров* G или *двойственной к* G *группой.* Каждый элемент $q \in G$ определяет характер $\widehat{\widehat{q}} : \widehat{q} \in \widehat{G} \mapsto \widehat{q}(q) \in \mathbb{C}$ двойственной группы $\widehat{G}$. Возникающее вложение G в $\widehat{\widehat{G}}$ — изоморфизм локально компактных абелевых групп G и $\widehat{\widehat{G}}$ (= *теорема двойственности Понтрягина — ван Кампена*).

10.11.3. Определение. Для функции $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ отображение $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, определенное правилом

$$\widehat{f}(t) := f\,\widehat{}\,(t) := (f * e_t)(0),$$

называют *преобразованием Фурье* f.

10.11.4. Замечание. Термин «преобразование Фурье» трактуют расширительно, допуская удобную вольностью. Во-первых, его сохраняют как для оператора $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}^N}$, действующего по правилу $\mathscr{F}f := \widehat{f}$, так и для модификаций этого оператора (ср. 10.11.13). Во-вторых, преобразование $\mathscr{F}$ отождествляют с оператором $\mathscr{F}_\theta f := \widehat{f} \circ \theta$, где θ — *автоморфизм* (= *изоморфизм на себя*) $\mathbb{R}^N$. Особенно часто используют функции: $\theta(x) := {}_\sim(x) := -x$, $\theta(x) := {}_{2\pi}(x) := 2\pi x$ и $\theta(x) := {}_{-2\pi}(x) := -2\pi x$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Иными словами, преобразование Фурье вводят одной из следующих формул:

$$\mathscr{F}_\sim f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(x,t)}\, dx,$$

$$\mathscr{F}_{2\pi} f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{2\pi i (x,t)}\, dx,$$

$$\mathscr{F}_{-2\pi} f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i (x,t)}\, dx.$$

Поскольку группы характеров изоморфных групп изоморфны, есть основания, допуская вольность, применять единое обозначение $\widehat{f}$ для, вообще говоря, различных функций $\mathscr{F} f$, $\mathscr{F}_{\sim} f$, $\mathscr{F}_{\pm 2\pi} f$. Выбор символа $\widehat{\ }$ для $\mathscr{F}_{2\pi}$ (или $\mathscr{F}_{-2\pi}$) диктует подходящее обозначение для $\mathscr{F}_{-2\pi}$ (соответственно, для $\mathscr{F}_{2\pi}$) (ср. 10.11.12).

10.11.5. Примеры.

(1) Пусть $f(x) = 1$ при $-1 \leq x \leq 1$ и $f(x) = 0$ для иных $x \in \mathbb{R}$. При этом $\widehat{f}(t) = 2t^{-1} \sin t$. Отметим, что при $k\pi \geq t_0 > 0$ будет

$$\int\limits_{[t_0, +\infty)} |\widehat{f}(t)|\, dt \geq \int\limits_{[k\pi, +\infty)} |\widehat{f}(t)|\, dt = \sum_{n=k}^{\infty} \int\limits_{[n\pi, (n+1)\pi]} |\widehat{f}(t)|\, dt \geq$$

$$\geq \sum_{n=k}^{\infty} \int\limits_{[n\pi, (n+1)\pi]} \frac{2|\sin t|}{(n+1)\pi}\, dt = 4 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} = +\infty.$$

Таким образом, $\widehat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$.

(2) *Для $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ функция $\widehat{f}$ непрерывна, причем выполнено неравенство $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

$\lhd$ Непрерывность обеспечена теоремой Лебега о предельном переходе, а ограниченность — очевидной оценкой

$$|\widehat{f}(t)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \quad (t \in \mathbb{R}^N). \ \rhd$$

(3) *Для $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ при $|t| \to +\infty$ будет $|\widehat{f}(t)| \to 0$ (= теорема Римана — Лебега).*

$\lhd$ Требуемое очевидно для финитных ступенчатых функций. Остается сослаться на 5.5.9 (6) и то, что $\mathscr{F} \in B(L_1(\mathbb{R}^N),\ l_\infty(\mathbb{R}^N))$. $\rhd$

(4) *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ *и* $f_\varepsilon(x) := f(\varepsilon x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. *Тогда* $\widehat{f_\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-N}\widehat{f}\,({}^t/_\varepsilon)$ $(t \in \mathbb{R}^N)$.

$$\lhd\ \ \widehat{f_\varepsilon}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon x)e_t(x)\,dx = \varepsilon^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon x)e_{t/\varepsilon}(\varepsilon x)\,d\varepsilon x = \\ = \varepsilon^{-N}\widehat{f}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\ \rhd$$

(5) $\mathscr{F}(f^*) = (\mathscr{F}_\sim f)^*$, $(\tau_x f)^{\widehat{\ }} = e_x\widehat{f}$, $(e_x f)^{\widehat{\ }} = \tau_x\widehat{f}$. $(f \in L_1(\mathbb{R}^N),\ x \in \mathbb{R}^N.)$

$\lhd$ Проверим только первое равенство. Поскольку $a^*b = (ab^*)^*$ для $a,\ b \in \mathbb{C}$, то, привлекая нужные свойства сопряжения и интеграла, для $t \in \mathbb{R}^N$ выводим

$$\mathscr{F}(f^*)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\big(e^{i(x,t)}\big)^*\,dx\right)^* = \\ = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(x,t)}\,dx\right)^* = (\mathscr{F}_\sim f)^*(t).\ \rhd$$

(6) *Для* $f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ *выполнено*

$$(f * g)^{\widehat{\ }} = \widehat{f}\,\widehat{g};\ \int\limits_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}g = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\widehat{g}.$$

$\lhd$ Первое равенство очевидно в связи с 10.11.1. Второе — «*формула умножения*» — обеспечено следующим применением теоремы Фубини:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}g = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e_t(x)\,dxg(t)\,dt = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(t)e_t(x)\,dt\right)f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\widehat{g}.\ \rhd$$

(7) *Если* $\widehat{f},\ f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, *то* $(\widehat{f}g)^{\widehat{\ }} = f^{\sim} * \widehat{g}$.

$\triangleleft$ При $x \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$(\widehat{f}g)\widehat{\ }(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(t)\widehat{f}(t)e_t(x)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(t)f(y)e_t(y)e_t(x)\,dydt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)g(t)e_t(x+y)\,dtdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)\widehat{g}(x+y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y-x)\widehat{g}(y)\,dy = f^{\sim} * g(x). \ \triangleright$$

(8) *Для* $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *и* $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ *выполнено*

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|}t^\alpha \mathscr{F}f, \quad \partial^\alpha(\mathscr{F}f) = i^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f);$$
$$\mathscr{F}_{2\pi}(\partial^\alpha f) = (2\pi i)^{|\alpha|}t^\alpha \mathscr{F}_{2\pi}f, \quad \partial^\alpha(\mathscr{F}_{2\pi}f) = (2\pi i)^{|\alpha|}\mathscr{F}_{2\pi}(x^\alpha f)$$

(эти равенства используют широко распространенную вольность в обозначениях $x^\alpha := t^\alpha := (\cdot)^\alpha : y \in \mathbb{R}^N \mapsto y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_N^{\alpha_N}$).

$\triangleleft$ Достаточно (ср. 10.11.4) установить формулы из первой строки. Поскольку $\partial^\alpha e_t = i^{|\alpha|}t^\alpha e_t$, то

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha f)(t) = \big(e_t * \partial^\alpha f\big)(0) =$$

$$= \big(\partial^\alpha e_t * f\big)(0) = i^{|\alpha|}t^\alpha(e_t * f)(0) = i^{|\alpha|}t^\alpha \widehat{f}(t).$$

Аналогично, дифференцируя под знаком интеграла, выводим

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\mathscr{F}f)(t) = \frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)ix_1e^{i(x,t)}\,dx = \mathscr{F}(ix_1 f)(t). \ \triangleright$$

(9) *Если* $f_N(x) := \exp\big(-1/2\,|x|^2\big)$ *при* $x \in \mathbb{R}^N$, *то выполнено* $\widehat{f}_N = (2\pi)^{N/2}f_N$.

◁ Ясно, что

$$\widehat{f}_N(t) = \prod_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} e^{it_k x_k} e^{-\frac{1}{2}|x|_k^2}\, dx_k \quad (t \in \mathbb{R}^N).$$

Следовательно, дело сводится к случаю $N = 1$. При этом для $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\widehat{f}_1(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{ixy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2 - \frac{1}{2}(y^2)}\, dx =$$

$$= f_1(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2}\, dx.$$

Для вычисления интересующего интеграла A рассмотрим в $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ (одинаково ориентированные) параллельные вещественной оси прямые λ_1 и λ_2. Применяя классическую теорему Коши к голоморфной функции $f(z) := \exp\left(-z^2/2\right)$ $(z \in \mathbb{C})$ и прямоугольникам с вершинами на λ_1 и λ_2 и производя подходящий предельный переход, заключаем: $\int_{\lambda_1} f(z)\, dz = \int_{\lambda_2} f(z)\, dz$. Отсюда выводим:

$$A = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2)}\, dx = \sqrt{2\pi}. \ \triangleright$$

10.11.6. Определение. *Пространством Шварца* принято называть множество *быстро убывающих* (иногда говорят *умеренных*, ср. 10.11.17 (2)) *функций*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) :=$$
$$:= \left\{ f \in C_\infty(\mathbb{R}^N) :\ (\forall \alpha, \beta\ \in (\mathbb{Z}_+)^N)\ |x| \to +\infty \Rightarrow x^\alpha \partial^\beta f(x) \to 0 \right\}$$

(рассматриваемое как элемент решетки функций из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{C}$) с мультинормой $\{p_{\alpha,\beta} :\ \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^N\}$, где $p_{\alpha,\beta}(f) := \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty$ (ср. с примером 5.1.10 (6)).

10.11.7. *Справедливы утверждения*:

(1) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ — *пространство Фреше*;

(2) *операторы умножения на многочлен и дифференцирования — непрерывные эндоморфизмы* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$;

(3) *топологию* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *задает следующая (эквивалентная исходной) мультинорма* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, *где*

$$p_n(f) := \sum_{|\alpha| \le n} \|(1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

(как всегда, $|x|$ *— евклидова длина вектора* $x \in \mathbb{R}^N$*);*

(4) *пространство* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *плотно в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$*; помимо этого, вложение* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *непрерывно и* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$*;*

(5) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \subset L_1(\mathbb{R}^N)$.

$\lhd$ Установим (4), ибо прочие утверждения проще.

Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и ψ — срезыватель из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\mathbb{B} \subset \{\psi = 1\}$. Для $x \in \mathbb{R}^N$ и $\xi > 0$ положим

$$\psi_\xi(x) := \psi(\xi x), \quad f_\xi = \psi_\xi f.$$

Очевидно, $f_\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\alpha,\ \beta \in (\mathbb{Z}_+)^N$. Видно, что при $0 < \xi \le 1$ выполнено $\sup\{\|\partial^\gamma(\psi_\xi - 1)\|_\infty : \ \gamma \le \beta,\ \gamma \in (\mathbb{Z}_+)^N\} < +\infty$. Учитывая, что $x^\alpha \partial^\beta f(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$, найдем $r > 1$ такое, что $|x^\alpha \partial^\beta((\psi_\xi(x) - 1) f(x))| < \varepsilon$, как только $|x| > r$. Кроме того, $f_\xi(x) - f(x) = (\psi(\xi x) - 1) f(x) = 0$ при $|x| \le \xi^{-1}$. Таким образом, при $\xi \le r^{-1}$ будет

$$p_{\alpha,\beta}(f_\xi - f) = \sup_{|x| > \xi^{-1}} |x^\alpha \partial^\beta((\psi_\xi(x) - 1) f(x))| \le$$
$$\le \sup_{|x| > r} |x^\alpha \partial^\beta((\psi_\xi(x) - 1) f(x))| < \varepsilon.$$

Стало быть, $p_{\alpha,\beta}(f_\xi - f) \to 0$ при $\xi \to 0$, т. е. $f_\xi \to f$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. Требуемая непрерывность вложения бесспорна. $\rhd$

10.11.8. *Преобразование Фурье — непрерывный эндоморфизм* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.

$\lhd$ Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ в силу 10.11.5 (8), 10.11.5 (2) и неравенства Гёльдера 5.5.9 (4)

$$\|t^\alpha \widehat{f}\|_\infty = \|(\partial^\alpha f)\widehat{\ }\|_\infty \le \|\partial^\alpha f\|_1 \le K \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Стало быть,

$$\|t^\alpha \partial^\beta \widehat{f}\|_\infty = \|t^\alpha (x^\beta f)\widehat{\ }\|_\infty \le K' \|\partial^\alpha (x^\beta f)\|_\infty.$$

Отсюда видно, что $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и сужение $\mathscr{F}$ на $\mathscr{D}(Q)$ при $Q \Subset \mathbb{R}^N$ непрерывно. Остается сослаться на 10.10.7 (4) и 10.11.7 (4). $\rhd$

10.11.9. *Теорема.* *Повторное преобразование Фурье, рассматриваемое в пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, пропорционально отражению.*

◁ Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $g(x) := f_N(x) = \exp\left(-1/2\,|x|^2\right)$. С учетом 10.11.8 и 10.11.7 видим, что $\widehat{f},\ f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ и, стало быть, на основании 10.11.5 (7), $(\widehat{f}g)\widehat{\ } = f^{\sim} * \widehat{g}$. Положим $g_\varepsilon(x) := g(\varepsilon x)$ для $x \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Тогда при тех же x из-за 10.11.5 (4)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(\varepsilon t)\widehat{f}(t)e_t(x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y-x)\widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon y - x)\widehat{g}(y)\,dy.$$

Используя 10.11.5 (9) и привлекая теорему Лебега о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$g(0)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(t)e_t(x)\,dt = f(-x)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y)\,dy =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx = (2\pi)^N f(-x).$$

Окончательно $\mathscr{F}^2 f = (2\pi)^N f^{\sim}$. ▷

10.11.10. *Следствие.* $\mathscr{F}_{2\pi}^2$ *— отражение и* $(\mathscr{F}_{2\pi})^{-1} = \mathscr{F}_{-2\pi}$.

◁ Для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $t \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$f(-t) = (2\pi)^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,t)}\widehat{f}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i(x,t)}\widehat{f}(2\pi x)\,dx =$$

$$= (\mathscr{F}_{2\pi}(\mathscr{F}_{2\pi} f))(t).$$

Учитывая, что $\mathscr{F}_{2\pi} f^{\sim} = \mathscr{F}_{-2\pi} f$, получаем требуемое. ▷

10.11.11. *Следствие.* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *— свёрточная алгебра (= алгебра относительно свёртки).*

◁ Для $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ произведение fg — элемент $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и, стало быть, $\widehat{f}\,\widehat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. С учетом 10.11.5 (6) видим, что $\mathscr{F}_{2\pi}(f * g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и, значит, на основании 10.11.10, $f * g = \mathscr{F}_{-2\pi}(\mathscr{F}_{2\pi}(f * g)) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. ▷

10.11.12. *Теорема обращения.* *Преобразование Фурье $\mathfrak{F} := \mathscr{F}_{2\pi}$ служит топологическим автоморфизмом пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. При этом свёртка переходит в произведение. Обратное преобразование $\mathfrak{F}^{-1}$ совпадает с $\mathscr{F}_{-2\pi}$ и переводит произведение в свёртку. Кроме того, имеет место равенство Парсеваля*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f\,g^* = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}\,\widehat{g}^* \quad (f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

$\lhd$ В связи с 10.11.10 и 10.11.5 (5) нуждаются в проверке лишь искомые равенства. При этом, на основании 10.11.5 (7) и 10.11.7 (4), $(\widehat{f}g)(0) = (\widetilde{f} * \widehat{g})(0)$ для рассматриваемых f и g. Привлекая установленное в 10.11.5 (5), заключаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} fg^* = (\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}f)g^*)\widehat{\ }(0) = ((\mathfrak{F}^{-1}f)\widetilde{\ } * \mathfrak{F}g^*)(0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{F}f(\mathfrak{F}g^*)\widetilde{\ }dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{F}_f\mathfrak{F}_\sim(g^*)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{F}f(\mathfrak{F}g)^*. \ \rhd$$

10.11.13. Замечание. В связи с *теоремой* 10.11.9 ***о повторном преобразовании Фурье***, иногда наряду с $\mathfrak{F}$ рассматривают следующие взаимнообратные операторы:

$$\overline{\mathfrak{F}}f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx;$$

$$\overline{\mathfrak{F}}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(t)e^{-i(x,t)}\,dt.$$

При этом имеет место аналог 10.11.12 при условии переопределения свёртки $f \mathbin{\overline{*}} g := (2\pi)^{-N/2} f * g \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$. Удобства $\overline{\mathfrak{F}}$ и $\overline{\mathfrak{F}}^{-1}$ связаны с небольшими упрощениями формул 10.11.5 (8). В случае $\mathfrak{F}$ аналогичную цель достигают введением для $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ следующего дифференциального оператора: $D^\alpha := (2\pi i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha$.

