Д. С. КУЗНЕЦОВ

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

*Допущено*
*Министерством высшего и среднего*
*специального образования СССР*
*в качестве учебного пособия*
*для высших технических учебных заведений СССР*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1962

В настоящей книге дается краткое, но достаточно строгое изложение теории основных специальных функций. Чтение книги требует знания курса высшей математики и элементов теории функций комплексного переменного в объеме втузовских программ. Материал в книге расположен и изложен таким образом, что, в случае необходимости, некоторые параграфы могут быть опущены без ущерба для понимания остальных параграфов; в частности, это относится к параграфам, в которых применяется теория функций комплексного переменного.

Книга может быть использована студентами и аспирантами, а также — инженерами и научными работниками.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой настоящей книги явились лекции, которые в течение ряда лет автор читал (по разным программам) для аспирантов и научных работников научно-исследовательских институтов, для инженеров, желавших расширить свой математический кругозор, и для аспирантов и студентов втузов. Автором руководило желание сделать книгу пригодной для читателей с различной математической подготовкой, что, разумеется, сказалось на выборе материала и на его расположении и изложении. Книга составлена так, что, в случае необходимости, некоторые параграфы могут быть опущены.

Объем книги позволил включить в нее только основные специальные функции, которые, однако, исследуются по возможности полно и строго. Рассматриваемые функции вводятся сначала при помощи гипергеометрической функции, чем подчеркивается связь между различными специальными функциями. Но в дальнейших главах указаны и другие пути, приводящие к рассматриваемым в этих главах специальным функциям.

Для чтения большей части книги достаточно знания математического анализа и теории функций комплексного переменного в объеме втузовских программ. Однако, в некоторых местах изложение потребовало основы более широкой, чем это обычно дается во втузах (сюда относятся бесконечные произведения, особые точки дифференциальных уравнений, асимптотические представления функций и т. д.). Автор счел более целесообразным дать в специальных параграфах краткое изложение этих вопросов, нежели адресовать читателя к тем или иным источникам.

Небольшим объемом книги объясняется и ограниченное число рассматриваемых в ней примеров.

В книге применена двойная нумерация формул: указывается номер параграфа и, после точки, — номер формулы внутри этого параграфа. При литературных ссылках указывается (в квадратных скобках) номер источника по списку, помещенному в конце книги.

5 декабря 1960 г. *Д. Кузнецов*

## ЛИТЕРАТУРА


[1]. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. I, 11-е издание, 1948.
[2]. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II, 9-е издание, 1948.
[3]. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 4-е издание, 1949.
[4]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, 3-е издание, 1951.
[5]. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, 1953.
[6]. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 1955.
[7]. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции, 2-е издание, 1935.
[8] Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики, 2-е издание, 1953.
[9]. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, 2-е издание, 1953.
[10]. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. I, 1952.
[11]. Уиттекер Е. и Ватсон Г. Курс современного анализа, ч. 2, 1934.
[12]. Ватсон Г. Теория бесселевых функций, 1949.
[13]. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми, 1948.
[14]. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3-е издание, 1951.

ГЛАВА I

# ГАММА-ФУНКЦИЯ

## § 1. Эйлеров интеграл первого рода (бэта-функция)

***Бэта-функция*** определяется равенством:

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx, \tag{1.1}$$

в правой части которого стоит так называемый *Эйлеров интеграл первого рода*, сходящийся, как легко установить, при $a>0$ и $b>0$ и расходящийся, если хотя бы один из параметров $a$ и $b$ меньше или равен нулю*.

Полагая

$$x = 1 - t; \; dx = -dt$$

и замечая, что $t=1$ при $x=0$ и $t=0$ при $x=1$, имеем:

$$\mathrm{B}(a, b) = -\int_1^0 (1-t)^{a-1} t^{b-1} \, dt = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = \mathrm{B}(b, a)$$

Таким образом,

$$\mathrm{B}(a, b) = \mathrm{B}(b, a), \tag{1.2}$$

то есть бэта-функция симметрична относительно своих аргументов $a$ и $b$.

Применим, далее, к Эйлерову интегралу первого рода формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = (1-x)^{b-1}; \; du = -(b-1)(1-x)^{b-2} dx;$$

---

* См. [4], стр. 599.

$$dv = x^{a-1}dx; \quad v = \frac{x^a}{a},$$

и воспользуемся тождеством

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x);$$

тогда

$$B(a, b) = \left[\frac{(1-x)^{b-1}x^a}{a}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a}(b-1)(1-x)^{b-2}dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx = \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx -$$

$$-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{b-1}{a}B(a, b-1) - \frac{b-1}{a}B(a, b),$$

откуда

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a, b-1). \qquad (1.3)$$

и, в силу симметричности бэта-функции относительно $a$ и $b$,

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1, b). \qquad (1.4)$$

Приравнивая правые части формул (1.3) и (1.4), после сокращения на $a+b-1$, получим:

$$(b-1)B(a, b-1) = (a-1)B(a-1, b)$$

или, если положить

$$a-1 = p; \quad b-1 = q,$$

то

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p}B(p+1, q). \qquad (1.5)$$

Если $b=n$, где $n$ есть целое число, то в результате последовательного применения к $B(a, n)$ формулы (1.3) получим:

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\frac{n-3}{a+n-3}\cdots\frac{1}{a+1}B(a, 1)$$

Но

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1}dx = \left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a}; \qquad (1.6)$$

следовательно,

$$B(a,n)=B(n,a)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)} \tag{1.7}$$

и, если $a=m$, где $m$ есть целое число (так же, как и $b=n$), то в результате последовательного применения формулы (1.4) получим:

$$B(m,n)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}B(m,1)=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdots\frac{1}{2}B(1.1),$$

откуда, так как $B(1,1)=1$,

$$B(m,n)=B(n,m)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{1.8}$$

Полагая в формуле (1.1) $a=b$, имеем:

$$B(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

или

$$B(a,a)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx,$$

так как график функции

$$y=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

симметричен относительно прямой $x=\frac{1}{2}$.

Применяя, далее, подстановку

$$\frac{1}{2}-x=\frac{\sqrt{t}}{2};\ dx=-\frac{dt}{4\sqrt{t}}$$

при которой $t=1$, если $x=0$ и $t=0$, если $x=\frac{1}{2}$, получаем:

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt,$$

то есть

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right). \tag{1.9}$$

Применяя, наконец, к Эйлерову интегралу первого рода подстановку

$$x = \frac{y}{1+y}; \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}; \quad 1 - x = \frac{1}{1+y}$$

и замечая, что

$$y = \frac{x}{1-x} \text{ и } y=0 \text{ при } x=0; \; y = \infty \text{ при } x = 1,$$

имеем:

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \tag{1.10}$$

Этой формулой мы воспользуемся в следующем параграфе для установления связи между Эйлеровыми интегралами первого и второго рода.

## § 2. Эйлеров интеграл второго рода (гамма-функция)

*Гамма-функция* определяется равенством:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \tag{2.1}$$

в правой части которого стоит так называемый *Эйлеров интеграл второго рода,* сходящийся, как легко установить, при $a>0$ и расходящийся при $a \leqslant 0$*.

Для установления связи между бэта-функцией и гамма-функцией применим к Эйлерову интегралу второго рода подстановку

$$x = ty \; (t = \text{const} > 0); \; dx = t\,dy$$

Так как $y=0$ при $x=0$ и $y=\infty$ при $x=\infty$, то

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} y^{a-1} e^{-ty} t\,dy,$$

откуда

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-ty} dy$$

или, после замены $a$ через $a+b$ и $t$ через $1+t$,

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy$$

* См. [4], стр. 600.

Умножая обе части последнего равенства на $t^{a-1}$ и интегрируя результат умножения по $t$ (которое теперь считаем переменным) в пределах от 0 до $\infty$, имеем:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy\right\}t^{a-1}dt$$

или, на основании (1.10) и после изменения порядка интегрирования в правой части,

$$\Gamma(a+b)\cdot \mathrm{B}(a,b) = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}\,dt\right\}y^{a+b-1}e^{-y}\,dy,$$

а после умножения и деления подынтегральной функции внутреннего интеграла по $y^a$:

$$\Gamma(a+b)\cdot \mathrm{B}(a,b) = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty (ty)^{a-1}e^{-ty}\,d(ty)\right\}y^{b-1}e^{-y}\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx\right\}y^{b-1}e^{-y}\,dy = \int_0^\infty \Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}\,dy =$$

$$= \Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

откуда

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \qquad (2.2)$$

**Эта формула показывает, что бэта-функция всегда может быть выражена через гамма-функцию.**

**Применим к интегралу правой части равенства**

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx$$

формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x^a;\ du = ax^{a-1}\,dx;\ dv = e^{-x}\,dx;\ v = -e^{-x};$$

тогда

$$\Gamma(a+1) = \left[-x^a e^{-x}\right]_0^\infty + a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = a\,\Gamma(a),$$

**то есть имеет место следующая *рекуррентная формула:***

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a). \qquad (2.3)$$

Так как при $a=1$ формула (2.1) дает:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1, \tag{2.4}$$

то, полагая $a=n$, где $n$ есть целое число, и применяя последовательно формулу (2.3), получаем:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=$$
$$=\cdots=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!\,\Gamma(1)$$

и, на основании (2.4),

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{2.5}$$

Таким образом, при целых, положительных значениях аргумента гамма-функция обращается в факториал, порядок которого на единицу меньше, чем взятое значение аргумента.

При $n=0$ формула (2.5) принимает вид:

$$0!=\Gamma(1)=1. \tag{2.6}$$

Если $-1<a<0$, то $a+1>0$ и существует $\Gamma(a+1)$; следовательно, имеет смысл и $\Gamma(a)$, что вытекает из (2.3). Таким образом, определение гамма-функции оказывается распространенным на все значения аргумента $a$, удовлетворяющие условию: $-1<a<0$.

Для $a=0$ формула (2.3) теперь дает:

$$\Gamma(0)=\lim_{a\to-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=-\infty \text{ и } \Gamma(0)=\lim_{a\to+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=+\infty \tag{2.7}$$

Для значений аргумента $a$, удовлетворяющих условию $-n<a<-(n-1)$, где $n$ есть целое число $(n>0)$, гамма-функция *определяется* формулой:

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\ *, \tag{2.8}$$

которую при помощи подстановки

$$a=-n+\alpha \quad (0<\alpha<1)$$

можно привести к виду:

$$\Gamma(-n+\alpha)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} \tag{2.9}$$

Формула (2.9) показывает, что в интервале $(-n, -[n-1])$ $\Gamma(a)>0$, если $n$ есть число четное, и $\Gamma(a)<0$, если $n$ есть число нечетное.

Так как, далее,

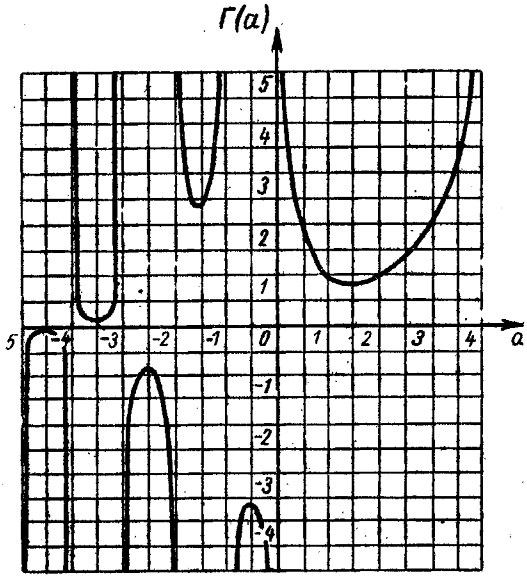
---

* Следует обратить внимание на то, что для *положительных* значений аргумента $a$ формула (2.8) вытекает из рекуррентной формулы (2.3), примененной $n$ раз к $\Gamma(a+n)$.

$$\Gamma(-n)=\lim_{\alpha\to 0}\Gamma(-n+\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=\pm\infty \tag{2.10}$$

(знак «+», если $n$ четное, и знак «—», если $n$ нечетное) и




Черт. 1

$$\Gamma(-n)=\lim_{\alpha\to 1}\Gamma[-(n+1)+\alpha]=\lim_{\alpha\to 1}(-1)^{n+1}\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n+1-\alpha)}=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\Gamma(1)}{0}=\mp\infty \tag{2.11}$$

(знак «—», если $n$ четное, и знак «+», если $n$ нечетное), то при переходе в отрицательном направлении через значение $a=-n$ гамма-функция изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, если $n$ нечетное, и от $+\infty$ до $-\infty$, если $n$ четное.

График гамма-функции изображен на черт. 1.

## § 3. Бесконечные произведения

Рассмотрим последовательность вещественных чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n,\ \ldots$$

Если при $n\to\infty$ *частичное произведение*

$$P_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \, (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

имеет предел $P$ (конечный или бесконечный, но определенного знака):

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P, \tag{3.2}$$

то этот предел называется величиной или значением *бесконечного произведения,* составленного из всех данных чисел $x_n$:

$$P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} x_n. \tag{3.3}$$

Бесконечное произведение называется *сходящимся,* если $P$ есть конечное число, отличное от нуля, и *расходящимся* — в противном случае.

Так как при любом конечном $m$ первый множитель правой части равенства

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\prod_{n=1}^{m} x_n\right) \cdot \left(\prod_{n=m+1}^{\infty} x_n\right)$$

есть величина конечная, то *остаточное произведение* $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} x_n$ сходится или расходится одновременно с рассматриваемым бесконечным произведением $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, откуда следует, что отбрасывание от бесконечного произведения конечного числа первых множителей или добавление к нему в начале конечного числа множителей не влияет на сходимость бесконечного произведения. Но

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} x_n = \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n}{\prod\limits_{n=1}^{m} x_n},$$

где

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n = P \text{ и } \lim_{m \to \infty} \prod_{n=1}^{m} x_n = P;$$

следовательно, в случае сходимости бесконечного произведения

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} x_n = 1. \tag{3.4}$$

С другой стороны, так как

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} P_{n-1} = P,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1, \tag{3.5}$$

откуда следует, что во всяком сходящемся бесконечном произведении все числа $x_n$, начиная с некоторого значения $n$, положительны, то есть что сходящееся бесконечное произведение может содержать лишь конечное число отрицательных множителей. Поэтому изменение знаков всех отрицательных множителей может отразиться только на знаке величины бесконечного произведения, но не на его сходимости и, не уменьшая общности рассуждения, все числа $x_n$ можно считать положительными.

Считая, таким образом, что

$$x_n > 0 \, (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

имеем:

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n = \ln P_n.$$

Если $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P$ существует и отличен от нуля, то, вследствие непрерывности логарифмической функции,

$$\lim_{n \to \infty} (\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n) = \ln P,$$

то есть при существовании положительного предела $P$ ряд

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n + \cdots$$

сходится и сумма его равна $\ln P$.

Справедливо и обратное, то есть, что при сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln x_n$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} P_n$:

$$\lim_{n \to \infty} (\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \ln (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n) = \lim_{n \to \infty} \ln P_n = \ln \lim_{n \to \infty} P_n,$$

заведомо имеющий логарифм и, следовательно, положительный.

Таким образом, при $x_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln x_n$ является *необходимым и достаточным условием сходимости* бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Если положить

$$x_n = 1 + u_n, \tag{3.6}$$

то бесконечное произведение можно взять в виде:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n),$$

где при $x_n>0$ обязательно

$$-1<u_n<+\infty\ (n=1,2,3,\ldots),$$

и, в случае сходимости бесконечного произведения,

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что для сходимости бесконечного произведения, в котором при достаточно больших значениях $n$ выполняется условие $u_n>0$ (или $u_n<0$) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

В самом деле, так как при $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}=1,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$ сходятся и расходятся одновременно. Но сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$ является необходимым и достаточным условием сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, откуда и вытекает, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ также является необходимым и достаточным условием сходимости этого бесконечного произведения.

Выше было указано, что при $P=\lim\limits_{n\to\infty} P_n=0$ бесконечное произведение считается расходящимся. Очевидно, что для обращения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в нуль достаточно, чтобы хотя бы одно из чисел $x_n$ было равно нулю. Легко убедиться в том, что необходимым и достаточным условием обращения бесконечного произведения в нуль является равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln x_n=-\infty$.

Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называется *абсолютно-сходящимся*, если абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln x_n$; легко доказать, что только в абсолютно-сходящихся произведениях можно переставлять множители $x_n$.

Приведем без доказательства формулы, дающие разложения в бесконечные произведения основных тригонометрических и гиперболических функций*:

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right); \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi^2}\right] \tag{3.8}$$

и

$$\operatorname{sh} x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right); \quad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi^2}\right] \tag{3.9}$$

## § 4. Формула Эйлера-Гаусса и ее следствия

Применяя к Эйлерову интегралу второго рода подстановку

$$e^{-x} = z,$$

при которой

$$x = \ln \frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)\right]; \quad dx = -\frac{dz}{z};$$

$$\text{если } x = 0, \text{ то } z = 1; \quad \text{если } x = \infty, \text{ то } z = 0,$$

и замечая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - z^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-z^{\frac{1}{n}}\ln z\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = -\ln z = \ln\frac{1}{z},$$

получаем:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = -\int_1^0 \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{a-1} z\,\frac{dz}{z} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^{a-1}\int_0^1\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}dz\right];$$

перестановка знаков интеграла и предела здесь является закон-

---

* См. [4], стр. 426.

ной, так как при безграничном возрастании $n$ функция $n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$ стремится к своему пределу $\ln\frac{1}{z}$ возрастая*.

К полученному интегралу применим подстановку

$$z = y^n; \quad dz = ny^{n-1}\,dy,$$

при которой пределы интегрирования не изменяются; тогда

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty}\left[n^a\int_0^1 (1-y)^{a-1}\,y^{n-1}\,dy\right]$$

или [см. (1.1)]

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty}\left[n^a \mathrm{B}(n, a)\right],$$

откуда при помощи (1.7) получаем следующую *формулу Эйлера-Гаусса:*

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}, \tag{4.1}$$

которую можно взять также и в виде:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}^{**}. \tag{4.2}$$

При помощи формулы Эйлера-Гаусса легко убедиться в том, что *разложение гамма-функции в бесконечное произведение* имеет вид:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\frac{a}{n}}, \tag{4.3}$$

где, на основании сказанного в § 2, считаем, что $a$ не равно ни нулю, ни целому отрицательному числу.

В самом деле, составляя для этого бесконечного произведения частичное произведение $P_{n-1}$:

$$P_{n-1} = \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^a\left(1+\frac{1}{2}\right)^a\left(1+\frac{1}{3}\right)^a\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)} =$$

$$= \frac{2^a3^a4^a\cdots n^a\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{1^a2^a3^a\cdots(n-1)^a\,a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)} =$$

---

* См. [4], стр. 712.

** Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a+n} = 1$$

$$=\frac{n^a (n-1)!}{a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)}$$

и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем правую часть равенства (4.1), что и убеждает нас в справедливости формулы (4.3), которую, на основании (2.3), можно заменить формулой:

$$\Gamma(a+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\frac{a}{n}}. \qquad (4.4)$$

Заменим теперь $a$ через $-a$ в (2.3) и (4.3):

$$\Gamma(1-a)=-a\Gamma(-a);\quad \Gamma(-a)=-\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}},$$

откуда

$$\Gamma(1-a)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}$$

и, после перемножения этого равенства с равенством (4.3),

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{1}{a\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)}. \qquad (4.5)$$

С другой стороны, первая из формул (3.8) при $x=\pi a$ дает:

$$\sin\pi a=\pi a\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right);$$

следовательно,

$$a\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi a}{\pi}$$

и (4.5) принимает следующий окончательный вид:

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}. \qquad (4.6)$$

Эта формула называется *формулой дополнения.*

Полагая в формуле дополнения $a=\frac{1}{2}$, имеем

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi \text{ и } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad (4.7)$$

**Применим теперь формулу (4.2) к функциям $\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$ и $\Gamma(2a)$,** заменив для второй из этих функций $n$ через $2n$:

$$\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{a+\frac{1}{2}}\frac{1\cdot 2\cdots n}{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(a+\frac{1}{2}+n\right)}$$

$$\Gamma(2a)=\lim_{n\to\infty}(2n)^{2a}\frac{1\cdot 2\cdots(2n)}{2a(2a+1)(2a+2)\cdots(2a+2n)}$$

и рассмотрим выражение:

$$2^{2a-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)}=\lim_{n\to\infty}2^{2a-1}\times$$

$$\times\frac{n^{2a+\frac{1}{2}}(n!)^2\,2a(2a+1)(2a+2)(2a+3)\cdots(2a+2n)}{(2n)^{2a}(2n)!\,a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(a+\frac{1}{2}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{2a-1}\frac{n^{2a+\frac{1}{2}}(n!)^2\,a(2a+1)(a+1)(2a+3)\cdots(a+n)2^{2n+2}}{n^{2a}(2n)!\,a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(2a+1)(2a+3)\cdots(2a+2n+1)2^{2a}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2n^{\frac{1}{2}}}{(2n)!(2a+2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2a+2n+1}$$

**или, так как второй предел правой части равен единице,**

$$2^{2a-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Правая часть этого равенства не зависит от $a$; следовательно, не зависит от $a$ и его левая часть, то есть рассматриваемое нами выражение имеет одно и то же значение при всех значениях $a$; полагая $a=\frac{1}{2}$ и вспоминая, что

$$\Gamma(1)=1;\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}.$$

Подставляя это значение предела в предыдущее равенство, получаем следующую *формулу удвоения*, называемую также *формулой Лежандра*:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \text{ или } \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)= \\ =(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2a}\,\Gamma(2a). \tag{4.8}$$

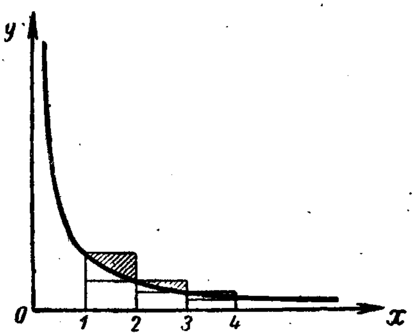
Таким же образом, при помощи (4.2), может быть выведена формула

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)= \\ =(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na), \tag{4.9}$$

выражающая *теорему умножения* для гамма-функции*.

## § 5. Формула Вейерштрасса; логарифмическая производная гамма-функции

В некоторые из последующих формул будет входить так называемая Эйлерова постоянная, для определения которой возьмем какое-либо целое, положительное число $n$ и обозначим через $S_n$ площадь, ограниченную равносторонней гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью $Ox$ и ординатами, соответствующими абсциссам $x=1$ и $x=n$ (черт. 2), через $Q_n$ — общую площадь прямоугольников основания которых равны единице, а высоты равны $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n-1}$, и через $q_n$ — общую площадь прямоугольников с теми же основаниями, но с высотами, равными $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}$:



Черт. 2

* Формулу удвоения (4.8) легко получить из формулы (1.9); в самом деле, при помощи равенства (2.2) формулу (1.9) можно представить в виде

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)},$$

откуда, после сокращения на $\Gamma(a)$ и после замены $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ через $\sqrt{\pi}$, сразу же приходим к формуле удвоения (4.8). Однако, из (1.9) не получается непосредственно теорема умножения для гамма-функции.

$$S_n = \ln n;\quad Q_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1};$$
$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Так как при любом $n$

$$q_n < S_n < Q_n;\quad Q_n - S_n < Q_{n+1} - S_{n+1};$$
$$Q_n - S_n < Q_n - q_n = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

то переменная

$$v_n = Q_n - S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n,$$

значения которой изображаются на черт. 2 заштрихованной площадью, при увеличении $n$ возрастает, но остается при этом меньше единицы и, следовательно, имеет конечный предел $C$, совпадающий, очевидно, с пределом переменной

$$u_n = v_n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Этот предел и называется *Эйлеровой постоянной*, которая, таким образом, определяется формулой:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}5772156\ldots^{*} \tag{5.1}$$

Докажем теперь, что

$$e^C = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}, \tag{5.2}$$

где $C$ — Эйлерова постоянная.

В самом деле, частичное произведение $P_n$ может быть представлено в виде:

$$P_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{C+\ln n+\alpha_n}}{n+1} =$$
$$= e^C\,\frac{n}{n+1}\cdot e^{\alpha_n},$$

где

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - C$$

---

* О вычислении Эйлеровой постоянной см. [4], стр. 826.

есть величина бесконечно малая.

Переходя к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(e^C \cdot \frac{n}{n+1} \cdot e^{\alpha_n}\right) = e^C,$$

мы и убеждаемся в справедливости формулы (5.2).

Возводя обе части формулы (5.2) в степень $a$:

$$e^{Ca} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{a}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a} \tag{5.3}$$

и перемножая полученное равенство с равенством (4.3):

$$e^{Ca}\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{a}{n}}}{1+\frac{a}{n}},$$

приходим к следующей *формуле Вейерштрасса*:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{Ca} \cdot a \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}. \tag{5.4}$$

Выведем еще формулу для *логарифмической производной* от гамма-функции, часто используемую в приложениях теории Эйлеровых интегралов. Из формулы Вейерштрасса, взятой в виде:

$$\Gamma(a) = e^{-Ca}\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{a}{n}}}{1+\frac{a}{n}}, \tag{5.5}$$

имеем:

$$\ln\Gamma(a) = -Ca - \ln a + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a}{n} - \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]$$

и, после дифференцирования по $a$,

$$[\ln\Gamma(a)]' = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C - \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right) = -C - \frac{1}{a} + a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)}. \tag{5.6}$$

После вторичного дифференцирования по $a$ получаем формулу:

$$[\ln \Gamma(a)]'' = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}. \qquad (5.7)$$

При $a=1$ формула (5.6) принимает вид:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Но

$$\Gamma(1) = 1 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1;$$

следовательно,

$$\Gamma'(1) = -C. \qquad (5.8)$$

Логарифмируя, далее, равенство (2.3):

$$\ln \Gamma(a+1) = \ln \Gamma(a) + \ln a$$

и дифференцируя полученный результат по $a$, находим для логарифмической производной от гамма-функции следующую рекуррентную формулу:

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{a}. \qquad (5.9)$$

Полагая в этой формуле $a=1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$, имеем:

$$\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{1} = -C + 1$$

$$\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} + \frac{1}{2} = -C + 1 + \frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \frac{1}{k} = -C + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Таким образом,

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = -C + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (5.10)$$

## § 6. Некоторые приложения гамма-функции

Применим гамма-функцию к вычислению интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \, dx,$$

где $n$ и $m$ — целые, неотрицательные числа.

Подстановка

$$\sin^2 x = u,$$

при которой

$$\sin^n x = (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}} = u^{\frac{n}{2}}; \quad \cos^m x = (\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} =$$

$$= (1 - \sin^2 x)^{\frac{m}{2}} = (1-u)^{\frac{m}{2}};$$

$$du = 2\sin x \cos x\, dx = 2(\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} dx = 2u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}} dx;$$

$$dx = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du;$$

$$\text{если } x = 0, \text{ то } u = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2}, \text{ то } u = 1,$$

дает:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{\frac{m-1}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}-1} (1-u)^{\frac{m+1}{2}-1} du$$

или [см. (1.1)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \tag{6.1}$$

и, на основании (2.2), окончательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x\, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2} + 1\right)}. \tag{6.2}$$

Так как $\frac{n+1}{2}$, $\frac{m+1}{2}$ и $\frac{n+m}{2}+1$ — либо целые числа, либо половины целых чисел, то последовательное применение формулы (2.3) приводит при вычислении $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{n+m}{2} + 1\right)$ или к $\Gamma(1) = 1$, или к $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Применим теперь гамма-функцию к выводу формулы Стирлинга, дающей, в частности, приближенное значение факториала $n!$ при больших значениях $n$. Но предварительно рассмотрим нужную для этого вывода функцию $v=\varphi(u)$, определяемую равенствами:

$$v=\varphi(u)=\begin{cases}+\sqrt{u-\ln(1+u)} & \text{при } u\geqslant 0\\ -\sqrt{u-\ln(1+u)} & \text{при } -1<u\leqslant 0.\end{cases} \qquad (6.3)$$

Очевидно, что в интервале $(-1, +\infty)$ функция $v=\varphi(u)$ непрерывна, монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении $u$ от $-1$ до $+\infty$, а при $u=0$ обращается в нуль.

Если $u>0$, то и $\sqrt{u-\ln(1+u)}>0$, откуда

$$\frac{dv}{du}=\varphi'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u-\ln(1+u)}}\left(1-\frac{1}{1+u}\right)=$$

$$=\frac{1}{2(1+u)}\cdot\frac{u}{\sqrt{u-\ln(1+u)}}>0;$$

если же $u<0$, то и $\sqrt{u-\ln(1+u)}<0$, откуда следует, что $\frac{dv}{du}>0$ и при $u<0$.

Так как, далее,

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{1}{4(1+u)^2}\cdot\frac{u^2}{u-\ln(1+u)},$$

то

$$\lim_{u\to0}\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\lim_{u\to0}\left[\frac{1}{4(1+u)^2}\cdot\frac{u^2}{u-\ln(1+u)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\frac{1}{(1+u)^2}\lim_{u\to0}\frac{u^2}{u-\ln(1+u)}=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\frac{u^2}{u-\ln(1+u)}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\frac{2u}{1-\frac{1}{1+u}}=\frac{1}{4}\lim_{u\to0}\frac{2}{\frac{1}{(1+u)^2}}=\frac{1}{2}$$

Таким образом, производная $\frac{dv}{du}=\varphi'(u)$, непрерывная и положительная во всем интервале $(-1, +\infty)$, удовлетворяет условию:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=0}=\varphi'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (6.4)$$

Из предыдущего следует, что существует обратная функция $u=\psi(v)$, определенная в интервале $(-\infty, +\infty)$, непрерывная и монотонно-возрастающая в этом интервале, обращающаяся в нуль при $v=0$ и удовлетворяющая условию:

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_{v=0} = \psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} = \sqrt{2}\,. \tag{6.5}$$

Переходя к выводу формулы Стирлинга, к интегралу, входящему в формулу

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx, \tag{6.6}$$

применим подстановку

$$x = a(1+u);\ dx = a\,du,$$

при которой

если $x=0$, то $u=-1$; если $x=\infty$, то $u=\infty$;

тогда эта формула примет вид:

$$\Gamma(a+1) = a^{a+1}e^{-a}\int_{-1}^{\infty}[(1+u)\,e^{-u}]^a\,du. \tag{6.7}$$

К полученному интегралу применим подстановку

$$u = \psi(v);\ du = \psi'(v)\,dv,$$

где $\psi(v)$ есть рассмотренная выше обратная функция, удовлетворяющая условиям:

если $u=-1$, то $v=-\infty$; если $u=+\infty$, то $v=+\infty$

Замечая, что [см. (6.3)]

$$v^2 = u - \ln(1+u) = \ln\frac{e^u}{1+u}\,,$$

откуда

$$e^{-v^2} = (1+u)\,e^{-u},$$

формулу (6.7) приводим к виду:

$$\Gamma(a+1) = a^{a+1}e^{-a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-av^2}\,\psi'(v)\,dv. \tag{6.8}$$

Применим, наконец, подстановку

$$v = \frac{t}{\sqrt{a}}\,;\ dv = \frac{dt}{\sqrt{a}}\,,$$

при которой пределы интегрирования не изменяются и которая дает для $\Gamma(a+1)$ формулу:

$$\Gamma(a+1) = a^{a+\frac{1}{2}}e^{-a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)dt, \tag{6.9}$$

откуда

$$\frac{\Gamma(a+1)}{a^a\, e^{-a}\sqrt{a}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)dt.$$

Переходя к пределу при $a\to\infty$ (то есть при $\frac{t}{\sqrt{a}}\to 0$) и замечая, что в рассматриваемом случае возможен переход к пределу под знаком интеграла*, при помощи (6.5) находим:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(a+1)}{a^a\, e^{-a}\sqrt{a}}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\lim_{a\to\infty}\psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\psi'(0)\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{2}\sqrt{\pi},$$

откуда

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(a+1)}{a^a\, e^{-a}\sqrt{2\pi a}}=1. \tag{6.10}$$

Эту формулу, называемую *формулой Стирлинга*, можно взять и в виде:

$$\Gamma(a+1)=a^a\, e^{-a}\sqrt{2\pi a}\,(1+\varepsilon_a), \tag{6.11}$$

где величина $\varepsilon_a$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{a\to\infty}\varepsilon_a=0. \tag{6.12}$$

Если $a$ достаточно велико, то можно положить $\varepsilon_a\approx 0$ и считать, следовательно, что

$$\Gamma(a+1)\approx a^a\, e^{-a}\sqrt{2\pi a}. \tag{6.13}$$

Вычисление $\Gamma(a+1)$ удобнее производить при помощи логарифмов по формуле:

$$\lg\Gamma(a+1)\approx a(\lg a-\lg e)+\frac{1}{2}(\lg 2+\lg\pi+\lg a). \tag{6.14}$$

Полагая в (6.13) $a=n$, где $n$ есть целое, положительное число, и вспоминая, что $\Gamma(n+1)=n!$, получаем следующую приближенную формулу для факториала $n!$ при больших значениях $n$:

---

* Это вытекает из того, что при $a\to\infty$ подынтегральная функция остается ограниченной [см. (6.5)].

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \tag{6.15}$$

вместо которой при вычислениях удобнее пользоваться формулой:

$$\lg n! \approx n(\lg n - \lg e) + \frac{1}{2}(\lg 2 + \lg \pi + \lg n). \tag{6.16}$$

Укажем без вывода, что более точное значение факториала $n!$ дает формула:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288 n^2} - \frac{139}{51\,840\, n^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{571}{248\,8320\, n^4} + \dots\right)^*, \tag{6.17}$$

использовать которую для вычисления $n!$ можно, несмотря на то, что ряд, стоящий в скобках, является расходящимся.

## § 7. Аналитическое продолжение гамма-функции в комплексную область

Как известно из теории функций комплексного переменного, всякая функция, регулярная в некоторой области, полностью определяется ее значениями в сколь угодно малом участке этой области, которым в частности, может быть сколь угодно малый кусок какой-либо линии, расположенный в рассматриваемой области.

Если же на комплексной плоскости $(z)$ имеется такой кусок $l$ некоторой линии $L$, что каждой точке его соответствует значение функции $f(z)$, и рассматривается какая-либо область $E$, содержащая кусок $l$, то может оказаться: 1) что не существует никакой функции, регулярной во всей области $E$ и совпадающей на $l$ с функцией $f(z)$, или 2) что существует *единственная* функция $\varphi(z)$, регулярная во всей области $E$ и совпадающая на $l$ с функцией $f(z)$; тогда функция $\varphi(z)$ однозначно определяется во всей области $E$ через свои значения на куске $l$ линии $L$ [то есть, что то же самое, — через значения на $l$ функции $f(z)$] и рассматривается, как *аналитическое продолжение* функции $f(z)$ в область $E$.

Если какая-либо функция $f(x)$ вещественного независимого переменного $x$ (которая может иметь не только вещественные, но и комплексные значения) задана на отрезке оси абсцисс $Ox$, определенном неравенствами $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то, рассматривая ось абсцисс $Ox$, как вещественную ось комплексной плоскости $(z)$ и принимая эту ось за линию $L$, а указанный отрезок вещественной оси за кусок $l$ линии $L$, можно поставить задачу об *ана-*

* Аналогичная формула для $\Gamma(a+1)$ получается из (6.17) путем замены $n$ через $a$ и $n!$ через $\Gamma(a+1)$.

*литическом продолжении функции $f(x)$ вещественного независимого переменного $x$ в комплексную область*; эта область будет состоять, очевидно, из всех точек комплексной плоскости $(z)$, в которых окажется регулярной функция $f(z)$ комплексного переменного $z$, полученная в результате аналитического продолжения функции $f(x)$ вещественного переменного $x$, причем, если такое аналитическое продолжение функции $f(x)$ вообще сможет быть осуществлено, то оно обязательно явится единственным.

Рассмотрим теперь функцию $\Gamma(z)$, определяемую формулой:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt=\int_0^\infty e^{(z-1)\ln t-t}dt, \tag{7.1}$$

в которой будем считать $t$ вещественным и положительным, а значение $\ln t$ — вещественным, и которую можно взять в виде

$$\Gamma(z)=\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\int_0^1 e^{(z-1)\ln t-t}\,dt+$$
$$+\int_1^\infty e^{(z-1)\ln t-t}\,dt \tag{7.2}$$

Замечая, что $e^{(z-1)\ln t-t}$ является непрерывной функцией от $z$ и $t$ при любом $z$ и при любом $t\geqslant 1$ и — целой функцией от $z$ при всех значениях $t\geqslant 1$* (при которых $\ln t\geqslant 0$), будем рассматривать только те значения $z=x+yi$, которые принадлежат к какой-либо ограниченной замкнутой области $E$ комплексной плоскости $(z)$, и обозначим через $x_0$ наибольшее значение $x$ в этой области; тогда для всех значений $z$, принадлежащих к области $E$, будем иметь:

$$|t^{z-1}e^{-t}|=|e^{(z-1)\ln t-t}|=|e^{[(x-1)\ln t-t]+iy\ln t}|=|e^{(x-1)\ln t-t}|\cdot|e^{iy\ln t}|=$$
$$=|e^{(x-1)\ln t-t}|\cdot|\cos(y\ln t)+i\sin(y\ln t)|=$$
$$=|e^{(x-1)\ln t-t}|\leqslant e^{(x_0-1)\ln t-t}=t^{x_0-1}e^{-t},$$

то есть в области $E$ интеграл $\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ относительно $z$ сходится равномерно.

Из сказанного следует, что функция

$$\varphi_2(z)=\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt=\int_1^\infty e^{(z-1)\ln t-t}\,dt \tag{7.3}$$

регулярна внутри области $E$ и что в правой части формулы (7.3), определяющей функцию $\varphi_2(z)$, дифференцирование по $z$ можно

---

* Напомним, что целой функцией называется функция, регулярная на всей комплексной плоскости $(z)$.

роизводить под знаком интеграла*. Но область $E$ была выб-
рана произвольно; следовательно, эти свойства функции $\varphi_2(z)$ имеют место и для всей комплексной плоскости $(z)$, то есть $\varphi_2(z)$ представляет собою *целую* функцию, допускающую дифференцирование по $z$ под знаком интеграла.

Так как далее,

$$(\ln t)_{t=0} = -\infty,$$

о при $t=0$ подынтегральная функция в интеграле

$$\varphi_1(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 e^{(z-1)\ln t - t}\, dt \tag{7.4}$$

может оказаться разрывной. Однако, из рассмотрения модуля подынтегральной функции.

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |t^{(x-1)+yi} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}$$

можно сделать вывод, что при $t=0$ у подынтегральной функции разрыва не будет, если $x>1$, а так как справа от прямой $x=1$ подынтегральная функция регулярна при всех значениях $t \geqslant 0$, то, рассуждая так же, как и в случае функции $\varphi_2(z)$, можно утверждать, что функция $\varphi_1(z)$ регулярна справа от прямой $x=1$ и что в правой части формулы (7.4) дифференцирование по $z$

следует, что функцию $\Gamma(z)$ можно рассматривать, как аналити ческое продолжение гамма-функции $\Gamma(x)$ в правую комплекс ную полуплоскость $(z)$.

Обращаясь к аналитическому продолжению функции $\Gamma(z)$ і левую полуплоскость, вспомним прежде всего, что в промежутк $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция $e^{-t}$ может быть представлена равномерно сходящимся рядом:

$$e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}$$

Умножая обе части этого равенства на $t^{z-1}$:

$$t^{z-1} e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}$$

и интегрируя результат умножения по $t$ в пределах от 0 до 1 получим:

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{t^{n+z}}{n+z}\right]_0^1$$

Если точка $z=x+yi$ находится справа от мнимой оси, т $\operatorname{Re}(n+z)=n+x>0$ и $(t^{n+z})_{t=0}=0$; следовательно,

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} \quad (\operatorname{Re} z>0)$$

и формула (7.2) для функции $\Gamma(z)$ принимает вид:

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+\int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt. \qquad (7.5)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (7.5), определяе как было указано выше, целую функцию; что же касается вхо дящего в формулу (7.5) бесконечного ряда, то наличие факто риалов $n!$ в знаменателях его членов указывает на абсолютну и равномерную сходимость этого ряда во всякой ограниченно части плоскости $(z)$, но при условии, что будет отброшено соот ветствующее число первых членов ряда, имеющих полюсы в точ ках

$$z=0,-1,-2,\ldots-n,\ldots \qquad (7.6)$$

Таким образом, формула (7.5) определяет функцию, регуляр ную на всей комплексной плоскости $(z)$ — за исключением точе (7.6), и если формулой (7.1) функция $\Gamma(z)$ была определен только справа от мнимой оси, то формула (7.5) дает аналитиче ское продолжение функции $\Gamma(z)$ на всю комплексную плоскость $(z)$.

Формула (7.5) показывает также, что $\Gamma(z)$ представляет собою *мероморфную* функцию с простыми полюсами в точках (7.6), причем вычет $a_{-1}^{(n)}$ в полюсе $z=-n$ равен $\frac{(-1)^n}{n!}$:

$$a_{-1}^{(n)} = \operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{7.7}$$

В заключение отметим, что принцип аналитического продолжения позволяет считать справедливыми для всей комплексной плоскости $(z)$ все формулы, выведенные для гамма-функции в предыдущих параграфах.

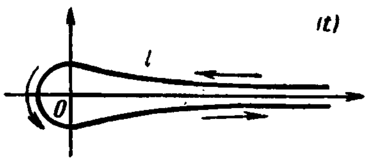
## § 8. Представление гамма-функции контурным интегралом

В § 7 было установлено, что справа от мнимой оси, то есть при $\operatorname{Re} z>0$ гамма-функция определяется формулой:

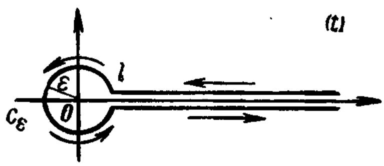
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{(z-1)\ln t - t} dt, \tag{8.1}$$

в которой до сих пор $t$ считалось вещественным.

Полагая теперь, что $t$ есть комплексное переменное, и заме-




Черт. 3




Черт. 4

чая, что точка $t=0$ является точкой разветвления для функции $e^{(z-1)\ln t - t}$, мы можем рассматривать эту функцию, как однозначную, если на плоскости $(t)$ сделаем разрез по положительной части вещественной оси от точки $t=0$ до точки $t=+\infty$, причем края разреза можно считать чуть-чуть раздвинутыми. По теореме Коши, интеграл

$$\int_l t^{z-1} e^{-t} dt = \int_l e^{(z-1)\ln t - t} dt$$

будет иметь одно и то же значение для любого по форме контура $l$, охватывающего точку $t=0$ и с концами, уходящими в $+\infty$ (черт. 3). В частности, можно считать, что контур $l$ образован отрезком $(+\infty, \varepsilon)$ верхнего края указанного разреза, окружнотью $C_\varepsilon$ (радиуса $\varepsilon$ и с центром в точке $t=0$) и отрезком ($\varepsilon$, $-\infty$) нижнего края этого разреза (черт. 4).

Считая, далее, что на верхнем крае разреза $\ln t$ имеет вещественное значение, и замечая, что тогда на нижнем крае разреза $\ln t$ заменится через $\ln t+2\pi i$, где $\ln t$ также является вещественным, получим:

$$\int\limits_l t^{z-1} e^{-t} dt = \int\limits_{+\infty}^{\varepsilon} t^{z-1} e^{-t} dt + \int\limits_{C_\varepsilon} t^{z-1} e^{-t} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

ак как на нижнем крае разреза $t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$ заменится через

$$e^{(z-1)(\ln t+2\pi i)} = e^{(z-1)\ln t} \cdot e^{(z-1)2\pi i} = e^{2(z-1)\pi i}\, t^{z-1}.$$

На окружности $C_\varepsilon$

$$|t| = \varepsilon;$$

оэтому

$$\left|t^{z-1}\right| = \left|e^{(z-1)\ln t}\right| = \left|e^{(x+iy-1)(\ln|t|+i\arg t)}\right| =$$
$$= \left|e^{[(x-1)\ln|t|-y\arg t]+[(x-1)\arg t+y\ln|t|]i}\right| = \left|e^{(x-1)\ln|t|-y\arg t}\right| \times$$
$$\times \left|e^{[(x-1)\arg t+y\ln|t|]i}\right| = e^{(x-1)\ln|t|}\, e^{-y\arg t} =$$
$$= |t|^{x-1} e^{-y\arg t} = \varepsilon^{x-1} e^{-y\arg t}$$

если положим

$$\underset{\text{на } C_\varepsilon}{\text{макс}} \left|e^{-y\arg t-t}\right| = M,$$

це $M$ есть конечная постоянная величина, то будем иметь:

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon} t^{z-1} e^{-t} dt\right| \leqslant \int\limits_{C_\varepsilon} \left|t^{z-1} e^{-t}\right| dt = \int\limits_{C_\varepsilon} \left|\varepsilon^{x-1}\right| \cdot \left|e^{-(y\arg t+t)}\right| dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{x-1} M \int\limits_{C_\varepsilon} dt = \varepsilon^{x-1} M\, 2\pi\varepsilon = 2\pi M \varepsilon^{x},$$

ткуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} t^{z-1} e^{-t} dt = 0,$$

о есть в пределе при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_l t^{z-1} e^{-t} dt = \int\limits_{+\infty}^{0} t^{z-1} e^{-t} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int\limits_{0}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

ли, так как $e^{-2\pi i}=1$, то

$$\int\limits_l t^{z-1}e^{-t}\,dt = -\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt + e^{2z\pi i}\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

и

$$\int\limits_l t^{z-1}e^{-t}\,dt = (e^{2z\pi i}-1)\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{8.2}$$

Но интеграл, стоящий в правой части этого равенства, выражает гамма-функцию $\Gamma(z)$ [см. (8.1)]; следовательно,

$$\int\limits_l t^{z-1}e^{-t}\,dt = (e^{2z\pi i}-1)\,\Gamma(z), \tag{8.3}$$

откуда

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2z\pi i}-1}\int\limits_l t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{8.4}$$

В формуле (8.4) интеграл, вычисляемый по контуру $l$, не проходящему через точку $t=0$, представляет собою целую функцию от $z$, в чем легко убедиться, рассуждая так же, как и при рассмотрении функции $\varphi_2(z)$ в § 7; целой функцией от $z$ является, очевидно, и знаменатель $e^{2z\pi i}-1$ в формуле (8.4). Таким образом, формулой (8.4) определяются те две целые функции, отношением которых представляется $\Gamma(z)$, являющаяся, как было указано в § 7, функцией мероморфной.

Функция $e^{2z\pi i}-1$ обращается в нуль при всех целых значениях $z$ (положительных и отрицательных) и при $z=0$. Если $z$ есть число целое и положительное, то, по теореме Коши, и

$$\int\limits_l t^{z-1}e^{-t}\,dt=0,$$

так как в этом случае подынтегральная функция $t^{z-1}e^{-t}$ является однозначной и регулярной на всей комплексной плоскости $(t)$, откуда следует, что точки $z=1, 2, 3, \ldots$ не являются полюсами функции $\Gamma(z)$. Если же $z$ равно нулю или целому отрицательному числу, то функция $t^{z-1}e^{-t}$ не является целой функцией от $t$ и интеграл от нее, взятый по контуру $l$, не обращается в нуль, откуда следует, что точки $z=0, -1, -2, -3, \ldots$ являются полюсами функции $\Gamma(z)$.

Таким образом, принцип аналитического продолжения позволяет считать формулу (8.4) справедливой для всей комплексной плоскости $(z)$, а не только для полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, как это было установлено сначала.

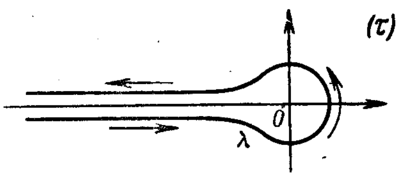
Представим теперь в виде контурного интеграла функцию $\frac{1}{\Gamma(z)}$. С этой целью, заменим в формуле (8.3) $z$ через $1-z$, приняв при этом во внимание, что $e^{2\pi i}=1$:

$$\int_l t^{-z} e^{-t}\, dt = (e^{-2z\pi i} - 1)\, \Gamma(1-z) \tag{8.5}$$

и к полученному интегралу применим подстановку:

$$t = e^{\pi i}\tau = -\tau;\quad dt = -d\tau,$$

при которой плоскость $(t)$ с разрезом по положительной части вещественной оси путем поворота ее на угол $(-\pi)$ преобразуется в плоскость $(\tau)$ с разрезом по отрицательной части вещественной оси, причем верхнему краю разреза на плоскости $(t)$, для которого $\arg t = 0$, будет соответствовать нижний край разреза на плоскости $(\tau)$, [так как на нижнем крае последнего должно быть $\arg(e^{\pi i}\tau) = 0$, то есть $\arg e^{\pi i} + \arg\tau = 0$ или $\pi + \arg\tau = 0$, откуда $\arg\tau = -\pi$]; следовательно, контур $l$ перейдет в контур $\lambda$ (черт. 5) и наша подстановка даст:



Черт. 5

$$\int_l t^{-z} e^{-t} dt = -\int_\lambda (e^{\pi i}\tau)^{-z} e^{\tau}\, d\tau = -e^{-z\pi i}\int_\lambda \tau^{-z} e^{\tau} d\tau,$$

а формула (8.5) приведется к виду:

$$-e^{-z\pi i}\int_\lambda \tau^{-z} e^{\tau}\, d\tau = (e^{-2z\pi i} - 1)\,\Gamma(1-z),$$

откуда

$$\frac{e^{z\pi i} - e^{-z\pi i}}{2i}\,\Gamma(1-z) = \frac{1}{2i}\int_\lambda \tau^{-z} e^{\tau}\, d\tau$$

или

$$\sin z\pi \cdot \Gamma(1-z) = \frac{1}{2i}\int_\lambda \tau^{-z} e^{\tau}\, d\tau.$$

Но, по формуле дополнения (4.6),

$$\sin z\pi \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\Gamma(z)};$$

следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\lambda \tau^{-z} e^{\tau}\, d\tau. \tag{8.6}$$

## § 9. Об асимптотическом представлении функций

Бесконечный ряд

$$a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+a_3 z^{-3}+\cdots \tag{9.1}$$

дает так называемое *асимптотическое представление* функции $f(z)$, определенной на полупрямой $l$, если при $z$, стремящемся к бесконечности по этой полупрямой, выполняется условие:

$$\lim_{z\to\infty}\,[f(z)-S_n(z)]\,z^n=0, \tag{9.2}$$

равносильное тому, что при $z\to\infty$ разность $f(z)-S_n(z)$ оказывается бесконечно малой величиной порядка более высокого, чем $z^{-n}$, то есть чем последний член суммы

$$S_n(z)=a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_n z^{-n} \tag{9.3}$$

первых $n+1$ членов ряда (9.1), причем число $n$ считается фиксированным, хотя и может быть выбрано произвольно.

При этих условиях ряд (9.1) называется *асимптотическим рядом* для функции $f(z)$ при больших значениях $|z|$. Отметим здесь, что асимптотические ряды обычно оказываются расходящимися. Но тем не менее, взяв соответствующее (конечное) число членов асимптотического ряда, можно получить сколь угодно точное значение представляемой им функции при достаточно большом $|z|$.

Тот факт, что ряд (9.1) дает асимптотическое представление функции $f(z)$ на полупрямой $l$, выражают формулой:

$$f(z)\sim a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots \tag{9.4}$$

или равносильной ей формулой:

$$\lim_{z\to\infty}\,[f(z)-(a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_n z^{-n})]\,z^n=0. \tag{9.5}$$

Если в формуле (9.5) положим последовательно $n=0, 1, 2, \ldots$, то получим равенства:

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-a_0]=0$$

$$\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-a_0-\frac{a_1}{z}\right]z=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-a_0-\frac{a_1}{z}-\frac{a_2}{z^2}-\cdots-\frac{a_n}{z^n}\right]z^n=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

из которых последовательно же определяются коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \lim_{z\to\infty} f(z) \\
a_1 &= \lim_{z\to\infty} [f(z) - a_0]\, z \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_n &= \lim_{z\to\infty} \left[f(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}\right)\right] z^n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad (9.6)$$

Так как формулами (9.6) коэффициенты асимптотического ряда определяются единственным образом, то и само асимптотическое разложение данной функции является единственным (если, разумеется, оно вообще существует).

Часто оказывается более удобным искать асимптотическое представление функции $f(z)$ в виде формулы:

$$f(z) \sim \varphi(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \ (|z| \to \infty). \quad (9.7)$$

понимаемой в том смысле, что установлены равенства:

$$f(z) = \varphi(z) \left[\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} + r_N(z)\right], \quad (9.8)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция от $z$ (заранее не известная), $a_0=1$, $N=0, 1, 2, \dots$ и $z^N r_N(z) \to 0$ (равномерно) при $|z| \to \infty$.

В частности, при $N=0$ формула (9.8) принимает вид:

$$f(z) = \varphi(z)\,[1 + r_0(z)]. \quad (9.9)$$

Если при $z \to z_0$ остаток $r_N(z)$ имеет порядок не больший, чем некоторая функция $\psi(z)$, то есть если в окрестности точки $z_0$ имеет место неравенство $|r_N(z)| \leqslant K \cdot |\psi(z)|$, где $K$ — некоторая постоянная, то полагают:

$$r_N(z) = O\,[\psi(z)], \quad (9.10)$$

где $O[\psi(z)]$ обозначает такую величину, что отношение $\frac{O\,[\psi(z)]}{\psi(z)}$ остается ограниченным при $z \to z_0$. При рассмотрении асимптотических разложений следует, очевидно, полагать $z_0=\infty$.

Укажем без доказательства на следующие свойства асимптотических разложений: 1) асимптотическое разложение произведения двух функций может быть получено путем формального перемножения асимптотических разложений этих функций; 2) если функция имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена, содержащего $z^{-2}$, то это разложение можно формально проинтегрировать в промежутке от $z$ до $\infty$; однако, формальное почленное дифференцирование асимптотического разложения, вообще говоря, является незаконным; 3) если функция имеет асимптотическое разложение без свободного члена, то его можно формально потенцировать*.

В заключение отметим, что за полупрямую $l$, на которой считается определенной функция $f(z)$, в частности, может быть принята положительная часть вещественной оси, откуда следует, что все вышеизложенное может быть отнесено и к функциям вещественного переменного; в случае же функции комплексного переменного, эта функция может быть определена не на полупрямой, а в некотором секторе $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, то есть все вышеизложенное может быть отнесено и к сектору, но при условии, что $|z| \to \infty$ по всем направлениям, входящим в этот сектор.

## § 10. Асимптотическое представление гамма-функции

Асимптотическое разложение при $z \to \infty$ для гамма-функции может быть получено из интегральной формулы для ее логарифмической производной. К выводу этой формулы мы прежде всего и обратимся.