10.11.14. *Теорема Планшереля.* *Продолжение преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ до изометрического автоморфизма пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ существует, и притом единственно.*

$\lhd$ Обеспечено 10.11.12, 4.5.10 и плотностью $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ в $L_2(\mathbb{R}^N)$. $\rhd$

10.11.15. Замечание. За продолжением, гарантированным теоремой 10.11.14, сохраняют прежние название и обозначения. Реже (при желании подчеркнуть различия и тонкости) говорят о *преобразовании Фурье — Планшереля* или же об L_2*-преобразовании Фурье* и уточняют понимание интегральных формул для $\mathfrak{F}f$ и $\mathfrak{F}^{-1}f$ при $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ как результатов подходящего предельного перехода в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

10.11.16. Определение. Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) := \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)'$. Наименование u — *медленно растущее распределение* (варианты: *обобщенная функция умеренного роста*, *умеренное распределение* и т. п.). Пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, составленное из всех умеренных обобщенных функций, наделяют слабой топологией $\sigma(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N),\ \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ и иногда называют *пространством Шварца* (как и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$).

10.11.17. Примеры.

(1) $L_p(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ *при* $1 \le p \le +\infty$.

$\triangleleft$ Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $p < +\infty$ и $1/q + 1/p = 1$. С помощью неравенства Гёльдера 5.5.9 (4) для подходящих K, K', $K'' > 0$ последовательно выводим:

$$\|\psi\|_q \le$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}} |\psi|^p\Bigg)^{1/p} + \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\mathbb{B}} \big|(1+|x|^2)^N(1+|x|^2)^{-N}\psi(x)\big|^p\,dx\Bigg)^{1/p} \le$$

$$\le K'\|\psi\|_\infty + \|(1+|\,\cdot\,|^2)^N\psi\|_\infty\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\mathbb{B}} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{Np}}\Bigg)^{1/p} \le$$

$$\le K''p_1(\psi).$$

Вновь привлекая неравенство Гёльдера, имеем

$$|u_f(\psi)| = |\langle\psi\,|\,f\rangle| = \Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^N} f\psi\ q\Bigg| \le \|f\|_p\,\|\psi\|_q \le Kp_1(\psi).$$

Случай $p = +\infty$ не вызывает сомнений. $\triangleright$

(2) *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.*

$\triangleleft$ Следует из 10.11.7 (4), 10.11.17 (1), 10.11.7 (5) и 10.10.9 (4). $\triangleright$

(3) Пусть $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^N)$ — *мера Радона умеренного роста*, т. е. такая, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d|\mu|(x)}{(1+|x|^2)^n} < +\infty.$$

Мера μ — это, бесспорно, умеренное распределение.

(4) Если $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$, то $fu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ в силу 10.11.7 (2). По похожим причинам, полагая $D^\alpha u(f) := (-1)^{|\alpha|} u D^\alpha f$ при $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, видим, что $D^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и $D^\alpha u = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha u$.

(5) *Каждое распределение с компактным носителем умеренно.*

$\triangleleft$ Такое $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ в соответствии с 10.10.5 (7) можно отождествить с элементом $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$. Поскольку топология в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ сильнее индуцированной вложением в $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, заключаем: $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. $\triangleright$

(6) Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, то u сворачиваемо с f, причем $u * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. Можно проверить, что u сворачиваемо также и с любым распределением v из $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$, причем $u * v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.

(7) Пусть $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ и $\tau_x u := (\tau_{-x})' u = u \circ \tau_{-x}$ — соответствующий *сдвиг* u. Распределение u называют ***периодическим*** (с периодом x), если $\tau_x u = u$. Периодические распределения имеют умеренный рост. Периодичность сохраняется при дифференцировании и свёртывании.

(8) Если $u_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ $(u \in \mathbb{N})$ и для каждого $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ имеется сумма $u(f) := \sum_{n=1}^\infty u_n(f)$, то $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и при этом $\partial^\alpha u = \sum_{n=1}^\infty \partial^\alpha u_n$ (ср. 10.10.10).

10.11.18. *Теорема.* *Любое умеренное распределение — сумма производных умеренных мер.*

$\triangleleft$ Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. С учетом 10.11.7 (3) и 5.3.7 для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $K > 0$ имеем

$$|u(f)| \le K \sum_{|\alpha| \le n} \left\| (1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f \right\|_\infty \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Привлекая 3.5.3 и 3.5.7, для некоторых $\mu_\alpha \in M(\mathbb{R}^N)$ получаем

$$u(f) = \sum_{|\alpha| \le n} \mu_\alpha \left((1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f\right) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Пусть $\nu_\alpha := (-1)^{|\alpha|}(1+|\cdot|^2)^n \mu_\alpha$. Тогда ν_α — умеренная мера, причем

$$u = \sum_{|\alpha| \le n} \partial^\alpha \nu_\alpha. \ \triangleright$$

10.11.19. Определение. ***Преобразованием Фурье*** (или, полнее, ***Фурье — Шварца***) умеренного распределения u из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ называют распределение $\mathfrak{F}u$, действующее по правилу

$$\langle f \mid \mathfrak{F}u \rangle = \langle \mathfrak{F}f \mid u \rangle \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

10.11.20. *Теорема.* *Преобразование Фурье — Шварца $\mathfrak{F}$ — это единственное продолжение преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ до топологического автоморфизма $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Обратное отображение $\mathfrak{F}^{-1}$ — единственное непрерывное продолжение обратного преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.*

$\triangleleft$ Преобразование Фурье — Шварца представляет собой сопряженный оператор к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Остается только апеллировать к 10.11.7 (5), 10.11.12, 10.11.17 (2) и 4.5.10. $\triangleright$

Упражнения

10.1. Привести примеры линейных топологических пространств и локально выпуклых пространств и конструкций, приводящих к ним.

10.2. Доказать, что хаусдорфово топологическое векторное пространство конечномерно в том и только в том случае, если оно локально компактно.

10.3. Охарактеризовать слабо непрерывные сублинейные функционалы.

10.4. Доказать, что нормируемость или метризуемость слабой топологии локально выпуклого пространства равносильна его конечномерности.

10.5. Выяснить смысл слабой сходимости в классических банаховых пространствах.

10.6. Доказать, что нормированное пространство конечномерно в том и только в том случае, если слабо замкнута единичная сфера (= сильная граница единичного шара).

10.7. Пусть оператор T переводит слабо сходящиеся сети в сети, сходящиеся по норме. Доказать, что T конечномерен.

10.8. Пусть $X,\ Y$ — банаховы пространства и $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — линейный оператор. Доказать, что T ограничен в том и только в том случае, если T слабо непрерывен (т. е. непрерывен как отображение $(X,\ \sigma(X,\ X'))$ в $(Y,\ \sigma(Y,\ Y')))$.

10.9. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы, превращающие X в банахово пространство, причем $(X,\ \|\cdot\|_1)' \cap (X,\ \|\cdot\|_2)'$ разделяет точки X. Доказать, что исходные нормы эквивалентны.

10.10. Пусть S действует из Y' в X'. Когда S служит сопряженным оператором к некоторому отображению X в Y?

10.11. Какова топология Макки $\tau(X,\ X^{\#})$?

10.12. Пусть $(X_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — некоторое семейство локально выпуклых пространств. Пусть, далее, $X := \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ — их произведение. Доказать, что справедливы представления

$$\sigma(X,\ X') = \prod_{\xi \in \Xi} \sigma(X_\xi,\ X'_\xi);$$

$$\tau(X,\ X') = \prod_{\xi \in \Xi} \tau(X_\xi,\ X'_\xi).$$

10.13. Пусть X и Y — банаховы пространства, T — элемент $B(X,\ Y)$ и $\operatorname{im} T = Y$. Доказать, что рефлексивность X обеспечивает рефлексивность Y.

10.14. Доказать, что пространства $(X')''$ и $(X'')'$ совпадают.

10.15. Доказать, что в пространстве c_0 нет бесконечномерных рефлексивных подпространств.

10.16. Пусть p — непрерывный сублинейный функционал на Y, а $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — непрерывный линейный оператор. Установить, что для множеств крайних точек справедливо включение $\operatorname{ext}(T'(\partial p)) \subset T'(\operatorname{ext}(\partial p))$.

10.17. Пусть p — непрерывная полунорма на X и $\mathscr{X}$ — подпространство X. Доказать, что $f \in \operatorname{ext}(\mathscr{X}^\circ \cap \partial p)$ в том и только в том случае, если справедливо равенство

$$X = \operatorname{cl} \mathscr{X} + \{p - f \le 1\} - \{p - f \le 1\}.$$

10.18. Доказать, что абсолютно выпуклая оболочка вполне ограниченного подмножества локально выпуклого пространства также вполне ограничена.

10.19. Установить, что борнологичность сохраняется при переходе к индуктивному пределу. Как обстоят дела с иными линейно топологическими свойствами?

Глава 11

Банаховы алгебры

11.1. Каноническое операторное представление

11.1.1. Определение. Элемент e алгебры A называют *единичным* или *единицей* алгебры, если $e \neq 0$ и при этом $ea = ae = a$ для всех $a \in A$.

11.1.2. Замечание. Как правило, без особых на то указаний, мы будем рассматривать только алгебры с единицами над основным полем $\mathbb{F}$. При этом простоты ради, если явно не оговорено противное, будем считать, что $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. При изучении представлений таких алгебр естественно условиться, что единицы сохраняются. Иными словами, в дальнейшем представление алгебры A_1 в алгебре A_2 — это такой морфизм (= мультипликативный линейный оператор) A_1 в A_2, который единицу алгебры A_1 переводит в единицу алгебры A_2.

Для алгебры A без единицы проводят «*процесс присоединения единицы*». Именно, пространство $\mathscr{A}_e := A \times \mathbb{C}$ превращают в алгебру с единицей, полагая $(a,\ \lambda)(b,\ \mu) := (ab + \mu a + \lambda\mu)$, где $a,\ b \in A$ и $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$. В нормированном случае дополнительно считают $\|(a,\ \lambda)\|_{\mathscr{A}_e} := \|a\|_A + |\lambda|$.

11.1.3. Определение. Элемент $a_r \in A$ называют *правым обратным* к a, если $aa_r = e$. Элемент $a_l \in A$ называют *левым обратным* к a, если $a_l a = e$.

11.1.4. *Если у элемента есть левые и правые обратные, то они совпадают.*

$\triangleleft$ $a_r = (a_l a)a_r = a_l(aa_r) = a_l e = a_l$ $\triangleright$

11.1.5. Определение. Элемент a алгебры A называют *обратимым* и пишут $a \in \operatorname{Inv}(A)$, если у a имеется левый и правый обратный. Полагают $a^{-1} := a_r = a_l$. Элемент a^{-1} называют *обратным* к a. Подалгебру (с единицей) B алгебры A называют *сервантной* (или *чистой*, или *наполненной*) в A, если $\operatorname{Inv}(B) = \operatorname{Inv}(A) \cap B$.

11.1.6. ***Теорема.*** *Пусть A — банахова алгебра. Для $a \in A$ положим $L_a : x \mapsto ax$ $(x \in A)$. Тогда отображение*

$$L_A := L : a \mapsto L_a \quad (a \in A)$$

является точным операторным представлением. При этом $L(A)$ — сервантная замкнутая подалгебра $B(A)$ и $L : A \to L(A)$ — топологический изоморфизм.

$\lhd$ Для $x,\ a,\ b \in A$ имеем

$$L(ab) : x \mapsto L_{ab}(x) = abx = a(bx) = L_a(L_b x) = (La)(Lb)x,$$

т. е. L — представление (ибо линейность L очевидна). Если $La = 0$, то $0 = La(e) = ae = a$, так что L — точное представление. Для доказательства замкнутости образа $L(A)$ рассмотрим алгебру A_r, совпадающую с A «как с векторным пространством» и с противоположным умножением $ab := ba$ $(a,\ b \in A)$.

Пусть $R := L_{A_r}$, т. е. $R_a := Ra : x \mapsto xa$ для $a \in A$. Проверим, что $L(A)$ совпадает с *централизатором* образа $R(A)$ — с замкнутой подалгеброй

$$Z(\operatorname{im} R) := \{T \in B(A) :\ TR_a = R_a T\ (a \in A)\}.$$

В самом деле, если $T \in L(A)$, т. е. $T = L_a$ для некоторого $a \in A$, то для каждого $b \in A$ будет $L_a R_b(x) = axb = R_b(L_a(x)) = R_b L_a(x)$ и $T \in Z(R(A))$. Если, в свою очередь, $T \in Z(R(A))$, то при $a := Te$ получаем

$$\begin{aligned} L_a x = ax = (Te)x = R_x(Te) = (R_x T)e = (TR_x)e = \\ = T(R_x e) = Tx \end{aligned}$$

для всех $x \in A$. Значит, $T = L_a \in L(A)$. Таким образом, $L(A)$ — банахова подалгебра $B(A)$.

Пусть теперь для $T = L_a$ найдется T^{-1} в $B(A)$. Для $b := T^{-1}e$ имеем $ab = L_a b = Tb = TT^{-1}e = e$. Кроме того, $ab = e \Rightarrow aba = a \Rightarrow T(ba) = L_a ba = aba = a = L_a e = Te$. Отсюда $ba = e$, ибо T — мономорфизм. Итак, $L(A)$ — сервантная подалгебра в A.

В силу определения банаховой алгебры 5.6.3 выполнено

$$\|L\| = \sup\{\|La\| : \ \|a\| \leq 1\} = \sup\{\|ab\| : \ \|a\| \leq 1, \ \|b\| \leq 1\} \leq 1.$$

Привлекая теорему Банаха об изоморфизме 7.4.5, заключаем, что L — топологический изоморфизм (т. е. L^{-1} — непрерывный оператор из $L(A)$ на A). $\triangleright$

11.1.7. Определение. Представление L_A, построенное в 11.1.6, называют ***каноническим*** (***левым***) ***операторным представлением*** алгебры A.

11.1.8. Замечание. Каноническое операторное представление позволяет ограничиться в дальнейшем рассмотрением банаховых алгебр, в которых единичные элементы нормированы — имеют единичную форму.

Для алгебры A указанного типа каноническое операторное представление L_A осуществляет изометрическое вложение A в $B(A)$ или, короче говоря, ***изометрическое представление*** A в $B(A)$. В этой же ситуации L_A часто называют ***изометрическим изоморфизмом*** алгебр A и $L(A)$. Ту же естественную терминологию употребляют и при рассмотрении представлений произвольных банаховых алгебр. Отметим здесь же, что существование канонического операторного представления L_A, в частности, оправдывает использование обозначения λ вместо λe для $\lambda \in \mathbb{C}$, где e — единица A (ср. 5.6.5). Иными словами, в дальнейшем $\mathbb{C}$ отождествлено с подалгеброй $\mathbb{C}e$ алгебры A посредством изометрического представления $\lambda \mapsto \lambda e$.

11.2. Спектр элемента алгебры

11.2.1. Определение. Пусть A — банахова алгебра и $a \in A$. Скаляр $\lambda \in \mathbb{C}$ называют ***резольвентным значением*** a (записывают: $\lambda \in \operatorname{res}(a)$), если существует ***резольвента*** $R(a, \ \lambda) := \frac{1}{\lambda - a} := (\lambda - a)^{-1}$. Множество $\operatorname{Sp}(a) := \mathbb{C} \backslash \operatorname{res}(a)$ называют ***спектром элемента*** a, а точки из $\operatorname{Sp}(a)$ — ***спектральными значениями*** a. Если есть необходимость, используют более подробные обозначения типа $\operatorname{Sp}_A(a)$.

11.2.2. *Для элемента $a \in A$ справедливо*:

$$\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_{L(A)}(L_a) = \mathrm{Sp}(L_a);$$
$$LR(a,\ \lambda) = R(L_a,\ \lambda) \quad (\lambda \in \mathrm{res}(a) = \mathrm{res}(L_a)).\ \lhd\rhd$$

11.2.3. ***Теорема Гельфанда — Мазура.*** *Поле комплексных чисел — это единственное (с точностью до изометрического изоморфизма) банахово тело (т. е. каждая комплексная банахова алгебра с нормированной единицей, в которой ненулевые элементы обратимы, имеет изометрическое представление в $\mathbb{C}$).*

$\lhd$ Пусть $\Psi : \lambda \mapsto \lambda e$, где e — единица A и $\lambda \in \mathbb{C}$. Ясно, что Ψ — представление $\mathbb{C}$ в A. Возьмем $a \in A$. В силу 11.2.2 и 8.1.11, $\mathrm{Sp}(a) \neq \varnothing$. Значит, найдется число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что элемент $(\lambda - a)$ необратим, т. е. по условию теоремы $a = \lambda e$. Следовательно, Ψ — эпиморфизм. При этом $\|\Psi(\lambda)\| = \|\lambda e\| = |\lambda|\,\|e\| = |\lambda|$, так что Ψ — изометрия. $\rhd$

11.2.4. ***Теорема Шилова.*** *Пусть A — банахова алгебра и B — замкнутая подалгебра A (с единицей). Для элемента $b \in B$ выполнено*:

$$\mathrm{Sp}_B(b) \supset \mathrm{Sp}_A(b), \quad \partial\,\mathrm{Sp}_A(b) \supset \partial\,\mathrm{Sp}_B(b).$$

$\lhd$ Если $\bar{b} := \lambda - b \in \mathrm{Inv}(B)$, то тем более $\bar{b} \in \mathrm{Inv}(A)$. Отсюда $\mathrm{res}_B(b) \subset \mathrm{res}_A(b)$, т. е.

$$\mathrm{Sp}_B(b) = \mathbb{C} \setminus \underset{B}{\mathrm{res}}(b) \supset \mathbb{C} \setminus \underset{A}{\mathrm{res}}(b) = \mathrm{Sp}_A(b).$$

Если же $\lambda \in \partial\,\mathrm{Sp}_B(b)$, то $\bar{b} \in \partial\,\mathrm{Inv}(B)$. Поэтому найдется последовательность (b_n), $b_n \in \mathrm{Inv}(B)$, сходящаяся к $\bar{b}$. Положив $t := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|b_n^{-1}\|$, имеем соотношение

$$\|b_n^{-1} - b_m^{-1}\| = \|b_n^{-1}(1 - b_n b_m^{-1})\| =$$
$$= \|b_n^{-1}(b_m - b_n)b_m^{-1}\| \leq t^2 \|b_n - b_m\|.$$

Иными словами, если $t < +\infty$, то в B существует предел $a := \lim b_n^{-1}$. Учитывая очевидную непрерывность умножения по совокупности переменных, выводим, что в этом случае $a\bar{b} = \bar{b}a = 1$, т. е. $\bar{b} \in \mathrm{Inv}(B)$.

Поскольку $\operatorname{Inv}(B)$ открыто по теореме Банаха об обратимых операторах и 11.1.6, приходим к противоречию с вхождением $\bar b \in \partial \operatorname{Inv}(B)$.

Таким образом, можно считать (переходя, если нужно, к последовательности), что $\left\|b_n^{-1}\right\| \to +\infty$. Положим $a_n := \left\|b_n^{-1}\right\|^{-1} b_n^{-1}$. Тогда

$$\left\|\bar b a_n\right\| = \left\|(\bar b - b_n)a_n + b_n a_n\right\| \le$$
$$\le \left\|\bar b - b_n\right\| \|a_n\| + \left\|b_n^{-1}\right\|^{-1} \left\|b_n b_n^{-1}\right\| \to 0.$$

Отсюда вытекает, что элемент $\bar b$ необратим. В самом деле, в противном случае для $a := \bar b^{-1}$ получилось бы

$$1 = \|a_n\| = \left\|a \bar b a_n\right\| \le \|a\| \left\|\bar b a_n\right\| \to 0.$$

Окончательно заключаем, что элемент $\lambda - b$ не лежит в $\operatorname{Inv}(A)$, т. е. $\lambda \in \operatorname{Sp}_A(b)$. Поскольку λ — граничная точка бо́льшего множества $\operatorname{Sp}_B(b)$, приходим к соотношению $\lambda \in \partial \operatorname{Sp}_A(b)$. $\rhd$

11.2.5. *Следствие.* *Если* $\operatorname{Sp}_B(b)$ *не имеет внутренних точек, то* $\operatorname{Sp}_B(b) = \operatorname{Sp}_A(b)$.

$\lhd$ $\operatorname{Sp}_B(b) = \partial \operatorname{Sp}_B(b) \subset \partial \operatorname{Sp}_B(b) \subset \partial \operatorname{Sp}_A(b) \subset \operatorname{Sp}_A(b) \subset \operatorname{Sp}_B(b)$ $\rhd$

11.2.6. Замечание. Теорему Шилова часто называют *теоремой о постоянстве границы спектра* и выражают словами: «граничное спектральное значение — неустранимая спектральная точка».

11.3. Голоморфное функциональное исчисление в алгебрах

11.3.1. Определение. Пусть a — элемент банаховой алгебры A и $h \in \mathscr{H}(\operatorname{Sp}(a))$ — росток голоморфной функции на спектре a. Положим

$$\mathscr{R}_a h := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h(z)}{z - a}\, dz.$$

Элемент $\mathscr{R}_a h$ из A называют *интегралом Рисса — Данфорда* ростка h. Если, в частности, $f \in H(\operatorname{Sp}(a))$ — функция, голоморфная в окрестности спектра a, то полагают $f(a) := \mathscr{R}_a \overline{f}$.

11.3.2. *Теорема Гельфанда — Данфорда для алгебр.* *Интеграл Рисса — Данфорда $\mathscr{R}_a$ является представлением алгебры ростков голоморфных функций на спектре элемента a из A в алгебре A. При этом если $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (в окрестности $\mathrm{Sp}(a)$), то $f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$.*

$\triangleleft$ Из определений 11.2.3 и 8.2.1, привлекая 11.2.2, имеем

$$(L\mathscr{R}_a h)(b) = L_{\mathscr{R}_a h} b = (\mathscr{R}_a h)b = \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(a,z)\, dz b =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(a,z)\, b dz = \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(L_a,z)\, b dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(L_a,z)\, dz b = \mathscr{R}_{L_a} h(b)$$

для всех $b \in A$. В частности, получаем, что образ $\mathscr{R}_{L_a}(\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)))$ лежит в $\mathrm{im}\, L$. Таким образом, из уже доказанной коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[d, "\mathscr{R}_{L_a}"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"] & \\ B(A) & A \arrow[l, "L"'] \end{tikzcd}$$

вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[d, "\mathscr{R}_{L_a}"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"] & \\ L(A) \arrow[r, "L^{-1}"] & A \end{tikzcd}$$

Остается привлечь 11.1.6 и теорему Гельфанда — Данфорда 8.2.3. $\triangleright$

11.3.3. Замечание. В дальнейшем в силу уже установленного в произвольных банаховых алгебрах можно использовать факты голоморфного функционального исчисления, доказанные в 8.2 для алгебры $B(X)$, где X — банахово пространство.

11.4. Идеалы в коммутативных алгебрах

11.4.1. Определение. Пусть A — некоторая коммутативная алгебра. Подпространство J в A называют *идеалом* A и пишут $J \lhd A$, если $AJ \subset J$.

11.4.2. *Множество $J(A)$ всех идеалов в A, упорядоченное по включению, представляет собой полную решетку. При этом для любого множества $\mathscr{E}$ в $J(A)$ выполнено*

$$\sup\nolimits_{J(A)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathrm{Lat}(A)} \mathscr{E}, \quad \inf\nolimits_{J(A)} \mathscr{E} = \inf\nolimits_{\mathrm{Lat}(A)} \mathscr{E},$$

т. е. $J(A)$ вложено в полную решетку подпространств $\mathrm{Lat}(A)$ с сохранением точных верхних и точных нижних границ произвольных множеств.

$\lhd$ Ясно, что 0 — это наименьший, а A — это наибольший идеалы. Помимо этого, пересечение идеалов и сумма конечного множества идеалов — идеал. Остается сослаться на 2.1.5 и 2.1.6. $\rhd$

11.4.3. *Пусть $J_0 \lhd A$. Пусть, далее, $\varphi : A \to A/J_0$ — каноническое отображение A на фактор-алгебру $\overline{A} := A/J_0$. Тогда*

$$J \lhd A \Rightarrow \varphi(J) \lhd \overline{A};$$
$$\overline{J} \lhd \overline{A} \Rightarrow \varphi^{-1}(\overline{J}) \lhd A.$$

$\lhd$ Поскольку по определению $\overline{a}\overline{b} := \varphi(\varphi^{-1}(\overline{a})\varphi^{-1}(\overline{b}))$ для $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{A}$, то оператор φ мультипликативен: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для $a,\ b \in A$. Значит, получаем последовательно

$$\varphi(J) \subset \overline{A}\varphi(J) = \varphi(A)\varphi(J) \subset \varphi(AJ) \subset \varphi(J);$$
$$\varphi^{-1}(\overline{J}) \subset A\varphi^{-1}(\overline{J}) \subset \varphi^{-1}(\varphi(A)\overline{J}) = \varphi^{-1}(\overline{A}\overline{J}) \subset \varphi^{-1}(\overline{J}). \ \rhd$$

11.4.4. *Пусть $J \lhd A$ и $J \neq 0$. Эквивалентны утверждения*:

(1) $A \neq J$;

(2) $1 \notin J$;

(3) *элементы из J не имеют левых обратных.* $\lhd\rhd$

11.4.5. Определение. Идеал J в A называют *собственным*, если J отличен от A. Максимальные элементы в множестве собственных идеалов, упорядоченном по включению, называют *максимальными идеалами*.

11.4.6. *Коммутативная алгебра является полем в том и только в том случае, если в ней нет собственных идеалов кроме нулевого.* $\lhd\rhd$

11.4.7. *Пусть J — собственный идеал в A. Тогда (J — максимален) $\Leftrightarrow$ (A/J — поле).*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $\overline{J} \lhd A/J$. Тогда, по 11.4.3, $\varphi^{-1}(\overline{J}) \lhd A$. Так как, несомненно, $J \subset \varphi^{-1}(\overline{J})$, то либо $J = \varphi^{-1}(\overline{J})$ и $0 = \varphi(J) = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{J})) = \overline{J}$, либо $A = \varphi^{-1}(\overline{J})$ и $\overline{J} = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{J})) = \varphi(A) = A/J$ в силу 1.1.6. Значит, в A/J нет отличных от нуля собственных идеалов. Осталось привлечь 11.4.6.

$\Leftarrow$: Пусть $J_0 \lhd A$ и $J_0 \subset J$. Тогда, по 11.4.3, $\varphi(J_0) \lhd A/J$. На основании 11.4.6 либо $\varphi(J_0) = 0$, либо $\varphi(J_0) = A/J$. В первом случае $J_0 \subset \varphi^{-1} \circ \varphi(J_0) \subset \varphi^{-1}(0) = J$ и $J = J_0$. Во втором случае $\varphi(J_0) = \varphi(A)$, т. е. $A = J_0 + J \subset J_0 + J_0 = J_0 \subset A$. Итак, J — максимальный идеал. $\rhd$

11.4.8. *Теорема Крулля.* *Каждый собственный идеал содержится в некотором максимальном идеале.*

$\lhd$ Пусть J_0 — собственный идеал алгебры A. Пусть, далее, $\mathscr{E}$ состоит из собственных идеалов J алгебры A таких, что $J_0 \subset J$. Всякая цепь $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ имеет в силу 11.4.2 точную верхнюю границу: $\sup \mathscr{E} = \cup\{J :\ J \in \mathscr{E}_0\}$. По 11.4.4 идеал $\sup \mathscr{E}_0$ собственный. Таким образом, $\mathscr{E}$ индуктивно и требуемое обеспечено леммой Куратовского — Цорна 1.2.20. $\rhd$

11.5. Идеалы в алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$

11.5.1. *Теорема о минимальном идеале.* *Пусть J — произвольный идеал в алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$ непрерывных комплекснозначных функций на компакте Q. Пусть, далее,*

$$Q_0 := \cap\{f^{-1}(0) :\ f \in J\};$$
$$J_0 := \{f \in C(Q,\ \mathbb{C}) :\ \operatorname{int} f^{-1}(0) \supset Q_0\}.$$

Тогда $J_0 \lhd C(Q,\ \mathbb{C})$, причем $J_0 \subset J$.

$\lhd$ Пусть $Q_1 := \mathrm{cl}(Q \setminus f^{-1}(0))$ для функции $f \in J_0$. Привлекая условия, видим, что $Q_1 \cap Q_0 = \varnothing$. Для доказательства вхождения $f \in J$ необходимо (и, разумеется, достаточно) построить функцию $u \in J$ такую, что $u(q) = 1$ для всех $q \in Q_1$. Действительно, в этом случае $uf = f$.

Для построения функции u заметим сначала, что для $q \in Q_1$ найдется функция $f_q \in J$, для которой $f_q(q) \neq 0$. Полагая $g_q := f_q^* f_q$, где, как обычно, $f_q^* : x \mapsto f_q(x)^*$ — комплексно сопряженная к f_q функция, имеем $g_q \geq 0$ и, кроме того, $g_q(q) > 0$. Ясно также, что $g_q \in J$ для $q \in Q_1$. Семейство $(U_q)_{q \in Q_1}$, где $U_q := \{x \in Q_1 :\ g_q(x) > 0\}$, образует открытое покрытие Q_1. Используя компактность Q_1, выберем конечное множество $\{q_1, \dots, q_n\}$ в Q_1 такое, что $Q_1 \subset U_{q_1} \cup \ldots \cup U_{q_n}$. Обозначим $g := g_{q_1} + \ldots + g_{q_n}$. Несомненно, $g \in J$, причем $g(q) > 0$ для $q \in Q_1$. Положим $h_0(q) := g(q)^{-1}$ для $q \in Q_1$. По теореме Титце — Урысона 10.8.20 найдется функция $h \in C(Q,\ \mathbb{R})$, для которой $h\big|_{Q_1} = h_0$. Пусть, наконец, $u := hg$. Эта функция u — искомая.

Итак, установлено, что $J_0 \subset J$. Кроме того, J_0 — идеал в $C(Q,\ \mathbb{C})$ по очевидным обстоятельствам. $\rhd$

11.5.2. *Для каждого замкнутого идеала J в алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$ найдется, и притом единственное, компактное подмножество Q_0 такое, что*

$$J = J(Q_0) := \{f \in C(Q,\ \mathbb{C}) :\ q \in Q_0 \Rightarrow f(q) = 0\}.$$

$\lhd$ Единственность обеспечена теоремой Урысона 9.3.14. Определим Q_0 так же, как и 11.5.1. Тогда заведомо $J \subset J(Q_0)$. Возьмем $f \in J(Q_0)$ и для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$U_n := \left\{ |f| \leq \frac{1}{2n} \right\}, \quad V_n := \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Вновь привлекая теорему Урысона 9.3.14, найдем $h_n \in C(Q,\ \mathbb{R})$ так, что $0 \leq h_n \leq 1$ и $h_n\big|_{U_n} = 0$, $h_n\big|_{V_n} = 1$. Рассмотрим $f_n := fh_n$. Поскольку

$$\mathrm{int}\, f_n^{-1}(0) \supset \mathrm{int}\, U_n \supset Q_0,$$

то в силу 11.5.1 справедливо $f_n \in J$. Осталось заметить, что $f_n \to f$ по построению. $\rhd$

11.5.3. *Теорема о максимальном идеале.* *Каждый максимальный идеал в алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$ имеет вид*

$$J(q) := J(\{q\}) = \{f \in C(Q,\ \mathbb{C}) :\ f(q) = 0\},$$

где q — некоторая точка Q.

$\lhd$ Следует из 11.5.2, ибо замыкание идеала — идеал. $\rhd$

11.6. Преобразование Гельфанда

11.6.1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, а $J \lhd A$ — это замкнутый идеал, не равный A. Тогда фактор-алгебра A/J, наделенная фактор-нормой, является банаховой алгеброй. Если при этом $\varphi : A \to A/J$ — каноническое отображение, то $\varphi(1)$ — единица в A/J, оператор φ мультипликативен и $\|\varphi\| = 1$.*

$\lhd$ Для $a,\ b \in A$ имеем, учитывая 5.1.10 (5),

$$\begin{aligned}\|\varphi(a)\varphi(b)\|_{A/J} = \inf\{\|a'b'\|_A :\ \varphi(a') = \varphi(a),\ \varphi(b') = \varphi(b)\} \le \\ \le \inf\{\|a'\|_A\|b'\|_A :\ \varphi(a') = \varphi(a),\ \varphi(b') = \varphi(b)\} = \\ = \|\varphi(a)\|_{A/J}\|\varphi(b)\|_{A/J}.\end{aligned}$$

Иными словами, норма в A/J субмультипликативна. Следовательно, будет $\|\varphi(1)\| \ge 1$. Помимо этого,

$$\|\varphi(1)\|_{A/J} = \inf\{\|a\|_A :\ \varphi(a) = \varphi(1)\} \le \|1\|_A = 1,$$

т. е. $\|\varphi(1)\| = 1$. Последнее, в частности, обеспечивает равенство $\|\varphi\| = 1$. Оставшиеся утверждения несомненны. $\rhd$

11.6.2. Замечание. Предложение 11.6.1 сохраняется для некоммутативной банаховой алгебры A при дополнительном допущении, что J — *двусторонний идеал* A, т. е. J — подпространство A, удовлетворяющее условию $AJA \subset J$.