Принимая во внимание, что

$$\lim_{b\to 0} \frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b} = \frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a)\,;\ \lim_{b\to 0}[b\,\Gamma(b)] =$$

$$= \lim_{b\to 0}\Gamma(b+1) = \Gamma(1) = 1;\quad \lim_{b\to 0}\Gamma(a+b) = \Gamma(a),$$

и вспоминая формулу (2.2), выразим логарифмическую производную от гамма-функции через гамма-функцию и бэта-функцию:

$$\frac{d\ln\Gamma(a)}{da} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to 0}\left[\frac{\Gamma(b)\cdot b}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\right] =$$

$$= \lim_{b\to 0}\left[\Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\right] = \lim_{b\to 0}\,[\Gamma(b) - \mathrm{B}(a,b)],$$

откуда, на основании (2.1) и (1.10),

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to 0}\int_0^\infty x^{b-1}\left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]dx. \qquad (10.1)$$

Вблизи от значений $x=0$ и $b=0$ функция $\frac{1}{x}\left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]$ непрерывна по отношению к $x$ и $b$, а $x^b<1$; если же $x$ достаточно велико, а $b \leqslant b_0$, то имеется мажоранта $x^{b_0-1}\left[\frac{1}{(1+x)^a} - e^{-x}\right]$; следовательно, в рассматриваемом случае возможен предельный переход под знаком интеграла:

---

* См. [4], стр. 823.

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \lim_{b\to 0}\left\{x^{b-1}\left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]\right\}dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x(1+x)^a}\right]dx. \qquad (10.2)$$

или

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_\delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^a}\right].$$

Применяя ко второму интегралу подстановку

$$1 + x = e^t;\ dx = e^t dt,$$

при которой

$$x = e^t - 1;\ (1+x)^a = e^{at};$$

$$t = \ln(1+\delta) \text{ при } x = \delta;\ t = \infty \text{ при } x = \infty,$$

имеем

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \frac{e^{-at}}{e^t - 1}\,e^t\,dt\right] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \frac{e^{-at}}{1 - e^{-t}}\,dt\right] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\ln(1+\delta)}^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}\right)dt + \int_\delta^{\ln(1+\delta)} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]$$

и так как

$$\lim_{\delta\to 0}\ln(1+\delta) = \ln 1 = 0,$$

то

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}\right)dt. \qquad (10.3)$$

Переходя теперь к выводу асимптотического представления гамма-функции, заменим в формуле (10.3) $a$ через $z+1$, причем под $z$ будем подразумевать комплексное переменное, вещественная часть которого положительна ($\mathrm{Re}\, z > 0$) [очевидно, что формула (10.3), выведенная нами для вещественного переменного, по принципу аналитического продолжения может быть распространена на всю комплексную полуплоскость, расположенную справа от мнимой оси].

В результате указанной замены получим:

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-(z+1)t}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{e^t - 1} \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-zt}\, dt - \int_0^\infty \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-zt}\, dt.$$

Но

$$\int \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t} dt = \ln z^{*} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{1}{2z};$$

следовательно,

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \ln z + \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-zt}\, dt \tag{10.4}$$

или

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \ln z + \frac{1}{2z} - \int_0^\infty F(t)\, t e^{-zt}\, dt, \tag{10.5}$$

если положить

$$F(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t}. \tag{10.6}$$

Интегрируя равенство (10.5) по $z$ в пределах от 1 до $z$ и принимая во внимание, что

$$\int_1^z \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} dz = [\ln \Gamma(z+1)]_1^z = [\ln \Gamma(z) + \ln z]_1^z = \ln \Gamma(z) + \ln z$$

$$\int_1^z \ln z dz = [z \ln z]_1^z - \int_1^z dz = z \ln z - z + 1;$$

$$\frac{1}{2} \int_1^z \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} [\ln z]_1^z = \frac{1}{2} \ln z;$$

$$\int_1^z \left\{ \int_0^\infty F(t)\, t e^{-zt}\, dt \right\} dz = \int_0^\infty \left\{ \int_1^z e^{-zt}\, dz \right\} F(t)\, t dt =$$

---

* Этот несобственный интеграл относится к типу так называемых *интегралов Фруллани*, о вычислении которых см. [4], стр. 633.

$$= \int_0^\infty \left[ -\frac{e^{-zt}}{t} \right]_1^z F(t)\, t dt = - \int_0^\infty (e^{-zt} - e^{-t}) F(t)\, dt,$$

получим:

$$\ln \Gamma(z) + \ln z = z \ln z - z + 1 + \frac{1}{2} \ln z + \int_0^\infty (e^{-zt} - e^{-t})\, F(t)\, dt,$$

откуда

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + 1 + \int_0^\infty (e^{-zt} - e^{-t})\, F(t)\, dt. \quad (10.7)$$

Полагая в формуле (10.7) $z = \frac{1}{2}$ и вспоминая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, имеем:

$$\ln \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\right) F(t)\, dt,$$

откуда

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} F(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-t} F(t)\, dt = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2}. \quad (10.8)$$

Применяя ко второму интегралу подстановку

$$t = \frac{t_1}{2}; \quad dt = \frac{dt_1}{2},$$

при которой пределы интегрирования не изменяются, получим:

$$\int_0^\infty e^{-t} F(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{t_1}{2}} F\left(\frac{t_1}{2}\right) dt_1;$$

следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} F(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-t} F(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} F(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} F\left(\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} \left[ F(t) - \frac{1}{2} F\left(\frac{t}{2}\right) \right] dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} + \frac{2}{t} - \frac{1}{e^{\frac{t}{2}} - 1} \right] \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} \left[ \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} - \right.$$

$$-\frac{e^{\frac{t}{2}}+1}{\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{t}{2}}+1\right)}\Bigg]\frac{dt}{t}=\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t},$$

откуда

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}F(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-t}F(t)\,dt+\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{e^{-t}}{e^t-1}+\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}-\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t}.$$

Но

$$\frac{e^{-t}}{2}+\frac{e^{-t}}{e^t-1}-\frac{1}{e^t-1}=\frac{1-e^{-t}+2e^{-t}-2}{2(e^t-1)}=$$

$$=\frac{-1+e^{-t}}{2(e^t-1)}=-\frac{e^{-t}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{e^{-t}}-1}{e^t-1}=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-1}{e^t-1}=-\frac{e^{-t}}{2};$$

следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}F(t)\,dt=\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-t}}{t^2}+\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^2}-\frac{e^{-t}}{2t}\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-t}}{t^2}+\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^2}+\frac{-2e^{-t}+e^{-t}}{2t}+\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2t}-\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2t}\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{\left[-\left(\frac{t}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}+te^{-t}\right]-\left(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}\right)}{t^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}}{2t}\right\}dt=\int_0^\infty\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right)+\frac{e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}}{2t}\right]dt=$$

$$=\left[-\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}}{t}\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (10.8):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\int_0^\infty e^{-t}F(t)\,dt=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2},$$

приходим к равенству:

$$\int_0^\infty e^{-t} F(t)\,dt = 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi, \tag{10.9}$$

при помощи которого формула (10.7) приводится к виду:

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int_0^\infty e^{-zt} F(t)\,dt \tag{10.10}$$

или

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \omega(z), \tag{10.11}$$

где

$$\omega(z) = \int_0^\infty e^{-zt} F(t)\,dt \tag{10.12}$$

или, если положить

$$u = F(t);\ du = F'(t)\,dt \text{ и } dv = e^{-zt}\,dt;\ v = -\frac{e^{-zt}}{z}$$

и применить формулу интегрирования по частям,

$$\omega(z) = \frac{1}{z}\left\{\left[-F(t)\,e^{-zt}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-zt} F'(t)\,dt\right\},$$

откуда

$$\omega(z) = \frac{1}{z}\left[F(0) + \int_0^\infty e^{-zt} F'(t)\,dt\right]. \tag{10.13}$$

Но

$$F(0) = \frac{1}{12}\,^{*} \text{ и } F'(t) \leqslant 0^{**}, \text{ то есть } |F'(t)| = -F'(t),$$

---

* В этом легко убедиться путем приведения правой части формулы (10.6) к общему знаменателю и трехкратного применения правила Лопиталя.

** Путем логарифмирования первого из равенств (3.9) с предварительной заменой в нем $x$ через $|x|$ и почленного дифференцирования результата логарифмирования легко получается формула:

$$\operatorname{cth}|x| = \frac{1}{|x|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|x|}{|x|^2 + n^2\pi^2}.$$

Заменяя в этой формуле $|x|$ через $\frac{t}{2}$ $(t>0)$, имеем:

а вследствие равномерной сходимости рассматриваемого интеграла

$$\lim_{z\to\infty}\left|\int_0^\infty e^{-zt}F'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty (\lim_{z\to\infty} e^{-zt})|F'(t)|dt < -\int_0^\infty F'(t)\,dt =$$

$$= -[F(t)]_0^\infty = F(0)$$

Следовательно, при $z\to\infty$ формула (10.13) дает:

$$|\omega(z)| \leqslant \frac{2F(0)}{|z|} = \frac{1}{6|z|}. \tag{10.14}$$

Перейдем теперь в формуле (10.11) от логарифмов к числам:

$$\Gamma(z) = e^{\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi}\cdot e^{\omega(z)} \tag{10.15}$$

или

$$\Gamma(z) = e^{\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi}\cdot[1 + O(z^{-1})], \tag{10.16}$$

---

$$\operatorname{cth}\frac{t}{2} = \frac{2}{t} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2+4n^2\pi^2}$$

или, на основании формул Эйлера,

$$\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{2}{t} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2+4n^2\pi^2}$$

или

$$\frac{e^t+1}{e^t-1} = \frac{2}{t} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2+4n^2\pi^2},$$

откуда

$$\left(\frac{e^t+1}{e^t-1} - \frac{2}{t}\right)\frac{1}{2t} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}$$

и, после элементарных преобразований,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right)\frac{1}{t} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2},$$

то есть [см. формулу (10.6)]

$$F(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}.$$

Эта формула показывает, что при возрастании $t$ функция $F(t)$ монотонно убывает, откуда и следует, что $F'(t) \leqslant 0$.

если положить

$$e^{\omega(z)} = 1 + r(z), \tag{10.17}$$

где, как следует из (10.14), $r(z)$ при $|z| \to \infty$ есть величина порядка $z^{-1}$:

$$r(z) = O(z^{-1}). \tag{10.18}$$

Формула (10.16) и дает *асимптотическое представление гамма-функции* при $|z| \to \infty$, причем, как следует из предыдущего, формула эта справедлива для сектора $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant +\frac{\pi}{2}$, то есть справа от мнимой оси.

Не производя подробных выкладок, отметим, что для сектора $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \pi - \alpha$, где $\alpha$ есть сколь угодно малое положительное число, в справедливости формулы (10.16) легко убедиться, если, заметив, что в этом случае $\arg z = \arg(-z) + \pi$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(-z) \leqslant -\alpha$ и $\ln(-z) = \ln z - \pi i$, взять формулу дополнения (4.6), положить в ней $\Gamma(a) = \Gamma(z); \Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ и заменить $\Gamma(-z)$ ее выражением по формуле (10.16), а $\sin \pi z$ — его выражением по формуле Эйлера. Доказав таким же образом справедливость формулы (10.16) и для сектора $-(\pi - \alpha) \leqslant \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2}$, убедимся в том, что формула (10.16) дает асимптотическое представление гамма-функции при всех значениях $z$, удовлетворяющих условиям: $|\arg z| \leqslant \pi - \alpha$ и $|z| \gg 1$.

В заключение отметим, что при $z$, равном достаточно большому, целому, положительному числу $n$, формула (10.16) [или (10.15)] обращается в формулу Стирлинга (6.15). Чтобы убедиться в этом, достаточно в формуле (10.15) заменить $z$ через $n$, умножить обе части этой формулы на $n$ и, вспомнив, что $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) = n!$, предположить, что $n \to \infty$, то есть, как следует из условия (10.14), что $\omega(n) \to 0$.

## ГЛАВА II

# ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

## § 11. Основные определения

Считая в дифференциальном уравнении

$$(t^2 + At + B)\frac{d^2y}{dt^2} + (Ct + D)\frac{dy}{dt} + Ey = 0 \qquad (11.1)$$

числа $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ вещественными, а корни $t_1$ и $t_2$ многочлена $t^2+At+B$ вещественными и различными, положим

$$t = -(t_1 - t_2)x + t_1, \qquad (11.2)$$

откуда

$$dt = -(t_1 - t_2)\,dx;\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t_1 - t_2}\frac{dy}{dx};\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{(t_1 - t_2)^2}\frac{d^2y}{dx^2};$$

$$t - t_1 = -(t_1 - t_2)x;\ t - t_2 = (1 - x)(t_1 - t_2);$$

$$t^2 + At + B = (t - t_1)(t - t_2) =$$

$$= -x(1 - x)(t_1 - t_2)^2 = x(x - 1)(t_1 - t_2)^2;$$

$$Ct + D = Ct_1 + D - C(t_1 - t_2)x;$$

тогда уравнение (11.1) приведется к виду:

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{Ct_1 + D}{t_1 - t_2} - Cx\right)\frac{dy}{dx} + Ey = 0.$$

Полагая, далее,

$$\frac{Ct_1 + D}{t_1 - t_2} = \gamma;\ C = \alpha + \beta + 1;\ E = \alpha\beta;\ \frac{dy}{dx} = y';\ \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \qquad (11.3)$$

получим окончательно:

$$x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]\,y' + \alpha\beta\,y = 0. \qquad (11.4)$$

Уравнение (11.4) называется *гипергеометрическим уравнением* или *уравнением Гаусса* и содержит три параметра: $\alpha, \beta, \gamma$, из которых два — $\alpha$ и $\beta$ — входят в это уравнение симметрично.

Решения гипергеометрического уравнения (11.4) мы будем искать в виде рядов:

$$y = A_0 x^r + A_1 x^{r+1} + A_2 x^{r+2} + \dots + A_k x^{r+k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k}, \tag{11.5}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} y' &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)\, x^{r+k-1} \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k-2} \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Подстановка рядов (11.5) и (11.6) в уравнение (11.4) дает:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1)\, x^{r+k} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1)\, x^{r+k-1} +$$
$$+ (\alpha+\beta+1) \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k) x^{r+k} - \gamma \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k) x^{r+k-1} +$$
$$+ \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k} = 0.$$

Постоянные $A_1, A_2, A_3, \dots$ могут быть определены методом неопределенных коэффициентов, в соответствии с которым следует приравнять к нулю коэффициенты при всех последовательных степенях $x$. Приравнивая к нулю коэффициент при $x^{r-1}$, получаем уравнение:

$$A_0 r (r-1) + \gamma A_0 r = 0$$

или, так как можно считать $A_0 \neq 0$,

$$r (r - 1 + \gamma) = 0, \tag{11.7}$$

откуда для $r$ находим следующие два значения:

$$r_1 = 0; \; r_2 = 1 - \gamma; \tag{11.8}$$

частные решения уравнения (11.4), соответствующие этим значениям $r$, обозначим через $y_1$ и $y_2$.

При $r = r_1 = 0$ формулы (11.5) и (11.6) принимают вид:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k; \; y_1' = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k x^{k-1}; \; y_1'' = \sum_{k=0}^{\infty} k (k-1) A_k x^{k-2}. \tag{11.9}$$

Подставляя ряды (11.9) в уравнение (11.4):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k (k-1) A_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k (k-1) A_k x^{k-1} + (\alpha+\beta+1) \sum_{k=0}^{\infty} k A_k x^k -$$

$$-\gamma\sum_{k=0}^{\infty} kA_k x^{k-1}+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k=0$$

и приравнивая к нулю коэффициенты при $x^0$, $x$, $x^2$, ... $x^k$, ..., получаем уравнения:

$$-\gamma A_1+\alpha\beta A_0=0$$
$$-2A_2+(\alpha+\beta+1)A_1-2\gamma A_2+\alpha\beta A_1=0$$
$$2A_2-3\cdot 2A_3+2(\alpha+\beta+1)A_2-3\gamma A_3+\alpha\beta A_2=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$k(k-1)A_k-(k+1)kA_{k+1}+k(\alpha+\beta+1)A_k-(k+1)\gamma A_{k+1}+\alpha\beta A_k=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

или

$$\gamma A_1-\alpha\beta A_0=0$$
$$2(\gamma+1)A_2-(\alpha+1)(\beta+1)A_1=0$$
$$3(\gamma+2)A_3-(\alpha+2)(\beta+2)A_2=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(k+1)(\gamma+k)A_{k+1}-(\alpha+k)(\beta+k)A_k=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

откуда при

$$\gamma\neq 0,-1,-2,\dots -k,\dots \tag{11.10}$$

и

$$A_0=1 \tag{11.11}$$

получаем следующие формулы для коэффициентов $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_k$, ...:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1=\frac{\alpha\beta}{1\gamma}\\
&A_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}A_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}\\
&A_3=\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(\gamma+2)}A_2=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_{k+1}=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}A_k=\\
&\qquad=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k+1)\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+k)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

Обозначая первое частное решение $y_1$ гипергеометрического уравнения (11.4), получаемое при $r=0$, через $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ и заменяя в первом из равенств (11.9) $y_1$ через $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, а $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_k$,... их значениями из формул (11.12), имеем окончательно:

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{1\cdot 2\cdots k\gamma(\gamma+1)\quad\cdots(\gamma+k-1)} x^k + \cdots \qquad (11.13)$$

или

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{l=0}^{k-1}\frac{(\alpha+l)(\beta+l)}{(1+l)(\gamma+l)}\right]x^k. \qquad (11.14)$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (11.13), называется *гипергеометрическим рядом*; функция $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, равная сумме этого ряда и являющаяся первым частным решением гипергеометрического уравнения (11.4), называется *гипергеометрической функцией.*

Применяя к ряду (11.13) признак Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(1+k)(\gamma+k)}x\right| = |x|,$$

убеждаемся в том, что гипергеометрический ряд сходится (абсолютно) при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Отметим без доказательства, что при $x = 1$ гипергеометрический ряд сходится абсолютно, если $\gamma - \alpha - \beta > 0$, и расходится, если $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$, а при $x = -1$ сходится абсолютно, если $\gamma - \alpha - \beta > 0$, сходится неабсолютно, если $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$, и расходится, если $\gamma - \alpha - \beta \leqslant -1$*. Отметим также, что по второй теореме Абеля о степенных рядах**, гипергеометрический ряд сходится равномерно в любом замкнутом интервале $[a, b]$, удовлетворяющем условию $-1 < a < b < +1$ (а при $\gamma - \alpha - \beta > 0$ — условию $-1 \leqslant a < b \leqslant +1$), и что в этом интервале его можно почленно дифференцировать любое число раз.

При $\alpha = 1$ и $\beta = \gamma$ формула (11.14) принимает вид:

$$F(1, \beta, \beta; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k =$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad (11.15)$$

то есть при $\alpha = 1$ и $\beta = \gamma$ гипергеометрический ряд обращается в геометрическую прогрессию; поэтому ряд (11.14) и называется гипергеометрическим.

* См. [4], стр. 331, 346 и 409.
** См. [1], стр. 356.

Для получения второго частного решения $y_2$ гипергеометрического уравнения (11.4) применим подстановку:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= x^{1-\gamma} u \\ y_2' &= x^{1-\gamma} u' + (1-\gamma) x^{-\gamma} u \\ y_2'' &= x^{1-\gamma} u'' + 2(1-\gamma) x^{-\gamma} u' - \gamma (1-\gamma) x^{-\gamma-1} u \end{aligned}\right\}, \quad (11.16)$$

при помощи которой уравнение (11.4) приводится к виду:

$$x(x-1)x^{1-\gamma}u'' + [(\alpha+\beta+1)x + 2(1-\gamma)(x-1) - \gamma]x^{1-\gamma}u' +$$
$$+ \left[(\alpha+\beta+1)(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)x^{-1} - \gamma(1-\gamma)x^{-1} -\right.$$
$$\left. - \gamma(1-\gamma) + \alpha\beta\right] x^{1-\gamma}u = 0$$

или

$$x(x-1)u'' + [(\alpha+\beta-2\gamma+3)x - (2-\gamma]u' +$$
$$+ (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)u = 0,$$

то есть функция $u$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению, в которое вместо параметров $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ входят параметры $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$ и $2-\gamma$.

Следовательно,

$$u = F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ x)$$

и, по первой из формул (11.16),

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ x), \quad (11.17)$$

причем $y_2$ имеет смысл, если [см. (11.10)]

$$2-\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots -k, \ldots \quad (11.18)$$

Легко убедиться в том, что $y_1$ и $y_2$ являются линейно-независимыми решениями уравнения (11.4).

Таким образом, функция

$$y = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma; x) +$$
$$+ C_2 \cdot x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ x), \quad (11.19)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, является общим решением гипергеометрического уравнения (11.4) в области $|x| < 1$ $(x \neq 0)$.

## § 12. Свойства гипергеометрической функции

Коэффициенты ряда (11.13), представляющего гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, могут быть выражены через гамма-функцию. В самом деле, так как, на основании (2.3),

$$\Gamma(s+k) = (s+k-1)(s+k-2)\cdots(s+1)s\Gamma(s),$$

откуда

$$s(s+1)(s+2)\cdots(s+k-1)=\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}, \qquad (12.1)$$

то, полагая $s=\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и принимая во внимание (2.6), формулу (11.13) мы можем взять в виде:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{0!\,\Gamma(\gamma)}+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{1!\,\Gamma(\gamma+1)}x+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{2!\,\Gamma(\gamma+2)}x^2+\cdots+\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{k!\,\Gamma(\gamma+k)}x^k+\cdots\right] \qquad (12.2)$$

или

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{k!\,\Gamma(\gamma+k)}x^k. \qquad (12.3)$$

Формулу (12.3), в которой $|x|<1$, перепишем в виде:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma-\beta)}{k!\,\Gamma(\gamma+k)}x^k$$

или, на основании (2.2),

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!}x^k\,\mathrm{B}(k+\beta,\gamma-\beta)$$

или [см. (1.1)]

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!}x^k\int_0^1 t^{k+\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt,$$

причем для сходимости полученного интеграла при всех значениях $k$ (и, в частности, при $k=0$) должны выполняться условия:

$$\beta>0 \text{ и } \gamma-\beta>0 \qquad (12.4)$$

или

$$\gamma>\beta>0. \qquad (12.5)$$

Далее имеем:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\alpha)}t^{k+\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}x^k\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\alpha)}(tx)^k\right]dt=$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{1\cdot 2\cdots k}(tx)^k\right]dt$$

и так как сумма, стоящая под знаком интеграла, дает разложение в бесконечный ряд функции $(1-tx)^{-\alpha}$, то окончательно:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt. \quad (12.6)$$

Легко убедиться в том, что условия (12.4) можно заменить одним условием:

$$\gamma-\alpha-\beta>0; \quad (12.7)$$

в самом деле, если $\alpha<0$, то $-\alpha>0$ и сложение этого неравенства со вторым из неравенств (12.4) дает неравенство (12.7); если же $\alpha>0$, то из неравенства (12.7) получаем неравенство $\gamma-\beta>\alpha$ — более сильное, чем второе из неравенств (12.4).

Перейдем теперь в равенстве (12.6) к пределу при $x\to 1$, имея в виду, что в правой части этого равенства переход к пределу можно совершить под знаком интеграла (так как при $\gamma>0$, $\beta>0$ и $|x|<1$ интеграл этот сходится равномерно):

$$\lim_{x\to 1}F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\lim_{x\to 1}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 \lim_{x\to 1}\left[t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\right]dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1-\alpha}\,dt = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}B(\beta,\gamma-\beta-\alpha) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}F(\alpha,\beta,\gamma;x) = F(\alpha,\beta,\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \quad (12.8)$$

Если один из параметров $\alpha$ и $\beta$, входящих в гипергеометрическую функцию симметрично, равен какому-либо целому отрицательному числу $-n$, то, как следует из (11.13), гипергеометрический ряд обрывается и обращается в полином степени $n$; если же $\alpha=-n_1$ и $\beta=-n_2$, где $n_1>0$ и $n_2>0$ — целые числа, то гипергеометрический ряд обращается в полином, степень которого равна меньшему из чисел $n_1$ и $n_2$.

При выяснении дальнейших свойств гипергеометрической функции нам придется воспользоваться преобразованием, приводящим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = 0 \qquad (12.9)$$

к такому виду, что сумма первых двух членов его левой части заменится производной по $x$ от произведения некоторой функции на $y'$. Чтобы найти эту функцию, умножим обе части уравнения (12.9) на неизвестную пока функцию $f(x)$:

$$p(x)f(x)\,y'' + q(x)f(x)\,y' + r(x)f(x)\,y = 0$$

и подчиним функцию $f(x)$ условию:

$$p(x)f(x)\,y'' + q(x)f(x)\,y' = \frac{d}{dx}\,[p(x)f(x)\,y'];$$

тогда должно быть

$$p(x)f(x)\,y'' + q(x)f(x)\,y' = p'(x)f(x)\,y' + p(x)f'(x)\,y' + p(x)f(x)\,y''$$

и, следовательно,

$$q(x)f(x) = p'(x)f(x) + p(x)f'(x)$$

или

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{q(x)}{p(x)}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{p(x)}\,e^{\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}, \qquad (12.10)$$

откуда следует, что данное уравнение (12.9) можно взять в форме:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}\cdot y'\right] + \frac{r(x)}{p(x)}\,e^{\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}\cdot y = 0. \qquad (12.11)$$

Применяя это преобразование к гипергеометрическому уравнению (11.4) и замечая, что в рассматриваемом случае

$$p(x) = x(x-1);\quad q(x) = (\alpha+\beta+1)\,x-\gamma;\quad r(x) = \alpha\beta;$$

$$e^{\int\frac{q(x)}{p(x)}dx} = e^{\int\frac{(\alpha+\beta+1)\,x-\gamma}{x(x-1)}dx} = x^{\gamma}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma},$$

приводим гипергеометрическое уравнение (11.4) к виду:

$$\frac{d}{dx}\,[x^{\gamma}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma}y'] + \alpha\beta x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}y = 0. \qquad (12.12)$$

В уравнении (12.12) $y$ обозначает гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$; заменяя $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ через $\alpha+n$, $\beta+n$,

$\gamma+n$, для гипергеометрической функции $F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n; x)$, которую обозначим через $y_n$, вместо уравнения (12.12) получим уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma+n}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}y_n'\right]+$$

$$+(\alpha+n)(\beta+n)x^{\gamma-1+n}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}y_n=0. \qquad (12.13)$$

С другой стороны, в результате $n$-кратного дифференцирования равенства (11.13) получаем следующую формулу для $n$-ой производной от гипергеометрической функции:

$$\frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{1(\gamma+n)}x+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\beta+n)(\beta+n+1)}{1\cdot 2(\gamma+n)(\gamma+n+1)}x^2+\cdots\right] \qquad (12.14)$$

или

$$\frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\times$$

$$\times F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n;\ x)^{*}, \qquad (12.15)$$

то есть $n$-ая производная от гипергеометрической функции с параметрами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ только постоянным множителем отличается от гипергеометрической функции с параметрами $\alpha+n$, $\beta+n$, $\gamma+n$; поэтому формулу (12.13) можно взять в виде:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma+n}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}\frac{dy^{(n)}}{dx}\right]+$$

$$+(\alpha+n)(\beta+n)x^{\gamma-1+n}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}y^{(n)}=0, \qquad (12.16)$$

где, как и выше,

$$y=F(\alpha,\beta,\gamma;x).$$

Полагая в уравнении (12.16) $n=0, 1, 2, \ldots k-1$ и дифференцируя его соответственно $0, 1, 2, \ldots k-1$ раз, получаем равенства:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma}\cdot y'\right]=-\alpha\beta\left[x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\cdot y\right]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x^{\gamma+1}\cdot(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+1}\cdot y''\right]=$$

---

* В частности, при $n=1$ формула (12.15) принимает вид

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma;x)}{dx}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$$

$$= -(\alpha+1)(\beta+1)\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma-1+1}\cdot(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\cdot y'\right]$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[x^{\gamma+2}\cdot(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+2}\cdot y'''\right]=$$

$$= -(\alpha+2)(\beta+2)\frac{d^2}{dx^2}\left[x^{\gamma-1+2}\cdot(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+2}\cdot y''\right]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[x^{\gamma+k-1}\cdot(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+k-1}\cdot y^{(k)}\right]=$$

$$= -(\alpha+k-1)(\beta+k-1)\times$$

$$\times\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left[x^{\gamma-1+k-1}\cdot(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+k-1}\cdot y^{(k-1)}\right],$$

после перемножения которых, после очевидных сокращений и после замены $y$ через $F$ $(\alpha, \beta, \gamma\ ;\ x)$, приходим к формуле:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[x^{\gamma+k-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+k}F^{(k)}\ (\alpha,\beta,\gamma;x)\right]=$$

$$=(-1)^k\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)\times$$

$$\times x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma;x)\ (k=1,2,3,\ldots). \qquad (12.17)$$

## § 13. Выражение некоторых функций через гипергеометрическую функцию

Многие функции, как элементарные, так и специальные, могут быть получены из гипергеометрической функции $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma; x)$ при определенных значениях параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и при соответствующем преобразовании независимого переменного $x$.

Так, например, если

$$\alpha=-n;\ \beta=\gamma;\ x=-x_1, \qquad (13.1)$$

то формула (11.13) принимает вид

$$F(-n,\beta,\beta;x_1)=1+\frac{-n}{1}x_1+\frac{-n(-n+1)}{1\cdot2}x_1^2+$$

$$+\frac{-n(-n+1)(-n+2)}{1\cdot2\cdot3}x_1^3+\cdots,$$

откуда

$$F(-n,\beta,\beta,-x)=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x_2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots,$$

то есть

$$F(-n,\beta,\beta;-x)=F(-n,1,1;-x)=(1+x)^n \qquad (13.2)$$

и, если $x$ заменить через $x-1$

$$F(-n,\beta,\beta;1-x)=F(-n,1,1;1-x)=x^n. \tag{13.3}$$

Если

$$\alpha=\beta=1;\ \gamma=2;\ x=-x_1, \tag{13.4}$$

то [см. (11.13)]

$$F(1,1,2;x_1)=1+\frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}x_1+\frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3}x_1^2+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x_1^3+\cdots,$$

откуда

$$F(1,1,2;-x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right),$$

то есть

$$F(1,1,2;-x)=\frac{1}{x}\ln(1+x). \tag{13.5}$$

Полагая, далее,

$$\alpha=\gamma=1;\ \beta=n;\ x=\frac{x_1}{n}, \tag{13.6}$$

найдем предел гипергеометрической функции при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}F\left(1,n,1;\frac{x_1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1\cdot n}{1\cdot 1}\frac{x_1}{n}+\frac{1\cdot 2\cdot n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\frac{x_1^2}{n^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\frac{x_1^3}{n^3}+\cdots\right)=1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1^2}{2!}+\frac{x_1^3}{3!}+\cdots,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}F\left(1,n,1;\frac{x}{n}\right)=e^x \tag{13.7}$$

(если у $x_1$ опустить значок «1»).

Положим

$$\gamma=\frac{1}{2};\ x=-\frac{x_1^2}{4\alpha\beta} \tag{13.8}$$

и найдем предел гипергеометрической функции при $\alpha\to\infty$ и $\beta\to\infty$:

$$\lim_{\alpha,\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};-\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha,\beta\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{1\cdot 2\cdots k\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)}(-1)^k\times$$

$$\times \frac{x_1^{2k}}{2^{2k}} \frac{1}{\alpha^k \beta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k x_1^{2k}}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot 2^{2k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x_1^{2k}}{2 \cdot 4 \cdots 2k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x_1^{2k}}{(2k)!},$$

то есть

$$\lim_{\alpha, \beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right) = \cos x. \tag{13.9}$$

Если же

$$\gamma = \frac{1}{2}; \; x = \frac{x_1^2}{4\alpha\beta}, \tag{13.10}$$

то

$$\lim_{\alpha, \beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \frac{x_1^2}{4\alpha\beta}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha, \beta \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)} \times$$

$$\times \frac{x_1^{2k}}{2^{2k}} \frac{1}{\alpha^k \beta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x_1^{2k}}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot 2^{2k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1^{2k}}{2 \cdot 4 \cdots 2k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1^{2k}}{(2k)!},$$

то есть

$$\lim_{\alpha, \beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4\alpha\beta}\right) = \operatorname{ch} x. \tag{13.11}$$

Выразим теперь через гипергеометрическую функцию *эллиптический интеграл 1-го рода:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} \times\right.$$

$$\times k^{2r}\sin^{2r}\varphi\Bigg]d\varphi = \frac{\pi}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+r-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}k^{2r}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+r-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}k^{2r}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2r}{2}+1\right)} = \frac{\pi}{2} +$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+r-1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+r-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r\cdot 1\,(1+1)(1+2)\cdots(1+r-1)}\times$$

$$\times k^{2r}\frac{\pi}{2}$$

и окончательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1;k^2\right). \tag{13.12}$$

*Для эллиптического интеграла 2-го рода* имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}k^{2r}\sin^{2r}\varphi\right]d\varphi =$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}+r-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\times$$

$$\times k^{2r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}+r-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}k^{2r}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2r}{2}+1\right)}=\frac{\pi}{2}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}+r-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r\cdot 1\,(1+1)\,(1+2)\cdots(1+r-1)}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+r-1\right)k^{2r}\frac{\pi}{2}$$

и окончательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right).\qquad(13.13)$$

## § 14. Выражение через гипергеометрическую функцию полиномов Лежандра и присоединенных функций

При

$$\alpha=n+1;\ \beta=-n;\ \gamma=1;\ x=\frac{1-x_1}{2}\qquad(14.1)$$

гипергеометрическое уравнение (11.4) принимает вид:

$$\frac{1-x_1}{2}\left(\frac{1-x_1}{2}-1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}\cdot 4+\left[-(n+1-n+1)\frac{1-x_1}{2}+1\right]\times$$

$$\times\frac{dy}{dx_1}\cdot 2-(n+1)ny=0$$

или, если у $x_1$ опустить значок «1» и после упрощений,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0.\qquad(14.2)$$

Считая $n$ числом целым и положительным, решение уравнения (14.2), называемого *уравнением Лежандра*, определим при помощи формулы (12.17), которая в случае $\alpha=n+1$, $\beta=-n$, $\gamma=1$ принимает вид:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(x-1)^nF^{(n)}(n+1,-n,1;x)\right]=$$

$$= (-1)^n (n+1)(n+2)\cdots(n+n)(-n)\times$$
$$\times(-n+1)\cdots(-n+n-1)\,F(n+1,-n,1;x).$$

Так как $n$, по условию, есть число целое, то $F(n+1,-n,1;x)$ представляет собою многочлен степени $n$ [см. (11.13)]:

$$F(n+1,-n,1;x) = 1 + \frac{(n+1)(-n)}{1\cdot 1}x +$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)(-n)(-n+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}x^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdots n}x^n,$$

$n$-ая производная которого отличается от коэффициента правой части предыдущего равенства только множителем $\frac{(-1)^n}{n!}$; сокращая указанное равенство на этот коэффициент и вынося $\frac{(-1)^n}{n!}$ за знак $n$-ой производной, получаем формулу:

$$F(n+1,-n,1;x) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(x-1)^n]$$

или, после замены $x$ через $\frac{1-x}{2}$, $x-1$ соответственно через $-\frac{x+1}{2}$ и $dx^n$ через $\frac{(-1)^n}{2^n}dx^n$,

$$F\left(n+1,-n,1;\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

или, если ввести обозначение:

$$F\left(n+1,-n;1;\frac{1-x}{2}\right) = P_n(x), \tag{14.3}$$

то окончательно:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{14.4}$$

Формула (14.4), называемая *формулой Родрига*, определяет *полином Лежандра n-го порядка,* который и является решением уравнения Лежандра (14.2), то есть решением гипергеометрического уравнения (11.4) при $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$, где $n$ — целое, положительное число, и при замене $x$ через $\frac{1-x}{2}$.

Полагая в формуле Родрига (14.4) $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, получаем следующие полиномы Лежандра:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(x) = 1\\
&P_1(x) = \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x\\
&P_2(x) = \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\\
&P_3(x) = \frac{1}{2^3\cdot 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3] = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (14.5)$$

Положим теперь в гипергеометрическом уравнении (11.4)

$$\alpha = m + n + 1;\ \beta = m - n;\ \gamma = m + 1;\ x = \frac{1 - x_1}{2}, \quad (14.6)$$

где $m$ и $n$ — целые положительные числа; тогда это уравнение примет вид:

$$\frac{1-x_1}{2}\left(\frac{1-x_1}{2} - 1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}4 + [m + 1 - (m + n + 1 + m - n + 1)\times$$

$$\times\frac{1-x_1}{2}\Bigg]\frac{dy}{dx_1}2 + (m + n + 1)(m - n)y = 0$$

или, если произвести упрощения и опустить у $x_1$ значок «1»,

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(m + 1)x\frac{dy}{dx} + [n(n + 1) - m(m + 1)]\,y = 0. \quad (14.7)$$

Полагая, далее,

$$y = (1 - x^2)^{-\frac{m}{2}}u \quad (14.8)$$

и замечая, что тогда

$$y' = m(1 - x^2)^{-\frac{m}{2}-1}xu + (1 - x^2)^{-\frac{m}{2}}u';$$

$$y'' = m\left(\frac{m}{2} + 1\right)(1 - x^2)^{-\frac{m}{2}-2}2x^2u + m(1 - x^2)^{-\frac{m}{2}-1}u +$$

$$+ 2m(1 - x^2)^{-\frac{m}{2}-1}xu' + (1 - x^2)^{-\frac{m}{2}}u'',$$

приводим уравнение (14.7) к виду:

$$(1 - x^2)^{-\frac{m}{2}+1}u'' + [2mx - 2(m + 1)x](1 - x^2)^{-\frac{m}{2}}u' +$$

$$+ \Bigg[m\left(\frac{m}{2} + 1\right)2x^2 + m(1 - x^2) - 2(m + 1)mx^2 +$$

$$+ n(n + 1)(1 - x^2) - m(m + 1)(1 - x^2)\Bigg](1 - x^2)^{-\frac{m}{2}-1}u = 0,$$

откуда

$$(1-x^2)u''-2xu'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]u=0. \qquad (14.9)$$

Уравнение (14.9), называемое *дифференциальным уравнением присоединенных функций,* приведем к виду, определяемому формулой (12.11). Замечая, что в рассматриваемом случае

$$p(x)=1-x^2;\ q(x)=-2x;\ r(x)=n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2};$$

$$\int\frac{q(x)}{p(x)}dx=-\int\frac{2xdx}{1-x^2}=\ln(1-x^2);$$

$$e^{\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}=e^{\ln(1-x^2)}=1-x^2,$$

и применяя формулу (12.11), получаем уравнение:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)u']+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]u=0, \qquad (14.10)$$

которое можно взять вместо уравнения (14.9).

Если $m=0$, то уравнение присоединенных функций (14.9) обращается в уравнение Лежандра (14.2). Полагая $m=0$ в уравнении (14.10), приходим к следующей форме уравнения Лежандра:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)u']+n(n+1)u=0, \qquad (14.11)$$

которая, разумеется, может быть получена и путем непосредственного преобразования уравнения (14.2).

Беря уравнение Лежандра (14.2) в виде:

$$Y''(1-x^2)-Y'\,2x+\lambda Y=0,$$

где

$$\lambda=n(n+1),$$

и дифференцируя его 1, 2, 3, . . . $m$ раз, имеем:

$$Y'''(1-x^2)-2Y''\,2x-Y'\,2+\lambda Y'=0$$

$$Y^{\mathrm{IV}}(1-x^2)-3Y'''\,2x-2Y''\,2-Y''\,2+\lambda Y''=0$$

$$Y^{\mathrm{V}}(1-x^2)-4Y^{\mathrm{IV}}\,2x-3Y'''\,2-2Y'''\,2-Y'''\,2+\lambda Y'''=0$$

$$Y^{\mathrm{VI}}(1-x^2)-5Y^{\mathrm{V}}2x-4Y^{\mathrm{IV}}2-3\cdot 2Y^{\mathrm{IV}}-2Y^{\mathrm{IV}}2-Y^{\mathrm{IV}}2+\lambda Y^{\mathrm{IV}}=0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$Y^{(m+2)}(1-x^2)-2(m+1)xY^{(m+1)}+[\lambda-2(1+2+3+\cdots+m)]Y^{(m)}=0.$$

Применяя к последнему уравнению формулу для суммы членов арифметической прогрессии и заменяя через $n(n+1)$, получаем окончательно:

$$(1-x^2)\,Y^{(m+2)}-2(m+1)\,xY^{(m+1)}+$$
$$+\,[n(n+1)-m(m+1)]\,Y^{(m)}=0 \qquad (14.12)$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (14.7) показывает, что $Y^{(m)}$ является решением уравнения (14.7); следовательно, как вытекает из формулы (14.8), функция

$$u=(1-x)^{\frac{m}{2}}\,Y^{(m)}$$

является решением дифференциального уравнения присоединенных функций (14.9). Но $Y$ есть решение уравнения Лежандра и поэтому представляет собою полином Лежандра $P_n\,(x)$; следовательно,

$$u=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m\,P_n(x)}{dx^m} \qquad (14.13)$$

или, если положить $u=P_{n,m}(x)$ и применить формулу Родрига (14.4),

$$P_{n,m}(x)=\frac{1}{2^n\,n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\,[(x^2-1)^n]\,. \qquad (14.14)$$

Функция $P_{n,m}(x)$ называется *присоединенной функцией порядка $n$, ранга $m$*. Так как при получении $P_{n,m}\,(x)$ дифференцируется многочлен степени $2n$, то

$$P_{n,m}(x)=0\,,\ \text{если}\ m>n\,. \qquad (14.15)$$

Легко убедиться также и в том, что

$$P_{n,0}(x)=P_n(x)\,. \qquad (14.16)$$

Из сказанного следует, что полиному Лежандра порядка $n$ соответствует $n$ присоединенных функций.

Для того, чтобы присоединенную функцию $P_{n,m}(x)$ выразить через гипергеометрическую функцию $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)$, заменим в (14.13) $P_n\,(x)$ по формуле (14.3):

$$P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m}{dx^m}\,F\left(n+1,-n,1\,;\frac{1-x}{2}\right).$$

Применяя, далее, формулу (12.15), имеем:

$$P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)(-n)(-n+1)\cdots(-n+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}\times$$
$$\times F\left(n+1+m,-n+m,1+m;\ \frac{1-x}{2}\right)\frac{(-1)^m}{2^m}=$$

$$= \frac{(-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} (-1)^m (n+1-m)\cdots(n-1)n(n+1)\cdots(n+m)}{2^m\cdot 1\cdot 2\cdots m} \times$$

$$\times F\left(n+m+1, -n+m, 1+m; \frac{1-x}{2}\right),$$

откуда при помощи (12.1) получаем окончательно:

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{2^m \Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)} \times$$

$$\times F\left(n+m+1, m-n, m+1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{14.17}$$

Изучение полиномов Лежандра и присоединенных функций будет продолжено в главе IV, в которой, в частности, будут рассмотрены и вторые частные решения уравнения Лежандра и уравнения присоединенных функций.

## § 15. Выражение через гипергеометрическую функцию цилиндрических функций

Применяя к гипергеометрическому уравнению (11.4) подстановку

$$x = -\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}; \quad dx = -\frac{x_1\,dx_1}{2\alpha\beta}; \quad dx^2 = \frac{x_1^2\,dx_1^2}{4\alpha^2\beta^2}, \tag{15.1}$$

приводим это уравнение к виду:

$$-\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}\left(-\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}-1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}\,\frac{4\alpha^2\beta^2}{x_1^2} +$$

$$+\left[(\alpha+\beta+1)\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}+\gamma\right]\frac{dy}{dx_1}\,\frac{2\alpha\beta}{x_1} + \alpha\beta y = 0$$

или

$$\left(\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}+1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2} + \left[\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\frac{x_1^2}{4}+\gamma\right]\frac{dy}{dx_1}\,\frac{2}{x_1} + y$$

и в пределе при $\alpha\to\infty$ и $\beta\to\infty$

$$\frac{d^2y}{dx_1^2} + \frac{2\gamma}{x_1}\,\frac{dy}{dx_1} + y = 0 \tag{15.2}$$

или

$$xy'' + 2\gamma y' + xy = 0, \tag{15.3}$$

причем значок «1» у $x_1$ опускается.

Представляя искомое решение этого дифференциального уравнения в виде бесконечного ряда:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k}, \tag{15.4}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} y' &= \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) A_k x^{r+k-1} \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) A_k x^{r+k-2} \end{aligned}\right\} \tag{15.5}$$

приводим уравнение (15.3) к виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) A_k x^{r+k-1} + 2\gamma \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) A_k x^{r+k-} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+1} = 0. \tag{15.6}$$

Применяя для определения постоянных $A_1$, $A_2$, $A_3$ . . . метод неопределенных коэффициентов, замечаем, что коэффициенты при всех степенях $x$ должны быть по отдельности равны нулю. Приравнивая к нулю коэффициент при $x^{r-1}$:

$$r(r-1) A_0 + 2\gamma r A_0 = 0$$

и имея в виду, что без уменьшения общности рассуждения можно считать

$$A_0 \neq 0^* \tag{15.7}$$

получаем для определения $r$ следующее уравнение:

$$r(r-1+2\gamma) = 0, \tag{15.8}$$

откуда для $r$ находим два значения:

$$r_1 = 0; \; r_2 = 1 - 2\gamma. \tag{15.9}$$

Рассмотрим сначала частное решение $y_1$ уравнения (15.3), соответствующее значению $r = r_1 = 0$, при котором

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k; \; y_1' = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k x^{k-1}; \; y_1'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} \tag{15.10}$$

и уравнение (15.6) заменяется уравнением:

---

* Так как при вычислении коэффициентов $A_k$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) один из них остается неопределенным, то значение постоянной $A_0$ может быть выбрано произвольно; выбор этот будет сделан ниже.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-1} + 2\gamma \sum_{k=0}^{\infty} k A_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+1} = 0 . \quad (15.11)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $x^0, x, x^2, \ldots$ получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
&+ 2\gamma A_1 = 0\\
2\cdot 1 A_2 + 2\gamma\, 2A_2 + \quad &A_0 = 0\\
3\cdot 2 A_3 + 2\gamma\, 3A_3 + \quad &A_1 = 0\\
4\cdot 3 A_4 + 2\gamma\, 4A_4 + \quad &A_2 = 0\\
5\cdot 4 A_5 + 2\gamma\, 5A_5 + \quad &A_3 = 0\\
6\cdot 5 A_6 + 2\gamma\, 6A_6 + \quad &A_4 = 0\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Так как, по условию (15.7), $A_0 \neq 0$, а по условию (11.10), $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots -k, \ldots$, то для коэффициентов $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, ... из этих уравнений получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 = 0\\
&A_3 = -\frac{A_1}{2\cdot 3(\gamma+1)} = 0\\
&A_5 = -\frac{A_3}{2\cdot 5(\gamma+2)} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_{2k+1} = -\frac{A_{2k-1}}{2(2k+1)(\gamma+k)} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (15.12)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&A_2 = -\frac{A_0}{2(2\gamma+1)}\\
&A_4 = -\frac{A_2}{4(2\gamma+3)} = \frac{A_0}{2\cdot 4(2\gamma+1)(2\gamma+3)}\\
&A_6 = -\frac{A_4}{6(2\gamma+5)} = -\frac{A_0}{2\cdot 4\cdot 6(2\gamma+1)(2\gamma+3)(2\gamma+5)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_{2k} = -\frac{A_{2k-2}}{2k(2\gamma+2k-1)} =\\
&\quad = (-1)^k \frac{A_0}{2\cdot 4\cdots(2k)(2\gamma+1)(2\gamma+3)\cdots(2\gamma+2k-1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (15.13)$$

Беря коэффициент $A_{2k}$ в виде:

$$A_{2k} = \frac{(-1)^k A_0}{2^{2k} k! \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\gamma + \frac{2k-1}{2}\right)} \quad (15.14)$$

и замечая, что первое частное решение $y_1$ уравнения (15.3) существует при условии

$$\gamma \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots -\frac{2k-1}{2}, \ldots, \tag{15.15}$$

для этого частного решения получаем формулу:

$$y_1 = A_0\left[1 - \frac{1}{1!\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(-1)^k}{k!\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\gamma+\frac{2k-1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \ldots\right] \tag{15.16}$$

или

$$y_1 = A_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\gamma+\frac{2k-1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right]. \tag{15.17}$$

Обозначая второе частное решение уравнения (15.3) через $y_2$ и полагая

$$y_2 = x^{1-2\gamma} w, \tag{15.18}$$

откуда

$$y_2' = (1-2\gamma)\, x^{-2\gamma} w + x^{1-2\gamma} w';$$
$$y_2'' = -2\gamma(1-2\gamma) x^{-2\gamma-1} w + 2(1-2\gamma)\, x^{-2\gamma} w' + x^{1-2\gamma} w'',$$

приводим уравнение (15.3) к виду:

$$-2\gamma(1-2\gamma)\, x^{-2\gamma} w + 2(1-2\gamma)\, x^{1-2\gamma} w' + x^{2-2\gamma} w'' +$$
$$+ 2\gamma(1-2\gamma) x^{-2\gamma} w + 2\gamma x^{1-2\gamma} w' + x^{2-2\gamma} w = 0$$

или, после сокращения на $x^{1-2\gamma}$ и после других очевидных упрощений,

$$xw'' + 2(1-\gamma)\, w' + xw = 0 \tag{15.19}$$

откуда вытекает, что функция $w$ удовлетворяет уравнению (15.3), но при условии замены в нем $\gamma$ через $1-\gamma$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя $A_0'$*, на основании формул (15.18) и (15.17),

$$y_2 = A_0' x^{1-2\gamma}\left[1 + \right.$$

* Значение $A_0'$ будет выбрано ниже.

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\left(-\gamma+\frac{3}{2}\right)\left(-\gamma+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\gamma+\frac{2k+1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\Bigg], \qquad (15.20)$$

причем должно быть

$$\gamma\neq\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ldots\frac{2k+1}{2},\ldots \qquad (15.21)$$

Возвращаясь к уравнению (15.3), применим к нему подстановку

$$y=x^{-\nu}u, \qquad (15.22)$$

где $\nu$ обозначает какое угодно постоянное число; тогда

$$y'=-\nu x^{-\nu-1}u+x^{-\nu}u';$$

$$y''=\nu(\nu+1)x^{-\nu-2}u-2\nu x^{-\nu-1}u'+x^{-\nu}u''$$

и уравнение (15.3) принимает вид:

$$\nu(\nu+1)x^{-\nu-1}u-2\nu x^{-\nu}u'+x^{-\nu+1}u''-2\gamma\nu x^{-\nu-1}u+$$
$$+2\gamma x^{-\nu}u'+x^{-\nu+1}u=0$$

или

$$x^{-\nu+1}u''+2(\gamma-\nu)x^{-\nu}u'+[\nu(\nu+1)-2\gamma\nu+x^2]x^{-\nu-1}u=0$$

и, после сокращения на $x^{-\nu-1}$,

$$x^2u''+2(\gamma-\nu)xu'+[x^2+\nu(\nu+1)-2\gamma\nu]u=0. \qquad (15.23)$$

Выберем теперь $\gamma$ так, чтобы коэффициент при $xu'$ был равен единице:

$$2(\gamma-\nu)=1, \qquad (15.24)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&\gamma=\nu+\frac{1}{2};\quad 1-2\gamma=-2\nu\\&\nu(\nu+1)-2\gamma\nu=\nu(\nu+1)-2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\nu-\\&=\nu(\nu+1-2\nu-1)=-\nu^2\end{aligned}\right\} \qquad (15.25)$$

При таком выборе $\gamma$ уравнение (15.23) принимает вид:

$$x^2u''+xu'+(x^2-\nu^2)u=0. \qquad (15.26)$$

Это уравнение называется *уравнением Бесселя.*

Таким образом, подстановка $x=-\frac{x_1^2}{4\alpha\beta}$, переход к пределу при $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$, новая подстановка $y = x_1^{-\nu} u^*$ и выбор для $\gamma$ значения, равного $\nu + \frac{1}{2}$ преобразуют гипергеометрическое уравнение в уравнение Бесселя.

Обозначая через $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ решения уравнения Бесселя (15.26), соответствующие частным решениям $y_1$ и $y_2$ уравнения (15.3), на основании формулы (15.22) имеем:

$$J_\nu(x) = x^\nu y_1; \quad J_{-\nu}(x) = x^\nu y_2,$$

откуда при помощи формул (15.17), (15.20) и (15.25) получаем:

$$J_{-\nu}(x) = A_0 x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k};$$

$$J_{-\nu}(x) = A_0' x^\nu x^{-2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

или, если положить (считая, что $\nu > 0$)

$$A_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}; \quad A_0' = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)} \tag{15.27}$$

и воспользоваться формулой (12.1), то

$$\left.\begin{aligned} J_{-\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ J_{-\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \end{aligned}\right\} \tag{15.28}$$

причем во второй из формул (15.27) и во второй из формул (15.28) следует считать, очевидно, что $\nu$ не является числом целым (см. § 2).

Функции $J(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, определяемые формулами (15.28) и называемые *цилиндрическими или бесселевыми функциями первого рода порядков* $\nu$ *и* $-\nu$, легко могут быть выражены через гипергеометрическую функцию. В самом деле,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

* Напомним, что значок «1» у $x_1$ был нами опущен.

то есть

$$J_\nu(x) = \lim_{\alpha,\beta\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}F\left(\alpha,\beta,\nu+1;-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)\right] \quad (15.29)$$

и

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

то есть

$$J_{-\nu}(x) = \lim_{\alpha,\beta\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}F\left(\alpha,\beta,-\nu+1,-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)\right], \quad (15.30)$$

причем следует считать, что в (15.30) $\nu$ не является числом целым и положительным, а в (15.29) — целым и отрицательным.

Изучение цилиндрических функций будет продолжено в главе III.

В заключение покажем, что при помощи гипергеометрической функции может быть установлена связь цилиндрических функций с присоединенными функциями и полиномами Лежандра.