11.6.3. *Пусть $\chi : A \to \mathbb{C}$ — ненулевой мультипликативный линейный функционал на A. Тогда χ непрерывен и $\|\chi\| = \chi(1) = 1$ (в частности, χ — представление A в $\mathbb{C}$).*

$\lhd$ Поскольку $\chi \ne 0$, то для некоторого $a \in A$ выполнено $0 \ne \chi(a) = \chi(a1) = \chi(a)\chi(1)$. Значит, $\chi(1) = 1$. Если теперь $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ таковы, что $|\lambda| > \|a\|$, то $\lambda - a \in \operatorname{Inv}(A)$ (см. 5.6.15). Имеем $1 = \chi(1)\chi(\lambda - a)\chi((\lambda - a)^{-1})$. Отсюда $\chi(\lambda - a) \ne 0$, т. е. $\chi(a) \ne \lambda$. Стало быть, $|\chi(a)| \le \|a\|$ и $\|\chi\| \le 1$. Учитывая, что $\|\chi\| = \|\chi\|\,\|1\| \ge |\chi(1)| = 1$, заключаем: $\|\chi\| = 1$. $\rhd$

11.6.4. Определение. Ненулевые мультипликативные линейные функционалы на алгебре A называют *характерами* A. Множество всех характеров A обозначают $\mathrm{X}(A)$, снабжают топологией поточечной сходимости (индуцированной в $\mathrm{X}(A)$ слабой топологией $\sigma(A', A)$) и называют *пространством характеров* алгебры A.

11.6.5. *Пространство характеров — компакт.*

$\triangleleft$ Хаусдорфовость $\mathrm{X}(A)$ не вызывает сомнений. В силу 11.6.3, $\mathrm{X}(A)$ — это $\sigma(A', A)$-замкнутое подмножество шара $B_{A'}$. Последний $\sigma(A', A)$-компактен по теореме Алаоглу — Бурбаки 10.6.7. Осталось сослаться на 9.4.9. $\triangleright$

11.6.6. ***Теорема об идеалах и характерах.*** *Максимальные идеалы коммутативной банаховой алгебры A суть в точности ядра ее характеров. При этом отображение $\chi \mapsto \ker \chi$, действующее из пространства характеров $\mathrm{X}(A)$ на множество $M(A)$ всех максимальных идеалов A, является взаимно однозначным.*

$\triangleleft$ Пусть $\chi \in \mathrm{X}(A)$ — характер алгебры A. Очевидно, что $\ker \chi \triangleleft A$. Из 2.3.11 вытекает, что снижение $\overline{\chi} : A / \ker \chi \to \mathbb{C}$ — мономорфизм. В связи с 11.6.1, $\overline{\chi}(1) = \chi(1) = 1$, т. е. $\overline{\chi}$ — изоморфизм $A / \ker \chi$ и $\mathbb{C}$. Следовательно, $A / \ker \chi$ — это поле. Привлекая 11.4.7, делаем вывод, что идеал $\ker \chi$ максимален, т. е. $\ker \chi \in M(A)$. Пусть теперь $m \in M(A)$ — какой-нибудь максимальный идеал алгебры A. Ясно, что $m \subset \operatorname{cl} m$, $\operatorname{cl} m \triangleleft A$ и при этом $1 \notin \operatorname{cl} m$ (ибо $1 \in \operatorname{Inv}(A)$, а последнее множество открыто по теореме Банаха об обратимых операторах 5.6.12 и 11.1.6). Таким образом, идеал m замкнут. Рассмотрим фактор-алгебру A/m и каноническое отображение $\varphi : A \to A/m$. На основании 11.4.7 и 11.6.1 фактор-алгебра A/m — это банахово поле. По теореме Гельфанда — Мазура 11.2.3 имеется изометрическое представление $\psi : A/m \to \mathbb{C}$. Положим $\chi := \psi \circ \varphi$. Видно, что $\chi \in \mathrm{X}(A)$ и при этом $\ker \chi = \chi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(0)) = \varphi^{-1}(0) = m$.

Для завершения доказательства осталось проверить взаимную однозначность отображения $\chi \mapsto \ker \chi$. Итак, пусть $\ker \chi_1 = \ker \chi_2$ для χ_1, $\chi_2 \in \mathrm{X}(A)$. В силу 2.3.12 для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено $\chi_1 = \lambda \chi_2$. Помимо этого, по 11.6.3, $1 = \chi_1(1) = \lambda \chi_2(1) = \lambda$. Окончательно $\chi_1 = \chi_2$. $\triangleright$

11.6.7. Замечание. В связи с теоремой 11.6.6 множество $M(A)$ часто наделяют топологией, перенесенной в $M(A)$ из $\mathrm{X}(A)$ указанным отображением $\chi \mapsto \ker\chi$, и говорят о компактном *пространстве максимальных идеалов* A. Иными словами, пространство характеров и пространство максимальных идеалов отождествляют так, как это сделано в 11.6.6.

11.6.8. Определение. Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $\mathrm{X}(A)$ — ее пространство характеров. Для $a \in A$ и $\chi \in \mathrm{X}(A)$ положим $\widehat{a}(\chi) := \chi(a)$. Возникающую функцию $\widehat{a} : \chi \mapsto \widehat{a}(\chi)$, определенную на $\mathrm{X}(A)$, называют *преобразованием Гельфанда элемента* a. Отображение $a \mapsto \widehat{a}$, где $a \in A$, называют *преобразованием Гельфанда алгебры* A и обозначают $\mathscr{G}_A$ (или $\widehat{\ }$).

11.6.9. ***Теорема о преобразовании Гельфанда.*** *Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_A : a \mapsto \widehat{a}$ есть представление коммутативной банаховой алгебры A в алгебре $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. При этом*

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Sp}(a) = \mathrm{Sp}(\widehat{a}) = \widehat{a}(\mathrm{X}(A)),\\
\|\widehat{a}\| = r(a),
\end{gathered}
$$

где $r(a)$ — спектральный радиус элемента a алгебры A.

$\triangleleft$ То, что $a \in A \Rightarrow \widehat{a} \in C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$, $\widehat{1} = 1$ и $a,\ b \in A \Rightarrow \widehat{a}\widehat{b} = \widehat{ab}$, обеспечено определениями и 11.6.3. Линейность $\mathscr{G}_A$ не вызывает сомнений. Следовательно, отображение $\mathscr{G}_A$ действительно является представлением.

Пусть $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Тогда элемент $\lambda - a$ необратим, а потому идеал $J_{\lambda - a} := A(\lambda - a)$ — собственный в силу 11.4.4. По теореме Крулля 11.4.8 существует максимальный идеал $m \lhd A$, удовлетворяющий условию $m \supset J_{\lambda-a}$. По теореме 11.6.6 для подходящего характера χ будет $m = \ker\chi$. В частности, $\chi(\lambda - a) = 0$, т. е. $\lambda = \lambda\chi(1) = \chi(\lambda) = \chi(a) = \widehat{a}(\chi)$. Значит, $\lambda \in \mathrm{Sp}(\widehat{a})$.

Если, в свою очередь, $\lambda \in \mathrm{Sp}(\widehat{a})$, то $(\lambda - \widehat{a})$ — необратимый элемент пространства $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$, т. е. найдется характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$, для которого $\lambda = \widehat{a}(\chi)$. Иными словами, $\chi(\lambda - a) = 0$. Стало быть, допущение $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$ приводит к противоречию:

$$
1 = \chi(1) = \chi((\lambda - a)^{-1}(\lambda - a)) = \chi((\lambda - a)^{-1})\chi(\lambda - a) = 0.
$$

Итак, $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Окончательно $\mathrm{Sp}(a) = \mathrm{Sp}(\widehat{a})$.

Привлекая формулу Бёрлинга — Гельфанда (см. 11.3.3 и 8.1.12), видим:

$$
\begin{aligned}
r(a) = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\} = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathrm{Sp}(\widehat{a})\} = \\
= \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \widehat{a}(\mathrm{X}(A))\} = \sup\{|\widehat{a}(\chi)| :\ \chi \in \mathrm{X}(A)\} = \|\widehat{a}\|,
\end{aligned}
$$

что и нужно. ▷

11.6.10. *Преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры A является изометрическим вложением в том и только в том случае, если $\|a^2\| = \|a\|^2$ для всякого $a \in A$.*

◁ ⇒: Учитывая, что отображение $t \mapsto t^2$, рассматриваемое на $\mathbb{R}_+$, возрастает и имеет возрастающее обратное, определенное на $\mathbb{R}_+$, в силу 10.6.9 получаем

$$
\begin{aligned}
\|a^2\| = \|\widehat{a}^2\|_{C(\mathrm{X}(A),\mathbb{C})} = \sup_{\chi\in\mathrm{X}(A)} |\widehat{a}^2(\chi)| = \sup_{\chi\in\mathrm{X}(A)} |\chi(a^2)| = \\
= \sup_{\chi\in\mathrm{X}(A)} |\chi(a)\chi(a)| = \sup_{\chi\in\mathrm{X}(A)} |\chi(a)|^2 = \\
= \big(\sup_{\chi\in\mathrm{X}(A)} |\chi(a)|\big)^2 = \|\widehat{a}\|^2 = \|a\|^2.
\end{aligned}
$$

⇐: По формуле Гельфанда 5.6.8, $r(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$. Имеем, в частности, $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, т. е. $r(a) = \|a\|$. По 10.6.9, помимо этого, $r(a) = \|\widehat{a}\|$. ▷

11.6.11. Замечание. Иногда интересуются не свойством изометричности преобразования Гельфанда, а его точностью. Ядро преобразования Гельфанда $\mathscr{G}_A$ — это пересечение всех максимальных идеалов, т. е. *радикал* алгебры A. Таким образом, условие точности представления $\mathscr{G}_A$ алгебры A в алгебре $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$ можно формулировать словами: «алгебра A *полупроста* (т. е. радикал A тривиален)».

11.6.12. *Теорема.* *Для элемента a коммутативной банаховой алгебры A коммутативна следующая диаграмма представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) = \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(\widehat{a})) \arrow[d, "\mathscr{R}_a"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\hat{a}}"] & \\
A \arrow[r, "\mathscr{G}_A"] & C(\mathrm{X}(A), \mathbb{C})
\end{tikzcd}
$$

При этом $f(\widehat{a}) = f \circ \widehat{a} = f(\widehat{a})$ *для* $f \in H(\mathrm{Sp}(a))$.

$\triangleleft$ Возьмем $\chi \in \mathrm{X}(A)$. Для каждого $z \in \mathrm{res}(a)$ выполнено

$$\chi\left(\frac{1}{z-a}(z-a)\right) = 1 \Rightarrow \chi\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{\chi(z-a)} = \frac{1}{z-\chi(a)}.$$

Иными словами,

$$\widehat{R(a,\ z)}(\chi) = \widehat{\frac{1}{z-a}}(\chi) = \frac{1}{z-\widehat{a}(\chi)} = \frac{1}{z-\widehat{a}}(\chi) = R(\widehat{a},\ z)(\chi).$$

Таким образом, учитывая свойства интеграла Бохнера (см. 5.5.9 (6)), для $f \in H(\mathrm{Sp}(a))$ получаем

$$\widehat{f(a)} = \mathscr{G}_A \circ \mathscr{R}_a f = \mathscr{G}_A\left(\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)R(a,\ z)\,dz\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\mathscr{G}_A(R(a,\ z))\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\widehat{R(a,\ z)}\,dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)R(\widehat{a},\ z)\,dz = \mathscr{R}_{\hat{a}}(f) = f(\widehat{a}).$$

Помимо этого, привлекая классическую теорему Коши, видим, что для $\chi \in \mathrm{X}(A)$ справедливы соотношения

$$f \circ \widehat{a}(\chi) = f(\widehat{a}(\chi)) = f(\chi(a)) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\chi\oint \frac{f(z)}{z-\chi(a)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint \chi\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\chi\left(\oint \frac{f(z)}{z-a}\,dz\right) = \widehat{f(a)}(\chi) = f(\widehat{a})(\chi). \ \triangleright$$

11.6.13. Замечание. Теорию преобразования Гельфанда очевидным образом можно распространить на случай коммутативных банаховых алгебр A без единицы. Определения 11.6.4 и 11.6.8 сохраним дословно. Характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$ порождает характер $\chi_e \in \mathrm{X}(\mathscr{A}_e)$ по правилу: $\chi_e(a,\ \lambda) := \chi(a) + \lambda$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Множество $\mathrm{X}(\mathscr{A}_e) \setminus \{\chi_e :\ \chi \in \mathrm{X}(A)\}$ состоит из единственного элемента $\chi_\infty(a,\ \lambda) := \lambda$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Таким образом, пространство $\mathrm{X}(A)$ локально компактно (ср. 9.4.19), ибо отображение $\chi \in \mathrm{X}(A) \mapsto \chi_e \in \mathrm{X}(\mathscr{A}_e) \setminus \{\chi_\infty\}$ является гомеоморфизмом. При этом $\ker \chi_\infty = A \times 0$. Следовательно, преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры без единицы служит ее представлением в алгебре определенных на локально компактном пространстве непрерывных комплексных функций, «*стремящихся к нулю на бесконечности*». Для групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N),\ *)$ на основании 10.11.1 и 10.11.3 преобразование Фурье совпадает с преобразованием Гельфанда и приведенное утверждение содержит как теорему Римана — Лебега 10.11.5 (3), так и формулу умножения 10.11.6 (3).

11.7. Спектр элемента C^*-алгебры

11.7.1. Определение. Элемент a инволютивной алгебры A называют *эрмитовым*, если $a^* = a$. Элемент a из A называют *нормальным*, если $a^*a = aa^*$. Наконец, элемент a называют *унитарным*, если $aa^* = a^*a = 1$ (т. е. $a,\ a^* \in \mathrm{Inv}(A)$ и $a^{-1} = a^*,\ a^{*-1} = a$).

11.7.2. *Эрмитовы элементы инволютивной алгебры A образуют вещественное подпространство A. При этом для любого $a \in A$ существуют, и притом единственные, эрмитовы элементы $x,\ y \in A$ такие, что $a = x + iy$. Именно,*

$$x = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad y = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

При этом $a^* = x - iy$.

$\lhd$ Следует проверить только утверждение об единственности. Если $a = x_1 + iy_1$, то в силу свойств инволюции (см. 6.4.13) выполнено $a^* = x_1^* + (iy_1)^* = x_1^* - iy_1^* = x_1 - iy_1$. Стало быть, $x_1 = x$ и $y_1 = y$. $\rhd$

11.7.3. *Единица — эрмитов элемент.*

$\lhd$ $1^* = 1^*1 = 1^*1^{**} = (1^*1)^* = 1^{**} = 1$ $\rhd$

11.7.4. $a \in \operatorname{Inv}(A) \Leftrightarrow a^* \in \operatorname{Inv}(A)$. *При этом инволюция и обращение — коммутирующие операции.*

$\triangleleft$ Имеем $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ для $a \in \operatorname{Inv}(A)$. Значит, $a^{-1*}a^* = a^*a^{-1*} = 1^*$. Учитывая 11.7.3, видим, что $a^* \in \operatorname{Inv}(A)$ и $a^{*-1} = a^{-1*}$. Повторяя приведенное рассуждение при $a := a^*$, получаем требуемое. $\triangleright$

11.7.5. $\operatorname{Sp}(a^*) = \operatorname{Sp}(a)^*$. $\triangleleft\triangleright$

11.7.6. *Спектр унитарного элемента C^*-алгебры — подмножество единичной окружности.*

$\triangleleft$ В силу определения 6.4.13 для произвольного элемента a имеем $\|a^2\| = \|a^*a\| \le \|a^*\|\,\|a\|$. Иначе говоря, $\|a\| \le \|a^*\|$. Таким образом, поскольку $a = a^{**}$, заключаем: $\|a\| = \|a^*\|$. Если $a^* = a^{-1}$, т. е. a — унитарный элемент, то $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^{-1}a\| = 1$. Следовательно, $\|a\| = \|a^*\| = \|a^{-1}\| = 1$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Sp}(a)$ и $\operatorname{Sp}(a^{-1})$ лежат в единичном круге. Помимо этого, $\operatorname{Sp}(a^{-1}) = \operatorname{Sp}(a)^{-1}$. $\triangleright$

11.7.7. *Спектр эрмитова элемента C^*-алгебры веществен.*

$\triangleleft$ Пусть $a \in A$. По теореме Гельфанда — Данфорда для алгебр 11.3.2 выполнено

$$\exp(a)^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^*)^n}{n!} = \exp(a^*).$$

Если теперь $h = h^*$ — эрмитов элемент A, то для элемента $a := \exp(ih)$, вновь привлекая голоморфное функциональное исчисление, получаем

$$a^* = \exp(ih)^* = \exp((ih)^*) = \exp(-ih^*) = \exp(-ih) = a^{-1}.$$

Значит, a — унитарный элемент C^*-алгебры A, и по 11.7.6 спектр $\operatorname{Sp}(a)$ — это подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$. Если $\lambda \in \operatorname{Sp}(h)$, то по теореме об отображении спектра 8.2.5 (см. также 11.3.3) $\exp(i\lambda) \in \operatorname{Sp}(a) \subset \mathbb{T}$. Итак, $1 = |\exp(i\lambda)| = |\exp(i \operatorname{Re}\lambda - \operatorname{Im}\lambda)| = \exp(-\operatorname{Im}\lambda)$. Окончательно $\operatorname{Im}\lambda = 0$, т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$. $\triangleright$

11.7.8. Определение. Пусть A — некоторая C^*-алгебра. Подалгебру B алгебры A называют ***C^*-подалгеброй*** A, если $b \in B \Rightarrow b^* \in B$. При этом B рассматривают с нормой, индуцированной из A.

11.7.9. *Теорема.* *Каждая замкнутая C^*-подалгебра C^*-алгебры сервантна.*

$\triangleleft$ Пусть B — это замкнутая C^*-подалгебра (с единицей) C^*-алгебры A и $b \in B$. Если $b \in \mathrm{Inv}(B)$, то несомненно, что $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Пусть теперь $b \in \mathrm{Inv}(A)$. На основании 11.7.4 имеем: $b^* \in \mathrm{Inv}(A)$. Значит, $b^*b \in \mathrm{Inv}(A)$ и при этом элемент $(b^*b)^{-1}b^*$ является левым обратным к b. В силу 11.1.4 это означает, что $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^*$. Следовательно, для завершения доказательства нужно установить только, что элемент $(b^*b)^{-1}$ входит в B. Так как элемент b^*b эрмитов в B, то выполнено соотношение $\mathrm{Sp}_B(b^*b) \subset \mathbb{R}$ (см. 11.7.7). Привлекая 11.2.5, видим, что $\mathrm{Sp}_A(b^*b) = \mathrm{Sp}_B(b^*b)$. Поскольку $0 \notin \mathrm{Sp}_A(b^*b)$, то $b^*b \in \mathrm{Inv}(B)$. Окончательно $b \in \mathrm{Inv}(B)$. $\triangleright$

11.7.10. *Следствие.* *Пусть b — элемент C^*-алгебры A и B — какая-нибудь замкнутая C^*-подалгебра A, причем $b \in B$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}_B(b) = \mathrm{Sp}_A(b). \quad \triangleleft\triangleright$$

11.7.11. Замечание. В связи с 11.7.10 теорему 11.7.9 часто называют теоремой «о постоянстве спектра в C^*-алгебрах». Имеется в виду то, что понятие спектра элемента C^*-алгебры «абсолютно», т. е. не зависит от выбора C^*-подалгебры, содержащей данный элемент рассматриваемой C^*-алгебры.

11.8. Коммутативная теорема Гельфанда — Наймарка

11.8.1. *Банахова алгебра $C(Q,\ \mathbb{C})$ с естественной инволюцией $f \mapsto f^*$, где $f^*(q) := f(q)^*$ для $q \in Q$, является C^*-алгеброй.*

$\triangleleft$ $\|f^*f\| = \sup\{|f(q)^*f(q)| : \ q \in Q\} = \sup\{|f(q)|^2 : \ q \in Q\} = (\sup|f(Q)|)^2 = \|f\|^2$ $\triangleright\ \triangleright$

11.8.2. *Теорема Стоуна — Вейерштрасса для $C(Q,\ \mathbb{C})$.* *Любая C^*-подалгебра (с единицей) в C^*-алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$, разделяющая точки Q, плотна в $C(Q,\ \mathbb{C})$.*

$\triangleleft$ Пусть A — такая подалгебра. Поскольку $f \in A \Rightarrow f^* \in A$, то $f \in A \Rightarrow \mathrm{Re}\, f \in A$ и, стало быть, множество $\mathrm{Re}\, A := \{\mathrm{Re}\, f : f \in A\}$ представляет собой вещественную подалгебру в $C(Q,\ \mathbb{R})$. Несомненно, что $\mathrm{Re}\, A$ содержит постоянные функции и разделяет точки Q. По теореме Стоуна — Вейерштрасса 10.8.17 подалгебра $\mathrm{Re}\, A$ плотна в $C(Q,\ \mathbb{R})$. Осталось привлечь 11.7.2. $\triangleright$

11.8.3. Определение. Представление $*$-алгебр, согласованное с инволюцией $*$, называют *$*$-представлением.* Иными словами, если $(A,\ *)$ и $(B,\ *)$ — инволютивные алгебры и $\mathfrak{R} : A \to B$ — мультипликативный линейный оператор, то $\mathfrak{R}$ называют *$*$-представлением* в случае коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathscr{R}} & B \\ *\downarrow & & \downarrow * \\ A & \xrightarrow{\mathscr{R}} & B \end{array}$$

Если при этом $\mathfrak{R}$ — изоморфизм, то $\mathfrak{R}$ называют *$*$-изоморфизмом* A и B. При наличии норм в рассматриваемых алгебрах используют также термины «*изометрическое $*$-представление*» и «*изометрический $*$-изоморфизм*», вкладывая в них очевидное содержание.

11.8.4. *Коммутативная теорема Гельфанда — Наймарка.* *Преобразование Гельфанда коммутативной C^*-алгебры A осуществляет изометрический $*$-изоморфизм A и $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$.*

$\vartriangleleft$ Для $a \in A$ имеем

$$\|a^2\| = \|(a^2)^* a^2\|^{1/2} = \|a^* a a^* a\|^{1/2} = \|a^* a\| = \|a\|^2.$$

На основании 11.6.10 преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_A$ — это изометрия алгебры A и замкнутой подалгебры $\widehat{A}$ в $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. Несомненно, что $\widehat{A}$ разделяет точки $\mathrm{X}(A)$ и содержит постоянные функции.

В силу 11.6.9 и 11.7.7 для эрмитова элемента $h = h^*$ в A имеем $\widehat{h}(\mathrm{X}(A)) = \mathrm{Sp}(h) \subset \mathbb{R}$. Пусть теперь a — произвольный элемент A. Привлекая 11.7.2, запишем: $a = x + iy$, где элементы $x,\ y$ эрмитовы. Учитывая, что для произвольного характера χ из $\mathrm{X}(A)$ выполнено $\chi(x) \in \mathbb{R},\ \chi(y) \in \mathbb{R}$, последовательно получаем

$$\begin{gathered} \mathscr{G}_A(a)^*(\chi) = \widehat{a}^*(\chi) = \widehat{a}(\chi)^* = \chi(a)^* = \chi(x+iy)^* = \\ = (\chi(x) + i\chi(y))^* = \chi(x) - i\chi(y) = \chi(x - iy) = \chi(a^*) = \\ = \widehat{a}^*(\chi) = \mathscr{G}_A(a^*)(\chi) \quad (\chi \in \mathrm{X}(A)). \end{gathered}$$

Таким образом, преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_A$ является $*$-представлением и, в частности, $\widehat{A}$ — это C^*-подалгебра $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. Осталось привлечь 11.8.2, чтобы заключить: $\widehat{A} = C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. $\vartriangleright$

11.8.5. *Пусть $\mathfrak{R} : A \to B$ — это $*$-представление C^*-алгебры A в C^*-алгебре B. Тогда $\|\mathfrak{R}a\| \le \|a\|$ для $a \in A$.*

$\triangleleft$ Поскольку $\mathfrak{R}(1) = 1$, то $\mathfrak{R}(\mathrm{Inv}(A)) \subset \mathrm{Inv}(B)$. Значит, для $a \in A$ справедливо включение $\mathrm{Sp}_B(\mathfrak{R}(a)) \subset \mathrm{Sp}_A(a)$. Отсюда в силу формулы Бёрлинга — Гельфанда для спектральных радиусов вытекает, что $r_A(a) \ge r_B(\mathfrak{R}(a))$. Если a — эрмитов элемент A, то $\mathfrak{R}(a)$ — эрмитов элемент B, ибо $\mathfrak{R}(a)^* = \mathfrak{R}(a^*) = \mathfrak{R}(a)$. Если теперь A_0 — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра, содержащая a, и B_0 — аналогичным образом построенная подалгебра, содержащая $\mathfrak{R}(a)$, то A_0 и B_0 — коммутативные C^*-алгебры. Таким образом, из теорем 11.8.4 и 11.6.9 получаем

$$\|\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a)\|_{B_0} = \|\mathscr{G}_{B_0}(\mathfrak{R}(a))\| = r_{B_0}(\mathfrak{R}(a)) =$$
$$= r_B(\mathfrak{R}(a)) \le r_A(a) = r_{A_0}(a) = \|\mathscr{G}_{A_0}(a)\| = \|a\|.$$

Для произвольного элемента $a \in A$ видно, что элемент a^*a эрмитов. Стало быть, с учетом уже доказанного имеем

$$\|\mathfrak{R}(a)\|^2 = \|\mathfrak{R}(a)^*\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*a)\| \le \|a^*a\| = \|a\|^2. \ \triangleright$$

11.8.6. *Теорема о непрерывном функциональном исчислении.* *Пусть a — нормальный элемент C^*-алгебры A и $\mathrm{Sp}(a)$ его спектр. Существует, и притом единственное, изометрическое $*$-представление $\mathfrak{R}_a$ алгебры $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$ в A такое, что $a = \mathfrak{R}_a(I_{\mathrm{Sp}(a)})$.*

$\triangleleft$ Пусть B — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра A, содержащая a. Ясно, что алгебра B коммутативна в силу нормальности a (эта алгебра представляет собой замыкание алгебры многочленов от a и a^*). При этом на основании 11.7.10 выполнено $\mathrm{Sp}(a) = \mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_B(a)$. Преобразование Гельфанда $\widehat{a} := \mathscr{G}_B(a)$ элемента a действует из $\mathrm{X}(B)$ на $\mathrm{Sp}(a)$ в силу 11.6.9 и, несомненно, взаимно однозначно. Поскольку $\mathrm{X}(B)$ и $\mathrm{Sp}(a)$ — компакты, привлекая 9.4.11, заключаем, что $\widehat{a}$ — это гомеоморфизм. Отсюда непосредственно вытекает, что отображение $\mathring{\mathfrak{R}} : f \mapsto f \circ \widehat{a}$ осуществляет изометрический $*$-изоморфизм алгебры $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$ и алгебры $C(\mathrm{X}(B),\ \mathbb{C})$.

Используя теорему 11.3.2 и связь преобразования Гельфанда и интеграла Рисса — Данфорда, установленную в 11.6.12, для тождественного отображения получаем

$$\widehat{a} = \mathscr{R}_{\hat{a}} I_{\mathbb{C}} = I_{\mathbb{C}} \circ \widehat{a} = I_{\mathbb{C}}\big|_{\hat{a}(\mathrm{X}(B))} \circ \widehat{a} =$$
$$= I_{\mathbb{C}}\big|_{\mathrm{Sp}(a)} \circ \widehat{a} = I_{\mathrm{Sp}(a)} \circ \widehat{a} = \mathring{\mathfrak{R}}(I_{\mathrm{Sp}(a)}).$$

Положим теперь

$$\mathfrak{R}_a := \mathscr{G}_B^{-1} \circ \overset{\circ}{\mathfrak{R}}.$$

Видно, что $\mathfrak{R}_a$ — это изометрическое вложение и $*$-представление. Кроме того,

$$\mathfrak{R}_a(I_{\mathrm{Sp}(a)}) = \mathscr{G}_B^{-1} \circ \overset{\circ}{\mathfrak{R}}(I_{\mathrm{Sp}(a)}) = \mathscr{G}_B^{-1}(\widehat{a}) = a.$$

Единственность такого представления $\mathfrak{R}_a$ обеспечена 11.8.5 и тем, что, по теореме 11.8.2, C^*-алгебра $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$ — это своя наименьшая замкнутая C^*-подалгебра (с единицей), содержащая $I_{\mathrm{Sp}(a)}$. $\triangleright$

11.8.7. Определение. Представление $\mathfrak{R}_a : C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C}) \to A$, построенное в 11.8.6, называют ***непрерывным функциональным исчислением*** (для нормального элемента a алгебры A).

Если при этом $f \in C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$, то элемент $\mathfrak{R}_a(f)$ обозначают $f(a)$.

11.8.8. Замечание. Пусть f — голоморфная функция в окрестности спектра нормального элемента a некоторой C^*-алгебры A, т. е. $f \in H(\mathrm{Sp}(a))$. Тогда с помощью голоморфного функционального исчисления определен элемент $f(a)$ алгебры A.

Если сохранить символ f за сужением функции f на множество $\mathrm{Sp}(a)$, то с помощью непрерывного функционального исчисления определен элемент $\mathfrak{R}_a(f) := \mathfrak{R}_a\big(f\big|_{\mathrm{Sp}(a)}\big)$ алгебры A. Последний элемент, как отмечено в 11.8.7, обозначают $f(a)$. Использование одинаковых обозначений здесь не случайно и корректно в силу 11.6.12 и 11.8.6. В самом деле, странно было бы обязательно обозначать разными символами один и тот же элемент. Указанное обстоятельство можно выразить в наглядной форме. Именно, пусть $\cdot\big|_{\mathrm{Sp}(a)}$ — отображение, сопоставляющее ростку h из $\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a))$ его сужение на $\mathrm{Sp}(a)$, т. е. пусть $h\big|_{\mathrm{Sp}(a)}$ в точке z — это значение ростка h в точке z (см. 8.1.21). Ясно, что $\cdot\big|_{\mathrm{Sp}(a)} : \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \to C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$.

Отмеченную выше связь непрерывного и голоморфного функциональных исчислений для нормального элемента a рассматриваемой C^*-алгебры a можно выразить так: «следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[r, "\cdot|_{\mathrm{Sp}(a)}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"'] & C(\mathrm{Sp}(a), \mathbb{C}) \arrow[d, "\mathscr{R}_a"] \\ & A \end{tikzcd}$$

коммутативна».

11.9. Операторные $*$-представления C^*-алгебр

11.9.1. Определение. Пусть A — банахова алгебра (с единицей). Элемент $s \in A'$ называют ***состоянием*** A (пишут $s \in S(A)$), если $\|s\| = s(1) = 1$. Для элемента $a \in A$ множество $N(a) := \{s(a) : s \in S(A)\}$ называют ***числовым образом*** a.

11.9.2. *Числовой образ положительной функции из $C(Q,\ \mathbb{C})$ лежит в $\mathbb{R}_+$.*

$\lhd$ Пусть $a \geq 0$ и $\|s\| = s(1) = 1$. Нужно показать, что $s(a) \geq 0$. Возьмем $z \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что круг $B_\varepsilon(z) := z + \varepsilon\mathbb{D}$ содержит $a(Q)$. Тогда $\|a - z\| \leq \varepsilon$ и, следовательно, $|s(a - z)| \leq \varepsilon$. Значит, $|s(a) - z| = |s(a) - s(z)| \leq \varepsilon$, т. е. $s(a) \in B_\varepsilon(z)$.

Заметим, что

$$\cap\{B_\varepsilon(z) :\ B_\varepsilon(z) \supset a(Q)\} = \mathrm{cl}\,\mathrm{co}(a(Q)) \subset \mathbb{R}_+.$$

Таким образом, $s(a) \in \mathbb{R}_+$. $\rhd$

11.9.3. ***Лемма о числовом образе эрмитова элемента.*** *Для эрмитова элемента a в любой C^*-алгебре имеют место утверждения*:

(1) $\mathrm{Sp}(a) \subset N(a)$;
(2) $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow N(a) \subset \mathbb{R}_+$.

$\lhd$ Пусть B — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра рассматриваемой алгебры A, содержащая элемент a. Видно, что алгебра B коммутативна. В силу 11.6.9 для преобразования Гельфанда $\widehat{a} := \mathscr{G}_B(a)$ выполнено $\widehat{a}(\mathrm{X}(B)) = \mathrm{Sp}_B(a)$. На основании 11.7.10, $\mathrm{Sp}_B(a) = \mathrm{Sp}(a)$. Иначе говоря, для $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ имеется характер χ алгебры B, удовлетворяющий условию $\chi(a) = \lambda$. По 11.6.3, $\|\chi\| = \chi(1) = 1$. Привлекая 7.5.11, найдем продолжение s функционала χ на A с сохранением нормы. Тогда s — состояние A и при этом $s(a) = \lambda$. Окончательно $\mathrm{Sp}(a) \subset N(a)$ (в частности, если $N(a) \subset \mathbb{R}_+$, то $\mathrm{Sp}(a) \subset$

$\mathbb{R}_+$). Пусть теперь s — произвольное состояние алгебры A. Ясно, что сужение $s\big|_B$ — состояние алгебры B. Несложно установить, что $\widehat{a}$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{X}(B)$ на $\mathrm{Sp}(a)$. Следовательно, алгебру B можно рассматривать как алгебру $C(\mathrm{Sp}(a), \mathbb{C})$. Из 11.9.2 выводим: $s(a) = s\big|_B(a) \geq 0$ при $\widehat{a} \geq 0$. Итак, $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow N(a) \subset \mathbb{R}_+$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

11.9.4. Определение. Элемент a в C^*-алгебре A называют ***положительным***, если a эрмитов и $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+$. Множество всех положительных элементов в A обозначают A_+.