С этой целью, в формуле (14.17), выражающей присоединенную функцию порядка $n$, ранга $m$, положим:

$$\frac{1-x}{2} = \frac{t^2}{4n^2}, \quad (15.31)$$

откуда

$$x = 1 - \frac{t^2}{2n^2};\quad 1-x^2 = 1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}+\frac{t^4}{4n^4}\right) = \frac{t^2}{n^2}\left(1-\frac{t^2}{4n^2}\right);$$

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} = \frac{t^m}{n^m}\left(1-\frac{t^2}{4n^2}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Вычислим, далее, предел при $n\to\infty$ общего члена гипергеометрического ряда, выражающего гипергеометрическую функцию $F\left(n+m+1,\ m-n,\ m+1;\ \frac{1-x}{2}\right)$, в которой $\frac{1-x}{2}$ заменим через $\frac{t^2}{4n^2}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+m+1)(n+m+2)\cdots(n+m+k)(m-n)(m-n+1)\cdots(m-n+k-1)}{1\cdot 2\cdots k(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(-1)^k\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)n^{2m}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-m)\cdots(n-1)\,n(n+1)\cdots(n+m)}{n^{2m}}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^m}P_{n,m}\left(1-\frac{t^2}{2n^2}\right)\right]=\frac{t^m}{2^m\Gamma(m+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+2k}=J_m(t).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^m}P_{n,m}\left(1-\frac{t^2}{2n^2}\right)\right]=J_m(t) \tag{15.32}$$

и, в частности, при $m=0$:

$$\lim_{n\to\infty}P_n\left(1-\frac{t^2}{2n^2}\right)=J_0(t) \tag{15.33}$$

## § 16. Вырожденная гипергеометрическая функция

Полагая в гипергеометрическом уравнении (11.4)

$$x=\frac{x_1}{\beta};\quad dx=\frac{dx_1}{\beta}, \tag{16.1}$$

приведем это уравнение к виду:

$$\frac{x_1}{\beta}\left(\frac{x_1}{\beta}-1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}\beta^2+\left[(\alpha+\beta+1)\frac{x_1}{\beta}-\gamma\right]\frac{dy}{dx_1}\beta+\alpha\beta y=0,$$

откуда

$$x_1\left(\frac{x_1}{\beta}-1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}+\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+1+\frac{1}{\beta}\right)x_1-\gamma\right]\frac{dy}{dx_1}+\alpha y=0$$

и в пределе, при $\beta\to\infty$,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0, \tag{16.2}$$

где значок «1» у $x_1$ опущен.

Мы получили дифференциальное уравнение так называемой *вырожденной гипергеометрической функции*, которую можно, очевидно, определить формулой:

$$F(\alpha, \gamma; x) = \lim_{\beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x}{\beta}\right) \tag{16.3}$$

или, подробнее,

$$F(\alpha, \gamma; x) = \lim_{\beta \to \infty} \left[1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}\frac{x}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{\beta^2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{1\cdot 2\cdots k\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\frac{x^k}{\beta^k} + \cdots\right] =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{1\cdot 2\cdots k\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}x^k +$$

$$+ \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\alpha+l}{(1+l)(\gamma+l)}\right]x^k. \tag{16.4}$$

Применяя к полученному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{k \to \infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k \to \infty}\left|\frac{\alpha+k}{(1+k)(\gamma+k)}x\right| = 0,$$

видим, что ряд этот сходится при любых значениях $\alpha$, $\gamma$, и $x$ (и притом сходится равномерно в области $|\alpha| \leqslant A$, $|\gamma| \leqslant C$, $|x| \leqslant N$, где $A$, $C$, $N$ — фиксированные достаточно большие числа*).

Повторяя соответствующие рассуждения §11, легко убедиться в том, что, если

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots -k, \ldots, \tag{16.5}$$

то функция $y_1 = F(\alpha, \gamma; x)$ является частным решением дифференциального уравнения (16.2), и в том, что вторым частным решением этого уравнения при

$$2 - \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots -k, \ldots \tag{16.6}$$

является функция

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) =$$

$$= \lim_{\beta \to \infty}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{1-\gamma}F\left(\alpha + 1 - \gamma, \beta_1, 2 - \gamma; \frac{x}{\beta_1}\right)\right], \tag{16.7}$$

где

$$\beta_1 = \beta + 1 - \gamma. \tag{16.8}$$

Отсюда следует, что при

$$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k, \ldots \tag{16.9}$$

---

* Это вытекает из того, что для всех достаточно больших значений $k$

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{\alpha+k}{(1+k)(\gamma+k)}x\right| \leqslant \frac{k+A}{k-C}\,\frac{N}{1+k} < q,$$

где $q$ есть некоторая правильная дробь.

общее решение $y$ уравнения (16.2) определяется формулой:

$$y = C_1 F(\alpha, \gamma; x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) \qquad (16.10)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные*.

Формулу (16.4) можно взять в виде:

$$\Gamma(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{\Gamma(\alpha)}{0!\,\Gamma(\gamma)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{1!\,\Gamma(\gamma+1)} x + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2!\,\Gamma(\gamma+2)} x^2 + \cdots + \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\gamma+k)} x^k + \cdots \right] \qquad (16.11)$$

или

$$F(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\gamma+k)} x^k, \qquad (16.12)$$

откуда

$$F(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma-\alpha)}{k!\,\Gamma(\gamma+k)} x^k =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{B}(\alpha+k, \gamma-\alpha) \frac{x^k}{k!} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^1 t^{\alpha+k-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt,$$

причем для сходимости полученного интеграла при всех значениях $k$ (и, в частности,—при $k=0$) должны выполняться условия:

$$\gamma > \alpha > 0 \qquad (16.13)$$

Далее имеем:

$$F(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} \right) dt$$

и так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} = 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots = e^{tx},$$

то окончательно:

$$F(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{tx} dt. \qquad (16.14)$$

---

* Линейная независимость частных решений $y_1$ и $y_2$ легко устанавливается путем сравнения рядов, выражающих эти решения.

Применяя подстановку

$$t = 1 - s; \ dt = -ds, \tag{16.15}$$

при которой

если $t=0$, то $s=1$ и если $t=1$, то $s=0$, приводим формулу (16.14) к виду:

$$F(\alpha, \gamma; x) = e^x \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 s^{\gamma-\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} e^{-xs}\, ds,$$

то есть

$$F(\alpha, \gamma; x) = e^x F(\gamma-\alpha, \gamma; -x). \tag{16.16}$$

Если ряд (16.4), выражающий вырожденную гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \gamma; x)$, продифференцировать $n$ раз по $x$, то получим формулу:

$$\frac{d^n F(\alpha, \gamma; x)}{dx^n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\alpha+n}{1(\gamma+n)} x + \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{1\cdot 2(\gamma+n)(\gamma+n+1)} x^2 + \cdots \right],$$

откуда

$$\frac{d^n F(\alpha, \gamma; x)}{dx^n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} F(\alpha+n, \gamma+n; x) \tag{16.17}$$

и, в частности, при $n=1$,

$$\frac{dF(\alpha, \gamma; x)}{dx} = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1; x). \tag{16.18}$$

Для вырожденной гипергеометрической функции $F(\alpha, \gamma; x)$ без труда получаются также формулы, аналогичные формулам (12.12), (12.16) и (12.17), выведенным в §12 для гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$.

Через вырожденную гипергеометрическую функцию могут быть выражены многие специальные функции. В качестве примера, выразим через вырожденную гипергеометрическую функцию *интеграл вероятностей*:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \tag{16.19}$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд и производя почленное интегрирование, имеем:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^k}{k!}\right] dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Далее, выражение, полученное для функции $\Phi(x)$, может быть преобразовано следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot\frac{1}{2^k}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)(2k+1)\cdot\frac{1}{2^k}} =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k+1}{2}} =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+k-1\right)} (-x^2)^k,$$

откуда, по определению вырожденной гипергеометрической функции [см. (16.4)], имеем:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{3}{2}$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right). \tag{16.20}$$

## § 17. Особые точки дифференциальных уравнений

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0, \tag{17.1}$$

где $z$ есть комплексное независимое переменное, $w$ — искомая функция, подчиненная начальным условиям:

$$(w)_{z=z_0} = w_0; \quad (w')_{z=z_0} = w_0', \tag{17.2}$$

а коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ — заданные функции от $z$, регулярные в круге

$$|z-z_0|<R \tag{17.3}$$

и представляющиеся, следовательно, в этом круге степенными рядами:

$$\left.\begin{aligned} p(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \\ q(z) &= b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

Тогда, как известно из теории функций комплексного переменного, в круге $|z-z_0|<R$ каждой паре значений постоянных $w_0$ и $w_0'$ соответствует единственное частное решение уравнения (17.1), а общее решение уравнения (17.1), регулярное в круге $|z-z_0|<R$, представляется формулой:

$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2, \tag{17.5}$$

где $w_1$ и $w_2$ — частные решения уравнения (17.1), соответствующие начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} (w_1)_{z=z_0} &= w_{10};\ (w_1')_{z=z_0} = w_{10}' \\ (w_2)_{z=z_0} &= w_{20};\ (w_2')_{z=z_0} = w_{20}' \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

и притом линейно-независимые, то есть имеющие определитель Вронского, отличный от нуля:

$$\Delta(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0; \tag{17.7}$$

значения же постоянных $C_1$ и $C_2$ определяются начальными условиями (17.6) и находятся из уравнений;

$$\left.\begin{aligned} C_1 w_{10} + C_2 w_{20} &= w_0 \\ C_1 w_{10}' + C_2 w_{20}' &= w_0' \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

Если коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ уравнения (17.1) регулярны в некоторой области $E$, то всякая функция $w$, являющаяся решением уравнения (17.1), и представляемая степенным рядом:

$$w = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

где $z_0$ — какая-либо внутренняя точка области $E$, может быть аналитически продолжена по любому пути, находящемуся внутри области $E$, и остается при таком аналитическом продолжении решением данного уравнения. Аналитические продолжения линейно-независимых решений дают решения также линейно-независимые, откуда следует, что формула (17.5) дает выражение аналитического продолжения любого решения уравнения (17.1) через аналитические продолжения двух линейно-независимых решений этого уравнения. Решение $w$ уравнения (17.1), определенное при помощи аналитического продолжения во всей области $E$, будет представлять собою функцию однозначную и регулярную в области $E$, если эта область односвязна; если же область $E$ многосвязна, то решение $w$ уравнения (17.1), вообще говоря, не будет в этой области функцией однозначной.

Если для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ уравнения (17.1) точка $z=z_0$ ($z_0 \neq \infty$) является полюсом или существенно-особой точкой, то в некотором круговом кольце

$$0 < |z - z_0| < R \tag{17.9}$$

с центром в точке $z=z_0$ и сколь угодно малого внутреннего радиуса коэффициенты эти могут быть представлены рядами Лорана:

$$p(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k; \quad q(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k. \tag{17.10}$$

Для решений $w$ уравнения (17.1) точка $z=z_0$ будет, вообще говоря, точкой разветвления, но решения эти можно рассматривать, как однозначные регулярные функции в односвязной области, полученной из кругового кольца (17.9) путем проведения разреза по какому-либо из его радиусов; однако, на противоположных краях разреза эти функции будут иметь, вообще говоря, различные значения.

Возьмем на том крае разреза, от которого начинается обход особой точки $z=z_0$, линейно-независимые решения $w_1$ и $w_2$ уравнения (17.1) и будем считать, что при обходе точки $z=z_0$ эти решения приобретают множители $\lambda_1$ и $\lambda_2$, обращаясь на противоположном крае разреза соответственно в $w_1^*$ и $w_2^*$:

$$w_1^* = \lambda_1 w_1; \quad w_2^* = \lambda_2 w_2. \tag{17.11}$$

Предположим сначала, что

$$\lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{17.12}$$

Так как при обходе особой точки $z=z_0$ функции

$$(z - z_0)^{r_1} = e^{r_1 \ln (z - z_0)} \quad \text{и} \quad (z - z_0)^{r_2} = e^{r_2 \ln (z - z_0)}$$

приобретают множители

$$e^{r_1 2\pi i} = e^{\ln \lambda_1} = \lambda_1 \text{ и } e^{r_2 2\pi i} = e^{\ln \lambda_2} = \lambda_2,$$

где

$$r_1 = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_1 \text{ и } r_2 = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_2 \tag{17.13}$$

($\ln \lambda_1$ и $\ln \lambda_2$ берутся с точностью до слагаемых вида $2m\pi i$, где $m$ есть любое целое число), то отношения

$$\frac{w_1}{(z - z_0)^{r_1}} \text{ и } \frac{w_2}{(z - z_0)^{r_2}}$$

после обхода особой точки $z=z_0$ принимают свои первоначальные значения и являются, следовательно, в окрестности этой точки регулярными и однозначными, откуда вытекает возможность представления этих отношений в окрестности точки $z=z_0$ рядами Лорана:

$$\frac{w_1}{(z-z_0)^{r_1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C'_k (z-z_0)^k; \quad \frac{w_2}{(z-z_0)^{r_2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C''_k (z-z_0)^k$$

Таким образом, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ существует два линейно-независимых решения уравнения (17.1), представляющиеся в окрестности точки $z=z_0$ формулами:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (z-z_0)^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C'_k (z-z_0)^k \\ w_2 &= (z-z_0)^{r_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C''_k (z-z_0)^k \end{aligned}\right\} \qquad (17.14)$$

в которых, как вытекает из формул (17.13), $r_1$ и $r_2$ определены с точностью до слагаемых, являющихся целыми числами.

Если

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad (17.15)$$

и если $w_1$ и $w_2$ по-прежнему обозначают линейно-независимые решения уравнения (17.1), то при обходе особой точки $z=z_0$ отношение $\frac{w_2}{w_1}$ приобретает постоянное слагаемое, которое можно взять в виде $\frac{A_1}{\lambda_1}$, где $A_1 = \text{const}$:

$$\frac{w_2^*}{w_1^*} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{A_1}{\lambda_1}.$$

Но то же постоянное слагаемое приобретает при обходе точки $z=z_0$ (в том же направлении) и функция

$$\frac{A_1}{2\pi i \lambda_1} \ln (z-z_0);$$

следовательно, разность

$$\frac{w_2}{w_1} - \frac{A_1}{2\pi i \lambda_1} \ln (z-z_0)$$

является в окрестности особой точки $z=z_0$ регулярной и однозначной и может быть представлена в этой окрестности рядом Лорана:

$$\frac{w_2}{w_1} - \frac{A_1}{2\pi i \lambda_1} \ln (z-z_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k (z-z_0)^k,$$

откуда

$$w_2 = w_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k (z - z_0)^k + A w_1 \ln (z - z_0),$$

где

$$A = \frac{A_1}{2\pi i \lambda_1}.$$

Замечая, далее, что в рассматриваемом случае $w_1$ по-прежнему представляется первой из формул (17.14) и что, следовательно,

$$w_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C'_k (z - z_0)^k \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C''_k (z - z_0)^k,$$

для линейно-независимых решений уравнения (17.1) в окрестности особой точки $z=z_0$, при $\lambda_1=\lambda_2$, получаем формулы:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (z - z_0)^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C'_k (z - z_0)^k \\ w_2 &= (z - z_0)^{r_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C''_k (z - z_0)^k + A w_1 \ln (z - z_0) \end{aligned}\right\} \quad (17.16)$$

в которых, как и раньше, $r_1$ определено с точностью до постоянного слагаемого, являющегося целым числом.

Если окажется, что $A_1=0$, то будет и $A=0$; в этом случае линейно-независимые решения $w_1$ и $w_2$ уравнения (17.1) в окрестности особой точки $z=z_0$, при $\lambda_1=\lambda_2$, представляются теми же формулами (17.14), что и при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, но взятыми при дополнительном условии: $r_1=r_2$.

Пусть для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$ уравнения (17.1) точка $z=z_0$ является полюсом или существенно-особой точкой. При составлении для этой точки формул (17.14) [или (17.16)] могут представиться следующие две возможности:

1) ряды Лорана, входящие в формулы (17.14) [или (17.16)], содержат конечное число членов с отрицательными степенями разности $z=z_0$; в этом случае точка $z=z_0$ называется *регулярной особой точкой* уравнения (17.1);

2) по крайней мере один из рядов Лорана, входящих в формулы (17.14) [или (17.16)], содержит бесчисленное множество членов с отрицательными степенями разности $z=z_0$; в этом случае точка $z=z_0$ называется *иррегулярной особой точкой* уравнения (17.1).

Необходимое и достаточное условие регулярности особой точки $z=z_0$ состоит в том, что эта точка должна быть полюсом порядка не выше первого для коэффициента $p(z)$ и полюсом порядка не выше второго для коэффициента $q(z)$.

Это условие, доказательства которого мы не приводим*, выполняется, очевидно, только в том случае, когда уравнение (17.1) имеет вид:

$$w'' + \frac{p_1(z)}{z-z_0} w' + \frac{q_1(z)}{(z-z_0)^2} w = 0, \tag{17.17}$$

где $p_1(z)$ и $q_1(z)$ — функции, регулярные не только в окрестности точки $z=z_0$, но и в самой этой точке.

Переходя к определению чисел $r_1$ и $r_2$ и коэффициентов $C'_k$ и $C''_k$ в формулах (17.14), укажем прежде всего, что задача эта может быть решена только в том случае, когда точка $z=z_0$ является регулярной особой точкой уравнения (17.1). Из этого предположения мы и будем исходить при дальнейших рассуждениях.

Так как числа $r_1$ и $r_2$ в формулах (17.14) определены с точностью до постоянных слагаемых, являющихся целыми числами, то путем соответствующего подбора этих целых чисел, всегда можно достигнуть того, что степенные ряды, входящие в формулы (17.14), вовсе не будут содержать членов с отрицательными степенями разности $z-z_0$ и будут начинаться со свободных членов. Другими словами, без уменьшения общности рассуждения, вместо формул (17.14) можно взять формулы:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (z-z_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C'_k (z-z_0)^k; \\ w_2 &= (z-z_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C''_k (z-z_0)^k \end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

и считать при этом, что

$$C'_0 \neq 0 \text{ и } C''_0 \neq 0. \tag{17.19}$$

Освобождаясь, далее, в уравнении (17.17) от знаменателей:

$$(z-z_0)^2 w'' + (z-z_0) p_1(z) w' + q_1(z) w = 0$$

и разлагая функции $p_1(z)$ и $q_1(z)$, регулярные в точке $z=z_0$ и в ее окрестности, в ряды по степеням разности $z-z_0$:

$$p_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k; \quad q_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k,$$

приводим это уравнение к виду:

$$(z-z_0)^2 w'' + (z-z_0)\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\right] w' + \left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k\right] w = 0$$

* См. [3], стр. 358.

или

$$z_1^2 w'' + z_1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k \right) w' + \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k z_1^k \right) w = 0, \tag{17.20}$$

если положить, для краткости,

$$z - z_0 = z_1. \tag{17.21}$$

Предположив, что искомое решение уравнения (17.20) имеет форму:

$$\left.\begin{aligned} w &= z_1^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^{r+k} \\ w' &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k) z_1^{r+k-1}; \\ w'' &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k)(r+k-1) z_1^{r+k-2} \end{aligned}\right\} \tag{17.22}$$

придем к равенству

$$z_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k)(r+k-1) z_1^{r+k-2} + z_1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k \right) \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k) z_1^{r+k-1} \right] + \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k z_1^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^{r+k} \right) = 0. \tag{17.23}$$

Приравнивая, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов, коэффициенты при всех последовательных степенях $z_1$ к нулю, получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} & c_0 [r(r-1) + a_0 r + b_0] = 0 \\ & c_1 [(r+1) r + a_0 (r+1) + b_0] + c_0 (a_1 r + b_1) = 0 \\ & c_2 [(r+2)(r+1) + a_0 (r+2) + b_0] + c_1 [a_1 (r+1) + b_1] + \\ & \qquad + c_0 (a_2 r + b_2) = 0 \\ & c_3 [(r+3)(r+2) + a_0 (r+3) + b_0] + c_2 [a_1 (r+2) + b_1] + \\ & \qquad + c_1 [a_2 (r+1) + b_2] + c_0 (a_3 r + b_3) = 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & c_n [(r+n)(r+n-1) + a_0 (r+n) + b_0] + \\ & \qquad + c_{n-1} [a_1 (r+n-1) + b_1] + \\ & \qquad + c_{n-2} [a_2 (r+n-2) + b_2] + \cdots + c_0 (a_n r + b_n) = 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{17.24}$$

В силу условия (17.19), первое из уравнений (17.24) принимает вид:

$$r(r-1)+a_0r+b_0=0 \qquad (17.25)$$

или

$$r^2+(a_0-1)r+b_0=0. \qquad (17.26)$$

Корни уравнения (17.25), которое называется *определяющим уравнением в особой точке* $z=z_0$, и дают искомые значения чисел $r_1$ и $r_2$.

Все уравнения (17.24), начиная со второго, построены по одному и тому же закону, который может быть выражен формулой;

$$c_n[(r+n)(r+n-1)+a_0(r+n)+b_0]+$$
$$+\sum_{k=1}^{n} c_{n-k}[a_k(r+n-k)+b_k]=0 \quad (n=1,2,3,\ldots). \qquad (17.27)$$

Если $r_1$ есть такой корень определяющего уравнения (17.25), что при всех целых положительных значениях $n$ выполняется условие:

$$(r+n)(r+n-1)+a_0(r+n)+b_0 \neq 0 \quad (n=1,2,3,\ldots), \qquad (17.28)$$

и если значение коэффициента $c_0$, являющегося произвольным, выбрано заранее, то из уравнений (17.24), начиная со второго, можно найти последовательно коэффициенты $c_1$, $c_2$, $c_3,\ldots$, а тем самым будет определено и первое частное решение данного дифференциального уравнения [см. первую из формул (17.22) и формулу (17.21)].

Укажем без доказательства, что ряд, входящий в состав этого решения, сходится в том же круге, что и ряды, входящие в состав коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$.

Если, кроме того, определяющее уравнение (17.25) имеет различные корни ($r_2 \neq r_1$) и притом такие, что их разность не является целым числом, то для второго корня $r_2$ условие (17.28) также выполняется, откуда следует, что в этом случае может быть построено и второе частное решение данного дифференциального уравнения — линейно-независимое с первым частным решением (в силу условия $r_2 \neq r_1$).

Если же $\mathrm{Re}\, r_1 > \mathrm{Re}\, r_2$ и $r_1 - r_2 = m$, где $m$ есть целое положительное число, то, при $r=r_2$ и $n=m$, выражение, стоящее в квадратной скобке первого члена левой части равенства (17.27), обращается в нуль [так как $r_2+m=r_1$ является корнем определяющего уравнения (17.25)], тогда как сумма всех остальных членов левой части этого равенства нулю, вообще говоря, не равна. Отсюда следует, что при $r_1-r_2=m$ ($m$ — целое, положительное число) второе частное решение нужно определять другим способом*.

Точно так же, другим способом нужно находить второе частное решение данного дифференциального уравнения и в том случае, когда определяющее уравнение (17.25) имеет равные корни, то есть когда $r_2=r_1$.

Что же касается первого частного решения $w_1$, то оно всегда определяется по формуле:

$$w_1 = z_1^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k{}^{**}, \tag{17.29}$$

причем коэффициент $c_0$ может быть выбран произвольно, а все остальные коэффициенты $c_1, c_2, c_3, \ldots$ находятся путем последовательного применения формулы (17.27) при $n=1, 2, 3, \ldots$.

Если $r_1=r_2+m$, где $m$ есть целое, положительное число, то для определения второго частного решения $w_2$ может быть использована формула Лиувилля-Остроградского:

$$\bar{w}_2 = Cw_1 \int e^{-\int p(z_1)dz_1} \frac{dz_1}{w_1^2}. \tag{17.30}$$

Беря разложение подынтегральной функции в ряд Лорана, которое, как легко убедиться, должно иметь вид:

$$\frac{e^{-\int p(z_1)dz_1}}{w_1^2} = \frac{\gamma_{-(1+m)}}{z_1^{1+m}} + \cdots + \frac{\gamma_{-1}}{z_1} + \gamma_0 + \gamma_1 z_1 + \cdots,$$

интегрируя этот ряд почленно и умножая результат интегрирования на $w_1$, определяемое формулой (17.29), в которой $r_1$ надлежит заменить через $r_2+m$, для $w_2$ получим формулу:

$$w_2 = z_1^{r_2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k z_1^k + \gamma_{-1} \cdot w_1 \cdot \ln z_1 \, (d_0 \neq 0), \tag{17.31}$$

вполне аналогичную, очевидно, второй из формул (17.16).

Случай равных корней определяющего уравнения ($r_2=r_1$) получается, очевидно, из только что рассмотренного случая, когда разность корней определяющего уравнения считалась равной целому, положительному числу $m$ ($r_1-r_2=m$), если положить $m=0$. Легко проследить, какие изменения это предположение внесет в формулы, относящиеся к случаю $r_1-r_2=m$. Окончатель-

---

* Исключение представляют те частные случаи, когда оказывается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{m-k} \left[ a_k (r+m-k) + b_k \right] = 0,$$

и когда, приняв за $c_m$ любое число и вычислив по формуле (17.27) последующие коэффициенты $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots$, мы все же построим второе частное решение данного дифференциального уравнения, линейно-независимое с первым частным решением.

** Напомним, что $z_1=z-z_0$ [см. (17.21)].

но, второе частное решение $w_2$ при $r_1=r_2$ будет выражаться той же формулой, что и при $r_1=r_2+m$, то есть формулой (17.31).

Удобнее, однако, формулу (17.31) при $m=0$ взять в виде:

$$w_2 = z_1^{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} d_k z_1^k + \gamma_{-1} w_1 \ln z_1 \; (d_0 \neq 0), \qquad (17.32)$$

чтобы было ясно, что при равенстве корней определяющего уравнения $r$ в этой формуле имеет то же значение, что и в формуле (17.29), дающей первое частное решение $w_1$ рассматриваемого дифференциального уравнения.

Следует еще отметить случай, когда корни $r_1$ и $r_2$ определяющего уравнения (17.25) являются целыми, неотрицательными числами и когда, вместе с тем, второе частное решение $w_2$ не содержит логарифма; в этом случае ни первое, ни второе частное решение данного дифференциального уравнения никаких особенностей в регулярной особой точке не имеют.

Докажем теперь, что бесконечно далекая точка $z=\infty$ является регулярной особой точкой уравнения (17.1), если в этой точке коэффициент $p(z)$ имеет корень, а коэффициент $q(z)$ — корень не ниже второго порядка*.

В результате подстановки

$$z = \frac{1}{t}; \quad \frac{dw}{dz} = -t^2 \frac{dw}{dt}; \quad \frac{d^2w}{dz^2} = t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + 2t^3 \frac{dw}{dt}, \qquad (17.33)$$

уравнение (17.1) принимает вид:

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left[2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right] \frac{dw}{dt} + q\left(\frac{1}{t}\right) w = 0 \qquad (17.34)$$

или, после деления всех членов на $t^4$,

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right)\right] \frac{dw}{dt} + \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) w = 0. \qquad (17.35)$$

Если бесконечно далекая точка $z=\infty$ является регулярной особой точкой уравнения (17.1), то точка $t=0$, в которую подстановка (17.33) переводит точку $z=\infty$, должна быть регулярной особой точкой уравнения (17.35) и коэффициенты при $\frac{dw}{dt}$ и $w$ должны иметь в точке $t=0$ полюсы соответственно не выше первого и не выше второго порядка, что может быть только в том случае, когда в окрестности точки $t=0$ функции $p\left(\frac{1}{t}\right)$ и $q\left(\frac{1}{t}\right)$ представляются рядами вида:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{1}{t}\right) &= \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \cdots \\ q\left(\frac{1}{t}\right) &= \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (17.36)$$

---

* Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то точка $z=\infty$ является иррегулярной особой точкой уравнения (17.1).

Отсюда вытекает, что в окрестности точки $z=\infty$ коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ должны представляться рядами:

$$p(z) = \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_3}{z^3} + \cdots; \quad q(z) = \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_3}{z^3} + \frac{\beta_4}{z^4} + \cdots \tag{17.37}$$

Формулы (17.37) и доказывают наше утверждение.

Может оказаться, что бесконечно далекая точка $z=\infty$ не является особой точкой уравнения (17.1). Это будет в том случае, когда в формулах (17.36)

$$\alpha_1 = 2; \quad \beta_2 = \beta_3 = 0 \tag{17.38}$$

и когда, следовательно, уравнение (17.35) имеет вид:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (\alpha_2 + \alpha_3 t + \alpha_4 t^2 + \cdots)\frac{dw}{dt} + \\ + (\beta_4 + \beta_5 t + \beta_6 t^2 + \cdots) w = 0. \tag{17.39}$$

При этих условиях, в окрестности точки $z=\infty$ уравнение (17.1) имеет решение, представляемое рядом:

$$w = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots, \tag{17.40}$$

коэффициенты которого могут быть определены обычным способом; коэффициенты $\gamma_0$ и $\gamma_1$ останутся при этом произвольными.

## § 18. Уравнения класса Фукса; особые точки гипергеометрического уравнения

Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{18.1}$$

называется *уравнением класса Фукса*, если все его особые точки являются регулярными.

Обозначим через $z_1, z_2, \ldots z_n$ особые точки уравнения (18.1), которое мы будем считать уравнением класса Фукса, находящиеся на конечных расстояниях от нулевой точки $z=0$. Так как в точках $z_1, z_2, \ldots z_n$ коэффициент $p(z)$ имеет полюсы не выше первого порядка, а коэффициент $q(z)$ —полюсы не выше второго порядка и так как в точке $z=\infty$ коэффициент $p(z)$ имеет корень, а коэффициент $q(z)$ — корень не ниже второго порядка, то коэффициенты эти должны представлять собою рациональные дроби вида:

$$p(z) = \frac{p_1(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}; \quad q(z) = \frac{q_1(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2\cdots(z-z_n)^2},$$

причем степень числителя $p_1(z)$ первой дроби должна быть по крайней мере на единицу ниже степени ее знаменателя, а степень числителя $q_1(z)$ второй дроби — по крайней мере на две единицы ниже степени ее знаменателя.

Разлагая эти рациональные дроби на элементарные, для коэффициентов уравнения класса Фукса получим формулы:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - z_k}; \quad q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k} \right], \tag{18.2}$$

к которым надлежит добавить условие:

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 0, \tag{18.3}$$

вытекающее из того, что [см. вторую из формул (17.37)]

$$\lim_{z \to \infty} [zq(z)] = 0.$$

Равенства (18.2) и (18.3) выражают необходимые и достаточные условия принадлежности однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка к классу Фукса.

Вспомним, далее, что в определяющем уравнении (17.25), составленном для случая, когда особой точкой является точка $z=z_0$, то есть нулевая точка $z_1=0$, $a_0$ обозначает коэффициент при $z_1^{-1}$ в разложении в ряд коэффициента при $w'$, то есть функции $\frac{1}{z_1} p(z_1)$, а $b_0$ обозначает коэффициент при $z_1^{-2}$ в разложении в ряд коэффициента при $w$, то есть функции $\frac{1}{z_1^2} q(z_1)$ [см. уравнение (17.20) и формулу (17.21)]. Легко сообразить, что определяющее уравнение в особой точке $z_k$ мы получим путем замены в уравнении (17.25) величины $a_0$ коэффициентом при $(z-z_k)^{-1}$ в выражении функции $p(z)$*, то есть величиной $A_k$, а величины $b_0$ — коэффициентом при $(z-z_k)^{-2}$ в выражении функции $q(z)$, то есть величиной $B_k$ [см. формулы (18.2)]:

$$r(r-1) + A_k r + B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{18.4}$$

или

$$r^2 + (A_k - 1) r + B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{18.5}$$

Определяющее уравнение в бесконечно далекой точке $z=\infty$ возьмем в виде:

$$r(r-1) + A_\infty r + B_\infty = 0 \tag{18.6}$$

и постоянные $A_\infty$ и $B_\infty$ найдем при помощи уравнения (17.35) и формул (18.2) и (18.3):

$$A_\infty = \lim_{t \to 0} \left\{ t \left[ \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right) \right] \right\} = \lim_{z \to \infty} \left\{ \frac{1}{z} [2z - z^2 p(z)] \right\} =$$

* Ср. уравнение (17.20) с уравнением (18.1). См. также формулу (17.21).

$$= 2 - \lim_{z\to\infty} [zp(z)] = 2 - \lim_{z\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k z}{z - z_k} = 2 - \sum_{k=1}^{n} A_k;$$

$$B_\infty = \lim_{t\to 0} \left[t^2 \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{z\to\infty} \left[\frac{1}{z^2} z^4 q(z)\right] =$$

$$= \lim_{z\to\infty} [z^2 q(z)] = \lim_{z\to\infty} \left\{z^2 \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{z\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k z^2}{(z - z_k)^2} + \lim_{z\to\infty} \left[z^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{C_k z_k}{z^2} + \frac{C_k z_k^2}{z^3} + \cdots\right)\right]^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B_k + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k = \sum_{k=1}^{n} (B_k + C_k z_k).$$

Таким образом,

$$A_\infty = 2 - \sum_{k=1}^{n} A_k; \quad B_\infty = \sum_{k=1}^{n} (B_k + C_k z_k) \tag{18.7}$$

и определяющее уравнение (18.6) в точке $z = \infty$ принимает вид:

$$r(r-1) + \left(2 - \sum_{k=1}^{n} A_k\right) r + \sum_{k=1}^{n} (B_k + C_k z_k) = 0 \tag{18.8}$$

или

$$r^2 + \left(1 - \sum_{k=1}^{n} A_k\right) r + \sum_{k=1}^{n} (B_k + C_k z_k) = 0. \tag{18.9}$$

Обозначая через $r_k'$, $r_k''$ корни определяющего уравнения в особой точке $z_k$ и через $r_\infty'$, $r_\infty''$ — корни определяющего уравнения в бесконечно далекой точке $z = \infty$ и замечая, что [см. формулы (18.5) и (18.9)]

$$r_k' + r_k'' = 1 - A_k (k = 1, 2, \ldots n); \quad r_\infty' + r_\infty'' = \sum_{k=1}^{n} A_k - 1,$$

---

* Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{z} \left(1 - \frac{z_k}{z}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{z} \left(1 + \frac{z_k}{z} + \frac{z_k^2}{z^2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{n} C_k + \sum_{k=1}^{n} C_k \left(\frac{z_k}{z^2} + \frac{z_k^2}{z^3} + \cdots\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{C_k z_k}{z^2} + \frac{C_k z_k^2}{z^3} + \cdots\right)$$

имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(r'_k+r''_k)+(r'_\infty+r''_\infty)=\sum_{k=1}^{n}(1-A_k)+\sum_{k=1}^{n}A_k-1=$$

$$=n-\sum_{k=1}^{n}A_k+\sum_{k=1}^{n}A_k-1=n-1.$$

Таким образом, в случае уравнения класса Фукса

$$\sum_{k=1}^{n}(r'_k+r''_k)+(r'_\infty+r''_\infty)=n-1, \tag{18.10}$$

то есть сумма всех корней всех определяющих уравнений на единицу меньше числа всех особых точек уравнения класса Фукса, расположенных в конечной части плоскости ($z$).

Выясним теперь, как изменятся корни определяющего уравнения, если к дифференциальному уравнению с особой точкой $z=0$:

$$z^2w''+z\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\right)w'+\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k\right)w=0 \tag{18.11}$$

применить подстановку:

$$\left.\begin{aligned} w&=z^mu;\\ w'&=mz^{m-1}u+z^mu';\\ w''&=m(m-1)z^{m-2}u+2mz^{m-1}u'+z^mu'' \end{aligned}\right\}. \tag{18.12}$$

При помощи этой подстановки данное дифференциальное уравнение (18.11) приводится к виду:

$$z^{m+2}u''+\left(2m+\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\right)z^{m+1}u'+\left[m(m-1)+\right.$$

$$\left.+m\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k\right]z^mu=0$$

или, после деления всех членов на $z^m$,

$$z^2u''+\left(2m+\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\right)zu'+$$

$$+\left[m(m-1)+m\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k\right]u=0. \tag{18.13}$$

Замечая, что для уравнения (18.13) точка $z=0$ также является особой точкой, составим определяющее уравнение в этой особой точке [см. формулу (17.26)]:

$$r'^2 + (a_0' - 1)\, r' + b_0' = 0. \tag{18.14}$$

Но, как вытекает из уравнения (18.13),

$$a_0' = 2m + a_0; \quad b_0' = m(m-1) + ma_0 + b_0; \tag{18.15}$$

следовательно, определяющее уравнение (18.14) можно взять **в виде**:

$$r'^2 + (2m + a_0 - 1)\, r' + [m(m-1) + ma_0 + b_0] = 0$$

или

$$r'^2 + (2m + a_0 - 1)\, r' + [m^2 + m(a_0 - 1) + b_0] = 0. \tag{18.16}$$

С другой стороны,

$$a_0 - 1 = -(r_1 + r_2); \quad b_0 = r_1 r_2, \tag{18.17}$$

где $r_1$ и $r_2$ — корни определяющего уравнения в особой точке $z=0$:

$$r^2 + (a_0 - 1)\, r + b_0 = 0, \tag{18.18}$$

составленного для данного дифференциального уравнения (18.11).

При помощи равенств (18.17) уравнение (18.16) приводится к виду:

$$r'^2 + [2m - (r_1 + r_2)]\, r' + [m^2 - m(r_1 + r_2) + r_1 r_2] = 0$$

или

$$r'^2 - [(r_1 - m) + (r_2 - m)]\, r' + (r_1 - m)(r_2 - m) = 0,$$

откуда

$$r_1' = r_1 - m; \quad r_2' = r_2 - m, \tag{18.19}$$

где $r_1'$ и $r_2'$ — корни определяющего уравнения в особой точке $z=0$, соответствующего преобразованному дифференциальному уравнению (18.13).

Таким образом, корни $r_1'$ и $r_2'$ определяющего уравнения для функции $u = z^{-m} w$ всегда могут быть выражены [по формулам (18.19)] через корни $r_1$ и $r_2$ определяющего уравнения для функции $w$.

Число $m$ в формулах (18.19) может быть выбрано произвольно. В частности, если положить $m = r_2$, то будет $r_1' = r_1 - r_2$ и $r_2' = 0$, то есть искомое решение данного дифференциального уравнения всегда можно преобразовать так, что один из корней определяющего уравнения, соответствующего преобразованному решению, будет равен нулю.

Другое важное преобразование, упрощающее исследование особых точек дифференциального уравнения, состоит в применении дробно-линейной подстановки:

$$z_1 = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{18.20}$$

при помощи которой, путем соответствующего подбора коэффициентов $a$, $b$, $c$, $d$, любые три точки плоскости ($z$) можно перевести в три заранее выбранные точки плоскости ($z_1$). При помощи дробно-линейного преобразования мы можем, в частности, одну особую точку данного дифференциального уравнения (18.1) перевести в бесконечную далекую точку $z_1 = \infty$, другую — в нулевую точку $z_1 = 0$ и третью — в точку $z_1 = 1$.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что соответствующее дробно-линейное преобразование уже выполнено и что независимое переменное снова обозначено через $z$.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи уравнений класса Фукса.

1) *Уравнение класса Фукса с одной особой точкой.* На основании сказанного выше, можно считать, что особой является точка $z = \infty$. Так как особых точек, расположенных в конечной части плоскости ($z$), нет вовсе, то в формулах (18.2) все коэффициенты $A_k$, $B_k$, и $C$ нужно считать равными нулю, откуда вытекает, что

$$p(z) = 0 \text{ и } q(z) = 0;$$

следовательно, дифференциальное уравнение (18.1) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$w'' = 0. \tag{18.21}$$

Это и есть уравнение класса Фукса с одной особой точкой.

2) *Уравнение класса Фукса с двумя особыми точками.* Можно считать, что особыми являются точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$. В конечной части плоскости ($z$) мы имеем одну особую точку; следовательно, в рассматриваемом случае $n = 1$. Определяя коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ по формулам (18.2) и имея в виду условие (18.3), получаем для этих коэффициентов выражения:

$$p(z) = \frac{A_1}{z}; \quad q(z) = \frac{B_1}{z^2};$$

следовательно, дифференциальное уравнение (18.1) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$w'' + \frac{A_1}{z} w' + \frac{B_1}{z^2} w = 0$$

или

$$z^2 w'' + A_1 z w' + B_1 w = 0. \tag{18.22}$$

Таким образом, уравнением класса Фукса с двумя особыми точками является *уравнение Эйлера.*

*3) Уравнение класса Фукса с тремя особыми точками.* Можно считать, что особыми являются точки $z_1=0$, $z_2=1$ и $z_3=\infty$. В этом случае $n=2$ и формулы (18.2) принимают вид:

$$p(z)=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1};\quad q(z)=\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z-1},\qquad(18.23)$$

где, в силу условия (18.3),

$$C_1+C_2=0.\qquad(18.24)$$

Считая, далее, что к искомой функции $w$ уже применена подстановка

$$w=z^{m_1}(z-1)^{m_2}u,\qquad(18.25)$$

в которой постоянные числа $m_1$ и $m_2$ выбраны так, что для преобразованной функции $u$ оказываются равными нулю один корень определяющего уравнения в особой точке $z_1=0$ и один корень определяющего уравнения в особой точке $z_2=1$, мы для преобразованной функции снова берем обозначение $w$ (вместо $u$).

Составим теперь определяющие уравнения для всех трех особых точек рассматриваемого дифференциального уравнения.

Для особой точки $z_1=0$ определяющее уравнение имеет вид:

$$r^2+(A_1-1)r+B_1=0\qquad(18.26)$$

Обозначая корни этого уравнения через $r_1'$ и $r_1''=0$, имеем:

$$r_1'=1-A_1;\quad B_1=0\qquad(18.27)$$

Для особой точки $z_2=1$ определяющее уравнение имеет вид:

$$r^2+(A_2-1)r+B_2=0\qquad(18.28)$$

Обозначая корни этого уравнения через $r_2'$ и $r_2''=0$, имеем:

$$r_2'=1-A_2;\quad B_2=0\qquad(18.29)$$

Так как в конечной части плоскости $(z)$ имеется только две особые точки: $z_1=0$ и $z_2=1$, то для особой точки $z_3=$ определяющее уравнение имеет вид [см. уравнение (18.9) и формулы (18.27) и (18.29)]:

$$r^2+(1-A_1-A_2)r+C_2=0\qquad(18.30)$$

Обозначая корни этого уравнения через $r_3'$ и $r_3''$, имеем:

$$r_3'+r_3''=A_1+A_2-1;\quad r_3'r_3''=C_2\qquad(18.31)$$

Вспоминая, далее, что сумма всех корней всех определяющих уравнений на единицу меньше числа особых точек, расположенных в конечной части плоскости $(z)$, и имея в виду, что в рассматриваемом случае $r_1''=r_2''=0$, получаем соотношение:

$$r_1'+r_2'+r_3'+r_3''=1,\qquad(18.32)$$

откуда, на основании первого из равенств (18.29),

$$r_1' + r_3' + r_3'' = A_2 \tag{18.33}$$

Таким образом, мы имеем следующую систему уравнений [см. формулы (18.27), (18.29), (18.31), (18.24) и (18.33)]:

$$\left.\begin{array}{l} r_1' = 1 - A_1; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = 0; \quad r_3' + r_3'' = A_1 + A_2 - 1; \\ r_3' r_3'' = C_2; \quad C_1 + C_2 = 0; \quad r_1' + r_3' + r_3'' = A_2 \end{array}\right\} \tag{18.34}$$

Если теперь мы положим:

$$r_3' = \alpha; \quad r_3'' = \beta; \quad r_1' = 1 - \gamma, \tag{18.35}$$

где величины $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ будем считать известными, то уравнения (18.34) заменятся уравнениями:

$$\left.\begin{array}{c} 1 - \gamma = 1 - A_1; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = 0; \\ \alpha + \beta = A_1 + A_2 - 1; \\ \alpha\beta = C_2; \quad C_1 + \alpha\beta = 0, \quad 1 - \gamma + \alpha + \beta = A_2 \end{array}\right\},$$

откуда

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = \gamma; & A_2 = 1 - \gamma + \alpha + \beta \\ B_1 = 0 & B_2 = 0 \\ C_1 = -\alpha\beta; & C_2 = \alpha\beta \end{array}\right\} \tag{18.36}$$

Подставляя найденные значения постоянных $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ в формулы (18.23), получаем следующие выражения для коэффициентов $p(z)$ и $q(z)$:

$$p(z) = \frac{\gamma}{z} + \frac{1 - \gamma + \alpha + \beta}{z - 1}; \quad q(z) = -\frac{\alpha\beta}{z} + \frac{\alpha\beta}{z - 1} \tag{18.37}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение класса Фукса с тремя особыми точками должно иметь вид:

$$w'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{1 - \gamma + \alpha + \beta}{z - 1}\right) w' + \left(-\frac{\alpha\beta}{z} + \frac{\alpha\beta}{z - 1}\right) w = 0$$

или, после очевидных преобразований,

$$z(z - 1) w'' + [(\alpha + \beta + 1) z - \gamma] w' + \alpha\beta w = 0 \tag{18.38}$$

Мы получили *гипергеометрическое уравнение*, которое, таким образом, и является уравнением класса Фукса с тремя особыми точками.

Решения $w_{10}(z)$ и $w_{20}(z)$ уравнения (18.38) в окрестности особой точки $z = 0$ представляются, очевидно, формулами (11.13) и (11.17):

$$\left.\begin{array}{c} w_{10}(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z) \\ w_{20}(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; z). \end{array}\right\}, \tag{18.39}$$

которые для комплексных переменных выводятся так же, как и для переменных вещественных, то есть путем представления искомого решения дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена и применения метода неопределенных коэффициентов. Область сходимости гипергеометрических рядов, стоящих в правых частях формул (18.39), представляет собою круг

$$|z| < 1 \quad (z \neq 0) \tag{18.40}$$

[это вытекает из того, что точка $z=1$ является для гипергеометрического уравнения (18.38) особой точкой и притом — ближайшей к рассматриваемой особой точке $z=0$].

Для построения решений $w_{11}(z)$ и $w_{21}(z)$ гипергеометрического уравнения (18.38) в окрестности особой точки $z=1$ достаточно перейти к новому независимому переменному $z'$ по формуле:

$$z' = 1 - z, \tag{18.41}$$

которая переводит точку $z=0$ в точку $z'=1$, точку $z=1$ в точку $z'=0$, а точку $z=\infty$ оставляет на месте ($z'=\infty$). Тогда решения в окрестности точки $z=1$ мы получим, построив решения в окрестности точки $z'=0$.

Корни определяющих уравнений, построенных для переменного $z'$, получают следующие значения [см. формулы (18.27), (18.29), (18.36) и (18.35)]:

$$\left.\begin{array}{l} \text{в точке } z'=0: \gamma-\alpha-\beta \text{ и } 0 \\ \text{в точке } z'=1: 1-\gamma \text{ и } 0 \\ \text{в точке } z'=\infty: \alpha \text{ и } \beta \end{array}\right\}, \tag{18.42}$$

откуда вытекает, что параметры $\alpha$ и $\beta$ гипергеометрической функции при переходе к независимому переменному $z'$ остаются прежними, а параметр $\gamma$ заменяется через $1-\gamma+\alpha+\beta$ (и, следовательно, $1-\gamma$ заменяется через $\gamma-\alpha-\beta$).

Таким образом, в окрестности точки $z'=0$ преобразованному гипергеометрическому уравнению удовлетворяют функции:

$$F(\alpha, \beta, 1-\gamma+\alpha+\beta; z') \text{ и } z'^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; z'),$$

а в окрестности точки $z=1$ решениями данного гипергеометрического уравнения (18.38) будут функции:

$$\left.\begin{array}{r} w_{11}(z) = F(\alpha, \beta, 1-\gamma+\alpha+\beta; 1-z) \\ w_{21}(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-z) \end{array}\right\}, \tag{18.43}$$

причем гипергеометрические ряды, стоящие в правых частях формул (18.43), определяющих эти решения, сходятся при

$$|1-z| < 1, \tag{18.44}$$

то есть внутри круга с центром в точке $z=1$ и радиуса, равного единице, но с исключенным центром ($z \neq 1$).

Для построения решений $w_{1\infty}(z)$ и $w_{2\infty}(z)$ гипергеометрического уравнения (18.38) в окрестности особой точки $z=\infty$ перейдем к новому независимому переменному $z''$ по формуле:

$$z''=\frac{1}{z}, \tag{18.45}$$

которая переводит точку $z=0$ в точку $z''=\infty$ и точку $z=\infty$ в точку $z''=0$, а точку $z=1$ оставляет на месте ($z''=1$). Тогда для построения решений в окрестности точки $z=\infty$ нам достаточно будет построить решения в окрестности точки $z''=0$.

Корни определяющих уравнений, построенных для независимого переменного $z''$, получают следующие значения [см. формулы (18.27), (18.29), (18,36) и (18.35)]:

$$\left.\begin{array}{l} \text{в точке } z''=0: \alpha \text{ и } \beta \\ \text{в точке } z''=1: \gamma-\alpha-\beta \text{ и } 0 \\ \text{в точке } z''=\infty: 1-\gamma \text{ и } 0 \end{array}\right\} \tag{18.46}$$

Чтобы сделать один из корней определяющего уравнения в точке $z''=0$ равным нулю, применим к функции $w$ подстановку:

$$w=z''^{\alpha}u, \tag{18.47}$$

в результате которой корни определяющего уравнения в точке $z''=0$, составленного для функции $u=\frac{1}{z''^{\alpha}}w$, примут значения 0 и $\beta-\alpha$ [см. формулу (18.19)], а в точке $z''=\infty$ — значения $1+\alpha-\gamma$ и $\alpha$ [см. формулу (18.30)]; что же касается точки $z''=1$, то корни определяющего уравнения в этой точке в результате нашей подстановки, очевидно, не изменятся.

Отсюда вытекает, что в результате подстановок (18.45) и (18.47) параметр $\alpha$ гипергеометрической функции не изменяется, а параметры $\beta$ и $\gamma$ заменяются соответственно параметрами $1+\alpha-\gamma$ и $1+\alpha-\beta$ .

Таким образом, в окрестности точки $z''=0$ гипергеометрическому уравнению, получаемому в результате преобразований (18.45) и (18.47), удовлетворяют функции:

$$F(\alpha\ 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta; z'') \text{ и } z''^{\beta-\alpha}F(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha; z''),$$

а в окрестности точки $z=\infty$ решениями данного гипергеометрического уравнения (18.38) будут функции:

$$\left.\begin{array}{l} w_{1\infty}=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta; \frac{1}{z}\right) \\ w_{2\infty}=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}F\left(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha; \frac{1}{z}\right) \end{array}\right\}, \tag{18.48}$$

причем гипергеометрические ряды, стоящие в правых частях формул (18.48), определяющих эти решения, сходятся при

$$|z|>1, \tag{18.49}$$

то есть вне круга с центром в точке $z=0$ и радиуса, равного единице.

В заключение, рассмотрим *уравнение Бесселя* [см. уравнение (15.26)]:

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0, \tag{18.50}$$

для которого

$$p(z) = \frac{1}{z}; \quad q(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \tag{18.51}$$

Для того, чтобы бесконечно далекая точка $z=\infty$ была для уравнения Бесселя регулярной особой точкой, коэффициент $q(z)$ должен иметь в точке $z=\infty$ корень не ниже второго порядка и должен, следовательно, представляться в окрестности этой точки рядом [см. вторую из формул (17.37)]:

$$q(z) = \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_3}{z^3} + \frac{\beta_4}{z^4} + \cdots$$

Но, как показывает вторая из формул (18.51), бесконечно далекая точка $z=\infty$ не является корнем коэффициента $q(z)$. Следовательно, для уравнения Бесселя бесконечно далекая точка $z=\infty$ является иррегулярной особой точкой.

С другой стороны, в нулевой точке $z=0$ коэффициент $p(z)$ имеет простой полюс, а коэффициент $q(z)$ — полюс второго порядка, откуда следует, что нулевая точка $z=0$ является для уравнения Бесселя регулярной особой точкой.

Таким образом, уравнение Бесселя (18.50), имеющее регулярную особую точку $z=0$ и иррегулярную особую точку $z=\infty$, не является уравнением класса Фукса.

ГЛАВА III

# ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 19. Интегрирование уравнения Бесселя

В § 15, путем соответствующих преобразований гипергеометрического уравнения, мы получили уравнение Бесселя [см. формулу (15.26)]:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \tag{19.1}$$

и определили его частные решения [см. формулы (15.28)]:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}; \\ J_{-\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \end{aligned}\right\} \tag{19.2}$$

В настоящем параграфе мы выведем формулы (19.2) для частных решений уравнения Бесселя (19.1) путем непосредственного интегрирования этого уравнения, без привлечения понятия гипергеометрической функции.

Предположив, что искомое решение $y$ уравнения Бесселя (19.1) может быть представлено степенным рядом:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}, \tag{19.3}$$

откуда

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\, a_k x^{r+k-1}; \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)\, a_k x^{r+k-2},$$

из уравнения (19.1) получаем равенство:

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)a_kx^{r+k-1}+$$

$$+x^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}=0 \qquad (19.4)$$

Применяя, далее, метод неопределенных коэффициентов и замечая, что в рассматриваемом случае, мы, в соответствии с этим методом, должны приравнять к нулю коэффициенты при $x^r$, $x^{r+1}$, $x^{r+2}$,..., для определения постоянных $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$,..., получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
r(r-1)a_0+ra_0-\nu^2a_0=0\\
(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\nu^2a_1=0\\
(r+2)(r+1)a_2+(r+2)a_2+a_0-\nu^2a_2=0\\
(r+3)(r+2)a_3+(r+3)a_3+a_1-\nu^2a_3=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&(r^2-\nu^2)a_0=0\\
&[(r+1)^2-\nu^2]a_1=0\\
&[(r+2)^2-\nu^2]a_2+a_0=0\\
&[(r+3)^2-\nu^2]a_3+a_1=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (19.5)$$

Так как, не уменьшая общности рассуждения, можно считать, что

$$a_0\neq 0, \qquad (19.6)$$

то, как показывает первое из уравнений (19.5),

$$r^2=\nu^2, \qquad (19.7)$$

откуда для $r$ получаем два значения:

$$r_1=+\nu;\quad r_2=-\nu, \qquad (19.8)$$

подстановка которых в формулу (19.3) дает два частных решения уравнения Бесселя:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\nu+k};\quad y_2=\sum_{k=0}^{\infty}a_k'x^{-\nu+k} \qquad (19.9)$$

Беря первое из этих частных решений, то есть полагая

$$r=+\nu \qquad (19.10)$$

и, следовательно,

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\nu+k}, \tag{19.11}$$

из уравнений (19.5) далее имеем:

$$a_1 = 0,\ a_3 = 0,\ a_5 = 0, \ldots$$

то есть

$$a_{2k-1} = 0\,(k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{19.12}$$

и

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2 - \nu^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} = \frac{a_0}{[(\nu+2)^2 - \nu^2]\,[(\nu+4)^2 - \nu^2]}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

то есть

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{[(\nu+2)^2-\nu^2]\,[(\nu+4)^2-\nu^2]\cdots[(\nu+2k)^2-\nu^2]}\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

или

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(4\nu+4)\,(8\nu+16)\cdots(4k\nu+4k^2)}\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и окончательно:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2\cdot4\cdot6\cdots2k\,(2\nu+2)\,(2\nu+4)\cdots(2\nu+2k)}\ (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{19.13}$$

Таким образом, в ряде, выражающем первое частное решение уравнения Бесселя, равны нулю коэффициенты при всех нечетных степенях $x$, а коэффициенты при всех четных степенях $x$ могут быть выражены через коэффициент $a_0$, остающийся произвольным (значение коэффициента $a_0$ мы выберем несколько позже), то есть первое частное решение уравнения Бесселя, получаемое при $r = r_1 = +\nu$, представляется рядом:

$$y_1 = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\cdot4\cdot6\cdots2k\,(2\nu+2)\,(2\nu+4)\cdots(2\nu+2k)}\, x^{\nu+2k}$$

или

$$y_1 = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!\,(\nu+1)\,(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\, x^{\nu+2k} \tag{19.14}$$

Замечая, что [см. формулы (2.3) и (2.5)]

$$k! = \Gamma(k+1);\ (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k) = \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)},$$

формулу (19.14) мы можем взять в виде:

$$y_1 = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} x^{\nu+2k}$$

или

$$y_1 = a_0 2^{\nu} \Gamma(\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

и, если воспользоваться тем, что постоянная $a_0$ может быть выбрана произвольно, и взять для нее значение:

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}, \tag{19.15}$$

то окончательно:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} = J_{\nu}(x) \tag{19.16}$$

Для второго частного решения уравнения Бесселя, соответствующего $r = r_2 = -\nu$, при помощи рассуждений, аналогичных вышеприведенным, но при дополнительном условии, что $\nu$ не является числом целым (см. § 2), получается формула:

$$y_2 = a_0' 2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)} x^{-\nu+2k}$$

или, если для постоянной $a_0'$ взять значение:

$$a_0' = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}{}^{*}, \tag{19.17}$$

то окончательно:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} = J_{-\nu}(x) \tag{19.18}$$

Формулы (19.16) и (19.18) и решают задачу о нахождении частных решений уравнения Бесселя, причем формула (19.18) имеет место только при условии, что $\nu$ не является числом целым.