11.9.5. *Множество A_+ — это упорядочивающий конус в C^*-алгебре A.*

$\triangleleft$ Понятно, что $N(a+b) \subset N(a) + N(b)$ и $N(\alpha a) = \alpha N(a)$ при $a,\ b \in A$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Поэтому 11.9.3 обеспечивает включение $\alpha_1 A_+ + \alpha_2 A_+ \subset A_+$ для $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$. Стало быть, A_+ — конус. Если $a \in A_+ \cap (-A_+)$, то $\mathrm{Sp}(a) = 0$. Учитывая, что элемент a эрмитов, по теореме 11.8.6 заключаем: $\|a\| = 0$. $\triangleright$

11.9.6. *Для любого эрмитова элемента a из C^*-алгебры A существуют элементы $a_+,\ a_-$ из A_+ такие, что*

$$a = a_+ - a_-; \quad a_+a_- = a_-a_+ = 0.$$

$\triangleleft$ Все немедленно следует из теоремы о непрерывном функциональном исчислении 11.8.6. $\triangleright$

11.9.7. *Лемма Капланского — Фукамия.* *Элемент a произвольной C^*-алгебры A положителен в том и только в том случае, если $a = b^*b$ для некоторого $b \in A$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $a \in A_+$, т. е. $a = a^*$ и $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+$. Тогда (см. 11.8.6) имеется корень $b := \sqrt{a}$. При этом $b = b^*$ и $b^*b = a$.

$\Leftarrow$: Если $a = b^*b$, то элемент a эрмитов и с помощью 11.9.6 можно записать: $b^*b = u - v$, где $uv = vu = 0$ и $u \geq 0$, $v \geq 0$ (в упорядоченном векторном пространстве $(A_{\mathbb{R}},\ A_+)$). Простой подсчет показывает:

$$(bv)^*bv = v^*b^*bv = vb^*bv = v(u-v)v = (vu - v^2)v = -v^3.$$

Поскольку $v \geq 0$, то $v^3 \geq 0$, т. е. $(bv)^*bv \leq 0$. По теореме о спектре произведения 5.6.22 множества $\mathrm{Sp}((bv)^*bv)$ и $\mathrm{Sp}(bv(bv)^*)$ могут отличаться лишь нулем. Поэтому $bv(bv)^* \leq 0$.

На основании 11.7.2, $bv = a_1 + ia_2$ для подходящих эрмитовых элементов a_1 и a_2. Очевидно, что $a_1^2,\ a_2^2 \in A_+$ и $(bv)^* = a_1 - ia_2$. Дважды используя 11.9.5, приходим к оценкам:

$$0 \geq (bv)^*bv + bv(bv)^* = 2\left(a_1^2 + a_2^2\right) \geq 0.$$

По 11.9.5, $a_1 = a_2 = 0$, т. е. $bv = 0$. Значит, $-v^3 = (bv)^*bv = 0$. Вторичная апелляция к 11.9.5 дает $v = 0$. Наконец, $a = b^*b = u - v = u \geq 0$, т. е. $a \in A_+$. $\triangleright$

11.9.8. *В C^*-алгебре A каждое состояние s эрмитово, т. е.*

$$s(a^*) = s(a)^* \quad (a \in A).$$

$\triangleleft$ По леммам 11.9.7 и 11.9.3 при всех $a \in A$ будет $s(a^*a) \geq 0$. Полагая $a := a + 1$ и $a := a + i$, последовательно получаем

$$0 \leq s((a+1)^*(a+1)) = s(a^*a + a + a^* + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(a) + s(a^*) \in \mathbb{R};$$

$$0 \leq s((a+i)^*(a+i)) = s(a^*a - ia + ia^* + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(-s(a) + s(a^*)) \in \mathbb{R}.$$

Иными словами,

$$\operatorname{Im} s(a) + \operatorname{Im} s(a^*) = 0;$$

$$\operatorname{Re}(-s(a)) + \operatorname{Re} s(a^*) = 0.$$

Отсюда вытекает

$$s(a^*) = \operatorname{Re} s(a^*) + i \operatorname{Im} s(a^*) = \operatorname{Re} s(a) - i \operatorname{Im} s(a) = s(a)^*. \ \triangleright$$

11.9.9. *Пусть s — состояние C^*-алгебры A. Для $a,\ b \in A$ обозначим $(a,\ b)_s := s(b^*a)$. Тогда $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_s$ — скалярное произведение в A.*

$\triangleleft$ Из 11.9.8 выводим

$$(a,\ b)_s = s(b^*a) = s((a^*b)^*) = s(a^*b)^* = (b,\ a)_s^*.$$

Следовательно, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_s$ — это эрмитова форма. Так как для $a \in A$, в силу 11.9.7, $a^*a \geq 0$, то, по 11.9.3, $(a,\ a)_s = s(a^*a) \geq 0$. Значит, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_s$ — положительная эрмитова форма. $\triangleright$

11.9.10. *Теорема о состоянии C^*-алгебры.* *Для каждого состояния s произвольной C^*-алгебры A имеются гильбертово пространство $(H_s,\ (\cdot\,,\cdot)_s)$, элемент $x_s \in H_s$ и $*$-представление $\mathfrak{R}_s : A \to B(H_s)$ такие, что $s(a) = (\mathfrak{R}_s(a)x_s, x_s)_s$ для всех $a \in A$ и множество $\{\mathfrak{R}_s(a)x_s :\ a \in A\}$ плотно в H_s.*

$\lhd$ На основании 11.9.9, полагая $(a,\ b)_s := s(b^*a)$ для $a,\ b \in A$, получаем предгильбертово пространство $(A,\ (\cdot\,,\cdot)_s)$. Пусть $p_s(a) := \sqrt{(a,\ a)_s}$ — полунорма в этом пространстве, а $\varphi_s : A \to A/\ker p_s$ — каноническое отображение A на хаусдорфово предгильбертово пространство $A/\ker p_s$, ассоциированное с A. Пусть, далее, $\iota_s : A/\ker p_s \to H_s$ — вложение (например, с помощью двойного штрихования) пространства $A/\ker p_s$ в качестве всюду плотного подпространства в гильбертово пространство H_s, ассоциированное с пространством $(A,\ (\cdot\,,\cdot)_s)$ (см. пример 6.1.10 (4)). Скалярное произведение в пространстве H_s обозначим прежним символом $(\cdot\,,\cdot)_s$. Таким образом, в частности,

$$(\iota_s\varphi_s a,\ \iota_s\varphi_s b)_s = (a,\ b)_s = s(b^*a) \quad (a,\ b \in A).$$

Для элемента $a \in A$ рассмотрим (образ при каноническом операторном представлении) $L_a : b \mapsto ab$ $(b \in A)$. Установим прежде всего, что существуют, и притом единственные, ограниченные операторы $\overline{L_a}$ и $\mathfrak{R}_s(a)$, превращающие в коммутативную следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varphi_s} & A/\ker p_s & \xrightarrow{\iota_s} & H_s \\ L_a \downarrow & & \downarrow \overline{L_a} & & \downarrow \mathfrak{R}_s(a) \\ A & \xrightarrow{\varphi_s} & A/\ker p_s & \xrightarrow{\iota_s} & H_s \end{array}$$

Искомый оператор $\overline{L_a}$ служит решением уравнения $\mathfrak{X}\varphi_s = \varphi_s L_a$. Привлекая 2.3.8, видим, что необходимое и достаточное условие разрешимости указанного уравнения в классе линейных операторов состоит в инвариантности подпространства $\ker p_s$ относительно L_a.

Итак, проверим включение $L_a(\ker p_s) \subset \ker p_s$. Для этого возьмем элемент b из $\ker p_s$, т. е. $p_s(b) = 0$. Используя определения и неравенство Коши — Буняковского 6.1.5, получаем

$$\begin{gathered} 0 \le (L_a b,\ L_a b)_s = (ab,\ ab)_s = s((ab)^*ab) = \\ = s(b^*a^*ab) = (a^*ab,\ b)_s \le p_s(b)p_s(a^*ab) = 0, \end{gathered}$$

т. е. $L_a b \in \ker p_s$. Единственность $\overline{L_a}$ обеспечена 2.3.9, ибо φ_s — эпиморфизм. Отметим также, что φ_s — это открытое отображение (ср. 5.1.3). Отсюда немедленно следует непрерывность оператора $\overline{L_a}$. Таким образом, в силу 5.3.8 соответствие $\iota_s \circ \overline{L_a} \circ (\iota_s)^{-1}$ можно рассматривать как ограниченный линейный оператор из $\iota_s(A/\ker p_s)$ в банахово пространство H_s. В связи с 4.5.10 такой оператор допускает, и притом единственное, продолжение до оператора $\mathfrak{R}_s(a)$ из $B(H_s)$.

Установим теперь, что $\mathfrak{R}_s : a \mapsto \mathfrak{R}_s(a)$ — это требуемое представление. В силу 11.1.6 выполнено: $L_{ab} = L_a L_b$ для $a,\ b \in A$. Значит,

$$\varphi_s L_{ab} = \varphi_s L_a L_b = \overline{L_a}\varphi_s L_b = \overline{L_a}\,\overline{L_b}\varphi_s.$$

Поскольку $\overline{L_{ab}}$ — единственное решение уравнения $\mathfrak{X}\varphi_s = \varphi_s L_{ab}$, приходим к соотношению $\overline{L_{ab}} = \overline{L_a}\,\overline{L_b}$, обеспечивающему мультипликативность $\mathfrak{R}_s$. То, что $\mathfrak{R}_s$ — линейный оператор, проверяется аналогично. Помимо этого,

$$L_1\varphi_s = \varphi_s L_1 = \varphi_s I_A = \varphi_s = I_{A/\ker p_s}\varphi_s = 1\varphi_s,$$

т. е. $\mathfrak{R}_s(1) = 1$.

Обозначим для удобства $\psi_s := \iota_s\varphi_s$. Тогда с учетом определений скалярного произведения в H_s (см. 6.1.10 (4)) и инволюции в $B(H_s)$ (см. 6.4.14 и 6.4.5) для элементов $a,\ b,\ y \in A$ имеем

$$\begin{gathered}
(\mathfrak{R}_s(a^*)\psi_s x,\ \psi_s y)_s = (\psi_s L_{a^*}x,\ \psi_s y)_s = \\
= (L_{a^*}x,\ y)_s = (a^*x,\ y)_s = s(y^*a^*x) = s((ay)^*x) = (x,\ ay)_s = \\
= (x,\ L_a y)_s = (\psi_s x,\ \psi_s L_a y)_s = (\psi_s x,\ \mathfrak{R}_s(a)\psi_s y)_s = \\
= (\mathfrak{R}_s(a)^*\psi_s x,\ \psi_s y)_s.
\end{gathered}$$

Отсюда из-за плотности $\operatorname{im}\psi_s$ в H_s вытекает, что $\mathfrak{R}_s(a^*) = \mathfrak{R}_s(a)^*$ для каждого $a \in A$, т. е. $\mathfrak{R}_s$ — это $*$-представление.

Положим теперь $x_s := \psi_s 1$. Тогда

$$\mathfrak{R}_s(a)x_s = \mathfrak{R}_s(a)\psi_s 1 = \psi_s L_a 1 = \psi_s a \quad (a \in A).$$

Следовательно, множество $\{\mathfrak{R}_s(a)x_s :\ a \in A\}$ плотно в H_s. Помимо этого,

$$(\mathfrak{R}_s(a)x_s,\ x_s)_s = (\psi_s a,\ \psi_s 1)_s = (a,\ 1)_s = s(1^*a) = s(a). \ \rhd$$

11.9.11. Замечание. Построение из доказательства теоремы 11.9.10 называют ГНС-*конструкцией* (или развернуто: *конструкцией Гельфанда — Наймарка — Сигала*).

11.9.12. *Теорема Гельфанда — Наймарка.* *Каждая C^*-алгебра имеет изометрическое $*$-представление в C^*-алгебре эндоморфизмов подходящего гильбертова пространства.*

$\triangleleft$ Пусть A — рассматриваемая C^*-алгебра. Следует найти гильбертово пространство H и изометрическое $*$-представление $\mathfrak{R}$ алгебры A в C^*-алгебре $B(H)$. С этой целью рассмотрим гильбертову сумму H семейства гильбертовых пространств $(H_s)_{s\in S(A)}$, существование который гарантировано теоремой о состоянии C^*-алгебры, т. е.

$$H := \bigoplus_{s\in S(A)} H_s =$$

$$= \left\{ h := (h_s)_{s\in S(A)} \in \prod_{s\in S(A)} H_s : \sum_{s\in S(A)} \|h_s\|^2_{H_s} < +\infty \right\}.$$

Отметим, что скалярное произведение семейств $h := (h_s)_{s\in S(A)}$ и $g := (g_s)_{s\in S(A)}$ в H вычисляется по правилу (ср. 6.1.10 (5) и 6.1.9):

$$(h,\ g) = \sum_{s\in S(A)} (h_s,\ g_s)_s.$$

Пусть, далее, $\mathfrak{R}_s$ — это $*$-представление A в пространстве H_s, соответствующее состоянию s из $S(A)$. Так как в силу 11.8.5 для каждого $a \in A$ выполнена оценка $\|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} \le \|a\|$, то для $h \in H$ справедливо

$$\sum_{s\in S(A)} \|\mathfrak{R}_s(a)h_s\|^2_{H_s} \le \sum_{s\in S(A)} \|\mathfrak{R}_s(a)\|^2_{B(H_s)} \|h_s\|^2_{H_s} \le \|a\|^2 \sum_{s\in S(A)} \|h_s\|^2_{H_s}.$$

Отсюда вытекает, что соотношение $\mathfrak{R}(a)h : s \mapsto \mathfrak{R}_s(a)h_s$ определяет элемент $\mathfrak{R}(a)h$ из H. Возникающий оператор $\mathfrak{R}(a) : h \mapsto \mathfrak{R}(a)h$ — элемент пространства $B(H)$. Более того, отображение $\mathfrak{R} : a \mapsto \mathfrak{R}(a) \quad (a \in A)$ — это искомое изометрическое $*$-представление алгебры A.

В самом деле, из определения $\mathfrak{R}$ и свойств $\mathfrak{R}_s$ для $s \in S(A)$ легко вывести, что $\mathfrak{R}$ — это $*$-представление A в $B(H)$. Убедимся, например, что $\mathfrak{R}$ согласовано с инволюцией. Для этого возьмем элементы $a \in A$ и $h,\ g \in H$. Тогда

$$(\mathfrak{R}(a^*)h,\ g) = \sum_{s\in S(A)} (\mathfrak{R}_s(a^*)h_s,\ g_s)_s =$$

$$= \sum_{s\in S(A)} (\mathfrak{R}_s(a)^* h_s,\ g_s)_s = \sum_{s\in S(A)} (h_s,\ \mathfrak{R}_s(a) g_s)_s =$$

$$= (h,\ \mathfrak{R}(a)g) = (\mathfrak{R}(a)^* h,\ g).$$

Из-за произвольности $h,\ g \in H$ получаем $\mathfrak{R}(a^*) = \mathfrak{R}(a)^*$, что и нужно.

Осталось проверить только изометричность $*$-представления $\mathfrak{R}$, т. е. равенства $\|\mathfrak{R}(a)\| = \|a\|$ при всех $a \in A$. Пусть для начала a — это положительный элемент. Из непрерывного функционального исчисления и теоремы Вейерштрасса 9.4.5 следует: $\|a\| \in \mathrm{Sp}(a)$. На основании 11.9.3 (1) существует состояние $s \in S(A)$, для которого $s(a) = \|a\|$. Учитывая свойства вектора x_s, соответствующего $*$-представлению $\mathfrak{R}_s$ (см. 11.9.10), и привлекая неравенство Коши — Буняковского 6.1.5, получаем

$$\|a\| = s(a) = (\mathfrak{R}_s(a)x_s, x_s)_s \le \|\mathfrak{R}_s(a)x_s\|_{H_s}\|x_s\|_{H_s} \le$$

$$\le \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}\|x_s\|^2_{H_s} = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}(x_s, x_s)_s =$$

$$= \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}(\mathfrak{R}_s(1)x_s,\ x_s)_s = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} s(1) = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}.$$

Используя оценки $\|\mathfrak{R}(a)\| \ge \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}$ и $\|a\| \ge \|\mathfrak{R}(a)\|$, первая из которых очевидна, а вторая указана в 11.8.5, выводим:

$$\|a\| \ge \|\mathfrak{R}(a)\| \ge \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} \ge \|a\|.$$

Возьмем, наконец, произвольный элемент a из A. По лемме Капланского — Фукамия 11.9.7 элемент a^*a положителен. Таким образом, можно заключить:

$$\|\mathfrak{R}(a)\|^2 = \|\mathfrak{R}(a)^*\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*)\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*a)\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Дальнейшее не требует особых разъяснений. $\triangleright$

Упражнения

11.1. Привести примеры банаховых алгебр и не банаховых алгебр.

11.2. Пусть A — банахова алгебра и $\chi \in A^\#$ таков, что $\chi(1) = 1$ и при этом $\chi(\mathrm{Inv}(A)) \subset \mathrm{Inv}(\mathbb{C})$. Доказать, что χ мультипликативен и непрерывен.

11.3. Пусть спектр $\mathrm{Sp}(a)$ элемента a банаховой алгебры A лежит в открытом множестве U. Доказать, что имеется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathrm{Sp}(a + b) \subset U$ при всех $b \in A$, для которых $\|b\| \le \varepsilon$.