---

* Для частных решений $y_1$ и $y_2$ значения коэффициента $a_0$, остающегося произвольным, могут быть выбраны различными. Сохраняя обозначение $a_0$ для первого частного решения $y_1$, значение того же коэффициента, взятое для второго частного решения $y_2$, мы обозначаем через $a_0'$.

## § 20. Рекуррентные формулы

Прежде, чем переходить к исследованию частных решений уравнения Бесселя [см. формулу (19.1)],

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0, \tag{20.1}$$

определяемых формулами (19.16) и (19.18):

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ J_{-\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

целесообразно вывести некоторые соотношения между цилиндрическими функциями различных порядков, называемые обычно *рекуррентными формулами* и значительно упрощающие указанное исследование.

Если в формулах (20.2) $\nu = n$* есть число целое и положительное, то во второй из этих формул суммирование фактически начинается со значения $k$, равного $n$, так как все члены суммы, соответствующие значениям $k$ от 0 до $n-1$, оказываются равными нулю. Это следует из того, что $\Gamma(a)$ обращается в бесконечность при $a$, равном нулю или целому отрицательному числу (см. § 2). Беря поэтому вторую из формул (20.2) в виде:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

и полагая

$$k - n = l,$$

откуда

$$k = n + l; \quad k + 1 = n + l + 1; \quad -n + k + 1 = l + 1;$$
$$-n + 2k = n + 2l,$$
$$l = 0 \text{ при } k = n \text{ и } l = \infty \text{ при } k = \infty,$$

приводим эту формулу к виду:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(n+l+1)\,\Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}$$

или

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{20.3}$$

---

* В дальнейшем, целые значения $\nu$ мы всегда будем обозначать через $n$.

то есть при целом, положительном $\nu = n$ цилиндрическая функция порядка $-n$ всегда может быть выражена через цилиндрическую функцию порядка $n$*.

Считая теперь по-прежнему $\nu$ числом каким угодно, возьмем первое из равенств (20.2) в виде:

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \frac{x^{2k}}{2^{\nu+2k}}$$

и обе его части продифференцируем по $x$:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2kx^{2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}}$$

Полагая

$$k = l + 1,$$

откуда

$$k+1 = l+2; \quad \nu+k+1 = \nu+l+2; \quad 2k-1 = 2l+1;$$
$$\nu+2k = \nu+2l+2; \quad \Gamma(k+1) = \Gamma(l+2) = (l+1)\Gamma(l+1);$$
$$l = 0 \text{ при } k = 1 \text{ и } l = \infty \text{ при } k = \infty,$$

имеем:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} 2(l+1)x^{2l+1}}{(l+1)\Gamma(l+1)\Gamma(\nu+l+2)2^{\nu+2l+2}} =$$

$$= -\frac{1}{x^\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma[(\nu+1)+l+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu+1)+2l},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{20.4}$$

и, в частности, при $\nu = 0$:

$$J_0'(x) = -J_1(x) \tag{20.5}$$

Беря формулу (20.4) в виде:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}, \qquad (20.6$$

* Линейная независимость частных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения Бесселя при нецелом $\nu$ будет установлена в § 21.

видим, что дифференцирование по $x$ дроби $\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ с последующим делением на $x$ сводится к изменению знака и к замене $\nu$ через $\nu+1$.

Выполняя в равенстве (20.4) дифференцирование:

$$\frac{J'_\nu(x)\,x^\nu - \nu x^{\nu-1} J_\nu(x)}{x^{2\nu}} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

получаем соотношение между цилиндрическими функциями $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$:

$$xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x) \tag{20.7}$$

или

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu J_\nu(x)}{x} \tag{20.8}$$

Дифференцируя, далее, равенство (20.6):

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]\right\} = -\frac{J'_{\nu+1}(x)\,x^{\nu+1} - (\nu+1)x^\nu J_{\nu+1}(x)}{x^{2\nu+2}}$$

и замечая, что, на основании формулы (20.7), справедливой, очевидно, для цилиндрических функций любых двух соседних порядков,

$$xJ'_{\nu+1}(x) = (\nu+1)\,J_{\nu+1}(x) - xJ_{\nu+2}(x),$$

имеем:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]\right\} =$$

$$= (-1)\,\frac{(\nu+1)\,J_{\nu+1}(x) - xJ_{\nu+2}(x) - (\nu+1)\,J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+3}}$$

и окончательно:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]\right\} = (-1)^2\,\frac{J_{\nu+2}(x)}{x^{\nu+2}} \tag{20.9}$$

или

$$\frac{d^2}{(xdx)^2}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^2\,\frac{J_{\nu+2}(x)}{x^{\nu+2}}, \tag{20.10}$$

то есть правило, устанавливаемое формулой (20.6) для первой производной, оказывается справедливым и для второй производной.

Повторяя это рассуждение еще $m-2$ раза, придем к следующей общей формуле:

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}, \tag{20.11}$$

которую можно взять также и в виде:

$$\frac{d^m}{d(x^2)^m}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{2^m x^{\nu+m}}, \tag{20.12}$$

так как

$$xdx = \frac{d(x^2)}{2} \text{ и } (xdx)^m = \frac{d(x^2)^m}{2^m}.$$

Беря, далее, первое из уравнений (20.2) в виде:

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \frac{x^{2\nu+2k}}{2^{\nu+2k}},$$

дифференцируя его по $x$:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(\nu+k) x^{2\nu+2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}}$$

и применяя формулу

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+k),$$

после несложных преобразований получим:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma[(\nu-1)+k+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu-1)+2k},$$

то есть

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{20.13}$$

или

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x), \tag{20.14}$$

откуда следует, что дифференцирование по $x$ произведения $x^\nu J_\nu(x)$ с последующим делением на $x$ сводится к замене $\nu$ через $\nu-1$.

Выполняя в равенстве (20.13) дифференцирование,

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

**получаем соотношение между цилиндрическими функциями $J_\nu(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$**

$$\nu J_\nu(x) + xJ'_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x) \tag{20.15}$$

или

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu J_\nu(x)}{x} \tag{20.16}$$

Дифференцируя, далее, равенство (20.14)

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]\right\} = (\nu-1)x^{\nu-2}J_{\nu-1}(x) + x^{\nu-1}J'_{\nu-1}(x),$$

откуда

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]\right\} = (\nu-1)x^{\nu-3}J_{\nu-1}(x) + x^{\nu-2}J'_{\nu-1}(x),$$

и замечая, что, на основании формулы (20.15), справедливой, очевидно, для цилиндрических функций любых двух соседних порядков,

$$(\nu-1)J_{\nu-1}(x) = -xJ'_{\nu-1}(x) + xJ_{\nu-2}(x),$$

имеем

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]\right\} =$$
$$= -x^{\nu-2}J'_{\nu-1}(x) + x^{\nu-2}J_{\nu-2}(x) + x^{\nu-2}J'_{\nu-1}(x)$$

и окончательно

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]\right\} = x^{\nu-2}J_{\nu-2}(x) \tag{20.17}$$

или

$$\frac{d^2}{(xdx)^2}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^{\nu-2}J_{\nu-2}(x), \tag{20.18}$$

то есть правило, устанавливаемое формулой (20.14) для первой производной, оказывается справедливым и для второй производной.

Повторяя это рассуждение еще $m-2$ раза, придем к следующей общей формуле:

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x), \tag{20.19}$$

которую можно взять также и в виде

$$\frac{d^m}{d(x^2)^m}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = \frac{x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x)}{2^m} \tag{20.20}$$

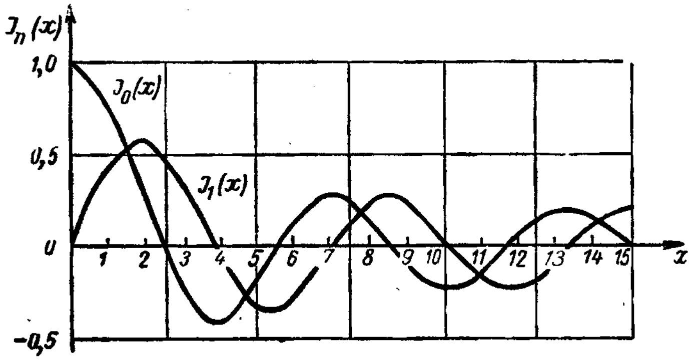
Соединяя, наконец формулы (20.8) и (20.16), получаем соотношение между цилиндрическими функциями трех последовательных порядков

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\nu}\left[J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\right] \tag{20.21}$$

## § 21. Исследование решений уравнения Бесселя

Обращаясь к исследованию решений уравнения Бесселя (19.1), рассмотрим, прежде всего, случай, когда $\nu=0$, то есть когда уравнение Бесселя имеет вид

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0 \tag{21.1}$$




Черт. 6

В этом случае формулы (19.2), определяющие частные решения уравнения Бесселя, совпадают, принимая вид:

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma^2(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^2 4^2\cdots(2k)^2}, \tag{21.2}$$

то есть

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2}-\cdots, \tag{21.3}$$

причем, как легко убедиться при помощи признака Даламбера, ряд, стоящий в правой части формулы (21.3), сходится при всех значениях $x$.

Отметим также, что

$$\text{если } x=0, \text{ то } J_0(x)=1, \text{ то есть } J_0(0)=1 \tag{21.4}$$

График функции $J_0(x)$, называемой *цилиндрической или бесселевой функцией первого рода нулевого порядка,* изображен на черт. 6.

Таким образом, при $\nu=0$ мы располагаем пока только одним частным решением уравнения Бесселя; второе частное решение этого уравнения нам придется определять заново.

Если в уравнении Бесселя (19.1) $\nu=n$ есть число целое и положительное, то имеет место формула (20.3):

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x), \tag{21.5}$$

откуда следует, что при $\nu=n$ целом и положительном частные решения, определяемые формулами (19.2), не являются линейно-независимыми, то есть что в этом случае мы, в сущности, располагаем только одним частным решением уравнения Бесселя

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=$$

$$=\frac{x^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot 4\cdots(2k)\,(2n+2)\,(2n+4)\cdots(2n+2k)}, \tag{21.6}$$

то есть

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}\left[1-\frac{x^2}{2\,(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4\,(2n+2)\,(2n+4)}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2n+2)\,(2n+4)\,(2n+6)}+\cdots\right], \tag{21.7}$$

причем ряд, стоящий в правой части формулы (21.7), сходится при всех значениях $x$; в этом легко убедиться при помощи признака Даламбера.

Отметим также, что

$$\text{если } x=0, \text{ то } J_n(x)=0, \text{ то есть } J_n(0)=0 \tag{21.8}$$

В качестве примера приведем формулу для *цилиндрической функции первого рода первого порядка*, которая получается из формулы (21.6) при $n=1$:

$$J_1(x)=\frac{1}{0!\,1!}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7+\cdots. \tag{21.9}$$

График функции $J_1(x)$ изображен на черт. 6.

Вторая из формул (19.2) при целом положительном $\nu=n$ дает:

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}=$$

$$=\frac{x^{-n}}{2^{-n}}\left[\frac{1}{0!\,\Gamma(-n+1)}-\frac{x^2}{1!\,\Gamma(-n+2)\,2^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{(n-1)!\,\Gamma(-n+n)\,2^{2(n-1)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\,\Gamma(-n+n+1)\,2^{2n}}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(n+1)!\,\Gamma(-n+n+2)\,2^{2(n+1)}}+\cdots\right] \tag{21.10}$$

Но, по доказанному в § 2 [см. (2.7), (2.10) и (2.11)],

$$\frac{1}{\Gamma(-n+1)}=\frac{1}{\Gamma(-n+2)}=\cdots=\frac{1}{\Gamma(-n+n)}=0; \qquad (21.11)$$

следовательно, формула (21.10) принимает вид:

$$J_{-n}(x)=\frac{x^{-n}}{2^{-n}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!\,2^{2n}}\left[1-\frac{x^{2n}}{(2n+2)\,2}+\cdots\right],$$

откуда, на основании (21.7), вытекает формула (21.5).

Таким образом, если $\nu=n>0$ есть целое число, то из функций $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ только одна может быть взята для составления общего решения уравнения Бесселя.

Если же $\nu$ не является целым числом, то формулы (19.2) определяют два линейно-независимых частных решения уравнения Бесселя, в чем легко убедиться путем сопоставления формул (21.7) и (21.11); следовательно, при любом нецелом $\nu$ общее решение уравнения Бесселя определяется формулой:

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x), \qquad (21.12)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

В дальнейшем нам часто придется вопрос о линейной независимости цилиндрических функций различных типов выяснять при помощи определителя Вронского; поэтому целесообразно дать здесь вывод формулы для определителя Вронского любых двух решений $y_1$ и $y_2$ уравнения Бесселя, которое может быть взято в виде

$$\frac{d}{dx}(xy')+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0^* \qquad (21.13)$$

Так как $y_1$ и $y_2$ являются, по условию, решениями уравнения Бесселя, то должно быть

$$\frac{d}{dx}(xy_1')+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)y_1=0;\quad \frac{d}{dx}(xy_2')+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)y_2=0.$$

---

* В самом деле, применяя к уравнению Бесселя формулу (12.11), мы должны положить:

$$p(x)=x^2;\quad q(x)=x;\quad r(x)=x^2-\nu^2;$$

следовательно,

$$\int\frac{q(x)}{p(x)}\,dx=\int\frac{dx}{x}=\ln x;\quad e^{\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}=e^{\ln x}=x$$

и уравнение (12.11) обращается в уравнение (21.13).

Умножая первое из этих уравнений на $-y_2$, второе на $y_1$ и складывая результаты умножения, получим

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)\right] = 0$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[x \cdot \Delta(y_1, y_2)\right] = 0, \tag{21.14}$$

откуда

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{x}, \tag{21.15}$$

где $\Delta(y_1, y_2)$ есть определитель Вронского для решений $y_1$ и $y_2$ уравнения Бесселя, а $C$ — постоянная, которую можно определить из условия:

$$C = \lim_{x \to 0}\left[x \cdot \Delta(y_1, y_2)\right] \tag{21.16}$$

Если теперь мы положим:

$$y_1 = J_\nu(x); \quad y_2 = J_{-\nu}(x), \tag{21.17}$$

то, на основании формул (19.2), будем иметь:

$$C = \lim_{x \to 0}\left\{x\Delta\left[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\right]\right\} = \lim_{x \to 0}\left\{x \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J_\nu'(x) & J_{-\nu}'(x) \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left\{x \begin{vmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)} \times \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} & \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(-\nu+l+1)} \times \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2l} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\nu+2k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \times \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} \cdot \frac{1}{2} & \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l(-\nu+2l)}{\Gamma(l+1)\Gamma(-\nu+l+1)} \times \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2l-1} \cdot \frac{1}{2} \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}(-\nu+2l)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(l+1)\,\Gamma(-\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}(\nu+2k)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(-\nu+l+1)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+2k}\right].$$

Замечая, что в пределе при $x \to 0$ в двойных суммах останется только по одному члену, соответствующему $k=l=0$, и применяя формулу дополнения (4.6), имеем

$$C = -\frac{2\nu}{\Gamma(1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(1)\Gamma(-\nu+1)} = -\frac{2\nu}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}.$$

Подставляя это значение $C$ в формулу (21.15) и принимая во внимание формулы (21.17), для определителя Вронского цилиндрических функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ получаем следующую формулу:

$$\Delta\left[J_\nu(x),\quad J_{-\nu}(x)\right] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}, \tag{21.18}$$

из которой и вытекает линейная независимость функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ при любом $\nu$, не равном целому числу.

Исходя из принципа непрерывности, эту формулу можно распространить и на случай целых значений $\nu = n$, для которых, очевидно, $\sin n\pi = 0$ и, следовательно,

$$\Delta\left[J_n(x),\quad J_{-n}(x)\right] = 0, \tag{21.19}$$

то есть функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ действительно не являются линейно-независимыми.

Целесообразно выделить еще случай, когда $\nu$ представляет собою половину целого нечетного числа, так как в этом случае цилиндрические функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ могут быть выражены через элементарные функции.

Чтобы убедиться в этом, предположим, что

$$\nu = \frac{2m+1}{2}, \tag{21.20}$$

и рассмотрим сначала случай, когда $m=0$, то есть когда

$$\nu = \frac{1}{2}. \tag{21.21}$$

При $\nu = \frac{1}{2}$ формулы (19.2) принимают вид:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k};$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}.$$

Но

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots3\cdot1}{2^{k}}\sqrt{\pi};$$

следовательно,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{k+1}}{1\cdot2\cdots k\,(2k+1)(2k-1)\cdots3\cdot1\sqrt{\pi}}\,\frac{x^{2k+\frac{1}{2}}}{2^{2k+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^k}{1\cdot2\cdots k\,(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1\sqrt{\pi}}\,\frac{x^{2k-\frac{1}{2}}}{2^{2k-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

откуда

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x;\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\qquad(21.22)$$

что и доказывает наше утверждение для случая $m=0$.

Применяя, далее, к первому из равенств (21.22) формулу (20.11), в которой положим $\nu=\frac{1}{2}$, а ко второму из равенств (21.22) формулу (20.19), в которой положим $\nu=-\frac{1}{2}$, имеем:

$$J_{\frac{1}{2}+m}(x)=(-1)^m x^{\frac{1}{2}+m}\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}\right);$$

$$J_{-\frac{1}{2}-m}(x)=\frac{1}{x^{-\frac{1}{2}-m}}\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\right);$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{2m+1}{2}}(x)&=(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\\ J_{-\frac{2m+1}{2}}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{\cos x}{x}\right)\end{aligned}\right\},\qquad (21.23)$$

что и доказывает наше утверждение для случая любого целого положительного $m$.

Случай отрицательного целого $m$ можно отдельно не рассматривать, так как он легко сводится к рассмотренному случаю положительного целого $m$; в самом деле, если

$$m=-m_1,\quad \text{где } m_1>0,$$

то

$$\nu=\frac{-2m_1+1}{2}=-\frac{2m_1-1}{2}=-\frac{2m_2+1}{2};$$

$$-\nu=-\frac{-2m_1+1}{2}=\frac{2m_1-1}{2}=\frac{2m_2+1}{2},$$

где

$$m_2=m_1-1.$$

В заключение приведем результаты расчетов по формулам (21.23) для $m=1$ и $m=2$:

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)\\ J_{-\frac{3}{2}}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x-\frac{\cos x}{x}\right)\end{aligned}\right\}\qquad (21.24)$$

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{5}{2}}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right]\\ J_{-\frac{5}{2}}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{3}{x}\sin x+\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\cos x\right]\end{aligned}\right\}\qquad (21.25)$$

## § 22. Цилиндрические функции второго рода

Как было выяснено в § 21, при $\nu$, равном нулю или целому числу, частные решения уравнения Бесселя (19.1):

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \tag{22.1}$$

определяемые формулами (19.2), не являются линейно-независимыми, то есть в этом случае мы, в сущности, имеем только одно частное решение уравнения Бесселя [см. первую из формул (19.2)]:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{22.2}$$

Для определения второго частного решения уравнения Бесселя при $\nu$, равном нулю или целому числу, возьмем вместо уравнения (22.1) уравнение

$$x^2y'' + xy' + [x^2 - (n-\varepsilon)^2]\, y = 0, \tag{22.3}$$

где

$$0 < \varepsilon < 1. \tag{22.4}$$

Тогда функция

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}, \tag{22.5}$$

где $J_{n-\varepsilon}(x)$ и $J_{-(n-\varepsilon)}(x)$ представляют собою линейно-независимые частные решения уравнения (22.3), определяемые по формулам (19.2), также является при любом $\varepsilon$ решением этого уравнения, а функция

$$Y_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} Y_{n-\varepsilon}(x), \tag{22.6}$$

если она существует, будет, очевидно, решением уравнения Бесселя (22.1) при целом $\nu = n$.

На основании формул (19.2), функция $Y_{n-\varepsilon}(x)$ может быть представлена в виде:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k}.$$

Полагая во второй сумме правой части

$$k = n + l,$$

откуда

$$k+1 = n+l+1;\ -n+\varepsilon+k+1 = \varepsilon+l+1;$$
$$-n+\varepsilon+2k = n+\varepsilon+2l;$$
$$l = 0 \quad \text{при} \quad k = n;\ l = \infty \quad \text{при} \quad k = \infty,$$

и заменяя значок $l$ прежним значком $k$, имеем

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$
$$+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{\varepsilon\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\varepsilon+2k} -$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k} =$$
$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}\right].$$

Но, на основании формулы дополнения (4.6), в которой положим $a = n - \varepsilon - k$, и в результате последующего применения правила Лопиталя,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\Gamma[1-(n-\varepsilon-k)]} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Gamma(n-\varepsilon-k)\sin[(n-\varepsilon-k)\pi]}{\varepsilon\pi} =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Gamma(n-\varepsilon-k)\pi\cos[(n-\varepsilon-k)\pi]}{\pi} =$$
$$= -\Gamma(n-k)\cos[(n-k)\pi] = (-1)^{n-k+1}\Gamma(n-k)$$

и в результате непосредственного применения правила Лопиталя,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}-\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{\Gamma'(\varepsilon+k+1)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma^{2}(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}+\right.$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(n-\varepsilon+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma^{2}(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}+$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}\ln\frac{x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right];$$

следовательно,

$$Y_n(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}Y_{n-\varepsilon}(x)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(-1)^{n-k+1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

и так как, по формуле (5.10),

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}=-C+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l};\quad \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}=-C+\sum_{l=1}^{n+k}\frac{1}{l},$$

где $C$ — Эйлерова постоянная, то

$$Y_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left[2\ln\frac{x}{2}+2C-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{n+k}\frac{1}{l}\right]-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}\tag{22.7}$$

и окончательно:

$$Y_n(x)=2J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}-$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left[2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+n}\right]. \qquad (22.8)$$

Функция $Y_n(x)$, определяемая формулой (22.7) [или (22.8)] и представляющая собою второе частное решение уравнения Бесселя (22.1) при целом $\nu = n$, называется *цилиндрической или бесселевой функцией второго рода порядка n.*

Общее решение уравнения Бесселя (22.1) при целом $\nu = n$ можно теперь определить по формуле:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \qquad (22.9)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ определяются соответственно по формулам (22.2) и (22.7)*.

Полагая в формуле (22.7) $n=0$, получаем следующую формулу для *цилиндрической или бесселевой функции второго рода нулевого порядка:*

$$Y_0(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left[\ln\frac{x}{2} + C - \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l}\right] \qquad (22.10)$$

или

$$Y_0(x) = 2\left\{\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right]\right\}$$

и, на основании формулы (21.2),

$$Y_0(x) = 2\left\{\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)J_0(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right]\right\} \qquad (22.11)$$

или, в раскрытом виде,

$$Y_0(x) = 2\left[\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)J_0(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^4 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \cdots\right]^{**}. \qquad (22.12)$$

Очевидно, что при $x=0$ функция $Y_0(x)$ обращается в бесконечность.

---

* Линейная независимость решений $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ уравнения Бесселя будет доказана в § 24.

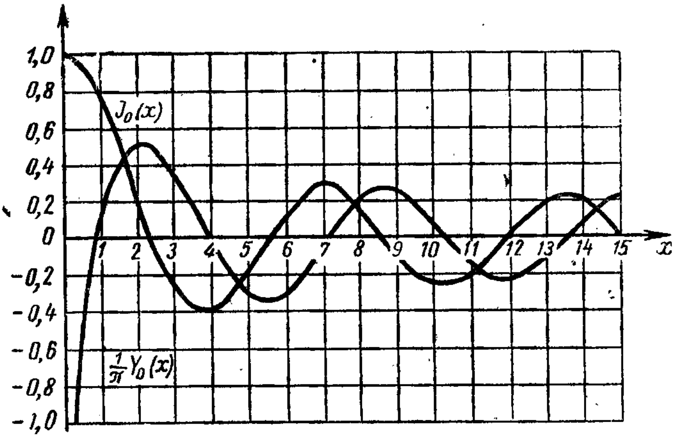
** Формулы, аналогичные формулам (22.11) и (22.12), могут быть получены [из формулы (22.7)] и для функции $Y_n(x)$, где $n$ — любое целое число.

При $\nu=0$ общее решение уравнения Бесселя (22.1) выражается формулой:

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \tag{22.13}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ определяются соответственно по формулам (21.2) и (22.10).

Легко убедиться в том, что рекуррентные формулы, выведенные в § 20 для функции $J_\nu(x)$, справедливы и для функции $Y_n(x)$.




Черт. 7

В заключение отметим, что иногда вместо функции $Y_n(x)$ рассматривают функцию

$$\frac{1}{\pi} Y_n(x), \tag{22.14}$$

называемую *функцией Вебера порядка n*. График функции Вебера нулевого порядка $\frac{1}{\pi} Y_0(x)$ изображен на черт. 7, на котором для сравнения изображен также график функции $J_0(x)$.

## § 23. Производящая функция; интеграл Бесселя

Возьмем разложение в бесконечный ряд функции $e^x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

и заменим в нем $x$ сначала через $\frac{1}{2}xt$, а затем через $-\frac{1}{2}xt^{-1}$

$$e^{\frac{1}{2}xt}=1+\frac{xt}{2\cdot 1!}+\frac{x^2t^2}{2^2 2!}+\frac{x^3t^3}{2^3 3!}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r t^r}{2^r r!};$$

$$e^{-\frac{1}{2}xt^{-1}}=1-\frac{xt^{-1}}{2\cdot 1!}+\frac{x^2t^{-2}}{2^2 2!}-\frac{x^3t^{-3}}{2^3 3!}+\cdots=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^s t^{-s}}{2^s s!}.$$

Полученные ряды, сходящиеся, очевидно, при всех значениях $x$ и при всех значениях $t$, кроме $t=0$ (для второго ряда), перемножим (считая, что $t\neq 0$):

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r t^r}{2^r r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^s t^{-s}}{2^s s!}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{r+s}t^{r-s}}{2^{r+s}r!\,s!}$$

и определим коэффициенты при различных степенях $t$, полагая:

$r-s=n>0$, если $r-s>0$ (откуда $r=n+s$; $r+s=n+2s$);

$r-s=-n<0$, если $r-s<0$ (откуда $r=-n+s$; $r+s=-n+2s$);

тогда для коэффициентов при $t^n$ и при $t^{-n}$ получим соответственно следующие выражения:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{n+2s}}{(n+s)!\,s!\,2^{n+2s}}=J_n(x)\ \text{и}\ \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{-n+2s}}{(-n+s)!\,s!\,2^{-n+2s}}=J_{-n}(x),$$

причем во второй из этих формул суммирование фактически начинается со значения $s$, равного $n$ (см. § 20).

Замечая, кроме того, что коэффициент при $t^0$ получается при $r-s=0$ и имеет вид

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s}}{s!\,s!\,2^{2s}}=J_0(x),$$

приходим к следующей формуле:

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\,t^n, \tag{23.1}$$

в правой части которой стоит ряд, сходящийся абсолютно при всех значениях $x$ и при всех значениях $t\neq 0$.

Функция

$$\Phi(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} \tag{23.2}$$

называется *производящей функцией для цилиндрических или бесселевых функций первого рода целого порядка.*

Положим, далее, в формуле (23.1)

$$t = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{23.3}$$

Замечая, что при этом

$$t - t^{-1} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2i\sin\varphi$$

и, на основании формулы (20.3), при нечетном $n$:

$$J_{-n}(x)\,t^{-n} + J_n(x)\,t^n = J_{-n}(x)\cos n\varphi - J_{-n}(x)\,i\sin n\varphi +$$
$$+ J_n(x)\cos n\varphi + J_n(x)\,i\sin n\varphi = -J_n(x)\cos n\varphi + J_n(x)\,i\sin n\varphi +$$
$$+ J_n(x)\cos n\varphi + J_n(x)\,i\sin n\varphi = 2iJ_n(x)\sin n\varphi,$$

а при четном $n$:

$$J_{-n}(x)\,t^{-n} + J_n(x)\,t^n = J_{-n}(x)\cos n\varphi - J_{-n}(x)\,i\sin n\varphi +$$
$$+ J_n(x)\cos n\varphi + J_n(x)\,i\sin n\varphi = J_n(x)\cos n\varphi - J_n(x)\,i\sin n\varphi +$$
$$+ J_n(x)\cos n\varphi + J_n(x)\,i\sin n\varphi = 2J_n(x)\cos n\varphi,$$

приводим формулу (23.1) к виду:

$$e^{ix\sin\varphi} = \cos(x\sin\varphi) + i\sin(x\sin\varphi) =$$
$$= J_0(x) + 2iJ_1(x)\sin\varphi + 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2i\,J_3(x)\sin 3\varphi +$$
$$+ 2J_4(x)\cos 4\varphi + \ldots, \tag{23.4}$$

откуда, после отделения вещественной части от мнимой, получаем формулы:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sin\varphi) &= J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi + \cdots = \\ &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi \\ \sin(x\sin\varphi) &= 2J_1(x)\sin\varphi + 2J_3(x)\sin 3\varphi + 2J_5(x)\sin 5\varphi + \\ &+ \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin[(2n-1)\varphi] \end{aligned}\right\} \tag{23.5}$$

Заменяя в формуле (23.4) $\varphi$ через $\frac{\pi}{2} - \varphi$, имеем

$$e^{ix\cos\varphi} = \cos(x\cos\varphi) + i\sin(x\cos\varphi) = J_0(x) + 2iJ_1(x)\cos\varphi -$$
$$-2J_2(x)\cos 2\varphi - 2iJ_3(x)\cos 3\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi + \ldots, \tag{23.6}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\cos\varphi) &= J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi - \\ &- \cdots = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)\cos 2n\varphi \\ \sin(x\cos\varphi) &= 2J_1(x)\cos\varphi - 2J_3(x)\cos 3\varphi + 2J_5(x)\cos 5\varphi - \\ &- \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n-1}(x)\cos[(2n-1)\varphi] \end{aligned}\right\} \tag{23.7}$$

Очевидно, что формулы (23.4), (23.5) и (23.6), (23.7) справедливы при всех значениях $x$ и $\varphi$.

Умножим теперь обе части первого из равенств (23.5) на $\cos m\varphi$, а обе части второго из равенств (23.5) на $\sin m\varphi$, где $m$ есть некоторое целое число, и каждый из полученных результатов проинтегрируем по $\varphi$ в пределах от 0 до $\pi$:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi \cos m\varphi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi &= J_0(x)\int_0^\pi \cos m\varphi\, d\varphi + \\ &+ 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\int_0^\pi \cos m\varphi \cos 2n\varphi\, d\varphi \\ \int_0^\pi \sin m\varphi \sin(x\sin\varphi)\,d\varphi &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\int_0^\pi \sin m\varphi \sin[(2n-1)\varphi]\,d\varphi\end{aligned}\right\} \quad (23.8)$$

Но

$$\int_0^\pi \cos m\varphi\, d\varphi = 0;$$

$$\int_0^\pi \cos m\varphi \cos 2n\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 2n \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } m = 2n; \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin m\varphi \sin[(2n-1)\varphi]\,d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 2n-1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } m = 2n-1. \end{cases}$$

Следовательно, при нечетном $m$ в сумме первой из формул (23.8) все слагаемые обращаются в нуль, а в сумме второй из этих формул остается только одно слагаемое (соответствующее $2n-1=m$); при четном же $m$ в сумме первой из формул (23.8) остается только одно слагаемое (соответствующее $2n=m$), а в сумме второй из этих формул все слагаемые обращаются в нуль, то есть

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi \cos m\varphi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi &= \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетное} \\ \pi J_m(x), & \text{если } m \text{ четное (или нуль)} \end{cases} \\ \int_0^\pi \sin m\varphi \sin(x\sin\varphi)\,d\varphi &= \begin{cases} \pi J_m(x), & \text{если } m \text{ нечетное} \\ 0, & \text{если } m \text{ четное} \end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (23.9)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi \cos m\varphi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi &= \frac{\pi}{2}[1+(-1)^m]\,J_m(x) \\ \int_0^\pi \sin m\varphi \sin(x\sin\varphi)\,d\varphi &= \frac{\pi}{2}[1-(-1)^m]\,J_m(x)\end{aligned}\right\} \quad (23.10)$$

Складывая равенства (23.10), приходим к следующей формуле:

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = \pi J_m(x), \tag{23.11}$$

в левой части которой стоит так называемый *интеграл Бесселя*.

Так как $\cos(m\varphi - x\sin\varphi)$ есть функция четная, а $\sin(m\varphi - x\sin\varphi)$ — функция нечетная, то вместо формулы (23.11) можно взять формулу

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi \tag{23.12}$$

или формулу

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(m\varphi - x\sin\varphi)}\,d\varphi^{*}. \tag{23.13}$$

Напомним, что формулы (23.11), (23.12) и (23.13) выведены в предположении, что $m$ есть число целое**.

Так как

$$e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(t-t^{-1}\right)} = e^{\frac{1}{2}x_1\left(t-t^{-1}\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}x_2\left(t-t^{-1}\right)},$$

где, на основании формулы (23.1),

$$e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(t-t^{-1}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x_1+x_2)\,t^n;\quad e^{\frac{1}{2}x_1\left(t-t^{-1}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1)\,t^k;$$

$$e^{\frac{1}{2}x_2\left(t-t^{-1}\right)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(x_2)\,t^l,$$

---

* Формулу (23.13) получаем при помощи формулы

$$\cos(m\varphi - x\sin\varphi) + i\sin(m\varphi - x\sin\varphi) = e^{i(m\varphi - x\sin\varphi)},$$

принимая во внимание, что вследствие нечетности функции $\sin(m\varphi - x\sin\varphi)$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = 0.$$

** В § 30 будет доказано, что если $m$ не является целым числом, то

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{\sin m\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-m\varphi - x\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi$$

то,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x_1+x_2)\,t^n = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1)\,t^k\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(x_2)\,t^l\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1)\,J_l(x_2)\,t^{k+l}.$$

**Выбирая из суммы правой части члены, содержащие $t^n$, то** есть полагая $k+l=n$ (откуда $l=n-k$), приходим к следующей формуле, выражающей *теорему сложения для цилиндрических функций целого порядка*:

$$J_n(x_1+x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1)\cdot J_{n-k}(x_2). \qquad (23.14)$$

## § 24. Функции Неймана

Выше было установлено, что цилиндрическая функция первого рода $J_\nu(x)$ при любом $\nu$ используется в качестве первого частного решения уравнения Бесселя и что за второе частное решение принимают цилиндрическую функцию первого рода $J_{-\nu}(x)$, если $\nu$ не является целым числом, и цилиндрическую функцию второго рода $Y_n(x)$, если $\nu=n$ есть целое число (или нуль.).

Можно, однако, построить функцию, при любых значениях $\nu$ дающую второе частное решение уравнения Бесселя, линейно-независимое с функцией $J_\nu(x)$. Этим свойством обладает *функция Неймана* $N_\nu(x)$, определяемая формулой

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (24.1)$$

и называемая иногда цилиндрической функцией второго рода.

Если $\nu$ не является целым числом, то в качестве второго частного решения уравнения Бесселя может быть взята сама функция Неймана $N_\nu(x)$; что же касается целых значений $\nu$, которые мы условились обозначать через $n$ и при которых правая часть формулы (24.1) обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то, раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, для функции Неймана при $\nu\to n$ получаем формулу

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} =$$

$$= \lim_{\nu\to n}\frac{\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\cos\nu\pi - \pi J_\nu\ x\sin\nu\pi - \dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi},$$

то есть

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n\left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\}. \qquad (24.2)$$

Формула (24.2) и определяет второе частное решение уравнения Бесселя при целых значениях $\nu=n$.

В том, что функция Неймана $N_\nu(x)$ действительно удовлетворяет уравнению Бесселя, мы легко убедимся, вспомнив, что уравнение Бесселя является однородным и что функцию Неймана мы определили, как линейную комбинацию функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, являющихся решениями этого уравнения.

Для доказательства того, что функция Неймана $N_\nu(x)$ и цилиндрическая функция первого рода $J_\nu(x)$ являются линейно-независимыми частными решениями уравнения Бесселя, достаточно убедиться в том, что определитель Вронского, составленный для этих функций, отличен от нуля.

Если $\nu$ не является числом целым, то

$$\Delta\left[J_\nu(x), N_\nu(x)\right] = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & \dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \\ J'_\nu(x) & \dfrac{J'_\nu(x)\cos\nu\pi - J'_\nu(x)}{\sin\nu\pi}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & J'_\nu(x)\end{vmatrix} - \frac{1}{\sin\nu\pi}\begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x)\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sin\nu\pi}\Delta\left[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\right] = \frac{1}{\sin\nu\pi}\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

и окончательно:

$$\Delta\left[J_\nu(x), N_\nu(x)\right] = \frac{2}{\pi x}. \qquad (24.3)$$

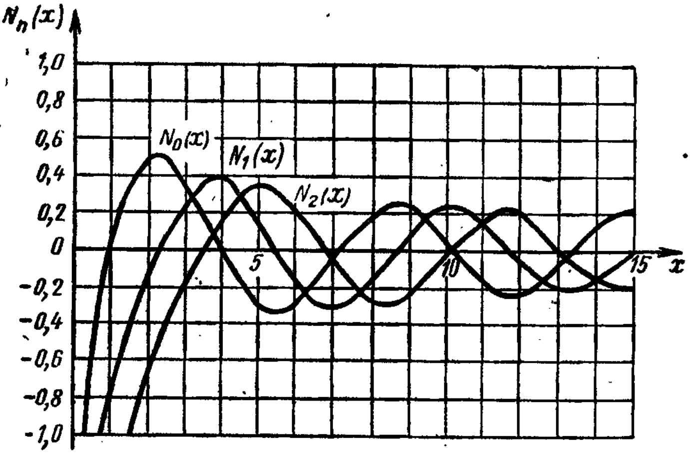
Эта формула выведена в предположении, что $\nu$ не является целым числом, но, применяя принцип непрерывности, ее можно распространить и на целые значения $\nu=n$.

Формула (24.3) показывает, что определитель Вронского, составленный для функций $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$, не обращается в нуль ни при каких конечных значениях $x$ и ни при каких значениях $\nu$, а это и означает, что функции $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ при любом $\nu$ являются линейно-независимыми частными решениями уравнения Бесселя, общее решение которого теперь можно представить формулой

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x), \qquad (24.4)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Таким образом, если $\nu$ не является целым числом, то общее решение уравнения Бесселя можно определить или по формуле (24.4), или по формуле (21.12); если же $\nu = n$ есть целое число или нуль, то формула (21.12) отпадает и для определения общего решения уравнения Бесселя нужно пользоваться формулой (24.4) [или формулой (22.9)].




Черт. 8

На черт. 8 изображены графики функций Неймана $N_0(x)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Обратимся теперь к выводу формулы, дающей разложение в ряд функции Неймана $N_n(x)$ целого порядка $n$. Имея в виду воспользоваться формулой (24.2), вычислим производные по $\nu$ от функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, определяемых формулами (19.2):

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \ln\frac{x}{2}\,\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} - \frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\right];$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left[-\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \ln\frac{x}{2}\,\frac{1}{\Gamma(-\nu+k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma^2(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}\right]$$

или

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right]\\
\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\right]+\\
&+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (24.5)
$$

К первому из равенств (24.5) применим (в пределе) формулу (5.10), по которой

$$
\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} = -C+\sum_{l=1}^{n+k}\frac{1}{l}. \qquad (24.6)
$$

Замечая, далее, что для всех слагаемых первой суммы второго из равенств (24.5) $k \leqslant n-1$ и применяя к этим слагаемым формулу дополнения (4.6), имеем:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to n}\left\{\frac{1}{\Gamma(-\nu+k+1)}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\right]\right\} = \\
&= \lim_{\nu\to n}\left\{\frac{1}{\Gamma[1-(\nu-k)]}\,\frac{\Gamma'[1-(\nu-k)]}{\Gamma[1-(\nu-k)]}\right\} = \\
&= \lim_{\nu\to n}\left\{-\frac{1}{\Gamma[1-(\nu-k)]}\left(\ln\Gamma[1-(\nu-k]\right)'\right\} = \\
&= -\lim_{\nu\to n}\left\{\frac{\sin[\pi(\nu-k)]\,\Gamma(\nu-k)}{\pi}\ \ln\frac{\pi}{\sin[\pi(\nu-k)]\,\Gamma(\nu-k)}\right)'\right\} = \\
&= -\lim_{\nu\to n}\left\{\frac{\sin[\pi(\nu-k)]\cdot\Gamma(\nu-k)}{\pi}\left(\ln\pi-\ln\sin[\pi(\nu-k)]-\right.\right.\\
&\left.\left.-\ln\Gamma(\nu-k)\right)'\right\} = -\lim_{\nu\to n}\left\{\frac{\sin[\pi(\nu-k)]\,\Gamma(\nu-k)}{\pi}\left(-\frac{\cos[\pi(\nu-k)]\pi}{\sin[\pi(\nu-k)]}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{\Gamma'(\nu-k)}{[\Gamma(\nu-k)}\right)\right\} = -\lim_{\nu\to n}\left\{-\cos[\pi(\nu-k)]\,\Gamma(\nu-k)-\frac{\Gamma'(\nu-k)\sin[\pi(\nu-k)]}{\pi}\right\}
\end{aligned}
$$

и окончательно

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to n}\left\{\frac{1}{\Gamma(-\nu+k+1)}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\right]\right\} = \\
&= (-1)^{n-k}\,\Gamma(n-k) = (-1)^{n-k}(n-k-1)! \qquad (24.7)
\end{aligned}
$$

Наконец, для второй суммы второй из формул (24.5) положим

$$
k = n+m;
$$

тогда

$$-n+k+1=-n+n+m+1=m+1;\ -n+2k=-n+2n+$$
$$+2m=n+2m;$$

**если $k=n$, то $m=0$; если $k=\infty$, то $m=\infty$**

и в пределе, при $\nu=n$, эта сумма примет вид:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)}\right]=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\cdot\left[-\ln\frac{x}{2}-C+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right]. \qquad (24.8)$$

[если $m$ снова заменить через $k$, а затем применить формулу (5.10)].

Подставляя в формулу (24.2) вместо производных $\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}$ и $\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}$ их выражения из формул (24.5) и принимая во внимание формулы (24.6), (24.7) и (24.8), имеем

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left(\ln\frac{x}{2}+C-\sum_{l=1}^{n+k}\frac{1}{l}\right)-\right.$$
$$-(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}(-1)^{n-k}(n-k-1)!-(-1)^n(-1)^n\times$$
$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left(-\ln\frac{x}{2}-C+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right)\right]$$

или, на основании формулы (22.2),

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left\{2J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{l=1}^{n+k}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right)\right\} \qquad (24.9)$$

или, в раскрытом виде,

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left\{2J_n(x)\left(\ln^* \frac{x}{2} + C\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - \right.$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+n}\right]\right\}. \qquad (24.10)$$

Сравнение формулы (24.10) с формулой (22.8) показывает, что при целых значениях $\nu = n$ функция Неймана $N_n(x)$ только множителем $\frac{1}{\pi}$ отличается от цилиндрической функции второго рода $Y_n(x)$:

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} Y_n(x), \qquad (24.11)$$

то есть функция Неймана $N_n(x)$ совпадает с соответствующей функцией Вебера [см. (22.14)]*.

При помощи формулы (24.1) и формул (21.23) легко убедиться в том, что всякая функция Неймана порядка, равного половине целого нечетного числа, может быть выражена через элементарные функции. Так, например, если $\nu = \frac{1}{2}$, то формула (24.1) принимает вид:

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{J_{\frac{1}{2}}(x)\cos\frac{\pi}{2} - J_{-\frac{1}{2}}(x)}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

и, на основании второй из формул (21.22),

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad (24.12)$$

В заключение отметим, что так как функции Неймана представляют собою линейные комбинации соответствующих цилиндрических функций первого рода, то рекуррентные формулы, выведенные в § 20 для цилиндрических функций первого рода, сохраняют свою силу и для функций Неймана.

---

* Отсюда вытекает, очевидно, линейная независимость цилиндрических функций первого и второго рода, то есть функций $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — см. первое примечание на стр. 114.

## § 25. Функции Ханкеля

*Функции Ханкеля* или *цилиндрические функции третьего рода* определяются формулами:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x);\quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \tag{25.1}$$

Так как функции $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, которые мы будем называть соответственно *первой и второй функциями Ханкеля,* представляют собою линейные комбинации цилиндрических функций первого рода и функций Неймана, то они являются решениями уравнения Бесселя — линейно независимыми между собою, причем

$$\Delta\left[H_\nu^{(1)}(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\right] = -2i\,\Delta\left[J_\nu(x),\ N_\nu(x)\right] \tag{25.2}$$

и, на основании формулы (24.3),

$$\Delta\left[H_\nu^{(1)}(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\right] = -\frac{4i}{\pi x}. \tag{25.3}$$

Очевидно также, что функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ линейно независимы от цилиндрической функции первого рода $J_n\ (x)$, причем

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left[J_\nu(x),\ H_\nu^{(1)}(x)\right] &= i\Delta\left[J_\nu(x),\ N_\nu(x)\right]\\ \Delta\left[J_\nu(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\right] &= -i\Delta\left[J_\nu(x),\ N_\nu(x)\right]\end{aligned}\right\} \tag{25.4}$$

и, на основании формулы (24.3),

$$\Delta\left[J_\nu(x),\ H_\nu^{(1)}(x)\right] = \frac{2i}{\pi x};\quad \Delta\left[J_\nu(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\right] = -\frac{2i}{\pi x}. \tag{25.5}$$

Подставляя в формулы (25.1) вместо функции Неймана $N_\nu(x)$ ее выражение по формуле (24.1), можно функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ выразить через цилиндрические функции первого рода $J_\nu\ (x)$ и $J_{-\nu}\ (x)$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\,\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = \frac{J_\nu(x)(\sin\nu\pi + i\cos\nu\pi) - iJ_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi};$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\,\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = \frac{J_\nu(x)(\sin\nu\pi - i\cos\nu\pi) + iJ_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

откуда

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi}J_\nu(x)}{i\sin\nu\pi};\quad H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\nu\pi}J_\nu(x)}{i\sin\nu\pi}. \tag{25.6}$$

Формулы (25.6) имеют место только при условии, что $\nu$ не является целым числом. При целых значениях $\nu = n$ правые части этих формул обращаются в неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Однако, переходя в формулах (25.6) к пределу при $\nu \to n$, где $n$ есть целое число, и раскрывая неопределенности по правилу Лопиталя, мы сможем функции Ханкеля целых порядков определить по формулам:

$$\left.\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + \frac{i}{\pi}\left\{\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n\left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\} \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - \frac{i}{\pi}\left\{\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n\left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{25.7}$$

Если $\nu$ равно половине целого нечетного числа, то, как легко убедиться при помощи формул (25.1), (24.1) и (21.23), функции Ханкеля могут быть выражены через элементарные функции. Так, например, полагая $\nu = \frac{1}{2}$, при помощи формул (25.1), (21.22) и (24.12), находим:

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) + iN_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x - {}$$

$$- i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{ix}}{i};$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) - iN_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x + {}$$

$$+ i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{-ix}}{-i}.$$

Таким образом,

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{ix}}{i};\quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{-ix}}{-i}. \tag{25.8}$$

Отметим еще, что для функций Ханкеля сохраняют свою силу рекуррентные формулы, выведенные в § 20 для цилиндрических функций первого рода; это следует из того, что функции Ханкеля представляют собою линейные комбинации цилиндрических функций первого рода и функций Неймана, для которых указанные рекуррентные формулы имеют место.

Для установления связи между функциями Ханкеля $H_{-\nu}^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$ и связи между функциями Ханкеля $H_{-\nu}^{(2)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, заменим в формулах (25.6) $\nu$ через $-\nu$:

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = \frac{J_\nu(x) - e^{i\nu\pi}J_{-\nu}(x)}{-i\sin\nu\pi} = e^{i\nu\pi}\cdot\frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi}J_\nu(x)}{i\sin\nu\pi};$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(x) = \frac{-J_\nu(x) + e^{-i\nu\pi}J_{-\nu}(x)}{-i\sin\nu\pi} = e^{-i\nu\pi}\cdot\frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\nu\pi}J_\nu(x)}{i\sin\nu\pi},$$

откуда

$$H^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\nu\pi} H^{(1)}_{\nu}(x); \quad H^{(2)}_{-\nu}(x) = e^{-i\nu\pi} H^{(2)}_{\nu}(x). \tag{25.9}$$

Легко убедиться в том, что формулы (25.9) справедливы при любых значениях $\nu$, в том числе и при целых.

Формулы (25.1) дают возможность выразить через функции Ханкеля $H^{(1)}_{\nu}(x)$ и $H^{(2)}_{\nu}(x)$ цилиндрическую функцию первого рода $J_{\nu}(x)$ и функцию Неймана $N_{\nu}(x)$:

$$J_{\nu}(x) = \frac{H^{(1)}_{\nu}(x) + H^{(2)}_{\nu}(x)}{2}; \quad N_{\nu}(x) = \frac{H^{(1)}_{\nu}(x) - H^{(2)}_{\nu}(x)}{2i}. \tag{25.10}$$

Заслуживает внимания аналогия, существующая между формулами (25.10) и известными формулами Эйлера:

$$\cos \nu x = \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2}; \quad \sin \nu x = \frac{e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}}{2i}. \tag{25.11}$$

Сравнение формул (25.10) и (25.11) показывает, что функции Ханкеля $H^{(1)}_{\nu}(x)$ и $H^{(2)}_{\nu}(x)$ являются аналогами функций $e^{i\nu x}$ и $e^{-i\nu x}$, цилиндрическая функция первого рода $J_{\nu}(x)$ — аналогом функции $\cos \nu x$ и функция Неймана $N_{\nu}(x)$ — аналогом функции $\sin \nu x$.

## § 26. Модифицированные цилиндрические функции

Рассмотрим дифференциальное уравнение более общего вида, чем уравнение Бесселя (19.1),

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{26.1}$$

или

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{26.2}$$

где $k$ есть некоторое постоянное число.

Применяя к уравнению (26.1) подстановку:

$$kx = x_1; \quad kdx = dx_1; \quad dx = \frac{dx_1}{k}; \quad y' = \frac{dy}{dx} = k\frac{dy}{dx_1};$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = k^2 \frac{d^2y}{dx_1^2},$$

приводим это уравнение к виду:

$$x_1^2 \frac{d^2y}{dx_1^2} + x_1 \frac{dy}{dx_1} + (x_1^2 - \nu^2) y = 0.$$

Мы получили уравнение Бесселя, общее решение которого может быть определено по формуле (24.4):

$$y = C_1 J_\nu(x_1) + C_2 N_\nu(x_1).$$

Возвращаясь к прежнему независимому переменному $x$, для общего решения данного дифференциального уравнения (26.1) получаем формулу:

$$y = C_1 J_\nu(kx) + C_2 N_\nu(kx); \tag{26.3}$$

Если теперь мы положим

$$k = i = \sqrt{-1}, \tag{26.4}$$

то уравнение (26.1) примет вид:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0, \tag{26.5}$$

а его общее решение представится формулой

$$y = C_1 J_\nu(ix) + C_2 N_\nu(ix). \tag{26.6}$$

Определяя $J_\nu(ix)$ по первой из формул (19.2):

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{\nu+2k} = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k},$$

видим, что это решение уравнения (26.5) является вещественным только в том случае, когда $\nu$ есть целое и притом четное число. Для получения решения, вещественного при всех вещественных значениях $\nu$, достаточно обе части последнего равенства умножить на постоянную величину $i^{-\nu}$

$$i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Функция

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}, \tag{26.7}$$

связанная с функцией $J_\nu(ix)$ формулой:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(ix), \tag{26.8}$$

и называемая *модифицированной цилиндрической или бесселевой функцией первого рода порядка* $\nu$, является, очевидно, частным решением уравнения (26.5).

Если $\nu$ не является целым числом, то в качестве второго частного решения уравнения (26.5) можно взять функцию $I_{-\nu}(x)$; линейная независимость решений $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ при $\nu$ не являющемся целым числом, легко устанавливается при помощи определителя Вронского:

$$\Delta\left[I_\nu(x),\ I_{-\nu}(x)\right]=\begin{vmatrix} I_\nu(x) & I_{-\nu}(x) \\ I'_\nu(x) & I'_{-\nu}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i^{-\nu}J_\nu(ix) & i^{\nu}J_{-\nu}(ix) \\ i^{-\nu}J'_\nu(ix) & i^{\nu}J'_{-\nu}(ix)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} J_\nu(ix) & J_{-\nu}(ix) \\ J'_\nu(ix) & J'_{-\nu}(ix)\end{vmatrix}=\Delta\left[J_\nu(ix),\ J_{-\nu}(ix)\right]$$

и, на основании формулы (21.18),

$$\Delta\left[I_\nu(x),\ I_{-\nu}(x)\right]=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x i}\neq 0. \qquad (26.9)$$

Если же $\nu=n$ есть число целое, то, как следует из формулы (26.9), функции $I_n(x)$ и $I_{-n}(x)$ уже не являются линейно-независимыми решениями уравнения (26.5).

Чтобы второе частное решение уравнения (26.5) было линейно-независимым с его первым частным решением $I_\nu(x)$ и при целых значениях $\nu$ и чтобы, вместе с тем, это новое второе частное решение было вещественным при всех вещественных целых значениях $\nu$, определим его формулой:

$$K_\nu(x)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(ix), \qquad (26.10)$$

где $K_\nu(x)$ есть новое второе частное решение уравнения (26.5), а $H_\nu^{(1)}(ix)$ — первая функция Ханкеля.

Функцию $K_\nu(x)$ можно выразить через функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$. Считая, что $\nu$ не является целым числом, и заменяя $H_\nu^{(1)}(ix)$ его выражением по формуле (25.6), имеем

$$K_\nu(x)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,\frac{J_{-\nu}(ix)-e^{-\nu\pi i}J_\nu(ix)}{i\sin\nu\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}J_{-\nu}(ix)-e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}J_\nu(ix)}{\sin\nu\pi}=\frac{\pi}{2}\,\frac{i^{\nu}J_{-\nu}(ix)-i^{-\nu}J_\nu(ix)}{\sin\nu\pi}$$

и, на основании формулы (26.8), окончательно:

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}. \qquad (26.11)$$

Если $\nu=n$ есть число целое, то функция $K_n(x)$ определяется формулой:

$$K_n(x)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(x). \qquad (26.12)$$

Переходя в формуле (26.11) к пределу при $\nu\to n$ и применяя правило Лопиталя, для $K_n(x)$ получим формулу

$$K_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left\{\left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}-\left[\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\}. \qquad (26.13)$$

Функция $K_\nu(x)$ называется *модифицированной цилиндрической или бесселевой функцией второго рода порядка* $\nu$, а также — *функцией Макдональда.*

Отметим, что часто вместо названия «модифицированные цилиндрические функции» употребляется название «цилиндрические функции мнимого аргумента»; однако, это второе название функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ является менее удобным, чем первое, особенно в тех случаях, когда приходится иметь дело с цилиндрическими функциями комплексного независимого переменного.

В линейной независимости решений $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ уравнения (26.5) мы легко убедимся, вычислив для этих решений определитель Вронского:

$$\Delta\left[I_\nu(x),\ K_\nu(x)\right] = \begin{vmatrix} I_\nu(x) & K_\nu(x) \\ I'_\nu(x) & K'_\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\begin{vmatrix} I_\nu(x) & I_{-\nu}(x)-I_\nu(x) \\ I'_\nu(x) & I'_{-\nu}(x)-I'_\nu(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left\{\begin{vmatrix} I_\nu(x) & I_{-\nu}(x) \\ I'_\nu(x) & I'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} I_\nu(x) & I_\nu(x) \\ I'_\nu(x) & I'_\nu(x) \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\begin{vmatrix} i^{-\nu}J_\nu(ix) & i^\nu J_{-\nu}(ix) \\ i^{-\nu}J'_\nu(ix) & i^\nu J'_{-\nu}(ix) \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\begin{vmatrix} J_\nu(ix) & J_{-\nu}(ix) \\ J'_\nu(ix) & J'_{-\nu}(ix) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Delta\left[J_\nu(ix),\ J_{-\nu}(ix)\right]$$

и, на основании формулы (21.18),

$$\Delta\left[I_\nu(x),\ K_\nu(x)\right] = -\frac{1}{xi} \neq 0. \tag{26.14}$$

Принцип непрерывности дает возможность распространить этот результат и на целые значения $\nu = n$; таким образом, можно считать установленной линейную независимость решений $I_n(x)$ и $K_n(x)$ уравнения (26.5).

Формула (26.11) показывает, что функция Макдональда $K_\nu(x)$ вещественна при всех вещественных значениях $\nu$ и что

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x). \tag{26.15}$$

Таким образом, общее решение уравнения (26.5), вещественное при всех вещественных значениях $\nu$, определяется формулой:

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x), \tag{26.16}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ определяются при нецелых значениях $\nu$ формулами (26.7) и (26.11), а при целых значениях $\nu = n$ — формулами (26.7) и (26.13).

Если $\nu = n$, где $n$ есть целое число, то для функции Макдональда $K_n(x)$ имеет место формула

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) + $$
$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} +$$
$$+ (-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{l=1}^{n+k}\frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right) \qquad (26.17)$$

или

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} +$$
$$+ (-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n}\right], \qquad (26.18)$$

где $C$ — Эйлерова постоянная, а $I_n(x)$ определяется по формуле (26.7).

Вывод формулы (26.17) вполне аналогичен выводу формулы (24.9) для функции Неймана $N_n(x)$.

При $n=0$ формула (26.17) принимает вид

$$K_0(x) = -I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right)\right] \qquad (26.19)$$

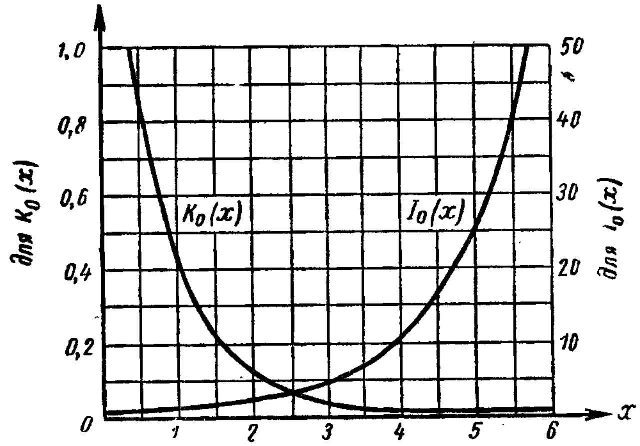
или

$$K_0(x) = -I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right), \qquad (26.20)$$

где [см. формулу (26.7)]

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 + \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 +$$
$$+ \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots \qquad (26.21)$$

Графики модифицированных цилиндрических функций $I_0(x)$ и $K_0(x)$ изображены на черт. 9.




Черт. 9

В заключение отметим, что для модифицированных цилиндрических функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ сохраняют свою силу рекуррентные формулы, выведенные в § 20 для цилиндрических функций первого рода; доказательство этого утверждения затруднений не представляет.

## § 27. Функции Кельвина

Если в уравнении (26.5) положить $\nu=0$ и заменить $x$ через $t$, то уравнение это примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}-y=0. \tag{27.1}$$

Линейно-независимые частные решения $I_0(t)$ и $K_0(t)$ уравнения (27.1) могут быть, очевидно, определены по формулам (26.21) и (26.20)

$$I_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \tag{27.2}$$

$$K_0(t)=-I_0(t)\left(\ln\frac{t}{2}+C\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right) \tag{27.3}$$

Применяя, далее, к уравнению (27.1) подстановку

$$t=\sqrt{i}\,x=e^{\frac{\pi}{4}i}\,x, \tag{27.4}$$

приведем это уравнение к виду

$$\frac{1}{i}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{\sqrt{i}\,x}\,\frac{1}{\sqrt{i}}\,\frac{dy}{dx}-y=0$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}-iy=0. \tag{27.5}$$

Для получения частных решений уравнения (27.5) достаточно, очевидно, заменить в формулах (27.2) и (27.3) $t$ через $\sqrt{i}\,x$. После указанной замены формула (27.2) примет вид

$$I_0\left(\sqrt{i}\,x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\sqrt{i}\,x}{2}\right)^{2k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ix^2)^k}{2^2 4^2\ldots(2k)^2}$$

или, в раскрытом виде,

$$I_0\left(\sqrt{i}\,x\right)=1+\frac{ix^2}{2^2}+\frac{i^2x^4}{2^24^2}+\frac{i^3x^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\frac{i^4x^8}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2}+\frac{i^5x^{10}}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2\,10^2}+\cdots$$

и окончательно

$$I_0\left(\sqrt{i}\,x\right)=\left(1-\frac{x^4}{2^2\,4^2}+\frac{x^8}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2}-\cdots\right)+$$
$$+i\left(\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\frac{x^{10}}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2\,10^2}-\cdots\right). \tag{27.6}$$

Формула (27.6) показывает, что $I_0\,(\sqrt{i}\,x)$ представляет собою функцию комплексную; для вещественной и мнимой частей этой функции Кельвин ввел обозначения $\operatorname{ber}x$ и $\operatorname{bei}x$,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ber}x&=1-\frac{x^4}{2^24^2}+\frac{x^8}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2}-\cdots\\ \operatorname{bei}x&=\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^6}{2^24^26^2}+\frac{x^{10}}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2\,10^2}-\cdots\end{aligned}\right\} \tag{27.7}$$

При помощи этих обозначений первое частное решение $I_0(\sqrt{i}\,x)$ уравнения (27.5) может быть записано в виде

$$I_0\,(\sqrt{i}\,x)=\operatorname{ber}x+i\operatorname{bei}x. \tag{27.8}$$

Для получения второго частного решения уравнения (27.5) заменим $t$ через $\sqrt{i}\,x$ в формуле (27.3):

$$K_0\left(\sqrt{i}\,x\right)=-I_0\left(\sqrt{i}\,x\right)\left(\ln\frac{\sqrt{i}\,x}{2}+C\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\sqrt{i}\,x}{2}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right)$$

или, в раскрытом виде и после замены $I_0(\sqrt{i}\,x)$ его выражением по формуле (27.8),

$$K_0\left(\sqrt{i}\,x\right)=(\operatorname{ber}x+i\operatorname{bei}x)\left(\ln 2-\ln\sqrt{i}-\ln x-C\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ix^2)^k}{2^2\cdot 4^2\dots(2k)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right).$$

Но

$$\ln\sqrt{i}=\frac{1}{2}\ln i=\frac{1}{2}\ln e^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{4}i;$$

следовательно,

$$K_0\left(\sqrt{i}\,x\right)=\Big[\operatorname{ber}x(\ln 2-\ln x-C)+\frac{\pi}{4}\operatorname{bei}x-\frac{x^4}{2^24^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{x^8}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\dots\Big]+$$

$$+i\Big[\operatorname{bei}x(\ln 2-\ln x-C)-\frac{\pi}{4}\operatorname{ber}x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\frac{x^{10}}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2\,10^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\dots\Big].$$

Вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ker}x&=\operatorname{ber}x(\ln 2-\ln x-C)+\frac{\pi}{4}\operatorname{bei}x-\frac{x^4}{2^2\,4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\\
&+\frac{x^8}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\dots\\
\operatorname{kei}x&=\operatorname{bei}x(\ln 2-\ln x-C)-\frac{\pi}{4}\operatorname{ber}x+\frac{x^2}{2^2}-\\
&-\frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{x^{10}}{2^2\,4^2\,6^2\,8^2\,10^2}\times\\
&\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\dots
\end{aligned}\right\}\quad(27.9)$$

второе частное решение уравнения (27.5) можно записать в виде:

$$K_0\left(\sqrt{i}\,x\right)=\operatorname{ker}x+i\operatorname{kei}x.\qquad(27.10)$$

Между функциями $\operatorname{ber}x$ и $\operatorname{bei}x$, а также между функциями $\operatorname{ker}x$ и $\operatorname{kei}x$ существуют простые соотношения. Дадим вывод одного из этих соотношений. С этой целью, умножим обе части первого из равенств (27.7) на $x$:

$$x \operatorname{ber} x = x - \frac{x^5}{2^2 4^2} + \frac{x^9}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \cdots$$

и результаты умножения проинтегрируем в пределах от 0 до $x$:

$$\int_0^x x \operatorname{ber} x dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6} + \frac{x^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10} - \cdots$$

или

$$\int_0^x x \operatorname{ber} x dx = \frac{2x^2}{2^2} - \frac{6x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{10x^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \cdots \tag{27.11}$$

С другой стороны, продифференцируем второе из равенств (27.7):

$$(\operatorname{bei} x)' = \frac{2x}{2^2} - \frac{6x^5}{2^2 4^2 6^2} + \frac{10x^9}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \cdots$$

и результаты дифференцирования умножим на $x$:

$$x (\operatorname{bei} x)' = \frac{2x^2}{2^2} - \frac{6x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{10x^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \cdots \tag{27.12}$$

Сравнение формул (27.11) и (27.12) показывает, что

$$\int_0^x x \operatorname{ber} x \, dx = x (\operatorname{bei} x)'. \tag{27.13}$$

Аналогично выводится формула

$$\int_0^x x \operatorname{bei} x dx = -x (\operatorname{ber} x)' \tag{27.14}$$

и формулы:

$$\int_0^x x \operatorname{ker} x \, dx = x (\operatorname{kei} x)'; \quad \int_0^x x \operatorname{kei} x \, dx = -x (\operatorname{ker} x)' \tag{27.15}$$

Кроме функций $\operatorname{ber} x$, $\operatorname{bei} x$, $\operatorname{ker} x$ и $\operatorname{kei} x$, рассматриваются еще функции $\operatorname{her} x$ и $\operatorname{hei} x$, связанные с первой функцией Ханкеля.

При помощи формулы (26.10), первая функция Ханкеля может быть выражена через функцию Макдональда:

$$H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(x) = -\frac{2i}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(x) \tag{27.16}$$

или, если $x$ заменить через $\sqrt{i}\, x$,

$$H_\nu^{(1)}(i\sqrt{i}\,x) = -\frac{2i}{\pi}e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}K_\nu(\sqrt{i}\,x), \tag{27.17}$$

откуда для случая $\nu=0$ получаем формулу

$$H_0^{(1)}\left(i\sqrt{i}\,x\right) = -\frac{2i}{\pi}K_0\left(\sqrt{i}\,x\right). \tag{27.18}$$

Так как $H_0^{(1)}(i\sqrt{i}\,x)$ представляет собою функцию комплексную, то, полагая

$$H_0^{(1)}\left(i\sqrt{i}\,x\right) = \operatorname{her} x + i\operatorname{hei} x \tag{27.19}$$

и заменяя функцию $K_0(\sqrt{i}\,x)$ ее выражением по формуле (27.10), можем равенство (27.18) взять в виде:

$$\operatorname{her} x + i\operatorname{hei} x = -\frac{2i}{\pi}(\operatorname{ker} x + i\operatorname{kei} x),$$

откуда

$$\operatorname{her} x = \frac{\quad}{\pi}\operatorname{kei} x;\quad \operatorname{hei} x = -\frac{2}{\pi}\operatorname{ker} x, \tag{27.20}$$

то есть функции $\operatorname{her} x$ и $\operatorname{hei} x$ легко определяются при помощи формул (27.9).

В заключение укажем, что, наряду с функциями $\operatorname{ber} x$, $\operatorname{bei} x$, $\operatorname{ker} x$, $\operatorname{kei} x$, $\operatorname{her} x$ и $\operatorname{hei} x$, можно ввести в рассмотрение функции более общего вида, определив их при помощи формул:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu\left(i\sqrt{i}\,x\right) = I_\nu\left(\sqrt{i}\,x\right) &= \operatorname{ber}_\nu x + i\operatorname{bei}_\nu x \\ K_\nu\left(\sqrt{i}\,x\right) &= \operatorname{ker}_\nu x + i\operatorname{kei}_\nu x \\ H_\nu^{(1)}\left(i\sqrt{i}\,x\right) &= \operatorname{her}_\nu x + i\operatorname{hei}_\nu x \end{aligned}\right\} \tag{27.21}$$

где

$$\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i}. \tag{27.22}$$

Функции, рассмотренные в настоящем параграфе, соответствуют, очевидно, случаю $\nu=0$ (значок, равный нулю, обычно опускается, то есть вместо $\operatorname{ber}_0 x$ пишут $\operatorname{ber} x$ и т. д.).

## § 28. Разложение Шлёмильха

Предположим, что данная функция $f(x)$ может быть разложена в бесконечный ряд по цилиндрическим функциям нулевого порядка:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 J_0(x) + a_2 J_0(2x) + a_3 J_0(3x) + \cdots + \\ + a_n J_0(nx) + \cdots \tag{28.1}$$

и что этот ряд можно почленно дифференцировать

$$f'(x) = a_1 J_0'(x) + 2a_2 J_0'(2x) + 3a_3 J_0'(3x) + \\ + \cdots + na_n J_0'(nx) + \cdots \tag{28.2}$$

Вспоминая формулу (20.5):

$$J_0'(x) = - J_1(x),$$

равенство (28.2) мы можем взять в виде

$$f'(x) = -a_1 J_1(x) - 2a_2 J_1(2x) - 3a_3 J_1(3x) - \cdots - \\ - na_n J_1(nx) - \cdots = - \sum_{n=1}^{\infty} na_n J_1(nx). \tag{28.3}$$

Полагая, далее,

$$x = u \sin\varphi, \tag{28.4}$$

то есть беря формулу (28.3) в виде

$$f'(u \sin\varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} na_n J_1(nu \sin\varphi) \tag{28.5}$$

и рассматривая $u$, как параметр, значение которого зафиксировано, проинтегрируем обе части равенства (28.5) по $\varphi$ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u \sin\varphi)\, d\varphi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} na_n J_1(nu \sin\varphi)\right] d\varphi = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} na_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(nu \sin\varphi)\, d\varphi. \tag{28.6}$$

Но по первой из формул (19.2)

$$J_1(nu \sin\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} \frac{n^{2k+1} u^{2k+1} \sin^{2k+1}\varphi}{2^{2k+1}};$$

следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(nu \sin\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(nu)^{2k+1} \sin^{2k+1}\varphi}{k!\,(k+1)!\,2^{2k+1}}\right] d\varphi = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(nu)^{2k+1}}{k!\,(k+1)!\,2^{2k+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}\varphi\, d\varphi.$$

По формуле (6.2):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \cos^m \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)},$$

в которой мы должны положить

$$n=2k+1;\ m=0;\ \frac{n+1}{2}=k+1;\ \frac{m+1}{2}=\frac{1}{2};\ \frac{n+m}{2}+1=\frac{2k+3}{2},$$

имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2^k k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)};$$

следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(nu\sin\varphi)\,d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (nu)^{2k+1}\, 2^k k!}{k!\,(k+1)!\,2^{2k+1}\,1\cdot 3\cdots(2k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (nu)^{2k+1}}{(k+1)!\,2^{k+1}\,1\cdot 3\cdots(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (nu)^{2k+1}}{2\cdot 4\cdots(2k+2)\,1\cdot 3\cdots(2k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (nu)^{2k+1}}{(2k+2)!} = \frac{nu}{2!} - \frac{n^3u^3}{4!} + \frac{n^5u^5}{6!} - \ldots = \frac{1}{nu} - \frac{1}{nu} + \frac{nu}{2!} -$$

$$- \frac{n^3u^3}{4!} + \frac{n^5u^5}{6!} - \ldots = \frac{1}{nu} - \frac{1}{nu}\left(1 - \frac{n^2u^2}{2!} + \frac{n^4u^4}{4!} - \frac{n^6u^6}{6!} + \ldots\right),$$

то есть

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(nu\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1-\cos nu}{nu} \qquad (28.7)$$

и формула (28.6) принимает вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u\sin\varphi)\,d\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n\frac{1-\cos nu}{nu},$$

откуда

$$u\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'\ (u\sin\varphi)\,d\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nu. \qquad (28.8)$$

Так как $J_0(0)=1$ [см. формулу (21.4)], то при $x=0$ формула (28.1) принимает вид:

$$f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(0) - \frac{a_0}{2}$$

и, следовательно,

$$u\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{a_0}{2} - f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nu. \qquad (28.9)$$

В правой части равенства (28.9) мы получили ряд Фурье, коэффициенты которого определяются по известным формулам Эйлера-Фурье:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_0}{2} - f(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{u\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u\sin\varphi)\,d\varphi\right\}du \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\cos nu\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u\sin\varphi)\,d\varphi\right\}du\ (n=1,2,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (28.10)$$

Применяя подстановку

$$\sin\varphi = t, \qquad (28.11)$$

при которой

$$\varphi = \arcsin t; \quad d\varphi = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

если $\varphi=0$, то $t=0$; если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $t=1$,

формулы (28. 10) можно привести к виду:

$$
\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{f(0)+u\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}du \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}u\cos nu\left\{\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}d\,t\;(n=1,2,3,\ldots)
\end{aligned}\right\} \qquad (28.12)
$$

Формулы (28.12) были выведены Шлёмильхом; поэтому и разложение (28.1) данной функции $f(x)$ в бесконечный ряд по цилиндрическим функциям нулевого порядка с коэффициентами, определяемыми формулами (28.12), называется *разложением Шлёмильха.*

Однако, нам надлежит еще убедиться в том, что, подставляя в ряд (28.1) значения коэффициентов $a_o$ и $a_n$ $(n=1, 2, 3,..)$, вычисленные по формулам (28.12), и определяя сумму этого ряда, мы получим данную функцию $f(x)$.

Обозначив через $f_1(x)$ функцию, получаемую в результате подстановки в ряд (28.1) найденных значений коэффициентов $a_0$ и $a_n (n=1, 2, 3, \ldots)$, имеем

$$
f_1(x) = f(0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}u\left\{\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}du +
$$

$$
+\sum_{n=1}^{\infty}J_0(nx)\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}u\cos nu\left\{\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}du
$$

или, если во втором члене правой части изменить порядок интегрирования и суммирования,

$$
f_1(x) = f(0) + \frac{2}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}u\,du +
$$

$$
+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}J_0(nx)\cos nu\right\}u\,du
$$

и, так как теперь знак интеграла, вычисляемого по $u$, можно взять общий,

$$
f_1(x) = f(0) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\int\limits_0^1\frac{f'(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}J_0(nx)\cos nu\right]\right\}u\,du. \qquad (28.13)
$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке, можно рассматривать, как разложение в тригонометрический ряд по косинусам функции $F(x, u)$, определяемой формулой:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} J_0(nx)\cos nu = F(x,u) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-u^2}}, & \text{если } 0 < u < x \\ 0, & \text{если } x < u < \pi, \end{cases} \qquad (28.14)$$

причем $x$ играет роль параметра, значение которого зафиксировано.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, представим функцию $F(x,u)$ в виде ряда

$$F(x,u) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nu, \qquad (28.15)$$

коэффициенты которого, вообще говоря, должны зависеть от $x$.

Применяя формулы для коэффициентов тригонометрического ряда, имеем:

$$b_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x,u)\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{x} F(x,u)\,du + \frac{2}{\pi}\int_x^{\pi} F(x,u)\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}} + \frac{2}{\pi}\int_x^{\pi} 0\,du = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x,u)\cos nu\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{x} F(x,u)\cos nu\,du +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_x^{\pi} F(x,u)\cos nu\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{\cos nu\,du}{\sqrt{x^2-u^2}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_x^{\pi} 0\cos nu\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{\cos nu\,du}{\sqrt{x^2-u^2}}.$$

Применяя, далее, подстановку

$$u = x\sin v;\ du = x\cos v\,dv;\ \sqrt{x^2-u^2} = x\cos v,$$

при которой

если $u=0$, то $v=0$; если $u=x$, то $v=\frac{\pi}{2}$,

для $b_n$ получим формулу

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx\sin v)\,dv,$$

которая, на основании первой из формул (23.5), может быть заменена формулой:

$$b_n = \frac{2}{\pi} J_0(nx)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv + \frac{2}{\pi}\, 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(nx)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nv)\,dv,$$

если в формуле (23.5) заменить $x$ через $nx$ и $\varphi$ через $v$.

Но все интегралы, стоящие под знаком суммы, равны нулю; следовательно,

$$b_n = \frac{2}{\pi} J_0(nx)\frac{\pi}{2} = J_0(nx).$$

Таким образом,

$$b_0 = 1;\ b_n = J_0(nx)$$

и формула (28.15) принимает вид:

$$F(x, u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(nx)\cos nu,$$

откуда и вытекает справедливость формулы (28.14), при помощи которой формула (28.13) приводится к виду:

$$f_1(x) = f(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^x \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-u^2}}\int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right\} u\,du$$

или, если применить обратную подстановку по формуле (28.11),

$$f_1(x) = f(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^x \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-u^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u\sin\varphi)\,d\varphi\right\} u\,du$$

или, если $u$ и $\varphi$ рассматривать, как полярные координаты,

$$f_1(x) = f(0) + \frac{2}{\pi}\iint_S \frac{f'(u\sin\varphi)}{\sqrt{x^2-u^2}}\, u\,du\,d\varphi,$$

где $S$ есть четверть круга радиуса $x$, расположенная в первом координатном углу.

В декартовых координатах $\xi = u\cos\varphi$, $\eta = u\sin\varphi$, имеем

$$f_1(x) = f(0) + \frac{2}{\pi}\iint_S \frac{f'(\eta)}{\sqrt{x^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta = f(0) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^x f'(\eta)\left\{\int_0^{\sqrt{x^2-\eta^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2-\eta^2}}\right\} d\eta =$$

$$= f(0) + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^x f'(\eta)\, d\eta,$$

откуда, если функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(0, x)$,

$$f_1(x) = f(0) + [f(x) - f(0)] = f(x).$$

Таким образом, ряд (28.1) с коэффициентами, определяемыми по формулам (28.12), действительно имеет сумму, равную данной функции $f(x)$, которая, как следует из предыдущего, должна быть непрерывной в интервале $(0, x)$ и должна иметь производную $f'(x)$, непрерывную в интервале $(0, \pi)$.

К вопросу о разложении данной функции в ряд по цилиндрическим функциям мы вернемся в §33.

## § 29. Представление решений уравнения Бесселя контурными интегралами

Переходя к изучению цилиндрических функций в комплексной области, мы прежде всего докажем, что в этом случае решения уравнения Бесселя могут быть найдены в форме контурных интегралов. Однако, сначала мы рассмотрим дифференциальное уравнение более общего вида, а именно — так называемое *уравнение Лапласа*

$$(az + a_1)\frac{d^2 w}{dz^2} + (bz + b_1)\frac{dw}{dz} + (cz + c_1)w = 0, \tag{29.1}$$

где $w$ есть искомая функция комплексного независимого переменного $z$, а $a$, $b$, $c$ и $a_1$, $b_1$, $c_1$ — постоянные коэффициенты.

Предположив, что уравнению (29.1) удовлетворяет функция вида

$$w = \int_l \varphi(\zeta)\, e^{\zeta z}\, d\zeta, \tag{29.2}$$

где функция $\varphi(\zeta)$ и контур интегрирования $l$ заранее не известны, и замечая, что в этом случае

$$\frac{dw}{dz} = \int_l \varphi(\zeta)\,\zeta e^{\zeta z}\, d\zeta;\quad \frac{d^2w}{dz^2} = \int_l \varphi(\zeta)\,\zeta^2 e^{\zeta z}\, d\zeta,$$

приводим уравнение (29.1) к виду

$$(az+a_1)\int_l \varphi(\zeta)\zeta^2 e^{\zeta z}\,d\zeta+(bz+b_1)\int_l \varphi(\zeta)\zeta e^{\zeta z}\,d\zeta+$$
$$+(cz+c_1)\int_l \varphi(\zeta)e^{\zeta z}\,d\zeta=0,$$

откуда

$$\int_l \varphi(\zeta)e^{\zeta z}\left[(a\zeta^2+b\zeta+c)z+(a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1)\right]d\zeta=0. \qquad (29.3)$$

Потребуем дополнительно, чтобы функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяла условию

$$(a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1)\varphi(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}\left[(a\zeta^2+b\zeta+c)\varphi(\zeta)\right]; \qquad (29.4)$$

тогда

$$(a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1)\varphi(\zeta)=\frac{d(a\zeta^2+b\zeta+c)}{d\zeta}\varphi(\zeta)+(a\zeta^2+b\zeta+c)\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}$$

или

$$\varphi(\zeta)\left[(a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1)-\frac{d(a\zeta^2+b\zeta+c)}{d\zeta}\right]=(a\zeta^2+b\zeta+c)\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}$$

или, после деления всех членов равенства на $\varphi(\zeta)$ и на $a\zeta^2+b\zeta+c$ и после умножения их на $d$ ,

$$\frac{a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1}{a\zeta^2+b\zeta+c}d\zeta-\frac{d(a\zeta^2+b\zeta+c)}{a\zeta^2+b\zeta+c}=\frac{d\varphi(\zeta)}{\varphi(\zeta)},$$

откуда, с точностью до произвольной постоянной,

$$\int\frac{a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1}{a\zeta^2+b\zeta+c}d\zeta-\ln(a\zeta^2+b\zeta+c)=\ln\varphi(\zeta)$$

и

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{a\zeta^2+b\zeta+c}e^{\int\frac{a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1}{a\zeta^2+b\zeta+c}d\zeta}. \qquad (29.5)$$

Формула (29.5) показывает, что функция $\varphi(\zeta)$ всегда может быть найдена.

Беря, далее, уравнение (29.3) в виде

$$\int_l\left\{(a\zeta^2+b\zeta+c)ze^{\zeta z}\varphi(\zeta)+(a_1\zeta^2+b_1\zeta+c_1)\varphi(\zeta)e^{\zeta z}\right\}d\zeta=0,$$

и применяя к нему формулу (29.4), имеем

$$\int_l\left\{(a\zeta^2+b\zeta+c)ze^{\zeta z}\varphi(\zeta)+e^{\zeta z}\frac{d}{d\zeta}\left[(a\zeta^2+b\zeta+c)\varphi(\zeta)\right]\right\}d\zeta=0,$$

то есть

$$\int_l\frac{d}{d\zeta}\left[(a\zeta^2+b\zeta+c)\varphi(\zeta)e^{\zeta z}\right]d\zeta=0$$

или, если положить

$$(a\zeta^2 + b\zeta + c)\varphi(\zeta)e^{\zeta z} = \Phi(\zeta), \tag{29.6}$$

то

$$\int\limits_l \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}d\zeta = 0,$$

откуда

$$\int\limits_l d\Phi(\zeta) = 0. \tag{29.7}$$

Таким образом, функция $w$, определяемая формулой (29.2), действительно удовлетворяет уравнению Лапласа (29.1), но при условии такого выбора контура $l$, что значение функции $\Phi(\zeta)$ в конечной точке контура $l$ будет совпадать с ее значением в начальной точке этого контура; в остальном контур $l$ может быть произвольным.

Обращаясь теперь к рассмотрению уравнения Бесселя

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0 \tag{29.8}$$

и применяя к нему подстановку

$$w = z^\nu w_1, \tag{29.9}$$

при которой

$$w' = \nu z^{\nu-1} w_1 + z^\nu w_1'; \; w'' = \nu(\nu-1)z^{\nu-2}w_1 + 2\nu z^{\nu-1}w_1' + z^\nu w_1'',$$

приводим это уравнение к виду

$$\nu(\nu-1)z^\nu w_1 + 2\nu z^{\nu+1}w_1' + z^{\nu+2}w_1'' + \nu z^\nu w_1 +$$
$$+ z^{\nu+1}w_1' + z^{\nu+2}w_1 - \nu^2 z^\nu w_1 = 0$$

или

$$z^{\nu+2}w_1'' + (2\nu+1)z^{\nu+1}w_1' + z^{\nu+2}w_1 = 0$$

и окончательно

$$zw_1'' + (2\nu+1)w_1' + zw_1 = 0. \tag{29.10}$$

Мы привели уравнение Бесселя к виду уравнения Лапласа; сравнивая уравнение (29.10) с уравнением (29.1), замечаем, что в рассматриваемом случае:

$$a = 1; \; b = 0; \qquad c = 1;$$
$$a_1 = 0; b_1 = 2\nu + 1; \; c_1 = 0;$$

следовательно [см. формулу (29.5)],

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2+1}e^{\int\frac{(2\nu+1)\zeta}{\zeta^2+1}d\zeta} \tag{29.11}$$

и так как

$$\int \frac{(2\nu+1)\zeta}{\zeta^2+1}\,d\zeta = \frac{2\nu+1}{2}\ln(\zeta^2+1) \text{ и } e^{\int \frac{(2\nu+1)\zeta}{\zeta^2+1}d\zeta} = (\zeta^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}},$$

то, с точностью до постоянного множителя,

$$\varphi(\zeta) = (\zeta^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} \tag{29.12}$$

и, по формуле (29.2),

$$w_1 = \int_l (\zeta^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\zeta z}\,d\zeta. \tag{29.13}$$

Следовательно [см. формулу (29.9)],

$$w = z^\nu \int_l (\zeta^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\zeta z}\,d\zeta. \tag{29.14}$$

Заменяя $\zeta$ через $i\zeta$* (и, следовательно, $\zeta^2$ через $-\zeta^2$, а $d\zeta$ через $id\zeta$ ), для $w$ получаем формулу

$$w = z^\nu i \int_l (-\zeta^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{iz\zeta}d\zeta = z^\nu i \int_l (\zeta^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}(-1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{iz\zeta}\,d\zeta.$$

Но

$$(-1)^{\nu-\frac{1}{2}} = (-1)^\nu(-1)^{-\frac{1}{2}} = (-1)^\nu\frac{1}{i},$$

причем первый множитель $(-1)^\nu$ можно отбросить, так как он может изменить только знак функции $w$, которая и так уже определена только с точностью до постоянного множителя, что также не является существенным, вследствие однородности уравнения Бесселя.

Следовательно,

$$w = z^\nu \int_l (\zeta^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{iz\zeta}\,d\zeta. \tag{29.15}$$

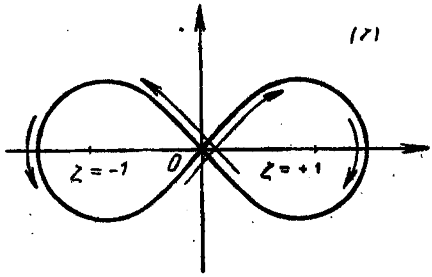
Этот результат показывает, что в комплексной области уравнению Бесселя действительно может удовлетворять функция, представляющаяся некоторым контурным интегралом.

Что касается формы контура $l$, то при его выборе нужно иметь в виду, что в том случае, когда $\nu - \frac{1}{2}$ не является чис-

---

* Эта замена равносильна, очевидно, повороту плоскости ($\zeta$) против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$.

лом целым, функция $(\zeta^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ многозначна и ее аргумент возрастает на величину $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi i$ при обходе в положительном направлении точки $\zeta=+1$ или точки $\zeta=-1$, причем форма контура, по которому этот обход совершается, может быть какой угодно; модуль же функции $(\zeta^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ в результате




Черт. 10

указанных обходов не изменяется. Однако, если контур $l$ имеет форму восьмерки, охватывающей точки $\zeta=+1$ и $\zeta=-1$ (черт. 10), то при полном обходе такого контура аргумент функции $(\zeta^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ не изменится, так как обход точки $\zeta=-1$ даст увеличение аргумента на величину $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi i$, а обход точки $\zeta=+1$ — уменьшение аргумента на такую же величину (или наоборот — в зависимости от направления обхода).

Отметим еще, что, как следует из теоремы Коши, функция $w$, определяемая формулой (29,15), не изменяется при любой деформации контура $l$, при которой он продолжает оставаться состоящим из двух петель, причем одна петля должна постоянно охватывать точку $\zeta=+1$, а другая петля должна постоянно охватывать точку $\zeta=-1$.

## § 30. Интегральные формулы для цилиндрических функций первого рода

Рассматривая уравнение Бесселя в комплексной области

$$z^2w''+zw'+(z^2-\nu^2)w=0, \tag{30.1}$$

возьмем его решение, представляющееся цилиндрической функцией первого рода

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}. \tag{30.2}$$

В справедливости для комплексной области этой формулы, а также и всех остальных формул для цилиндрических функций, выведенных в §§ 19—28, можно убедиться или путем применения принципа аналитического продолжения, или путем повторения рассуждений указанных параграфов, но применительно к уравнению Бесселя, взятому в комплексной области.

Так как, на основании формулы (8.6),

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}\tau^{-(\nu+k+1)}\,e^{\tau}\,d\tau,$$

где $\lambda$ есть контур, изображенный на черт. 5, то формулу (30.2) можно заменить формулой

$$J_{\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_{\lambda}\tau^{-(\nu+k+1)}\,e^{\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}d\tau$$

или формулой

$$J_{\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}\tau^{-(\nu+1)}\,e^{\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,\tau^{-k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}d\tau,$$

так как изменение порядка интегрирования и суммирования является допустимым, вследствие равномерной сходимости ряда, стоящего в последней формуле под знаком интеграла.

Замечая, далее, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,\tau^{-k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z^2}{4\tau}\right)^{k}=e^{-\frac{z^2}{4\tau}},$$

для $J_{\nu}(z)$ получаем формулу

$$J_{\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\tau^{-(\nu+1)}\,e^{-\frac{z^2}{4\tau}+\tau}\,d\tau. \tag{30.3}$$

Предположив, что

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}, \tag{30.4}$$

и применяя подстановку

$$\tau=\frac{1}{2}zt;\quad d\tau=\frac{z}{2}\,dt, \tag{30.5}$$

при которой

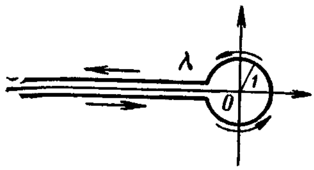
$$\frac{z}{2}=\frac{\tau}{t};\quad \frac{z^2}{4}=\frac{\tau^2}{t^2};\quad \frac{z^2}{4\tau}=\frac{\tau}{t^2};\quad \frac{z^2}{4\tau}=\frac{zt}{2t^2};\quad \frac{z^2}{4\tau}=\frac{z}{2t},$$

а контур $\lambda$ может быть оставлен без изменения, приведем формулу (30.3) к виду:

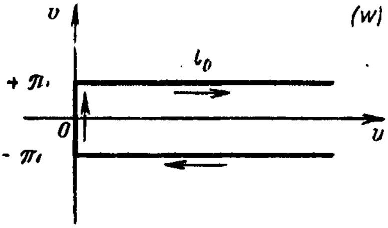
$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda} t^{-(\nu+1)} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,dt. \tag{30.6}$$

Формула (30.6) называется *формулой Сонина*.

В соответствии со сказанным в § 8, контур $\lambda$ можно деформировать произвольным образом, лишь бы он продолжал охватывать точку $t=0$ и лишь бы его концы продолжали оставаться в $-\infty$. Воспользовавшись этим, будем под $\lambda$ подразумевать контур, состоящий из нижнего края разреза по отрицательной части вещественной оси, из окружности $|t|=1$ и из верхнего края того же разреза (черт. 11).




Черт. 11




Черт. 12

Полагая, далее,

$$t = e^w\,;\ dt = e^w\,dw \tag{30.7}$$

и замечая, что при этом

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^w - e^{-w}\right) = \operatorname{sh} w;\ t^{-(\nu+1)} = e^{-\nu w}\,e^{-w},$$

приводим формулу (30.6) к виду

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_0} e^{-\nu w}\,e^{-w}\,e^{z\operatorname{sh} w}\,e^w\,dw,$$

то есть

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_0} e^{z\operatorname{sh} w - \nu w}\,dw. \tag{30.8}$$

Контур $l_0$, получающийся из контура $\lambda$ в результате преобразования, определяемого формулой (30.7), имеет форму, изображенную на черт. 12. В самом деле, известно, что функция $t=e^w$ преобразует прямую $\operatorname{Im} w = c_1$ в полупрямую $\arg t = c_1$ [следовательно, прямая $\operatorname{Im} w = -\pi i$ переходит в полупрямую $\arg t = -\pi i$, то есть в нижний край разреза по отрицательной части вещественной оси плоскости $(t)$, а прямая $\operatorname{Im} w = +\pi i$ переходит в полупрямую $\arg t = +\pi i$, то есть в верхний край этого разреза]; известно также, что функция $t=e^w$ преобразует отрезок прямой $\operatorname{Re} w=c_2$, имеющий длину $2\pi$, в окружность $|t|=e^c$ [следовательно, отрезок мнимой оси на плоскости $(w)$, ограниченный точками $-\pi i$; и $+\pi i$, для которого $\operatorname{Re} w=0$, переходит в окружность $|t|=e^0=1$]*. Отметим еще, что контур $l_0$ можно как угодно деформировать, но при соблюдении тех же условий, которые выше были сформулированы для контура $\lambda$.

Так как контур $l_0$ состоит из трех прямолинейных участков: $(+\infty-\pi i, -\pi i)$, $(-\pi i, +\pi i)$, $(+\pi i, +\infty+\pi i)$, из которых второй расположен на мнимой оси, а другие два параллельны вещественной оси, то формулу (30.8) можно взять в виде:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty-\pi i}^{-\pi i} e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi i}^{+\pi i} e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\pi i}^{+\infty+\pi i} e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw \qquad (30.9)$$

и преобразовать следующим образом.

На участке $(+\infty-\pi i, -\pi i)$:

$$w=\varphi-\pi i;\ dw=d\varphi;$$

если $w=+\infty-\pi i$, то $\varphi=+\infty$; если $w=-\pi i$, то $\varphi=0$; кроме того, так как функция $e^w$ имеет период $2\pi i$, а $e^{-\pi i}=-1$, то

$$\operatorname{sh} w=\frac{e^w-e^{-w}}{2}=\frac{e^{\varphi-\pi i}-e^{-\varphi+\pi i}}{2}=$$

$$=\frac{e^{-\pi i}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi+2\pi i}\right)}{2}=e^{-\pi i}\,\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}=-\operatorname{sh}\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty-\pi i}^{-\pi i} e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty}^{0} e^{-z\operatorname{sh}\varphi-\nu\varphi+\nu\pi i}\,d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-z\operatorname{sh}\varphi-\nu\varphi+\nu\pi i}\,d\varphi. \qquad (30.10)$$

На участке $(-\pi i, +\pi i)$:

$$w=\varphi i;\ dw=i\,d\varphi;$$

* См. [3], стр. 78.

если $w=-\pi i$, то $\varphi=-\pi$; если $w=+\pi i$, то $\varphi=+\pi$;

$$\operatorname{sh} w=-i\sin iw=-i\sin(-\varphi)=i\sin\varphi$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi i}^{+\pi i}e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}e^{iz\sin\varphi-\nu\varphi i}\,i\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}e^{-(\nu\varphi-z\sin\varphi)i}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos(\nu\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin(\nu\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi$$

и так как синус есть функция нечетная, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi i}^{+\pi i}e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(\nu\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi. \qquad (30.11)$$

На участке $(+\pi i,\ +\infty+\pi i)$:

$$w=\varphi+\pi i;\quad dw=d\varphi;$$

если $w=\pi i$, то $\varphi=0$; если $w=+\infty+\pi i$, то $\varphi=+\infty$;

$$\operatorname{sh} w=\frac{e^{w}-e^{-w}}{2}=\frac{e^{\varphi+\pi i}-e^{-\varphi-\pi i}}{2}=$$

$$=\frac{e^{\pi i}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi-2\pi i}\right)}{2}=e^{\pi i}\,\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}=-\operatorname{sh}\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\pi i}^{+\infty+\pi i}e^{z\operatorname{sh} w-\nu w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-z\operatorname{sh}\varphi-\nu\varphi-\nu\pi i}\,d\varphi. \qquad (30.12)$$

При помощи равенств (30.10), (30.11) и (30.12) формула (30.9) приводится к виду:

$$J_\nu(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-z\operatorname{sh}\varphi-\nu\varphi+\nu\pi i}\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(\nu\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-z\operatorname{sh}\varphi-\nu\varphi-\nu\pi i}\,d\varphi$$

или

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(\nu\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\left(e^{\nu\pi i}-e^{-\nu\pi i}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\nu\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi.$$

Но, по формуле Эйлера,

$$e^{\nu\pi i}-e^{-\nu\pi i}=2i\sin\nu\pi;$$

следовательно,

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(\nu\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi. \qquad (30.13)$$

Формула (30.13) дает обобщение интеграла Бесселя [см. формулу (23.11)] в двух отношениях: на комплексные значения независимого переменного и на нецелые значения $\nu$ [если $\nu$ есть число целое, то $\sin\nu\pi=0$ и второй член правой части формулы (30.13) исчезает].

Выведем еще одну интегральную формулу для цилиндрической функции первого рода, известную под названием формулы Пуассона.

Вспоминая формулу (2.2), а затем формулу (1.1), имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{1}{\Gamma\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]}=\frac{\mathrm{B}\left(k+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}}(1-s)^{\nu-\frac{1}{2}}\,ds,$$

причем, если $\nu$ есть число комплексное, то интеграл сходится при $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$.

Применяя, далее, подстановку

$$s=t^2;\quad ds=2t\,dt,$$

при которой пределы интегрирования не изменяются, получим

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,2\int_0^1 t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$

или, так как подынтегральная функция четная

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1} t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt. \qquad (30.14)$$

При помощи формулы (30.14), формула (30.2) для цилиндрической функции $J_\nu(z)$ приводится к виду:

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

или

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(zt)^{2k}}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right]dt,$$

так как изменение порядка суммирования и интегрирования допустимо, вследствие равномерной сходимости ряда, стоящего в правой части последней формулы.

Замечая, далее, что по формуле удвоения (4.8), если в ней положить $a=k+\frac{1}{2}$ и $a+\frac{1}{2}=k+1$:

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2k}}\Gamma(2k+1),$$

откуда

$$2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2k+1)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2k)!,$$

имеем:

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(zt)^{2k}}{(2k)!}\right]dt,$$

то есть

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt)\,dt,\qquad(30.15)$$

причем должно быть

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{30.16}$$

Применяя к формуле (30.15) подстановку

$$t = \cos\theta;\ dt = -\sin\theta\, d\theta, \tag{30.17}$$

при которой

$$(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sin^{2\nu}\theta : \sin\theta;$$

$$\theta = \pi \text{ при } t = -1;\ \theta = 0 \text{ при } t = +1,$$

получаем

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta \tag{30.18}$$

при

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{30.19}$$

Формула (30.18) [или равносильная ей формула (30.15)] называется *формулой Пуассона.*

## § 31. Интегральные формулы для функций Неймана, функций Ханкеля и модифицированных цилиндрических функций

В комплексной области функция Неймана $N_\nu(z)$ определяется формулой:

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \tag{31.1}$$

получаемой из формулы (24.1) путем применения принципа аналитического продолжения.

При помощи формулы (30.13), формулу (31.1) можно представить в виде:

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{ctg}\nu\pi \int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{\sin\nu\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\varphi + \right.$$

$$\left. + z\sin\varphi)\, d\varphi - \int_0^\infty e^{\nu\varphi - z\operatorname{sh}\varphi}\, d\varphi - \cos\nu\pi \int_0^\infty e^{-\nu\varphi - z\operatorname{sh}\varphi}\, d\varphi\right]. \tag{31.2}$$

Применяя ко второму интегралу подстановку

$$\varphi = \pi - \varphi_1; \; d\varphi = -d\varphi_1,$$

при которой

$$\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi_1) = \sin\varphi_1;$$

если $\varphi = 0$, то $\varphi_1 = \pi$; если $\varphi = \pi$, то $\varphi_1 = 0$,

имеем

$$\int_0^\pi \cos(\nu\varphi + z\sin\varphi)\,d\varphi = -\int_\pi^0 \cos(\nu\pi - \nu\varphi_1 + z\sin\varphi_1)\,d\varphi_1 =$$

$$= \int_0^\pi \cos[\nu\pi - (\nu\varphi_1 - z\sin\varphi_1)]\,d\varphi_1,$$

откуда, на основании формулы для косинуса разности и после отбрасывания значка 1 у $\varphi_1$, –

$$\int_0^\pi \cos(\nu\varphi + z\sin\varphi)\,d\varphi = \cos\nu\pi\int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ \sin\nu\pi\int_0^\pi \sin(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Подставляя это выражение в формулу (31.2), получим:

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{ctg}\nu\pi\int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\sin\nu\pi}\times\right.$$

$$\times\left[\cos\nu\pi\int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi + \sin\nu\pi\int_0^\pi \sin(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi\right] -$$

$$\left. - \int_0^\infty e^{\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi - \cos\nu\pi\int_0^\infty e^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi\right\},$$

откуда, после очевидных упрощений, окончательно:

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\varphi - \nu\varphi)\,d\varphi -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{\nu\varphi} + e^{-\nu\varphi}\cos\nu\pi\right)e^{-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi. \qquad (31.3)$$

Вспоминая, далее, что [см. первую из формул (25.11)]

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \qquad (31.4)$$

и применяя формулы (30.13) и (31.3), имеем:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(\nu\varphi - z\sin\varphi) - i\sin(\nu\varphi - z\sin\varphi)]\, d\varphi -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\sin\nu\pi \cdot e^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi} + ie^{\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi} + ie^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\varphi}\cos\nu\pi\right] d\varphi$$

или

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty (\cos\nu\pi - i\sin\nu\pi)\, e^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\, d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-(\nu\varphi - z\sin\varphi)\, i}\, d\varphi + \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\, d\varphi,$$

откуда

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\, d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{(-\nu\varphi + z\sin\varphi)\, i}\, d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{-\nu\pi i}\, e^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\, d\varphi. \tag{31.5}$$

Формула (31.5) позволяет выразить функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ через контурный интеграл и выяснить форму контура интегрирования. В самом деле, вспоминая, что $\varphi$ есть величина вещественная, и применяя к первому интегралу формулы (31.5) подстановку

$$\varphi = -w;\ d\varphi = -dw,$$

при которой

$$\mathrm{sh}\,\varphi = \mathrm{sh}\,(-w) = -\mathrm{sh}\,w;$$

$$\text{если } \varphi = 0, \text{ то } w = 0; \text{ если } \varphi = +\infty, \text{ то } w = -\infty,$$

получим:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{\pi i}\int_0^{-\infty} e^{-\nu w + z\mathrm{sh} w}\, dw = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^0 e^{z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w}\, dw, \tag{31.6}$$

причем интегрирование производится, очевидно, по всей отрицательной части вещественной оси (от точки $-\infty$ до точки 0).

Применяя, далее, ко второму интегралу формулы (31.5) подстановку

$$\varphi = -iw;\ d\varphi = -idw = \frac{dw}{i},$$

при которой

$$\sin\varphi = \sin(-iw) = -\sin(iw) = -i\,\mathrm{sh}\,w;$$

$$\text{если } \varphi = 0, \text{ то } w = 0; \text{ если } \varphi = \pi, \text{ то } w = \pi i,$$

получим:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{(-\nu\varphi + z\sin\varphi)\,i}\,d\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\pi i} e^{(\nu wi - iz\,\mathrm{sh}\,w)i}\,dw =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\pi i} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w}\,dw, \tag{31.7}$$

причем интегрирование производится, очевидно, по отрезку мнимой оси от точки 0 до точки $\pi i$.

Применяя, наконец, к третьему интегралу формулы (31.5) подстановку

$$\varphi = w - \pi i; \quad d\varphi = dw,$$

при которой

$$\mathrm{sh}\,\varphi = -i\sin(i\varphi) = -i\sin(iw + \pi) = i\sin(iw) = -\mathrm{sh}\,w;$$

$$\text{если } \varphi = 0, \text{ то } w = \pi i; \text{ если } \varphi = \infty, \text{ то } w = \infty + \pi i,$$

получим:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\infty} e^{-\nu\pi i}\,e^{-\nu\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\pi i}^{+\infty+\pi i} e^{-\nu\pi i}\,e^{\nu\pi i}\,e^{-\nu w + z\,\mathrm{sh}\,w}\,dw =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\pi i}^{+\infty+\pi i} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w}\,dw, \tag{31.8}$$

причем интегрирование производится, очевидно, по всей полупрямой, параллельной вещественной оси и расположенной в верхней полуплоскости на расстоянии $\pi$ от вещественной оси (от точки $\pi i$ до точки $+\infty + \pi i$).

При помощи формул (31.6), (31.7) и (31.8), формула (31.5) приводится к виду:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w}\,dw + \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\pi i} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w}\,dw +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\pi i}^{+\infty+\pi i} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w}\,dw$$

или

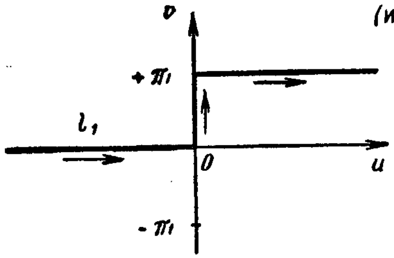
$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_1} e^{z \operatorname{sh} w - \nu w}\, dw, \tag{31.9}$$

причем контур $l_1$, в соответствии со сказанным выше, имеет форму, изображенную на черт. 13.

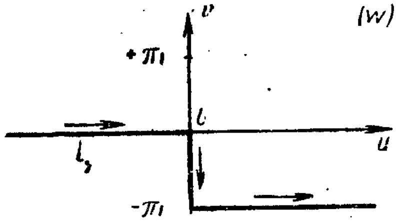
Аналогичным способом может быть выведена следующая формула для функции Ханкеля $H_\nu^{(2)}(z)$:

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_2} e^{z \operatorname{sh} w - \nu w}\, dw, \tag{31.10}$$

причем контур $l_2$ имеет форму, изображенную на черт. 14.




Черт. 13.




Черт. 14

Следует отметить здесь, что формулы (30.8) и (30.13) для цилиндрической функции первого рода $J_\nu(z)$, а следовательно, формула (31.3) для функции Неймана $N_\nu(z)$ и формулы (31.9) и (31.10) для функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ выведены нами в предположении, что $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ [см. условие (30.4)]. Однако, основываясь на принципе аналитического продолжения, мы можем считать, что все эти формулы справедливы при любых значениях $z$.

Считая по-прежнему, что $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, то есть что $\operatorname{Re} z > 0$, применим к интегралу (31.9) подстановку

$$w = t + \frac{\pi i}{2}; \; dw = dt, \tag{31.11}$$

при которой

если $w = -\infty$, то $t = -\infty - \frac{\pi i}{2}$; если $w = 0$, то $t = -\frac{\pi i}{2}$;

если $w = +\pi i$, то $t = +\frac{\pi i}{2}$;

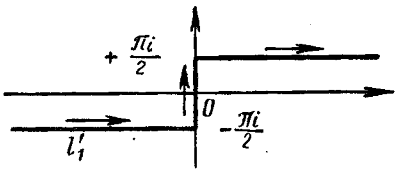
если $w = +\infty + \pi i$, то $t = +\infty + \frac{\pi i}{2}$;

$$\operatorname{sh} w = \operatorname{sh}\left(t + \frac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{ch} t;$$

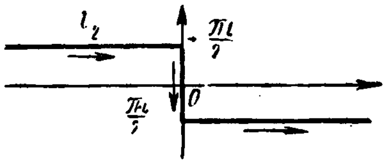
тогда формула (31.9) преобразуется в формулу:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int\limits_{l_1'} e^{iz \operatorname{ch} t - \nu t}\, dt\,, \tag{31.12}$$

где $l_1'$ есть контур, изображенный на черт. 15.




Черт. 15




Черт. 16

Аналогично, при помощи подстановки

$$w = t - \frac{\pi i}{2} \tag{31.13}$$

формула (31.10) преобразуется в формулу:

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int\limits_{l_2'} e^{-iz \operatorname{ch} t - \nu t}\, dt\,, \tag{31.14}$$

где $l_2'$ есть контур, изображенный на черт. 16.