11.4. Описать пространства максимальных идеалов в алгебрах $C(Q,\ \mathbb{C})$, $C^{(1)}([0,\ 1],\ \mathbb{C})$ с поточечным умножением, в алгебре двусторонних суммируемых последовательностей $l_1(\mathbb{Z})$ со свёрточным умножением

$$(a*b)(n):=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}b_k.$$

11.5. Установить, что в банаховой алгебре $B(X)$ элемент T имеет левый обратный в том и только в том случае, когда T — мономорфизм и образ T дополняем в X.

11.6. Установить, что в банаховой алгебре $B(X)$ элемент T имеет правый обратный в том и только в том случае, если T — эпиморфизм и ядро T дополняемо в X.

11.7. В банаховой алгебре A есть элемент с несвязным спектром. Доказать, что в A найдется нетривиальный идемпотент.

11.8. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей и E — некоторое множество ее максимальных идеалов. Множество E называют *границей* A, если для всякого $a \in A$ выполнено

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup |\hat{a}(E)|.$$

Доказать, что пересечение всех замкнутых границ A также служит границей A. Ее называют *границей Шилова* алгебры A.

11.9. Пусть $A,\ B$ — коммутативные банаховы алгебры с единицей, причем $B \subset A$ и $1_B = 1_A$. Доказать, что всякий максимальный идеал границы Шилова алгебры B содержится в некотором максимальном идеале A.

11.10. Пусть A и B — две C^*-алгебры (с единицей) и T — морфизм A в B. Пусть, далее, a — нормальный элемент A и f — непрерывная функция на $\mathrm{Sp}_A(a)$. Установить, что $\mathrm{Sp}_B(Ta) \subset \mathrm{Sp}_A(a)$ и $Tf(a) = f(Ta)$.

11.11. Пусть $f \in A'$, где A — коммутативная C^*-алгебра. Установить, что f — положительная форма, т. е. $f(a^*a) \geq 0$ для $a \in A$, в том и только в том случае, если $\|f\| = f(1)$.

11.12. Описать крайние лучи множества положительных форм в коммутативной C^*-алгебре.

11.13. Доказать, что алгебры $C(Q_1,\ \mathbb{C})$ и $C(Q_2,\ \mathbb{C})$ изоморфны в том и только в том случае, если компакты Q_1 и Q_2 гомеоморфны.

11.14. Пусть некоторый нормальный элемент C^*-алгебры имеет вещественный спектр. Доказать, что он эрмитов.

11.15. Развить спектральную теорию нормальных операторов в гильбертовом пространстве с помощью непрерывного функционального исчисления. Описать компактные нормальные операторы.

11.16. Пусть T — алгебраический морфизм C^*-алгебр, причем $\|T\| \le 1$. Тогда $T(a^*) = (Ta)^*$ для всех a.

11.17. Пусть T — нормальный оператор на гильбертовом пространстве H. Убедиться, что существуют эрмитов оператор S на H и непрерывная функция $f : \mathrm{Sp}(S) \to \mathbb{C}$ такие, что $T = f(S)$. Справедливо ли аналогичное утверждение в C^*-алгебрах?

11.18. Пусть A, B — две C^*-алгебры и ρ — это $*$-мономорфизм из A в B. Доказать, что ρ — изометрическое вложение A в B.

11.19. Пусть a, b — эрмитовы элементы C^*-алгебры A, причем $ab = ba$ и, кроме того, $a \le b$. Доказать, что $f(a) \le f(b)$ для подходящих сужений любой возрастающей непрерывной скалярной функции f на $\mathbb{R}$.

Литература

1. Акилов Г. П., Дятлов В. Н. Основы математического анализа. —Новосибирск: Наука, 1980.—336 с.
2. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
3. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. —М.: Наука, 1977.—367 с.
4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—429 с.
5. Антоневич А. Б., Радыно Я. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения.—Минск: Изд-во «Университетское», 1984.—352 с.
6. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу.—Минск: Вышейшая школа, 1978.—205 с.
7. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.—М.: Мир, 1976.—311 с.
8. Архангельский А. В. Топологические пространства функций.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—222 с.
9. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.—423 с.
10. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.—М.: Наука, 1965.—407 с.
11. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях.—Харьков: Выща школа, 1984.—120 с.
12. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах. — Харьков: Выща школа, 1977–1978. — Т. 1–2.

13. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства.—М.: Наука, 1988.—448 с.

14. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—384 с.

15. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение.—М.: Мир, 1980.—264 с.

16. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе.—Киев: Наукова думка.—1988.—680 с.

17. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Курс лекций.—Киев: Выща школа, 1990.—600 с.

18. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. —М.: Наука, 1996.—480 с.

19. Биркгоф Г. Теория решёток.—М.: Наука, 1984.—565 с.

20. Бирман М. Ш. и др. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1972.—544 с.—(Справочная математическая библиотека.)

21. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.—264 с.

22. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля.—М.: Наука, 1987.—615 с.

23. Булдырев В. С., Павлов П. С. Линейная алгебра и функции многих переменных.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.—496 с.

24. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. —М.: Мир, 1982.—511 с.

25. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.—М.: Мир, 1968.—276 с.

26. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.—410 с.

27. Бурбаки Н. Теория множеств.—М.: Мир, 1965.—455 с.

28. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.—М.: Наука, 1968.—272 с.

29. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра.—М.: Мир, 1971.—707 с.

30. Бурбаки Н. Спектральная теория.—М.: Мир, 1972.—183 с.

31. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.—М.: Наука, 1975.—408 с.

32. Бурбаки Н. Интегрирование. Мера на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Мера на отдельных пространствах.—М.: Наука, 1977.—600 с.

33. Бухвалов А. В. и др. Векторные решётки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—212 с.

34. Вайнберг М. М. Функциональный анализ.—М.: Просвещение, 1979.—128 с.

35. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1988.—512 с.

36. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике.—М.: Наука, 1976.—280 с.

37. Владимиров В. С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики.—М.: Наука, 1982.—256 с.

38. Воеводин В. В. Линейная алгебра.—М.: Наука, 1980.—400 с.

39. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1982.—304 с.

40. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ.—М.: Наука, 1967.—415 с.

41. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

42. Гамелин Т. Равномерные алгебры.—М.: Мир, 1973.—334 с.

43. Гельбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе.—М.: Мир, 1967.—251 с.

44. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре.—М.: Наука, 1966. —280 с.

45. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца.—М.: Физматгиз, 1960.—316 с.

46. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними.—М.: Физматгиз, 1958.—438 с.—(Обобщённые функции. Вып. 1.)

47. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщённых функций.—М.: Физматгиз, 1958.—307 с.—(Обобщённые функции. Вып. 2.)

48. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства.

— М.: Физматгиз, 1961. — 472 с. — (Обобщённые функции. Вып. 4.)

49. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.—М.: Наука, 1969.—475 с.

50. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков.—М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—319 с.

51. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения.—М.: Наука, 1983.—284 с.

52. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций.—М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—311 с.

53. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных самосопряжённых операторов.—М.: Наука, 1965.—448 с.

54. Гурарий В. П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа.—М.: ВИНИТИ, 1988.—311 с.—(Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 25.)

55. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1: Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—898 с. Т. 2: Спектральная теория. Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве.—М.: Мир, 1966.—1063 с. Т. 3: Спектральные операторы.—М.: Мир, 1974.—661 с.

56. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.—399 с.

57. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств.—Киев: Выща школа, 1980.—215 с.

58. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—232 с.

59. Дэй М. Нормированные линейные пространства.—М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—232 с.

60. Ефимов А. В., Золотарёв Ю. Г., Терпигорев В. М. Математический анализ (специальные разделы). Т. 2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. —М.: Высшая школа, 1980.—295 с.

61. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II.—М.: Наука, 1998.—640 с.

62. Иосида К. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1967.—624 с.

63. Иосида К. Операционное исчисление. Теория гиперфункций. — Минск: Изд-во «Университетское», 1989.—168 с.

64. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.

65. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

66. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Физматгиз, 1959.—684 с.

67. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

68. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—296 с.

69. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—740 с.

70. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.—М.: Мир, 1976.—204 с.

71. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды.—М.: Наука, 1984.—495 с.

72. Келли Дж. Общая топология.—М.: Наука, 1981.—431 с.

73. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.—М.: Наука, 1978.—343 с.

74. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа.—М.: Наука, 1988.—396 с.

75. Кисляков С. В. Правильные равномерные алгебры недополняемы // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 304, № 4.—С. 795–798.

76. Князев П. Н. Функциональный анализ.—Минск: Вышейшая школа, 1985.—208 с.

77. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. —М.: Наука, 1985.—470 с.

78. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1989.—623 с.

79. Коротков В. Б. Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.—224 с.

80. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. —М.: Изд-во МГУ, 1986.—303 с.

81. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа.—М.: Физматгиз, 1962. —394 с.

82. Красносельский М. А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—499 с.

83. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.—М.: Наука, 1975.—511 с.

84. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматгиз, 1958.—271 с.

85. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—255 с.

86. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1967.—464 с.

87. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1971.—104 с.

88. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.

89. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2.—М.: Высшая школа, 1981.—584 с.

90. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и её приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

91. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.

92. Кусраев А. Г., Тибилов К. Т. Бесконечномерные банаховы пространства.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского университета, 1994.—118 р.

93. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и её приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—254 с.

94. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. —М.: Наука, 1973.—407 с.

95. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа.—М.: Наука, 1967.—510 с.

96. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—351 с.

97. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. —М.: Мир, 1967.—203 с.

98. Ленг С. Алгебра.—М.: Мир, 1968.—564 с.

99. Ленг С. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.—М.: Мир, 1977.—430 с.

100. Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп.—Харьков: Выща школа, 1985.—143 с.
101. Любич Ю. И. Линейный функциональный анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—316 с.—(Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 19.)
102. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ.—М.: Изд-во иностр. лит., 1956.—251 с.
103. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа.—М.: Высшая школа, 1982.—271 с.
104. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.—415 с.
105. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. — М.: Мир, 1968.—131 с.
106. Маслов В. П. Операторные методы.—М.: Наука, 1973.—544 с.
107. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1977.—504 с.
108. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.—М.: Высшая школа, 1977.—431 с.
109. Морен К. Методы гильбертова пространства.—М.: Мир, 1965.—570 с.
110. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп.—М.: Мир, 1980.—102 с.
111. Напалков В. В. Уравнения свёртки в многомерных пространствах.—М.: Наука, 1982.—240 с.
112. Наймарк М. А. Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968.—664 с.
113. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей.—М.: Мир, 1969.—309 с.
114. Нейман Дж. фон. Математические основы квантовой механики.—М.: Наука, 1964.—367 с.
115. Нейман Дж. фон. Избранные труды по функциональному анализу.—М.: Наука, 1987.—Т. 1, 2.
116. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига.—М.: Наука, 1980.—383 с.
117. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1977.—455 с.
118. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу.—М.: Мир, 1977.—232 с.

119. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения.—М.: Мир, 1988.—264 с.
120. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.
121. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Наука, 1967.—487 с.
122. Пале Р. Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе.—М.: Мир, 1970.—359 с.
123. Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и её приложения.—Киев: Выща школа, 1980.—216 с.
124. Пич А. Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.
125. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—256 с.
126. Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов.—М.: Наука, 1965.—624 с.
127. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Мир, 1979.—493 с.
128. Радыно Я. В. Линейные уравнения и борнология.—М.: Изд-во БГУ, 1982.—199 с.
129. Райков Д. А. Векторные пространства.—М.: Физматгиз, 1962. —211 с.
130. Решетняк Ю. Г. Векторные меры и некоторые вопросы теории функций вещественной переменной.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 1982.—91 с.
131. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.—М.: Мир, 1977–1982.—Т. 1: Функциональный анализ. —1977.—357 с. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978.—395 с. Т. 3: Теория рассеяния.—1982.—443 с. Т. 4: Анализ операторов.—1982.—428 с.
132. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.—587 с.
133. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. —М.: Мир, 1982.—486 с.
134. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
135. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—470 с.
136. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.—443 с.

137. Садовничий В. А. Теория операторов.—М.: Высшая школа, 1999.—368 с.

138. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5.—М.: ГИФМЛ, 1959.—635 с.

139. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.—808 с.

140. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—М.: Наука, 1988.—334 с.

141. Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщённых функций.—М.: Наука, 1989. — 254 с.

142. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—342 с.

143. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.—333 с.

144. Талдыкин А. Т. Элементы прикладного функционального анализа.—М.: Высшая школа, 1982.—383 с.

145. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ. В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14.—М.: ВИНИТИ, 1987.—С. 5–101.

146. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—496 с.

147. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — М.: Наука, 1984.—256 с.

148. Трибель Х. Теория функциональных пространств.—М.: Мир, 1986.—447 с.

149. Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепёлкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.—Новосибирск: Наука, 1984.—223 с.

150. Хавин В. П. Методы и структура коммутативного гармонического анализа. В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 15.—М.: ВИНИТИ, 1987.—С. 6–133.

151. Халмош П. Теория меры.—М.: Изд-во иностр. лит.—1953.—291 с.

152. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963.—264 с.

153. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах.—М.: Мир, 1970.—352 с.
154. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2.—М.: Наука, 1985.—158 с.
155. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов.—М.: Мир, 1983.—431 с.
156. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах.—М.: Мир, 1981.—701 с.
157. Хелемский А. Я. Банаховы и полунормированные алгебры. Общая теория, представление, гомотопии.—М.: Наука, 1989.—464 с.
158. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. —М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—829 с.
159. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.—М.: Мир, 1989.—655 с.
160. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1: Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представление групп.—М.: Наука, 1975.—656 с. Т. 2: Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах.—М.: Мир, 1975.—902 с.
161. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.—М.: Мир, 1968.—279 с.
162. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.—462 с.
163. Шапира П. Теория гиперфункций.—М.: Мир, 1972.—142 с.
164. Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры.—М.: ВИНИТИ, 1986.—288 с.—(Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 11.)
165. Шварц Л. Анализ. Т. 1.—М.: Мир, 1972.—824 с.
166. Шварц Л. Математические методы для физических наук.—М.: Мир, 1965.—412 с.
167. Шефер Х. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—359 с.
168. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс.—М.: Наука, 1965.—327 с.
169. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная.—М.: Наука, 1967.—219 с.

170. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении.—М.: Мир, 1985.—Т. 1, 2.
171. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
172. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.—М.: Мир, 1979.—400 с.
173. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля.—М.: Мир, 1976.—423 с.
174. Энгелькинг Р. Общая топология.—М.: Мир, 1986.—751 с.
175. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.—М.: Мир, 1974.—488 с.
176. Adams R. Sobolev Spaces.—New York etc.: Academic Press, 1975. —275 p.
177. Adasch N., Ernst B., and Keim D. Topological Vector Spaces. The Theory Without Convexity Conditions.—Berlin etc.: Springer, 1978.—125 p.
178. Aliprantis Ch. and Burkinshaw O. Positive Operators.—Orlando etc.: Academic Press, 1985.—367 p.
179. Aliprantis Ch. and Border Kim C. Infinite-Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide. — Berlin etc.: Springer, 1999. — xx+672 p.
180. Amir D. Characterizations of Inner Product Spaces.—Basel etc.: Birkhäuser, 1986.—200 p.
181. Antosik P. and Swartz Ch. Matrix Methods in Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1985.—114 p.
182. Approximation of Hilbert Space Operators.—Boston etc.: Pitman. Vol. 1: Herrero D. A.—1982.—255 p. Vol. 2: Apostol C. et al.—1984.—524 p.
183. Arveson W. An Invitation to C^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer, 1976.—106 p.
184. Baggett L. W. Functional Analysis. A Primer.—New York etc.: Dekker, 1991.—288 p.
185. Baggett L. W. Functional Analysis.—New York: Marsel Dekker, Inc., 1992.—267 p.
186. Banach S. Theórie des Operationes Linéaires.—Warszawa: Monografje Mat., 1932.—254 p. (English transl.: Theory of Linear Operations.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1987.—237 p.)
187. Bauer H. Probability Theory.—Berlin: Walter de Gruyter, 1996.—xv+523 p.

188. Beauzamy B. Introduction to Banach Spaces and Their Geometry. —Amsterdam etc.: North-Holland, 1985.—338 p.

189. Beauzamy B. Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1988.—xiv+358 p.

190. Berberian St. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.—Berlin etc.: Springer, 1974.—345 p.

191. Bessaga Cz. and Pelczynski A. Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1975.—313 p.

192. Birkhoff G. and Kreyszig E. The establishment of functional analysis // Historia Math.—1984.—Vol. 11, No. 3.—P. 258–321.

193. Boccara N. Functional Analysis. An Introduction for Physicists– New York etc.: Academic Press, 1990.—344 p.

194. Bollobás B. Linear Analysis. An Introductory Course.—Cambridge: Cambridge University Press, 1990.—240 p.

195. Bonsall F. F. and Duncan J. Complete Normed Algebras.—Berlin etc.: Springer, 1973.—299 p.

196. Boos B. and Bleecker D. Topology and Analysis. The Atiyah–Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics.—Berlin etc.: Springer, 1985.—451 p.