Если в формуле (31.12) $\operatorname{Im} z > 0$, то, по теореме Коши, примененной к прямоугольному контуру с вершинами в точках $-\infty - \frac{\pi i}{2}$, $-\frac{\pi i}{2}$, $0$, $-\infty$, можно участок этого контура от точки $-\infty - \frac{\pi i}{2}$ до точки $-\frac{\pi i}{2}$ и от точки $-\frac{\pi i}{2}$ до точки 0 (составляющий, очевидно, часть контура $l_1'$) заменить участком от точки 0 до точки $-\infty$, то есть всей отрицательной частью вещественной оси, так как в пределе при $t \to \infty$ интеграл по вертикальному отрезку, ограниченному точками $-\frac{\pi i}{2}$ и 0, обращается в нуль, вследствие неизменности длины этого отрезка и ограниченности модуля подынтегральной функции.

Аналогично, оставшийся участок контура $l_1'$, то есть участок от точки 0 до точки $+\frac{\pi i}{2}$ и от точки $+\frac{\pi i}{2}$ до точки $+\infty +$

$+\frac{\pi i}{2}$ может быть заменен всей положительной частью вещественной оси.

Поэтому вместо формулы (31.12) можно взять формулу:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\,\mathrm{ch}\,t-\nu t}\,dt\,(\mathrm{Im}\,z > 0)\,. \qquad (31.15)$$

В результате аналогичных рассуждений, но при $\mathrm{Im}\,z<0$, формулу (31.14) можно заменить формулой:

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\,\mathrm{ch}\,t-\nu t}\,dt\,(\mathrm{Im}\,z < 0)\,. \qquad (31.16)$$

**Обращаясь к выводу интегральной формулы для модифицированной цилиндрической функции первого рода $I_{\nu}(z)$, возьмем формулу (26.8):**

$$I_{\nu}(z) = i^{-\nu}J_{\nu}(iz)$$

и заменим в этой формуле цилиндрическую функцию $J_{\nu}(iz)$ ее выражением по формуле Пуассона (30.15), беря в формуле Пуассона $iz$ вместо $z$:

$$I_{\nu}(z) = i^{-\nu}\left(\frac{iz}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(izt)\,dt,$$

откуда сразу же получаем окончательную формулу:

$$I_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}(zt)\,dt\,, \qquad (31.17)$$

причем должно быть

$$|\arg z| < \pi \text{ и } \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}\,. \qquad (31.18)$$

Для получения основной интегральной формулы для функции Макдональда, воспользуемся формулой (26.10), выражающей функцию Макдональда через первую функцию Ханкеля:

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi i}{2}e^{\frac{\nu\pi i}{2}}H_{\nu}^{(1)}(iz)\,.$$

**Подставляя в эту формулу вместо функции $H_{\nu}^{(1)}(iz)$ ее выражение из формулы (31.15), в которой одновременно заменим $z$ через $iz$:**

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i^2 z \operatorname{ch} t - \nu t} dt,$$

после очевидных сокращений, получаем:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t - \nu t} dt, \tag{31.19}$$

где

$$\operatorname{Re} z > 0 \text{ и } \nu \text{ — любое}. \tag{31.20}$$

Беря формулу (31.19) в виде:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} e^{-\nu t} dt$$

и выражая $e^{-\nu t}$ по формуле Эйлера:

$$e^{-\nu t} = \operatorname{ch} \nu t - \operatorname{sh} \nu t,$$

получим

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \nu t\, dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh} \nu t\, dt.$$

Но $\operatorname{ch} \nu t$ есть функция **четная**, а $\operatorname{sh} \nu t$ — функция нечетная; следовательно,

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \nu t\, dt, \tag{31.21}$$

причем сохраняются, очевидно, условия (31.20).

## § 32. Асимптотические представления цилиндрических функций

Изучение асимптотических представлений цилиндрических функций для больших значений $|z|$ мы начнем с вывода формул, дающих асимптотические представления функций Ханкеля; из этих формул будут затем получены формулы, дающие асимптотические представления других цилиндрических функций.

Однако, нам придется предварительно несколько преобразовать формулы (31.15) и (31.16), выведенные для функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. При этом мы будем считать, что $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ и что $\arg z = \frac{\pi}{2}$ (то есть что $z$ является чисто-мнимым числом с положительным коэффициентом при $i$, а $-iz$ является положительным вещественным числом).

Применяя к интегралу, входящему в формулу (31.15), подстановку

$$e^t = y; \quad dt = \frac{dy}{y}, \tag{32.1}$$

при которой

$$t = \ln y; \quad \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} \ln y = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right);$$

если $t = -\infty$, то $y = 0$; если $t = +\infty$, то $y = +\infty$, приводим формулу (31.15) к виду:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_0^\infty e^{\frac{iz}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)} y^{-\nu-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Но

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-yx} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx^*;$$

---

* В самом деле, если к интегралу

$$L = \int_0^\infty e^{-yx} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx$$

применим подстановку

$$yx = u; \quad ydx = du,$$

при которой

$$x = \frac{u}{y}; \qquad x^{\nu-\frac{1}{2}} = \frac{u^{\nu-\frac{1}{2}}}{y^{\nu-\frac{1}{2}}},$$

а пределы интегрирования не изменяются, то получим:

$$L = \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{\nu-\frac{1}{2}}}{y^{\nu-\frac{1}{2}}} \frac{du}{y} = \frac{1}{y^{\nu+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-1} du = y^{-\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right),$$

откуда и следует, что

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-yx} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx$$

следовательно

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{\frac{iz}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)} y^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^\infty e^{-yx} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx \right\} dy$$

или, после изменения порядка интегрирования, что возможно вследствие абсолютной сходимости рассматриваемого двойного интеграла,

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^\infty e^{-y\left(x-\frac{iz}{2}\right)+\frac{iz}{2y}} y^{-\frac{1}{2}} dy \right\} dx.$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-y\left(x-\frac{iz}{2}\right)+\frac{iz}{2y}} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{-\frac{iz}{2}\left(x-\frac{iz}{2}\right)}}}{\sqrt{x-\frac{iz}{2}}}\,*;$$

следовательно,

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{-\frac{iz}{2}}\sqrt{x-\frac{iz}{2}}}}{\sqrt{x-\frac{iz}{2}}} dx.$$

Применяя, далее подстановку

$$x = -\frac{iz}{2}(t^2-1); \quad dx = 2\sqrt{-\frac{iz}{2}}\sqrt{x-\frac{iz}{2}}\,dt,$$

при которой

$$\sqrt{-\frac{iz}{2}}\sqrt{x-\frac{iz}{2}} = -\frac{iz}{2}t;$$

если $x = 0$, то $t = 1$; если $x = \infty$, то $t = \infty$,

* См. [4], стр. 644.

имеем:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{2e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{iz}{2}\right)^\nu\int_1^\infty e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt.$$

К полученному интегралу применим новую подстановку:

$$t=1-\frac{s}{iz};\quad dt=-\frac{ds}{iz};$$

тогда

$$izt=iz-s;\quad t^2-1=1-\frac{2s}{iz}+\frac{s^2}{(iz)^2}-1=-\frac{2s}{iz}\left(1-\frac{s}{2iz}\right);$$

если $t=1$, то $s=0$; если $t=+\infty$, то $s=+\infty$ и предыдущая формула для $H_\nu^{(1)}(z)$ примет вид:

$$H_\nu^{(1)}(z)=-\frac{2e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{iz}{2}\right)^\nu\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{iz-s}\left(-\frac{2}{iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{s}{2iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{ds}{iz},$$

откуда после несложных преобразований получаем окончательно:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-s}s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{s}{2iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}ds. \quad (32.2)$$

В силу принципа аналитического продолжения, формула (32.2) может быть распространена на все значения $z$, удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$, при выполнении которого обе части этой формулы являются функциями регулярными (кроме значений, соответствующих $z=0$). Таким образом, формула (32.2) имеет место при условии, что

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad-\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi. \quad (32.3)$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить формулу:

$$H_{\nu}^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-s}s^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s}{2iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}ds, \tag{32.4}$$

имеющую место при условии, что

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \text{ и } -\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}. \tag{32.5}$$

Возвращаясь к формуле (32.2) для функции $H_{\nu}^{(1)}(z)$ и беря для $\left(1-\frac{s}{2iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ разложение в биномиальный ряд с остаточным членом, имеем [см. формулу (12.1)]:

$$H_{\nu}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)(2iz)^k}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-s}s^{\nu-\frac{1}{2}+k}ds+R_{\nu,m}(z)\right]$$

или [см. формулу (2.1)]

$$H_{\nu}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)(2iz)^k}+R_{\nu,m}(z)\right], \tag{32.6}$$

где

$$R_{\nu,m}(z)=\frac{(-1)^{m+1}}{m!\,\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-m\right)(2iz)^{m+1}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-s}s^{\nu+m+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{0}^{1}(1-t)^m\left(1-\frac{st}{2iz}\right)^{\nu-m-\frac{3}{2}}dt\right\}ds^{*}. \tag{32.7}$$

---

* См. [1], стр. 307, формула (8). Заменой $n$, $a$, $x$, $t$ соответственно через $m$, $0$, $s$, $t_1$ и подстановкой $t_1=st$ эта формула приводится к виду:

$$R_m=\frac{1}{m!}\int\limits_{0}^{1}f^{(m+1)}(st)\,s^{m+1}(1-t)^m\,dt$$

Чтобы оценить модуль остаточного члена $R_{\nu,m}(z)$, выберем значение $m$ так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\operatorname{Re}\nu - m - \frac{3}{2} \leqslant 0, \tag{32.8}$$

потребовав, кроме того, чтобы было

$$|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{32.9}$$

Замечая, что тогда

$$\left|\arg\left(1 - \frac{st}{2iz}\right)\right| < \pi; \qquad \left|1 - \frac{st}{2iz}\right| \geqslant \sin\alpha, \tag{32.10}$$

будем иметь*

$$\left|\left(1 - \frac{st}{2iz}\right)^{\nu - m - \frac{3}{2}}\right| = \left|1 - \frac{st}{2iz}\right|^{\operatorname{Re}\nu - m - \frac{3}{2}} e^{-\arg\left(1 - \frac{st}{2iz}\right)\operatorname{Im}\nu} \leqslant$$

$$\leqslant (\sin\alpha)^{\operatorname{Re}\nu - m - \frac{3}{2}} e^{|\operatorname{Im}\nu|\pi}.$$

Следовательно,

$$|R_{\nu,m}(z)| \leqslant \frac{e^{|\operatorname{Im}\nu|\pi}(\sin\alpha)^{\operatorname{Re}\nu - m - \frac{3}{2}}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2} - m\right)(2|z|)^{m+1}} \int_0^\infty e^{-s} s^{\operatorname{Re}\nu + m + \frac{1}{2}}\, ds =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\operatorname{Re}\nu + m + \frac{3}{2}\right) e^{|\operatorname{Im}\nu|\pi}(\sin\alpha)^{\operatorname{Re}\nu - m - \frac{3}{2}}}{\Gamma(m+1)\left|\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2} - m\right)\right|(2|z|)^{m+1}} = O(z^{-m-1}) \tag{32.11}$$

то есть, если $m \to \infty$, то $R_{\nu,m}(z) \to 0$ равномерно относительно $z$.

Полагая, далее,

$$\frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} + k\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right)} = \psi(\nu, k) \tag{32.12}$$

---

* Если $a$ и $b$ — комплексные числа, то

$$|a^b| = |a|^{\operatorname{Re} b} e^{-\operatorname{Im} b \arg a}$$

и замечая, что

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)=\left(\nu+\frac{1}{2}+k-1\right)\left(\nu+\frac{1}{2}+k-2\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\left(\nu+\frac{1}{2}+k-1\right)\left(\nu+\frac{1}{2}+k-2\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\nu+\frac{1}{2}-1\right)\left(\nu+\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)=$$
$$=\frac{1}{2^{2k}}\left[2\nu+(2k-1)\right]\left[2\nu+(2k-3)\right]\cdots(2\nu+1)\times$$
$$\times(2\nu-1)\cdots\left[2\nu-(2k-3)\right]\left[2\nu-(2k-1)\right]\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right),$$

откуда

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)}=\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots\left[4\nu^2-(2k-1)^2\right]}{2^{2k}}, \qquad (32.13)$$

имеем:

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)}=\psi(\nu,k)=$$
$$=\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\cdots\left[4\nu^2-(2k-1)^2\right]}{2^{2k}k!}. \qquad (32.14)$$

При помощи формул (32.14) и (32.11), для *асимптотического представления функции Ханкеля* $H_\nu^{(1)}(z)$ при больших значениях $|z|$ получаем формулу:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\psi(\nu,k)}{(2iz)^k}+O\left(z^{-m-1}\right)\right], \qquad (32.15)$$

причем

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \text{ и } |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha. \qquad (32.16)$$

При помощи аналогичных рассуждений может быть получена следующая формула для асимптотического представления функции Ханкеля $H_\nu^{(2)}(z)$:

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi(\nu,k)}{(2iz)^k}+O\left(z^{-m-1}\right),\right. \qquad (32.17)$$

причем

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2} \text{ и } |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{32.18}$$

Отметим без доказательства, что условия

$$\operatorname{Re}\nu - m - \frac{3}{2} \leqslant 0 \text{ и } \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$$

не являются существенными, то есть что формулы (32.15) и (32.17) имеют место при любых $m$ и при всех значениях $\nu$ *. Что же касается второго из условий (32.16) и второго из условий (32.18), то они могут быть заменены более широким условием:

$$|\arg z| \leqslant \pi - \alpha. \tag{32.19}$$

Формулы, дающие асимптотические представления цилиндрической функции первого рода $J_\nu(z)$ и функции Неймана $N_\nu(z)$, легко получить теперь, исходя из формул (25.10), выражающих эти функции через функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. Однако, предварительно мы несколько преобразуем формулы (32.15) и (32.17), дающие асимптотические представления функций Ханкеля.

С этой целью в правых частях формул (32.15) и (32.17) мы просуммируем по отдельности члены, соответствующие четным значениям $k$, и члены, соответствующие нечетным значениям $k$. Замечая, кроме того, что без уменьшения общности рассуждения $m$ можно считать числом нечетным, положим:

$$m = 2m_1 + 1,$$

где $m_1$ есть, очевидно, целое число, и

$$k = 2k_1 \; (0 \leqslant k_1 \leqslant m_1) \text{ для четных значений } k;$$

$$k = 2k_2 + 1 \; (0 \leqslant k_2 \leqslant m_1) \text{ для нечетных значений } k.$$

Тогда формула (32.15) примет вид:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[\sum_{k_1=0}^{m_1} \frac{(-1)^{2k_1}\psi(\nu, 2k_1)}{i^{2\cdot k_1}(2z)^{2k_1}} + O\left(z^{-2m_1-2}\right)\right] +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[\sum_{k_2=0}^{m_1} \frac{(-1)^{2k_2+1}\psi(\nu, 2k_2+1)}{i^{2k_2+1}(2z)^{2k_2+1}} + \right.$$

$$\left. + O\left(z^{-2m_1-3}\right)\right],$$

---

* См. [5], стр. 169 и 170.

или

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,\psi(\nu,2k)}{(2z)^{2k}}+O\left(z^{-2m-2}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,\psi(\nu,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}+O\left(z^{-2m-3}\right)\right],\quad(32.20)$$

причем значок «1» у $m_1$ и $k_1$ и значок «2» у $k_2$ опущены, как не имеющие существенного значения.

Аналогичным путем формула (32.17) приводится к виду:

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,\psi(\nu,2k)}{(2z)^{2k}}+O\left(z^{-2m-2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,\psi(\nu,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}+O\left(z^{-2m-3}\right)\Bigg],\quad(32.21)$$

Подставляя выражения (32.20) и (32.21) для функций Ханкеля $H_\nu^{(2)}(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ в формулы (25.10), в которых $x$ следует очевидно, заменить через $z$:

$$J_\nu(z)=\frac{H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)}{2};\quad N_\nu(z)=\frac{H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)}{2i},\quad(32.22)$$

сразу же получаем следующие формулы, дающие *асимптотическое представление цилиндрической функции первого рода* $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,\psi(\nu,2k)}{(2z)^{2k}}+O\left(z^{-2m-2}\right)\right]-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\,\psi(\nu,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}+\right.$$

$$\left.+O\left(z^{-2m-3}\right)\right]\quad(32.23$$

и асимптотическое представление функции Неймана $N_\nu(z)$:

$$N_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\psi(\nu,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}+\right.$$

$$\left.+O\left(z^{-2m-3}\right)\right]+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\psi(\nu,2k)}{(2z)^{2k}}+\right.$$

$$\left.+O\left(z^{-2m-2}\right)\right]; \qquad (32.24)$$

Формулы (32.23) и (32.24) имеют место при $|\arg z| \leqslant \pi-\alpha$ и при любом $\nu$.

Формулу, дающую асимптотическое представление модифицированной цилиндрической функции первого рода $I_\nu(z)$, можно вывести из формулы:

$$I_\nu(z)=e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\,\frac{H_\nu^{(1)}(iz)+H_\nu^{(2)}(iz)}{2}, \qquad (32.25)$$

к которой придем, если в первой из формул (25.10) заменим $x$ через $iz$ и, после умножения обеих частей полученного равенства на $e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}$, применим формулу (26.8).

Заменяя в формулах (32.15) и (32.17) $z$ через $iz$, приводим эти формулы к виду:

$$H_\nu^{(1)}(iz)=\sqrt{\frac{2}{\pi iz}}\,e^{i\left(iz-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\psi(\nu,k)}{(2i^2z)^k}+O\left(z^{-m-1}\right)\right];$$

$$H_\nu^{(2)}(iz)=\sqrt{\frac{2}{\pi iz}}\,e^{-i\left(iz-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi(\nu,k)}{(2i^2z)^k}+O\left(z^{-m-1}\right)\right],$$

или, если принять во внимание, что $\frac{1}{\sqrt{i}}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$, и выполнить другие очевидные преобразования,

$$\left.\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(iz)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-z}e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}\,e^{-\frac{\pi i}{2}}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi(\nu,k)}{(2z)^k}+O\left(z^{-m-1}\right)\right]\\
H_\nu^{(2)}(iz)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{z}e^{\frac{\nu\pi i}{2}}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\psi(\nu,k)}{(2z)^k}+O\left(z^{-m-1}\right)\right]
\end{aligned}\right\}. \qquad (32.26)$$

Подставляя выражения (32.26) для функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(iz)$ и $H_\nu^{(2)}(iz)$ в формулу (32.25), получаем следующую формулу, дающую *асимптотическое представление модифицированной цилиндрической функции первого рода* $I_\nu(z)$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^{-z-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{\sqrt{2\pi z}}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi(\nu,k)}{(2z)^k}+O(z^{-m-1})\right]+$$

$$+\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\psi(\nu,k)}{(2z)^k}+O(z^{-m-1})\right]. \qquad (32.27)$$

Заменяя, наконец, в формуле (26.10) $x$ через $z$:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2}\, e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}(iz) \qquad (32.28)$$

и, далее, $H_\nu^{(1)}(iz)$ — его выражением по первой из формул (32.26), после очевидных сокращений получаем следующую формулу, дающую *асимптотическое представление функции Макдональда* $K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi(\nu,k)}{(2z)^k}+O(z^{-m-1})\right]. \qquad (32.29)$$

Формулы (32.27) и (32.29) имеют место при $|\arg z| \leqslant \pi-\alpha$ и при любом $\nu$ *.

Если в асимптотических представлениях (32.15) и (32.17) функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ мы, ограничимся первыми членами, то есть положим $m=0$, то формулы эти примут вид:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O(z^{-1})\right] \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O(z^{-1})\right] \end{aligned}\right\}, \qquad (32.30)$$

откуда, рассуждая так же, как и при выводе формул (32.23) и (32.24), придем к следующим формулам для цилиндрической функции первого рода $J_\nu(z)$ и функции Неймана $N_\nu(z)$:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right) \\ N_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (32.31)$$

---

* Сравнивая формулы (32.27) и (32.29) с формулами (32.23) и (32.24), следует помнить, что при выводе формул (32.23) и (32.24) было положено $m=2m_1$ и что значок «1» у $m_1$ был затем опущен.

Замечая, далее, что при $m=0$ формулы (32.26) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(iz) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-z} e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} i} \left[1+O(z^{-1})\right] \\ H_\nu^{(2)}(iz) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{z} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \left[1+O(z^{-1})\right] \end{aligned}\right\} \cdot \qquad (32.32)$$

и рассуждая так же, как и при выводе формул (32.27) и (32.29), получим следующие формулы для модифицированных цилиндрических функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$:

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{e^{-z-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}+e^{z}}{\sqrt{2\pi z}} \left[1+O(z^{-1})\right] \\ K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \left[1+O(z^{-1})\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (32.33)$$

Если $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha$, то первый член числителя дроби, стоящей в правой части первой из формул (32.33), оказывается малой величиной более высокого порядка, чем $O(z^{-1})$; следовательно, при указанном условии первую из формул (32.33) можно взять в виде:

$$I_\nu(z) = \frac{e^{z}}{\sqrt{2\pi z}} \left[1+O(z^{-1})\right]. \qquad (32.34)$$

## § 33. Ортогональность цилиндрических функций и другие их свойства. Ряд Фурье-Бесселя

По доказанному в § 26, цилиндрические функции первого рода $J_\nu(k_1 z)$ и $J_\nu(k_2 z)$ являются соответственно частными решениями уравнений [см. уравнение (26.1)]:

$$\left.\begin{aligned} z^2 w'' + z w' + \left(k_1^2 z^2 - \nu^2\right) w &= 0 \\ z^2 \bar{w}'' + z \bar{w}' + \left(k_2^2 z^2 - \nu^2\right) \bar{w} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (33.1)$$

то есть

$$\left.\begin{aligned} z^2 \frac{d^2 J_\nu(k_1 z)}{dz^2} + z \frac{dJ_\nu(k_1 z)}{dz} + \left(k_1^2 z^2 - \nu^2\right) J_\nu(k_1 z) &= 0 \\ z^2 \frac{d^2 J_\nu(k_2 z)}{dz^2} + z \frac{dJ_\nu(k_2 z)}{dz} + \left(k_2^2 z^2 - \nu^2\right) J_\nu(k_2 z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33.2)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_\nu(k_1z)}{dz}\right]+\left(k_1^2z-\frac{\nu^2}{z}\right)J_\nu(k_1z)=0\\ \frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_\nu(k_2z)}{dz}\right]+\left(k_2^2z-\frac{\nu^2}{z}\right)J_\nu(k_2z)=0\end{aligned}\right\},\tag{33.3}$$

если уравнения (33.1) взять в форме (12.11) [см. также уравнение (21.14)].

Считая, что $\nu$ есть число *вещественное* и что $\nu \geqslant 0$, умножим первое из уравнений (33.3) на $J_\nu(k_2z)$, второе на $J_\nu(k_1z)$, затем вычтем из первого уравнения второе и результат вычитания проинтегрируем по $z$ в пределах от 0 до $l$, приняв за $l$ некоторое конечное число:

$$\int_0^l \left\{J_\nu(k_2z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_\nu(k_1z)}{dz}\right]-\right.$$

$$\left.-J_\nu(k_1z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_\nu(k_2z)}{dz}\right]\right\}dz+(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_\nu(k_1z)J_\nu(k_2z)\,dz=0$$

или

$$\int_0^l \frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_\nu(k_1z)}{dz}J_\nu(k_2z)-\right.$$

$$\left.-z\frac{dJ_\nu(k_2z)}{dz}J_\nu(k_1z)\right]dz+(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_\nu(k_1z)J_\nu(k_2z)\,dz=0,$$

откуда

$$\left[z\frac{dJ_\nu(k_1z)}{dz}J_\nu(k_2z)-z\frac{dJ_\nu(k_2z)}{dz}J_\nu(k_1z)\right]_0^l+$$

$$+(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_\nu(k_1z)J_\nu(k_2z)\,dz=0$$

или, так как, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dJ_\nu(k_1z)}{dz}=\frac{dJ_\nu(k_1z)}{d(k_1z)}\frac{d(k_1z)}{dz}=J'_\nu(k_1z)\cdot k_1\\ \frac{dJ_\nu(k_2z)}{dz}=\frac{dJ_\nu(k_2z)}{d(k_2z)}\frac{d(k_2z)}{dz}=J'_\nu(k_2z)\cdot k_2\end{aligned}\right\},\tag{33.4}$$

где через $J'_\nu(k_1z)$ и $J'_\nu(k_2z)$ обозначены производные, вычисленные по соответствующим промежуточным переменным $(k_1z)$ и $(k_2z)$, то

$$[k_1zJ'_\nu(k_1z)J_\nu(k_2z)-k_2zJ'_\nu(k_2z)J_\nu(k_1z)]_0^l+$$

$$+(k_1^2-k_2^2)\int\limits_0^l zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz=0, \tag{33.5}$$

то есть

$$l[k_1J'_\nu(k_1l)\,J_\nu(k_2l)-k_2J'_\nu(k_2l)\,J_\nu(k_1l)]+$$
$$+(k_1^2-k_2^2)\int\limits_0^l zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz=0 \tag{33.6}$$

и, в частности, при $l=1$:

$$k_1J'_\nu(k_1)\,J_\nu(k_2)-k_2J'_\nu(k_2)\,J_\nu(k_1)+$$
$$+(k_1^2-k_2^2)\int\limits_0^1 zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz=0. \tag{33.7}$$

При помощи формулы (33.7) легко убедиться в том, что цилиндрические функции первого рода $J_\nu(z)$ не имеют комплексных корней. В самом деле, предположив, что комплексное число $a+bi$ является корнем функции $J_\nu(z)$, мы, в силу вещественности всех коэффициентов первого из рядов (19.2), выражающего эту функцию, должны допустить, что сопряженное комплексное число $a-bi$ также является корнем функции $J_\nu(z)$. Полагая

$$a+bi=k_1;\quad a-bi=k_2\qquad (k_1\neq k_2),$$

причем

$$J_\nu(k_1)=J_\nu(k_2)=0,$$

приводим формулу (33.7) к виду:

$$4abi\int\limits_0^1 zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz=0.$$

Так как во всяком случае $b\neq0$, то при $a\neq0$ должно быть

$$\int\limits_0^1 zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz=0;$$

но $J_\nu(k_1z)$ и $J_\nu(k_2z)$ являются в рассматриваемом случае величинами сопряженными:

$$J_\nu(k_1z)=A+Bi;\quad J_\nu(k_2z)=A-Bi;$$

следовательно,

$$J_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)=A^2+B^2>0;$$

с другой стороны, и $z>0$, поскольку он изменяется в пределах от 0 до 1, и должно быть

$$\int\limits_0^1 zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz\neq0,$$

то есть предположив, что функция $J_\nu(z)$ имеет комплексные корни, мы приходим к противоречию.

Предположение, что функция $J_\nu(z)$ имеет чисто-мнимые корни (то есть что $a=0$, но $b \neq 0$), также приводит к противоречию. В самом деле, предположив, что $J_\nu(bi)=0$, по первой из формул (19.2) имеем противоположное:

$$J_\nu(bi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{bi}{2}\right)^{\nu+2k}=$$

$$=(bi)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)\,2^{\nu+2k}}\neq 0,$$

так как $b \neq 0$ (по условию), а сумма, выражающая $J_\nu(bi)$, не равна нулю, поскольку при $\nu \geqslant 0$ все ее слагаемые положительны.

Таким образом, если порядок $\nu$ цилиндрической функции первого рода $J_\nu(z)$ есть число вещественное, удовлетворяющее условию $\nu \geqslant 0$*, то функция эта имеет только вещественные корни.

Отметим еще, что корни функции $J_\nu(z)$ попарно одинаковы по величине и противоположны по знаку [это следует из того, что сумма в первой из формул (19.2), определяющей функцию $J_\nu(z)$, после вынесения за знак суммы $z^\nu$ будет содержать $z$ только в четных степенях] и что вещественных корней функция $J_\nu(z)$ имеет бесчисленное множество [в самом деле, беря первую из формул (32.31), дающую асимптотическое представление функции $J_\nu(z)$, в виде:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right],$$

видим, что при вещественном $z$, стремящемся к $+\infty$, второе слагаемое в квадратной скобке стремится к нулю, а первое слагаемое бесчисленное множество раз изменяет знак и, следовательно, бесчисленное множество раз обращается в нуль].

При условии что $k_1$ и $k_2$ $(k_1 \neq k_2)$ суть корни функции $J_\nu(z)$, то есть корни уравнения

$$J_\nu(z)=0 \tag{33.8}$$

* Условие $\nu \geqslant 0$ может быть заменено следующим, более широким условием: $\nu > -1$, в чем легко убедиться непосредственно.

формула (33.7) принимает вид:

$$\int_0^1 zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(k_2z)\,dz = 0. \tag{33.9}$$

Формула (33.9) выражает так называемое свойство *ортогональности цилиндрических функций первого рода,* которое выполняется, очевидно, и в том случае, когда $k_1$ и $k_2(k_1 \neq k_2)$ являются корнями не самой функции $J_\nu(z)$, а ее производной $J'_\nu(z)$, то есть корнями уравнения

$$J'_\nu(z) = 0^*. \tag{33.10}$$

Условие ортогональности (33.9) выполняется также и в том случае, когда $k_1$ и $k_2(k_1 \neq k_2)$ являются корнями уравнения

$$\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0, \tag{33.11}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — данные вещественные числа; в самом деле, если

$$\alpha J_\nu(k_1) + \beta k_1 J'_\nu(k_1) = 0 \text{ и } \alpha J_\nu(k_2) + \beta k_2 J'_\nu(k_2) = 0,$$

то, умножая первое из этих уравнений на $J_\nu(k_2)$, второе — на $J_\nu(k_1)$ и вычитая из первого второе, имеем:

$$k_1 J'_\nu(k_1)\,J_\nu(k_2) - k_2 J'_\nu(k_2)\,J_\nu(k_1) = 0,$$

а это и значит, что уравнение (33.7) обращается в уравнение (33.9).

Возьмем теперь формулу (33.7) в виде:

$$(k_1 + k)\int_0^1 zJ_\nu(k_1z)\,J_\nu(kz)\,dz = \frac{kJ'_\nu(k)J_\nu(k_1)}{k_1 - k}, \tag{33.12}$$

то есть будем считать, что $k_2$ (обозначаемое теперь через $k$) есть корень функции $J_\nu(z)$ [то есть $J_\nu(k) = 0$] и что $k_1$ есть переменная величина, стремящаяся к $k$ [при этом, очевидно, $J_\nu(k_1)$ будет стремиться к $J_\nu(k) = 0$].

Переходя в равенстве (33.12) к пределу при $k_1 \to k$, имеем:

$$2k\int_0^1 zJ_\nu^2(kz)\,dz = \lim_{k_1 \to k}\frac{kJ'_\nu(k)J_\nu(k_1)}{k_1 - k} =$$

$$= kJ'_\nu(k)\lim_{k_1 \to k}\frac{J_\nu(k_1) - J_\nu(k)}{k_1 - k} = kJ'^2_\nu(k)$$

---

* По теореме Ролля, производная $J'_\nu(z)$, так же, как и $J_\nu(z)$, имеет бесчисленное множество корней.

Таким образом,

$$\int_0^1 zJ_\nu^2(kz)\,dz = \frac{J_\nu'^2(k)}{2}. \tag{33.13}$$

Заменяя, далее, в формуле (20.8) $x$ через $z$ и полагая затем $z=k$, получим [имея в виду, что $J_\nu(k)=0$]:

$$J_\nu'(k) = -J_{\nu+1}(k); \tag{33.14}$$

следовательно, формулу (33.13) можно взять в виде:

$$\int_0^1 zJ_\nu^2(kz)\,dz = \frac{J_{\nu+1}^2(k)}{2}. \tag{33.15}$$

Если $k$ есть корень производной $J_\nu'(z)$, то есть если $J_\nu'(k) = 0$, то аналогичным способом можно получить формулу:

$$\int_0^1 zJ_\nu^2(kz)\,dz = -\frac{J_\nu''(k)\,J_\nu(k)}{2}. \tag{33.16}$$

Но первая из формул (33.2), в которой в рассматриваемом случае следует положить сначала $k_1=1$, затем $z=k$ и, наконец, $J_\nu'(k)=0$, дает:

$$J_\nu''(k) = -\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)J_\nu(k); \tag{33.17}$$

следовательно, формулу (33.16) можно взять в виде:

$$\int_0^1 zJ_\nu^2(kz)\,dz = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)J_\nu^2(k). \tag{33.18}$$

Свойством ортогональности цилиндрических функций можно воспользоваться для определения коэффициентов разложения данной функции в бесконечный ряд по цилиндрическим функциям.

Предположим, что некоторую функцию $f(x)$ *вещественного* независимого переменного $x$ желательно представить бесконечным рядом вида:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p J_\nu(k_p x), \tag{33.19}$$

где через

$$0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_p < \cdots \tag{33.20}$$

обозначены положительные корни цилиндрической функции первого рода $J_\nu(x)$, (причем $\nu$ считаем вещественным и удовлетворяющим условию: $\nu > -1$), перенумерованные в порядке их возрастания.

Считая, что ряд (33.19) существует и что он равномерно сходится в интервале (0,1), умножим обе части равенства (33.19) на $xJ_\nu(k_q x)$ и проинтегрируем результат умножения в пределах от 0 до 1, причем в правой части интегрирование можно произвести почленно [в силу предположенной равномерной сходимости ряда (33.19)]:

$$\int_0^1 xf(x)\, J_\nu(k_q x)\, dx = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \int_0^1 xJ_\nu(k_p x)\, J_\nu(k_q x)\, dx. \tag{33.21}$$

Но, в силу равенства (33.9), в правой части равенства (33.21) обращаются в нуль все интегралы, для которых $p \neq q$; следовательно, равенство это принимает вид:

$$\int_0^1 xf(x)\, J_\nu(k_q x)\, dx = a_q \int_0^1 xJ_\nu^2(k_q x)\, dx$$

или, на основании формулы (33.13),

$$\int_0^1 xf(x)\, J_\nu(k_q x)\, dx = a_q\, \frac{J_\nu'^2(k_q)}{2},$$

откуда

$$a_q = \frac{2}{J_\nu'^2(k_q)} \int_0^1 xf(x)\, J_\nu(k_q x)\, dx. \tag{33.22}$$

По формуле (33.22), в которой можно последовательно положить $q = 1, 2, 3, \ldots$, определяются все коэффициенты бесконечного ряда (33.19), называемого *рядом Фурье-Бесселя*.

Что касается условий, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы ее можно было разложить в ряд Фурье-Бесселя, то условия эти определяются следующей теоремой, которую мы приведем без доказательства.

Если для функции $f(x)$ существует интеграл

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} |f(t)|\, dt \tag{33.23}$$

и если функция $f(x)$ обладает ограниченным изменением в любом интервале $(a, b)$, удовлетворяющем условию:

$$0 < a < b < 1, \tag{33.24}$$

то при $\nu > -\frac{1}{2}$ для всех значений $x$ в интервале $(a, b)$ имеет место разложение в бесконечный ряд:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu(k_m x), \tag{33.25}$$

где $0<k_1<k_2<\ldots$ суть положительные корни функции $J_\nu(x)$, перенумерованные в порядке их возрастания, и

$$c_m = \frac{2}{J_\nu'^2(k_m)} \int_0^1 t f(t) J_\nu(k_m t)\, dt, \tag{33.26}$$

а в равенствах

$$f(x-0) = \lim_{\sigma\to 0} f(x-\sigma) \text{ и } f(x+0) = \lim_{\sigma\to 0} f(x+\sigma)$$

$\sigma$ стремится к нулю, оставаясь положительной*.

## § 34. Интеграл Эйри

В качестве первого примера на применение цилиндрических функций, выразим через цилиндрические функции *интеграл Эйри:*

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\, dt \quad (x>0)^{**}, \tag{34.1}$$

который можно рассматривать, как вещественную часть интеграла

$$\int_0^\infty e^{(t^3+tx)i} dt \quad (x>0) \tag{34.2}$$

Считая $t$ величиной комплексной и замечая, что подынтегральная функция в интеграле (34.2) регулярна на всей ком-

---

* Функция $f(x)$ называется *функцией с ограниченным изменением* в интервале $(a, b)$, если при любом делении этого интервала точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

сумма $\sum_{m=1}^{n} |f(x_m) - f(x_{m-1})|$ имеет точную верхнюю границу $M$, не зависящую от $n$ при любом выборе $x_m (0<m<n)$.

** Сходимость этого интеграла может быть доказана при помощи теоремы о среднем значении.

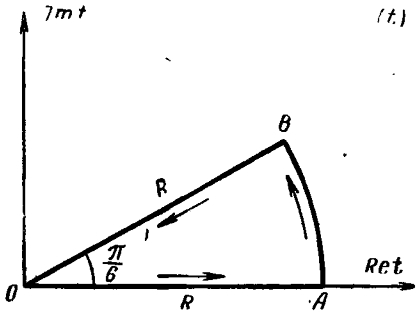
плексной плоскости $(t)$, возьмем замкнутый контур $OABO$ (черт. 17), представляющий собою границу кругового сектора с углом $\frac{\pi}{6}$ и радиуса $R$.

По теореме Коши,

$$\oint_{OABO} e^{(t^3+tx)i}dt = 0 \quad (34.3)$$

и

$$\int_{OA} e^{(t^3+tx)i}dt + \int_{AB} e^{(t^3+tx)i}dt + \int_{BO} e^{(t^3+tx)i}dt = 0. \quad (34.4)$$




Черт. 17

Но на дуге $AB$

$t = Re^{\varphi i}$; $dt = Rie^{\varphi i}\,d\varphi$;

следовательно,

$$\left|\int_{AB} e^{(t^3+tx)i}dt\right| = \left|Ri\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{i\,(R^3e^{3\varphi i}+xRe^{\varphi i})}\,d\varphi\right| =$$

$$= \left|Ri\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{iR^3\cos 3\varphi - R^3\sin 3\varphi + ixR\cos\varphi - xR\sin\varphi}\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R^3\sin 3\varphi - xR\sin\varphi}\,d\varphi < R\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R^3\frac{6\varphi}{\pi} - xR\frac{2\varphi}{\pi}}\,d\varphi^* =$$

---

* Если $0 < n\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $n\varphi < \operatorname{tg} n\varphi$, откуда $\cos n\varphi \cdot n\varphi - \sin n\varphi < 0$ или $\left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)' < 0$, то есть при изменении $n\varphi$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}$ убывает Но $\lim\limits_{n\varphi\to 0} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} = 1$ и $\lim\limits_{n\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} = \frac{2}{\pi}$; следовательно, если $0 < n\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} < 1$, откуда вытекает, что $\frac{2n\varphi}{\pi} < \sin n\varphi < n\varphi$.

Полагая сначала $n=3$, а затем $n=1$, получаем неравенства $\sin 3\varphi > \frac{6\varphi}{\pi}$ и $\sin\varphi > \frac{2\varphi}{\pi}$, которые и применяем к преобразованию рассматриваемого интеграла.

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-(3R^2+x)R\frac{2\varphi}{\pi}}\,d\varphi = R\left[-\frac{e^{-(3R^2+x)R\frac{2\varphi}{\pi}}}{(3R^2+x)R\frac{2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(3R^2+x)}\left[-e^{-\frac{(3R^2+x)R}{3}}+1\right] < \frac{\pi}{2(3R^2+x)}.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{AB} e^{(t^3+tx)i}dt\right| < \frac{\pi}{2(3R^2+x)},$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty}\int_{AB} e^{(t^3+tx)i}\,dt = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{OA} e^{(t^3+tx)i}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_{OB} e^{(t^3+tx)i}\,dt,$$

то есть интегрирование по вещественной оси можно заменить интегрированием по прямой $\arg t = \frac{\pi}{6}$, для которой $t = re^{\frac{\pi}{6}i}$

$$\int_0^\infty e^{(t^3+tx)i}dt = \int_0^\infty e^{\left(r^3e^{\frac{\pi}{2}i}+xre^{\frac{\pi}{6}i}\right)i}\, e^{\frac{\pi}{6}i}\,dr,$$

то есть

$$\int_0^\infty e^{(t^3+tx)i}\,dt = e^{\frac{\pi}{6}i}\int_0^\infty e^{-r^3}e^{rxe^{\frac{2\pi}{3}i}}\,dr. \tag{34.5}$$

К функции $e^{rxe^{\frac{2\pi}{3}i}}$ применим формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^{rxe^{\frac{2\pi}{3}i}} = \sum_{m=0}^{n} e^{\frac{2m\pi}{3}i}\frac{x^m}{m!}r^m + R_n(r), \tag{34.6}$$

причем

$$|R_n(r)| = \left|e^{(n+1)\frac{2\pi}{3}i}\, e^{xe^{\frac{2\pi}{3}i}\theta r}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}r^{n+1}\right| =$$

$$= e^{x\cos\frac{2\pi}{3}\theta r}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}r^{n+1} < e^{xr}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}r^{n+1}\ (0<\theta<1),$$

откуда следует, что можно положить

$$R_n(r) = \theta_1 e^{xr} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} r^{n+1} \quad (|\theta_1| < 1). \tag{34.7}$$

Подставляя выражение (34.6) для функции $e^{rxe^{\frac{2\pi}{3}i}}$ в формулу (34.5), заменяя $R_n(r)$ по формуле (34.7) и производя почленное интегрирование, имеем:

$$\int_0^\infty e^{(t^3+tx)i}\,dt = e^{\frac{\pi}{6}i} \sum_{m=0}^{n} e^{\frac{2m\pi}{3}i} \frac{x^m}{m!} \int_0^\infty e^{-r^3} r^m dr +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \theta_1 e^{-r^3} e^{xr} r^{n+1}\,dr. \tag{34.8}$$

Если $n$ есть число нечетное, что можно предположить без уменьшения общности рассуждения, то

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \theta_1 e^{-r^3} e^{xr} r^{n+1}\,dr \right| <$$

$$< \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-r^3} \frac{(x^2r^2)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!} e^{xr} dr < \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-r^3} e^{x^2r^2} e^{xr}\,dr$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-r^3} e^{x^2r^2} e^{xr}\,dr = \int_0^\infty e^{-r^3} e^{x^2r^2} e^{xr}\,dr \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!} = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\int_0^\infty e^{(t^3+tx)i}\,dt = e^{\frac{\pi}{3}i} \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{2m\pi}{3}i} \frac{x^m}{m!} \int_0^\infty e^{-r^3} r^m dr. \tag{34.9}$$

Но [см. формулу (2.1)]

$$\int_0^\infty e^{-r^3} r^m dr = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-r^3} (r^3)^{\frac{m+1}{3}-1}\, d(r^3) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right);$$

следовательно,

$$\int_0^\infty e^{(t^3+tx)i}\,dt=\frac{1}{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}\sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{2m\pi}{3}i}\,\frac{x^m}{m!}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right) \tag{34.10}$$

или

$$\int_0^\infty [\cos(t^3+tx)+i\sin(t^3+tx)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\cos\frac{2m\pi}{3}+i\sin\frac{2m\pi}{3}\right)\frac{x^m}{m!}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right),$$

откуда

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{2m\pi}{3}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2m\pi}{3}\right)\frac{x^m}{m!}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right),$$

то есть

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2m\pi}{3}\right)\frac{x^m}{m!}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)$$

или

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\sin\frac{2(m+1)\pi}{3}\,\frac{x^m}{m!}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right). \tag{34.11}$$

Разделяя сумму на три суммы, соответствующие $m=3k$, $m=3k+1$, $m=3k+2$, где $k=0, 1, 2, \ldots$, и, замечая, что

$$\sin\frac{2(3k+1)\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \sin\frac{2(3k+2)\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\frac{2(3k+3)\pi}{3}=0,$$

имеем:

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k}}{(3k)!}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!}\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)\right]. \tag{34.12}$$

Применим, далее, формулу (4.9), выражающую теорему умножения для гамма-функции. Эта формула, взятая при $n=3$ и $a=k$:

$$\Gamma(k)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)=2\pi\cdot 3^{\frac{1}{2}-3k}\cdot\Gamma(3k),$$

дает возможность формулу (34.12) привести к виду:

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=\frac{\pi}{3}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k-\frac{1}{3}+1\right)}\left(\frac{x}{3}\right)^{3k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{3}+1\right)}\left(\frac{x}{3}\right)^{3k+1}\right].$$

Но

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{3k}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\left(\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{3}+2k};$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{3k+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\left(\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}+2k};$$

следовательно,

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=$$

$$=\frac{\pi\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k-\frac{1}{3}+1\right)}\left(\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{3}+2k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{3}+1\right)}\left(\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}+2k}\right] \qquad (34.13)$$

или, на основании формулы (26.7),

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=$$

$$=\frac{\pi\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)-I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right]. \qquad (34.14)$$

Применяя, наконец, формулу (26.11) и замечая, что $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем окончательно:

$$\int_0^\infty \cos(t^3+tx)\,dt=\frac{\sqrt{x}}{3}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right). \qquad (34.15)$$

При помощи рассуждений, аналогичных вышеприведенным, получается формула:

$$\int_0^\infty \cos(t^3-xt)\,dt=\frac{\pi\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)+\right.$$

$$\left.+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right]. \qquad (34.16)$$

В заключение, приведем без вывода следующие общие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \cos T_{2p+1}(t,x)\,dt=\frac{2\sqrt{x}\cos\frac{\pi}{4p+2}}{2p+1}K_{\frac{1}{2p+1}}\left(2x^{p+\frac{1}{2}}\right)\\
&\int_0^\infty \cos T_{2p}(t,x)\,dt=\frac{\pi\sqrt{x}}{4p\sin\frac{\pi}{4p}}\left[J_{-\frac{1}{2p}}(2x^p)-J_{\frac{1}{2p}}(2x^p)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (34.17)$$

и

$$\int_0^\infty \cos T_q(t,-x)\,dt=\frac{\pi\sqrt{x}}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\left[J_{\frac{1}{q}}\left(2x^{\frac{q}{2}}\right)+J_{-\frac{1}{q}}\left(2x^{\frac{q}{2}}\right)\right], \qquad (34.18)$$

где

$$T_r(t,x)=t^rF\left(-\frac{r}{2},\ \frac{1-r}{2},\ 1-r;\ -\frac{4x}{t^2}\right) \qquad (34.19)$$

[в формулах (34.17) $r=p$ и в формуле (34.18) $r=q$], а через $F$ обозначена гипергеометрическая функция.

## § 35. Колебания круглой мембраны

В качестве второго примера на применение цилиндрических функций мы рассмотрим *свободные поперечные колебания круглой мембраны.*

*Мембраной* называется весьма тонкая, абсолютно гибкая пластинка, сопротивляющаяся растяжению и сжатию, но не оказывающая сопротивления изгибу и сдвигу.

Мы рассмотрим случай, когда контур, ограничивающий мембрану, имеет форму окружности радиуса $l$ и когда точки этого контура остаются неподвижными при колебаниях мембраны, которые мы будем считать возникшими в результате воздействия на мембрану мгновенных сил и совершающимися по прекращении действия этих сил *свободно,* то есть при отсутствии каких-либо внешних сил.

Центр кругового контура, ограничивающего мембрану, мы примем за начало координат, а плоскость, в которой расположен этот контур, — за координатную плоскость $(xy)$. Мгновенные силы, вызвавшие свободные колебания мембраны, мы будем считать направленными параллельно оси $Oz$; тогда колебания мембраны будут *поперечными,* т. е. перемещения точек мембраны будут происходить только в направлениях, перпендикулярных к плоскости контура, ограничивающего мембрану. По определению мгновенных сил, промежуток времени $\delta t$, в течение которого эти силы действовали на мембрану, рассматривается, как величина бесконечно малая; поэтому, если в момент начала действия мгновенных сил мембрана находилась в состоянии покоя, то и в течение всего времени $\delta t$ точки мембраны остаются неподвижными, приобретая в момент прекращения действия на мембрану этих сил начальные скорости, параллельные оси $Oz$.

Пусть, далее, во всякий момент времени $t$, которое мы условимся отсчитывать от момента прекращения действия на мембрану мгновенных сил, поверхность мембраны выражается уравнением:

$$z = u(x, y, t), \tag{35.1}$$

которое в начальный момент времени, то есть при $t = 0$ принимает вид:

$$z = u(x, y, 0) \tag{35.2}$$

и определяет, очевидно, первоначальную форму мембраны.

Следующее предположение, состоящее в том, что колебания мембраны являются *малыми,* дает возможность пренебречь квадратами производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{35.3}$$

Мы будем считать, наконец, что поверхностная плотность мембраны повсюду одинакова:

$$\rho = \text{const}. \tag{35.4}$$

Переходя к определению внутренних сил, возникающих в мембране в результате воздействия на нее внешних мгновенных сил, укажем, прежде всего, что эти внутренние силы будут проявляться в виде натяжений. Вспоминая, что, по условию, отсутствует сопротивление со стороны мембраны изгибу и сдвигу, и обозначая через $\boldsymbol{T}_0$ натяжение, отнесенное к единице длины, мы должны считать, что натяжение $\boldsymbol{T}_0 ds$, действующее на элемент $ds$ какой-либо линии, проведенной на мгновенной поверхности мембраны [см. уравнение (35.1)], лежит в касательной плоскости к этой поверхности, перпендикулярно к элементу $ds$ и по величине не зависит от направления этого элемента.

Обозначая, далее, через $\boldsymbol{T}$ натяжение, действующее на какую-либо часть $S$ мгновенной поверхности мембраны, имеем для определения этого натяжения формулу:

$$\boldsymbol{T} = \oint_{\lambda} \boldsymbol{T}_0 dS, \tag{35.5}$$

где $\lambda$ есть контур, ограничивающий проекцию площади $S$ на координатную плотность $(x, y)$.

Из принятых нами и сформулированных выше условий вытекает также, что модуль $T_0$ натяжения $\boldsymbol{T}_0$ мы должны рассматривать, как величину постоянную, не зависящую ни от координат $x$ и $y$, ни от времени $t$:

$$T_0 = \text{const}. \tag{35.6}$$

Уравнение движения мембраны без труда выводится при помощи теоремы о количестве движения, которую мы применим в проекциях на ось $Oz$.

Рассматривая два момента времени $t = t_1$ и $t = t_2 (t_1 < t_2)$, для приращения $\Delta Q$ за время $t_2 - t_1$ количества движения какой-либо части $S$ мгновенной поверхности мембраны имеем выражение:

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S \frac{dz}{dt} \rho dS \right\} dt.$$

Но для точек мгновенной поверхности мембраны, выражаемой уравнением (35.1),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} V_x + \frac{\partial u}{\partial y} V_y = \frac{\partial u}{\partial t}$$

— так как

$$\frac{dx}{dt} = V_x = 0 \text{ и } \frac{dy}{dt} = V_y = 0,$$

в силу предположения о том, что точки мембраны перемещаются только вдоль оси $Oz$.

Следовательно,

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S \frac{\partial u}{\partial t} \rho dS \right\} dt. \qquad (35.7)$$

С другой стороны, импульс $P$, вычисленный за тот же промежуток времени $t_2 - t_1$ для вертикальных составляющих сил натяжения, действующих на ту же часть $S$ мгновенной поверхности мембраны (ограниченную контуром $C$), имеет выражение:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ T_0 \int_C \frac{\partial u}{\partial n} dS \right\} dt,$$

так как

$$\text{пр.}_z\ T_0 = T_0 \cos(T_0, z) = T_0 \cos(n, z) = T_0 \frac{\partial u}{\partial n},$$

где через $n$ обозначена нормаль к площадке $S$, взятой на мгновенной поверхности мембраны.

Но, на основании формулы Остроградского*,

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS.$$

Следовательно,

$$P = T_0 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS \right\} dt. \qquad (35.8)$$

По теореме о количестве движения,

$$\frac{d}{dt}(\Delta Q) = P \qquad (35.9)$$

и, на основании формул (35.7) и (35.8),

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S \left[ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dS \right\} dt = 0,$$

откуда, в силу произвольности выбора площади $S$ и промежутка времени $t_2 - t_1$,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \qquad (35.10)$$

---

* См. [2], стр. 199.

Полагая

$$\frac{T_0}{\rho} = a^2, \tag{35.11}$$

уравнение движения мембраны получаем в следующем окончательном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{35.12}$$

Если оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{35.13}$$

стоящий в скобке правой части уравнения (35.12), мы преобразуем к полярным координатам $r$ и $\varphi$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\,^*, \tag{35.14}$$

то уравнение (35.12) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right), \tag{35.15}$$

где $u$ рассматривается, как функция от $r$, $\varphi$ и $t$:

$$u = u(r, \varphi, t), \tag{35.16}$$

Нам надлежит теперь найти частные решения уравнения (35.15), удовлетворяющие граничному условию:

$$(u)_{r=l} = 0 \tag{35.17}$$

(напомним, что точки мембраны, находящиеся на ограничивающем ее контуре, не смещаются) и начальным условиям:

$$(u)_{t=0} = f_1(r, \varphi); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = f_2(r, \varphi), \tag{35.18}$$

где $f_1(r, \varphi)$ и $f_2(r, \varphi)$ суть заданные функции от $r$ и $\varphi$.

Переходя к интегрированию уравнения (35.15), воспользуемся с этой целью *методом Фурье*, в соответствии с которым представим искомое частное решение $u(r, \varphi, t)$, этого уравнения в виде произведения двух функций $\theta(t)$ и $U(r, \varphi)$, первая из которых зависит только от времени $t$, а вторая — только от полярных координат $r$ и $\varphi$:

$$u(r, \varphi, t) = \theta(t) \cdot U(r, \varphi). \tag{35.19}$$

---

* См. [2], стр. 341.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d\theta}{dt}U;\quad \frac{\partial u}{\partial r}=\theta\frac{\partial U}{\partial r};\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\theta\frac{\partial U}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{d^2\theta}{dt^2}U;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\theta\frac{\partial^2 U}{\partial r^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\theta\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

то уравнение (35.15) можно взять в виде:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}U=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)\theta,$$

откуда

$$\frac{\frac{d^2\theta}{dt^2}}{\theta}=\frac{a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)}{U}. \tag{35.20}$$

Но левая часть равенства (35.20) является функцией только от $t$ и не зависит от $r$ и $\varphi$, а правая часть — является функцией только от $r$ и $\varphi$ и не зависит от $t$; следовательно, выражения, стоящие в левой и правой частях этого равенства, должны быть равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $-\omega^2$, то есть будем считать величиной отрицательной*; тогда равенство (35.20) заменится следующими двумя равенствами:

$$\frac{\frac{d^2\theta}{dt^2}}{\theta}=-\omega^2;\qquad \frac{a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)}{U}=-\omega^2,$$

откуда

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0;\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+k^2U=0, \tag{35.21}$$

где [см. формулу (35.11)]

$$k^2=\frac{\omega^2}{a^2}=\frac{\omega^2\rho}{T_0}. \tag{35.22}$$

Общее решение первого из уравнений (35.21) имеет вид:

$$\theta=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t, \tag{35.23}$$

где $A_1$ и $A_2$ суть произвольные постоянные.

Что же касается второго из уравнений (35.21), то при его интегрировании мы снова воспользуемся методом Фурье, представляя искомое частное решение $U(r,\varphi)$ этого уравнения в виде произведения двух функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$, первая из которых за-

---

* Беря не $-\omega^2$, а $+\omega^2$, мы не удовлетворим граничному условию (35.17) ни при каких значениях произвольных постоянных, отличных от нуля.

висит только от полярного угла $\varphi$, а вторая — только от полярного радиуса-вектора $r$:

$$U(r,\varphi) = \Phi(\varphi) \cdot R(r). \tag{35.24}$$

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \Phi' R; \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \Phi R';$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \Phi'' R; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \Phi R'',$$

то второе из уравнений (35.21) можно взять в виде:

$$\left(R'' + \frac{1}{r} R' + k^2 R\right)\Phi + \frac{1}{r^2}\Phi'' R = 0,$$

откуда

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{r^2 R'' + rR' + k^2 r^2 R}{R}. \tag{35.25}$$

Но левая часть равенства (35.25) является функцией только от $\varphi$ и не зависит от $r$, а правая часть — является функцией только от $r$ и не зависит от $\varphi$; следовательно, выражения, стоящие в левой и правой частях этого равенства, должны быть равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $-n^2$, то есть будем считать величиной отрицательной; тогда равенство (35.25) заменится следующими двумя равенствами:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2; \qquad \frac{r^2 R'' + rR' + k^2 r^2 R}{R} = n^2,$$

откуда

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0; \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0. \tag{35.26}$$

Общее решение первого из уравнений (35.26) имеет вид:

$$\Phi = B_1 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi, \tag{35.27}$$

где $B_1$ и $B_2$ суть произвольные постоянные.

Что же касается второго из уравнений (35.26), то оно в точности совпадает с уравнением (26.2); следовательно, его общее решение может быть представлено формулой (26.3), с заменой в последней $y$ через $R$ и $x$ через $r$:

$$R = C_1 J_n(kr) + C_2 N_n(kr), \tag{35.28}$$

где $J_n(kr)$ есть цилиндрическая функция первого рода, $N_n(kr)$ — функция Неймана, а $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Подставляя выражения (35.27) и (35.28), найденные нами для функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$, в равенство (35.24), получаем следующую формулу для функции $U(r,\varphi)$:

$$U(r,\varphi) = (B_1 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi)\,[C_1 J_n(kr) + C_2 N_n(kr)]. \tag{35.29}$$

Подставляя затем выражения (35.23) и (35.29), найденные нами для функций $\theta(t)$ и $U(r,\varphi)$, в равенство (35.19), получаем следующую формулу для функции $u(r,\varphi,t)$, являющейся решением уравнения (35.15):

$$u(r,\varphi,t) = (A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t)\times$$
$$\times(B_1\cos n\varphi + B_2\sin n\varphi)\,[C_1J_n(kr) + C_2N_n(kr)]. \qquad (35.30)$$

Обращаясь к исследованию решений уравнения (35.15), выражаемых формулой (35.30), заметим, прежде всего, что по смыслу задачи, функция $U(r,\varphi)$ [а следовательно, и функция $\Phi(\varphi)$] должна быть однозначной и периодической — с периодом $2\pi$, откуда вытекает, что в формулах (35.27), (35.29) и (35.30) $n$ должно рассматриваться, как величина, принимающая только целые значения:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,^*.$$

С другой стороны, формула (24.9) показывает, что функция Неймана любого целого порядка обращается в бесконечность при $x=0$. В рассматриваемом случае роль $x$ выполняет $kr$ и так как, по смыслу задачи, при $r=0$ функция $u(r,\varphi,t)$ не может обратиться в бесконечность, то следует положить

$$C_2 = 0 \qquad (35.31)$$

и решение (35.30) уравнения (35.15) взять в виде:

$$u(r,\varphi,t) = (A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t)\times$$
$$\times(B_1\cos n\varphi + B_2\sin n\varphi)\,J_n(kr)^{**}. \qquad (35.32)$$

Из формулы (35.32), на основании граничного условия (35.17), мы для определения величины $k$ получаем уравнение:

$$J_n(kl) = 0, \qquad (35.33)$$

имеющее, как было выяснено в § 33, бесчисленное множество положительных корней.

Обозначим через $k_{nm}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ значения величины $k$, соответствующие корням уравнения (35.33) при выбранном значении величины $n$, которая, как было установлено выше, также имеет бесчисленное множество значений $(n=0,1,2,\ldots)$, а через $\omega_{nm}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ m=1,2,3,\ldots)$ — соответствующее значение величины $\omega$, определяемой по формуле (35.22). Очевидно, что каждой паре чисел $n$ и $m$ $(n=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,3,\ldots)$ соответ-

* Отрицательные значения $n$ можно не рассматривать.

** Так как уравнение (35.15) является однородным, то, не уменьшая общности рассуждения, можно считать, что

$$C_1 = 1$$

ствует частное решение уравнения (35.15), которое можно представить формулой (35.32), взятой в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_{nm}(r,\varphi,t) = (a_{nm}\cos\omega_{nm}t + \\ + a'_{nm}\sin\omega_{nm}t)\cos n\varphi J_n(k_{nm}r) + \\ + (b_{nm}\cos\omega_{nm}t + b'_{nm}\sin\omega_{nm}t)\sin n\varphi J_n(k_{nm}r) \\ (n = 0^*,\ 1,2,\ldots;\quad m = 1,2,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{35.34}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{nm} = A_1B_1; \quad a'_{nm} = A_2B_1 \\ b_{nm} = A_1B_2; \quad b'_{nm} = A_2B_2 \end{aligned}\right\} \tag{35.35}$$

причём считается, что коэффициенты $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ имеют различные значения при различных значениях $n$ и $m$.

Так как уравнение (35.15) является однородным, то сумма частных решений, определяемых формулой (35.34), то есть функция

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[(a_{nm}\cos\omega_{nm}t + a'_{nm}\sin\omega_{nm}t)\cos n\varphi J_n(k_{nm}r) +$$

$$+ (b_{nm}\cos\omega_{nm}t + b'_{nm}\sin\omega_{nm}t)\sin n\varphi J_n(k_{nm}r)] \tag{35.36}$$

также является решением этого уравнения. Однако, коэффициенты $a_{nm}$, $a'_{nm}$, $b_{nm}$, $b'_{nm}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, 3, \ldots)$ следует подобрать так, чтобы были удовлетворены начальные условия (35.18). С этой целью, продифференцируем обе части равенства (35.36) по $t$:

$$\frac{\partial u(r,\varphi,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[(-a_{nm}\sin\omega_{nm}t + a'_{nm}\cos\omega_{nm}t)\omega_{nm}\cos n\varphi J_n(k_{nm}r) +$$

$$+ (-b_{nm}\sin\omega_{nm}t + b'_{nm}\cos\omega_{nm}t)\,\omega_{nm}\sin n\varphi J_n(k_{nm}r)]. \tag{35.37}$$

Полагая, далее, в формулах (35.36) и (35.37) $t = 0$ и принимая во внимание начальные условия (35.18), получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} f_1(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{nm}\cos n\varphi + b_{nm}\sin n\varphi)J_n(k_{nm}r) \\ f_2(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}(a'_{nm}\cos n\varphi + b'_{nm}\sin n\varphi)J_n(k_{nm}r) \end{aligned}\right\} \tag{35.38}$$

* При $n=0$ второй член правой части равенства (35.34) обращается в нуль.

Но $f_1(r,\varphi)$ и $f_2(r,\varphi)$ являются периодическими функциями от $\varphi$ и потому могут быть представлены рядами Фурье:

$$\left.\begin{aligned} f_1(r,\varphi) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\varphi + c'_n \sin n\varphi) \\ f_2(r,\varphi) &= \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n \cos n\varphi + d'_n \sin n\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{35.39}$$

где коэффициенты $c_0$, $c_n$, $c'_n$ и $d_0$, $d_n$, $d'_n$, являющиеся функциями от $r$, определяются по известным формулам Эйлера-Фурье:

$$\left.\begin{gathered} c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_1(r,\varphi)\,d\varphi; \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_1(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi; \\ c'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_1(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi \\ d_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_2(r,\varphi)\,d\varphi; \quad d_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_2(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi; \\ d'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_2(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi \\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{gathered}\right\} \tag{35.40}$$

Сравнивая формулы (35.38) и (35.39), получаем равенства:

$$\left.\begin{gathered} c_0(r) = 2\sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0(k_{0m}r); \quad c_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_n(k_{nm}r); \\ c'_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} J_n(k_{nm}r) \end{gathered}\right\} \tag{35.41}$$

и

$$\left.\begin{gathered} d_0(r) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \omega_{0m} a'_{0m} J_0(k_{0m}r); \quad d_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} a'_{nm} J_n(k_{nm}r); \\ d'_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} b'_{nm} J_n(k_{nm}r), \end{gathered}\right\} \tag{35.42}$$

из которых следует, что постоянные $a_{om}$, $a_{nm}$, $a'_{nm}$, $b_{om}$, $b_{nm}$, $b'_{nm}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$; $m=1, 2, 3, \ldots$), соответствующие начальным условиям (35.18), определяются, как коэффициенты рядов Фурье-Бесселя (см. § 33), составленных для функций $c_0(r)$, $c_n(r)$, $c_n'(r)$, $d_0(r)$, $d_n(r)$, $d_n'(r)$ ($n=1, 2, 3,\ldots$; $m=1, 2, 3,\ldots$), являющихся коэффициентами разложений в тригонометрические ряды заданных функций $f_1(r,\varphi)$ и $f_2(r,\varphi)$.

Применяя к функциям $c_0(r)$, $c_n(r)$, $c_n'(r)$, $d_0(r)$, $d_n(r)$, $d_n'(r)$ ($n=1,2,3,\ldots$; $m=1,2,3,\ldots$), выражаемым рядами (35.41) и (35.42), формулу (33.22) [в которой вместо $x$ нужно взять $r$, вместо $f(x)$ — последовательно $c_0(r)$, $c_n(r)$, $c_n'(r)$, $d_0(r)$, $d_n(r)$, $d_n'(r)$ ($n=1,2,3,\ldots$; $m=1, 2, 3, \ldots$), вместо $k_q$ — $k_{nm}$, а интегрирование произвести в пределах от 0 до $l$] и принимая во внимание формулу (33.13), получаем для коэффициентов $a_{0m}$, $a_{nm}$, $a_{nm}'$, $b_{0m}$, $b_{nm}$, $b_{nm}'$ ($n=1,2,3,\ldots$; $m=1, 2, 3, \ldots$) формулы:

$$a_{0m}=\frac{\int\limits_0^l c_0(r)\,J_0(k_{0m}r)\,rdr}{2\int\limits_0^l J_0^2(k_{0m}r)\,rdr};\quad a_{nm}=\frac{\int\limits_0^l c_n(r)\,J_n(k_{nm}r)\,rdr}{\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr};$$

$$b_{nm}=\frac{\int\limits_0^l c_n'(r)\,J_n(k_{nm}r)\,rdr}{\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr}$$

и

$$a_{0m}'=\frac{\int\limits_0^l d_0(r)\,J_0(k_{0m}r)\,rdr}{2\int\limits_0^l J_0^2(k_{0m}r)\,rdr};\quad a_{nm}'=\frac{\int\limits_0^l d_n(r)\,J_n(k_{nm}r)\,rdr}{\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr};$$

$$b_{nm}'=\frac{\int\limits_0^l d_n'(r)\,J_n(k_{nm}r)\,rdr}{\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr}$$

и, после замены $c_0(r)$, $c_n(r)$, $c_n'(r)$, $d_0(r)$, $d_n(r)$, $d_n'(r)$ ($n=1,2,3,\ldots$; $m=1, 2, 3, \ldots$) их выражениями из формул (35.40), окончательно:

$$a_{0m}=\frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int\limits_0^l f_1(r,\varphi)\,J_0(k_{0m}r)\,rdr\right\}d\varphi}{2\pi\int\limits_0^l J_0^2(k_{0m}r)\,rdr};\quad a_{nm}=\frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int\limits_0^l f_1(r,\varphi)\cos n\varphi\, J_n(k_{nm}r)\,rdr\right\}d\varphi}{\pi\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr};$$

$$b_{nm}=\frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int\limits_0^l f_1(r,\varphi)\sin n\varphi J_n(k_{nm}r)rdr\right\}d\varphi}{\pi\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr} \tag{35.43}$$

и

$$a'_{om}=\frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int\limits_0^l f_2(r,\varphi)J_0(k_{0m}r)\,rdr\right\}d\varphi}{2\pi\omega_{0m}\int\limits_0^l J_0^2(k_{0m}r)\,rdr};\quad a'_{nm}=\frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int\limits_0^l f_2(r,\varphi)\cos n\varphi J_n(k_{nm}r)\,rdr\right\}d\varphi}{\pi\omega_{nm}\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr};$$

$$b'_{nm}=\frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int\limits_0^l f_2(r,\varphi)\sin n\varphi\, J_n(k_{nm}r)\,rdr\right\}d\varphi}{\pi\omega_{nm}\int\limits_0^l J_n^2(k_{nm}r)\,rdr}, \tag{35.44}$$

где

$$n=1,2,3,\ldots;\quad m=1,2,3,\ldots \tag{35.45}$$

Формула (35.36), в которой все коэффициенты $a_{nm}$, $a'_{nm}$, $b_{nm}$, $b'_{nm}$ ($n$=0, 1, 2, ...; $m$=1, 2, 3, ...) теперь определены, показывает, что общее движение круглой мембраны складывается из бесчисленного множества гармонических колебаний. Чтобы получить некоторое представление об этих гармонических колебаниях, рассмотрим отдельно одно из них, например, — колебание, определяемое уравнением:

$$z=a_{nm}\cos\omega_{nm}t\cos n\varphi J_n(k_{nm}r). \tag{35.46}$$

Это колебание имеет, очевидно, период [см. формулу (35.22)]:

$$\tau_{nm}=\frac{2\pi}{\omega_{nm}}=\frac{2\pi}{k_{nm}a}=\frac{2\pi}{k_{nm}}\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}=\frac{2}{k_{nm}l}\sqrt{\frac{\pi M}{T_0}}, \tag{35.47}$$

где

$$M=\rho\pi l^2$$

есть масса всей мембраны, и амплитуду

$$A_{nm}=a_{nm}J_n(k_{nm}r)\cos n\varphi. \tag{35.48}$$

Формула (35.47) показывает, что период колебания возрастает при увеличении массы мембраны $M$ или при уменьшении натяжения $T_0$.

Что же касается амплитуды, то, как следует из формулы (35.48), амплитуда обращается в нуль, если

$$J_n(k_{nm}r)=0 \tag{35.49}$$

или если

$$\cos n\varphi=0. \tag{35.50}$$

При заданном $n$, условие (35.49) выполняется, когда

$$r=\frac{k_{n1}}{k_{nm}}l;\quad r=\frac{k_{n2}}{k_{nm}}l;\quad \ldots r=\frac{k_{n,m-1}}{k_{nm}}l;\quad r=\frac{k_{nm}}{k_{nm}}l=l, \tag{35.51}$$

то есть на $m$ концентрических *узловых окружностях*, одна из которых (— соответствующая $r=l$) является, очевидно, контуром, ограничивающим мембрану.

Что же касается условия (35.50), то, при заданном $n$, оно выполняется, если

$$\varphi=\frac{\pi}{2n};\quad \varphi=\frac{3\pi}{2n};\quad \ldots\varphi=\frac{(4n-1)\pi}{2n}, \tag{35.52}$$

то есть на $n$ *узловых диаметрах* мембраны, которые разделяют мембрану на $2n$ равных секторов; колебания всех этих секторов одинаковы, но фазы каждых двух соседних секторов противоположны.

ГЛАВА IV

# ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА И СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 36. Производящая функция полиномов Лежандра; рекуррентные формулы

В § 14 было указано, что при

$$\alpha = n + 1; \quad \beta = -n; \quad \gamma = 1; \quad x = \frac{1 - x_1}{2}$$

гипергеометрическое уравнение (11.4) обращается в уравнение Лежандра (14.2):

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \qquad (36.1)$$

а гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ выражается формулой Родрига (14.4) и определяет *полином Лежандра n-го порядка* $P_n(x)$:

$$y = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] = P_n(x)^*. \qquad (36.2)$$

Можно, однако, к понятию полиномов Лежандра придти и другим путем, а именно — исходя из *уравнения Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (36.3)$$

фундаментальным решением которого является величина $\frac{1}{R}$, где $R$ есть расстояние произвольной точки $M$ $(x, y, z)$ пространства от определенной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (черт. 18).

При помощи теоремы косинусов, для $\frac{1}{R}$ мы получаем формулу:

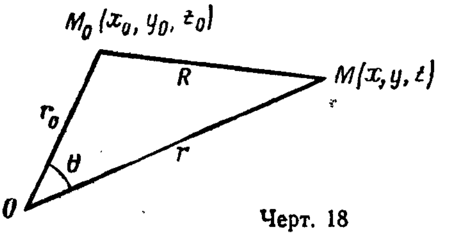
* Напомним, что в формулах (14.2) и (14.4) значок «1» у $x_1$ был нами опущен.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta}} \tag{36.4}$$

или

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}}, \tag{36.5}$$

если обозначить через $\rho$ отношение наименьшей из величин $r_0$ и $r$ к наибольшей [очевидно, что $\rho = \frac{r}{r_0}$ при $r < r_0$ и $\rho = \frac{r_0}{r}$ при $r_0 < r$, но в обоих случаях $\rho < 1$*], через $r_m$ — наибольшую из величин $r_0$ и $r$ (очевидно, что $r_m = r_0$ при $r_0 > r$ и $r_m = r$ при $r > r_0$) и положить:




Черт. 18

$$\cos\theta = x, \tag{36.6}$$

откуда следует, что в дальнейшем мы должны считать

$$-1 \leqslant x \leqslant +1. \tag{36.7}$$

Рассмотрим функцию:

$$\Phi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}}, \tag{36.8}$$

называемую *производящей функцией полиномов Лежандра*. Смысл этого названия состоит в том, что, как будет доказано несколько ниже, коэффициентами разложения функции $\Phi(\rho, x)$ в бесконечный ряд по степеням $\rho$ являются полиномы Лежандра соответствующих порядков:

$$\Phi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot \rho^n. \tag{36.9}$$

Однако, прежде, чем доказывать это утверждение, мы займемся выводом *рекуррентных формул* для коэффициентов разложения (36.9), то есть формул, связывающих коэффициенты соседних порядков.

С этой целью, продифференцируем обе части равенства (36.8) сначала по $\rho$, а затем по $x$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}\frac{2\rho - 2x}{(1+\rho^2-2\rho x)^{3/2}}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{-2\rho}{(1+\rho^2-2\rho x)^{3/2}},$$

или, на основании того же равенства (36.8),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{x-\rho}{1+\rho^2-2\rho x}\Phi; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\rho}{1+\rho^2-2\rho x}\Phi, \tag{36.10}$$

* Случай $\rho = 1$, когда $r = r_0$, следует рассматривать, как предельный.

откуда получаем следующие два уравнения:

$$(1-2\rho x+\rho^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+(\rho-x)\Phi=0 \tag{36.11}$$

и

$$(1-2\rho x+\rho^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\rho\Phi=0, \tag{36.12}$$

к которым присоединим уравнение, получающееся в результате деления первого из уравнений (36.10) на второе:

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+(\rho-x)\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0. \tag{36.13}$$

С другой стороны, как следует из формулы (36.9),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\rho^{n-1} \text{ и } \frac{\partial\Phi}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)\rho^n. \tag{36.14}$$

Подставляя выражение (36.9) для функции $\Phi(\rho, x)$ и выражения (36.14) для частных производных $\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ в формулы (36.11) и (36.13), имеем:

$$(1-2x\rho+\rho^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\rho^{n-1}+(\rho-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n=0$$

и

$$\rho\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\rho^{n-1}+(\rho-x)\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)\rho^n=0$$

или, если в левых частях полученных равенств перегруппировать члены, расположив их по степеням $\rho$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)]\rho^n=0 \tag{36.15}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}[nP_n(x)-xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)]\rho^n=0. \tag{36.16}$$

Равенство нулю рядов (36.15) и (36.16) должно иметь место при всех значениях $\rho$ и при всех значениях $x$, удовлетворяющих условию (36.7); поэтому коэффициенты при всех степенях $\rho$ должны быть равны нулю. Приравнивая к нулю коэффициенты при $\rho^n$ в равенствах (36.15) и (36.16), получаем следующие *две рекуррентные формулы:*

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \tag{36.17}$$

и

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0. \qquad (36.18)$$

Для вывода третьей рекуррентной формулы воспользуемся тождеством:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\Phi) = \rho\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \Phi\right),$$

которое при помощи формул (36.11) и (36.12) приводится к виду:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\Phi) + (\rho x - 1)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

и, далее, при помощи формулы (36.9) и второй из формул (36.14), — к виду:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, \rho^{n+1}\right] + (\rho x - 1)\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, \rho^n = 0$$

или

$$\rho \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_n(x)\, \rho^n + (\rho x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, \rho^n = 0.$$

Производя перегруппировку членов и располагая их по степеням $\rho$, а затем приравнивая к нулю коэффициент при $\rho^n$, получаем *третью рекуррентную формулу:*

$$nP_{n-1}(x) - P'_n(x) + xP'_{n-1}(x) = 0. \qquad (36.19)$$

Теперь легко убедиться в том, что коэффициенты $P_n(x)$ в формуле (36.9) пропорциональны полиномам Лежандра; для этого достаточно показать, что коэффициент $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению Лежандра, то есть уравнению (36.1) [см. также уравнение (14.2)].

Умножая равенство (36.18) на $x$ и вычитая из результата умножения равенство (36.19), имеем:

$$nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) - x^2 P'_n(x) - P'_n(x) = 0$$

или, после дифференцирования,

$$nP_n(x) + nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) - 2xP'_n(x) - x^2 P''_n(x) + P''_n(x) = 0$$

или, на основании формулы (36.18),

$$nP_n(x) + nxP'_n(x) + n^2 P_n(x) - nxP'_n(x) - 2xP'_n(x) -$$
$$- x^2 P''_n(x) + P''_n(x) = 0,$$

откуда

$$(1 - x^2) P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Так как множитель пропорциональности оказывается равным единице (это будет доказано в § 37), то коэффициенты $P_n(x)$ мы можем называть далее полиномами Лежандра.

Выведем еще некоторые важные соотношения между полиномами Лежандра различных порядков.

Заменяя во второй рекуррентной формуле (36.18) $n$ через $n+1$:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-xP'_{n+1}(x)+P'_n(x)=0$$

и складывая полученное равенство с равенством (36.19), то есть с третьей рекуррентной формулой, получим:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-xP'_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)+xP'_{n-1}(x)=0,$$

откуда

$$xP'_{n+1}(x)-xP'_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)$$

и, на основании первой рекуррентной формулы (36.17), после сокращения на $x$,

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x). \qquad (36.20)$$

Положим теперь в формуле (36.20) $n$ последовательно равным 0, 1, 2, ... $n$:

$$P_0(x)=P'_1(x)-P'_{-1}(x)$$
$$3P_1(x)=P'_2(x)-P'_0(x)$$
$$5P_2(x)=P'_3(x)-P'_1(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)$$

и сложим полученные равенства. Считая, что полиномов Лежандра отрицательных порядков не существует и что, следовательно, $P'_{-1}(x)=0$, и принимая во внимание, что $P_0(x)=1$ и, следовательно, $P'_0(x)=0$ [см. формулы (14.5)], придем к следующей формуле:

$$P_0(x)+3P_1(x)+5P_2(x)+\cdots+(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)+P'_n(x). \qquad (36.21)$$

Заменяя, далее, в формуле (36.20) $n$ через $n-2k+1$:

$$P'_{n-2k+2}(x)-P'_{n-2k}(x)=(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x),$$

произведем суммирование по $k$ от 1 до $N$, считая при этом, что $N=\frac{n}{2}$ при $n$ четном и $N=\frac{n+1}{2}$ при $n$ нечетном.

В результате этих операций мы получим формулу:

$$P'_n(x)=\sum_{k=1}^{N}(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x), \qquad (36.22)$$

где, как было указано,

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ при четном } n \\ \dfrac{n+1}{2} \text{ при нечетном } n. \end{cases} \tag{36.23}$$

## § 37. Свойства полиномов Лежандра; разложение данной функции в ряд по полиномам Лежандра

Если $x=1$, то формула (36.8) для производящей функции полиномов Лежандра принимает вид:

$$\Phi(\rho, 1) = \frac{1}{1-\rho}, \tag{37.1}$$

откуда

$$\Phi(\rho, 1) = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots \tag{37.2}$$

и, следовательно, на основании формулы (36.9),

$$P_n(1) = 1 \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{37.3}$$

При $x=-1$ формула (36.8) дает:

$$\Phi(\rho, -1) = \frac{1}{1+\rho}, \tag{37.4}$$

откуда

$$\Phi(\rho, -1) = 1 - \rho + \rho^2 - \rho^3 + \cdots \tag{37.5}$$

и, следовательно, на основании формулы (36.9),

$$P_n(-1) = (-1)^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{37.6}$$

В § 14, при помощи гипергеометрической функции, нами была выведена следующая *формула Родрига* [см. формулу (14.4)]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \tag{37.7}$$

Легко, однако, убедиться в том, что формулу Родрига можно получить и не прибегая к гипергеометрической функции.

В самом деле, полагая

$$y = (x^2 - 1)^n \tag{37.8}$$

и замечая, что при этом

$$y' = 2nx(x^2-1)^{n-1}, \tag{37.9}$$

получаем для $y$ уравнение:

$$(x^2 - 1)y' - 2nxy = 0. \tag{37.10}$$

Дифференцируя уравнение (37.10) $n+1$ раз, на основании формулы Лейбница, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (x^2-1)^{(k)} y^{(n-k+2)} - 2n \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{(k)} y^{(n+1-k)} = 0$$

или, так как

$$\begin{array}{lll} (x^2-1)^{(0)} = x^2-1 & x^{(0)} = x & C_{n+1}^0 = 1 \\ (x^2-1)^{(1)} = 2x & x^{(1)} = 1 & C_{n+1}^1 = n+1 \\ (x^2-1)^{(2)} = 2 & x^{(2)} = 0 & C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2}, \\ (x^2-1)^{(3)} = 0 & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

то

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + (n+1)\,2xy^{(n+1)} + \frac{(n+1)n}{2}\,2y^{(n)} -$$

$$-2nxy^{(n+1)} - 2n(n+1)\,y^{(n)} = 0,$$

откуда

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2xy^{(n+1)} + n(n+1)\,y^{(n)} = 0$$

или, если положить

$$Y_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!}\,y^{(n)}, \tag{37.11}$$

то

$$(1-x^2)\,Y_n''(x) - 2x\,Y_n'(x) + n(n+1)\,Y_n(x) = 0,$$

то есть правая часть формулы Родрига (37.7) удовлетворяет уравнению Лежандра и, следовательно, может отличаться от коэффициента $P_n(x)$ только постоянным множителем*:

$$Y_n(x) = C\cdot P_n(x). \tag{37.12}$$

Но, на основании формулы Лейбница,

$$Y_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,y^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n(x-1)^n] =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}[(x+1)^n + (x-1)^n]^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,[(x+1)^n]^{(n-k)}\,[(x-1)^n]^{(k)} =$$

---

* В §§ 39 и 40 будет установлено, что второе частное решение уравнения Лежандра содержит логарифм, который отсутствует в правой части формулы Родрига.

$$= \frac{1}{2^n n!} \left\{ (x+1)^n n! + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \left[(x+1)^n\right]^{(n-k)} \left[(x-1)^n\right]^{(k)} \right\}$$

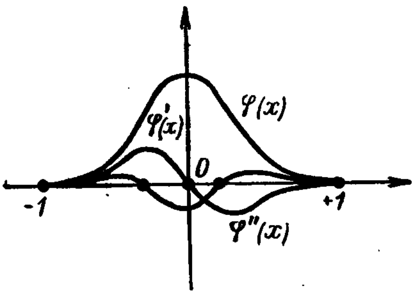
и, при $x=1$,

$$Y_n(1) = \frac{1}{2^n n!} 2^n n! = 1.$$

Полагая теперь в формуле (37.12) $x=1$ и принимая во внимание формулу (37.3), получаем:

$$C = 1,$$

что и убеждает нас в справедливости формулы Родрига.




Черт. 19

При помощи формулы Родрига (37.7), легко убедиться в том, что в полином Лежандра любого нечетного порядка $x$ входит только в нечетных степенях, а в полином Лежандра любого четного порядка — только в четных степенях; это следует из того, что под знаком $n$-ой производной в формуле (37.7) стоит полином степени $2n$, содержащий $x$ только в четных степенях, и что при $n$-кратном дифференцировании этого полинома степень $x$ в каждом его члене понижается на $n$, то есть становится нечетной при нечетном $n$ и остается четной при четном $n$.

Из этого свойства полиномов Лежандра сразу же вытекает, что при любом целом $n$

$$P_{2n}(-x) = P_{2n}(x) \tag{37.13}$$

и

$$P_{2n+1}(0) = 0; \; P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}. \tag{37.14}$$

При помощи формулы Родрига (37.7), можно составить полином Лежандра любого порядка $n$ [см. формулы (14.5)]; в частности, при $n=0$ и $n=1$ формула эта дает

$$P_0(x) = 1 \text{ и } P_1(x) = x.$$

Зная полиномы Лежандра $P_0(x)$ и $P_1(x)$, по первой рекуррентной формуле [см. формулу (36.17)] можно последовательно найти полиномы Лежандра $P_2(x)$, $P_3(x)$ и т. д. — вплоть до полинома Лежандра любого наперед заданного порядка.

Для выяснения вопроса о корнях полинома Лежандра $P_n(x)$ в интервале $(-1, +1)$, рассмотрим функцию:

$$\varphi(x) = (x^2 - 1)^n, \tag{37.15}$$

входящую в формулу Родрига (37.7) и обращающуюся в нуль на концах этого интервала (черт. 19):

$$\varphi(-1) = 0; \quad \varphi(+1) = 0. \tag{37.16}$$

По теореме Ролля, производная

$$\varphi'(x) = n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2x \tag{37.17}$$

внутри интервала $(-1, +1)$ по крайней мере один раз обращается в нуль; кроме того, эта производная обращается в нуль на концах интервала $(-1, +1)$. Следовательно, по той же теореме, вторая производная

$$\varphi''(x) = n(n-1)(x^2-1)^{n-2} \cdot 4x^2 + n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2 =$$

$$= n(x^2-1)^{n-2}[(3n-2)x^2-n] \tag{37.18}$$

внутри интервала $(-1, +1)$ обращается в нуль по крайней мере два раза и, кроме того, она обращается в нуль на концах интервала $(-1, +1)$.

Продолжая это рассуждение, придем к заключению, что производная $\varphi^{(n)}(x)$ в интервале $(-1, +1)$ обращается в нуль по крайней мере $n$ раз. Но функция $\varphi(x)$ есть полином степени $2n$; следовательно, производная $\varphi^{(n)}(x)$ в интервале $(-1, +1)$ имеет ровно $n$ корней, а раз так, то, как вытекает из формулы Родрига (37.7), и полином Лежандра $P_n(x)$ в интервале $(-1, +1)$ имеет ровно $n$ корней.

Вычисляя дальнейшие производные от функции $\varphi(x)$, при помощи аналогичных рассуждений придем к выводу, что $m$-ая производная от полинома Лежандра $P_n(x)$ в интервале $(-1, +1)$ имеет $(n-m)$ корней и заведомо не обращается в нуль на концах этого интервала. А раз так, то, как вытекает из формул (14.13) и (14.14), присоединенная функция порядка $n$, ранга $m$, то есть $P_{n,m}(x)$ в интервале $(-1, +1)$ имеет $n-m$ корней и обращается в нуль на концах этого интервала.

Рассмотрим теперь два полинома Лежандра различных порядков: $P_m(x)$ и $P_n(x)$; каждый из этих полиномов должен удовлетворять уравнению Лежандра, которое возьмем в форме (14.11):

$$[(1-x^2)P'_m(x)]' + m(m+1)P_m(x) = 0;$$

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на $P_n(x)$, второе — на $P_m(x)$ и вычитая из первого второе, получим:

$$[(1-x^2)P'_m(x)]'P_n(x) - [(1-x^2)P'_n(x)]'P_m(x) +$$

$$+ [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x) = 0$$

или, после несложных преобразований,

$$\{(1-x^2)\left[P'_m(x)P_n(x)-P'_n(x)P_m(x)\right]\}'+$$
$$+(m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x)=0.$$

Полученное уравнение проинтегрируем почленно в пределах от $-1$ до $+1$:

$$\int\limits_{-1}^{+1}\{(1-x^2)\left[P'_m(x)P_n(x)-P'_n(x)P_m(x)\right]\}'\,dx+$$
$$+(m-n)(m+n+1)\int\limits_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0$$

или, так как первый интеграл равен нулю,

$$(m-n)(m+n+1)\int\limits_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0.$$

Но, по условию, $m\neq n$; следовательно,

$$m-n\neq 0$$

и последняя формула принимает вид:

$$\int\limits_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0\quad(m\neq n).\tag{37.19}$$

Равенство (37.19) показывает, что *в интервале* $(-1,\ +1)$ *полиномы Лежандра ортогональны.*

Чтобы исследовать случай $m=n$, в первой рекуррентной формуле [см. формулу (36.17)]:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-2(n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\tag{37.20}$$

заменим $n$ через $n-1$:

$$nP_n(x)-(2n-1)xP_{n-1}(x)+(n-1)P_{n-2}(x)=0.\tag{37.21}$$

Вычитая из уравнения (37.21), умноженного на $(2n+1)$ $P_n(x)$ уравнение (37.20), умноженное на $(2n-1)$ $P_{n-1}(x)$, имеем:

$$n(2n+1)P_n^2(x)-(2n+1)(2n-1)xP_{n-1}(x)P_n(x)+$$
$$+(2n+1)(n-1)P_n(x)P_{n-2}(x)-(n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)+$$
$$+(2n+1)(2n-1)xP_{n-1}(x)P_n(x)-(2n-1)nP_{n-1}^2(x)=0$$

или

$$n(2n+1)P_n^2(x)+(2n+1)(n-1)P_n(x)P_{n-2}(x)-$$
$$-(n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)-(2n-1)nP_{n-1}^2(x)=0.$$

Интегрируя полученный результат в пределах от $-1$ до $+1$ и принимая во внимание условие ортогональности (37.19), получаем формулу:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2(x)\,dx \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad (37.22)$$

Последовательное применение формулы (37.22) дает:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{2(n-1)-1}{2(n-1)+1}\int_{-1}^{+1} P_{n-2}^2(x)dx =$$

$$= \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)-1}{2(n-1)+1}\cdot\frac{2(n-2)-1}{2(n-2)+1}\int_{-1}^{+1} P_{n-3}^2(x)\,dx = \cdots =$$

$$= \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)-1}{2(n-1)+1}\cdot\frac{2(n-2)-1}{2(n-2)+1}\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\int_{-1}^{+1} P_0^2(x)\,dx.$$

Но

$$P_0(x) = 1 \text{ и } \int_{-1}^{+1} P_0^2(x)\,dx = 2;$$

следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}\cdot 2$$

и окончательно:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}. \qquad (37.23)$$

Предположим теперь, что данная функция $f(x)$ может быть разложена в бесконечный ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \qquad (37.24)$$

сходящийся в интервале $(-1<x<+1)$ и допускающий в этом интервале почленное интегрирование.

Для определения коэффициентов $C_n$ умножим обе части равенства (37.24) на $P_m(x)$ и результат умножения проинтегрируем в пределах от $-1$ до $+1$:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x)\,dx = \int_{-1}^{+1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)\right] P_m(x)\,dx$$

или

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\,dx.$$

Применяя к правой части этого равенства формулу (37.19), по которой обращаются в нуль все интегралы, кроме одного, соответствующего значению $n$, равному $m$, и формулу (37.23), по которой этот единственный, отличный от нуля, интеграл оказывается равным $\frac{2}{2m+1}$, для коэффициентов $C_n$ разложения функции $f(x)$ в ряд по полиномам Лежандра получаем формулу:

$$C_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\,dx \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{37.25}$$

Укажем без доказательства, что произвольная вещественная функция $f(x)$, заданная в интервале $(-1, +1)$, может быть разложена в бесконечный ряд по полиномам Лежандра, с коэффициентами, определяемыми формулой (37.25), если удовлетворяются следующие два условия: 1) $f(x)$ является кусочно-гладкой функцией в открытом интервале $(-1, +1)$; 2) интеграл

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]^2\,dx$$

имеет конечное значение.

В заключение, отметим, что, исходя из уравнения (14.12) и рассуждая так же, как и при выводе формул (37.19) и (37.23), можно получить для присоединенных функций следующие формулы, аналогичные формулам (37.19) и (37.23), установленным для полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^{+1} P_{n,m}(x) P_{k,m}(x)\,dx = 0 \quad (k \neq n) \tag{37.26}$$

(эта формула выражает свойство *ортогональности присоединенных функций*) и

$$\int_{-1}^{+1} P^2_{n,m}(x)\,dx = \frac{2}{2n+1} \, \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{37.27}$$

## § 38. Интегральные формулы для полиномов Лежандра и присоединенных функций

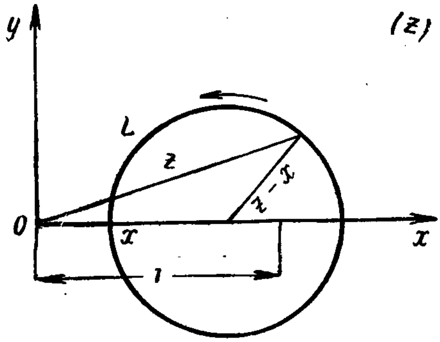
Считая по-прежнему $n$ числом целым и положительным, а $x$ — вещественным, покажем, что полином Лежандра $P_n(x)$ и присоединенные функции $P_{n,m}(x)$ можно представить в интегральной форме.

С этой целью рассмотрим плоскость комплексного переменного $(z)$ и вспомним формулу Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{38.1}$$

дающую возможность значение функции $f(z)$, регулярной в некоторой замкнутой области $E$, в любой внутренней точке $z_0$ области $E$ выразить через значения этой функции на контуре $L$, ограничивающем область $E$.

Примем за контур $L$ окружность с центром в точке $z_0 = x$ и радиуса $r = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, считая, что $x \neq \pm 1$ (черт. 20).



Черт. 20

Полагая

$$f(z) = (z^2 - 1)^n \tag{38.2}$$

и замечая, что функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области, ограниченной контуром $L$, по формуле Коши (38.1) имеем:

$$(x^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{(z^2 - 1)^n}{z - x} dz,$$

откуда

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint_L \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

и, на основании формулы Родрига (37.7),

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint_L \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz \tag{38.3}$$

или

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint_L \frac{(z - 1)^n (z + 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz. \tag{38.4}$$

Замечая, далее, что на окружности $L$

$$z - x = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\psi i},$$

откуда

$$z = x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\psi i}; \quad dz = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\psi i} i d\psi;$$

$$z-1=x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i};\quad z+1=x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i};$$

причем $\psi$ изменяется от $-\pi$ до $+\pi$, имеем:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\left\{\left[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]\left[x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]\right\}^n(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\,i d\psi}{\left[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]^{n+1}}$$

или

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\frac{\left[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]\left[x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}}\right\}^n d\psi. \quad (38.5)$$

Но

$$e^{\psi i}=\cos\psi+i\sin\psi;\quad e^{-\psi i}=\cos\psi-i\sin\psi$$

и

$$\left[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]\left[x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]=$$

$$=\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}\right]^2-1=x^2+2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}+(x^2-1)e^{2\psi i}-1=$$

$$=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\left[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+2xe^{\psi i}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{2\psi i}\right];$$

следовательно,

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+2xe^{\psi i}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{2\psi i}}{2e^{\psi i}}\right\}^n d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{-\psi i}+2x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi i}}{2}\right\}^n d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}i\sin\psi+2x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}i\sin\psi\right]\right\}^n d\psi$$

и окончательно:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi \right]^n d\psi^{*)}. \qquad (38.6)$$

Эта формула называется *интегралом Лапласа.*

Полагая, далее, в соответствии с формулой (36.6),

$$x = \cos\theta$$

и замечая, что при этом

$$(x^2 - 1) = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta\,; \quad (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - 1} = i\sin\theta\,,$$

приводим формулу (38.6) к виду:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n d\psi\,. \qquad (38.7)$$

Аналогичные рассуждения, исходной формулой для которых должна служить формула (14.14):

$$P_{n,m}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^n]\,, \qquad (38.8)$$

связывающая присоединенную функцию $P_{n,m}(x)$ с полиномом Лежандра $P_n(x)$, приведут нас к формуле:

$$P_{n,m}(x) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2^{n+1}\pi i} (1 - x)^{\frac{m}{2}} \oint\limits_L \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+m+1}} dz\,, \qquad (38.9)$$

---

* Отметим здесь, что, если

$$-1 \leqslant x \leqslant +1\,,$$

то

$$|x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi| = |x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\psi| = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)\cos^2\psi} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\psi + x^2\sin^2\psi} \leqslant 1$$

и, как вытекает из формулы (38.6),

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} d\psi = 1\,,$$

то есть *полиномы Лежандра $P_n(x)$ ограничены во всем замкнутом интервале* $[-1, +1]$, причем только на концах этого интервала $|P_n(x)| = 1$.

а также — к формуле:

$$P_{n,m}(x) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{+\pi} [x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi]^n \, e^{-im\psi} \, d\psi \,, \qquad (38.10)$$

которую, в силу нечетности функции $\sin m\psi$ можно заменить формулой:

$$P_{n,m}(x) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{+\pi} [x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi]^n \cos m\psi \, d\psi \,, \qquad (38.11)$$

и, наконец, — к формуле:

$$P_{n,m}(\cos\theta) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cos m\psi \, d\psi \,, \qquad (38.12)$$

причем в формулах (38.9), (38.10), (38.11) и (38.12) следует считать, что

$$m = 1, 2, 3, \cdots n \,. \qquad (38.13)$$

## § 39. Уравнение Лежандра в комплексной области; функция Лежандра первого рода

Рассмотрим уравнение Лежандра в комплексной области:

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \nu(\nu+1)\,w = 0\,, \qquad (39.1)$$

где под $\nu$ будем подразумевать любое постоянное число, и, прежде всего, исследуем особые точки этого уравнения.

Беря уравнение Лежандра (39.1) в виде:

$$w'' + \frac{2z}{z^2-1}w' - \frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1}w = 0 \qquad (39.2)$$

и замечая, что коэффициенты этого уравнения:

$$\left.\begin{aligned} p(z) &= \frac{2z}{z^2-1} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \\ q(z) &= -\frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1} = \frac{\nu(\nu+1)}{2(z+1)} - \frac{\nu(\nu+1)}{2(z-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (39.3)$$

в точках $z_1=-1$ и $z_2=+1$ имеют полюсы первого порядка, а в точке $z_3=\infty$ — соответственно простой корень и корень второго порядка, приходим к выводу, что точки $z_1=-1$, $z_2=+1$ и $z_3=\infty$ являются регулярными особыми точками уравнения Лежандра [что и понятно, так как уравнение Лежандра (39.1) представляет собою частный случай гипергеометрического уравнения (18.38), являющегося уравнением класса Фукса — см. §§ 17 и 18].

Сравнивая равенства (39.3) с равенствами (18.2), видим, что в рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned} &A_1=1; \quad A_2=1; \quad B_1=0; \quad B_2=0; \\ &C_1=\frac{\nu(\nu+1)}{2}; \; C_2=-\frac{\nu(\nu+1)}{2} \end{aligned}\right\} \tag{39.4}$$

и что, следовательно, определяющие уравнения для уравнения Лежандра (39.1) имеют вид [см. формулы (18.5) и (18.9)]:

$$\left.\begin{aligned} &\text{в точке } z_1=-1 : r^2=0 \\ &\text{в точке } z_2=+1 : r^2=0 \\ &\text{в точке } z_3=\infty \quad : r^2-r-\nu(\nu+1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{39.5}$$

откуда для корней определяющих уравнений получаем значения:

$$r_1'=r_1''=r_2'=r_2''=0; \quad r_\infty'=\nu+1; \quad r_\infty''=-\nu \tag{39.6}$$

Так как оба корня каждого из определяющих уравнений, составленных для точек $z_1=-1$ и $z_2=+1$, равны нулю, то в этих точках одно решение уравнения Лежандра является регулярным, а другое решение обязательно содержит логарифм [см. формулы (17.16)] и в окрестности соответствующей особой точки оказывается неограниченным. Что же касается бесконечно далекой точки $z_3=\infty$, то, как следует из формул (39.6), в этой точке одно из решений уравнения Лежандра обязательно обращается в нуль [см. формулы (18.48)].

Этими соображениями о форме решений уравнения Лежандра в окрестностях особых точек нам придется руководствоваться в дальнейших рассуждениях.

Вспомним формулу (38.3), представляющую полином Лежандра $P_n(x)$ в интегральной форме и выведенную для вещественных значений независимого переменного $x$, и предположим, что и в изучаемом случае, когда уравнение Лежандра рассматривается в комплексной области, решение этого уравнения может быть представлено интегралом того же вида, что и в формуле (38.3).

$$w(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \tag{39.7}$$

или

$$w(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L \frac{(t-1)^\nu (t+1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt. \qquad (39.8)$$

Очевидно, что формулы эти получены из формул (38.3) и (38.4) путем замены $z$ через $t$, которое рассматривается теперь, как независимое переменное, и $x$ — через $z$, которое, по условию, также является величиной комплексной (и рассматривается теперь, как параметр). Что же касается $L$, то это контур, который надлежит выбрать так, чтобы функция $w(z)$, определяемая формулой (39.7) [или (39.8)], удовлетворяла уравнению Лежандра (39.1)*.

Подставляя в уравнение (39.1) функцию $w(z)$, выражаемую формулой (39.7), и ее производные $w'(z)$ и $w''(z)$, выражаемые формулами:

$$w'(z)=\frac{\nu+1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+2}}dt;$$

$$w''(z)=\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}dt,$$

приводим уравнение (39.1) к виду:

$$(1-z^2)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}dt-2z\frac{\nu+1}{2^{\nu+1}\pi i}\times$$

$$\times\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+2}}dt+\frac{\nu(\nu+1)}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt=0$$

или, после очевидных преобразований,

$$\oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}\left[(\nu+2)(1-z^2)-2z(t-z)+\nu(t-z)^2\right]dt=0.$$

Но

$$(\nu+2)(1-z^2)-2z(t-z)+\nu(t-z)^2=\nu+2-\nu z^2-2z^2-2zt+$$

$$+2z^2+\nu t^2-2\nu tz+\nu z^2=\nu+2-2zt+\nu t^2-2\nu tz=$$

$$=\nu+2-2zt-2\nu tz+2\nu t^2-\nu t^2+2t^2-2t^2=$$

$$=(\nu+1)(t-z)2t-(\nu+2)(t^2-1),$$

* Напомним, что в формуле (38.3) за контур $L$ мы приняли окружность с центром в точке $z_0=x$ и радиуса $r=(x^2-1)^{1/2}$. Отметим здесь, что, с точки зрения применимости формулы Коши, такой выбор контура $L$ не является обязательным.

откуда

$$\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}[(\nu+2)(1-z^2)-2z(t-z)+\nu(t-z)^2]=$$

$$=\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}[(\nu+1)(t-z)2t-(\nu+2)(t^2-1)]=$$

$$=\frac{(\nu+1)(t-1)^\nu 2t(t-z)^{\nu+2}-(\nu+2)(t-z)^{\nu+1}(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{2\nu+4}}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right].$$

Следовательно, если интеграл (39.7) удовлетворяет уравнению Лежандра (39.1), то должно быть

$$\oint_L \frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right]dt=0$$

или

$$\oint_L d\left[\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right]=0. \qquad (39.9)$$

Таким образом, решение уравнения Лежандра в комплексной области действительно может быть представлено формулой (39.7) [или (39.8)], но при условии такого выбора контура $L$, что при его полном обходе функция

$$f(t,z)=\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}=\frac{(t-1)^{\nu+1}(t+1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}} \qquad (39.10)$$

возвращается к своему исходному значению, то есть является функцией однозначной.

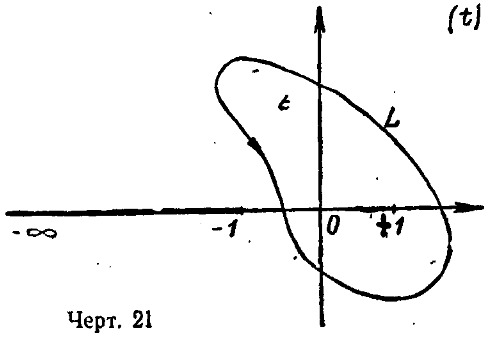
Впрочем, если $\nu$ есть целое число, то, как легко убедиться, функция $f(t, z)$, определяемая формулой (39.10), однозначна и притом — при любом выборе контура $L$.

Если же $\nu$ не является числом целым, то функция $f(t, z)$ имеет три точки разветвления:

$$t=+1; \quad t=-1; \quad t=z \qquad (39.11)$$

В самом деле, при полном обходе точки $t=+1$ увеличивается на величину, равную $2\pi\nu$, аргумент множителя $(t-1)^{\nu+1}$ числителя функции $f(t, z)$, при полном обходе точки $t=-1$ увеличивается на ту же величину $2\pi\nu$ аргумент множителя $(t+1)^{\nu+1}$ числителя, а при обходе точки $t=z$ увеличивается на величину $2\pi\nu$ аргумент знаменателя $(t-z^{\nu+2}$ функции $f(t, z)$. При этом считается, что все три обхода совершаются против часовой стрелки.

Отсюда следует, что после полного обхода контура возвращение функции $f(t, z)$ к своему исходному значению оказывается возможным только при условии, что контур охватывает точку $t=z$ и одну (и только одну) из точек $t=+1$ и $t=-1$. При выполнении этого условия числитель и знаменатель функции $f(t, z)$ приобретут в результате полного обхода контура одинаковые множители, равные $e^{2\pi\nu i}$, которые сократятся, то есть после полного обхода контура, выбранного указанным образом, функ-




Черт. 21

ция $f(t, z)$ примет свое первоначальное значение и ее можно будет рассматривать, как однозначную. К этому нужно добавить, что из двух точек разветвления $t=+1$ и $t=-1$ внутри контура должна находиться первая (то есть $t=+1$) и вне его — вторая (то есть $t=-1$). Несколько ниже будет показано, что только в этом случае функцию $w(z)$, определяемую формулой (39.7), можно рассматривать, как аналитическое продолжение в комплексную область полинома Лежандра $P_n(x)$ (при целом $\nu=n$).

Делая на комплексной плоскости $(t)$ разрез по отрицательной части вещественной оси от точки $t=-1$ до точки $t=-\infty$ (черт. 21), мы под $L$ можем подразумевать любой замкнутый контур, охватывающий точки $t=+1$ и $t=z$, но не пересекающий указанного разреза, причем считается, очевидно, что точка $t=z$ не находится на разрезе. Обход контура пусть совершается против часовой стрелки, а за исходное значение функции $f(t, z)$ принимается то ее значение, которое соответствует точке пересечения контура с положительной частью вещественной оси (точка эта расположена, очевидно, правее точки $t=+1$). Другими словами, исходное значение функции $f(t, z)$ определяется тем, что для него

$$\arg(t-1)=0; \quad \arg(t+1)=0; \quad |\arg(t-z)|<\pi \tag{39.12}$$

(при $t$ вещественном и удовлетворяющем условию $t>1$).

Что же касается формы контура, то, в силу теоремы Коши, она может быть выбрана произвольно (лишь бы он не пересекал разреза), — точно так же, как и положение исходной точки (лишь бы она являлась точкой пересечения контура с положительной частью вещественной оси и была расположена правее точки $t=+1$).

**Решение уравнения Лежандра (39.1), удовлетворяющее всем указанным условиям, обозначается через $P_\nu(z)$:**

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}\pi i} \oint\limits_L \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt \tag{39.13}$$

и называется *функцией Лежандра первого рода*, которая представляет собою, очевидно, функцию, регулярную на всей комплексной плоскости ($z$) — с разрезом по отрицательной части вещественной оси от точки $z=-1$ до точки $z=-\infty$.

Решение уравнения Лежандра в комплексной области [см. уравнение (39.1)] **мы можем получить и другим путем, а именно — как решение гипергеометрического уравнения (18.38):**

$$z_1(z_1-1)w'' + [(\alpha+\beta+1)z_1-\gamma]w' + \alpha\beta w = 0, \tag{39.14}$$

которое обращается в уравнение Лежандра при

$$\alpha = \nu+1; \quad \beta = -\nu; \quad \gamma = 1 \tag{39.15}$$

и при

$$z_1 = \frac{1-z}{2}. \tag{39.16}$$

Отсюда следует, что гипергеометрическая функция $F\left(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1-z}{2}\right)$ **являющаяся решением гипергеометрического уравнения (39.14) при выполнении условий (39.15) и (39.16), только постоянным множителем может отличаться от решения уравнения Лежандра (39.1), то есть от функции Лежандра первого рода** $P_\nu(z)$, выражаемой формулой (39.13):

$$P_\nu(z) = C\cdot F\left(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1-z}{2}\right), \tag{39.17}$$

так как эта функция Лежандра заведомо регулярна при $z=1$, то есть при $z_1 = \frac{1-z}{2} = 0$.

Для определения постоянной $C$, положим

$$z=1 \tag{39.18}$$

**и, следовательно,**

$$z_1 = \frac{1-z}{2} = 0. \tag{39.19}$$

Так как [см. формулу (11.13)]

$$F(\nu+1,\ -\nu,\ 1;\ z_1)=1+\frac{(\nu+1)(-\nu)}{1\cdot 1}z_1+$$
$$+\frac{(\nu+1)(\nu+2)(-\nu)(-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}z_1^2+\cdots,$$

то

$$F(\nu+1\,,\ -\nu\,,\ 1;\ 0)=1\,. \tag{39.20}$$

С другой стороны, по теореме Коши о вычетах,

$$P_\nu(1)=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-1)^{\nu+1}}dt=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint\limits_L\frac{(t+1)^\nu}{t-1}dt=$$
$$=\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}2\pi i\operatorname*{Res}_{t=1}\left[\frac{(t+1)^\nu}{t-1}\right]=\frac{1}{2^\nu}\lim_{t\to 1}\left[(t-1)\frac{(t+1)^\nu}{t-1}\right]=$$
$$=\frac{1}{2^\nu}2^\nu=1\,,$$

то есть

$$P_\nu(1)=1\,. \tag{39.21}$$

Полагая теперь в равенстве (39.17) $z=1$ и принимая во внимание равенства (39.20) и (39.21), имеем:

$$C=1$$

и, следовательно,

$$P_\nu(z)=F\left(\nu+1\,,\ -\nu,\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{39.22}$$

Если в формуле (39.22), выражающей функцию Лежандра первого рода через гипергеометрическую функцию, мы будем рассматривать $\nu=n$ как целое, положительное число, то формула эта примет вид

$$P_n(z)=F\left(n+1\,,\ -n,\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right) \tag{39.23}$$

и будет выражать через гипергеометрическую функцию полином Лежандра порядка $n$ [см. формулу (14.4)], который следует рассматривать, как аналитическое продолжение полинома Лежандра $P_n(x)$ на всю комплексную плоскость $(z)$ с разрезом по отрицательной части вещественной оси от точки $z=-1$ до точки $z=-\infty$.

В заключение укажем, что, как легко убедиться, для функции Лежандра первого рода имеют место рекуррентные формулы, выведенные нами в § 35 для полиномов Лежандра.

Отметим еще, что при всех значениях $\nu$ имеет место формула:

$$P_{\nu}(z) = P_{-(\nu+1)}(z), \tag{39.24}$$

вытекающая из неизменяемости гипергеометрической функции при перестановке ее параметров $\alpha$ и $\beta$.

## § 40. Функция Лежандра второго рода

До сих пор мы рассматривали только одно частное решение уравнения Лежандра, представляющееся в комплексной области функцией Лежандра первого рода. Обратимся теперь к задаче об определении второго частного решения этого уравнения.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что, если для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{40.1}$$

одно частное решение $w_1(z)$ найдено, то другое частное решение $w_2(z)$ этого уравнения может быть определено по формуле Лиувилля-Остроградского:

$$w_2 = Cw_1 \int e^{-\int p(z)dz} \frac{dz}{w_1^2}, \tag{40.2}$$

где $C$ — постоянная, которую, вследствие однородности уравнения (40.1), можно считать равной единице.

Предположив, что $\nu = n$ есть число целое и положительное, применим формулу Лиувилля-Остроградского (40.2) к нахождению второго частного решения уравнения Лежандра (39.1), которое возьмем в виде:

$$w'' - \frac{2z}{1-z^2}w' + \frac{n(n+1)}{1-z^2}w = 0. \tag{40.3}$$

Так как в рассматриваемом случае

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2}; \quad q(z) = \frac{n(n+1)}{1-z^2},$$

откуда

$$\int p(z)\,dz = -\int \frac{2zdz}{1-z^2} = \ln(1-z^2); \quad e^{-\int p(z)dz} = e^{-\ln(1-z^2)} = \frac{1}{1-z^2},$$

то формула Лиувилля-Остроградского (40.2) принимает вид:

$$w_2 = P_n(z) \int \frac{dz}{(1-z^2)[P_n(z)]^2}, \tag{40.4}$$

где через $P_n(z)$ обозначена, как и раньше, функция Лежандра первого рода, являющаяся первым частным решением уравнения Лежандра, а постоянный множитель $C$ положен равным единице.

В § 39 мы установили, что для уравнения Лежандра корни определяющего уравнения в бесконечно далекой точке $z=\infty$ имеют значения $n+1$ и $n$ [см. формулы (39.6)] и что одно из решений уравнения Лежандра обращается в нуль при $z=\infty$ [из формул (18.48) следует, что решение, обращающееся в нуль при $z=\infty$, соответствует корню определяющего уравнения, равному $n+1$]. Это обстоятельство позволяет нам формулу (40.4), выражающую второе частное решение $w_2(z)$ уравнения Лежандра, заменить следующей формулой, содержащей определенный интеграл вместо неопределенного интеграла, содержащегося в формуле (40.4):

$$w_2(z) = P_n(z) \int\limits_{\infty}^{z} \frac{dz}{(1-z^2)[P_n(z)]^2} \tag{40.5}$$

Второе частное решение уравнения Лежандра называется *функцией Лежандра второго рода* и обозначается обычно через $Q_n(z)$; в дальнейшем, наряду с формулой (40.5), мы будем пользоваться равносильной ей формулой:

$$Q_n(z) = P_n(z) \int\limits_{\infty}^{z} \frac{dz}{(1-z^2)[P_n(z)]^2}, \tag{40.6}$$

из которой следует, что функция Лежандра второго рода $Q_n(z)$, имеющая две особые точки: $z=-1$ и $z=+1$, регулярна на всей комплексной плоскости $(z)$ с разрезом по вещественной оси от точки $z=-1$ до точки $z=+1$.

В § 39 было указано также, что в каждой из особых точек $z=-1$ и $z=+1$ одно из решений уравнения Лежандра является регулярным, а другое обязательно содержит логарифм. Поэтому естественным является предположение, что через логарифмы можно выразить и функцию. Лежандра второго рода $Q_n(z)$.

Применяя, с этой целью, к уравнению Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0 \tag{40.7}$$

подстановку

$$w(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} - u(z), \tag{40.8}$$

при которой

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{2}P'_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} + \frac{P_n(z)}{1-z^2} - \frac{du}{dz} \\ \frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{1}{2}P''_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} + 2\frac{P'_n(z)}{1-z^2} + \frac{2zP_n(z)}{(1-z^2)^2} - \frac{d^2u}{dz^2} \end{aligned}\right\} \tag{40.9}$$

приводим уравнение Лежандра (40.7) к виду:

$$(1-z^2)\frac{1}{2}P_n''(z)\ln\frac{z+1}{z-1}+2P_n'(z)+\frac{2zP_n(z)}{1-z^2}-(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-$$

$$-zP_n'(z)\ln\frac{z+1}{z-1}-\frac{2zP_n(z)}{1-z^2}+2z\frac{du}{dz}+$$

$$+\frac{n(n+1)}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}-n(n+1)u=0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}\left[(1-z^2)P_n''(z)-2zP_n'(z)+n(n+1)P_n(z)\right]+2P_n'(z)-$$

$$-\left[(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u\right]=0$$

или, так как функция Лежандра первого рода удовлетворяет уравнению Лежандра, то

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=2P_n'(z) \qquad (40.10)$$

или, на основании формулы (36.22),

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(z), \qquad (40.11)$$

где

$$N=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{при четном } n\\[2mm] \dfrac{n+1}{2} & \text{при нечетном } n\end{cases} \qquad (40.12)$$

Рассмотрим сначала более простое дифференциальное уравнение:

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2z\frac{dv}{dz}+n(n+1)v=$$

$$=2(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(z), \qquad (40.13)$$

которое, на основании тождества

$$n(n+1)=(n-2k+1)(n-2k+2)+2(2k-1)(n-k+1),$$

можно взять в виде:

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2z\frac{dv}{dz}+[(n-2k+1)(n-2k+2)+$$

$$+2(2k-1)(n-k+1)]v=2(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(z) \qquad (40.14)$$

Предположив, что этому уравнению удовлетворяет функция:

$$v = aP_{n-2k+1}(z), \tag{40.15}$$

где $a$ есть некоторое постоянное число, приводим уравнение (40.14) к виду:

$$(1 - z^2)\, aP''_{n-2k+1}(z) - 2za\, P'_{n-2k+1}(z) + (n - 2k + 1) \times$$
$$\times (n - 2k + 2)\, aP_{n-2k+1}(z) + 2\,(2k - 1)(n - k + 1)\, aP_{n-2k+1}(z) =$$
$$= 2\,(2n - 4k + 3)\, P_{n-2k+1}(z)\,.$$

Но $P_{n-2k+1}(z)$ является, очевидно, решением уравнения Лежандра (40.7), при условии, что в этом уравнении $n$ заменено через $n-2k+1$; следовательно,

$$(1 - z^2)\, P''_{n-2k+1}(z) - 2zP'_{n-2k+1}(z) +$$
$$+ (n - 2k + 1)(n - 2k + 2)\, P_{n-2k+1}(z) = 0$$

и предыдущее уравнение, после сокращения на $2P_{n-2k+1}(z)$, принимает вид:

$$(2k - 1)(n - k + 1)\, a = 2n - 4k + 3\,,$$

откуда

$$a = -\frac{2n - 4k + 3}{(2k - 1)(n - k + 1)} \tag{40.16}$$

и, на основании формулы (40.15),

$$v(z) = -\frac{2n - 4k + 3}{(2k - 1)(n - k + 1)} P_{n-2k+1}(z)\,. \tag{40.17}$$

Зная частное решение уравнения (40.13), сразу же получаем частное решение уравнения (40.11):

$$u(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{2n - 4k + 3}{(2k - 1)(n - k + 1)} P_{n-2k+1}(z), \tag{40.18}$$

а затем, по формуле (40.8), и частное решение уравнения Лежандра (40.7):

$$w(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z + 1}{z - 1} -$$
$$- \sum_{k=1}^{N} \frac{2n - 4k + 3}{(2k - 1)(n - k + 1)} P_{n-2k+1}(z), \tag{40.19}$$

где $N$ определяется формулой (40.12).

Докажем теперь, что частное решение $w(z)$ уравнения Лежандра, определяемое формулой (40.19), в точности совпадает с функцией Лежандра второго рода $Q_n(z)$.

По известному свойству решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, найденное нами частное решение уравнения Лежандра может быть представлено, как линейная комбинация любых двух других частных решений этого уравнения, в качестве которых мы возьмем функции Лежандра первого и второго рода:

$$w(z) = C_1 P_n(z) + C_2 Q_n(z), \tag{40.20}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные, имеющие вполне определенные, но не известные нам значения.

С целью найти эти значения, выясним, как будут вести себя отдельные члены равенства (40.20) при $z \to \infty$.

Так как при $|z|>1$ имеет место разложение:

$$\ln\frac{z+1}{z-1} = 2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \cdots\right)$$

и так как при целом положительном $n$ функция Лежандра первого рода $P_n(z)$ представляет собою полином степени $n$, то первый член правой части равенства (40.19) мы можем взять в виде:

$$\frac{1}{2} P_n(z) \ln\frac{z+1}{z-1} = z^{n-1} \varphi_1(z),$$

причем

$$\varphi_1(z) = a_0' + \frac{a_1'}{z} + \frac{a_2'}{z^2} + \frac{a_3'}{z^3} + \cdots,$$

где $a_0'$, $a_1'$, $a_2'$ $a_3'$,... — постоянные коэффициенты.

Так как, далее, второй член правой части равенства (40.19) представляет собою полином степени $n-1$ и потому может быть взят в виде:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(z) = z^{n-1} \varphi_2(z),$$

причем

$$\varphi_2(z) = a_0'' + \frac{a_1''}{z} + \frac{a_2''}{z^2} + \frac{a_3''}{z^3} + \cdots,$$

где $a_0''$, $a_1''$, $a_2''$, $a_3''$,... — постоянные коэффициенты, то для решения уравнения Лежандра мы имеем выражение:

$$w(z) = z^{n-1} \varphi(z), \tag{40.21}$$

причем

$$\varphi(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots, \tag{40.22}$$

где $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$,... — постоянные коэффициенты.

С другой стороны, на основании первой из формул (18.48), в которой нужно положить $\alpha=n+1$, функцию Лежандра второго рода $Q_n(z)$ в окрестности бесконечно далекой точки можно взять в виде:

$$Q_n(z)=\frac{q(z)}{z^{n+1}}, \tag{40.23}$$

причем

$$q(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_3}{z^3}+\cdots, \tag{40.24}$$

где $b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_3$,... — постоянные коэффициенты.

Беря, наконец, полином Лежандра $P_n(z)$ в виде:

$$P_n(z)=z^n p(z), \tag{40.25}$$

причем

$$p(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdots, \tag{40.26}$$

где $c_0$, $c_1$, $c_2$, $c_3$,... — постоянные коэффициенты, и подставляя выражения (40.21), (40.23) и (40.25) в формулу (40.20), в окрестности бесконечно далекой точки имеем:

$$z^{n-1}\varphi(z)=C_1 z^n p(z)+C_2\frac{q(z)}{z^{n+1}}$$

или, после деления всех членов на $z^n$,

$$\frac{\varphi(z)}{z}=C_1 p(z)+C_2\frac{q(z)}{z^{2n+1}}$$

и при $z\to\infty$, на основании формул (40.22) и (40.24),

$$0=C_1\cdot p(z),$$

откуда, на основании формулы (40.26),

$$C_1=0.$$

Таким образом, формула (40.22), принимает вид:

$$w(z)=C_2 Q_n(z).$$

Подставляя это выражение для $w(z)$ в равенство (40.19) и полагая

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(z)=z^{n-1}\varphi_2(z)=f(z),$$

где $f(z)$ есть полином степени $n-1$, имеем:

$$C_2 Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}+f(z).$$

откуда, после деления всех членов на $P_n(z)$ и после дифференцирования,

$$C_2 \frac{d}{dz}\left[\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}\right] = \frac{1}{1-z^2} + \frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{P_n(z)}\right].$$

Сравнивая этот результат с результатом дифференцирования равенства (40.6):

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}\right] = \frac{1}{(1-z^2)[P_n(z)]^2},$$

получаем формулу:

$$\frac{C_2}{(1-z^2)[P_n(z)]^2} = \frac{1}{1-z^2} + \frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{P_n(z)}\right],$$

откуда

$$C_2 = [P_n(z)]^2 + (1-z^2)\left[f'(z)P_n(z) - P_n'(z)f(z)\right].$$

Полагая в этой формуле $z=1$ и вспоминая, что $P_n(1)=1$, имеем:

$$C_2 = 1.$$

Таким образом, мы установили, что $C_1=0$ и $C_2=1$, вследствие чего равенство (40.20) принимает вид:

$$w(z) = Q_n(z),$$

откуда следует [см. формулу (40.19)], что функция Лежандра второго рода $Q_n(z)$ может быть представлена формулой:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} - \sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(z), \quad (40.27)$$

где $N$ определяется формулой (40.12).

Докажем теперь, что для функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$ имеет место интегральная формула:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}dt. \quad (40.28)$$

Считая по-прежнему, что $n$ является числом целым и положительным, и рассматривая окрестность бесконечно далекой точки, функцию Лежандра второго рода $Q_n(z)$ мы можем представить формулой (40.23). С другой стороны,

$$\frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}} = \frac{(1-t^2)^n}{z^{n+1} - C_{n+1}^1 z^n t + C_{n+1}^2 z^{n-1} t^2 - \ldots} =$$

$$= (1-t^2)^n\left(\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{B_1}{z^{n+2}} + \frac{B_2}{z^{n+3}} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{(1-t^2)^n}{z^{n+1}}\left(1+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\cdots\right), \qquad (40.29)$$

где $B_1$, $B_2$,... — постоянные коэффициенты, и, следовательно,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{z^{n+1}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt +$$

$$+\frac{B_1}{z^{n+2}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt+\frac{B_2}{z^{n+3}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt+\cdots \qquad (40.30)$$

Таким образом, при $z\to\infty$ и левая, и правая части равенства (40.28) стремятся к нулю так же, как и $\frac{1}{z^{n+1}}$, откуда следует, что функция Лежандра второго рода $Q_n(z)$ только постоянным множителем отличается от интеграла, стоящего в правой части этого равенства:

$$Q_n(z) = C\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}}\,dt. \qquad (40.31)$$

Имея в виду использовать для определения постоянной $C$ формулу (40.6), возьмем полином Лежандра $P_n(z)$ в виде:

$$P_n(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \cdots + A_{n-1} z + A_n, \qquad (40.32)$$

где $A_0$, $A_1$ ,... $A_n$ — постоянные коэффициенты.

Так как

$$[P_n(z)]^2 = A_0^2 z^{2n} + A_1' z^{2n-1} + A_2' z^{2n-2} + \cdots;$$

$$(1-z^2)[P_n(z)]^2 = -A_0^2 z^{2n+2} + A_1'' z^{2n+1} + A_2'' z^{2n} + \cdots;$$

$$\frac{1}{(1-z^2)[P_n(z)]^2} = -\frac{1}{A_0^2 z^{2n+2}} + \frac{A_1'''}{z^{2n+3}} + \frac{A_2'''}{z^{2n+4}} + \cdots,$$

где $A_1'$, $A_2'$,..., $A_1''$,$A_2''$,... и $A_1'''$,$A_2'''$,... — постоянные коэффициенты, то

$$\int_{\infty}^{z}\frac{dz}{(1-z^2)[P_n(z)]^2} = \frac{1}{A_0^2(2n+1)z^{2n+1}} + \frac{A_1'''}{(2n+2)z^{2n+2}} +$$

$$+\frac{A_2'''}{(2n+3)z^{2n+3}}+\cdots$$

и, следовательно [см. формулы (40.6) и (40.32)],

$$Q_n(z) = \frac{1}{A_0(2n+1)\,z^{n+1}} + \frac{D_1}{z^{n+2}} + \frac{D_2}{z^{n+3}} + \cdots, \qquad (40.33)$$

где $D_1$, $D_2$,... — постоянные коэффициенты.

Подставляя выражения (40.33) и (40.30) в формулу (40.31):

$$\frac{1}{A_0(2n+1)\,z^{n+1}} + \frac{D_1}{z^{n+2}} + \frac{D_2}{z^{n+3}} + \cdots = \frac{C}{z^{n+1}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\,dt +$$

$$+ \frac{CB_1}{z^{n+2}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\,dt + \frac{CB_2}{z^{n+3}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\,dt + \cdots$$

и приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{z^{n+1}}$, получаем формулу:

$$\frac{1}{A_0(2n+1)} = C \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\,dt. \qquad (40.34)$$

Но $A_0$ есть коэффициент при $z^n$ в полиноме Лежандра $P_n(z)$ [см. формулу (40.32)]; следовательно, по формуле Родрига (37.7),

$$A_0 = \frac{1}{2^n n!}\, 2n(2n-1)\cdots(n+1),$$

то есть

$$A_0 = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \qquad (40.35)$$

С другой стороны, применяя к интегралу, стоящему в правой части равенства (40.34), подстановку

$$t = \cos\theta;\; dt = -\sin\theta\,d\theta,$$

при которой

если $t = -1$, то $\theta = \pi$; если $t = +1$, то $\theta = 0$,

имеем:

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\,dt = -\int_{\pi}^{0} \sin^{2n+1}\theta\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \sin^{2n+1}\theta\,d\theta =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\,d\theta$$

и, по формуле (6.2).

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt=2\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1\Gamma(1)\sqrt{\pi}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=$$

$$=\frac{n!\,2^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}$$

и окончательно:

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}. \tag{40.36}$$

При помощи формул (40.35) и (40.36) равенство (40.34) приводится к виду:

$$\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}=C\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!},$$

откуда

$$C=\frac{1}{2^{n+1}}. \tag{40.37}$$

Подставляя это значение $C$ в формулу (40.31), приходим к формуле (40.28), в справедливости которой нам и надлежало убедиться.

Функция Лежандра второго рода $Q_n(z)$ регулярна на всей комплексной плоскости $(z)$ с разрезом по вещественной оси от точки $z=-1$ до точки $z=+1$, которые для этой функции являются особыми точками. Формулы (40.6) и (40.28) выражают функцию Лежандра второго рода при всех значениях $z$, кроме значений, соответствующих указанному разрезу и заключенных, следовательно, в замкнутом интервале $-1\leqslant z\leqslant+1$.

Функция Лежандра второго рода $Q_n(z)$ может быть выражена через гипергеометрическую функцию.

В самом деле, применяя к уравнению Лежандра:

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+n(n+1)w=0 \tag{40.38}$$

подстановку

$$z^2=z_1, \tag{40.39}$$

при которой

$$\frac{dz_1}{dz} = 2z = 2\sqrt{z_1}\,; \quad \frac{d^2z_1}{dz^2} = 2;$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz} = 2\sqrt{z_1}\frac{dw_1}{dz_1}; \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{dz_1^2}\left(\frac{dz_1}{dz}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{dw}{dz_1}\right)\frac{d^2z_1}{dz^2} = 4z_1\frac{d^2w}{dz_1^2} + 2\frac{dw}{dz_1},$$

приводим это уравнение к виду:

$$z_1(z_1-1)\frac{d^2w}{dz_1^2} + \frac{3z_1-1}{2}\frac{dw}{dz_1} - \frac{n(n+1)}{4}w = 0$$

или

$$z_1(z_1-1)\frac{d^2w}{dz_1^2} + \left[\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} + 1\right)z_1 - \frac{1}{2}\right]\frac{dw}{dz_1} +$$

$$+\frac{n+1}{2}\left(-\frac{n}{2}\right)w = 0. \qquad (40.40)$$

Мы получили гипергеометрическое уравнение с параметрами:

$$\alpha = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \ \beta = -\frac{n}{2}; \ \gamma = \frac{1}{2}. \qquad (40.41)$$

Решение гипергеометрического уравнения, обращающееся в нуль в бесконечно далекой точке $z=\infty$ и определяющееся первой из формул (18.48) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$w_{1\infty} = \left(\frac{1}{z_1}\right)^{\frac{n+1}{2}} F\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2},\ \frac{n}{2} + 1,\ n + \frac{3}{2};\ \frac{1}{z_1}\right) \qquad (40.42)$$

или, если перейти к прежнему независимому переменному $z$,

$$w_{1\infty} = \frac{1}{z^{n+1}} F\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2},\ \frac{n}{2} + 1,\ n + \frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right). \qquad (40.43)$$

Сравнение этой формулы с формулой (40.23) показывает, что при $z \to \infty$ решение $w_{1\infty}$ стремится к нулю так же, как и функция Лежандра второго рода $Q_n(z)$; следовательно, функции $w_{1\infty}$ и $Q_n(z)$ могут отличаться друг от друга только постоянным множителем, который мы обозначим через $m$:

$$Q_n(z) = \frac{m}{z^{n+1}} F\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2},\ \frac{n}{2} + 1,\ n + \frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right). \qquad (40.44)$$

Но разложения в бесконечные ряды функции Лежандра второго рода и гипергеометрической функции начинаются соответственно с члена $\frac{1}{A_0(2n+1)z^{n+1}}$ [см. формулу (40.33)] и с единицы [см. формулу (11.13)]; следовательно, должно быть

$$\frac{1}{A_0(2n+1)} = m$$

или, на основании формулы (40.35),

$$m = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}$$

и [см. вывод формулы (40.36)]

$$m = \frac{\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}. \tag{40.45}$$

Подставляя это значение $m$ в формулу (40.44), получаем следующее выражение функции Лежандра второго рода через гипергеометрическую функцию:

$$Q_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{z^{n+1}} \times$$

$$\times F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right). \tag{40.46}$$

Отметим без доказательства, что результаты, полученные нами для целого положительного $\nu = n$, могут быть распространены на любые значения $\nu$, но при соответствующих ограничениях. Так, например, формула (40.46), выражающая функцию Лежандра второго рода через гипергеометрическую функцию, остается справедливой и для любых значений $n$, кроме целых отрицательных значений. Формула (40.28) имеет место при любых значениях $n$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\, n > -1$. Можно функцию Лежандра второго рода представить и в виде контурного интеграла, аналогичного интегралу, входящему в формулу (39.13), но, разумеется, при надлежащем выборе контура. Важно отметить также, что при $n$, не являющемся целым положительным числом, бесконечно далекая точка $z = \infty$ оказывается для функции Лежандра второго рода точкой разветвления.

Следует еще указать, что для функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$ сохраняют свою силу рекуррентные формулы, выведенные в § 36 для полиномов Лежандра $P_n(x)$ и выполняющиеся, как было отмечено в § 39, для функций Лежандра первого рода $P_\nu(z)$.

В заключение отметим, что при помощи формулы

$$Q_{n,m}(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(z)}{dz^m}, \tag{40.47}$$

аналогичной формуле Родрига (37.7), может быть установлено понятие о *присоединенных функциях* $Q_{n,m}(z)$, соответствующих функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$.

## § 41. Сферические функции

Вернемся к уравнению Лапласа:

$$\Delta u(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{41.1}$$

и предположим, что решением этого уравнения является некоторый однородный полином степени $n$, содержащий три переменных — $x$, $y$, $z$. Располагая члены такого полинома по степеням одной из переменных, например, — по степеням $z$ и замечая, что тогда коэффициенты при различных степенях $z$ будут содержать переменные $x$ и $y$, то есть будут функциями от $x$ и $y$, мы можем этот полином взять в виде:

$$u_n(x,y,z)=\varphi_0(x,y)z^n+\varphi_1(x,y)z^{n-1}+\varphi_2(x,y)z^{n-2}+$$
$$+\cdots+\varphi_{n-1}(x,y)z+\varphi_n(x,y). \tag{41.2}$$

Легко заметить, что коэффициенты $\varphi_k(x,y)$ ($k=0, 1, 2,\ldots n$) в формуле (41.2) сами являются однородными полиномами степеней $k(k=0, 1, 2,\ldots n)$, содержащими переменные $x$, $y$, и имеют вид:

$$\varphi_k(x,y)=C_0x^k+C_1x^{k-1}y+C_2x^{k-2}y^2+$$
$$+\cdots+C_{k-1}xy^{k-1}+C_ky^k \quad (k=0,1,2,\ldots n), \tag{41.3}$$

где $C_0$ $C_1$, $C_2$,... $C_n$ — постоянные коэффициенты.

Подсчитаем общее число коэффициентов в полиноме $u_n(x,y,z)$. Так как число коэффициентов в полиноме $\varphi_k(x,y)$ равно $k+1$, а $k$ принимает все значения от 0 до $n$, то число коэффициентов во всех $n+1$ полиномах $\varphi_k(x,y)$, входящих в $u_n(x,y,z)$, то есть число коэффициентов в самом полиноме $u_n(x,y,z)$ определяется суммой:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{41.4}$$

Подставляя полином $u_n(x,y,z)$ в уравнение Лапласа (41.1), в левой части этого уравнения мы получим новый полином $v_{n-2}(x,y,z)$ — степени $n-2$, имеющий $\frac{(n-1)n}{2}$ коэффициентов, выражающихся, очевидно, через коэффициенты полинома $u_n(x,y,z)$. Но полином $u_n(x,y,z)$, по условию, является решением уравнения Лапласа; поэтому все коэффициенты полинома $v_{n-2}(x,y,z)$ должны быть равны нулю.

Таким образом, мы приходим к выводу, что коэффициенты полинома $u_n(x, y, z)$, число которых равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, связаны $\frac{(n-1)n}{2}$ уравнениями; следовательно, число коэффициентов полинома $u_n(x, y, z)$, которые могут быть заданы произвольно, равно

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n+1, \tag{41.5}$$

но при условии, что уравнения, связывающие коэффициенты этого полинома, независимы, а это из наших предыдущих рассуждений еще не вытекает.

Для доказательства того, что полином

$$u_n(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma \, (\alpha+\beta+\gamma = n), \tag{41.6}$$

где, как легко проверить,

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma}, \tag{41.7}$$

действительно имеет $2n+1$ независимых коэффициентов, достаточно обратить внимание на то, что уравнение Лапласа, взятое в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

позволяет дифференцирования по $z$, порядка второго или выше, заменить дифференцированиями соответствующих порядков по $x$ и $y$, после чего в выражении полинома $u_n(x, y, z)$ останутся лишь члены, не содержащие дифференцирований по $z$, и члены, содержащие дифференцирование по $z$ только первого порядка*; коэффициенты таких членов имеют вид:

$$A_{\alpha\beta 0}, \text{ где } \alpha+\beta = n$$

и

$$A_{\alpha\beta 1}, \text{ где } \alpha+\beta+1 = n,$$

причем число коэффициентов первого из этих типов равно $n+1$, а число коэффициентов второго типа равно $n$ и, следовательно, число коэффициентов обоих типов равно $2n+1$.

---

* Например,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3};$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y\,\partial z^3} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y \partial z} - \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^3 \partial z}$$

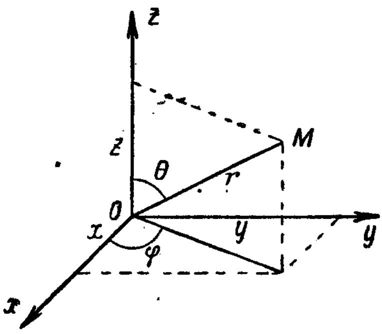
и т. д.

Таким образом, при любом целом положительном $n$ уравнению Лапласа (41.1) удовлетворяет $2n+1$ линейно-независимых однородных полиномов степени $n$.

Называя *гармоническим* всякий полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа, мы можем сказать, что для любого целого, положительного числа $n$ существует $2n+1$ линейно-независимых однородных гармонических полиномов.

Перейдем теперь в гармоническом однородном полиноме $u_n(x, y, z)$, где $n$ обозначает степень этого полинома, к сферическим координатам (черт. 22) по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\}; \qquad (41.8)$$



Черт. 22

тогда полином этот представится в виде:

$$u_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi). \qquad (41.9)$$

Функция $r^n Y_n$ $(\theta, \varphi)$, стоящая в правой части формулы (41.9), называется *объемной сферической* или *шаровой функцией порядка n*; функция $Y_n$ $(\theta, \varphi)$ называется *поверхностной сферической* или просто *сферической функцией порядка n*. Из сказанного выше следует, что существует $2n+1$ линейно-независимых сферических функций порядка $n$.

Переходя к доказательству того, что сферические функции могут быть выражены через полиномы Лежандра и присоединенные функции, и к выводу соответствующих формул, рассмотрим функцию:

$$F(x, y, z) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t, \tau)\, dt, \qquad (41.10)$$

зависящую от своих аргументов $x$, $y$, $z$ через комплексный параметр $\tau$, определяемый формулой:

$$\tau = ix\cos t + iy\sin t + z. \qquad (41.11)$$

Легко убедиться в том, что, какова бы ни была функция $f(t, \tau)$, функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (41.1); единственное условие при этом состоит в том, что в правой части равенства (41.10) дифференцирование можно произвести под знаком интеграла.

Если это условие выполняется, то

$$\Delta F(x, y, z) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} f_\tau''(t, \tau)(-\cos^2 t - \sin^2 t + 1)\,dt = 0,$$

то есть справедливость нашего утверждения доказывается путем его непосредственной проверки.

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} f_{n,m}^{(1)}(t, \tau) &= (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \cos mt \\ f_{n,m}^{(2)}(t, \tau) &= (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \sin mt \end{aligned}\right\}, \tag{41.12}$$

где

$$m = 0, 1, 2, \ldots n \tag{41.13}$$

и рассмотрим $2n+1$ функций:

$$\left.\begin{aligned} F_{n,m}^{(1)}(x, y, z) &= \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \cos mt\,dt \\ F_{n,m}^{(2)}(x, y, z) &= \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n \sin mt\,dt \end{aligned}\right\} \tag{41.14}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots n),$$

составленных по формуле (41.10) и представляющих собою, очевидно, гармонические однородные полиномы степени $n$.

Переходя в формулах (41.14) к сферическим координатам и полагая

$$\left.\begin{aligned} F_{n,m}^{(1)}(x, y, z) &= r^n \overline{Y}_{n,m}^{(1)}(\theta, \varphi) \\ F_{n,m}^{(2)}(x, y, z) &= r^n \overline{Y}_{n,m}^{(2)}(\theta, \varphi) \end{aligned}\right\} (m = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{41.15}$$

где через $\overline{Y}_{n,m}^{(1)}(\theta,\varphi)$ и $\overline{Y}_{n,m}^{(2)}(\theta,\varphi)$ обозначены сферические функции, получаем для этих сферических функций формулы:

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y}_{n,m}^{(1)}(\theta, \varphi) &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi\cos t + \\ &\quad + i\sin\theta\sin\varphi\sin t)^n \cos mt\,dt \\ \overline{Y}_{n,m}^{(2)}(\theta, \varphi) &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi\cos t + \\ &\quad + i\sin\theta\sin\varphi\sin t)^n \sin mt\,dt \end{aligned}\right\} (m=0,1,2,\ldots n)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n\cos mt\,dt\\ \overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n\sin mt\,dt\end{aligned}\right\}\ (m=0,1,2,\dots n).$$

К полученным интегралам применим подстановку:

$$t-\varphi=\psi;\ dt=d\psi, \tag{41.16}$$

при которой

если $t=-\pi$, то $\psi=-\pi-\varphi$; если $t=+\pi$, то $\psi=+\pi-\varphi$;

тогда предыдущие формулы примут вид:

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \int\limits_{-\pi-\varphi}^{+\pi-\varphi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi]^n\cos[m(\varphi+\psi)]\,d\psi\\ \overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \int\limits_{-\pi-\varphi}^{+\pi-\varphi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi]^n\sin[m(\varphi+\psi)]\,d\psi\\ &(m=0,1,2,\dots n)\end{aligned}\right\}$$

или, так как подынтегральная функция имеет период $2\pi$,

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi]^n\cos[m(\varphi+\psi)]\,d\psi\\ \overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi]^n\sin[m(\varphi+\psi)]\,d\psi\\ &(m=0,1,2,\dots n).\end{aligned}\right\}$$

Применяя, наконец, формулы для косинуса и синуса суммы двух аргументов и принимая во внимание, что синус есть функция нечетная, получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \cos m\varphi\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cos m\psi\,d\psi\\ \overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta,\varphi) &= \sin m\varphi\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cos m\psi\,d\psi\end{aligned}\right\} \tag{41.17}$$

$$(m=0,1,2,\dots n).$$

Сравнение формул (41.17) с формулами (38.7) и (38.12) приводит к следующим выражениям сферических функций $\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta,\varphi)$

и $\overline{Y}^{(2)}_{m,n}$ $(\theta, \varphi)$ через полиномы Лежандра $P_n$ $(\cos\theta)$ и присоединенные функции $P_{n,m}$ $(\cos\theta)$:

$$\overline{Y}^{(1)}_{n,o}(\theta, \varphi) = 2\pi P_n(\cos\theta)\,; \quad \overline{Y}^{(2)}_{n,o}(\theta, \varphi) = 0 \tag{41.18}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi) &= \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi \\ \overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi) &= \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi \end{aligned}\right\} \tag{41.19}$$

$$(m = 1, 2, \ldots n)\,.$$

Так как уравнение Лапласа является однородным, то постоянные множители в правых частях равенств (41.18) и (41.19) не имеют значения; поэтому вместо сферических функций $\overline{Y}^{(1)}_{n,0}(\theta,\varphi)$, $\overline{Y}^{(2)}_{n,0}(\theta, \varphi)$, $\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi)$, $\overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi)$ можно рассматривать сферические функции $Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)$, $Y^{(2)}_{n,0}(\theta, \varphi)$, $Y^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi)$ $Y^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi)$, связанные с $\overline{Y}^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)$, $\overline{Y}^{(2)}_{n,0}(\theta, \varphi)$, $\overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi)$ и $\overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi)$ формулами:

$$\overline{Y}^{(1)}_{n,o}(\theta, \varphi) = 2\pi\, Y^{(1)}_{n,o}(\theta, \varphi); \quad \overline{Y}^{(2)}_{n,o}(\theta, \varphi) = Y^{(2)}_{n,o}(\theta, \varphi) = 0 \tag{41.20}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y}^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi) &= \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} Y^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi) \\ \overline{Y}^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi) &= \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} Y^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi) \end{aligned}\right\} (m = 1, 2, \ldots n) \tag{41.21}$$

и имеющие следующие выражения через полиномы Лежандра $P_n$ $(\cos\theta)$ и присоединенные функции $P_{n,m}(\cos\theta)$

$$Y^{(1)}_{n,o}(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta)\,; \quad Y^{(2)}_{n,o}(\theta, \varphi) = 0 \tag{41.22}$$

и

$$\left.\begin{aligned} Y^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi) &= P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi \\ Y^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi) &= P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi \end{aligned}\right\} (m = 1, 2, \ldots n) \tag{41.23}$$

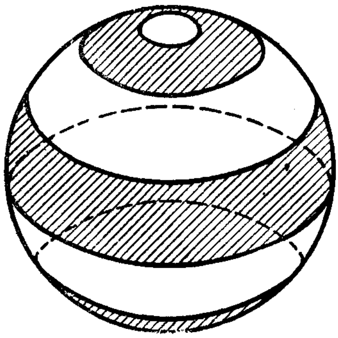
Таким образом, мы построили систему $2n+1$ сферических функций, линейная независимость которых вытекает из того, что входящие в их состав тригонометрические функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ ортогональны в интервале $(-\pi, +\pi)$, а $P_n$ $(\cos\theta)$ и $P_{n,m}$ $(\cos\theta)$ не зависят от $\varphi$ [см. формулы (38.7) и (38.12)].

Легко убедиться в том, что всякая линейная комбинация сферических функций (41.22) и (41.23):

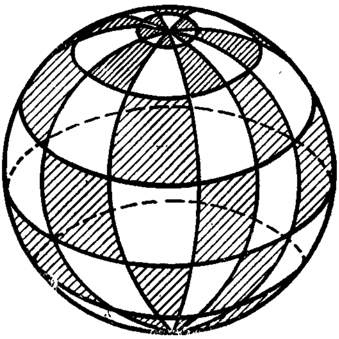
$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{n,m}\cos m\varphi + B_{n,m}\sin m\varphi)\, P_{n,m}(\cos\theta)\,, \tag{41.24}$$

где $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ — постоянные коэффициенты, также представляет собою сферическую функцию.

Так как сферические функции $Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)$ не зависят от $\varphi$, а полином Лежандра $P_n(\cos\theta)$ в интервале $(-1, +1)$ имеет $n$ корней (см. § 37), то поверхность сферы $r=\text{const}$. разделяется по широте на $n+1$ зон, в каждой из которых полином Лежандра $P_n(\cos\theta)$, а следовательно и сферическая функция $Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)$



Черт. 23



Черт. 24

сохраняет знак (черт. 23); по этой причине сферические функции $Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)$ называются *зональными*.

С другой стороны, функции $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ обращаются в нуль на $2m$ меридианах, а присоединенные функции $P_{n,m}(\cos\theta)$ на $n-m$ широтах (см. § 37); поэтому поверхность сферы $r=\text{const}$ разделяется на клетки, в каждой из которых сферические функции $Y^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi)$ и $Y^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi)$, называемые *тессеральными*, сохраняют знак (черт. 24).

Отметим еще, что, при помощи формул Эйлера, связывающих тригонометрические функции с показательной функцией, сферические функции, определяемые формулами (41.22) и (41.23), можно заменить сферическими функциями:

$$\left.\begin{array}{c} P_n(\cos\theta),\ P_{n,m}(\cos\theta)\, e^{m\varphi i},\ P_{n,m}(\cos\theta)\, e^{-m\varphi i} \\ (m = 1, 2, \dots n) \end{array}\right\} \quad (41.25)$$

Применим к сферическим функциям

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^k Y_k(\theta, \varphi) \text{ и } u_l(r, \theta, \varphi) = r^l Y_l(\theta, \varphi) \quad (41.26)$$

формулу Грина*, имея в виду, что направление нормали к сфере совпадает с направлением радиуса этой сферы:

$$\iint\limits_S \left(u_k \frac{\partial u_l}{\partial r} - u_l \frac{\partial u_k}{\partial r}\right) dS = \iiint\limits_v (u_k \Delta u_l - u_l \Delta u_k)\, dv, \quad (41.27)$$

* См. [2], стр. 568.

где $S$ — поверхность сферы, $v$ — ее объем, а $\Delta$ — знак оператора Лапласа.

Но

$$\frac{\partial u_k}{\partial r} = kr^{k-1}\, Y_k(\theta, \varphi); \quad \frac{\partial u_l}{\partial r} = lr^{l-1}\, Y_l(\theta, \varphi);$$

$$\Delta u_k = 0; \ \Delta u_l = 0$$

и формула (41.27), после сокращения на $r^{k+l-1}$, принимает вид:

$$\iint_S [lY_k(\theta, \varphi)\, Y_l(\theta, \varphi) - kY_l(\theta, \varphi)\, Y_k(\theta, \varphi)]\, dS = 0,$$

откуда

$$(l-k) \iint_S Y_k(\theta, \varphi) \cdot Y_l(\theta, \varphi)\, dS = 0$$

и, если

$$l \neq k, \tag{41.28}$$

то

$$\iint_S Y_k(\theta, \varphi) \cdot Y_l(\theta, \varphi)\, dS = 0. \tag{41.29}$$

Формула (41.29) выражает свойство *ортогональности сферических функций различных порядков.*

Легко убедиться, однако, в том, что свойством ортогональности обладают также и сферические функции одного и того же порядка. В самом деле, беря любые две сферические функции из числа определяемых формулами (41.22) и (41.23), и вычисляя от их произведения интеграл по поверхности сферы радиуса, равного единице, мы обязательно придем к интегралу в пределах от 0 до $2\pi$ по переменному $\varphi$, а этот интеграл обязательно обратится в нуль — в силу ортогональности в интервале $(0,\ 2\pi)$ функций

$$1,\ \cos\varphi,\ \cos 2\varphi, \dots \cos n\varphi,\ \sin\varphi,\ \sin 2\varphi, \dots \sin n\varphi.$$

Вычислим теперь интеграл по поверхности сферы радиуса, равного единице, от квадрата сферической функции $Y^{(1)}_{n,0}\ (\theta,\ \varphi)$ [см. формулу (41.22)]:

$$\iint_S [Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)]^2\, dS = \int_0^{2\pi} \left\{\int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\right\} d\varphi,$$

где $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — элемент площади поверхности сферы.

Применяя, далее, подстановку

$$\cos\theta = x; \ -\sin\theta\, d\theta = dx,$$

при которой

если $\theta = 0$, то $x = 1$; если $\theta = \pi$, то $x = -1$,

имеем:

$$\iint_S [Y^{(1)}_{n,o}(\theta, \varphi)]^2 dS = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx \right\} d\varphi$$

и, на основании формулы (37.23),

$$\iint_S [Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)]^2 dS = \frac{2}{2n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\iint_S [Y^{(1)}_{n,0}(\theta, \varphi)]^2 dS = \iint_S [P_n(\cos\theta)]^2 dS = \frac{4\pi}{2n+1}. \tag{41.30}$$

Таким же образом, при помощи (41.23) и формулы (37.27), получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\iint_S [Y^{(1)}_{n,m}(\theta, \varphi)]^2 dS = \iint_S [P_{n,m}(\cos\theta) \cos m\varphi]^2 dS = \\ &\qquad = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ &\iint_S [Y^{(2)}_{n,m}(\theta, \varphi)]^2 dS = \iint_S [P_{n,m}(\cos\theta) \sin m\varphi]^2 dS = \\ &\qquad = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ &\qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{41.31}$$

В заключение укажем, что произвольную функцию $f(\theta, \varphi)$, определенную на поверхности сферы любого данного радиуса, при некоторых условиях можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n0} P_n(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_{n,m}(\cos\theta)], \tag{41.32}$$

где коэффициенты $a_{no}$, $a_{nm}$, $b_{nm}$ ($m=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, 3, \ldots$) определяются по формулам:

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_S f(\theta, \varphi) P_n(\cos\theta)\, dS \tag{41.33}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint\limits_S f(\theta, \varphi)\,P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi\,dS \\ b_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint\limits_S f(\theta, \varphi)\,P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi\,dS \end{aligned}\right\} \qquad (41.34)$$

Вывода формул (41.32), (41.33) и (41.34) мы здесь не приводим, так как вывод этот вполне аналогичен выводу формул, относящихся к разложению произвольной функции в ряд Фурье. Что же касается условий, при которых разложение функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд (41.32) оказывается возможным, то укажем без доказательства, что условия эти сводятся к существованию у функции $f(\theta, \varphi)$ в интервале $(-1, +1)$ непрерывных производных первого и второго порядков.

## § 42. Интегрирование волнового уравнения

В качестве примера на применение сферических (и цилиндрических) функций, мы рассмотрим задачу об интегрировании *волнового уравнения:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U, \qquad (42.1)$$

где

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (42.2)$$

есть оператор Лапласа и

$$a^2 = \text{const}.$$

При этом мы ограничимся тем, что при помощи метода Фурье сведем волновое уравнение (42.1) к дифференциальным уравнениям, решения которых выражаются через элементарные функции и через уже изученные нами специальные функции.

Если, в соответствии с методом Фурье, положим

$$U(t, x, y, z) = T(t)\cdot V(x, y, z), \qquad (42.3)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= T''(t)\,V(x, y, z) \\ \Delta U = T(t)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) &= T(t)\,\Delta V(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (42.4)$$

то волновое уравнение (42.1) приведем к виду:

$$T''(t)\,V(x, y, z) = a^2\,T(t)\,\Delta V(x, y, z)$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{\Delta V(x, y, z)}{V(x, y, z)} .$$

Дробь, стоящая в левой части полученного равенства, зависит от $t$, но не зависит от $x$, $y$, $z$, а дробь, стоящая в его правой части, зависит от $x$, $y$, $z$, но не зависит от $t$. Следовательно, указанные дроби должны быть равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через — $\omega^2$:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2; \quad a^2 \frac{\Delta V(x, y, z)}{V(x, y, z)} = -\omega^2.$$

Таким образом, задача об интегрировании волнового уравнения (42.1) сводится к задаче об интегрировании следующих двух дифференциальных уравнений:

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \qquad (42.5)$$

и

$$\Delta V(x, y, z) + k^2 V(x, y, z) = 0, \qquad (42.6)$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} = \text{const}. \qquad (42.7)$$

Уравнение (42.5) интегрируется в элементарных функциях. Что же касается уравнения (42.6), называемого *уравнением Гельмгольца,* то к нему мы снова применим метод Фурье, перейдя предварительно к сферическим координатам по формулам:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi; \quad y = r \sin\theta \sin\varphi; \quad z = r \cos\theta. \qquad (42.8)$$

Вспоминая выражение оператора Лапласа в сферических координатах*:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}, \qquad (42.9)$$

положим, в соответствии с методом Фурье,

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi), \qquad (42.10)$$

где $Y(\theta, \varphi)$ есть, очевидно, поверхностная сферическая функция.

Замечая, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dR}{dr} Y; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{d^2 R}{dr^2} Y; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = R \frac{\partial Y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = R \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = R \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \end{aligned}\right\} \qquad (42.11)$$

* См. [2], стр. 340.

приводим уравнение Гельмгольца (42.6) к виду:

$$\frac{d^2R}{dr^2}Y+\frac{2}{r}\,\frac{dR}{dr}Y+\frac{1}{r^2}R\,\frac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta R\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R\,\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+k^2RY=0$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{r^2R''+2rR'+k^2r^2R}{R}=-\frac{\dfrac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\,\dfrac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}}{Y}.$$

Дробь, стоящая в левой части полученного равенства, зависит от $r$, но не зависит от $\theta$ и $\varphi$, а дробь, стоящая в его правой части, зависит от $\theta$ и $\varphi$, но не зависит от $r$. Следовательно, указанные дроби должны быть равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $\nu(\nu+1)$:

$$\frac{r^2R''+2rR'+k^2r^2R}{R}=\nu(\nu+1);$$

$$-\frac{\dfrac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\,\dfrac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}}{Y}=\nu(\nu+1),$$

Таким образом, задача об интегрировании уравнения Гельмгольца (42.6) сводится к задаче об интегрировании следующих двух дифференциальных уравнений:

$$r^2R''+2rR'+[k^2r^2-\nu(\nu+1)]R=0 \qquad (42.12)$$

и

$$\frac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\nu(\nu+1)Y=0. \qquad (42.13)$$

Если к уравнению (42.12) применить подстановку

$$R=\frac{y}{\sqrt{r}}=r^{-\frac{1}{2}}y, \qquad (42.14)$$

при которой

$$R'=-\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}y+r^{-\frac{1}{2}}y';\quad R''=\frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}y-r^{-\frac{3}{2}}y'+r^{-\frac{1}{2}}y'',$$

то уравнение (42.12) примет вид:

$$\frac{3}{4}r^{-\frac{1}{2}}y-r^{\frac{1}{2}}y'+r^{\frac{3}{2}}y''-r^{-\frac{1}{2}}y+2r^{\frac{1}{2}}y'+$$

$$+[k^2r^2-\nu(\nu+1)]r^{-\frac{1}{2}}y=0$$

или

$$r^{\frac{3}{2}}y''+r^{\frac{1}{2}}y'+\left[k^2r^2-\nu(\nu+1)-\frac{1}{4}\right]r^{-\frac{1}{2}}y=0.$$

Умножая все члены этого уравнения на $r^{-\frac{3}{2}}$:

$$y''+\frac{1}{r}y'+\left[k^2r^2-\nu(\nu+1)-\frac{1}{4}\right]\frac{1}{r^2}y=0$$

и замечая, что

$$\nu(\nu+1)+\frac{1}{4}=\nu^2+\nu+\frac{1}{4}=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2,$$

получаем окончательно:

$$y''+\frac{1}{r}y'+\left[k^2-\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]y=0. \qquad (42.15)$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (26.2) показывает, что функция $R(r)=\frac{y}{\sqrt{r}}$ может быть выражена через цилиндрические функции порядка $\nu+\frac{1}{2}$ [см. формулу (26.3)], а при целых значениях $\nu$ — через элементарные функции (см. § 21).

К уравнению же (42.13) мы опять применим метод Фурье, полагая, в соответствии с этим методом,

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi). \qquad (42.16)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial Y}{\partial\theta}=\Theta'\,\Phi;\ \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}=\Theta''\,\Phi;\ \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=\Theta\,\Phi'', \qquad (42.17)$$

приводим уравнение (42.13) к виду:

$$\Theta''\,\Phi+\operatorname{ctg}\theta\,\Theta'\,\Phi+\frac{1}{\sin^2\theta}\Theta\Phi''+\nu(\nu+1)\,\Theta\Phi=0$$

или, после разделения переменных,

$$\sin^2\theta\,\frac{\Theta''+\operatorname{ctg}\theta\,\Theta'+\nu(\nu+1)\,\Theta}{\Theta}=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Дробь, стоящая в левой части полученного равенства, зависит от $\theta$, но не зависит от $\varphi$, а дробь, стоящая в его правой части, зависит от $\varphi$, но не зависит от $\theta$. Следовательно, указанные дроби должны быть равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $\mu^2$:

$$\sin^2\theta\,\frac{\Theta''+\operatorname{ctg}\theta\,\Theta'+\nu(\nu+1)\,\Theta}{\Theta}=\mu^2;\quad -\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu^2$$

Таким образом, задача об интегрировании уравнения (42.13) сводится к задаче об интегрировании следующих двух дифференциальных уравнений:

$$\Theta'' + \operatorname{ctg}\theta \cdot \Theta' + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \tag{42.18}$$

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0. \tag{42.19}$$

Уравнение (42.19) интегрируется в элементарных функциях. Что же касается уравнения (42.18), то к нему мы применим подстановку:

$$\cos\theta = x, \tag{42.20}$$

при которой

$$\sin^2\theta = 1 - x^2;\quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\theta = \arccos x;\quad d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{d\theta} = -\frac{d\Theta}{dx}\sqrt{1-x^2};\ \Theta'' = \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(-\frac{d\Theta}{dx}\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= (1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - x\frac{d\Theta}{dx}$$

Тогда уравнение (42.18) примет вид:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0, \tag{42.21}$$

то есть совпадает с уравнением (14.9), откуда следует, что при целых значениях $\nu$ и $\mu$ уравнение (42.18) представляет собою дифференциальное уравнение присоединенных функций.

Найдя общие решения уравнений (42.5), (42.15), (42.18) и (42.19), решение волнового уравнения (42.1), соответствующее заданным граничным и начальным условиям, мы определим при помощи рассуждений, аналогичных примененным в задаче о колебаниях мембраны (см. § 35).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

(Звездочкой отмечены параграфы, для чтения которых требуется знание теории функций комплексного переменного)

Стр.



---

**Дмитрий Сергеевич Кузнецов**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Редактор *Д. А Тальский*
Технический редактор *Л. А. Григорчук*
Корректор *Н. В. Зуева*

---

Сдано в набор 3/VIII-61 г. Подписано к печати 27/II-62 г.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$ 15,5 печ. л. 14,67 уч.-изд. л.
Тираж 16000 Т-00785 Изд. № ФМХ/45 Цена 44 коп.

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 20

---

Типография № 1 Государственного издательства
литературы по строительству, архитектуре
и строительным материалам, г. Владимир

## Замеченные опечатки

| Стр. | Строка | Напечатано | Должно быть |
|---|---|---|---|
| 18 | 8 сверху | $= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{2a-1} =$ | $= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{2a-1}$ |
| 68 | 9 сверху и 12 снизу | $J_{-\nu}(x) =$ | $J_{\nu}(x) =$ |
| 99 | 4 снизу | $\dfrac{(-1)}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)}$ | $\dfrac{(-1)^l}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)}$ |
| 102 | 9 сверху | $\Gamma(\nu+k+12)^{\nu+2k}$ | $\Gamma(\nu+k+1)\,2^{\nu+2k}$ |
| 120 | 1 снизу | $-\pi J_{\nu}\, x \sin\nu\pi -$ | $-\pi J_{\nu}(x)\sin\nu\pi -$ |
| 123 | 10 снизу | $\ln\dfrac{\pi}{\sin[\pi(\nu-k)]\,\Gamma(\nu-k)}\Big)'$ | $\left(\ln\dfrac{\pi}{\sin[\pi(\nu-k)]\,\Gamma(\nu-k)}\right)$ |
| 126 | 4 снизу | $\sin\nu\pi$ | $i\sin\nu\pi$ |
| 151 | 3 сверху | $\lvert t\rvert = e^{c}$ | $\lvert t\rvert = e^{c_2}$ |
| 162 | 15 снизу | $\int\limits_0^\infty e^{-\operatorname{ch} t}\operatorname{ch}\nu t\,dt,$ | $\int\limits_0^\infty e^{-z\operatorname{ch} t}\operatorname{ch}\nu t\,dt,$ |
| 183 | 3 снизу | $= e^{\frac{\pi}{3}i}$ | $= e^{\frac{\pi}{6}i}$ |
| 186 | 1 сверху | $-I_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)$ | $-I_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)$ |
| 217 | 2 снизу | $(t - z^{\nu+2}$ | $(t - z)^{\nu+2}$ |
| 228 | 2 сверху | —постоянные коэффициенты | —постоянные коэффициенты (по отношению к $z$) |
| 228 | 4 сверху | $+\dfrac{B_1}{z^{n+2}}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt + \dfrac{B_2}{z^{n+3}}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt + \cdots$ | $+\dfrac{1}{z^{n+2}}\int\limits_{-1}^{+1}B_1(1-t^2)^n\,dt + \dfrac{1}{z^{n+3}}\int\limits_{-1}^{+1}B_2(1-t^2)^n\,dt +$ |

Зак.