197. Bourgain J. New Classes of $\mathscr{L}^p$-Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1981.—143 p.

198. Bourgin R . D. Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon–Nikodým Property.—Berlin etc.: Springer, 1983.—474 p.

199. Brezis H. Analyse Fonctionelle. Théorie et Applications.—Paris etc.: Masson, 1983.—233 p.

200. Brown A. and Pearcy C. Introduction to Operator Theory. I. Elements of Functional Analysis. — Berlin etc.: Springer, 1977.—474 p.

201. Burckel R. Characterization of $C(X)$ Among Its Subalgebras.—New York: Dekker, 1972.—159 p.

202. Caradus S., Plaffenberger W., and Yood B. Calkin Algebras of Operators on Banach Spaces.—New York: Dekker, 1974.—146 p.

203. Carreras P. P. and Bonet J. Barrelled Locally Convex Spaces.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1987.—512 p.

204. Casazza P. G. and Shura Th. Tsirelson's Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1989.—204 p.

205. Chandrasekharan P. S. Classical Fourier Transform.—Berlin etc.: Springer, 1980.—172 p.

206. Choquet G. Lectures on Analysis. Vol. 1: Integration and Topological Vector Spaces.—361 p. Vol. 2: Representation Theory.—317 p. Vol. 3: Infinite Dimensional Measures and Problem Solutions.—321 p.—New York and Amsterdam: Benjamin, 1976.

207. Colombeau J.-F. Elementary Introduction to New Generalized Functions.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1985.—281 p.

208. Constantinescu C., Weber K., and Sontag A. Integration Theory. Vol. 1: Measure and Integration.—New York etc.: Wiley, 1985.—520 p.

209. Conway J. B. A Course in Functional Analysis.—New York etc.: Springer, 1990.—399 p.

210. Conway J. B. A Course in Operator Theory.—Providence: Amer. Math. Soc., 2000.—xvi+372 p.

211. Conway J. B., Herrero D., and Morrel B. Completing the Riesz–Dunford Functional Calculus. — Providence: Amer. Math. Soc., 1989.—104 p.

212. Cryer C. Numerical Functional Analysis.—New York: Clarendon Press, 1982.—568 p.

213. Dautray R. and Lions J.-L. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 2: Functional and Variational Methods.—Berlin etc.: Springer, 1988.—561 p. Vol. 3: Spectral Theory and Applications.—Berlin e
tc.: Springer, 1990.—515 p.

214. DeVito C. L. Functional Analysis.—New York and London: Academic Press, 1978.—ix+166 p.

215. DeVito C. L. Functional Analysis and Linear Operator Theory.—Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990.—x+358 p.

216. Diestel J. Sequences and Series in Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1984.—261 p.

217. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence: Amer. Math. Soc., 1977.—322 p.

218. Dieudonné J. Treatise on Analysis. Vol. 7.—Boston: Academic Press, 1988.—366 p.

219. Dieudonné J. History of Functional Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—312 p.

220. Dieudonné J. A Panorama of Pure Mathematics. As Seen by N. Bourbaki.—New York etc.: Academic Press, 1982.—289 p.
221. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin: Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 p.
222. Dixmier J. Les Algebres d'Operators dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann).—Paris: Gauthier-Villars, 1969.—367 p.
223. Donoghue W. F. Jr. Distributions and Fourier Transforms.—New York etc.: Academic Press, 1969.—316 p.
224. Doran R. and Belfi V. Characterizations of C^*-Algebras. The Gelfand–Naimark Theorem.—New York and Basel: Dekker, 1986.—426 p.
225. Dowson H. R. Spectral Theory of Linear Operators.—London etc.: Academic Press, 1978.—422 p.
226. Edmunds D. E. and Evans W. D. Spectral Theory and Differential Operators.—Oxford: Clarendon Press, 1987.—574 p.
227. Enflo P. A counterexample to the approximation property in Banach spaces // Acta Math.—1979.—Vol. 130, No. 3–4.— P. 309–317.
228. Erdelyi I. and Shengwang W. A Local Spectral Theory for Closed Operators.—Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1985.—178 p.
229. Fenchel W. Convexity Through Ages.—In: Convexity and Its Applications.—Basel etc.: Birkhäuser, 1983.—P. 120–130.
230. Friedlander F. G., Introduction to the Theory of Distributions.—Cambridge: Cambridge University Press, 1998.—x+175 p.
231. Folland G. B. Fourier Analysis and Its Applications.—Wadsworth and Brooks: Pacific Grove, 1992.—433 p.
232. Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics. —New York and Oxford: Oxford University Press, 1990.—341 p.
233. Gillman L. and Jerison M. Rings of Continuous Functions.—Berlin etc.: Springer, 1976.—283 p.
234. Gohberg I. and Goldberg S. Basic Operator Theory. — Boston: Birkhäuser, 1981.—285 p.
235. Goldberg S. Unbounded Linear Operators.—New York: Dover, 1985.—199 p.
236. Griffel P. H. Applied Functional Analysis.—New York: Wiley, 1981.—386 p.

237. Grothendieck A. Topological Vector Spaces.—New York etc.: Gordon and Breach, 1973.—245 p.
238. Guerre-Delabriere S. Classical Sequences in Banach Spaces.—New York: Dekker, 1992.—232 p.
239. Halmos P. Selecta: Expository Writing.—Berlin etc.: Springer, 1983.—304 p.
240. Halmos P. Has Progress in Mathematics Slowed Down.—Amer. Math. Monthly.—1990.—Vol. 97, No. 7.—P. 561–588.
241. Harte R. Invertibility and Singularity for Bounded Linear Operators.—New York and Basel: Dekker, 1988.—590 p.
242. Helmberg G. Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1969.—346 p.
243. Hervé M. Transformation de Fourier et Distributions. — Paris: Presses Universitaires de France, 1986.—182 p.
244. Heuser H. Functional Analysis.—New York: Wiley, 1982.—408 p.
245. Heuser H. Funktionalanalysis.—Stuttgart: Teubner, 1986.—696 p.
246. Hewitt E. and Stromberg K. Real and Abstract Analysis—Berlin etc.: Springer, 1975.—476 p.
247. Hochstadt H. Edward Helly, father of the Hahn–Banach theorem// The Mathematical Intelligencer.—1980.—l. 2, No. 3.—P. 123–125.
248. Hoffman K. Fundamentals of Banach Algebras.—Curitaba: University do Parana, 1962.—116 p.
249. Hog-Nlend H. Bornologies and Functional Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1977.
250. Holmes R. B. Geometric Functional Analysis and Its Applications. —Berlin etc.: Springer, 1975.—246 p.
251. Hörmander L. Notions of Convexity.—Boston etc.: Birkhäuser, 1994.—414 p.
252. Husain T. and Khaleelulla S. M. Barrelledness in Topological and Ordered Vector Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1978.—257 p.
253. Istratescu V. I. Inner Product Structures.—Dordrecht and Boston: Reidel, 1987.—895 p.
254. James R. C. Some Interesting Banach Spaces//Rocky Mountain J. Math.—1993.— Vol. 23, No. 2.—P. 911–937.
255. Jarchow H. Locally Convex Spaces.—Stuttgart: Teubner, 1981.—548 p.
256. Jörgens K. Linear Integral Operators. —Boston etc.: Pitman, 1982.—379 p.

257. Kadison R. V. and Ringrose J. R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. 1, 2. — New York etc.: Academic Press, 1983–1986.

258. Kamthan P. K. and Gupta M. Sequence Spaces and Series.—New York and Basel: Dekker, 1981.—368 p.

259. Kelly J. L. and Namioka I. Linear Topological Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1976.—256 p.

260. Kelly J. L. and Srinivasan T. P. Measure and Integral. Vol. 1.—New York etc.: Springer, 1988.—150 p.

261. Kesavan S. Topics in Functional Analysis and Applications.—New York etc.: Wiley, 1989.—267 p.

262. Khaleelulla S M. Counterexamples in Topological Vector Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1982.—179 p.

263. Körner T. W. Fourier Analysis.—Cambridge: Cambridge University Press, 1988.—591 p.

264. Köthe G. Topological Vector Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1969–1979.—Vol. 1, 2.

265. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications.—New York: Wiley, 1989.—688 p.

266. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.

267. Lacey H. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1973.—243 p.

268. Lang S. Real Analysis.—Reading: Addison-Wesley, 1983.—533 p.

269. Larsen R. Banach Algebras, an Introduction.—New York: Dekker, 1973.—345 p.

270. Larsen R. Functional Analysis, an Introduction. —New York: Dekker, 1973.—497 p.

271. Levy A. Basic Set Theory.—Berlin etc.: Springer, 1979.—351 p.

272. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1977. Vol. 1: Sequence Spaces.—1977.—190 p. Vol. 2: Function Spaces.—1979.—243 p.

273. Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems.—Berlin etc.: 1984.—720 p.

274. Llavona J. G. Approximation of Continuously Differentiable Functions. —Amsterdam etc.: North-Holland, 1986.—241 p.

275. Luecking D. H. and Rubel L. A. Complex Analysis. A Functional Analysis Approach.—Berlin etc.: Springer, 1984.—176 p.

276. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. I.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1971.—514 p.
277. Maddox I. J. Elements of Functional Analysis.—Cambridge: Cambridge University Press, 1988.—242 p.
278. Malliavin P. Integration of Probabilités. Analyse de Fourier et Analyse Spectrale.—Paris etc.: Masson, 1982.—200 p.
279. Marek I. and Zitný K. Matrix Analysis for Applied Sciences. Vol. 1. —Leipzig: Teubner, 1983.—196 p.
280. Mascioni V. Topics in the Theory of Complemented Subspaces in Banach Spaces // Expositiones Math.—1989.—Vol. 7, No. 1.—P. 3–47.
281. Maurin K. Analysis. II. Integration, Distributions, Holomorphic Functions, Tensor and Harmonic Analysis.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1980.—829 p.
282. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—395 p.
283. Michor P. W. Functors and Categories of Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1978.—99 p.
284. Milman V. D. and Schechtman G. Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1986.—156 p.
285. Miranda C. Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare.—Bologna: Pitagora Editrice.—Vol. 1: 1978.—596 p. Vol. 2: 1979.—748 p.
286. Misra O. P. and Lavoine J. L. Transform Analysis of Generalized Functions.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1986.—332 p.
287. Moore R. Computational Functional Analysis.—New York: Wiley, 1985.—156 p.
288. Narici L. and Beckenstein E. Topological Vector Spaces—New York: Dekker, 1985.—408 p.
289. Naylor A. and Sell G. Linear Operator Theory in Engineering and Science.—Berlin etc.: Springer, 1982.—624 p.
290. Oden J. T. Applied Functional Analysis. A First Course for Students of Mechanics and Engineering Science.—Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.—426 p.
291. Pedersen G. K. Analysis Now.—New York etc.: Springer, 1989.—277 p.
292. Phelps R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. —Berlin etc.: 1989.—115 p.

293. Pietsch A. Eigenvalues and S-Numbers.—Leipzig, Akademish Verlag, 1987.—360 p.
294. Pisier G. Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces.—Providence: Amer. Math. Soc., 1986.—154 p.
295. Radjavi H. and Rosenthal P. Invariant Subspaces.—Berlin etc.: Springer, 1973.—219 p.
296. Richards J. Ian and Joun H. K. Theory of Distributions: a Non-Technical Introduction. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.—147 p.
297. Rickart Ch. General Theory of Banach Algebras.—Princeton: Van Nostrand, 1960.—394 p.
298. Rolewicz S. Metric Linear Spaces.—Dordrecht etc.: Reidel, 1984. —459 p.
299. Rolewicz S. Analiza Funkcjonalua i Teoria Sterowania.—Warszawa, Pánstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.—393 p.
300. Roman St. Advanced Linear Algebra.— Berlin etc.: Springer, 1992.
301. Rudin W. Fourier Analysis on Groups.—New York: Interscience, 1962.—285 p.
302. Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer, 1971.—256 p.
303. Samuélidés M. and Touzillier L. Analyse Fonctionelle. Cepadues Éditions.—Toulouse, 1983.—289 p.
304. Sard A. Linear Approximation.— Providence: Amer. Math. Soc., 1963.
305. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer, 1974.—376 p.
306. Schechter M. Principles of Functional Analysis.—New York etc.: Academic Press, 1971.
307. Schwartz L. Theorie des Distributions [in French].—Paris: Hermann, 1998.—xii+420 p.
308. Schwartz L. Analyse. Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle. —Paris: Hermann, 1986.—436 p.
309. Schwartz L. Hilbertian Analysis [in French].—Paris: Hermann, 1979.
310. Schwartz L. Geometry and Probability in Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer, 1981.—x+101 p.—(Lecture Notes in Math., **852**.)

311. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.

312. Seeger Al. Direct and inverse addition in convex analysis and applications // J. Math. Anal. Appl.—1990.—Vol. 148, No. 2.—P. 317–349.

313. Segal I. and Kunze R. Integrals and Operators. —Berlin etc.: Springer.—1978.—371 p.

314. Semadeni Zb. Banach Spaces of Continuous Functions.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1971.—584 p.

315. Sinclair A. Automatic Continuity of Linear Operators. — Cambridge: Cambridge University Press, 1976.—92 p.

316. Singer I. Bases in Banach Spaces. Vol. 1—Berlin etc.: Springer, 1970.—668 p.

317. Singer I. Bases in Banach Spaces. Vol. 2.—Berlin etc.: Springer, 1981.—880 p.

318. Singer I. Abstract Convex Analysis.—New York: John Wiley & Sons, 1997.—xix+491 p.

319. Steen L. A. Highlights in the history of spectral theory // Amer. Math. Monthly.—1973.—Vol. 80, No. 4.—P. 359—381.

320. Steen L. A. and Seebach J. A. Counterexamples in Topology.—Berlin etc.: Springer, 1978.—244 p.

321. Stein E. M. Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton Princeton University Press, 1993.

322. Stone M. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Application to Analysis.—New York: Amer. Math. Soc., 1932.—622 p.

323. Sundaresan K. and Swaminathan Sz. Geometry and Nonlinear Analysis in Banach Spaces.—Berlin etc.: 1985.—113 p.

324. Sunder V. S. An Invitation to von Neumann Algebras.—New York etc.: Springer, 1987.—171 p.

325. Swartz Ch. An Introduction to Functional Analysis.—New York: Dekker, 1992.—600 p.

326. Szankowski A. $B(H)$ does not have the approximation property // Acta Math.—1981.—Vol. 147, No. 1–2.—P. 89–108.

327. Takeuti G. and Zaring W. Introduction to Axiomatic Set Theory. —New York etc.: Springer, 1982.—246 p.

328. Taylor A. E. and Lay D. C. Introduction to Functional Analysis.—New York: Wiley, 1980.—467 p.
329. Taylor J. L. Measure Algebras.—Providence: Amer. Math. Soc., 1973.—108 p.
330. Tiel J. van. Convex Analysis. An Introductory Theory.—Chichester: Wiley, 1984.—125 p.
331. Treves F. Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations.—Berlin etc.: Springer, 1967.—120 p.
332. Waelbroeck L. Topological Vector Spaces and Algebras.—Berlin etc.: Springer, 1971.
333. Wagon S. The Banach–Tarski Paradox.—Cambridge: Cambridge University Press, 1985.—251 p.
334. Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces.—New York etc.: Springer, 1980.—402 p.
335. Wells J. H. and Williams L. R. Embeddings and Extensions in Analysis.—Berlin etc.: Springer, 1975.—107 p.
336. Wermer J. Banach Algebras and Several Convex Variables. —Berlin etc.: Springer, 1976.—161 p.
337. Wilanski A. Functional Analysis.— New York: Blaisdell, 1964.
338. Wilanski A. Topology for Analysis.— New York: John Wiley, 1970.
339. Wilanski A. Modern Methods in Topological Vector Spaces.—New York: McGraw-Hill, 1980.—298 p.
340. Wojtaszczyk P. Banach Spaces for Analysis.—Cambridge: Cambridge University Press, 1991.—382 p.
341. Wong Yau-Chuen. Introductory Theory of Topological Vector Spaces.—New York: Dekker, 1992.—440 p.
342. Yood B. Banach Algebras—An Introduction.—Ottawa: Carleton University, 1988.—174 p.
343. Zaanen A. C. Riesz Spaces. II.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—702 p.
344. Zemanian A. H. Distribution Theory and Transform Analysis.—New York: Dover, 1987.—371 p.
345. Ziemer W. P. Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation.—Berlin etc.: Springer, 1989.
346. Zimmer R. J. Essential Results of Functional Analysis.—Chicago and London: The University of Chicago Press, 1990.—152 p.
347. Zuily C. Problems in Distributions and Partial Differential Equations. —Amsterdam etc.: North-Holland, 1988.—245 p.

Указатель обозначений

Предметный указатель

Кутателадзе Семён Самсонович

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Ответственный редактор
Иванов Владимир Вениаминович

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макро-пакета $\mathcal{AMS}$-TEX, разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX, the American Mathematical Society's TEX macro package.

Подписано в печать 09.03.2000. Формат $60 \times 84\,{}^1\!/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 19,3. Тираж 300 экз. Заказ № 17.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск.